Sujet d'étude 1

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. **1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
2. **2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$
3. **3.** Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2^n}.$$
4. **4.** La suite (u_n) admet-elle une limite?

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Sujet d'étude 2

Problème 1 *Les feux de l'amour*

Dans ce problème, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des homme et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Définissons la relation «être amoureux»: pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, notons $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$. Ainsi $h \not\heartsuit f$ signifiera que h n'aime pas f.

À titre d'exemple, exprimons la phrase «chaque homme est amoureux d'une femme». Nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f. Cela s'écrit:

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$$

On rappelle qu'en mathématique, «une» signifie «au moins une», et non pas «exactement une».

Dans les exercices qui suivent, il y a généralement plusieurs réponses possibles. Dès que la réponse n'est pas directement évidente, expliquez-la. Par ailleurs, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

Partie A Thème

Écrire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

A1. Tous les hommes aiment toutes les femmes.

A2. Chaque femme aime un unique homme.

A3. Certaines femmes aiment deux hommes.

A4. Il existe une femme amoureuse d'elle-même.

A5. Certains hommes aiment un homme et une femme.

A6. Tout le monde aime tout le monde.

Partie B Version

Que signifient, dans un français naturel, les assertions suivantes?

B1. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f.$

B2. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$

B3. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h.$

B4. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h).$

B5. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \not\heartsuit h).$

B6. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F} h \heartsuit f) \text{ et } (\exists f \in \mathcal{F}, f \heartsuit h).$

Partie C Négations

On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny, et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale (B, J, M, D).

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes, puis écrire la phrase et sa négation à l'aide de quantificateurs.

C1. Brenda aime Mike et Dick.

C2. Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.

C3. Jenny n'aime aucun homme.

C4. Brenda aime une femme.

C5. Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

C6. Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Jenny.

Indication. Dans cet partie, écrire la phrase en quantificateurs vous aidera à écrire la négation. En effet, écrire la négation d'une phrase en quantificateurs est un procédé purement mécanique et facile à retenir (remplacer les $\forall$ par des $\exists$, etc…).

Partie D Implications

D1. Traduire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

(a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.

(b) Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.

(c) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.

(d) Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.
Vous êtes libre du sens précis que vous donnerez au mot «homosexuel» mais vous l'expliquerez dans votre réponse.

D2. Que signifient les assertions suivantes?

(a) $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \implies M \heartsuit f.$

(b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \implies (\forall f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f).$

(c) $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \implies J \not\heartsuit h.$

(d) $\forall h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \implies h = M.$

(e) $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J.$

(f) $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J.$

Partie E Négation d'implication

Écrire la négation des assertions de la partie 4.

Sujet d'étude 3

Problème 1

On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$. On considère les fonctions définies sur E par

$$f_1 : x \mapsto 2\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}; \qquad f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; \qquad f_3 : x \mapsto -\arctan \frac{2x}{1-x^2}.$$

1. Calculer $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas suivants

(a) $\alpha = \frac{59}{5}\pi$;

(b) $\alpha = \frac{84}{5}\pi$;

(c) $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Votre calculatrice a-t-elle l'air d'accord ?

2. Calculer $\arccos(\cos u)$, $\arcsin(\sin u)$ et $\arctan(\tan u)$ pour

(a) $u \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$;

(b) $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$;

(c) $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

(d) $u \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Vérifiez vos formules sur des exemples simples.

3. Ici ϕ est un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que $\cos 2\phi = \dfrac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(b) Montrer de même que $\sin 2\phi = \dfrac{2\tan\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(c) Montrer enfin que $\tan 2\phi = \dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}$.

Dans la suite, on pose $\phi = \arctan x$ *avec* $x \in E$.

4. Calculer $g_1(\phi) = f_1(\tan\phi)$ en utilisant la question **2.**.

5. Calculer, de même $g_2(\phi) = f_2(\tan\phi)$.

6. Calculer, enfin $g_3(\phi) = f_3(\tan\phi)$.

7. Soit $h : x \mapsto f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. On pose $g(\phi) = g_1(\phi) + g_2(\phi) + g_3(\phi)$. En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression de $g(\phi)$ sur les intervalles

$$\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[, \quad \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[, \quad \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

En déduire l'expression de h.

8. Faire un beau dessin de la courbe de h.

9. Résoudre l'équation $h(x) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Sujet d'étude 4

Exercice 1

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

Soit f la fonction qui à nombre complexe z associe, lorsque c'est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.

(b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.

3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

4. L'application f est-elle une surjection de D sur $\mathbb{C}$?

5. L'application f est-elle injective ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha. \tag{1}$$

Sujet d'étude 5

Exercice 1

1. Déterminer le signe de la fonction polynomiale

$$p : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x^3+4x+1 \end{array}.$$

Pour cela, on effectuera une étude des variations de p.
On admettra qu'il existe un unique réel $\beta \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right[$ tel que $p(\beta)=0$.

2. Faire une étude complète de la fonction suivante, définies à l'aide de fonctions trigonométriques.

$$f : x \mapsto \frac{\tan x}{1+2\cos x}.$$

On soignera en particulier les points suivants.

(a) Domaines de définition, de dérivabilité.

(b) Réduction du domaine d'étude autant que possible en utilisant la périodicité et les éléments de symétrie du graphe.

(c) Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique.

(d) Dérivée (utiliser la fonction p pour le signe) et tableau de variations.

(e) Représentation graphique.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de minimiser la quantité $x^y + y^x$, où x et y sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer sa dérivée.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer qu'elle admet un minimum unique, au pont d'abscisse $1/e$ et d'ordonnée $m = e^{-1/e}$.

3. Soient x et y deux réels vérifiant

$$0 < y \leq x < 1.$$

Montrer

$$x^y + y^x \geq m^{y/x} + m\frac{y}{x}. \tag{1}$$

4. Montrer que la fonction $\phi : t \mapsto m^t + mt$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée, ainsi que sa dérivée seconde.

5. Montrer que pour tout $t \in]0,1]$, $m^t + mt > 1$.

6. En déduire

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, x^y + y^x > 1.$$

Sujet d'étude 6

Exercice 1

On considère les matrices suivantes

$$M=\begin{pmatrix}1/4&0&1/2\\1/2&1&0\\1/4&0&1/2\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3/4\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&3&3\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Partie A Calcul des puissances de M.

A1. Déterminer l'expression de D^n, pour tout entier naturel n non nul.

A2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible, et exprimer P^{-1} sous la forme d'un tableau de nombres.

A3. Calculer le produit $P^{-1}MP$.

A4. Montrer par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star, M^n = PD^nP^{-1}.$$

A5. Écrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

Partie B Suites définie par une relation de récurrence

On considère les suite (u_n), (v_n) et (w_n) définie par

$$u_0=0, v_0=0, w_0=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n+2w_n}{4}\\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n+2v_n}{2}\\ w_{n+1} &= \dfrac{u_n+2w_n}{4}\end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note

$$X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}.$$

B1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n.

B2. En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

B3. À l'aide des résultats obtenus à la question **A5**, déterminer alors l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

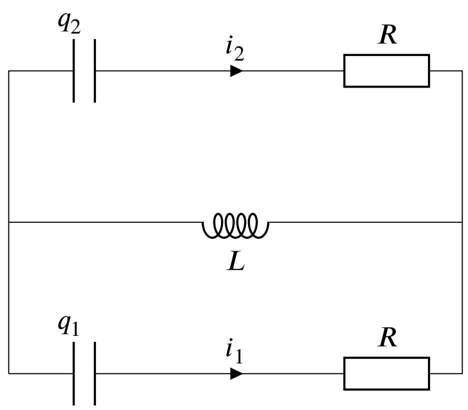
B4. Déterminer la limite des suites (u_n), (v_n) (w_n).

Sujet d'étude 7

Exercice 1 *Deux circuits RLC*

On étudie le circuit électrique suivant. Les deux résistances sont identiques de même que les deux condensateurs. On note R la résistance des résistors, C la capacité des condensateurs, et L l'inductance de la bobine.

Pour tout instant $t \in \mathbb{R}$, on note $q_1(t)$ la chage du premier condensateur, $q_2(t)$ la charge du second condensateur, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les intensités, comme indiqué sur le schéma.



À l'instant initial ($t = 0$) les intensités dans le circuit sont nulles. Pour ne pas rajouter de notations, on notera juste $q_1(0)$ et $q_2(0)$ les charges initiales des condensateurs.

Toute notation supplémentaire devra être clairement définie.

1. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} q_2(t) + CRq_2'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) &= 0 \\ q_1(t) + CRq_1'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) &= 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la matrice A telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_2'(t) \\ q_2''(t) \\ q_1'(t) \\ q_1''(t) \end{pmatrix}.$$

On fixe A dans la suite.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Prouver que P est inversible, et calculer P^{-1}.

4. Calculer $P^{-1}AP$.

5. Déterminer deux fonctions f et g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P^{-1} \begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix},$$

et démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -R & -2L & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}.$$

6. Écrire les équations obtenues sur f et g.

7. Dans le cas où $R = 0$, déterminer q_1 et q_2.

Indication : N'oubliez pas les conditions initiales.

8. *Dans la suite, on suppose* $R \neq 0$.

À quelle condition le système sera-t-il en régime pseudo-périodique?

On suppose qu'on est dans cette situation pour la fin du problème.

9. Déterminer f et g. On pourra noter $\omega = \dfrac{\sqrt{8LC - R^2C^2}}{4LC}$.

10. En déduire q_1 et q_2.

11. Quelle est la limite en $+\infty$ de q_1 et q_2? S'y attendait-on?

12. Que constate-t-on lorsque les deux condensateurs sont initialement à la même charge? Était-ce prévisible?

Sujet d'étude 8

Problème 1 *Théorème de Cesàro, début d'un sujet de la Banque PT*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

(d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.