Chapter 1 Corps des nombres réels

Exercice 1 (1.1)
Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \dfrac{1}{6} = 1$.
2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.
3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.
4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.
5. $5 + (-5) = 0$.
6. $18 \cdot 1 = 18$.
7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.
8. $23 + 6 \ = 6 + 23$.
9. $3 \ + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 2 (1.1)
Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.
2. $5 + 0 = 5$.
3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.
4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.
5. $8\,(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

Exercice 3 (1.1)

Soit $x = 18,715151515151515\ldots$ noté $x = 18,7\overline{15}$.

Montrer que $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4 (1.2)

Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Exercice 5 (1.2)

Encadrer $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

Exercice 6 (1.2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-1| < |x-2|$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 7 (1.2)

Résoudre l'inéquation

$$3|x-2| - 2|x-1| \geq |x-4| - \frac{1}{4}(2x-11). \tag{E}$$

Exercice 8 (1.2)

Résoudre les équations

1. $|x+1| = 3$;
2. $|x+5| = |x+7|$;
3. $|x+3| = x-1$;
4. $|x| = x-1$;
5. $x+4 = 3|x|$;
6. $|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10|$;
7. $|1-x| = x-1$.

Exercice 9 (1.2)

Trouver n, entier naturel, pour que $\dfrac{n}{13} < \dfrac{110}{17} < \dfrac{n+1}{13}$.

Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\dfrac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Exercice 10 (1.2)

Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π.

On rappelle que $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971\ldots$.

Exercice 11 (1.2)

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$.

3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 12 (1.2)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 13 (1.2)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 14 (1.2)
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

1. $]-4, 6]$.

2. $[-1, 0[$.

3. $[3, +\infty[$.

4. $\mathbb{R}^\star$.

5. $\mathbb{Z}$.

6. $\mathbb{N}$.

7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\}$.

8. $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$.

9. $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$.

Exercice 15 (1.2)
Il paraît peu vraisemblable que $\mathbb{N}$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que $\mathbb{N}$ est majoré.

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n+1$ majore n ; puisque chaque élément de $\mathbb{N}$ est majoré, nous pouvons conclure que $\mathbb{N}$ est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Exercice 16 (1.3)
Écrire chacun des produits suivants en utilisant des puissances.

1. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

3. $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$.

4. $7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$.

5. $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$.

6. $3 \cdot w \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.

7. $8 \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

8. $\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t$.

Exercice 17 (1.3)
Développer chaque expression afin de supprimer les puissances.

1. x^3.

2. y^4.

3. $(2b)^3$.

4. $(8c)^2$.

5. $10y^5$.

6. x^2y^3.

7. $2wz^2$.

8. $3a^3b$.

Exercice 18 (1.3)
Simplifier les expressions suivantes.

1. 5^2.
2. 4^3.
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^2$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
5. $(0.25)^3$.
6. $(0.8)^2$.
7. 2^6.
8. 13^2.

Exercice 19 (1.3)
Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{81}$.
2. $\sqrt{64}$.
3. $\sqrt{4}$.
4. $\sqrt{9}$.
5. $\sqrt{100}$.
6. $\sqrt{49}$.
7. $\sqrt{16}$.
8. $\sqrt{36}$.
9. $\sqrt{\frac{1}{9}}$.
10. $\sqrt{\frac{1}{64}}$.
11. $\sqrt{\frac{25}{81}}$.
12. $\sqrt{\frac{49}{100}}$.

Exercice 20 (1.3)
Effectuer les calculs indiqués.

1. $(-7)^2$.
2. $(9)^2$.
3. $(-10)^3$.
4. $(+8)^3$.
5. $(-11)^2$.
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.
7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.
8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.
9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$.
10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.
13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$.
14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.
15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$.
16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1}$.
17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.
18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$.

Exercice 21 (1.3)
Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.

2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.

3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.

4. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.

5. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.

6. $\dfrac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Exercice 22 (1.3)
Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.

3. $2^x + 4^x = 20$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2$.

Exercice 23 (1.3)
On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Exercice 24 (1.3)
Simplifier les expression suivantes.

1. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \sqrt{12}$.

2. $\sqrt{\dfrac{7}{5}} - \sqrt{\dfrac{125}{49}} + \sqrt{\dfrac{25}{7}}$.

3. $\sqrt{4(1-x)^2}$.

4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}$.

5. $\sqrt{32(x+4)^2}$.

6. $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})}$.

7. $\sqrt{1 - 2\sqrt{x} + x}$.

Exercice 25 (1.3)
Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Exercice 26 (1.3)
Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Exercice 27 (1.3)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$;
2. $2x^2 + 8x + 8 = 0$;
3. $(x-1)^2 = \frac{1}{4}$;
4. $x^2 + x + 1 = 0$;
5. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$.

Exercice 28 (1.3)
Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?
Exercice 29 (1.3)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Exercice 30 (1.3)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4 - x| = x$.
2. $|x^2 + x - 3| = |x|$.
3. $|x+2| + |3x-1| = 4$.
4. $\sqrt{1-2x} = |x-7|$.
5. $x|x| = 3x + 2$.
6. $x + 5 = \sqrt{x+11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \frac{2}{x}$.

Exercice 31 (1.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 32 (1.3)
Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x-1) \end{cases}$.

Exercice 33 (1.3)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}$.

3. $\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}$.

Exercice 34 (1.3)
Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2 y = m \end{cases}$.

Exercice 35 (1.3)
Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 36 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + 6x_3 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 37 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 38 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array} \right. \tag{3}$$

Exercice 39 (1.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Exercice 40 (1.3)
Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array} \right.$$

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

Exercice 1 (2.1)
Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives et $a > 0$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq a u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq a^n u_0.$$

Exercice 2 (2.1)
Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 (2.1)
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 4 (2.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 7, u_1 = -\frac{1}{10}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n.$$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 5 (2.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n.$$

Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2.$$

Exercice 6 (2.2)
Soit une suite géométrique (u_n). Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison q) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_6 = 96$ et $q = 2$;
2. $u_1 = 72$ et $u_4 = -8/3$;
3. $u_3 = 40$ et $u_7 = 640$.

Exercice 7 (2.2)
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

   $$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$$

   est une suite géométrique.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 8 (2.2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 9 (2.2)
Soit $p_0 = 10000$ une population initiale de lapins. On suppose que le taux de reproduciton annuel est de 3 par couple (tous les individus se reproduisent et font partie d'un unique couple). De plus, à la fin de chaque année, la population est diminuée par la vente d'une quantité fixe de 1000 individus. Déterminer la population au bout de 50 ans.

Chapter 3 Arithmétique des entiers

Exercice 1 (3.1)
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6n} - 6^{2n}$.
Exercice 2 (3.1)
Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
2. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
3. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
4. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
5. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 3 (3.1)
Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.
Exercice 4 (3.2)
Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3.
Exercice 5 (3.2)
Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2022} par 11.
Exercice 6 (3.2)
Déterminer les nombres entiers x tels que $x^2 - 2x + 2$ soit divisible par 17.
Exercice 7 (3.3)
Les nombres a, b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
2. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.
3. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
4. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
5. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.

Exercice 8 (3.3)
Résoudre l'équation $xy + 6x - 3y = 40$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Exercice 9 (3.3)
Combien 15! admet-il de diviseurs positifs ?
Exercice 10 (3.4)
Calculer $\text{pgcd}(424, 68)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 11 (3.4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en discutant éventuellement suivant les valeurs de n, le pgcd des entiers suivants.

$$A = 9n^2 + 10n + 1 \qquad \text{et} \qquad B = 9n^2 + 8n - 1.$$

Exercice 12 (3.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Calculer pgcd $\left(5^n - 1, 5^{n+1} - 1\right)$.

Exercice 13 (3.4)
On considère l'équation $(E) \,:\, 26x + 15y = 1$ dans laquelle les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour les nombres 26 et 15.
2. En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).
3. Utiliser ce qui précède pour résoudre l'équation $26x + 15y = 4$.

Exercice 14 (3.4)
Écrire une fonction `pgcd`, ayant pour argument deux entiers `a` et `b`, et qui retourne leur pgcd.
On utilisera l'algorithme d'Euclide.

Exercice 15 (3.4)
Écrire une fonction `crible` ayant pour argument un entier `n` et qui retourne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
On utilisera l'algorithme du crible d'Eratosthène.

Chapter 4 La logique des logiciens

Exercice 1 (4.2)
Démontrer que $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.
Exercice 2 (4.2)
Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \implies Q$,

2. P et non Q,

3. P et (Q et R),

4. P ou (Q et R),

5. (P et Q) $\implies$ ($R \implies S$).

Exercice 3 (4.2)
Écrire les affirmations suivantes en utilisant les symboles $\implies$, $\geq$, $>$, $\neq$ et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit supérieur à 2.

2. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit supérieur à 2.

3. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

Exercice 4 (4.3)
Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.

2. Il existe un nombre réel qui est strictement supérieur à son carré.

3. Il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.

4. Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

Exercice 5 (4.3)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.

2. La fonction f ne s'annule jamais.

3. La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction f ne prend que deux valeurs a et b distinctes.

5. La fonction f est une fonction impaire.

Exercice 6 (4.3)
Vrai ou Faux ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \, (|x| = x \text{ ou } |x| = -x)$.

2. $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x)$.

3. $\exists z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, x = y + z$.

5. $\exists ! x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, y = x^2$.

6. $\exists ! y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \geq 2n$.

8. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \leq 2n$.

Exercice 7 (4.3)
Vrai ou Faux ? Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies \left\{ \begin{array}{ll} & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ \text{ou} & \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 8 (4.4)
Que peut-on dire de l'ensemble $E = \{ x \in A \mid P(x) \}$ lorsque

1. «$\forall x \in A, P(x)$» ?
2. «$\exists x \in A, P(x)$» ?

Exercice 9 (4.4)
Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $(A \subset C \ \underline{\text{et}}\ B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.
3. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.
4. $(A \subset B) \implies (A \cap C \subset B \cap C)$.
5. $(A \subset B) \implies (A \cup C \subset B \cup C)$.
6. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cup C \subset B \cup D)$.
7. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cap C \subset B \cap D)$.

Exercice 10 (4.4)
Lesquelles des assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $2 \in \mathbb{N}$.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$.
3. $2 \subset \mathbb{N}$.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 11 (4.4)
Écrire en extension l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; z^3 = \overline{z} \right\}.$$

Exercice 12 (4.4)
Soient a, b deux réels avec $a < b$. Prouver par double inclusion que

$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \} .$$

Exercice 13 (4.4)
Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{ 0, 1 \}$.

Exercice 14 (4.4)

1. Soit $E = \{ -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \}$.
   Donner une définition de l'ensemble E sans avoir à énumérer ses éléments.
2. Même question avec l'ensemble $F = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$.
3. Décrire comme ci-dessus l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

Exercice 15 (4.4)
Quel est le produit cartésien des ensembles

$$A = \{ \text{as}, \text{roi}, \text{dame}, \text{valet}, 10, 9, 8, 7 \} \quad \text{et} \quad B = \{ \text{cœur}, \text{carreau}, \text{trèfle}, \text{pique} \} .$$

Exercice 16 (4.4)
Soient A et B des ensembles. Donner les rédactions des énoncés du type

1. $P \implies Q$, en distinguant raisonnement direct et par contraposée, par l'absurde.
2. $P \iff Q$.
3. $A \subset B$.
4. $A = B$.
5. $A \cap B = \{ 0 \}$.
6. $\forall x \in A, P(x)$.
7. $\exists x \in A, P(x)$.
8. $\exists! x \in A, P(x)$.
9. $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$, où expr_1 et expr_2 sont deux expressions données.
10. $(i) \iff (ii) \iff (iii)$.

Chapter 5 Vocabulaire relatif aux applications

Exercice 1 (5.2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \}$ comme une image réciproque.

Exercice 2 (5.2)
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer

1. $f(2)$,
2. $f(\{ 2 \})$,
3. $f(\{ -1, 0, 1, 2 \})$,
4. $f^{-1}(4)$,
5. $f^{-1}(\{ 4 \})$,
6. $f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})$,
7. $f\left(f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})\right)$,
8. $f^{-1}(f(\{ -1, 0, 1, 2 \}))$,
9. $f([1, 2])$,
10. $f([-1, 4[)$,
11. $f^{-1}(]1, 2])$,
12. $f^{-1}([-1, 4])$,
13. $f(\mathbb{R})$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R})$,
15. $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3 (5.2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f (sur $\mathbb{R}$).
2. Déterminer (graphiquement) $f([0, 2])$ et $f^{-1}([0, 2])$.

Exercice 4 (5.2)
Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $\phi(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (5.2)
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \left(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3\right) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{ (0, 0, 0) \})$.
2. Soit $P = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + 3c = 0 \right\}$. Déterminer $f^{-1}(P)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $\Delta = \{ (t, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Déterminer $f(\Delta)$.
5. Soit $Q = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + c = 0 \right\}$. Déterminer $f(Q)$.

Exercice 6 (5.2)
Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 7 (5.2)
Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 8 (5.4)
Donner, pour chacun des énoncés suivants, une formulation du type «l'application de …vers …qui à tout …associe …est (n'est pas) injective (surjective)».

1. Dans mon quartier, il y a deux personnes qui ont le même modèle de voiture.
2. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
3. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
4. Toute ville de France possède au moins une église.
5. Il y a des villes de France qui ont plusieurs églises.
6. Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée réelle.
7. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
8. On peut avoir $a + b = c + d$ sans que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 9 (5.4)
On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n-1, & n > 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer $g \circ f$.
2. Les applications f et g sont-elles bijectives ? Que dire de $f \circ g$?

Exercice 10 (5.4)
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$.

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2-y^2) \end{array}$.

4. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^3) \end{array}$.

5. $\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^2) \end{array}$.

Exercice 11 (5.4)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. On considère un élément $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{ (u,v) \})$. (Les notations sont-elles correctes ?)

2. f est-elle injective ? surjective ?

3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leq y \right\}$ et ϕ la restriction de f à D. L'application ϕ est-elle injective ?

Exercice 12 (5.4)

1. Une application admet un point fixe s'il existe x tel que $f(x) = x$. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.

2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 13 (5.4)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{ iy \mid y \in \mathbb{R} \}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

1. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer, selon la valeur du complexe Z le nombre d'antécédents de Z par f.
   L'application f est-elle injective ?
   L'application f est-elle surjective ?
   Lorsque Z possède deux antécédents, que valent leur somme et leur produit ?

4. On note

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| = 1 \right\}, \qquad V_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| < 1 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| > 1 \right\}.$$

   (a) Que représentent géométriquement les ensemble $\mathbb{U}$, V_1, V_2 ?
   (b) Montrer que $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{U}$.
   (c) Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer

$$z_1 z_2 = 1 \implies \left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{U}^2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_1 \times V_2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_2 \times V_1.$$

(d) Démontrer que f réalise une bijection de V_1 sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
On notera $g : \begin{array}{ccc} V_1 & \to & \mathbb{C} \setminus [-1,1] \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$.

Exercice 14 (5.4)
Soit f une application de E dans E telle que

$$f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E .$$

Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 15 (5.4)
Soient trois ensembles A,B,C et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que g ne l'est pas nécessairement.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que f ne l'est pas nécessairement.

3. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective sans que ni g ni f ne le soit.

Exercice 16 (5.5)
Donner une écriture simple les ensembles suivants.

1. $I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$.

2. $I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$.

3. $I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$.

4. $I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$.

Chapter 6 Calculs algébriques

Exercice 1 (6.1)
Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Exercice 2 (6.1)
Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$
8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Exercice 3 (6.1)

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 4 (6.1)
En remarquant que l'on peut écrire
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$
où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 5 (6.1)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 6 (6.1)
Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 7 (6.1)

1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Exercice 8 (6.2)
Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} i.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n.$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k.$
6. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} k.$
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} i.$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n.$

Exercice 9 (6.2)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta).$$

Exercice 10 (6.2)
Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Exercice 11 (6.2)
Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Exercice 12 (6.2)
Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.

2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.

3. Le terme en x^6 du développement de $(3-4x^2)^5$.

4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{14}$.

Exercice 13 (6.2)
Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4, dans le développement de

$$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

Exercice 14 (6.2)
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Exercice 15 (6.2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1}$.

Exercice 16 (6.2)
Soit x un réel fixé. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left((k-1)x\right).$$

Exercice 17 (6.2)
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.

3. Montrer par récurrence que : $\forall a \in \mathbb{N}$, on a $a^p \equiv a \pmod p$.

Exercice 18 (6.2)
Soit une suite arithmétique (u_n), on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$;

2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$;

3. $r = 6$ et $s_5 = 36$;

4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$;

5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$;

6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

Exercice 19 (6.2)
Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 20 (6.3)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.

4. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$.

5. $\displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq n} x^{i+j}$.

6. $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$.

7. $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$.

8. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$.

9. $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}$.

Exercice 21 (6.3)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} i + j$.

2. Calculer la somme
$$S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j).$$
On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$.

Remarque. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note
$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i,j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 22 (6.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Chapter 7 Fonctions circulaires

Exercice 1 (7.1)
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

Exercice 2 (7.2)
Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sachant que $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Exercice 3 (7.2)
Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Exercice 4 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Exercice 5 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6 (7.3)
Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

Exercice 7 (7.3)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 2 = 0. \tag{1}$$

Exercice 8 (7.3)
Résoudre l'inéquation

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0. \tag{1}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 9 (7.3)
Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.

2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.

3. La résoudre pour $m = 1$.

Exercice 10 (7.3)

Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \phi) + B$, A, B et ϕ étant des constantes réelles.

Exercice 11 (7.5)
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1 - 2x)$.
2. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \arccos \sqrt{x(4 - x)}$.

Exercice 12 (7.5)
Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos \frac{89\pi}{3}\right).$$

Exercice 13 (7.5)
Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 14 (7.5)
Calculer $2\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{7}{25}$.

Exercice 15 (7.5)
Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.

3. Soit $x \in [0, \pi/2]$, que vaut $f(x)$?

4. Soit $x \in [\pi/2, \pi]$, que vaut $f(x)$?

5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

6. Résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \pi$.

7. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in I_k$.

Exercice 16 (7.5)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice 15 (7.5).
Exercice 17 (7.5)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice 15 (7.5).
Exercice 18 (7.5)
Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 19 (7.5)
Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Problème 20 (7.5) *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :

(a) $\arctan(\tan(x)) = x$;

(b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Remarque. Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

Exercice 1 (8.1)
Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1 - 2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2 + i)^3$.
6. $z_6 = (1 + i)^2 - (2 - i)^2$.

Exercice 2 (8.1)
Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3 + i)(2 - 3i)(4 + 5i)$.
2. $z_2 = (1 + i)^{10}$.
3. $z_3 = (2 - i)^4$.

Exercice 3 (8.2)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1 + 4i)z + (1 - 2i) = iz + 3$
2. $\dfrac{1 + 3iz}{1 + 3z} = i\dfrac{z + 2}{z - 5}$

Exercice 4 (8.2)
Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Exercice 5 (8.3)
Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1 + i$;
2. $1 - i\sqrt{3}$;
3. i ;
4. $-2\sqrt{3} + 2i$;
5. $2 + i$;
6. 17 ;
7. $-3i$;
8. $-\pi$;
9. $-12 - 5i$;
10. $-5 + 4i$.

Exercice 6 (8.3)
Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 7 (8.3)

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 8 (8.3)

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 9 (8.3)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z-2| = 3$.
2. $|2z - 1 + i| = 4$.
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.
4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Exercice 10 (8.3) *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 11 (8.3)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
2. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.
3. $1 + i\tan\alpha$.
4. $\cos\alpha + i(1+\sin\alpha)$.
5. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.
6. $\dfrac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\beta + i\sin\beta}$.
7. $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$.
8. $e^{i\beta} + e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Exercice 12 (8.3)

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 13 (8.3)

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Exercice 14 (8.4)
Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.
Exercice 15 (8.4)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0. \tag{1}$$

Exercice 16 (8.4)
Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.
Exercice 17 (8.4)
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Exercice 18 (8.4)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \tag{1}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.
Exercice 19 (8.4)
Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Exercice 20 (8.5)
Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Problème 21 (8.5)
Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{2}$$

3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{3}$$

4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{4}$$

5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.

6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$

7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 22 (8.6)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

Chapter 9 Notions sur les fonctions en analyse

Exercice 1 (9.1)

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1+2x^2-x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

Exercice 2 (9.2)

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

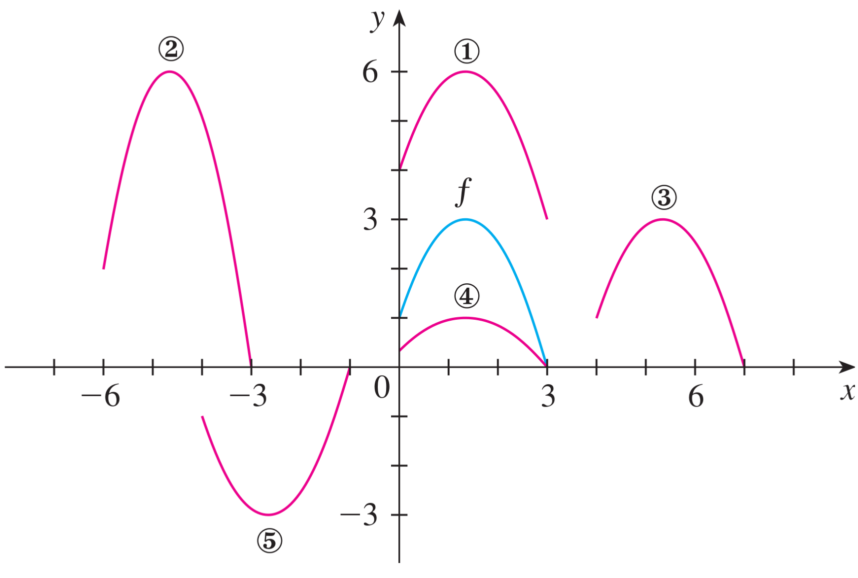
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x) + 3$

(e) $y = -f(x+4)$



Exercice 3 (9.2)

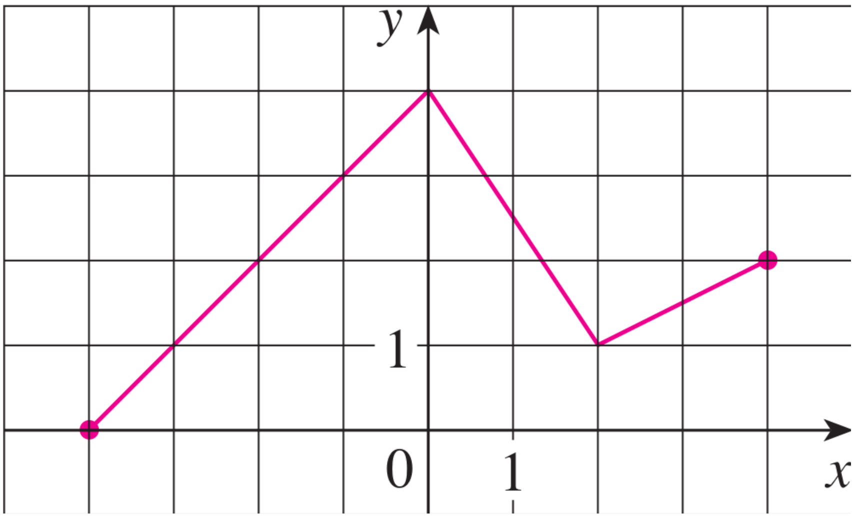
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

(b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 4$



Exercice 4 (9.2)

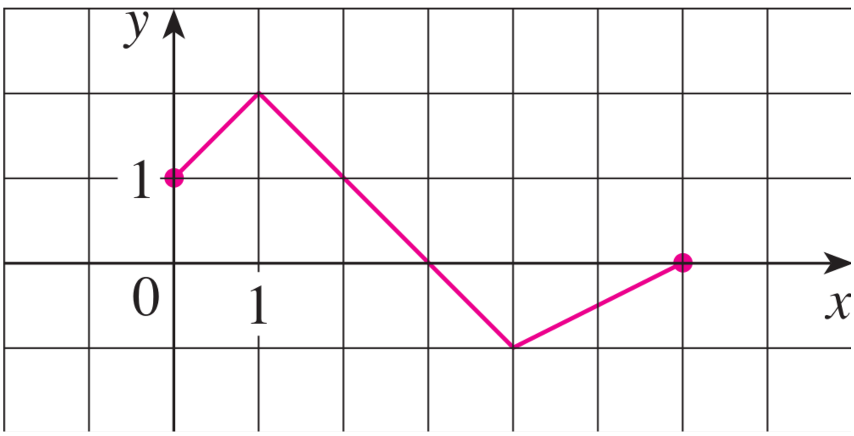
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

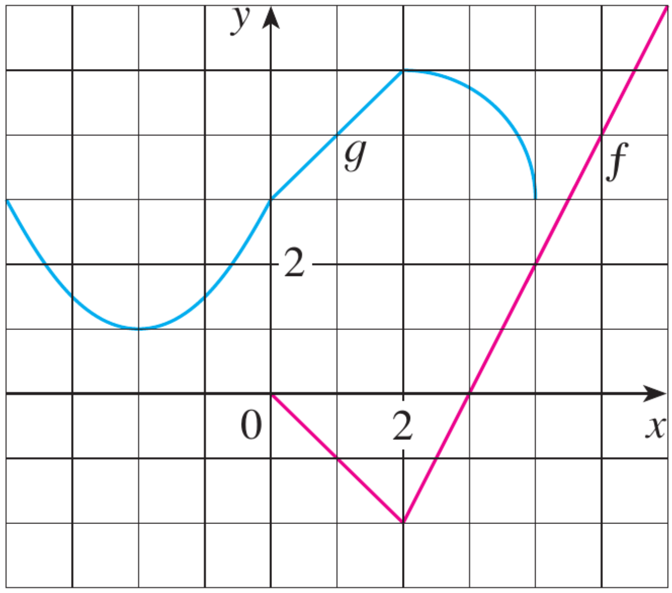
(d) $y = -f(-x)$



Exercice 5 (9.2)

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

1. $f(g(2))$.
2. $(g \circ f)(6)$.
3. $g(f(0))$.
4. $(g \circ g)(-2)$.
5. $(f \circ g)(0)$.
6. $(f \circ f)(4)$.



Exercice 6 (9.3)
La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?
2. Croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?
3. Croissante ?
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?
5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?
6. Strictement croissante ?

Exercice 7 (9.3)
Vrai ou Faux ?
Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.
4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.
6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.
7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.
8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Exercice 8 (9.3)
Soient A,B,C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g \circ f$ croissante	$g \circ f$ décroissante
g décroissante	$g \circ f$ décroissante	$g \circ f$ croissante

Exercice 9 (9.4)
Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Exercice 10 (9.4)
Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?

Exercice 11 (9.4)
Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f\,:\,x \mapsto \sin x - \sin 3x$;
2. $f\,:\,x \mapsto \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$;
3. $f\,:\,x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Chapter 10 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 1 (10.1)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.
2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation

   $$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$

   suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 2 (10.2)
Résoudre

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Exercice 3 (10.2)
Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1| - 3\ln(x^2+1)}$.

Exercice 4 (10.2)
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Exercice 5 (10.2)
Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation

$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{1}$$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.

Exercice 6 (10.2)
Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Exercice 7 (10.2)

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\phi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (10.2)

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \le a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 9 (10.2)
Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \le 2^x$.

2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.

3. $x^{(x^2)} \le \left(x^2\right)^x$.

Exercice 10 (10.2)
Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

Exercice 11 (10.3)
Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Exercice 12 (10.3)
Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x .$$

Exercice 13 (10.4)
Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Exercice 14 (10.4)
Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Chapter 11 Calculus

Exercice 1 (11.0)

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 2 (11.0)
Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$
2. $x^{-1/\sqrt{2}}$
3. $(x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1+x}{1-x}$
5. $\dfrac{7x-3}{x+2}$
6. $\log x$
7. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 1}{2x^2 + x - 3}$

Exercice 3 (11.0)
Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\ln(\sin x)$
2. $\arctan(\ln x)$
3. $e^{\cos x}$
4. $\tan^3 x$
5. $\arcsin\left(e^x\right)$
6. $\sin(\ln x)$
7. $\sin(\sin x)$
8. $\arctan(\tan x)$
9. e^{e^x}
10. $\arcsin(\cos x)$

Exercice 4 (11.0)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $f\left(x^2\right)$
2. $f(\sin x)$
3. $f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$
4. $\sin\left(f(x)\right)$
5. $\dfrac{1}{f(x)^{3/2}}$
6. $\ln\left(f\left(e^x\right)\right)$.

Exercice 5 (11.0)
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1, 4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2, 2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2, 8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1, 2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1, 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5, 2)$.

7. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ au point $A(4, 5)$.

8. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au point $A(0, 1)$.

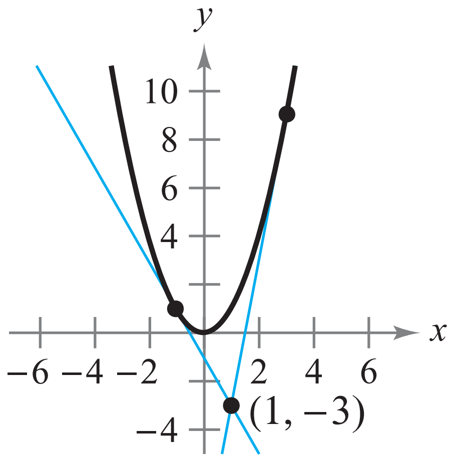
Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Exercice 6 (11.0)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 7 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Exercice 8 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.

Exercice 9 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 10 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 11 (11.0)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 12 (11.0)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Exercice 13 (11.0)
Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x+1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 14 (11.0)
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.
2. On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.
3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1 - e)$.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

Exercice 1 (12.3)
Effectuer les produits des matrices.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (12.3)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont définies ? Calculer les.

1. Ad
2. $AB + C$
3. $A + C^T$
4. $C^T C$
5. BC
6. $d^T B$
7. Cd
8. $d^T d$
9. dd^T.

Exercice 3 (12.3)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel ABC.

Exercice 4 (12.3)
Déterminer, si possible, une matrice A et un scalaire x tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (12.3)
Soit $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer aa^T et $a^T a$.

Exercice 6 (12.4)
Pour toute matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Calculer $\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

On dit que la trace est linéaire.

3. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

4. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

5. Trouver trois matrices A, B, C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(BAC)$.

Exercice 7 (12.4)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère les matrices $A = \left(a_{i,j}\right)$ et J la matrice dont tous les termes sont égaux à 1.

Calculer le produit JAJ.

Exercice 8 (12.4)
Résoudre

$$A(X+B) - (C+D)X = A(A-X) - C(B+X)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (12.5)
Soit A et B deux matrices (n, n) inversibles. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 10 (12.5)
Soit deux matrices A et B telles que A et AB soient inversibles. On suppose

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}. \tag{1}$$

Déterminer B.

Exercice 11 (12.5)
Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système de quatre équations donné par l'équation matricielle $BC = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier alors que B est inversible en utilisant la définition de matrice inverse.

3. Vérifier à nouveau votre solution en calculant B^{-1} à l'aide du déterminant.

Exercice 12 (12.5)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice unité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
Exercice 13 (12.5)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
Exercice 14 (12.6)
On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
Exercice 15 (12.6)
On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = I_3 + B$, calculer les puissances de A.
Exercice 16 (12.6)
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_p$.

1. Démontrer qu'il existe deux suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_nA + b_nI_p$.

2. En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, vérifier que $X_{n+1} = BX_n$ pour une certaine matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

   On suppose que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1}BP$ est diagonale ; les coefficients de cette dernière seront exprimés uniquement en fonction de r_1 et r_2.

4. En déduire une expression simple de a_n et b_n en fonction de n, r_1 et r_2.

Exercice 17 (12.7)
Résoudre l'équation d'inconnue A

$$\left(5A^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)^T = 3A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1}$$

Exercice 18 (12.7)
Déterminer la matrice A si
$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 (12.7)
Soit A un matrice (m, n) et B une matrice (n, n). Simplifier l'expression
$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1} A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1}$$
en supposant que les matrices inverses apparaissant dans l'expression sont bien définies.

Exercice 20 (12.7)
Soit A une matrice carrée (n, n).

1. Montrer que la matrice $A + A^T$ est symétrique et que la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.

2. Montrer que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 21 (12.7)

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ un matrice (m, n) sur le corps $\mathbb{R}$. Calculer $\operatorname{Tr}\left(AA^T\right)$. En déduire
$$AA^T = 0 \implies A = 0 \text{ et } A^T = 0.$$

2. Les matrices A, B, et C étant de dimensions convenables, prouver
$$BAA^T = CAA^T \implies BA = CA.$$
On se ramènera à la propriété précédente.

Exercice 22 (12.7)
Soit B une matrice (m, k). Montrer que la matrice $B^T B$ est une matrice symétrique (k, k).

Chapter 13 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 (13.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 2×2. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Exercice 2 (13.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 3×3. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Exercice 3 (13.3)
Écrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants. Puis résoudre le système en réduisant chacune des matrices sous forme échelonnée réduite.

1. $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & = -3 \\ -3x & +4y & -z & = 2 \\ x & -3y & -2z & = 7 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +3z & = 4 \\ x & +y & -z & = 1 \\ 5x & +2y & & = 7. \end{array}\right.$$

Interpréter géométriquement chacune des solutions précédente comme l'intersection de plans.

Exercice 4 (13.3)
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & -3z & = 0 \\ 3x & -2y & +10z & = 0 \\ -2x & +3y & -5z & = 0 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & -3z & = 6 \\ 3x & -2y & +10z & = -10 \\ -2x & +3y & -5z & = 9. \end{array}\right.$$

Exercice 5 (13.3)
Déterminer une représentation paramétrique de droite intersection des plan d'équation cartésienne

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{et} \qquad x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Quelle est l'intersection de ces deux plan et du plan d'équation cartésienne

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \text{ ?}$$

Exercice 6 (13.3)

1. Résoudre le système d'équations $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

   en utilisant le procédé d'élimination de Gauß-Jordan.

2. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + tv$, où $t \in \mathbb{R}$.

3. Vérifier votre solution en calculant Ap et Av.

4. Déterminer une matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à A. En utilisant cette forme réduite, répondre aux questions suivantes.

(a) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ est incompatible?

(b) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ a une unique solution?

Exercice 7 (13.3)
Déterminer la forme échelonnée réduite par ligne de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si C est la *matrice augmentée* d'un système d'équations $Ax = b$, $C = (A|b)$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

2. Si C est la *matrice des coefficients* d'un système homogène d'équations, $Cx = 0$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

3. Soit $w = (1, 0, 1, 1, 1)^T$. Déterminer d tel que $Cw = d$. En déduire les solutions du système $Cx = d$.

Exercice 8 (13.4)
Déterminer le noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de B. Calculer $d = c_1 + 2c_2 - c_3$. En déduire les solutions du système $Bx = d$.

Exercice 9 (13.4)
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Déterminer les solutions du système d'équations $Ax = b$.

Exercice 10 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 2 \end{array} \right. \tag{1}$$

Exercice 11 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Exercice 12 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}\right. \tag{3}$$

Exercice 13 (13.4)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Exercice 14 (13.4)
Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}$.

Exercice 15 (13.4)

Déterminer les vecteurs colonnes b de manière à ce que le système $Ax = b$ soit compatible où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 16 (13.4)
Déterminer la forme générale des solutions du système suivant en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 & = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 & = 5. \end{array}\right.$$

Écrire les solutions sous forme vectorielle.

Exercice 17 (13.4)
Sachant que la matrice ci-dessous est échelonnée réduite en ligne, déterminer les coefficients manquants (notés $*$). Remplacer chaque $*$ devant être nul par 0, chaque $*$ devant être 1 par 1. Remplacer tous les $*$ qui ne doivent pas être 0 ou 1 par un 2.

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, déterminer les solutions de ce système sous forme vectorielle.

Si C est équivalente par ligne une matrice B, déterminer les solutions du système $Bx = 0$.

Exercice 18 (13.4)
Donner la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le système homogène $Bx = 0$. Quel est son nombre d'équations et son nombre d'inconnues? Admet-t-il une solution non triviale? Dans ce cas, résoudre $Bx = 0$.

2. Existe-t-il un vecteur $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible? Déterminer un tel vecteur b si il existe et vérifier que le système $Bx = b$ est incompatible.

3. Déterminer un vecteur *non nul* $d \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = d$ soit compatible. Puis déterminer la solution générale du système $Bx = d$.

Exercice 19 (13.4)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Écrire le système d'équations linéaires $Ax = 6x$ et déterminer ses solutions.

Exercice 20 (13.4)
Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation que les coefficients a, b, c, d du vecteur v doivent vérifier afin que le système d'équation $Bx = v$ soit compatible.

Si $Bx = v$ est compatible, y a-t-il unicité de la solution?

Exercice 21 (13.4)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$

Exercice 22 (13.4)
Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2 y = m \end{cases}.$

Exercice 23 (13.4)
Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant suivant les valeurs du paramètre m.

$$(S) : \begin{cases} 2mx & +y & +z & = 2 \\ x & +2my & +z & = 4m \\ x & +y & +2mz & = 2m^2. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 24 (13.4)
Trouver les valeurs du réel a tel que le système

$$\begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ 2x & +3y & +az & = 3 \\ x & +ay & +3z & = 2 \end{cases} \tag{1}$$

ait

1. aucune solution ;

2. une solution unique ;

3. plusieurs solutions.

Problème 25 (13.4)
Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel k, on désigne par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial «k parmi n» et on rappelle que, par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.
On cherche à calculer les trois sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p\leq n}} \binom{n}{3p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+1\leq n}} \binom{n}{3p+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+2\leq n}} \binom{n}{3p+2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$$

Notons que, compte tenu de la convention rappelée ci-dessus, ces trois sommes sont bien finies.

1. On suppose, *dans cette question uniquement*, que $n = 7$. Calculer alors S_1, S_2 et S_3.

2. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$ en fonction de n.

3. On rappelle que l'on note $j = e^{2i\pi/3}$.

(a) Rappeler, en les justifiant, les expressions de $1 + j + j^2$ et $1 + j^2 + j^4$.

(b) Déterminer les formes trigonométriques de $j + 1$, de $\bar{j} + 1$, de $j - 1$ et de $\bar{j} - 1$.

(c) En utilisant la formule du binôme, exprimer $(1+j)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.

(d) Exprimer $\left(1+\bar{j}\right)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.

4. En déduire trois complexes α, β, γ dépendant de n tels que

$$\begin{cases} S_1 & + & S_2 & + & S_3 & = & \alpha \\ S_1 & + & jS_2 & + & j^2S_3 & = & \beta \\ S_1 & + & j^2S_2 & + & jS_3 & = & \gamma. \end{cases}$$

5. Déterminer les expressions de S_1, S_2 et S_3 en fonction de n (simplifier les résultats obtenus).

Chapter 14 Matrices inversibles

Exercice 1 (14.1)
Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&2\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&3\\-1&1&0\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&1\\3&0&-1\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (14.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si possible l'inverse des matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\3&8&1\end{pmatrix}\qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\\3&1&4\end{pmatrix}$$

Soit $b=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$. Déterminer les solutions du système $Ax=b$. Déterminer les solutions du système $Bx=b$.

Existe-t-il un vecteur $d\in\mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax=d$ soit incompatible ? Existe-t-il un vecteur $d\in\mathbb{R}^3$ tel que le système $Bx=d$ soit incompatible ? Dans chaque cas, justifier votre réponse et déterminer un tel vecteur d si il existe.

Exercice 3 (14.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\1&4&-1\end{pmatrix}$$

est équivalente par lignes à la matrice unité I_3. Écrire A comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 4 (14.1)
À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer, si possible, les inverses des matrice suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&0\\0&1&6\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

La matrice C est-elle une matrice élémentaire? Si «oui», quelle est l'opération élémentaire correspondante? Si «non», l'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 5 (14.1)
Étant donné un système d'équations $Ax = b$ avec différente valeurs de b, il est souvent plus rapide de déterminer A^{-1}, si elle existe, afin de déterminer les solutions avec la relation $x = A^{-1}b$.

Utiliser cette méthode pour résoudre $Ax = b_r$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et chacun de vecteurs b_r, $r = 1, 2, 3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier vos solutions.

Exercice 6 (14.1)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A = (\min(i, j))_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7 (14.1)
Soit A et B deux matrices (n, n).

Montrer que si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Exercice 8 (14.1)
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple, calculer $X^T AX$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 9 (14.1)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de calculer A^n.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis PAP^{-1}.

2. En déduire A^n.

Exercice 10 (14.1) *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{ 1, 2, \dots, n \}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.
Problème 11 (14.1)
On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible.
La matrice A est-elle inversible?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

5. Exprimer A^{-1}, puis A^{-n} pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P, P^{-1} et D^{-1}.
Écrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Chapter 15 Calcul intégral

Exercice 1 (15.0)
Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$.
4. $y = (3 - x)\sqrt{x}$, $y = 0$.
5. $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$.
6. $y = 1 - x^4$, $y = 0$.
7. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.
8. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Exercice 2 (15.0)
Vérifier les relations suivantes

1. $\displaystyle\int -\frac{6}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^3} + C.$
2. $\displaystyle\int 8x^3 + \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C.$
3. $\displaystyle\int (x-4)(x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}} = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C.$

Exercice 3 (15.0)
Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int x\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 4 (15.0)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.
Exercice 5 (15.0)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.
Exercice 6 (15.0)
Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
6. $f(x) = -\frac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
7. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
14. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.
17. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7 (15.0)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1 + t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 8 (15.0)
Utiliser une intégration par parties pour déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (4x+7)e^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x \cos 4x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 (15.0)
Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x^2\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^1 e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$.
10. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(4+x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 (15.0)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 11 (15.0)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$
2. Déduire I_n en fonction de n.

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Exercice 1 (16.0)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $y'(t) - \dfrac{1}{1+t^2}y(t) = 0$, sur $I = \mathbb{R}$.
2. $(t^2-1)y'(t) + ty(t) = 0$, sur $I =]-1, 1[$.
3. $\cos(t)y'(t) - \sin(t)y(t) = 0$, sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 (16.0)
Soit l'équation différentielle
$$y'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x}y(x) = 2\sin x. \tag{E}$$

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).
3. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie $h(0) = 1$.

Exercice 3 (16.0)
Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle
$$y'(t) + \frac{3}{2t}y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \in]0, +\infty[. \tag{E}$$

Exercice 4 (16.0)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1. $ty'(t) - 2y(t) = t^3e^t$ sur $]0, +\infty[$.
2. $ty'(t) - y(t) = \ln t$.
3. $2y'(t) + ty(t) = t^3$.

Exercice 5 (16.0)
Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante, avec condition initiale
$$xy' - 2y = x^2 \ln x \quad \text{et} \quad y(\mathrm{e}) = 0. \tag{1}$$

Exercice 6 (16.0)
Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation
$$y'(x) + \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}. \tag{E}$$

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Exercice 1 (17.2)
Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) - 2y(t) = \operatorname{ch}(2t). \tag{E}$$

Exercice 2 (17.2)
Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = 8\sin(2x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 3 (17.2)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = 4$.
2. $y'(t) + y(t) = 2t + 3$.
3. $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t)$.
4. $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$.
5. $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t)$.

Exercice 4 (17.2)
Soit f une fonction non nulle et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, f(t+u) = f(t)f(u). \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f : t \mapsto e^{at}$.

Remarque. L'équation (1) est une **équation fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'inconnue est une fonction.

Exercice 5 (17.3)
Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 6 (17.3)
On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t + \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Déterminer sous la forme $y_1 : t \mapsto (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, une solution particulière réelle de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t \tag{E_1}$$

3. Déterminer une solution particulière complexe y_2 de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{it} \tag{E_2}$$

4. En déduire une solution particulière réelle y_3 de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E_3}$$

5. Utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution particulière réelle y_0 de (E).
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7 (17.3)
Résoudre le problème de Cauchy, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= \cos(x) && (E)\\ y(0) &= 1\\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 8 (17.3)
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes

1. $y''(t) - y(t) = t^3 + t^2$.
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$.
3. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(mt)$ où $m \in \mathbb{R}$.
4. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^3e^t + 2\cos t + (t^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 9 (17.3)
Résoudre les équations différentielles

1. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t)$;
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(2t)$.
3. $y''(t) + y(t) = \cos^3(t)$;

Exercice 10 (17.3)
Déterminer les solutions réelles du système

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}.$$

Exercice 11 (17.3)
On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{E}$$

1. On pose $z(t) = y(t)^2$. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle simple (E').
2. Résoudre l'équation (E).

Chapter 18 Suites de nombres réels et complexes

Exercice 1 (18.2)

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 2 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 3 (18.2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{2n^2-1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ donné.

Exercice 4 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (u_n) définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (18.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (18.2)

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice 7 (18.2)

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. (u_n) converge vers ℓ.
2. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq 2022\epsilon$.
3. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \frac{1}{k}$.

Exercice 8 (18.2)

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 9 (18.4)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Exercice 10 (18.4)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 11 (18.4)
Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 12 (18.4)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 13 (18.4)
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 14 (18.4)
Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq ku_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 15 (18.4)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 16 (18.4)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 17 (18.5)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Exercice 18 (18.5)
On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique.

2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 19 (18.5)
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7}{9}|u_n - \ell|$.
4. Conclure.

Exercice 20 (18.5)
Soit u et v deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 21 (18.5)
Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Exercice 22 (18.5)
Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;
5. $u_n = (-1)^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}$.

Exercice 23 (18.5)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$
En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.
2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Problème 24 (18.7)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - 1\right| \leq \left|v_n - 2\right| \text{ et } \left|v_{n+1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

3. Déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Problème 25 (18.7) *Théorème de Cesàro, début d'un sujet de la Banque PT*
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

2. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

3. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

4. Conclure.

Chapter 19 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (19.1)
Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0, 1[$,
2. $[0, 1[$,
3. $]1, +\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,
7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Exercice 2 (19.1)
Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

Exercice 3 (19.1)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 4 (19.1)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup (f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 5 (19.1)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter : $x \in A + B \iff \cdots$.
2. Montrer que $A + B$ est non vide est majorée.
3. Déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 6 (19.2)
Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

Exercice 7 (19.2)
Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (19.2)
Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 9 (19.2)
Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est convergente.

Exercice 10 (19.2)

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n).

Exercice 11 (19.2)
Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 12 (19.2)
Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.
3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 13 (19.2)
Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 14 (19.2)

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

Remarque. Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 15 (19.2)
Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 16 (19.2)
Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 17 (19.2)
Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 18 (19.2)
Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}; \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.
4. Calculer u_nv_n. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Exercice 19 (19.2)
Soit $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont monotones.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left|u_{2n} - u_{2n-1}\right| \text{ et } \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$
5. Que dire des suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$? Conclure que $\left(u_n\right)$ est convergente.

Exercice 20 (19.2)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.
2. Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
4. Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Problème 21 (19.3)
On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right); \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

(a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

(b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$

(c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :

$$m \leqslant M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n).