Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 25 septembre 2021, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel.
2. Quand dit-on qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée ?
3. Énoncé et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. Préciser le cas d'égalité.
4. Montrer que l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini.

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Exercice 3

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x + m$.

Exercice 4

Soit $k \in]0, +\infty[$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Exercice 5

Exprimer u_n en fonction de n pour la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1.$$

Exercice 6

Résoudre les système suivants.

1. $$\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ x \quad + z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 7
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Exercice 8 *Vrai ou Faux ?*
Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Les nombres a, b, c, d étant des éléments de $\mathbb{Z}$,

1. Si a divise b et a divise c, alors a divise $2b + 3c$.

2. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.

3. L'équation $3x - 21y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

4. Si $k \in \mathbb{Z}$ et $ka \equiv kb \pmod{n}$, alors $a \equiv b \pmod{n}$.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, et k un entier premier tel que $k \mid (a+b)$ et $k \mid ab$, alors $k \mid a$.

Exercice 9
Montre que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$.
Exercice 10
Calculer par l'algorithme d'Euclide $\operatorname{pgcd}(18480, 9828)$.
Exercice 11
On considère l'équation

$$29x - 11y = 1 \tag{1}$$

dans laquelle les inconnues x et y appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. En déduire une solution particulière de l'équation (1). Donner la solution générale de cette équation.

2. On considère maintenant l'équation

$$29x - 11y = 5. \tag{2}$$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 12
15 pirates chinois se partagent un butin constitué de pièces d'or. Mais une fois le partage (équitable) effectué, il reste 3 pièces. Que va-t-on en faire ? La discussion s'anime. Bilan : 8 morts. Les 7 survivants recommencent le partage, et il reste cette fois ci 2 pièce ! Nouvelle bagarre à l'issue de laquelle il ne reste que 4 pirates. Heureusement, ils peuvent cette fois ci se partager les pièces sans qu'il n'en reste aucune.

Sachant que 32 Tsing-Tao (bière chinoise) coûtent une pièce d'or, combien (au minimum) de Tsing-Tao pourra boire chaque survivant ?

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 22 octobre 2021, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Question de Cours.

1. Définir la contraposée de l'implication $P \implies Q$.
2. À l'aide d'un exemple, montrer que l'on ne peut pas toujours permuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une assertion.
3. Quand dit-on que A est une partie de B ?
4. Donner la définition d'une application injective.
5. Donner la définition d'une application surjective.
6. Donner la définition d'une application bijective.
7. Donner un exemple de fonction injective et non surjective.
8. Donner un exemple de fonction surjective et non injective.
9. Donner la formule calculant la somme d'une progression arithmétique.
10. Donner la formule calculant la somme d'une progression géométrique.
11. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.
12. Définir la fonction arccos et donner la représentation graphique de sa courbe.
13. Compléter les formules suivantes:
    - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
    - $\tan(\pi - x) =$
    - $\sin(x + y) =$
    - $\sin(x)\cos(y) =$
    - $\cos(p) - \cos(q) =$
14. Donner les formules d'Euler.
15. Donner la formule de De Moivre.

Les définitions et formules demandées doivent (évidement) être précises et complètes.

Exercice 1

Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \to &]-\infty,-2[\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{3-x} \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. (question de cours). Définir l'image directe de A par f.
2. (question de cours). Définir l'image réciproque de B par f.
3. Démontrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Démontrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
5. Démontrer que si f est injective, alors $A = f^{-1}(f(A))$.
6. Démontrer que si f est surjective, alors $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.
7. Dans cette question, on suppose que $E = F = \{-1, 0, 1\}$ et que $f : E \to F$ est l'application qui à x associe x^2.

   L'application f est-elle injective? Est-elle surjective?

   Soit $A = \{1\}$ et $B = \{-1, 1\}$. Écrire en extension les ensembles

   $$f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f\left(f^{-1}(B)\right).$$

Exercice 3

Soient A, B, C trois ensembles et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 4

Calculer les nombres suivants:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1, \qquad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h,$$

Exercice 5

Démontrer par récurrence l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 6

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} i x^{i+j}.$$

Exercice 7

L'objectif du problème est d'étudier la somme S_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

1. Donner, sans démonstration, l'expression de $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$,

$$0 < \arctan(x+1) - \arctan(x) < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x). \tag{2}$$

4. En déduire la valeur de S_n. Puis, déterminer la limite éventuelle de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\phi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.
2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.
   (a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.
   (b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.
4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution d'une équation du second degré.
3. Déterminer l'expression exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Mardi 14 décembre 2021, 13 : 00 – 17 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. Étudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f est tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormal (unité 5 cm).

3. Calculer l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$. (On pourra faire une intégration par parties).

4. Pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$g(x)=f(\sin x).$$

Montrer que la fonction g est une primitive sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive de $f\,:\,x\mapsto\sin^2(x)\cos^2(x)$ en linéarisant son expression.

2. Calculer $\displaystyle\int_1^4\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t\mapsto\sqrt{t}$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e t^2\ln t\,\mathrm{d}t$.

4. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 x\,(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x$.

Problème 3

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A Étude de la matrice A

A1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à préciser.

A2. (a) Calculer $A - I_3$, $A - 3I_3$ puis $\left(A - 3I_3\right)^2$. Vérifier que $\left(A - I_3\right)\left(A - 3I_3\right)^2 = \mathbf{0}_3$.

(b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{9}A^2 + xA + yI_3$ avec (x, y) réels à préciser.

A3. On note $T = P^{-1}AP$ et on admet que $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose également $J = T - D$.

(a) La matrice J est-elle inversible ?

(b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $J^k = \mathbf{0}_3$.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer

$$\forall n \geq 2, T^n = D^n + n\,J\,D^{n-1}.$$

En déduire l'écriture de T^n pour $n \geq 2$.

(d) Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, A^n = P\,T^n\,P^{-1}.$$

(e) Calculer PT^n puis donner l'écriture de A^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie B Étude d'une famille de suites

On considère les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(v_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(w_n\right)_{n\geq 0}$ définies par

$$\left(u_0, v_0, w_0\right) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

B1. Déterminer $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = BX_n.$$

B2. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = B^n X_0.$$

B3. À l'aide de ce qui précède, déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de α, β, γ et n.

Partie C Commutant de la matrice A

- On utilise dans cette partie la matrice T définie à la partie **A3** par $T = P^{-1}AP$; on a donc $PTP^{-1} = A$.
- On note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$C(A) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \right\}.$$

De même, on pose

$$C(T) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TM = MT \right\}.$$

C1. Montrer

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xI_3 + yT + zT^2 \in C(T).$$

C2. Réciproquement, soit $M \in C(T)$ avec $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

(a) Calculer TM et MT.

(b) En déduire que M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = xI_3 + yT + zT^2.$$

C3. Justifier l'égalité

$$C(T) = \left\{ xI_3 + yT + zT^2 \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

C4. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Démontrer que $M \in C(A)$ si, et seulement si $N \in C(T)$.

C5. Déduire de tout ce qui précède que

$$C(A) = \left\{ \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \;\middle|\; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = \sqrt{1+t^2}. \tag{E}$$

1. Déterminer la solution $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette équation (E) telle que $f_m(1) = \sqrt{2}m$.
2. Écrire une équation de la tangente T_m au point A de coordonnées $(1, \sqrt{2}m)$, à Γ_m la courbe représentative de f_m.
3. Prouver que lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, toutes ces tangentes T_m sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 5

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0. \tag{H}$$

2. Trouver une solution $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{it}. \tag{E_1}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\cos(t) - \sin(t). \tag{E}$$

4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 29 janvier 2022, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Soit le système $AX = B$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de la matrice X.

2. Résoudre le système.

3. Calculer A^{-1}.

4. Vérifier la réponse du **2.** à l'aide de celle du **3.**.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Exercice 3

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = 11, \quad v_0 = 12, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Montrer que la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?

2. Montrer que les suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Étudier les variations de cette suite. En déduite la limite des suites (u_n) et (v_n).

Problème 4

On considère la fonction f suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x+4}{2x+3} \end{array}.$$

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les solutions de $f(x) = x$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 3}.$$

   (a) Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{2} - u_n \leq \frac{2 - u_n^2}{2}.$$

3. (a) Montrer qu'il existe des suites d'entiers naturels non nuls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

   avec

$$a_0 = b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont impairs.
   (c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 5^n \text{ et } b_n \geq 5^n.$$

   (d) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2b_n^2 - a_n^2 = 1.$$

   (e) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{2b_n^2}.$$

   (f) Étudier la limite de la suite $\left(\cos\left(\sqrt{2}b_n\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \cos(x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Déterminer la borne inférieure de A.

Problème 5

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de $Ax = 2x$, avec $x \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soient de la forme

$$x = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Déterminer un couple $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de $Ax = x$, avec $x \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soient de la forme

$$x = t \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) On pose

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(d) Calculer $D = P^{-1}AP$.

Indication : On trouvera une matrice diagonale.

(e) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'écriture de A^n comme un tableau de nombres.

2. Dans cette question, on cherche les racines carrées de A, c'est-à-dire toutes les matrice $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$X^2 = A.$$

(a) Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$.

- Montrer que $MD = DM$.
- Montrer que M est diagonale.
- En déduire les valeurs de M.

(b) Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En posant $M = P^{-1}XP$, déterminer les solutions de $X^2 = A$. On donnera la forme des solutions mais on ne calculera pas explicitement les coefficients de X.

(c) On note $X_1, \dots, X_m$ les solutions distinctes de $X^2 = A$.

- Que vaut m?
- Calculer la somme $X_1 + \cdots + X_m$.
- Calculer le produit $X_1 \times \cdots \times X_m$.

3. Dans cette question, on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Déterminer (sous forme de sommes) $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ tels que

$$E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) \\ b(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) \\ c(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ d(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{cases}$$

Calculer $E(t)$.

(c) Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = e^{2t}Q + e^t R.$$

(d) Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

(e) En déduire

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t).$$

(f) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, (E(t))^n = E(nt).$$

(g) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(t)$ est inversible et calculer $E(t)^{-1}$.

(h) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R} & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & E(t) \end{array}$$

est injective.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 12 mars 2022, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit une racine d'ordre au moins trois du polynôme

$$P = X^4 + (-a-3)X^3 + 3aX^2 + 4X - 4a.$$

Décomposer alors le polynôme P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible ?

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ (x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0 \}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 4

On considère

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Parmi les vecteurs suivants,

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

déterminer ceux qui appartiennent à Vect $\{ u, v \}$. Lorsque c'est le cas, les exprimer comme combinaison linéaire de u et v.

Exercice 5

On considère les ensembles

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Montrer que S_1 engendre $\mathbb{R}^3$, mais que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de S_1 d'une infinité de façons différentes.

Montrer que S_2 et S_3 n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + y + z, y - z, x + y) \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 7

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et les deux sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}\{ (1, -1, 1) \}.$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G. Donner l'expression de $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 2×2 à coefficients réels. On note

- F le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients diagonaux est nulle;
- $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA \right\}$.
- $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude de F.

(a) Donner une description paramétrique des matrices de F, autrement dit exhiber une famille génératrice de F.

(b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Étude de G.

(a) Donner deux matrices simples de G.

(b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à G si, et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2\}, AE_{ij} = E_{ij}A.$$

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$ pour tout $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2\}$.

(e) En déduire que G est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur.

3. Étude d'une décomposition.

(a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Soit p, le projecteur sur F parallèlement à G, et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $p(B)$.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^2 - 2u - 3\,\mathrm{Id}_E = 0.$$

1. Montrer que u est bijectif, et déterminer u^{-1}.

2. Montrer que $\mathrm{Im}\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(u + \mathrm{Id}_E\right)$ et $\mathrm{Im}\left(u + \mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right)$.

3. Déterminer $\ker\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \cap \ker\left(u + \mathrm{Id}_E\right)$. En déduire $\mathrm{Im}\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \cap \mathrm{Im}\left(u + \mathrm{Id}_E\right)$.

4. Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $u - 3\,\mathrm{Id}_E$ et $u + \mathrm{Id}_E$.

5. En déduire que $E = \mathrm{Im}\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u + \mathrm{Id}_E\right)$ puis que $E = \ker\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(u + \mathrm{Id}_E\right)$.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 30 avril 2022, $8:00 - 12:00$

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$.

2. Peut-on déduire du développement limité du **1.**, *sans nouveaux calculs*, que (justifier avec soin):

(a) f est continue en 0 ?
(b) f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
(c) f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et préciser la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 2

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $u_1 = (3,1)^T$ et $u_2 = (5,2)^T$.

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
(c) Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
(d) Soit $u \in \mathbb{R}^2$; on note (a, b) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et (α, β) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.
Exprimer a et b en fonction de α et β, puis α et β en fonction de a et b.

2. On considère une troisième base $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ soit $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer v_1 et v_2.
(b) Soit $x = (x_1, x_2)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
On note X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, X' la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$, X'' la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}''$.
Laquelle des relations suivantes est-elle vérifiée:

$$X' = QRX'' \qquad X'' = RPX' \qquad X' = RQX'' \quad ?$$

Exercice 3

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, -x - 2y - 5z, x + y + 3z).$$

1. (a) Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
   (c) L'application f est-elle bijective ?
   (d) Déterminer $\ker f$. Donner une base de $\ker f$.
   (e) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} f$. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

2. On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$

$$u = (-4, 1, 3) \qquad v = (2, 0, -1) \qquad w = (-1, 1, 1).$$

   (a) Justifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
   (c) Calculer la matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit p un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note (a, b, c) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et (α, β, γ) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Exprimer a, b, c à l'aide de α, β, γ et α, β, γ à l'aide de a, b, c.

4. Déterminer la matrice C de $f \circ f$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Problème 4 *Analyse*

Partie A Une première fonction

Soit la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.

A1. Obtenir l'ensemble de définition D de f.

A2. f est-elle dérivable en 0 ?

A3. Justifier que f est de classe C^1 sur $[0; 1[$.

A4. Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$.

Partie B Étude d'une suite

Soit v la suite telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.

B1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}$.

B2. Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B3. Montrer que $\forall x \geqslant \mathrm{e}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

B4. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

B5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

B6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Partie C Une seconde fonction

Soit la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$.

On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

C1. Étudier les variations de g.

C2. Déterminer la limite de g en 1.

C3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI1 et PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Lundi 23 mai 2022, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Concours Blanc PTSI

Exercice 1 *Étude d'une fonction et d'une suite récurrente*
On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = 2xe^x.$$

Partie A Étude d'une fonction et de sa réciproque

A1. Donner le tableau de variations de f.

A2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que vous préciserez.

A3. On note $f^{-1} : J \to [0,1]$ la bijection réciproque. La fonction f^{-1} est-elle continue ?

A4. Donner le tableau de variation de f^{-1}.

A5. La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur l'intervalle J (justifier soigneusement votre réponse).

A6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On notera α cette solution. Montrer que $\alpha \neq 0$.

Partie B Étude d'une suite

On définit la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}\left(u_n\right).$$

B1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1]$.

B2. Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, on a $f(x) - x \geq 0$. Vérifier que le cas d'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

B3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

B4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.

Partie C Recherche d'un équivalent

On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

C1. Montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et croissante.

C2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}.$$

C3. En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$

C4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer également que sa limite, notée L est comprise entre α et 2.

C5. Montrer finalement que lorsque $n \to +\infty$,

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}.$$

Exercice 2 *Algèbre linéaire et probabilités*

Partie A Étude d'un endomorphisme

Soit f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par

$$f(P) = (X-1)P' + P.$$

A1. Rappeler la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Justifier.

A2. Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

A3. Écrire la matrice, notée A, de f dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

A4. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

A5. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

On considère les polynôme R_0, R_1, R_2 définis par

$$R_0 = 1. \qquad R_1 = X - 1. \qquad R_2 = (X-1)^2.$$

A6. Montrer que la famille de polynôme $\left(R_0, R_1, R_2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

A7. Écrire la matrice, notée D, de f dans la base $\left(R_0, R_1, R_2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

A8. Écrire la matrice de passage Q de la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ à la base $\mathcal{B}' = \left(R_0, R_1, R_2\right)$.

A9. Rappeler la relation entre A, D, Q, Q^{-1}. On précisera la matrice Q^{-1}.

A10. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left(A^{-1}\right)^n = Q\left(D^{-1}\right)^n Q^{-1}.$$

Expliciter les coefficients de $\left(A^{-1}\right)^n$.

Partie B Étude d'une suite de variables aléatoires

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées 0, 1 et 2. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante:

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j. Le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la k-ème épreuve ($k \in \mathbb{N}^\star$).

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note U_k la matrice colonne définie par

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\left(X_k = 0\right) \\ \mathbf{P}\left(X_k = 1\right) \\ \mathbf{P}\left(X_k = 2\right) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{P}\left(X_k = j\right)$ est donc la probabilité de tirer la boule numérotée j lors de la k-ème épreuve.

B1. Déterminer la matrice U_1.

B2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

B3. Pour tout couple $(i, j) \in \{\ 0, 1, 2\ \}^2$, expliciter

$$\mathbf{P}_{(X_k=i)}\left(X_{k+1} = j\right).$$

B4. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul,

$$U_{k+1} = A^{-1} U_k.$$

B5. Écrire U_k en fonction de k, A^{-1} et U_1.

B6. Déterminer pour tout entier naturel k non nul, la loi de la variable aléatoire X_k.

B7. Vérifier que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}\left(X_k = 0\right) = 1 \qquad \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}\left(X_k = 1\right) = 0 \qquad \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}\left(X_k = 2\right) = 0.$$

Ce résultat était-il prévisible?

Exercice 3 *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$2xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1-x} \tag{E}$$

Partie A Résolution de (E) sur l'intervalle $]0, 1[$

A1. Décomposer en éléments simples la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$.

A2. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, déterminer les primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}.$$

sur l'intervalle $]0, 1[$.

A3. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]0, 1[$.

A4. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$.

A5. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

A6. Parmi les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$, déterminer celles qui sont prolongeables par continuité au point 0.

Partie B Résolution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$

B1. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-x}$, déterminer les primitives sur $]-\infty, 0[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}.$$

B2. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

B3. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

B4. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$t \mapsto \arctan(t).$$

B5. Parmi les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, déterminer celles qui sont prolongeables par continuité au point 0.

Partie C Recherche des solutions éventuelles de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 1[$

C1. Montrer que la seule fonction possible solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ est la fonction y_0 vérifiant

$$\begin{cases} y_0(x) = \dfrac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ y_0(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Préciser alors la valeur de $y_0(0)$.

C2. Montrer que la fonction y_0 est effectivement la seule solution de l'équation (E) définie sur $]-\infty, 1[$.