PTSI^2 • Mathématique • Semaine 38 • Colle 01

Programme de colle

- Chapitre 1 : Corps des nombres réels.
- Chapitre 2 : Nombres entiers, itérations.
  Pour l'instant aucun exemple de récurrence forte n'a été faite.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Celui-ci n'est pas exigé pour la première colle. Mais ceux qui ont déjà commencé leur fiches peuvent déjà le ramener.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

Pour cette première colle, on limitera les questions de cours aux items suivants:

1. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Énoncé et démonstration.
2. Présentation de la partie entière (définition).
   Énoncé et démonstration de la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.
3. Présentations des définitions de majorant, minorant (d'une partie de $\mathbb{R}$).
   Énoncé et démonstration de l'équivalence:

   Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

Exercices

- Un exercice utilisant un raisonnement par récurrence (à un ou plusieurs pas) à rédiger proprement.
- D'autres exercices…

Chapter 1 Corps des nombres réels

1.1 Ensembles usuels

§1 Opérations algébriques

- Addition et multiplication. Vocabulaire : loi de composition interne, loi associative, élément neutre, opposé, loi commutative, inverse, distributivité.
- Un produit est nul si, et seulement si au moins une des facteurs est nul.

§2 Les entiers naturels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§3 Les entiers relatifs

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§4 Les nombres rationnels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

§1 Ordre total sur $\mathbb{R}$

- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive et totale.

§2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

§3 Valeur absolue

- Définitions et première propriétés.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

§4 Axiome d'Archimède

§5 Partie entière

- Définition et premières propriétés.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

§6 Partie bornée

- Majorant, minorant. Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
- Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

§7 Plus grand élément, plus petit élément

- Plus grand élément (maximum), plus petit élément (minimum).

1.3 Le premier degré

§1 L'équation $ax + b = 0$

§2 Système linéaire «2×2»

1.4 Puissances, racines

§1 Puissances entières

- Rappels et propriétés calculatoires.

§2 Racines

- Rappels et propriétés calculatoires.

Racine n-ième d'un nombre réel

§3 Second degrée

- Solutions réelles d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1.5 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

- Exemple de résolution de systèmes à deux ou trois inconnues. Opérations sur les lignes. Aucune formalisation n'a été faite.

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

2.1 Nombres entiers

§1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

- Axiomatique.
- Notation $[\![p, q]\!]$.

§2 Le principe de récurrence

- Récurrence «simple»,
- Récurrence à deux pas,
- Récurrence avec prédécesseurs (ou récurrence forte).

§3 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

- Axiomatique.

2.2 Suites définies par une relation de récurrence

§1 Suites arithmétiques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§2 Suites géométriques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§3 Suites arithmético-géométriques

- Définition.
- Les étudiants doivent connaitre une méthode pour étudier une suite arithmético-géométrique (aucune «formule» n'est au programme).

§4 Définition d'une suite par récurrence

Exemples de suites définies par une relation de récurrence:

- $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$,
- $x_{n+1} = f_n\left(x_n\right)$,
- $x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\right)$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 39 • Colle 02

Programme de colle

- Chapitre 1 : Corps des nombres réels.
- Chapitre 2 : Nombres entiers, itérations.
- Chapitre 3 : Arithmétique des entiers.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Celui-ci n'est pas exigé pour la première colle. Mais ceux qui ont déjà commencé leur fiches peuvent déjà le ramener.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

Pour cette première colle, on limitera les questions de cours aux items suivants:

1. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Énoncé et démonstration.

2. Présentation de la partie entière (définition).
Énoncé et démonstration de la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

3. Présentations des définitions de majorant, minorant (d'une partie de $\mathbb{R}$).
Énoncé et démonstration de l'équivalence:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

4. La relation «divise» sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

5. Division euclidienne : définition. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).

6. Tout entier $a \geq 2$ admet au moins un diviseur premier (récurrence forte).

Exercices

- Un exercice utilisant un raisonnement par récurrence (à un ou plusieurs pas) à rédiger proprement.
- D'autres exercices…

Chapter 1 Corps des nombres réels

1.1 Ensembles usuels

§1 Opérations algébriques

- Addition et multiplication. Vocabulaire : loi de composition interne, loi associative, élément neutre, opposé, loi commutative, inverse, distributivité.
- Un produit est nul si, et seulement si au moins une des facteurs est nul.

§2 Les entiers naturels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§3 Les entiers relatifs

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§4 Les nombres rationnels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

§1 Ordre total sur $\mathbb{R}$

- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive et totale.

§2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

§3 Valeur absolue

- Définitions et première propriétés.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

§4 Axiome d'Archimède

§5 Partie entière

- Définition et premières propriétés.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

§6 Partie bornée

- Majorant, minorant. Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
- Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

§7 Plus grand élément, plus petit élément

- Plus grand élément (maximum), plus petit élément (minimum).

1.3 Le premier degré

§1 L'équation $ax + b = 0$

§2 Système linéaire «2×2»

1.4 Puissances, racines

§1 Puissances entières

- Rappels et propriétés calculatoires.

§2 Racines

- Rappels et propriétés calculatoires.

Racine n-ième d'un nombre réel

§3 Second degrée

- Solutions réelles d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1.5 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

- Exemple de résolution de systèmes à deux ou trois inconnues. Opérations sur les lignes. Aucune formalisation n'a été faite.

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

2.1 Nombres entiers

§1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

- Axiomatique.
- Notation $[\![p, q]\!]$.

§2 Le principe de récurrence

- Récurrence «simple»,
- Récurrence à deux pas,
- Récurrence avec prédécesseurs (ou récurrence forte).

§3 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

- Axiomatique.

2.2 Suites définies par une relation de récurrence

§1 Suites arithmétiques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§2 Suites géométriques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§3 Suites arithmético-géométriques

- Définition.
- Les étudiants doivent connaitre une méthode pour étudier une suite arithmético-géométrique (aucune «formule» n'est au programme).

§4 Définition d'une suite par récurrence

Exemples de suites définies par une relation de récurrence:

- $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$,
- $x_{n+1} = f_n\left(x_n\right)$,
- $x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}\right)$.

Chapter 3 Arithmétique des entiers

3.1 Divisibilité

§1 La relation « divise » dans $\mathbb{N}$

- Relation divise. Diviseur, multiple.
- Lien avec $\leq$: si $a \mid b$, alors $b = 0$ ou $a \leq b$.
- La relation $\mid$ sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

§2 Compatibilité avec les opérations algébriques

- Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$, etc...

§3 La relation « divise » dans $\mathbb{Z}$

Adaptation de la définition et des résultats précédents à $\mathbb{Z}$.

3.2 Division euclidienne

§1 Division euclidienne

- Définition.
- b divise a si, et seulement si le reste de la division euclidienne da a par b est nul.

§2 Bases de numération

Cette section n'est pas au programme de mathématique mais de celui d'informatique.

- Définition.
- Exemple de conversion d'une base b à la base 10, de la base 10 à la base b.

3.3 La relation de congruence

§1 La notion de congruence dans $\mathbb{Z}$

- Relation de congruence module n.

§2 Lien avec la division euclidienne

§3 Compatibilité avec les opérations algébriques

3.4 Les nombres premiers

§1 Définition, lemme d'Euclide

- Définition.
- Lemme d'Euclide.

§2 Crible d'Erathosthène

- Tout entier $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ admet au moins un diviseur premier p.
- L'ensemble des nombre premiers est infini.
- Crible d'Erathosthène.

§3 Facteurs premiers d'un entier. Le théorème de décomposition

- Théorème de décomposition (admis)
- Décomposition en facteurs premiers des diviseurs de n.

3.5 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide

§1 Plus grand commun diviseur de deux entiers

- PGCD de deux entiers relatifs. Notation $\text{pgcd}(a, b)$.
- Nombre premiers entre eux (le lemme de Gauss est hors-programme).
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.

§2 Algorithme d'Euclide

- Propriétés $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - kb, b)$, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$ où $r = a \mod b$.
- $\text{pgcd}(ma, mb) = m\,\text{pgcd}(a, b)$. Si $a = da'$ et $b = db'$, alors $\text{pgcd}(a, b) = d$ si, et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.
- Exemple de détermination d'entiers u et v tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ (le théorème de Bézout est hors-programme).

§3 Plus petit commun multiple de deux entiers

- PPCM de deux entiers relatifs. Notation $\text{ppcm}(a, b)$.
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.
- Pour des entiers > 0, relation $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 40 • Colle 03

Programme de colle

- Chapitre 3 : Arithmétique des entiers.
- Chapitre 4 : Logique.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. La relation «divise» sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Division euclidienne : définition. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).
3. Tout entier $a \geq 2$ admet au moins un diviseur premier (récurrence forte).
4. Loi de De Morgan (pour les assertions).

Exercices

- On peut refaire des récurrences (simple, à plusieurs pas, fortes,...). Ça ne fait jamais de mal.
- D'autres exercices…

Chapter 3 Arithmétique des entiers

3.1 Divisibilité

§1 La relation « divise » dans $\mathbb{N}$

- Relation divise. Diviseur, multiple.
- Lien avec $\leq$: si $a \mid b$, alors $b = 0$ ou $a \leq b$.
- La relation $\mid$ sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

§2 Compatibilité avec les opérations algébriques

- Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$, etc...

§3 La relation « divise » dans $\mathbb{Z}$

Adaptation de la définition et des résultats précédents à $\mathbb{Z}$.

3.2 Division euclidienne

§1 Division euclidienne

- Définition.
- b divise a si, et seulement si le reste de la division euclidienne da a par b est nul.

§2 Bases de numération

Cette section n'est pas au programme de mathématique mais de celui d'informatique.

- Définition.
- Exemple de conversion d'une base b à la base 10, de la base 10 à la base b.

3.3 La relation de congruence

§1 La notion de congruence dans $\mathbb{Z}$

- Relation de congruence module n.

§2 Lien avec la division euclidienne

§3 Compatibilité avec les opérations algébriques

3.4 Les nombres premiers

§1 Définition, lemme d'Euclide

- Définition.
- Lemme d'Euclide.

§2 Crible d'Erathosthène

- Tout entier $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ admet au moins un diviseur premier p.
- L'ensemble des nombre premiers est infini.
- Crible d'Erathosthène.

§3 Facteurs premiers d'un entier. Le théorème de décomposition

- Théorème de décomposition (admis)
- Décomposition en facteurs premiers des diviseurs de n.

3.5 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide

§1 Plus grand commun diviseur de deux entiers

- PGCD de deux entiers relatifs. Notation $\mathrm{pgcd}(a, b)$.
- Nombre premiers entre eux (le lemme de Gauss est hors-programme).
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.

§2 Algorithme d'Euclide

- Propriétés $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a - kb, b)$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$ où $r = a \mod b$.
- $\mathrm{pgcd}(ma, mb) = m\,\mathrm{pgcd}(a, b)$. Si $a = da'$ et $b = db'$, alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = d$ si, et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.
- Exemple de détermination d'entiers u et v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$ (le théorème de Bézout est hors-programme).

§3 Plus petit commun multiple de deux entiers

- PPCM de deux entiers relatifs. Notation $\mathrm{ppcm}(a, b)$.
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.
- Pour des entiers > 0, relation $\mathrm{pgcd}(a, b) \times \mathrm{ppcm}(a, b) = ab$.

Chapter 4 La logique des logiciens

Raisonnement et symbolisme mathématiques

4.1 Raisonnement logique

§1 Assertions

- Notion d'assertion, proposition, théorème, démonstration…

§2 Opérations logiques élémentaires

- non P, P ou Q, P et Q.
- Implication, condition nécessaire, condition suffisante...
- Équivalence. Notion de réciproque.

§3 Relations tautologiquement équivalentes

- Assertions tautologiquement équivalentes.
- Loi de De Morgan.
- Contraposée.
- Négation de $P \implies Q$.
- Règle du modus ponens et Règle du modus tollens.

4.2 Ensembles et quantificateurs

§1 Spécialisation et quantification

- Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pseudo quantificateur $\exists!$.

§2 Permutation des quantificateurs

§3 Négation d'une proposition quantifiée

- Négation d'une proposition quantifiée. (notion d'exemple, non-exemple, contre-exemple).

§4 Existence et unicité

- Pseudo quantificateur $\exists!$.

4.3 Ensembles

§1 Éléments d'un ensemble

- Définition naïve des ensembles. Notation $x \in E$, $x \notin E$.
- Égalité entre deux ensembles.
- Ensemble vide, singleton, paire.
- Notation d'un ensemble en extension.

§2 Ensemble défini par une relation

- Notation d'un ensemble en compréhension.

§3 Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

- Inclusion. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique (principe de double inclusion).
- Ensemble des parties d'un ensemble.

4.4 Constructeurs

§1 Intersection et réunion

- Union, intersection. Ensemble disjoints.
- Propriété de l'union et de l'intersection.
- Exemple de démonstration : $A \subset B$ et $C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$.

§2 Différence et complémentaire

- Différence et complémentaire. Loi de De Morgan.

§3 Produits cartésiens

- Notion de couple. Produit cartésien de deux ensembles.
- Notation A^n.

4.5 Exemples de raisonnements et de rédaction

Programme de colle

- Chapitre 4 : Logique.
- Chapitre 5 : vocabulaire relatif aux applications.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Loi de De Morgan (pour les assertions).

2. Composée de deux injections.

3. Composée de deux surjections.

Exercices préparés

Les exercices suivants doivent être revus (ils ont déjà été fait en TD). On pourra poser tout ou partie de ces exercices en guise de question de cours.

Exercice 1 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 2 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Chapter 4 La logique des logiciens

Raisonnement et symbolisme mathématiques

4.1 Raisonnement logique

§1 Assertions

- Notion d'assertion, proposition, théorème, démonstration…

§2 Opérations logiques élémentaires

- non P, P ou Q, P et Q.
- Implication, condition nécessaire, condition suffisante…
- Équivalence. Notion de réciproque.

§3 Relations tautologiquement équivalentes

- Assertions tautologiquement équivalentes.
- Loi de De Morgan.
- Contraposée.
- Négation de $P \implies Q$.
- Règle du modus ponens et Règle du modus tollens.

4.2 Ensembles et quantificateurs

§1 Spécialisation et quantification

- Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pseudo quantificateur $\exists!$.

§2 Permutation des quantificateurs

§3 Négation d'une proposition quantifiée

- Négation d'une proposition quantifiée. (notion d'exemple, non-exemple, contre-exemple).

§4 Existence et unicité

- Pseudo quantificateur $\exists!$.

4.3 Ensembles

§1 Éléments d'un ensemble

- Définition naïve des ensembles. Notation $x \in E$, $x \notin E$.
- Égalité entre deux ensembles.
- Ensemble vide, singleton, paire.
- Notation d'un ensemble en extension.

§2 Ensemble défini par une relation

- Notation d'un ensemble en compréhension.

§3 Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

- Inclusion. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique (principe de double inclusion).
- Ensemble des parties d'un ensemble.

4.4 Constructeurs

§1 Intersection et réunion

- Union, intersection. Ensemble disjoints.
- Propriété de l'union et de l'intersection.
- Exemple de démonstration : $A \subset B$ et $C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$.

§2 Différence et complémentaire

- Différence et complémentaire. Loi de De Morgan.

§3 Produits cartésiens

- Notion de couple. Produit cartésien de deux ensembles.
- Notation A^n.

4.5 Exemples de raisonnements et de rédaction

Chapter 5 Vocabulaire relatif aux applications

5.1 Définition ensembliste d'une application

§1 Notion d'application

- Ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément, antécédent, graphe.
- Ensemble des applications de A dans B, noté $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
- Applications constantes. Application identité de A, notation Id_A.

§2 À propos des fonctions de «définies par morceaux»

§3 Fonctions indicatrices

§4 À propos des fonctions de «plusieurs variables»

5.2 Image directe et image réciproque

§1 Image directe d'une partie par une application

- Image directe d'une partie par une application. Image d'une application notée $\mathrm{Im}(f)$.
- Notion de partie stable, partie invariante par une application. Notion de point fixe.

§2 Image réciproque d'une partie par une application

- Image réciproque d'une partie par une application.

5.3 Opérations sur les applications

§1 Restriction, prolongement

§2 Composée de deux applications

- L'opération $\circ$ est associative.

5.4 Injection, surjection, bijection

§1 Injection

- Application injective ou injection.
- La composée de deux injections est une injection.

§2 Surjection

- Application surjective ou surjection.
- La composée de deux surjections est une surjection.

§3 Bijection

- Application bijective ou bijection.

§4 En résumé

§5 Bijection réciproque d'une bijection

- Application réciproque d'une bijection.
- Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$.
- La composée de deux bijections est une bijection. Réciproque de $g \circ f$.

5.5 Familles

§1 Familles d'éléments d'un ensemble

- Famille d'éléments d'un ensemble A indexée par un ensemble I.

§2 Famille d'ensembles

- Intersection et réunion d'une famille d'ensembles.

§3 Partitions d'un ensemble

Programme de colle

- Chapitre 5 : Vocabulaire relatif aux applications.
- Chapitre 6 : Calculs algébriques.
  Attention : certains n'ont jamais entendu parlé de nombres complexes.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Composée de deux injections.
2. Composée de deux surjections.
3. Somme des termes d'une progression arithmétique.
4. Somme des termes d'une progression géométrique.
5. Formule du binôme de Newton.

Exercices préparés

Les exercices suivants doivent être revus (ils ont déjà été fait en TD). On pourra poser tout ou partie de ces exercices en guise de question de cours.

Exercice 1 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 2 (0.0)
Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Chapter 4 Vocabulaire relatif aux applications

4.1 Définition ensembliste d'une application

§1 Notion d'application

- Ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément, antécédent, graphe.
- Ensemble des applications de A dans B, noté $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
- Applications constantes. Application identité de A, notation Id_A.

§2 À propos des fonctions de «définies par morceaux»

§3 Fonctions indicatrices

§4 À propos des fonctions de «plusieurs variables»

4.2 Image directe et image réciproque

§1 Image directe d'une partie par une application

- Image directe d'une partie par une application. Image d'une application notée $\mathrm{Im}(f)$.
- Notion de partie stable, partie invariante par une application. Notion de point fixe.

§2 Image réciproque d'une partie par une application

- Image réciproque d'une partie par une application.

4.3 Opérations sur les applications

§1 Restriction, prolongement

§2 Composée de deux applications

- L'opération $\circ$ est associative.

4.4 Injection, surjection, bijection

§1 Injection

- Application injective ou injection.
- La composée de deux injections est une injection.

§2 Surjection

- Application surjective ou surjection.
- La composée de deux surjections est une surjection.

§3 Bijection

- Application bijective ou bijection.

§4 En résumé

§5 Bijection réciproque d'une bijection

- Application réciproque d'une bijection.
- Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$.
- La composée de deux bijections est une bijection. Réciproque de $g \circ f$.

4.5 Familles

§1 Familles d'éléments d'un ensemble

- Famille d'éléments d'un ensemble A indexée par un ensemble I.

§2 Famille d'ensembles

- Intersection et réunion d'une famille d'ensembles.

§3 Partitions d'un ensemble

Chapter 5 Calculs algébriques

5.1 Le symbole somme $\sum$

§1 Règles de calcul

- Définition de la notation $\sum_{k=p}^{q} u_k$. Nombres de termes dans une somme. Notion d'indice muet.

§2 Propriétés

- Découpage (relation de Chasles).
- Linéarité.
- Partie réelle et partie imaginaire.

§3 Changement d'indices

- Principe. Exemples.

§4 Simplification télescopiques

5.2 Sommes usuelles

§1 Somme d'une progression arithmétique

§2 Factorisation de $a^n - b^n$

§3 Somme d'une progression géométrique

- Application à la détermination du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

§4 Formule du binôme

- Factorielle. Coefficient binomial d'indices n et p, notation $\binom{n}{p}$.
- Relations entre coefficients binomiaux. Formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton.

§5 Somme de puissances successives

- $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

5.3 Généralisation de la notation $\sum$

§1 Somme d'une famille finie

- Notation $\sum_{i \in I} u_i$ et autres généralisations.

§2 Sommes doubles

- Écriture d'une somme double comme une somme de sommes.

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

- Notation $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$.

§3 Produit de deux sommes finies

- $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} a_i b_j.$

§4 Sommes triangulaires

- Écriture comme une somme de sommes, par exemple $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}.$

5.4 Le symbole produit $\prod$

- Notation $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} u_k$.
- Quelques propriétés.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 45 • Colle 06

Programme de colle

- Chapitre 6 : Calculs algébriques.
  Attention : certains n'ont jamais entendu parlé de nombres complexes.
- Chapitre 7 : Fonction circulaires.
- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.
  Sections 1, 2 et 3 (Définitions, forme algébrique, forme trigo).

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Somme des termes d'une progression arithmétique.

2. Formule du binôme de Newton.

3. Présentations des fonctions arc-bidule : arcsin, arccos, arctan. Définition, propriétés, courbe,...

4. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.

5. Inégalité triangulaire.

6. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).

Chapter 6 Calculs algébriques

6.1 Le symbole somme $\sum$

§1 Règles de calcul

- Définition de la notation $\sum_{k=p}^{q} u_k$. Nombres de termes dans une somme. Notion d'indice muet.

§2 Propriétés

- Découpage (relation de Chasles).
- Linéarité.
- Partie réelle et partie imaginaire.

§3 Changement d'indices

- Principe. Exemples.

§4 Simplification télescopiques

6.2 Sommes usuelles

§1 Somme d'une progression arithmétique

§2 Factorisation de $a^n - b^n$

§3 Somme d'une progression géométrique

- Application à la détermination du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

§4 Formule du binôme

- Factorielle. Coefficient binomial d'indices n et p, notation $\binom{n}{p}$.
- Relations entre coefficients binomiaux. Formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton.

§5 Somme de puissances successives

- $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

6.3 Généralisation de la notation $\sum$

§1 Somme d'une famille finie

- Notation $\sum_{i \in I} u_i$ et autres généralisations.

§2 Sommes doubles

- Écriture d'une somme double comme une somme de sommes.

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

- Notation $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}$.

§3 Produit de deux sommes finies

- $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum\limits_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_i b_j.$

§4 Sommes triangulaires

- Écriture comme une somme de sommes, par exemple $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j}$.

6.4 Le symbole produit $\prod$

- Notation $\prod\limits_{k=p}^{q} u_k$.
- Quelques propriétés.

Chapter 7 Fonctions circulaires

7.1 Fonctions trigonométriques

§1 Le cercle trigonométrique

- Définition graphique de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ sur le cercle trigonométrique.
- Relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $u^2 + v^2 = 1$, alors il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que $u = \cos x$ et $v = \sin x$.
- J'ai parlé un peu de $\operatorname{cotan} x$, mais celui-ci est hors-programme.

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

Valeurs remarquables du premier quadrant

7.2 Formulaire de Trigonométrie

§1 Angles associés

§2 Formules d'addition

§3 Formules de duplication

§4 Formules de Carnot

§5 Formules de l'angle moitié

§6 Formules de Simpson inverses

§7 Formules de Simpson

7.3 Équations trigonométriques

§1 La notion de congruence

- Notation $x \equiv y \pmod{\phi}$. Règles de calculs.

§2 Résolution d'équations trigonométriques

- Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$ et $\tan x = \tan y$.

§3 Principe de superposition des sinusoïdes

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi).$$

7.4 Étude des fonctions trigonométriques

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

§2 Étude de la fonction tangente

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

7.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

§1 La fonction arcsin

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1, 1] \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§2 La fonction $\arccos$

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1,1]\, \cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§3 La fonction $\arctan$

- Définition. Valeurs usuelles.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), limites. Asymptotes et courbe représentative.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$,..., $(a+b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de sin et cos

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance…
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w|$ et $\arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{()2\pi}$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ $(m \in \mathbb{C})$ et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 46 • Colle 07

Programme de colle

- Chapitre 7 : Fonction circulaires.
- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Présentations des fonctions arc-bidule : arcsin, arccos, arctan. Définition, propriétés, courbe,...

2. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.

3. Inégalité triangulaire.

4. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).

5. Racines n-ième de l'unité. Définition, description.

Chapter 7 Fonctions circulaires

7.1 Fonctions trigonométriques

§1 Le cercle trigonométrique

- Définition graphique de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ sur le cercle trigonométrique.
- Relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $u^2 + v^2 = 1$, alors il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que $u = \cos x$ et $v = \sin x$.
- J'ai parlé un peu de $\operatorname{cotan} x$, mais celui-ci est hors-programme.

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

Valeurs remarquables du premier quadrant

7.2 Formulaire de Trigonométrie

§1 Angles associés

§2 Formules d'addition

§3 Formules de duplication

§4 Formules de Carnot

§5 Formules de l'angle moitié

§6 Formules de Simpson inverses

§7 Formules de Simpson

7.3 Équations trigonométriques

§1 La notion de congruence

- Notation $x \equiv y \pmod{\phi}$. Règles de calculs.

§2 Résolution d'équations trigonométriques

- Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$ et $\tan x = \tan y$.

§3 Principe de superposition des sinusoïdes

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \phi).$$

7.4 Étude des fonctions trigonométriques

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

§2 Étude de la fonction tangente

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

7.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

§1 La fonction arcsin

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1, 1] \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§2 La fonction arccos

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1, 1] \cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§3 La fonction arctan

- Définition. Valeurs usuelles.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), limites. Asymptotes et courbe représentative.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a + b)^2$, $(a + b)^3$,..., $(a + b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de $\sin$ **et** $\cos$

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance...
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w|$ et $\arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{()2\pi}$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$) et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 47 • Colle 08

Programme de colle

- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.
- Chapitre 9 : Notions sur les fonctions en analyse.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.
2. Inégalité triangulaire.
3. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).
4. Racines n-ième de l'unité. Définition, description.
5. Si f est monotone et bijective alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.
6. Si f est impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$,..., $(a+b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de sin **et** cos

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance…
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w|$ et $\arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{}2\pi)$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$) et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

Chapter 9 Notions sur les fonctions en analyse

9.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

- Fonction ou application, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément.

§2 Composition de fonctions

§3 Recherche de l'ensemble de définition

- Cas des fonctions en analyse où l'on «cherche» l'ensemble de définition.

9.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

- Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

§2 Transformations élémentaires

- Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

9.3 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

- f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.

§2 Sens de variation

- Monotonie.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et monotone, f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

9.4 Symétries du graphe

§1 Parité, imparité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et impaire, f^{-1} est impaire.

§2 Périodicité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 48 • Colle 09

Programme de colle

- Chapitre 9 : Notions sur les fonctions en analyse.
- Chapitre 10 : Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances.
- Chapitre 11 : Dérivation.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ 10 – 15 minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Si f est monotone et bijective alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

2. Si f est impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.

3. Dérivabilité et dérivée des fonctions arctan, arcsin, arccos.

4. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.

Chapter 8 Notions sur les fonctions en analyse

8.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

- Fonction ou application, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément.

§2 Composition de fonctions

§3 Recherche de l'ensemble de définition

- Cas des fonctions en analyse où l'on «cherche» l'ensemble de définition.

8.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

- Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

§2 Transformations élémentaires

- Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

8.3 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

- f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.

§2 Sens de variation

- Monotonie.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et monotone, f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

8.4 Symétries du graphe

§1 Parité, imparité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et impaire, f^{-1} est impaire.

§2 Périodicité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.

Chapter 9 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

9.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

§1 Vocabulaire

- Fonction polynomiale, degré, racine.

§2 Propriétés

- Continuité, dérivabilité.
- Principe d'indentification.

§3 Fonctions puissance n où n est entier

- Allure générale de la courbe $y = x^n$, positions relatives selon n.

§4 Fonctions rationnelles

- Définition, continuité, dérivabilité.

9.2 Logarithmes, exponentielles

§1 Logarithme népérien

- Définition: ln est l'unique primitive de $]0, +\infty[\, , x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.
- Propriétés algébriques.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), courbe.

§2 Exponentielle népérienne

- Définition (réciproque de ln).
- Propriétés algébriques.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), dérivée (admise) courbe.

§3 Exponentielle de base a

- Définition ($\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$).
- Propriétés algébriques. Notation a^x.
- Constante de Néper.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), dérivée, courbe.

§4 Logarithme de base a

- Hors-programme mais utile en physique et informatique.

9.3 Fonctions puissances

- Fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Étude : limites, dérivée, courbe, positions relatives.

9.4 Fonctions hyperboliques

- Fonctions ch et sh.
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

  $$\operatorname{ch} x \geq 1 \ \text{ et } \ \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \ \text{ et } \ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \ \text{ et } \ \operatorname{sh} x < \frac{e^x}{2} < \operatorname{ch} x \ \text{ et } \ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

  Les formules de trigonométrie hyperbolique sont hors-programme.
- Étude : limites, dérivées, courbes.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors-programme.

Chapter 10 Dérivation

10.1 Dérivée d'une fonction

§1 Définitions

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Opérations sur les dérivées

- Somme, produit, combinaison linéaire.
- Composée.

§4 Fonction affine tangente

- Équation cartésienne de la tangente à la courbe de f.

§5 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

10.2 Étude pratique des fonctions

§1 Caractérisation de la monotonie

- Lien entre variations et signe de la dérivée.

§2 Marche à suivre

- Plan d'étude. On limite les branches infinies aux asymptotes horizontales et verticales.

§3 Exemples d'étude

10.3 Réciproque d'une fonction

§1 Dérivée d'une fonction réciproque

§2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

10.4 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{\phi(t)}$ où $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 49 • Colle 10

Programme de colle

- Chapitre 11 : Dérivation.
- Chapitre 12 : Calcul matriciel élémentaire.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ 10 − 15 minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Dérivabilité et dérivée des fonctions $\arctan$, $\arcsin$, $\arccos$.

2. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.

3. Le produit matriciel est associatif.

4. Transposée. Transposée d'une somme, transposée d'un produit.

5. Matrice inversibles. Produit de deux matrice inversibles. Transposée d'une matrice inversible.

Chapter 11 Dérivation

11.1 Dérivée d'une fonction

§1 Définitions

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Opérations sur les dérivées

- Somme, produit, combinaison linéaire.
- Composée.

§4 Fonction affine tangente

- Équation cartésienne de la tangente à la courbe de f.

§5 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

11.2 Étude pratique des fonctions

§1 Caractérisation de la monotonie

- Lien entre variations et signe de la dérivée.

§2 Marche à suivre

- Plan d'étude. On limite les branches infinies aux asymptotes horizontales et verticales.

§3 Exemples d'étude

11.3 Réciproque d'une fonction

§1 Dérivée d'une fonction réciproque

§2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

11.4 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{\phi(t)}$ où $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

12.1 Matrices

- Matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. coefficient.
- Matrice carrée d'ordre n, termes diagonaux, matrice diagonale.
- Égalité de deux matrices.

12.2 Addition et multiplication par un scalaire

12.3 Multiplication matricielle

12.4 Algèbre des matrices

- Notations $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Commutativité et associativité de l'addition.
- Associativité de la multiplication.
- Distributivité, bilinéarité de la multiplication.
- Matrices nulles, matrices unités ou identités.
- Produit de matrices diagonales.

12.5 Matrices inversibles

§1 Inverse d'une matrice

- Définition, unicité. Aucune méthode de calcul n'a été vue.
- Cas des matrices diagonales.
- Cas des matrices $(2, 2)$: déterminant et formule pour l'inverse (la formule pour l'inverse est hors-programme). Aucune propriété du déterminant n'a été vue.
- Simplification de $AB = AC$ lorsque A est inversible.

§2 Propriété de l'inverse

- Lorsque A, B sont inversibles, inverses de A^{-1}, de λA, de AB.

12.6 Puissances d'une matrice

- Propriété des puissances.
- Binôme de Newton.
- La formule pour $A^r - B^r = \dots$ a été donnée mais est hors-programme.

12.7 Transposée

§1 Transposée d'une matrice

- Définition.

§2 Propriétés de la transposition

- La transposée est involutive et linéaire.
- Transposée d'un produit.
- Transposée d'une matrice inversible.

§3 Matrices symétriques

§4 Matrices antisymétriques

12.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$

§1 Vecteurs

- Notion de matrices colonnes ou vecteurs colonnes.
- Notion de matrices lignes ou vecteurs lignes.

§2 Produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire de v et w est noté $\langle v|w\rangle$ est vaut $v^T w$.
- Propriétés du produit scalaire.

§3 Vecteurs et matrices

- Écriture du produit Ax comme combinaison linéaire des colonne de A.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 50 • Colle 11

Programme de colle

- Chapitre 12 : Calcul matriciel élémentaire.
- Chapitre 15 : Calcul intégral.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Le produit matriciel est associatif.

2. Transposée. Transposée d'une somme, transposée d'un produit.

3. Matrice inversibles. Produit de deux matrice inversibles. Transposée d'une matrice inversible.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

12.1 Matrices

- Matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. coefficient.
- Matrice carrée d'ordre n, termes diagonaux, matrice diagonale.
- Égalité de deux matrices.

12.2 Addition et multiplication par un scalaire

12.3 Multiplication matricielle

12.4 Algèbre des matrices

- Notations $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Commutativité et associativité de l'addition.
- Associativité de la multiplication.
- Distributivité, bilinéarité de la multiplication.
- Matrices nulles, matrices unités ou identités.
- Produit de matrices diagonales.

12.5 Matrices inversibles

§1 Inverse d'une matrice

- Définition, unicité. Aucune méthode de calcul n'a été vue.
- Cas des matrices diagonales.
- Cas des matrices $(2, 2)$: déterminant et formule pour l'inverse (la formule pour l'inverse est hors-programme). Aucune propriété du déterminant n'a été vue.
- Simplification de $AB = AC$ lorsque A est inversible.

§2 Propriété de l'inverse

- Lorsque A, B sont inversibles, inverses de A^{-1}, de λA, de AB.

12.6 Puissances d'une matrice

- Propriété des puissances.
- Binôme de Newton.
- La formule pour $A^r - B^r = \dots$ a été donnée mais est hors-programme.

12.7 Transposée

§1 Transposée d'une matrice

- Définition.

§2 Propriétés de la transposition

- La transposée est involutive et linéaire.
- Transposée d'un produit.
- Transposée d'une matrice inversible.

§3 Matrices symétriques

§4 Matrices antisymétriques

12.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$

§1 Vecteurs

- Notion de matrices colonnes ou vecteurs colonnes.
- Notion de matrices lignes ou vecteurs lignes.

§2 Produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire de v et w est noté $\langle v|w\rangle$ est vaut $v^T w$.
- Propriétés du produit scalaire.

§3 Vecteurs et matrices

- Écriture du produit Ax comme combinaison linéaire des colonne de A.

Chapter 15 Calcul intégral

Les résultats de ce chapitre ne font l'objet d'aucune question de cours. Pour les techniques d'intégration par parties et changement de variables, on se contente de l'aspect calculatoire, sans rappeler les hypothèses de régularité.

- Primitive d'une fonction définie sur un intervalle. Théorème de Newton-Leibniz.
- Intégration par parties.
- Changement de variables.
- Application au calcul de primitives.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 01 • Colle 12

Programme de colle

- Chapitre 15 : Calcul intégral.
- Chapitre 16 : Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Chapitre 17 : Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

2. Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

3. Solutions de l'équation homogènes $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ dans le cas complexe.

Chapter 15 Calcul intégral

Les résultats de ce chapitre ne font l'objet d'aucune question de cours. Pour les techniques d'intégration par parties et changement de variables, on se contente de l'aspect calculatoire, sans rappeler les hypothèses de régularité.

- Primitive d'une fonction définie sur un intervalle. Théorème de Newton-Leibniz.
- Intégration par parties.
- Changement de variables.
- Application au calcul de primitives.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

16.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1.
- Équation homogène associée.
- Solutions, courbes intégrales, solutions maximales.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solutions.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

16.2 Résolution d'une équation différentielle normalisée

§1 Équation différentielle normalisée

§2 Résolution d'une équation homogène normalisée

- Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

§3 Résolution par changement de fonction inconnue

- Méthode pour déterminer une solution «particulière».

§4 Expression des solutions sous forme intégrale

16.3 Problème de Cauchy

- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

§1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

§2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

17.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants. Ordre.
- Équation homogène (associée).
- Solutions, courbe intégrale.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solution (= linéarité).
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

17.2 Résolution d'une équation d'ordre 2

§1 Solutions complexes de l'équation homogène associée

- Polynôme caractéristique.
- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas complexe.

§2 Solutions réelles de l'équation homogène associée

- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas réel.

§3 Cas d'un second membre exponentielle

- Solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme.
- Solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{mt}$.
- Utilisation des nombres complexes pour un second membre de la forme $t \mapsto \cos(mt)$ ou $t \mapsto \sin(mt)$.

§4 Problème de Cauchy

- Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas particulier admis).

§5 Applications

- Régime libre et régime forcé pour un circuit RLC série.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 02 • Colle 13

Programme de colle

- Chapitre 16 : Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Chapitre 17 : Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.
- Chapitre 13 : Système d'équations linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. (Équa-diff d'ordre 1) Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

2. Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

3. Solutions de l'équation homogènes $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ dans le cas complexe.

4. (Systèmes linéaires) Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

16.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1.
- Équation homogène associée.
- Solutions, courbes intégrales, solutions maximales.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solutions.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

16.2 Résolution d'une équation différentielle normalisée

§1 Équation différentielle normalisée

§2 Résolution d'une équation homogène normalisée

- Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

§3 Résolution par changement de fonction inconnue

- Méthode pour déterminer une solution «particulière».

§4 Expression des solutions sous forme intégrale

16.3 Problème de Cauchy

- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

§1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

§2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

17.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants. Ordre.
- Équation homogène (associée).
- Solutions, courbe intégrale.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solution (= linéarité).
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

17.2 Résolution d'une équation d'ordre 2

§1 Solutions complexes de l'équation homogène associée

- Polynôme caractéristique.
- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas complexe.

§2 Solutions réelles de l'équation homogène associée

- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas réel.

§3 Cas d'un second membre exponentielle

- Solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme.
- Solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{mt}$.
- Utilisation des nombres complexes pour un second membre de la forme $t \mapsto \cos(mt)$ ou $t \mapsto \sin(mt)$.

§4 Problème de Cauchy

- Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas particulier admis).

§5 Applications

- Régime libre et régime forcé pour un circuit RLC série.

Chapter 13 Systèmes d'équations linéaires

13.1 Systèmes d'équations linéaires

- Système linéaire de m équations à n inconnues. Coefficients. Solution d'un système.
- Matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires, vecteur des inconnues, vecteur des seconds membres.

13.2 Opérations élémentaires sur les lignes

- Systèmes équivalents.
- Matrice augmentée d'un système.
- Matrices équivalentes par lignes (notation $A \underset{L}{\sim} A'$).
- Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. Lien avec les systèmes.

13.3 Procédé d'élimination de Gauß-Jordan

§1 Présentation de l'algorithme; forme échelonnée réduite

- Algorithme d'élimination de Gauß, de Gauß-Jordan.
- Matrice échelonnée par ligne, matrice échelonnée réduite par ligne.

§2 Systèmes compatibles et incompatibles

- Condition de compatibilité.
- Codage des opérations élémentaires:$L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

§3 Variables libres

- Variables principales (ou liées), variables libres (ou paramètres).

§4 Quelques successions d'opérations élémentaires classiques

- Modification de l'ordre des lignes.
- Addition à une ligne L_i, i fixé, d'une combinaison linéaire des *autres* lignes.
- Remplacer une ligne L_i, i fixé, par une combinaison linéaire des lignes dont le coefficient devant L_i est non nul.
- Ajout d'un multiple d'une ligne L_i, i fixé, aux *autres* lignes.
- Somme et différence de deux lignes.

13.4 Systèmes homogènes et noyau

§1 Ensemble solution

- Un système d'équations linéaires admet aucune, exactement une, ou une infinité de solution(s).

§2 Systèmes homogènes

- Système homogène.
- Système homogène associé.

§3 Noyau d'une matrice

- Noyau d'une matrice.
- Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible ($\mathcal{S} = \{ p + z \mid z \in \ker A \}$).