Chapter 1 Corps des nombres réels

Exercice 1 (1.1)
Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \dfrac{1}{6} = 1$.
2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.
3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.
4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.
5. $5 + (-5) = 0$.
6. $18 \cdot 1 = 18$.
7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.
8. $23 + 6 = 6 + 23$.
9. $3 + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 2 (1.1)
Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.
2. $5 + 0 = 5$.
3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.
4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.
5. $8\,(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

Exercice 3 (1.1)
Soit $x = 18,715151515151515\ldots$ noté $x = 18,7\overline{15}$.
Montrer que $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4 (1.2)
Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Exercice 5 (1.2)
Encadrer $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 6 (1.2)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 1| < |x - 2|$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 7 (1.2)
Résoudre l'inéquation

$$3|x - 2| - 2|x - 1| \geq |x - 4| - \frac{1}{4}(2x - 11). \tag{E}$$

Exercice 8 (1.2)
Résoudre les équations

1. $|x + 1| = 3$;
2. $|x + 5| = |x + 7|$;
3. $|x + 3| = x - 1$;
4. $|x| = x - 1$;
5. $x + 4 = 3|x|$;
6. $|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10|$;
7. $|1 - x| = x - 1$.

Exercice 9 (1.2)
Trouver n, entier naturel, pour que $\dfrac{n}{13} < \dfrac{110}{17} < \dfrac{n+1}{13}$.
Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\dfrac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Exercice 10 (1.2)
Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π.
On rappelle que $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419 71\ldots$.

Exercice 11 (1.2)
1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$.
3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 12 (1.2)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 13 (1.2)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 14 (1.2)
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

1. $]-4, 6]$.
2. $[-1, 0[$.
3. $[3, +\infty[$.
4. $\mathbb{R}^\star$.
5. $\mathbb{Z}$.
6. $\mathbb{N}$.
7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\}$.
8. $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$.
9. $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$.

Exercice 15 (1.2)
Il paraît peu vraisemblable que $\mathbb{N}$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que $\mathbb{N}$ est majoré.

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n+1$ majore n ; puisque chaque élément de $\mathbb{N}$ est majoré, nous pouvons conclure que $\mathbb{N}$ est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Exercice 16 (1.3)
Écrire chacun des produits suivants en utilisant des puissances.

1. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.
2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.
3. $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$.
4. $7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$.
5. $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$.
6. $3 \cdot w \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.
7. $8 \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.
8. $\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t$.

Exercice 17 (1.3)
Développer chaque expression afin de supprimer les puissances.

1. x^3.
2. y^4.
3. $(2b)^3$.
4. $(8c)^2$.
5. $10y^5$.
6. x^2y^3.
7. $2wz^2$.
8. $3a^3b$.

Exercice 18 (1.3)
Simplifier les expressions suivantes.

1. 5^2.
2. 4^3.
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^2$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
5. $(0.25)^3$.
6. $(0.8)^2$.
7. 2^6.
8. 13^2.

Exercice 19 (1.3)
Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{81}$.
2. $\sqrt{64}$.
3. $\sqrt{4}$.
4. $\sqrt{9}$.
5. $\sqrt{100}$.
6. $\sqrt{49}$.
7. $\sqrt{16}$.
8. $\sqrt{36}$.
9. $\sqrt{\frac{1}{9}}$.
10. $\sqrt{\frac{1}{64}}$.
11. $\sqrt{\frac{25}{81}}$.
12. $\sqrt{\frac{49}{100}}$.

Exercice 20 (1.3)
Effectuer les calculs indiqués.

1. $(-7)^2$.
2. $(9)^2$.
3. $(-10)^3$.
4. $(+8)^3$.
5. $(-11)^2$.
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.
7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.
8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.
9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$.
10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.
13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$.
14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.
15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$.
16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1}$.
17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.
18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$.

Exercice 21 (1.3)
Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.

2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.

3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.

4. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.

5. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.

6. $\dfrac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Exercice 22 (1.3)
Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.

3. $2^x + 4^x = 20$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2$.

Exercice 23 (1.3)
On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Exercice 24 (1.3)
Simplifier les expression suivantes.

1. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \sqrt{12}$.

2. $\sqrt{\dfrac{7}{5}} - \sqrt{\dfrac{125}{49}} + \sqrt{\dfrac{25}{7}}$.

3. $\sqrt{4(1-x)^2}$.

4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}$.

5. $\sqrt{32(x+4)^2}$.

6. $\sqrt{3(4 - 2\sqrt{3})}$.

7. $\sqrt{1 - 2\sqrt{x} + x}$.

Exercice 25 (1.3)
Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Exercice 26 (1.3)
Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Exercice 27 (1.3)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$;
2. $2x^2 + 8x + 8 = 0$;
3. $(x-1)^2 = \dfrac{1}{4}$;
4. $x^2 + x + 1 = 0$;
5. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$.

Exercice 28 (1.3)
Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?
Exercice 29 (1.3)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Exercice 30 (1.3)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4 - x| = x$.
2. $|x^2 + x - 3| = |x|$.
3. $|x+2| + |3x-1| = 4$.
4. $\sqrt{1-2x} = |x-7|$.
5. $x|x| = 3x + 2$.
6. $x + 5 = \sqrt{x+11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

Exercice 31 (1.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 32 (1.3)
Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}.$

Exercice 33 (1.3)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + (m - 5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (m - 1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$

Exercice 34 (1.3)
Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}.$

Exercice 35 (1.3)
Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 36 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 37 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

Exercice 38 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array} \right. \tag{3}$$

Exercice 39 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Exercice 40 (1.3)
Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array} \right.$$

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

Exercice 1 (2.1)
Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives et $a > 0$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq a u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq a^n u_0.$$

Exercice 2 (2.1)
Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 (2.1)
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 4 (2.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 7, u_1 = -\frac{1}{10}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n.$$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 5 (2.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n.$$

Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2.$$

Exercice 6 (2.2)
Soit une suite géométrique (u_n). Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison q) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_6 = 96$ et $q = 2$;
2. $u_1 = 72$ et $u_4 = -8/3$;
3. $u_3 = 40$ et $u_7 = 640$.

Exercice 7 (2.2)
La suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$$

   est une suite géométrique.

2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 8 (2.2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 9 (2.2)
Soit $p_0 = 10000$ une population initiale de lapins. On suppose que le taux de reproduciton annuel est de 3 par couple (tous les individus se reproduisent et font partie d'un unique couple). De plus, à la fin de chaque année, la population est diminuée par la vente d'une quantité fixe de 1000 individus. Déterminer la population au bout de 50 ans.

Chapter 3 Arithmétique des entiers

Exercice 1 (3.1)
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6n} - 6^{2n}$.
Exercice 2 (3.1)
Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
2. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
3. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
4. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
5. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 3 (3.1)
Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.
Exercice 4 (3.2)
Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3.
Exercice 5 (3.2)
Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2022} par 11.
Exercice 6 (3.2)
Déterminer les nombres entiers x tels que $x^2 - 2x + 2$ soit divisible par 17.
Exercice 7 (3.3)
Les nombres a, b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
2. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.
3. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
4. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
5. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.

Exercice 8 (3.3)
Résoudre l'équation $xy + 6x - 3y = 40$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Exercice 9 (3.3)
Combien 15! admet-il de diviseurs positifs ?
Exercice 10 (3.4)
Calculer $\text{pgcd}(424, 68)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 11 (3.4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en discutant éventuellement suivant les valeurs de n, le pgcd des entiers suivants.

$$A = 9n^2 + 10n + 1 \qquad \text{et} \qquad B = 9n^2 + 8n - 1.$$

Exercice 12 (3.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer pgcd $\left(5^n - 1, 5^{n+1} - 1\right)$.

Exercice 13 (3.4)
On considère l'équation $(E)\,:\,26x + 15y = 1$ dans laquelle les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour les nombres 26 et 15.
2. En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).
3. Utiliser ce qui précède pour résoudre l'équation $26x + 15y = 4$.

Exercice 14 (3.4)
Écrire une fonction `pgcd`, ayant pour argument deux entiers `a` et `b`, et qui retourne leur pgcd.
On utilisera l'algorithme d'Euclide.

Exercice 15 (3.4)
Écrire une fonction `crible` ayant pour argument un entier `n` et qui retourne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
On utilisera l'algorithme du crible d'Eratosthène.

Chapter 4 La logique des logiciens

Exercice 1 (4.2)
Démontrer que $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.

Exercice 2 (4.2)
Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \implies Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\implies$ ($R \implies S$).

Exercice 3 (4.2)
Écrire les affirmations suivantes en utilisant les symboles $\implies$, $\geq$, $>$, $\neq$ et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit supérieur à 2.
2. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit supérieur à 2.
3. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

Exercice 4 (4.3)
Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
2. Il existe un nombre réel qui est strictement supérieur à son carré.
3. Il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
4. Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

Exercice 5 (4.3)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f ne prend que deux valeurs a et b distinctes.
5. La fonction f est une fonction impaire.

Exercice 6 (4.3)
Vrai ou Faux ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\,(|x| = x \text{ ou } |x| = -x)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x)$.
3. $\exists z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, x = y + z$.

5. $\exists ! x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, y = x^2$.

6. $\exists ! y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \geq 2n$.

8. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \leq 2n$.

Exercice 7 (4.3)
Vrai ou Faux ? Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies \begin{cases} & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ \text{ou} & \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0. \end{cases}$$

Exercice 8 (4.4)
Que peut-on dire de l'ensemble $E = \{ x \in A \mid P(x) \}$ lorsque

1. «$\forall x \in A, P(x)$» ?
2. «$\exists x \in A, P(x)$» ?

Exercice 9 (4.4)
Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $(A \subset C \ \underline{\text{et}}\ B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.
3. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.
4. $(A \subset B) \implies (A \cap C \subset B \cap C)$.
5. $(A \subset B) \implies (A \cup C \subset B \cup C)$.
6. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cup C \subset B \cup D)$.
7. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cap C \subset B \cap D)$.

Exercice 10 (4.4)
Lesquelles des assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $2 \in \mathbb{N}$.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$.
3. $2 \subset \mathbb{N}$.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 11 (4.4)
Écrire en extension l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; z^3 = \overline{z} \right\}.$$

Exercice 12 (4.4)
Soient a, b deux réels avec $a < b$. Prouver par double inclusion que

$$[a,b] = \{ \ (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0,1] \ \} .$$

Exercice 13 (4.4)
Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{ \ 0, 1 \ \}$.

Exercice 14 (4.4)

1. Soit $E = \{ -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \}$.
   Donner une définition de l'ensemble E sans avoir à énumérer ses éléments.
2. Même question avec l'ensemble $F = \{ \ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$.
3. Décrire comme ci-dessus l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

Exercice 15 (4.4)
Quel est le produit cartésien des ensembles

$$A = \{ \ \text{as}, \text{roi}, \text{dame}, \text{valet}, 10, 9, 8, 7 \ \} \qquad \text{et} \qquad B = \{ \ \text{cœur}, \text{carreau}, \text{trèfle}, \text{pique} \ \} .$$

Exercice 16 (4.4)
Soient A et B des ensembles. Donner les rédactions des énoncés du type

1. $P \implies Q$, en distinguant raisonnement direct et par contraposée, par l'absurde.
2. $P \iff Q$.
3. $A \subset B$.
4. $A = B$.
5. $A \cap B = \{ \ 0 \ \}$.
6. $\forall x \in A, P(x)$.
7. $\exists x \in A, P(x)$.
8. $\exists ! x \in A, P(x)$.
9. $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$, où expr_1 et expr_2 sont deux expressions données.
10. $(i) \iff (ii) \iff (iii)$.

Chapter 5 Vocabulaire relatif aux applications

Exercice 1 (5.2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \}$ comme une image réciproque.

Exercice 2 (5.2)
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer

1. $f(2)$,
2. $f(\{ 2 \})$,
3. $f(\{ -1, 0, 1, 2 \})$,
4. $f^{-1}(4)$,
5. $f^{-1}(\{ 4 \})$,
6. $f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})$,
7. $f\left(f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})\right)$,
8. $f^{-1}(f(\{ -1, 0, 1, 2 \}))$,
9. $f([1, 2])$,
10. $f([-1, 4[)$,
11. $f^{-1}(]1, 2])$,
12. $f^{-1}([-1, 4])$,
13. $f(\mathbb{R})$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R})$,
15. $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 3 (5.2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f (sur $\mathbb{R}$).
2. Déterminer (graphiquement) $f([0, 2])$ et $f^{-1}([0, 2])$.

Exercice 4 (5.2)
Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $\phi(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (5.2)
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \left(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3\right) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{ (0, 0, 0) \})$.
2. Soit $P = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + 3c = 0 \right\}$. Déterminer $f^{-1}(P)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$.
4. Soit $\Delta = \{ (t, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Déterminer $f(\Delta)$.
5. Soit $Q = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + c = 0 \right\}$. Déterminer $f(Q)$.

Exercice 6 (5.2)
Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 7 (5.2)
Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 8 (5.4)
Donner, pour chacun des énoncés suivants, une formulation du type «l'application de … vers … qui à tout … associe … est (n'est pas) injective (surjective)».

1. Dans mon quartier, il y a deux personnes qui ont le même modèle de voiture.

2. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.

3. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.

4. Toute ville de France possède au moins une église.

5. Il y a des villes de France qui ont plusieurs églises.

6. Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée réelle.

7. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.

8. On peut avoir $a + b = c + d$ sans que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 9 (5.4)
On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n-1, & n > 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer $g \circ f$.

2. Les applications f et g sont-elles bijectives ? Que dire de $f \circ g$?

Exercice 10 (5.4)
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$.

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2-y^2) \end{array}$.

4. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^3) \end{array}$.

5. $\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^2) \end{array}$.

Exercice 11 (5.4)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. On considère un élément $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{ (u,v) \})$. (Les notations sont-elles correctes ?)

2. f est-elle injective ? surjective ?

3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \right\}$ et ϕ la restriction de f à D. L'application ϕ est-elle injective ?

Exercice 12 (5.4)

1. Une application admet un point fixe s'il existe x tel que $f(x) = x$. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.

2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 13 (5.4)
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{ iy \mid y \in \mathbb{R} \}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

1. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer, selon la valeur du complexe Z le nombre d'antécédents de Z par f.
L'application f est-elle injective ?
L'application f est-elle surjective ?
Lorsque Z possède deux antécédents, que valent leur somme et leur produit ?

4. On note

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| = 1 \right\}, \qquad V_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| < 1 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| > 1 \right\}.$$

(a) Que représentent géométriquement les ensemble $\mathbb{U}$, V_1, V_2 ?

(b) Montrer que $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{U}$.

(c) Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer

$$z_1 z_2 = 1 \implies \left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{U}^2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_1 \times V_2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_2 \times V_1.$$

(d) Démontrer que f réalise une bijection de V_1 sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.
On notera $g: \begin{array}{ccc} V_1 & \to & \mathbb{C} \setminus [-1,1] \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$.

Exercice 14 (5.4)
Soit f une application de E dans E telle que

$$f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E .$$

Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.
Exercice 15 (5.4)
Soient trois ensembles A,B,C et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que g ne l'est pas nécessairement.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que f ne l'est pas nécessairement.
3. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective sans que ni g ni f ne le soit.

Exercice 16 (5.5)
Donner une écriture simple les ensembles suivants.

1. $I_1 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$.
2. $I_2 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$.
3. $I_3 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$.
4. $I_4 = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$.

Chapter 6 Calculs algébriques

Exercice 1 (6.1)
Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Exercice 2 (6.1)
Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$

8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Exercice 3 (6.1)

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 4 (6.1)
En remarquant que l'on peut écrire
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$
où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 5 (6.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 6 (6.1)
Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 7 (6.1)

1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Exercice 8 (6.2)
Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} i.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n.$

5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k.$

6. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} k.$

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} i.$

8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n.$

Exercice 9 (6.2)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta).$$

Exercice 10 (6.2)
Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Exercice 11 (6.2)
Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Exercice 12 (6.2)
Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.

2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.

3. Le terme en x^6 du développement de $(3-4x^2)^5$.

4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{14}$.

Exercice 13 (6.2)
Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4, dans le développement de

$$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^{7}$$

soit égal à 14.

Exercice 14 (6.2)
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Exercice 15 (6.2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Exercice 16 (6.2)
Soit x un réel fixé. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos\left((k-1)x\right).$$

Exercice 17 (6.2)
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

3. Montrer par récurrence que : $\forall a \in \mathbb{N},$ on a $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Exercice 18 (6.2)
Soit une suite arithmétique (u_n), on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$;

2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$;

3. $r = 6$ et $s_5 = 36$;

4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$;

5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$;

6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

Exercice 19 (6.2)
Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 20 (6.3)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$.

4. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} (i+j)$.

5. $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j}$.

6. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j+1}$.

7. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} (j-i)$.

8. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2$.

9. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i^2}{j}$.

Exercice 21 (6.3)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} i + j$.

2. Calculer la somme
$$S_2 = \sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j).$$
On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \max(i,j)$.

Remarque. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note
$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \le j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i,j) = \begin{cases} j & \text{si } i \le j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 22 (6.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Chapter 7 Fonctions circulaires

Exercice 1 (7.1)
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

Exercice 2 (7.2)
Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sachant que $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Exercice 3 (7.2)
Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Exercice 4 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Exercice 5 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6 (7.3)
Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

Exercice 7 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0. \tag{1}$$

Exercice 8 (7.3)
Résoudre l'inéquation

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0. \tag{1}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 9 (7.3)
Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.
2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.
3. La résoudre pour $m = 1$.

Exercice 10 (7.3)
Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \phi) + B$, A, B et ϕ étant des constantes réelles.

Exercice 11 (7.5)
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1 - 2x)$.
2. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \arccos \sqrt{x(4 - x)}$.

Exercice 12 (7.5)
Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos\frac{89\pi}{3}\right).$$

Exercice 13 (7.5)
Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

Exercice 14 (7.5)
Calculer $2\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{7}{25}$.

Exercice 15 (7.5)
Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.
3. Soit $x \in [0, \pi/2]$, que vaut $f(x)$?
4. Soit $x \in [\pi/2, \pi]$, que vaut $f(x)$?
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

6. Résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \pi$.

7. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in I_k$.

Exercice 16 (7.5)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice 15 (7.5).
Exercice 17 (7.5)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice 15 (7.5).
Exercice 18 (7.5)
Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 19 (7.5)
Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Problème 20 (7.5) *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :
   (a) $\arctan(\tan(x)) = x$;
   (b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

   On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Remarque. Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

Exercice 1 (8.1)
Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1 - 2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2 + i)^3$.
6. $z_6 = (1 + i)^2 - (2 - i)^2$.

Exercice 2 (8.1)
Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3 + i)(2 - 3i)(4 + 5i)$.
2. $z_2 = (1 + i)^{10}$.
3. $z_3 = (2 - i)^4$.

Exercice 3 (8.2)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1 + 4i)z + (1 - 2i) = iz + 3$
2. $\dfrac{1 + 3iz}{1 + 3z} = i\dfrac{z + 2}{z - 5}$

Exercice 4 (8.2)
Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Exercice 5 (8.3)
Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1 + i$;
2. $1 - i\sqrt{3}$;
3. i ;
4. $-2\sqrt{3} + 2i$;
5. $2 + i$;
6. 17 ;
7. $-3i$;
8. $-\pi$;
9. $-12 - 5i$;
10. $-5 + 4i$.

Exercice 6 (8.3)
Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 7 (8.3)

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 8 (8.3)

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 9 (8.3)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z - 2| = 3$.
2. $|2z - 1 + i| = 4$.
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.
4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Exercice 10 (8.3) *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 11 (8.3)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
2. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.
3. $1 + i\tan\alpha$.
4. $\cos\alpha + i(1 + \sin\alpha)$.
5. $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.
6. $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\beta + i\sin\beta}$.
7. $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$.
8. $e^{i\beta} + e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Exercice 12 (8.3)

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 13 (8.3)

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Exercice 14 (8.4)
Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.
Exercice 15 (8.4)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0. \tag{1}$$

Exercice 16 (8.4)
Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.
Exercice 17 (8.4)
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Exercice 18 (8.4)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \tag{1}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.
Exercice 19 (8.4)
Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.

2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.

4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Exercice 20 (8.5)
Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$.

Problème 21 (8.5)
Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{2}$$

3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{3}$$

4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{4}$$

5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.

6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$

7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 22 (8.6)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

Chapter 9 Notions sur les fonctions en analyse

Exercice 1 (9.1)

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1+2x^2-x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

Exercice 2 (9.2)

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

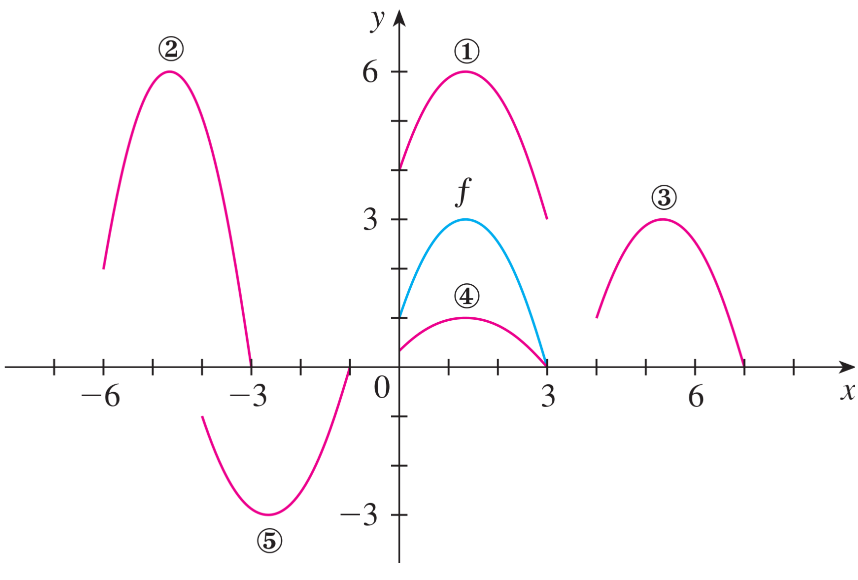
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x) + 3$

(e) $y = -f(x+4)$



Exercice 3 (9.2)

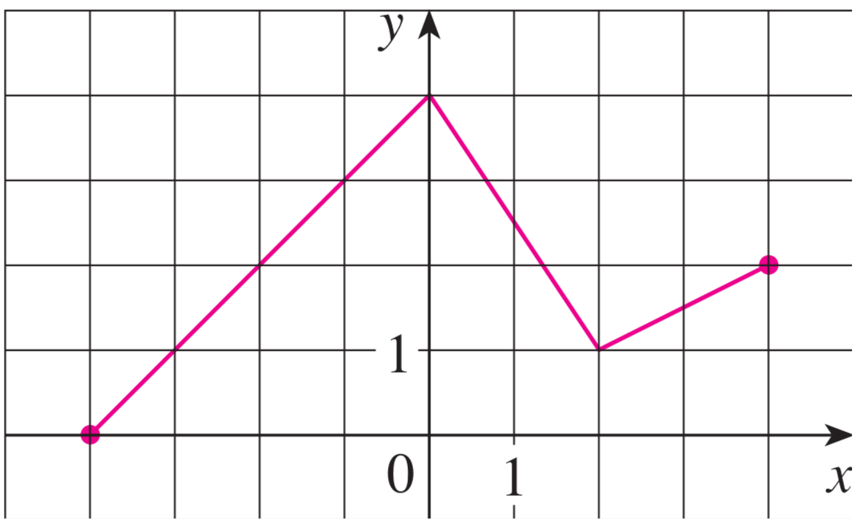
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

(b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 4$



Exercice 4 (9.2)

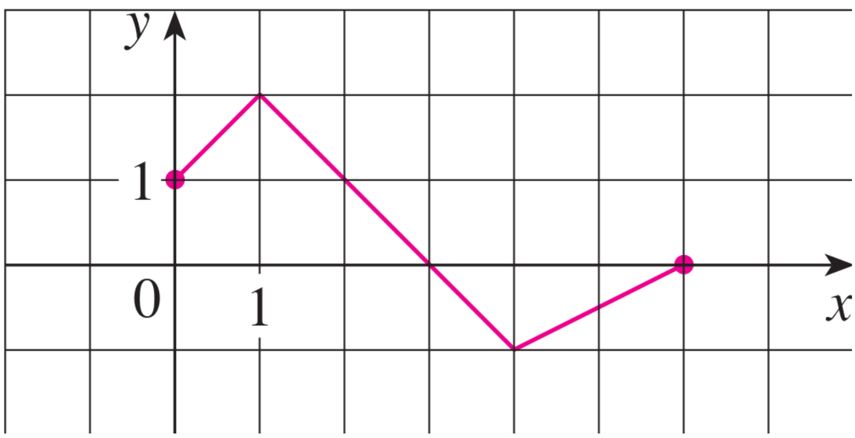
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

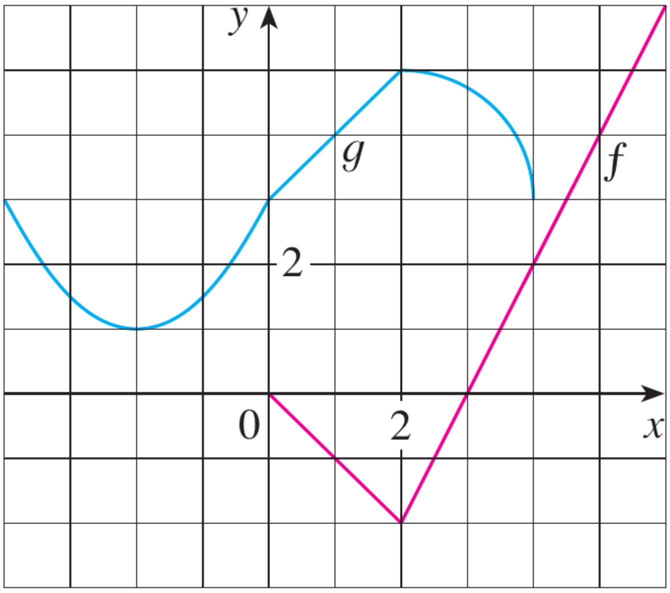
(d) $y = -f(-x)$



Exercice 5 (9.2)

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

1. $f(g(2))$.
2. $(g\circ f)(6)$.
3. $g(f(0))$.
4. $(g\circ g)(-2)$.
5. $(f\circ g)(0)$.
6. $(f\circ f)(4)$.



Exercice 6 (9.3)
La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$?
2. Croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$?
3. Croissante ?
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$?
5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$?
6. Strictement croissante ?

Exercice 7 (9.3)
Vrai ou Faux ?
Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.
4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.
6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.
7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.
8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Exercice 8 (9.3)
Soient A,B,C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g\circ f$ croissante	$g\circ f$ décroissante
g décroissante	$g\circ f$ décroissante	$g\circ f$ croissante

Exercice 9 (9.4)
Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Exercice 10 (9.4)
Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?
Exercice 11 (9.4)
Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$;
2. $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;
3. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Chapter 10 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 1 (10.1)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.
2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$

suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 2 (10.2)
Résoudre

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Exercice 3 (10.2)
Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1|-3\ln(x^2+1)}$.

Exercice 4 (10.2)
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Exercice 5 (10.2)
Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation

$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{1}$$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.
Exercice 6 (10.2)
Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Exercice 7 (10.2)

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\phi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (10.2)

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 9 (10.2)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \leq 2^x$.

2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.

3. $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$.

Exercice 10 (10.2)

Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

Exercice 11 (10.3)

Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Exercice 12 (10.3)

Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x.$$

Exercice 13 (10.4)

Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Exercice 14 (10.4)

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Chapter 11 Calculus

Exercice 1 (11.0)

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 2 (11.0)
Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$
2. $x^{-1/\sqrt{2}}$
3. $(x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1+x}{1-x}$
5. $\dfrac{7x-3}{x+2}$
6. $\log x$
7. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 1}{2x^2 + x - 3}$

Exercice 3 (11.0)
Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\ln(\sin x)$
2. $\arctan(\ln x)$
3. $e^{\cos x}$
4. $\tan^3 x$
5. $\arcsin\left(e^x\right)$
6. $\sin(\ln x)$
7. $\sin(\sin x)$
8. $\arctan(\tan x)$
9. e^{e^x}
10. $\arcsin(\cos x)$

Exercice 4 (11.0)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $f\left(x^2\right)$
2. $f(\sin x)$
3. $f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$
4. $\sin\left(f(x)\right)$
5. $\dfrac{1}{f(x)^{3/2}}$
6. $\ln\left(f\left(e^x\right)\right)$.

Exercice 5 (11.0)
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1, 4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2, 2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2, 8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1, 2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1, 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5, 2)$.

7. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ au point $A(4, 5)$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ au point $A(0, 1)$.

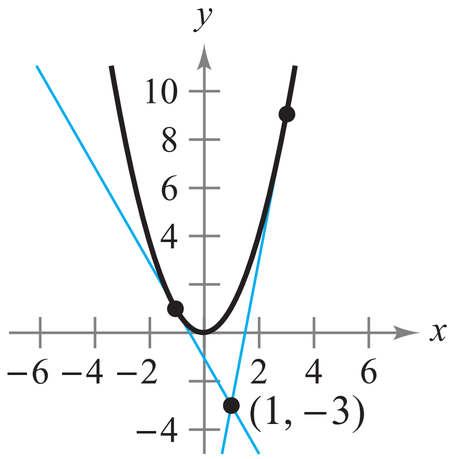
Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Exercice 6 (11.0)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 7 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Exercice 8 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.

Exercice 9 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 10 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 11 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 12 (11.0)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Exercice 13 (11.0)
Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x+1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 14 (11.0)
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2\, \mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.

2. On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2\, \mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.

3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1-e)$.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

Exercice 1 (12.3)
Effectuer les produits des matrices.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (12.3)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont définies ? Calculer les.

1. Ad
2. $AB + C$
3. $A + C^T$
4. $C^T C$
5. BC
6. $d^T B$
7. Cd
8. $d^T d$
9. dd^T.

Exercice 3 (12.3)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel ABC.

Exercice 4 (12.3)
Déterminer, si possible, une matrice A et un scalaire x tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (12.3)
Soit $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer aa^T et $a^T a$.

Exercice 6 (12.4)
Pour toute matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Calculer $\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

On dit que la trace est linéaire.

3. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

4. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

5. Trouver trois matrices A, B, C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(BAC)$.

Exercice 7 (12.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on considère les matrices $A = \left(a_{i,j}\right)$ et J la matrice dont tous les termes sont égaux à 1.

Calculer le produit JAJ.

Exercice 8 (12.4)
Résoudre

$$A(X+B) - (C+D)X = A(A-X) - C(B+X)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (12.5)
Soit A et B deux matrices (n, n) inversibles. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 10 (12.5)
Soit deux matrices A et B telles que A et AB soient inversibles. On suppose

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}. \tag{1}$$

Déterminer B.

Exercice 11 (12.5)
Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système de quatre équations donné par l'équation matricielle $BC = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier alors que B est inversible en utilisant la définition de matrice inverse.

3. Vérifier à nouveau votre solution en calculant B^{-1} à l'aide du déterminant.

Exercice 12 (12.5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice unité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13 (12.5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 14 (12.6)

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (12.6)

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = I_3 + B$, calculer les puissances de A.

Exercice 16 (12.6)

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_p$.

1. Démontrer qu'il existe deux suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_nA + b_nI_p$.

2. En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, vérifier que $X_{n+1} = BX_n$ pour une certaine matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

   On suppose que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1}BP$ est diagonale ; les coefficients de cette dernière seront exprimés uniquement en fonction de r_1 et r_2.

4. En déduire une expression simple de a_n et b_n en fonction de n, r_1 et r_2.

Exercice 17 (12.7)

Résoudre l'équation d'inconnue A

$$\left(5A^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)^T = 3A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1}$$

Exercice 18 (12.7)
Déterminer la matrice A si

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 (12.7)
Soit A un matrice (m, n) et B une matrice (n, n). Simplifier l'expression

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1} A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1}$$

en supposant que les matrices inverses apparaissant dans l'expression sont bien définies.

Exercice 20 (12.7)
Soit A une matrice carrée (n, n).

1. Montrer que la matrice $A + A^T$ est symétrique et que la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.

2. Montrer que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 21 (12.7)

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ un matrice (m, n) sur le corps $\mathbb{R}$. Calculer $\operatorname{Tr}\left(AA^T\right)$. En déduire

$$AA^T = 0 \implies A = 0 \text{ et } A^T = 0.$$

2. Les matrices A, B, et C étant de dimensions convenables, prouver

$$BAA^T = CAA^T \implies BA = CA.$$

On se ramènera à la propriété précédente.

Exercice 22 (12.7)
Soit B une matrice (m, k). Montrer que la matrice $B^T B$ est une matrice symétrique (k, k).

Chapter 13 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 (13.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 2×2. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.
Exercice 2 (13.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 3×3. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.
Exercice 3 (13.3)
Écrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants. Puis résoudre le système en réduisant chacune des matrices sous forme échelonnée réduite.

1. $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =-3 \\ -3x & +4y & -z & =2 \\ x & -3y & -2z & =7 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +3z & =4 \\ x & +y & -z & =1 \\ 5x & +2y & & =7. \end{array}\right.$$

Interpréter géométriquement chacune des solutions précédente comme l'intersection de plans.
Exercice 4 (13.3)
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & -3z & =0 \\ 3x & -2y & +10z & =0 \\ -2x & +3y & -5z & =0 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & -3z & =6 \\ 3x & -2y & +10z & =-10 \\ -2x & +3y & -5z & =9. \end{array}\right.$$

Exercice 5 (13.3)
Déterminer une représentation paramétrique de droite intersection des plan d'équation cartésienne

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{et} \qquad x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Quelle est l'intersection de ces deux plan et du plan d'équation cartésienne

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \text{ ?}$$

Exercice 6 (13.3)

1. Résoudre le système d'équations $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

en utilisant le procédé d'élimination de Gauß-Jordan.

2. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + tv$, où $t \in \mathbb{R}$.

3. Vérifier votre solution en calculant Ap et Av.

4. Déterminer une matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à A. En utilisant cette forme réduite, répondre aux questions suivantes.

(a) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ est incompatible?

(b) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ a une unique solution?

Exercice 7 (13.3)

Déterminer la forme échelonnée réduite par ligne de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si C est la *matrice augmentée* d'un système d'équations $Ax = b$, $C = (A|b)$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

2. Si C est la *matrice des coefficients* d'un système homogène d'équations, $Cx = 0$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

3. Soit $w = (1, 0, 1, 1, 1)^T$. Déterminer d tel que $Cw = d$. En déduire les solutions du système $Cx = d$.

Exercice 8 (13.4)

Déterminer le noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de B. Calculer $d = c_1 + 2c_2 - c_3$. En déduire les solutions du système $Bx = d$.

Exercice 9 (13.4)

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Déterminer les solutions du système d'équations $Ax = b$.

Exercice 10 (13.4)

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 2 \end{array} \right. \tag{1}$$

Exercice 11 (13.4)

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Exercice 12 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 13 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 14 (13.4)
Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}.$

Exercice 15 (13.4)
Déterminer les vecteurs colonnes b de manière à ce que le système $Ax = b$ soit compatible où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 16 (13.4)
Déterminer la forme générale des solutions du système suivant en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 & = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 & = 5. \end{cases}$$

Écrire les solutions sous forme vectorielle.

Exercice 17 (13.4)
Sachant que la matrice ci-dessous est échelonnée réduite en ligne, déterminer les coefficients manquants (notés $*$). Remplacer chaque $*$ devant être nul par 0, chaque $*$ devant être 1 par 1. Remplacer tous les $*$ qui ne doivent pas être 0 ou 1 par un 2.

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, déterminer les solutions de ce système sous forme vectorielle.

Si C est équivalente par ligne une matrice B, déterminer les solutions du système $Bx = 0$.

Exercice 18 (13.4)
Donner la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le système homogène $Bx = 0$. Quel est son nombre d'équations et son nombre d'inconnues? Admet-t-il une solution non triviale? Dans ce cas, résoudre $Bx = 0$.

2. Existe-t-il un vecteur $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible? Déterminer un tel vecteur b si il existe et vérifier que le système $Bx = b$ est incompatible.

3. Déterminer un vecteur *non nul* $d \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = d$ soit compatible. Puis déterminer la solution générale du système $Bx = d$.

Exercice 19 (13.4)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Écrire le système d'équations linéaires $Ax = 6x$ et déterminer ses solutions.
Exercice 20 (13.4)
Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation que les coefficients a, b, c, d du vecteur v doivent vérifier afin que le système d'équation $Bx = v$ soit compatible.

Si $Bx = v$ est compatible, y a-t-il unicité de la solution?
Exercice 21 (13.4)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$

Exercice 22 (13.4)
Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2 y = m \end{cases}.$

Exercice 23 (13.4)
Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant suivant les valeurs du paramètre m.

$$(S) : \begin{cases} 2mx & +y & +z & = 2 \\ x & +2my & +z & = 4m \\ x & +y & +2mz & = 2m^2. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 24 (13.4)
Trouver les valeurs du réel a tel que le système

$$\begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ 2x & +3y & +az & = 3 \\ x & +ay & +3z & = 2 \end{cases} \tag{1}$$

ait

1. aucune solution ;
2. une solution unique ;
3. plusieurs solutions.

Problème 25 (13.4)
Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel k, on désigne par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial «k parmi n» et on rappelle que, par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.
On cherche à calculer les trois sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ 0 \leq 3p \leq n}} \binom{n}{3p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$
$$S_2 = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ 0 \leq 3p+1 \leq n}} \binom{n}{3p+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$
$$S_3 = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ 0 \leq 3p+2 \leq n}} \binom{n}{3p+2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$$

Notons que, compte tenu de la convention rappelée ci-dessus, ces trois sommes sont bien finies.

1. On suppose, *dans cette question uniquement*, que $n = 7$. Calculer alors S_1, S_2 et S_3.
2. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$ en fonction de n.
3. On rappelle que l'on note $j = e^{2i\pi/3}$.
   (a) Rappeler, en les justifiant, les expressions de $1 + j + j^2$ et $1 + j^2 + j^4$.
   (b) Déterminer les formes trigonométriques de $j + 1$, de $\bar{j} + 1$, de $j - 1$ et de $\bar{j} - 1$.

(c) En utilisant la formule du binôme, exprimer $(1+j)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.

(d) Exprimer $\left(1+\bar{j}\right)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.

4. En déduire trois complexes α, β, γ dépendant de n tels que

$$\begin{cases} S_1 & + & S_2 & + & S_3 & = & \alpha \\ S_1 & + & jS_2 & + & j^2 S_3 & = & \beta \\ S_1 & + & j^2 S_2 & + & jS_3 & = & \gamma. \end{cases}$$

5. Déterminer les expressions de S_1, S_2 et S_3 en fonction de n (simplifier les résultats obtenus).

Chapter 14 Matrices inversibles

Exercice 1 (14.1)
Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (14.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si possible l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions du système $Ax = b$. Déterminer les solutions du système $Bx = b$.

Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ soit incompatible ? Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Bx = d$ soit incompatible ? Dans chaque cas, justifier votre réponse et déterminer un tel vecteur d si il existe.

Exercice 3 (14.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

est équivalente par lignes à la matrice unité I_3. Écrire A comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 4 (14.1)
À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer, si possible, les inverses des matrice suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice C est-elle une matrice élémentaire? Si «oui», quelle est l'opération élémentaire correspondante? Si «non», l'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 5 (14.1)
Étant donné un système d'équations $Ax = b$ avec différente valeurs de b, il est souvent plus rapide de déterminer A^{-1}, si elle existe, afin de déterminer les solutions avec la relation $x = A^{-1}b$.

Utiliser cette méthode pour résoudre $Ax = b_r$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et chacun de vecteurs b_r, $r = 1, 2, 3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier vos solutions.

Exercice 6 (14.1)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7 (14.1)
Soit A et B deux matrices (n, n).

Montrer que si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Exercice 8 (14.1)
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple, calculer $X^T AX$.
2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 9 (14.1)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de calculer A^n.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis PAP^{-1}.

2. En déduire A^n.

Exercice 10 (14.1) *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{\, 1, 2, \dots, n \,\}\,, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Problème 11 (14.1)
On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible.
La matrice A est-elle inversible?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

5. Exprimer A^{-1}, puis A^{-n} pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P, P^{-1} et D^{-1}.
Écrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Chapter 15 Calcul intégral

Exercice 1 (15.0)
Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$.
4. $y = (3 - x)\sqrt{x}$, $y = 0$.
5. $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$.
6. $y = 1 - x^4$, $y = 0$.
7. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.
8. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Exercice 2 (15.0)
Vérifier les relations suivantes

1. $\displaystyle\int -\frac{6}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^3} + C$.
2. $\displaystyle\int 8x^3 + \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C$.
3. $\displaystyle\int (x-4)(x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C$.
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}} = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C$.

Exercice 3 (15.0)
Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (15.0)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.
Exercice 5 (15.0)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.
Exercice 6 (15.0)
Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
6. $f(x) = -\frac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
7. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.
17. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7 (15.0)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1 + t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 8 (15.0)
Utiliser une intégration par parties pour déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (4x+7)e^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x\cos 4x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 (15.0)
Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
5. $\int_0^{1/2} \arccos x\,\mathrm{d}x$.
6. $\int_0^1 x\arcsin x^2\,\mathrm{d}x$.
7. $\int_0^1 e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.
8. $\int_0^2 e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.
9. $\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$.
10. $\int_0^1 \ln\left(4+x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 (15.0)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 11 (15.0)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$
2. Déduire I_n en fonction de n.

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Exercice 1 (16.0)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $y'(t) - \dfrac{1}{1+t^2}y(t) = 0$, sur $I = \mathbb{R}$.
2. $(t^2-1)y'(t) + ty(t) = 0$, sur $I =]-1, 1[$.
3. $\cos(t)y'(t) - \sin(t)y(t) = 0$, sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 (16.0)
Soit l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x}y(x) = 2\sin x. \tag{E}$$

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).
3. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie $h(0) = 1$.

Exercice 3 (16.0)
Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{3}{2t}y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \in]0, +\infty[. \tag{E}$$

Exercice 4 (16.0)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1. $ty'(t) - 2y(t) = t^3e^t$ sur $]0, +\infty[$.
2. $ty'(t) - y(t) = \ln t$.
3. $2y'(t) + ty(t) = t^3$.

Exercice 5 (16.0)
Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante, avec condition initiale

$$xy' - 2y = x^2\ln x \quad \text{et} \quad y(\mathrm{e}) = 0. \tag{1}$$

Exercice 6 (16.0)
Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}. \tag{E}$$

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Exercice 1 (17.2)
Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) - 2y(t) = \mathrm{ch}(2t). \tag{E}$$

Exercice 2 (17.2)
Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = 8\sin(2x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 3 (17.2)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = 4.$

2. $y'(t) + y(t) = 2t + 3.$

3. $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t).$

4. $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t).$

5. $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t).$

Exercice 4 (17.2)
Soit f une fonction non nulle et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, f(t+u) = f(t)f(u). \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f : t \mapsto e^{at}$.

Remarque. L'équation (1) est une **équation fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'inconnue est une fonction.

Exercice 5 (17.3)
Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$

3. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 6 (17.3)
On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t + \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Déterminer sous la forme $y_1 : t \mapsto (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, une solution particulière réelle de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t \tag{E_1}$$

3. Déterminer une solution particulière complexe y_2 de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{it} \tag{E_2}$$

4. En déduire une solution particulière réelle y_3 de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E_3}$$

5. Utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution particulière réelle y_0 de (E).

6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7 (17.3)
Résoudre le problème de Cauchy, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= \cos(x) \qquad (E)\\ y(0) &= 1\\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 8 (17.3)
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes

1. $y''(t) - y(t) = t^3 + t^2$.
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$.
3. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(mt)$ où $m \in \mathbb{R}$.
4. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^3e^t + 2\cos t + (t^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 9 (17.3)
Résoudre les équations différentielles

1. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t)$;
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(2t)$.
3. $y''(t) + y(t) = \cos^3(t)$;

Exercice 10 (17.3)
Déterminer les solutions réelles du système

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}.$$

Exercice 11 (17.3)
On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{E}$$

1. On pose $z(t) = y(t)^2$. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle simple (E').

2. Résoudre l'équation (E).

Chapter 18 Suites de nombres réels et complexes

Exercice 1 (18.2)

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 2 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 3 (18.2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{2n^2-1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ donné.

Exercice 4 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (18.2)

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice 7 (18.2)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers ℓ.

2. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2022\epsilon$.

3. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \epsilon$.

4. $\forall \epsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \epsilon$.

5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}$.

Exercice 8 (18.2)

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 9 (18.4)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Exercice 10 (18.4)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 11 (18.4)
Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 12 (18.4)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 13 (18.4)
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 14 (18.4)
Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq k u_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 15 (18.4)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 16 (18.4)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 17 (18.5)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Exercice 18 (18.5)
On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique.

2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 19 (18.5)
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{7}{9}\left|u_n - \ell\right|$.
4. Conclure.

Exercice 20 (18.5)
Soit u et v deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 21 (18.5)
Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Exercice 22 (18.5)
Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;
5. $u_n = (-1)^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}$.

Exercice 23 (18.5)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$
En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.
2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Problème 24 (18.7)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - 1\right| \leq \left|v_n - 2\right| \text{ et } \left|v_{n+1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

3. Déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Problème 25 (18.7) *Théorème de Cesàro, début d'un sujet de la Banque PT*
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

2. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

3. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

4. Conclure.

Chapter 19 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (19.1)
Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0,1[$,
2. $[0,1[$,
3. $]1,+\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \}$,
7. $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \}$.

Exercice 2 (19.1)
Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

Exercice 3 (19.1)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 4 (19.1)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 5 (19.1)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter : $x \in A + B \iff \cdots$.
2. Montrer que $A + B$ est non vide est majorée.
3. Déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 6 (19.2)
Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

Exercice 7 (19.2)
Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (19.2)
Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 9 (19.2)
Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est convergente.

Exercice 10 (19.2)

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n).

Exercice 11 (19.2)
Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 12 (19.2)
Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.
3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 13 (19.2)
Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 14 (19.2)

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

Remarque. Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 15 (19.2)
Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 16 (19.2)
Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 17 (19.2)
Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 18 (19.2)
Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.
4. Calculer $u_n v_n$. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Exercice 19 (19.2)
Soit $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont monotones.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left|u_{2n} - u_{2n-1}\right| \text{ et } \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$
5. Que dire des suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$? Conclure que $\left(u_n\right)$ est convergente.

Exercice 20 (19.2)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.
2. Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
4. Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Problème 21 (19.3)
On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right); \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

(a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

(b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$

(c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :

$$m \leqslant M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n).

Chapter 20 Polynômes

Exercice 1 (20.6)
Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.
2. $X^3 + X + 2$ par $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$.
3. $4X^7 + 9X^5 + 3X^4 + 2X + 1$ par X^3.
4. $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.
5. $X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 2$ par $X^3 + X + 1$.
6. $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ par $X^3 + X + 1$.
7. $X^5 - X^3 + X^2$ par X^3.
8. $X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X + 1$ par $X^2 - 1$.

Exercice 2 (20.6)
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que le polynôme $B = X^2 + 2$ divise $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 3 (20.6)
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 (20.6)
Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X - 2)(X - 3)$.
3. Déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 5 (20.6)
Soit $A = X^3 + 1$. Déterminer quatre diviseurs de A dans $\mathbb{R}[X]$ ayant des degrés deux à deux distincts.

Exercice 6 (20.6)

1. Montrer que 2 est racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.
2. Quel est son ordre ?
3. Quelles sont les autres racines de P ?
4. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. À quelle condition Q divise-t-il P ?

Exercice 7 (20.6)
On considère le polynôme
$$P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1.$$
Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 (20.6)
Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 + 5X^2 - 8X - 48$ sachant qu'il admet deux racines distinctes dont la somme est égale à -1.

Exercice 9 (20.6)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$,

2. $X^2P'' + 2XP' - P = 0$.

Exercice 10 (20.6)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère le polynôme $P = X^n + 1$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.

Exercice 11 (20.6)
Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.

Exercice 12 (20.6)
On considère le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}.$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13 (20.6)
Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\left(A - I_2\right)^2$.

2. En déduire A^{100}.

Exercice 14 (20.6)
Soit $P = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$.

Exercice 15 (20.6)
Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1. Montrer que si $|P(i)| < 1$, alors P admet au moins une racine complexe non réelle.

Exercice 16 (20.6)
Soient p et q des élément de $\mathbb{K}$. Montrer que le polynôme $X^3 - 3pX + 2q$ admet une racine multiple si et seulement si $p^3 = q^2$.

Exercice 17 (20.6)

1. Trouver les coefficients a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1, 2 \}, \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

et en déduire

$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \, dx.$$

2. Trouver les coefficients a, b, c, d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}, \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

et en déduire

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} \, dx.$$

3. Trouver les coefficients a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}, \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

et en déduire

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, dx.$$

Exercice 18 (20.6)

On cherche à calculer $I = \int_1^2 \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} \, dx$.

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5} + \frac{dx+e}{\left(x^2+2x+5\right)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Chapter 21 Espaces vectoriels

Exercice 1 (21.1)
Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $x = (7, \alpha, -6) \in \mathbb{R}^3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $a = (2, -1, 3)$ et $b = (1, 3, 7)$.

Exercice 2 (21.2)
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z = y = 3x \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z + y = 3x \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; zy = 3x \right\}, \qquad S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; xyz = 0 \right\}.$$

Donner une démonstration ou un contre-exemple pour justifier votre réponse.

Exercice 3 (21.2)
Soit A une matrice (n, n) et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire fixé. Montrer que l'ensemble

$$S = \{ \; x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \; \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 (21.2)
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

2. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 5 (21.2)
Soit $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication externe usuelle (point par point).

1. Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des sous-espace vectoriel de F?

$$S_1 = \{ \; f \in F \mid f(0) = 1 \; \}, \qquad S_2 = \{ \; f \in F \mid f(1) = 0 \; \}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$S_3 = \left\{ \; f \in F \;\middle|\; f \text{ est dérivable } \text{ et } f' - f = 0 \; \right\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 6 (21.2)
Soit U et V deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.
3. Donner un exemple de sous-espace U et V de $\mathbb{R}^3$ qui illustre le fait que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel, mais que $U \cup V$ ne l'est pas.

Exercice 7 (21.2)
Montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x + \phi) \right\}.$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 8 (21.3)
On considère les vecteur suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est combinaison linéaire de v_1 et v_2 et expliciter cette combinaison linéaire. Montrer que w n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. Comparer les quatres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\operatorname{Vect}\left\{ v_1, v_2 \right\} \qquad \operatorname{Vect}\left\{ v_1, v_2, u \right\} \qquad \operatorname{Vect}\left\{ v_1, v_2, w \right\} \qquad \mathbb{R}^3.$$

3. Montrer que l'ensemble $\left\{ v_1, v_2, u, w \right\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Montrer également que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ peut être exprimer comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w d'une infinité de manières différentes.

Exercice 9 (21.3)
Soit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Expliquer la différence entre les ensembles

$$A = \{ v, w \} \qquad \text{et} \qquad B = \operatorname{Vect}\{ v, w \}.$$

Exercice 10 (21.3)
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (2, -1, 1), \qquad a = (1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad b = (0, 1, 1).$$

Démontrer que $\operatorname{Vect}(u, v) = \operatorname{Vect}(a, b)$.

Exercice 11 (21.3)
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

- en utilisant la définition (ou caractérisation) d'un sous-espace vectoriel ;
- en les décrivant sous la forme $\operatorname{Vect}\left(v_1, \ldots, v_k\right)$;
- en les décrivant comme le noyau d'une matrice.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y = 0 \right\}$.

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - y = 0 \right\}$.

3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

tbeginexercise

Exercice 12 (21.3)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- en utilisant la définition (ou caractérisation) d'un sous-espace vectoriel ;
- en les décrivant sous la forme Vect $\left(v_1, \dots, v_k\right)$;
- en les décrivant comme le noyau d'une matrice.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$.

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s + t \\ s - t \\ s + t \end{pmatrix} \;\middle|\; (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$.

4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y - 2z = 0 \right\} \bigcap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - y - z = 0 \right\}$.

5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 13 (21.3)

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, trouver une famille génératrice de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14 (21.3)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en les décrivant sous la forme Vect(A).

1. $F_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' - 2f = 0 \right\}$.

2. $F_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - \omega^2 f = 0 \right\}$ où $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$.

3. $F_3 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 2f' + f = 0 \right\}$.

4. $F_4 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - 4f = 0 \right\}$.

Exercice 15 (21.3)
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Exercice 16 (21.3)
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Exercice 17 (21.3)
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$$V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Exercice 18 (21.3)
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Exercice 19 (21.3)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En calculant A^{-1}, résoudre l'équation suivante d'inconnue α et β:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Soit $w_1 = (1, 2)^T$ et $w_2 = (1, -1)^T$. Montrer que $\mathrm{Vect}\left\{ w_1, w_2 \right\} = \mathbb{R}^2$. C'est-à-dire, montrer que *tout* vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de w_1 et $w_2$en résolvant l'équation $b = Ax$ d'inconnue x:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3. Montrer que si v et w sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, avec $v = (a, c)^T$ et $w = (b, d)^T$, alors

$$\operatorname{Vect}\{\, v, w \,\} = \mathbb{R}^2 \iff \forall t \in \mathbb{R}, v \neq tw \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercice 20 (21.3)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$.

2. $F_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1) = 0 \right\}$.

3. $F_3 = \left\{ P' \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$ où $n \in \mathbb{N}$.

4. $F_4 = \left\{ a(X^3 - 1) + b(X^2 - 2) + c(X + 4) \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

5. $F_5 = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \;\middle|\; P(1) = P(2) = 0 \right\}$.

6. $F_6 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; P' = 0 \right\}$.

7. $F_7 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P'' = 0 \right\}$.

8. $F_8 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

Chapter 22 Applications linéaires

Exercice 1 (22.1)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute application $f \in E$, on associe l'application $A(f)$ définie par
$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que A est une application de E à valeurs dans E.
2. Montre que A est linéaire.

Exercice 2 (22.1)
Vérifier la linéarité des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}.$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \phi(0) \end{array}.$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}.$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}.$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}.$

Exercice 3 (22.1)
Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 4x-2y) \end{array}$ appartient à $\mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est effectivement linéaire.

Exercice 4 (22.1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$ vérifiant
$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = 0. \tag{1}$$
Montrer que f est bijective.

Exercice 5 (22.2)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,0,y,0,z,0) \end{array}.$

1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.

Exercice 6 (22.2)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y) \end{array}.$

1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.

Exercice 7 (22.2)
On désigne par $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'application ϕ définie sur E par

$$\forall f \in E, \phi(f) = f'(1).$$

1. Démontrer que ϕ est une forme linéaire sur E.
2. En déduire que $F = \left\{ f \in E \mid f'(1) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8 (22.2)
Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $\phi : f \mapsto f''$ est un endomorphisme de E, et déterminer $\operatorname{Im} \phi$ et $\ker \phi$.

Exercice 9 (22.2)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.
2. Montrer que $\ker f \subset \ker g \circ f$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Exercice 10 (22.2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Exercice 11 (22.2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{ 0_E \}$.

Exercice 12 (22.2)
Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x - y + 2z) \end{array}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 13 (22.2)
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

1. Prouver que $\theta \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est surjective.

Exercice 14 (22.2)
Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$.

2. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + z, x - z) \end{array}$.

3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y+z, x+y+z) \end{array}$.

4. $u : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$.

5. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.

6. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0) \end{array}$.

7. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}$.

8. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & u_3 \end{array}$.

9. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

10. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Exercice 15 (22.3)

Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si u est injective, surjective, bijective.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P-(X-2)P' \end{array}$.

Exercice 16 (22.3)

On définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ deux applications A et B par

$$A\,(P(X)) = P'(X) \qquad \text{et} \qquad B\,(P(X)) = X\,P(X).$$

Démontrer les assertion suivantes.

1. A et B sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[X]$ et $\ker A \neq \{ 0 \}$.
3. $\ker B = \{ 0 \}$ et B n'a pas d'application réciproque.
4. $A\circ B - B\circ A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $A^k\circ B - B\circ A^k = kA^{k-1}$.

Chapter 23 Sommes et projecteurs

Exercice 1 (23.0)
Soit $u, w \in \mathbb{R}^2$ les vecteurs
$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
En utilisant la définition de somme directe, montrer que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{ u \} \oplus \operatorname{Vect}\{ w \}$.

Exercice 2 (23.0)
Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x - y + z = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{ (t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Exercice 3 (23.0)
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels
$$F_1 = \{ P \in E \mid P(0) = P(1) = 0 \} \qquad F_2 = \mathbb{R}_1[X]$$
Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 4 (23.0)
Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est réduite à la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. En déduire $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5 (23.0)
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère la partie F des fonctions vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit G l'ensemble des fonctions affines (de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$). Montrer que G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6 (23.0)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels
$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y - z + 2t = 0 \right\} \qquad G = \operatorname{Vect}(e) \text{ où } e = (1, 1, 1, 1).$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires.
- Soit p la projection sur F parallèlement à G, déterminer $p(u)$ pour tout u de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 (23.0)
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels
$$E_1 = \operatorname{Vect}\{ (1, 0, 0), (1, 1, 1) \} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \operatorname{Vect}\{ (1, 2, 0) \}.$$
Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 8 (23.0)
Soit
$$p:\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) \end{array}.$$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de p.

3. Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ suivant la direction $\ker p$.

Exercice 9 (23.0)
Soit dans $E = \mathbb{R}^3$ un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
Montrer que l'application ϕ qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur
$$x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$
est un projecteur.
Préciser son image et son noyau.

Exercice 10 (23.0)
Soit $n \geq 2$ et soit $s:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P''(0)X^2 - 2P(0) \end{array}$.

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que s est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 11 (23.0)
Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Dans ce cas, montrer
$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

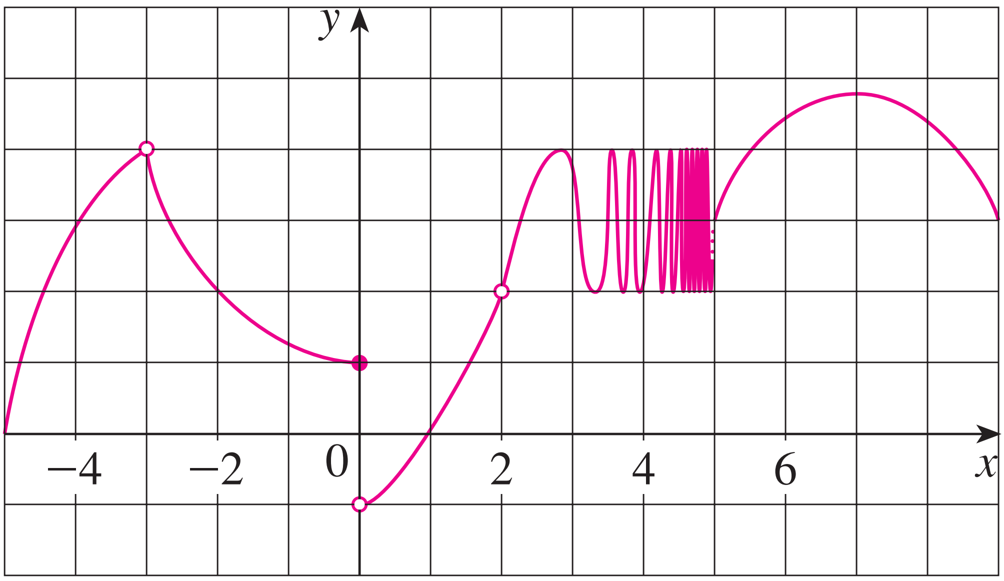
Exercice 12 (23.0)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que
$$f^2 - 5f + 6\operatorname{Id}_E = 0 \qquad (\text{ici } f^2 = f \circ f).$$
Montrer
$$\ker\left(f - 2\operatorname{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\operatorname{Id}_E\right) = E.$$

Chapter 24 Limites, continuité

Exercice 1 (24.2)

Pour la fonction h dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

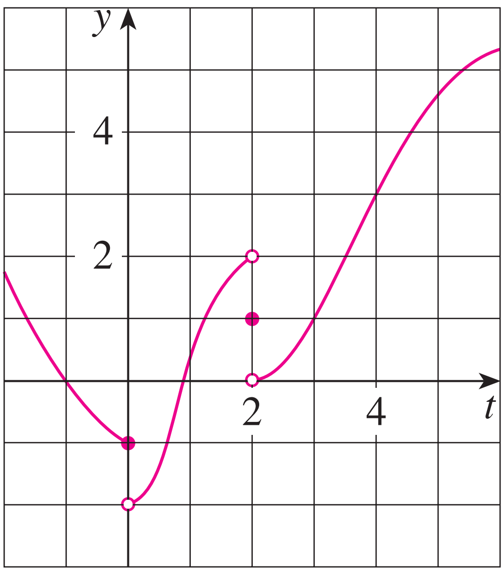
1. $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} h(x)$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} h(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$.
4. $h(-3)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} h(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.
8. $h(0)$.
9. $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.
10. $h(2)$.
11. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} h(x)$.
12. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} h(x)$.



Exercice 2 (24.2)

Pour la fonction g dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ <}} g(t)$.
2. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} g(t)$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ <}} g(t)$.
5. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ >}} g(t)$.
6. $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$.
7. $g(2)$.
8. $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$.



Exercice 3 (24.2)
Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

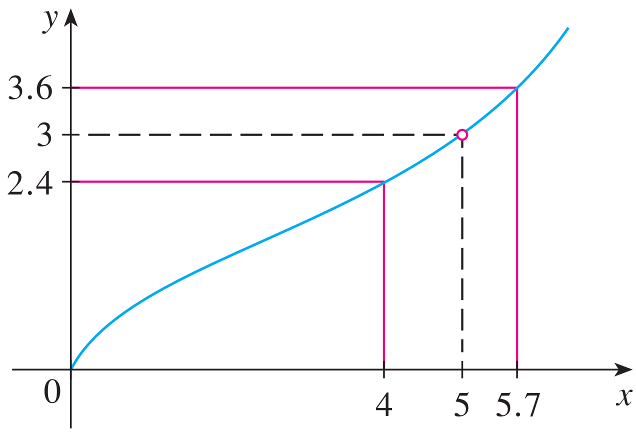
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

Exercice 4 (24.2)
Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln\left(x + x^2\right) \qquad \text{avec} \qquad x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001.$$

Exercice 5 (24.2)
À l'aide de la courbe représentative de f, déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } |x - 5| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - 3| \leq 0.6.$$



Exercice 6 (24.2)
Illustrer la définition de la limite

$$\lim_{x\to 1} \left(4 + x - 3x^3\right) = 2$$

en déterminant une valeur de δ correspondante à $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

Exercice 7 (24.2)
Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition (en ϵ, δ) de la limite.

1. $\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$.
2. $\lim_{x \to -3} (1-4x) = 13$.
3. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$.
4. $\lim_{x \to 4} (7-3x) = -5$.

Exercice 8 (24.2)

1. Montrer, en revenant à la définition de la limite, que
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} = 1.$$
2. Montrer de même que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Exercice 9 (24.2)
En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer

1. $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = 3$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1$.
3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$.

Exercice 10 (24.2)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant le point a, continue en a avec $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, on ait $f(x) > 0$.
Exercice 11 (24.2)
Montrer
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 12 (24.3)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
On suppose que f a une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.
Exercice 13 (24.4)

1. Démontrer à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$
2. Calculer, si possible

(a) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(c) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(d) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$.

Exercice 14 (24.5)
Trouver

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

Dans les exercices suivants

Rechercher les asymptotes du graphe de chacune des fonctions f suivantes. Esquisser l'allure du graphe au voisinage des asymptotes.

Exercice 15 (24.5)
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

Exercice 16 (24.5)
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$;

Exercice 17 (24.5)
$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$;

Exercice 18 (24.5)
$f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$;

Exercice 19 (24.5)
$f(x) = \tan x + x$;

Exercice 20 (24.5)
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

Exercice 21 (24.5)
$f(x) = |x| \sin \dfrac{1}{x}$;

Exercice 22 (24.5)
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x}$;

Exercice 23 (24.5)
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 24 (24.5)
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est croissante,
- la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Exercice 25 (24.6)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \\ e^x & : x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

2. Dans sa copie, Bob affirme

« La fonction $x \mapsto 1$ est continue en 0, donc f est continue en 0. »

Expliquer l'erreur de raisonnement de Bob.

Exercice 26 (24.6)
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur continuité.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 27 (24.6)
Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & x > 4 \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. f est elle continue ?

3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Dans les exercices suivants

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x = -1$.

Exercice 28 (24.6)
$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

Exercice 29 (24.6)
$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

Exercice 30 (24.6)
$f(x) = \dfrac{e^{2(x+1)} - 1}{e^{x+1} - 1}$

Exercice 31 (24.6)
$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$

Exercice 32 (24.6)
$f(x) = \dfrac{\sin(x + 1)}{x + 1}$

Exercice 33 (24.6)
$f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$

Exercice 34 (24.6)
Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et en 1 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right),$$

alors f est constante.

Exercice 35 (24.7)
Montrer qu'une fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 36 (24.7)
Soit f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f(b) = g(a).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 37 (24.7)
Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles. On suppose

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que
$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + m.$$

Exercice 38 (24.7)
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

2. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 39 (24.7)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
Exercice 40 (24.7)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée.
Exercice 41 (24.7)
Quel est l'intervalle image par f de I avec $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x \cos x$?

Chapter 25 Relations de comparaisons

Exercice 1 (25.0)

1. Déterminer une fonction simple équivalente à f en $+\infty$ et en 0.

(a) $f(x) = x^2 + x$.

(b) $f(x) = x + \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = x + 1 + \ln x$.

(d) $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$.

(e) $f(x) = e^x + \sin x$.

(f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

2. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to 0$.

(a) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.

(b) $f(x) = \ln(\cos x)$.

(c) $f(x) = \dfrac{(\tan x)(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

3. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.

(a) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

(b) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$.

Exercice 2 (25.0)

Déterminer des équivalents simples lorsque $x \to 0$ de

1. $\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$.

2. $\ln(\cos x)$.

3. $a^x - 1$ où $a \in]0, +\infty[$.

4. $x^x - 1$.

5. $(8+x)^{1/3} - 2$.

Exercice 3 (25.0)

En se servant éventuellement d'équivalents, déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$.

Exercice 4 (25.0)

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}}$, $x \to 0^+$.

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$, $x \to +\infty$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

4. $f(x) = \cos(\sin x)$, $x \to 0$.

5. $f(x) = x^x - 1$, $x \to 0^+$.

6. $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$, $x \to 1$.

Chapter 26 Dérivation

Exercice 1 (26.0)
En utilisant la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = -5x$.
3. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$.
4. $f(x) = x^2 + x - 3$.
5. $f(x) = x^3 - 12x$.
6. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
7. $f(x) = \sqrt{x+4}$.
8. $g(x) = -3$.
9. $f(x) = 3x + 2$.
10. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$.
11. $f(x) = 2 - x^2$.
12. $f(x) = x^3 + x^2$.
13. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
14. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2 (26.0)
Soient V un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies sur V et dérivables en x_0.

Montrer que si : $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ et $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Application : $f(x) = x \cos x$; calculer $f'(k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

Exercice 3 (26.0)
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1, 4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2, 2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2, 8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1, 2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1, 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5, 2)$.
7. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ au point $A(4, 5)$.
8. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au point $A(0, 1)$.

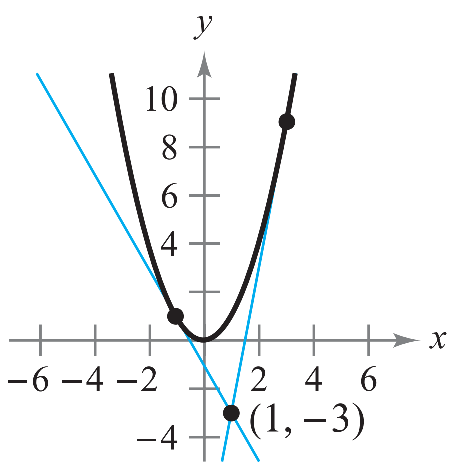
Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Exercice 4 (26.0)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 5 (26.0)
Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1+x^2\right)$.
3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 6 (26.0) *Calcul de dérivées*
Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\tan(x)}$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
6. $f_6 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$.
10. $f_{10} : x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.
11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.
12. $f_{12} : x \mapsto |x|^3$.
13. $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$.
14. $f_{14} : x \mapsto x + \dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$.
15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$.
16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}$.
17. $f_{17} : x \mapsto \left|x^2-3x+2\right|$.
18. $f_{18} : x \mapsto \ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$.
19. $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$.
20. $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$.
21. $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
22. $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\right)$.
23. $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
24. $f_{24} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.
25. $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.
26. $f_{26} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.
27. $f_{27} : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
28. $f_{28} : x \mapsto \ln\left(e^x-e^{-x}\right)$.
29. $f_{29} : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.
30. $f_{30} : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)}$.
31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

Exercice 7 (26.0)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.
2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8 (26.0)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. *Vrai ou Faux ?*

1. Si f est périodique, alors f' est périodique.
2. Si f' est périodique, alors f est périodique.
3. Si f est paire, alors f' est impaire.
4. Si f est impaire, alors f' est paire.
5. Si f' est paire, alors f est impaire.

Exercice 9 (26.0)
Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{x-a}{x}\right)^x.$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Exercice 10 (26.0)
Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ la fonction suivante est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

$$\begin{array}{rccl} f : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in]0, b[, \\ x^2 + 12 & : x \in [b, +\infty[\end{cases} \end{array}$$

Exercice 11 (26.0)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (26.0)
Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$.

2. $g(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

Problème 13 (26.0)
Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0. \tag{E_1}$$

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0. \tag{E}$$

On considère une fonction $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose

$$z : \begin{array}{rcl}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\cos(t)) \end{array}.$$

(a) Indiquer pourquoi la fonction z est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ puis exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y', y'' et de t.

(b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0,\pi[$ lorsque y vérifie l'équation (E) sur $]-1,1[$?

(c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

Exercice 14 (26.1)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 15 (26.1)

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 3 a au plus 3 zéros réels.

2. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré n a au plus n zéros réels.

Exercice 16 (26.1)
Déterminer les extrémums globaux pour chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = 3 - x$ sur $[-1,2]$.

2. $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0,4]$.

3. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3}$ sur $[-1,1]$.

Exercice 17 (26.1)
Montrer

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x \ln x}.$$

Exercice 18 (26.1)
En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 19 (26.1)
Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.
Exercice 20 (26.1)
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En déduire le comportement de la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Exercice 21 (26.1)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq 1$.

2. Établir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

.

Exercice 22 (26.1)
Soit $f : [0, +\infty[$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
Exercice 23 (26.1) *Le théorème de Darboux*
Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de Darboux :

> Une fonction dérivée sur un intervalle, bien que non nécessairement continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit I un intevalle véritable de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Considèrons $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

On considère les applications ϕ et ψ définie par

$$\phi : \begin{array}{rcl}]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{rcl} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{array}$$

1. Montrer que ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ϕ ce prolongement.

2. Montrer que ψ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ψ ce prolongement.

3. Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\phi(c) = \lambda \text{ ou } \psi(c) = \lambda.$$

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

Exercice 24 (26.1) *La règle de l'Hospital*
Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Ce résultat porte parfois le nom de théorème de Cauchy ou formule des accroissements finis généralisée.

2. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

(a) Montrer que si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

(b) Vérifier que la réciproque est fausse en considérant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto x.$$

3. Applications : Calculer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad b)\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}, \quad \text{et} \quad c)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

La règle de l'Hospital est hors programme. Il est d'ailleurs amusant et surprenant de constater qu'il existe une espèce d'aura maléfique autour de cette règle, pourtant fort simple et performante, si bien que son utilisateur est souvent considéré comme ayant commis un sacrilège.

Exercice 25 (26.2)
Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$h : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos \sqrt{x} \end{array}.$$

1. En revenant à la définition.

2. En utilisant le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 26 (26.2)
On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = e^{|t|}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.

2. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Méthode du point fixe pour la résolution d'équations numériques

Exercice 27 (26.2)

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0. En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 28 (26.2)
On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. En déduire que la suite u est bien définie.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ solution de l'équation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x + 2} = x$.
3. Déduire de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|.$$

4. Majorer la différence $\left|u_n - \alpha\right|$ puis montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 29 (26.2)
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.

(c) Conclure sur la convergence de la suite u.

(d) Écrire une suite d'instructions `Python` qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode*.

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α.

(b) En déduire une suite d'instructions `Python` qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Chapter 27 Développements limités

Exercice 1 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \text{sh}(x) - 2\sqrt{1+x}$.

Exercice 2 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction arctan.

Exercice 3 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \sin(x)$.

Exercice 4 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Exercice 5 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

Exercice 6 (27.0)

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tanh.

Exercice 7 (27.0)

Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = (\cos x)\sqrt{1+x}$;
2. $DL4$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1+x}$;
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3}}{1-x}$;
4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^{\cos x}$;
5. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$;
6. $DL4$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Exercice 8 (27.0)

Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \exp\sqrt{1+x}$.
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(2+\sin x)$.

Exercice 9 (27.0)

Donner les développements limités suivants.

1. $DL4$ en $\pi/3$ de $f(x) = \cos x$;
2. $DL4$ en 1 de $f(x) = e^x$;
3. $DL4$ en 2 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
4. $DL3$ en $\pi/4$ de $f(x) = \tan x$;
5. $DL4$ en e de $f(x) = \ln x$;
6. $DL4$ en 1 de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 10 (27.0)

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{1-e^{2x}}$;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$;
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\arcsin(x)}{x^3}$.

Exercice 11 (27.0)

Déterminer la limite de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

Exercice 12 (27.0)

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 13 (27.0)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le développement limité demandé. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ainsi que les positions relatives.

1. $DL2$ en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\sqrt{1+x}$.
2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x) + \mathrm{e}^x$.
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1-x) - \cos x$.
4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^x \cos(x) + \dfrac{x^3}{3} - x$.

Exercice 14 (27.0)

Pour les fonctions suivantes au voisinage du point a indiqué, étudier la possibilité de prolonger par continuité, puis, dans l'affirmative, la dérivabilité et l'existence d'une tangente à la courbe ; enfin préciser le placement local de la courbe par rapport à sa tangente.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x\ln x}{x-1}$ au point $a = 1$.
2. $g : x \mapsto \ln(\tan x)$ au point $a = \pi/4$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x}$ au point $a = 0$.

Exercice 15 (27.0)

Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 16 (27.0)

Étudier avec soin les branches infinies et leur placement local par rapport aux éventuelles asymptotes.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sqrt{x^2+1} \end{array}, \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x^3+2x+1} \end{array}.$$

Exercice 17 (27.0)
Étudier la fonction d'une variable réelle définie par la relation

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

en portant une attention particulière aux asymptotes et demi-tangentes.
Exercice 18 (27.0)
Soit λ un réel strictement positif, différent de $\sqrt{2}$, et (f_λ) la famille de fonctions définie par

$$f_\lambda(x) = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda/x}.$$

On note C_λ sa courbe représentative.

1. *Étude de f_1.*
   (a) Étudier les variations de la fonction f_1.
   (b) À l'aide d'un développement limité — on dit aussi développement asymptotique —, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que sa courbe admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
   (c) Calculer les limites à gauche et à droite de f_1 en 0. La fonction f_1 admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Si oui, ce prolongement est-il dérivable ? Que peut-on en déduire pour la courbe C_1 ?
   (d) Représenter graphiquement C_1 et son asymptote oblique.
2. Dans cette question, on étudie f_2. À l'aide d'un développement limité, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que la courbe C_2 admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
3. À l'aide d'un développement limité, étudier les branches infinies de C_λ.

Exercice 19 (27.0)
1. Montrer que, pour $\lambda > e$, l'équation $e^x = \lambda x$ a deux solutions dans $]0, +\infty[$.
   On notera $x(\lambda)$ la plus petite.
2. Se convaincre sur un dessin que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.
3. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.
4. Établir successivement les résultats suivants lorsque λ tend vers $+\infty$:
   (a) $x(\lambda) \sim \dfrac{1}{\lambda}$.
   (b) $e^{x(\lambda)} = 1 + \dfrac{1}{\lambda} + o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.
   (c) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$.
   (d) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{3}{2\lambda^3} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^3}\right)$.

On a ainsi obtenu un développement asymptotique de $x(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Étude globale des fonctions

Exercice 20 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Exercice 21 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.
Exercice 22 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 23 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 24 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 25 (27.1)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Exercice 26 (27.1)
Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x + 1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 27 (27.1) *Inégalité arithmético-géométrique*
On considère trois réels strictement positifs a, b, c.

1. Montrer que $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \geq bc$.

2. Étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a+2x}{3} - x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}.$$

3. Déduire des questions précédentes l'inégalité

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Exercice 28 (27.2)
Soit $f : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x+8} \end{array}$.

1. Prouver que f réalise une bijection de $I = [2,+\infty[$ sur son image que l'on précisera.

2. Prouver que la bijection réciproque de f est continue.

3. Déterminer cette bijection réciproque.

Exercice 29 (27.2)
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.

2. On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.

3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1-e)$.

Exercice 30 (27.2)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est bijective. On note alors g son application réciproque.

2. Sans calculer g, justifier que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 31 (27.4)
On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
(c) En déduire une expression simple de f.

2. Pour $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $x = \tan\phi$, on a donc $\phi = \arctan x$. Calculer $f(x) = f(\tan\phi)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.

3. Construire le graphe de f.

Chapter 28 Indépendance linéaire, bases

Exercice 1 (28.0)
Montrer que les vecteur x_1, x_2, x_3 ci-dessous sont linéairement indépendant:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Exprimer le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3.

Exercice 2 (28.0)
Soit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la famille (x_1, x_2, v) soit liée.

Exhiber un vecteur x_3 tel que la famille (x_1, x_2, x_3) soit libre.

Exercice 3 (28.0)
En utilisant la définition de famille libre. Montrer que tout sous famille (non vide) d'une famille libre est une famille libre.

Exercice 4 (28.0)
Montrer que les vecteurs ci dessous forment une famille liée en déterminant un relation de dépendance linéaire non triviale.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (28.0)
Montrer que si $n > m$, alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est liée.

Exercice 6 (28.0)
Soit A un matrice quelconque. On suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls, v_1 et v_2, tels que $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = 5v_2$.

Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.

Pouvez-vous généraliser ce résultat ?

Exercice 7 (28.0)
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_1(x) = e^{x+1}, \qquad f_2(x) = e^{x+2}, \qquad f_3(x) = e^{x+3}.$$

La famille $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ est-elle libre dans E ?

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_1(x) = |x-1|, \qquad g_2(x) = |x-2|, \qquad g_3(x) = |x-3|.$$

La famille (g_1, g_2, g_3) est-elle libre dans E ?

Exercice 8 (28.0)

On considère les ensembles

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Décrire les sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(U)$ et $\mathrm{Vect}(W)$. Donner une base pour chacun d'eux.

Montrer que l'un des deux est un plan vectoriel et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

Exercice 9 (28.0)

Donner une base du plan $(0xz)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 (28.0)

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ c & a+b+c & b \\ b & c & a+b+c \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont on précisera une base $\mathcal{B}$ et la dimension.

2. Quelles sont les coordonnée de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$?

3. Calculer *tous* les produits deux à deux des éléments de la base $\mathcal{B}$ (*indiquer uniquement le résultat sur la copie*).
Vérifier qu'ils appartiennent bien à F.

4. *En déduire* que pour tout $(M, N) \in F^2$, on a $MN \in F$.

Chapter 29 Dimension

Exercice 1 (29.0)
Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, où

$$v_1 = (1,1,0)^T, \qquad v_2 = (-4,0,3)^T \qquad \text{et } v_3 = (3,5,1)^T.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $w = (-1,7,5)^T$ et $e_1 = (1,0,0)^T$. Déterminer les coordonnées de w et de e_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (29.0)
On pose $E = \mathbb{C}^3$ et on s'intéresse aux trois vecteurs

$$u_1 = (i,1,-1), \qquad u_2 = (i,-1,1) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (-1,i,1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées de $w = (3+i, 1-i, 2)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 3 (29.0)
Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$V = \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - t = 0 \right\}$$
$$\text{et } W = \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y - z = y + t = 0 \right\}.$$

1. Préciser une base et la dimension de V.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $a = (3,1,2,4)^T$.
2. Préciser une base et la dimension de W.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $b = (4,1,3,-1)^T$.
3. Préciser une base et la dimension de $V \cap W$.

Exercice 4 (29.0)
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de V. Montrer que pour tous vecteurs $u, w \in V$, on a

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w) = \alpha \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w).$$

où $\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$ désigne la matrice des coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5 (29.0)

1. Déterminer les valeurs du paramètre λ telles que

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

   forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $b = (2,0,1)^T$ et $s = (2,0,3)^T$. Vérifier que chacune des familles

   $$\mathcal{B} = (v_1, v_2, b) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S} = (v_1, v_2, s)$$

   est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{S}$.

3. Si $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(w) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, déterminer $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w)$.

Exercice 6 (29.0)
On considère le plan W dans $\mathbb{R}^3$,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x - 2y + 3z = 0 \right\}.$$

1. Monter que chacune des familles

$$\mathcal{S} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de W.

2. Montrer que le vecteur $v = (5, 7, 3)^T$ est un vecteur de W et déterminer ses coordonnées $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v)$ relativement à la base $\mathcal{S}$.

3. Déterminer la matrice de passage M de la base $\mathcal{S}$ à la base $\mathcal{B}$; ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(x) = M \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

Utiliser la relation précédente pour déterminer $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$ pour le vecteur $v = (5, 7, 3)^T$ et vérifier votre réponse.

Exercice 7 (29.0)
Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de ce même vecteur dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\epsilon_1 = (1, 1, 0), \qquad \epsilon_2 = (1, 0, 1), \qquad \epsilon_3 = (0, 1, 1).$$

Exercice 8 (29.0)
Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la famille de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f_1 = e_1 - 2e_2, \qquad f_2 = e_2 - 3e_3, \qquad f_3 = e_3 - 4e_4, \qquad f_4 = e_4.$$

1. Prouver que la famille $\boldsymbol{f}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer les matrices de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{f}$ et de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{e}$.

Exercice 9 (29.0)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \qquad f_2 = e_2 + e_3.$$

Montrer que (f_1, f_2) est libre et compléter cette famille en une base de E.

Exercice 10 (29.0)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad d = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad e = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de (a, b, c, d, e), préciser des relations de dépendance linéaire entre a, b, c, d, e et donner une base de Vect (a, b, c, d, e).

Exercice 11 (29.0)
Soit A une matrice de type $m \times k$. On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Montrer

1. $A^T A$ est une matrice symétrique de type $k \times k$,

2. $A^T A$ est une matrice inversible.

Vérifier les résultats précédents pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (29.0)
Soit B une matrice $m \times k$ tel que $\mathrm{Im}(B^T)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation cartésienne $4x - 5y + 3z = 0$.

1. Peut-on déterminer m ou k ? Le faire si possible.

2. Déterminer le noyau de B. Écrire la solution générale de l'équation $Bx = 0$.

Exercice 13 (29.0)
Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Soit W l'ensemble des suites nulles à partir du rang 3.

Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ de dimension 3.

Problème 14 (29.0)
On donne une partie d'une matrice A ainsi que sa forme échelonnée réduite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & * \\ 2 & -1 & * & * \\ 3 & 2 & * & * \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$, une base du noyau de A, $\ker(A)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(A^T)$.

2. Soit $b = (9, 0, a)^T$ où $a \in \mathbb{R}$. L'équation matricielle $Ax = b$ représente un système linéaire. Quel est son nombre d'équations? Son nombre d'inconnue?

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système $Ax = b$ soit compatible.

3. Déterminer si possible les colonnes de A manquantes.

Chapter 30 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1 (30.0)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 2 (30.0)
Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z) \end{array}$.

1. Justifier que g est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$.
3. Déterminer $\ker g$ puis donner une base de $\ker g$.

Exercice 3 (30.0)
Soit l'application $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y - 7z) \end{array}$.

1. Déterminer $\ker h$ puis donner une base de $\ker h$.
2. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$; en déduire une base de $\operatorname{Im} h$.

Exercice 4 (30.0)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. À tout scalaire λ, on associe le sous-ensemble V_λ de E défini par
$$V_\lambda = \{ x \in E \mid f(x) = \lambda x \}.$$

1. Que peut on dire de V_0 ?
2. Démontrer que, pour tout scalaire λ, V_λ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Démontrer que, pour tous scalaires λ, μ,
$$\lambda \neq \mu \implies V_\lambda \cap V_\mu = \left\{ 0_E \right\}.$$
4. Étant données λ et μ deux scalaires distincts, on suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v appartenant respectivement à V_λ et à V_μ. Démontrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.
5. Plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant n scalaires deux à deux distincts, on suppose qu'il existe n vecteurs non nuls $u_1, u_2, \dots, u_n$ appartenant respectivement à $V_1, V_2, \dots, V_n$. Démontrer par récurrence que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants.

Exercice 5 (30.0)
Déterminer une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$
Vérifier la cohérence avec le théorème du rang. L'application T est-elle bijective ?

Exercice 6 (30.0)
Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(1,0,0,0) = (1,-1,0); \qquad f(0,1,0,0) = (-1,0,1);$$
$$f(0,0,1,0) = (1,-1,2); \qquad f(0,0,0,1) = (0,-2,3).$$

1. Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent f.

2. Déterminer $\ker f$. L'application f est-elle injective?

3. Déterminer $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective? bijective?

Exercice 7 (30.0)
Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.
On suppose que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

2. Montrer que $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est une base de E.

3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(E)$ de base $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2\right)$.

Exercice 8 (30.0)
On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et en déduire une expression de u comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

2. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifie les conditions suivantes

$$f(v_1) = e_1 \qquad f(v_2) = e_2 \qquad f(v_3) = e_3,$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.

3. Déterminer, si possible, le noyau de f et l'image de f.

4. Donner l'expression analytique de f (c'est-à-dire l'expression de $f(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Exercice 9 (30.0)
Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. On suppose que le noyau de g est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 = x_2 = x_3$ et que l'image de g est $\mathbb{R}^2$. Cela contredit il le théorème du rang ?

2. On suppose de plus que $g(e_1) = \epsilon_1$, $g(e_2) = \epsilon_2$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (ϵ_1, ϵ_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer une matrice A telle que l'application g définie par $g(x) = Ax$ vérifie les conditions précédente. Donner l'expression analytique de g (c'est-à-dire l'expression de $g(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Exercice 10 (30.2)
Soit $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit v_1, v_2, v_3, x les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

où x_1, x_2, x_3 sont fixés dans la suite. Soit T l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(e_1) = v_1, \qquad T(e_2) = v_2, \qquad T(e_3) = v_3, \qquad T(e_4) = x.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\operatorname{rg}(T) = \dim \ker(T).$$
Dans ce cas, donner une base de $\operatorname{Im}(T)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\dim \ker(T) = 1.$$
Dans ce cas, donner une base de $\ker(T)$.

Exercice 11 (30.2)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice fixée. Calculer, en fonction du rang de A, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ formé des matrices M telles que $MA = 0$ (donner deux solutions).

Même question si M est fixée et A varie.

Problème 12 (30.2) *Un théorème de factorisation, Banque PT 2010*
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(E, G)$.

Le but de cette partie est de montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists w \in \mathbf{L}(F, G), v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.
Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v)$.
2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \ker(u) = n - p$ et $\dim F = r$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Im}(u)$?
   (b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.
   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F.
   On définit alors $w \in \mathbf{L}(F, G)$ par
   $$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que, si $\ker(u) \subset \ker(v)$, alors $v = w \circ u$.

Chapter 31 Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 (31.0)
Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T relativement aux bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 2 (31.0)
Soit $u \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère les quatre vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0, 0), \qquad e_3 = (4, 1, 0, -3) \qquad \text{et} \qquad e_4 = (-7, 0, 1, 5).$$

   Montrer que $\boldsymbol{e} = \left(e_1, e_2, e_3, e_4\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. On considère les trois vecteurs

$$f_1 = (4, 2, 1), \qquad f_2 = (1, 1, -1) \qquad \text{et} \qquad f_3 = (0, 0, 1).$$

   Montrer que $\boldsymbol{f} = \left(f_1, f_2, f_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de u dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$.

Exercice 3 (31.0)
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans lui même définie par $f(X) = AX$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$.

Exercice 4 (31.0)
Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à des bases différentes.

Exercice 5 (31.0)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions définies par
$$x_1(t) = \cos(t)\,\mathrm{ch}(t), \qquad x_2(t) = \sin(t)\,\mathrm{ch}(t), \qquad x_3(t) = \cos(t)\,\mathrm{sh}(t), \qquad x_4(t) = \sin(t)\,\mathrm{sh}(t).$$
appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces quatres vecteurs, et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$. Montrer que F est stable par u et déterminer la matrice M de u dans la base (x_1, x_2, x_3, x_4) de F.

3. Calculer M^2, M^3, M^4. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (31.0)
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$. Soient $f_1 = (-2, 3)$ et $f_2 = (-2, 5)$.

1. Montrer que $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D = M_{\boldsymbol{f}}(u)$.

2. Exprimer A en fonction de D.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}. \tag{R}$$

Exercice 7 (31.0)
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide de la méthode du pivot de Gauß ou du déterminant, déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

2. Pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente, déterminer le sous-espace vectoriel $\ker\left(u - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

3. En déduire une base $\boldsymbol{e}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ dans laquelle la matrice D de u soit une matrice diagonale.

4. Exprimer A en fonction de D.

5. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8 (31.0)
Soient (u_n) et (v_n) les suites à termes réels définies par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_{n+1} = AX_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_n en fonction des puissance de A et de X_0.

3. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. Calculer une base des espaces vectoriels $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\ker(f - 3\,\mathrm{Id})$. En déduire une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(R)$ vérifiant

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de D^n. En déduire l'expression de u_n et v_n.

Exercice 9 (31.0)

Soit $u \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère les trois vecteurs

$$e_1 = (1, -1, 0), \qquad e_2 = (1, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

Montrer que $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la matrice T de u dans la base $\boldsymbol{e}$.

3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 10 (31.0)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 (31.0)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 \\ -4 & -4 & 6 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$
Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 (31.0)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 (31.0)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (31.1)
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -9 & -7 & 6 \\ -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I_3$ n'est-elle pas inversible ?
2. Pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente, déterminer le sous-espace vectoriel $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. En déduire une base $\boldsymbol{e}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D de u soit une matrice diagonale puis exprimer le lien entre A et D.

Sommes en dimension finie

Exercice 15 (31.2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(w_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On décompose chaque vecteur w_i suivant la somme précédente ; cela donne pour tout i,

$$w_i = u_i + v_i,$$

égalité dans laquelle u_i appartient à F et v_i appartient à G.

On suppose la famille $(u_i)_{i\in I}$ libre. Prouver qu'il en est de même de la famille $(w_i)_{i\in I}$.

Exercice 16 (31.2)
Soit

$$X = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad Y = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

La somme $X + Y$ est-elle directe ? Déterminer une base de $X + Y$.

Exercice 17 (31.2)
Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \operatorname{Vect}(u, v, w)$ et $G = \operatorname{Vect}(x, y)$ avec

$$u = (0, 1, -1, 0) \qquad v = (1, 0, 1, 0) \qquad w = (1, 1, 1, 1) \qquad x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 18 (31.2)
Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(1, 2, 0)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. Donner l'expression de la projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement $\mathcal{D}$.

Exercice 19 (31.2)
Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$b_1 = (1, 1, 2), \qquad b_2 = (-2, -1, 3), \qquad b_3 = (0, -3, -1).$$

Notons

$$E = \operatorname{Vect}(b_1, b_2) \text{ et } F = \operatorname{Vect}(b_3).$$

1. Montrer que la famille $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces E et F ?
2. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Calculer la matrice M de p dans la base $\boldsymbol{b}$.
3. Notons $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice P de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{b}$.
4. Soit N la matrice de p dans la base $\boldsymbol{e}$. Quelle relation existe-t-il entre les matrices M, N et P ? Calculer la matrice N.

Exercice 20 (31.2)

Soit $f \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

Vérifier que f est un projecteur. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 21 (31.2)

Soit $f \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.

Vérifier que f est une symétrie. Déterminer $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f + \mathrm{Id})$.

Problème 22 (31.2) *BanquePT 2009, épreuve A, partie A*

Dans tout l'exercice, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathbf{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, I_E l'identité dans E et 0_E l'endomorphisme nul sur E.

1. Dans cette question E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang?

(b) Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\epsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\epsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\epsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

3. Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, p désignera un projecteur de E, où E est un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E; on pourra écrire, pour $x \in E$, $x = [x - p(x)] + p(x)$.

4. Soit q l'endomorphisme défini par: $q = I_E - p$. Montrer que q est un projecteur de E. Déterminer le noyau et l'image de q. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

5. Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

(a) Montrer que si $p_1 \circ p_2 = O_E$, alors q est un projecteur de E.

(b) Montrer que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) \subset \ker(q)$.

(c) Montrer[1] alors que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) = \ker(q)$.

[1] Ça ressemble à une erreur d'énoncé, il faut continuer à supposer $p_1 \circ p_2 = 0_E$.

Polynômes et algèbre linéaire

Exercice 23 (31.2)
Soit $\sigma = \left(X^2+1, 2X^2-X+1, -X^2+X\right)$.

1. La famille σ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?

2. La famille σ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 24 (31.2)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$P_1 = (1+\alpha)X^2 + X + 1, \qquad P_2 = X^2 + (1+\alpha)X + 1, \qquad P_3 = X^2 + X + (1+\alpha).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille (P_1, P_2, P_3) soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Exercice 25 (31.2)
Soit $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = \left(X^2+X+1, X^2-1, X^2+X\right)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 - 6X + 5$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 26 (31.2)
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$.
2. $F_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1) = 0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{ P' \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $F_4 = \left\{ a(X^3-1) + b(X^2-2) + c(X+4) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
5. $F_5 = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \;\middle|\; P(1) = P(2) = 0 \right\}$.
6. $F_6 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; P' = 0 \right\}$.
7. $F_7 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P'' = 0 \right\}$.
8. $F_8 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

Exercice 27 (31.2)
Soient $n \geq 2$ et

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP(1) + (X^2-4)P(0) \end{array}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

Exercice 28 (31.2)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{array}.$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Exercice 29 (31.2)
On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(0) = 1, \qquad P'(1) = 2, \qquad P''(1) = -1, \qquad \text{et} \qquad P''(2) = 1.$$

Exercice 30 (31.2)
On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $n + 1$ réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ et } P'(\alpha_i) = f'(\alpha_i).$$

Exercice 31 (31.2)
Soient $n \geq 2$ et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & XP(1) + (X^2 - 4)P(0) \end{array}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

Exercice 32 (31.2)
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Montrer que E^* est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.
2. On considère les trois formes linéaires sur E, définies pour tout P de E par

$$f_0(P) = P(0); \qquad f_1(P) = P(1); \qquad f_2(P) = P(2).$$

   On pose par ailleurs, pour tout P de E

$$f(P) = \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que f appartient à l'espace vectoriel engendré par $\{ f_0, f_1, f_2 \}$.

Exercice 33 (31.2)
On considère les deux applications f et g définies par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & P & \mapsto & \big(P(0), P(1), P'(0), P'(1)\big) \end{array}$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & (x + y + z + t, x - t) \end{array}.$$

1. Montrer que f et g sont linéaires.

2. Déterminer les matrices de f et g relativement aux bases canoniques de leurs ensembles de départ et d'arrivée.

3. En déduire la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 (31.2)
Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P(X+1) + P(X+2) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Donner la matrice de f par rapport aux bases canoniques.

3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.

4. Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 35 (31.2)
Vérifier que $P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème 36 (31.2) *Polynômes interpolateurs de Lagrange*
Soit n un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ n nombres réels deux à deux distincts. On leur associe les polynômes $L_1, \dots, L_n$ définis, pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, par

$$L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}. \tag{1}$$

Par exemple, *si* $n = 3$, on a

$$L_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \qquad L_2 = \frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}, \qquad L_3 = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}. \tag{2}$$

Dans la suite, *n est quelconque*.

1. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer le degré de L_j.

2. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer les racines de L_j.

3. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, calculer $L_j(a_j)$.

4. Montrer que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose

$$Q = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j. \tag{3}$$

   (a) Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, calculer $Q(a_k)$.
   (b) Montrer alors que $P = Q$.

6. En déduire que $\left(L_1, \ldots, L_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On l'appelle base de Lagrange. Que représente donc $P(a_j)$ pour le polynôme P dans la base de Lagrange ?

7. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^q par $Q = (X - a_1) \ldots (X - a_n)$ est

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^q L_j.$$

8. Soient a et b deux réels distincts tels que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, a_k \in [a, b]$. Soit aussi une fonction $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. Déduire de la question **5.** qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad P_n(a_k) = f(a_k).$$

Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur $[a, b]$ relativement aux points $\{a_1, \ldots, a_n\}$: c'est donc l'unique polynôme de degré $\leq n - 1$ prenant les mêmes valeurs que f aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.

Chapter 32 Dénombrement

Exercice 1 (32.2)
Pour A, B deux parties de E on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer

$$\operatorname{card} A\Delta B = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - 2 \operatorname{card} A \cap B. \tag{1}$$

Exercice 2 (32.2)
À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 3 (32.2)
Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 4 (32.3)
Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?
  (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
  (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
  (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
  (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?
  (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
  (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Exercice 5 (32.3)
Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast. Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut éventuellement, en plus de la confiture, les beurrer ?

Exercice 6 (32.3)
Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot OIGNON ?

Reprendre la question précédente, avec le mot OGNON[1].

Exercice 7 (32.3)
Combien d'anagrammes différentes peut-on composer avec les lettres du mot BALKANISATION ?

Exercice 8 (32.3)
Combien d'anagrammes peut-on composer en utilisant toutes les lettres du mot FILOZOFI[2].

[1]On notera le rôle de la réforme de l'orthographe dans la simplification des exercices de mathématiques.
[2]Je suis en avance de quelques réformes.

Exercice 9 (32.3)

1. Combien d'équipes différentes de rugby à quinze peut-on former avec les vingt-deux joueurs d'une équipe de football américain ?

2. Combien d'équipes différentes de jeu à treize peut-on former avec une équipe de rugby à quinze ?

   (On ne tient pas compte de la place des joueurs.)

Exercice 10 (32.3)

Un club de football est composé de vingt joueurs dont trois gardiens de but. Combien d'équipes différentes de onze joueurs dont un gardien peut-on former ?

(On ne tient pas compte de la place des joueurs, sauf pour les gardiens qui ne peuvent jouer que dans les buts.)

Exercice 11 (32.3)

Avant de pénétrer dans un magasin de porcelaines, l'éléphant doit chausser des pantoufles en vair prises parmi trois paires (une rose, une bleue, une jaune).

1. Combien a-t-il de manières de se chausser ?

2. Combien a-t-il de manières de se chausser, en prenant une pantoufle droite pour chaque patte droite et une pantoufle gauche pour chaque patte gauche ?

Exercice 12 (32.3)

Une société multinationale impose l'anglais comme langue interne à toutes ses filiales. Le siège social, situé à Bruxelles, emploie p Flamands et q Wallons.

Chaque matin, les employés se saluent deux par deux :

- en français lorsque les deux sont wallons,
- en néerlandais lorsque les deux sont flamands,
- en anglais lorsqu'il y a un Flamand et un Wallon.

1. Combien y a-t-il d'échanges en français ?
2. Combien y a-t-il d'échanges en néerlandais ?
3. Combien y a-t-il d'échanges en anglais ?
4. En déduire la relation

$$\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}.$$

Exercice 13 (32.3)

Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent

1. Un seul roi.
2. Aucun roi.
3. Au moins un roi.
4. Les 4 rois.
5. Que des piques.

Exercice 14 (32.3)
Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 52 cartes. Déterminer le nombre de mains que comportent

1. Exactement une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur).

2. Deux paires (mais pas un carré ni un brelan).

3. Un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur mais pas un full).

4. Un full (c'est-à-dire un brelan et une paire).

5. Un carré (c'est-à-dire quatre cartes de même hauteur).

6. Une couleur (c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur).

Exercice 15 (32.3)
Le portillon automatique du métro permet de faire passer une ou deux personnes à la fois.

Combien y a-t-il de manières différentes de faire passer une file de dix personnes ?

On fermera les yeux sur le côté hautement répréhensible du passage simultané de deux personnes.

Exercice 16 (32.3)
Dans un restaurant de Courseulles-sur-mer, trois convives ont à se partager sept douzaines de belons.

Combien y a-t-il de répartitions possibles des huîtres, en les distinguant, sachant que chacun doit en avoir au moins une ?

Exercice 17 (32.3) *Convolution de Vandermonde*
Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (A \cap X, B \cap X) \end{array}.$$

1. À quelles conditions sur A et B a-t-on f surjective ? f injective ?

2. Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.

3. En déduire la formule de convolution de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Chapter 33 Espace probabilisé fini

Exercice 1 (33.2)
Une urne contient une boule bleue, une boule blanche, une boule rouge et deux boules vertes. Quelles est la probabilité d'obtenir en tirant successivement trois boules de l'urne:

1. Les boules bleue, blanche et rouge dans cet ordre?

2. Les boules bleue, blanche et rouge dans un ordre quelconque?

Exercice 2 (33.2)
Dans un sac, on a placé trois pièces de 1 euro et quatre pièces de 2 euros. Une personne extrait de ce sac trois pièces simultanément. En admettant que chaque sous-ensemble de trois pièces à même probabilité d'être extrait, calculer les probabilités des événements suivants:

1. Les trois pièces sont des pièces de 2 euros.

2. Il y a au moins une pièce de 2 euros parmi les trois pièces extraites.

Exercice 3 (33.2)
Soit le système d'équations numériques réelles, d'inconnue $(x; y)$, dans lequel a, b, c désignent trois paramètres réels.

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c. \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6: le premier numéro sorti donne a, le second b et le troisième c.

1. Quelles sont les probabilités p_0, p_1 et p_2 pour que le système ainsi obtenu ait respectivement: une infinité de solutions; aucune solution; une solution unique $(x_0; y_0)$?

2. Quelle est la probabilité p_3 pour que le système admette la solution unique $(3; 0)$?

Exercice 4 (33.2)
Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 avariés. Les acheteurs prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée.

Voulez-vous être le 1er, 2-ième,..., le 150-ième acheteur ?

Exercice 5 (33.2)
Un joueur de poker reçoit une «main» de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker).

Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. une seule paire ?

2. deux paires ?

3. un brelan ?

4. un carrée ?

5. un full ?

Exercice 6 (33.2)
Le jardinier a mélangé trois oignons de tulipes rouges avec trois oignons de tulipes jaunes. Il les plante régulièrement en cercle en les prenant au hasard. On considère les événements suivants :

- A : «les fleurs jaunes forment un triangle rectangle».

- B : «les fleurs rouges forment un triangle rectangle».
- C : «les fleurs jaunes forment un triangle équilatéral».
- D : «les fleurs jaunes forment un triangle isocèle».

Déterminer les probabilités des événements A, B, C, D.

Exercice 7 (33.3)

Vl'a ti pâs qu'en pâssant par l'plant[1] du Pé Mathieu eun vôleu i a chapardeu trois pommes de saignette qu'i mit dans sa pouchette, é pi quatre coquerelles et côr sept ambrettes. En r'venant il a croiseu su son ch'min la fille de son vésin et i y'offrit trois pommes au hasard.

1. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu eune pomme de châque sorte.
2. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu trois pommes pareuilles.
3. Et au cas où les trois pommes é seraieunt de la même sorte, calculeu la probabiliteu pour qu'e seient des pommes de saignette.

Exercice 8 (33.3)

Une urne contient cinq boules rouges et une boule noire. Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement trois boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

Exercice 9 (33.3)

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 10 (33.3)

On considère trois urnes :

- U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.
- U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.
- U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 11 (33.3)

Every afternoon at five o'clock, Charles is having tea at his mother's. In order to start the conversation, he keeps saying either "I think it's raining" or "I think it isn't raining". He is mistaken once out of three when it is raining, and once out of two when it is not raining. And it is raining nine times out of ten. This afternoon, just after Big Ben rang five, he said: "I think it's raining."

Calculate the probability it is actually raining.

[1] l'vergeu

Exercice 12 (33.3)
Jack possède une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Dans le premier tiroir, il y a 30 chaussettes roses et 20 chaussettes vertes. Les deux autres tiroirs contiennent, l'un quatre chaussettes roses (il ne sait pas lequel), l'autre quatre chaussettes vertes (il ignore évidemment de quel tiroir il s'agit). Dans l'obscurité, il prend, au hasard, une chaussette du premier tiroir, puis la place dans un des deux autres tiroirs. Il prend ensuite dans celui-ci une chaussette au hasard et allume la lumière. Elle est rose.

Calculer la probabilité pour que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses.

Exercice 13 (33.3)
Georges a cassé sa pipe[2]. Sa femme décide de prendre en seconde noce un époux de son acabit. Il y a une chance sur trois pour qu'il ait la même taille de vêtements que Georges. S'il a la même taille, il y a une chance sur deux pour qu'il ait la même pointure, s'il n'a pas la même taille, il y a une chance sur quatre pour qu'il ait la même pointure.

1. Calculer la probabilité pour qu'il puisse profiter des bottes, des pantouffles et des habits de Georges.
2. Calculer la probabilité pour qu'il puisse chausser ses bottes et ses pantouffles.
3. Sachant qu'il peut chausser ses bottes et ses pantouffles, calculer la probabilité pour qu'il puisse enfiler ses habits.
4. Il y a une chance sur trois pour qu'il fume aussi la pipe, et s'il fume la pipe, il y a une chance sur quatre pour qu'il aime le tabac de Georges.

   Calculer la probabilité pour qu'il puisse fumer la pipe et le tabac de Georges.

Exercice 14 (33.3) *La chaîne des menteurs*
On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne M_1, M_2, M_3,…de messagers menteurs, qui transmettent correctement le message avec une probabilité p, mais qui changent sa valeur avec la probabilité $1 - p$.

Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$), déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, puis une expression explicite de a_n en fonction de n, ainsi que la valeur limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

Le résultat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Exercice 15 (33.4)
Soit A et B deux événements indépendants pour une probabilité P.

1. Vérifier que les événements A et B^c, puis A^c et B, enfin A^c et B^c sont indépendants.
2. Donner une exemple où A et B sont indépendants pour une probabilité P et ne le sont pas pour une probabilité Q.

Exercice 16 (33.4)
Les jours de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants, quel que soit le temps. En mai, il pleut en moyenne deux jours sur cinq. Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie huit fois sur dix et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur vingt-cinq. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps neuf fois sur dix. Le 13 mai, jour de grève, elle annoncent toutes les deux qu'il va faire beau.

Calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

[2]Il a quitté la vie sans rancune, il n'aura plus jamais mal aux dents…cf «le testament», Georges Brassens.

Exercice 17 (33.4)

Em ersten Tag des Oktoberfestes hat der Franzl - wie es sich schickt - seine Lederhose an. Diese wird vorsichtshalber durch Gürtel und Hosenträger befestigt. Bei jedem Band des Hosenträgers stehen die Chancen, daß es zerreißen könnte, eins zu fünf, beim Gürtel eins zu fünfzehn.

1. Berechnen Sie die Whscheinlichkeit, daß an diesem Tage seine Lederhose hinunterfällt.
2. Man geht davon aus, daß er seine Hose anbehalten hat. Berechnen Sie also die Wahrscheinlichkeit, daß der Gürtel hätte platzen können.

(Die Haltbarkeit jedes Bandes und die Haltbrkeit des Gürtels sind nicht verbunden.)

Exercice 18 (33.4) *Trois face d'affilée*

On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur pile est p et la probabilité qu'elle tombe sur face est $q = 1 - p$. On considère une succession de lancers de cette pièce. Pour tout entier $n \geq 1$, on nomme B_n l'événement «aucune séquence de face de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers» et on note b_n la probabilité de B_n.

Calculer b_1, b_2, b_3. Montrer

$$\forall n \geq 4, b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}.$$

Chapter 34 Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 1 (34.0)
On lance deux dés équilibré à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 2 (34.0)
On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X. Établir la loi de X.

Exercice 3 (34.0)
On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.

On note X la variable aléatoire «nombre d'ampoules défectueuses». Déterminer la loi de X.

Exercice 4 (34.0)
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$). On étudie d'abord le cas avec remise, puis le cas sans remise.

Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $P(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
2. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 5 (34.0)
Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boule et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^\star$) ; on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
5. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Exercice 6 (34.0)
De l'autre côté du miroir[1], les lapins sont soit blancs, soit roses. La probabilité pour un lapin d'être rose est $p = 0.1$.

1. Alice rencontre deux lapins au hasard de sa promenade aléatoire. On note T le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de T.

[1] cf. Lewis Carroll.

2. Alice attrape sept lapins au hasard. On note X le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de X.

3. Alice place ces sept lapins dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de lapins roses parmi ces deux lapins.

   Établir la loi de probabilité de Y.

4. Elle installe ces deux lapins dans une cage. Sachant que si les lapins sont de sexes différents, ils auront des lapereaux blancs s'ils sont tous les deux blancs, des lapereaux roses sinon.

   Calculer la probabilité pourqu'il y ait des lapereaux roses.

Exercice 7 (34.0)
On retapisse la flopée de louchébems aux layoncrems qu'ils se carrent sur chaque loche. La proba de larguer un layoncrem est la même pour chaque loche. On dégauchit m_2 louchébems qui ont encore deux layoncrems à leur loches et m_1 qui en ont paumé un.

Soit $p = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, coller une estimation de la proportion de louchébems qui ont paumé leurs deux layoncrems.

Exercice 8 (34.0)
On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?

2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0.5 ?

3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0.4 et 0.6 (bornes incluses) ?

4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5 - \frac{a}{10}, 0.5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%.

5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Moments d'une variable aléatoire finie

Exercice 9 (34.0)

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités respective $0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2$.
   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$.
   Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \qquad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \qquad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 10 (34.0)

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire réelle associée au lancer de dé.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $E(X)$

3. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 11 (34.0)

Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc quinze dromadaires, dix chameaux et cinq lamas. Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard.

Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses photographiées.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 12 (34.0)

Marguerite élève huit poules, dont une ne possédant qu'une patte, et six canes. Son panier contient un œuf de chacune de ses pensionnaires. Elle en prend quatre au hasard pour faire une omelette avec les trois cèpes qu'elle a ramassés au lever du soleil. Soit X le nombre de pattes des poules impliquées dans la production des œufs de l'omelette.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 13 (34.0)

Dans le restaurant de Marco, on sert le café accompagné de deux sucres. La moitié des clients boivent leur café sans sucre, un tiers y plongent un seul sucre et les autres deux. À la table numéro 7, les trois clients ont commandé un café chacun.

Soit X le nombre de sucres consommés à cette table.

Établir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14 (34.0)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 15 (34.0)
Jeff Costello[2] est assis au volant de la DS qu'il doit voler pour accomplir son dernier contrat. Il a déposé près de lui le trousseau de n clefs dont deux seulement peuvent lui permettre de démarrer. Il les essaie calmement une par une, au hasard, en écartant au fur et à mesure celles qui ne conviennent pas.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de clefs qu'il lui faut essayer avant de mettre le contact.

Établir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 16 (34.0)
Andy est un ivrogne. Quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même. Quand il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. Il est licencié du chantier naval et le soir même il rendre ivre chez lui. Il reste au chômage pendant n jours. On note X le nombre de jours de sobriété de cette période.

Calculer $E(X)$.

Exercice 17 (34.0)
Ingmar a bricolé un ordinateur avec un processeur 4 bits récupéré sur le système de navigation d'un sous-marin soviétique échoué dans un fjord. Son ami Blaise y a adapté un compilateur Pascal. Dans son premier programme, il déclare une variable I, codée sur 4 bits, à laquelle il n'affecte pas de valeur. Chaque bits se trouve ainsi dans un état aléatoire: 0 avec la probabilité p et 1 avec la probabilité $1 - p$.

On note K la variable aléatoire égale à la valeur de I, en considérant I comme un nombre entier exprimé dans la base 2.

1. Établir la loi de K. Calculer $E(K)$ et $V(K)$.

2. Calculer la probabilité d'avoir un nombre pair.

3. Calculer la probabilité d'avoir un palindrome en base deux.

Exercice 18 (34.0)
On fixe un entier naturel non nul n.

Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc... On ajoute donc $k + 1$ boules noires lors de la k-ième obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre *total* de boules dans l'urne la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X.

2. Quelle est la loi de X ?

3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N.

On tire une boule de l'urne et on pose B : «la boule tirée est blanche.».

[2] *cf.* Le Samouraï

4. Démontrer rigoureusement que $P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Calculer cette somme.

On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k-ème pile, c'est-à-dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc... en doublant à chaque fois le nombre de boules noires *ajoutées*.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X.

7. Calculer $E(N')$.

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : «la boule tirée est blanche».

Exercice 19 (34.0)

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^\star$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S.

2. On suppose $\beta = 1/\alpha$. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$?

3. On suppose que $\alpha = 1 + h$ et $\beta = 1 - h$ pour $h \in]0, 1[$ donné. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$? Que vaut alors $V(S)$?

Chapter 35 Couple de variables aléatoires réelles

Exercice 1 (35.0)
Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $cov(X, Y)$. Conclusion ?

Exercice 2 (35.0)
On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 3 (35.0)
On lance un dé cubique honnête, soit X le résultat obtenu. Si X est divisible par 3, on extrait en une fois 3 boules d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. Sinon, on extrait en une fois X boules d'une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

Soit Y le nombre aléatoire de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 4 (35.0)
On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

1. Déterminer les lois de X_2 et de X_3, puis calculer leurs espérances.
2. Soit $n \geq 2$. Justifier que X_n prend ses valeurs dans $\{ 0, \dots, n-1 \}$.
   Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{ 0, \dots, n \}$, montrer
$$P\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2} P\left(X_n = k\right) + \frac{1}{2} P\left(X_n = k-1\right).$$
4. On note, pour tout $n \geq 2$, $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\forall s \in \mathbb{R}, Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = k\right) s^k.$$

(a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

(b) Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s).$$

(c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

5. Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.