PTSI^2 • Mathématique • Semaine 38 • Colle 01

Programme de colle

- Chapitre 1 : Corps des nombres réels.
- Chapitre 2 : Nombres entiers, itérations.
  Pour l'instant aucun exemple de récurrence forte n'a été faite.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Celui-ci n'est pas exigé pour la première colle. Mais ceux qui ont déjà commencé leur fiches peuvent déjà le ramener.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

Pour cette première colle, on limitera les questions de cours aux items suivants:

1. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Énoncé et démonstration.

2. Présentation de la partie entière (définition).
Énoncé et démonstration de la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

3. Présentations des définitions de majorant, minorant (d'une partie de $\mathbb{R}$).
Énoncé et démonstration de l'équivalence:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

Exercices

- Un exercice utilisant un raisonnement par récurrence (à un ou plusieurs pas) à rédiger proprement.
- D'autres exercices…

Chapter 1 Corps des nombres réels

1.1 Ensembles usuels

§1 Opérations algébriques

- Addition et multiplication. Vocabulaire : loi de composition interne, loi associative, élément neutre, opposé, loi commutative, inverse, distributivité.
- Un produit est nul si, et seulement si au moins une des facteurs est nul.

§2 Les entiers naturels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§3 Les entiers relatifs

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§4 Les nombres rationnels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

§1 Ordre total sur $\mathbb{R}$

- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive et totale.

§2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

§3 Valeur absolue

- Définitions et première propriétés.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

§4 Axiome d'Archimède

§5 Partie entière

- Définition et premières propriétés.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

§6 Partie bornée

- Majorant, minorant. Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
- Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

§7 Plus grand élément, plus petit élément

- Plus grand élément (maximum), plus petit élément (minimum).

1.3 Le premier degré

§1 L'équation $ax + b = 0$

§2 Système linéaire «2×2»

1.4 Puissances, racines

§1 Puissances entières

- Rappels et propriétés calculatoires.

§2 Racines

- Rappels et propriétés calculatoires.

Racine n-ième d'un nombre réel

§3 Second degrée

- Solutions réelles d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1.5 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

- Exemple de résolution de systèmes à deux ou trois inconnues. Opérations sur les lignes. Aucune formalisation n'a été faite.

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

2.1 Nombres entiers

§1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

- Axiomatique.
- Notation $[\![p, q]\!]$.

§2 Le principe de récurrence

- Récurrence «simple»,
- Récurrence à deux pas,
- Récurrence avec prédécesseurs (ou récurrence forte).

§3 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

- Axiomatique.

2.2 Suites définies par une relation de récurrence

§1 Suites arithmétiques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§2 Suites géométriques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§3 Suites arithmético-géométriques

- Définition.
- Les étudiants doivent connaitre une méthode pour étudier une suite arithmético-géométrique (aucune «formule» n'est au programme).

§4 Définition d'une suite par récurrence

Exemples de suites définies par une relation de récurrence:

- $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$,
- $x_{n+1} = f_n\left(x_n\right)$,
- $x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}\right)$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 39 • Colle 02

Programme de colle

- Chapitre 1 : Corps des nombres réels.
- Chapitre 2 : Nombres entiers, itérations.
- Chapitre 3 : Arithmétique des entiers.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Celui-ci n'est pas exigé pour la première colle. Mais ceux qui ont déjà commencé leur fiches peuvent déjà le ramener.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

Pour cette première colle, on limitera les questions de cours aux items suivants:

1. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Énoncé et démonstration.

2. Présentation de la partie entière (définition).
Énoncé et démonstration de la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

3. Présentations des définitions de majorant, minorant (d'une partie de $\mathbb{R}$).
Énoncé et démonstration de l'équivalence:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

4. La relation «divise» sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

5. Division euclidienne : définition. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).

6. Tout entier $a \geq 2$ admet au moins un diviseur premier (récurrence forte).

Exercices

- Un exercice utilisant un raisonnement par récurrence (à un ou plusieurs pas) à rédiger proprement.
- D'autres exercices…

Chapter 1 Corps des nombres réels

1.1 Ensembles usuels

§1 Opérations algébriques

- Addition et multiplication. Vocabulaire : loi de composition interne, loi associative, élément neutre, opposé, loi commutative, inverse, distributivité.
- Un produit est nul si, et seulement si au moins une des facteurs est nul.

§2 Les entiers naturels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§3 Les entiers relatifs

- Opérations algébriques et leur propriétés.

§4 Les nombres rationnels

- Opérations algébriques et leur propriétés.

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

§1 Ordre total sur $\mathbb{R}$

- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive et totale.

§2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

§3 Valeur absolue

- Définitions et première propriétés.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

§4 Axiome d'Archimède

§5 Partie entière

- Définition et premières propriétés.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

§6 Partie bornée

- Majorant, minorant. Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
- Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

§7 Plus grand élément, plus petit élément

- Plus grand élément (maximum), plus petit élément (minimum).

1.3 Le premier degré

§1 L'équation $ax + b = 0$

§2 Système linéaire «2×2»

1.4 Puissances, racines

§1 Puissances entières

- Rappels et propriétés calculatoires.

§2 Racines

- Rappels et propriétés calculatoires.

Racine n-ième d'un nombre réel

§3 Second degrée

- Solutions réelles d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1.5 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

- Exemple de résolution de systèmes à deux ou trois inconnues. Opérations sur les lignes. Aucune formalisation n'a été faite.

Chapter 2 Nombres entiers, itérations

2.1 Nombres entiers

§1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

- Axiomatique.
- Notation $[\![p, q]\!]$.

§2 Le principe de récurrence

- Récurrence «simple»,
- Récurrence à deux pas,
- Récurrence avec prédécesseurs (ou récurrence forte).

§3 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

- Axiomatique.

2.2 Suites définies par une relation de récurrence

§1 Suites arithmétiques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§2 Suites géométriques

- Définition.
- Expression du terme u_n en fonction de u_0 et n.

§3 Suites arithmético-géométriques

- Définition.
- Les étudiants doivent connaitre une méthode pour étudier une suite arithmético-géométrique (aucune «formule» n'est au programme).

§4 Définition d'une suite par récurrence

Exemples de suites définies par une relation de récurrence:

- $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$,
- $x_{n+1} = f_n\left(x_n\right)$,
- $x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}\right)$.

Chapter 3 Arithmétique des entiers

3.1 Divisibilité

§1 La relation « divise » dans $\mathbb{N}$

- Relation divise. Diviseur, multiple.
- Lien avec $\leq$: si $a \,\Big|\, b$, alors $b = 0$ ou $a \leq b$.
- La relation $\Big|$ sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

§2 Compatibilité avec les opérations algébriques

- Si $a \,\Big|\, b$ et $a \,\Big|\, c$ alors $a \,\Big|\, b + c$, etc…

§3 La relation « divise » dans $\mathbb{Z}$

Adaptation de la définition et des résultats précédents à $\mathbb{Z}$.

3.2 Division euclidienne

§1 Division euclidienne

- Définition.
- b divise a si, et seulement si le reste de la division euclidienne da a par b est nul.

§2 Bases de numération

Cette section n'est pas au programme de mathématique mais de celui d'informatique.

- Définition.
- Exemple de conversion d'une base b à la base 10, de la base 10 à la base b.

3.3 La relation de congruence

§1 La notion de congruence dans $\mathbb{Z}$

- Relation de congruence module n.

§2 Lien avec la division euclidienne

§3 Compatibilité avec les opérations algébriques

3.4 Les nombres premiers

§1 Définition, lemme d'Euclide

- Définition.
- Lemme d'Euclide.

§2 Crible d'Erathosthène

- Tout entier $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ admet au moins un diviseur premier p.
- L'ensemble des nombre premiers est infini.
- Crible d'Erathosthène.

§3 Facteurs premiers d'un entier. Le théorème de décomposition

- Théorème de décomposition (admis)
- Décomposition en facteurs premiers des diviseurs de n.

3.5 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide

§1 Plus grand commun diviseur de deux entiers

- PGCD de deux entiers relatifs. Notation $\operatorname{pgcd}(a, b)$.
- Nombre premiers entre eux (le lemme de Gauss est hors-programme).
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.

§2 Algorithme d'Euclide

- Propriétés $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a - kb, b)$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$ où $r = a \mod b$.
- $\mathrm{pgcd}(ma, mb) = m\,\mathrm{pgcd}(a, b)$. Si $a = da'$ et $b = db'$, alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = d$ si, et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.
- Exemple de détermination d'entiers u et v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$ (le théorème de Bézout est hors-programme).

§3 Plus petit commun multiple de deux entiers

- PPCM de deux entiers relatifs. Notation $\mathrm{ppcm}(a, b)$.
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.
- Pour des entiers > 0, relation $\mathrm{pgcd}(a, b) \times \mathrm{ppcm}(a, b) = ab$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 40 • Colle 03

Programme de colle

- Chapitre 3 : Arithmétique des entiers.
- Chapitre 4 : Logique.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. La relation «divise» sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

2. Division euclidienne : définition. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).

3. Tout entier $a \geq 2$ admet au moins un diviseur premier (récurrence forte).

4. Loi de De Morgan (pour les assertions).

Exercices

- On peut refaire des récurrences (simple, à plusieurs pas, fortes,...). Ça ne fait jamais de mal.
- D'autres exercices…

Chapter 3 Arithmétique des entiers

3.1 Divisibilité

§1 La relation « divise » dans $\mathbb{N}$

- Relation divise. Diviseur, multiple.
- Lien avec $\leq$: si $a \mid b$, alors $b = 0$ ou $a \leq b$.
- La relation $\mid$ sur $\mathbb{N}$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

§2 Compatibilité avec les opérations algébriques

- Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$, etc…

§3 La relation « divise » dans $\mathbb{Z}$

Adaptation de la définition et des résultats précédents à $\mathbb{Z}$.

3.2 Division euclidienne

§1 Division euclidienne

- Définition.
- b divise a si, et seulement si le reste de la division euclidienne da a par b est nul.

§2 Bases de numération

Cette section n'est pas au programme de mathématique mais de celui d'informatique.

- Définition.
- Exemple de conversion d'une base b à la base 10, de la base 10 à la base b.

3.3 La relation de congruence

§1 La notion de congruence dans $\mathbb{Z}$

- Relation de congruence module n.

§2 Lien avec la division euclidienne

§3 Compatibilité avec les opérations algébriques

3.4 Les nombres premiers

§1 Définition, lemme d'Euclide

- Définition.
- Lemme d'Euclide.

§2 Crible d'Erathosthène

- Tout entier $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ admet au moins un diviseur premier p.
- L'ensemble des nombre premiers est infini.
- Crible d'Erathosthène.

§3 Facteurs premiers d'un entier. Le théorème de décomposition

- Théorème de décomposition (admis)
- Décomposition en facteurs premiers des diviseurs de n.

3.5 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide

§1 Plus grand commun diviseur de deux entiers

- PGCD de deux entiers relatifs. Notation $\operatorname{pgcd}(a, b)$.
- Nombre premiers entre eux (le lemme de Gauss est hors-programme).
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.

§2 Algorithme d'Euclide

- Propriétés $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(a - kb, b)$, $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(b, r)$ où $r = a \mod b$.
- $\operatorname{pgcd}(ma, mb) = m \operatorname{pgcd}(a, b)$. Si $a = da'$ et $b = db'$, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = d$ si, et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.
- Exemple de détermination d'entiers u et v tels que $au + bv = \operatorname{pgcd}(a, b)$ (le théorème de Bézout est hors-programme).

§3 Plus petit commun multiple de deux entiers

- PPCM de deux entiers relatifs. Notation $\operatorname{ppcm}(a, b)$.
- Lien avec la décomposition en facteurs premiers.
- Pour des entiers > 0, relation $\operatorname{pgcd}(a, b) \times \operatorname{ppcm}(a, b) = ab$.

Chapter 4 La logique des logiciens

Raisonnement et symbolisme mathématiques

4.1 Raisonnement logique

§1 Assertions

- Notion d'assertion, proposition, théorème, démonstration…

§2 Opérations logiques élémentaires

- non P, P ou Q, P et Q.
- Implication, condition nécessaire, condition suffisante…
- Équivalence. Notion de réciproque.

§3 Relations tautologiquement équivalentes

- Assertions tautologiquement équivalentes.
- Loi de De Morgan.
- Contraposée.
- Négation de $P \implies Q$.
- Règle du modus ponens et Règle du modus tollens.

4.2 Ensembles et quantificateurs

§1 Spécialisation et quantification

- Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pseudo quantificateur $\exists!$.

§2 Permutation des quantificateurs

§3 Négation d'une proposition quantifiée

- Négation d'une proposition quantifiée. (notion d'exemple, non-exemple, contre-exemple).

§4 Existence et unicité

- Pseudo quantificateur $\exists!$.

4.3 Ensembles

§1 Éléments d'un ensemble

- Définition naïve des ensembles. Notation $x \in E$, $x \notin E$.
- Égalité entre deux ensembles.
- Ensemble vide, singleton, paire.
- Notation d'un ensemble en extension.

§2 Ensemble défini par une relation

- Notation d'un ensemble en compréhension.

§3 Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

- Inclusion. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique (principe de double inclusion).
- Ensemble des parties d'un ensemble.

4.4 Constructeurs

§1 Intersection et réunion

- Union, intersection. Ensemble disjoints.
- Propriété de l'union et de l'intersection.
- Exemple de démonstration : $A \subset B$ et $C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$.

§2 Différence et complémentaire

- Différence et complémentaire. Loi de De Morgan.

§3 Produits cartésiens

- Notion de couple. Produit cartésien de deux ensembles.
- Notation A^n.

4.5 Exemples de raisonnements et de rédaction

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 40 • Colle 03

Programme de colle

- Chapitre 4 : Logique.
- Chapitre 5 : vocabulaire relatif aux applications.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Loi de De Morgan (pour les assertions).
2. Composée de deux injections.
3. Composée de deux surjections.

Exercices préparés

Les exercices suivants doivent être revus (ils ont déjà été fait en TD). On pourra poser tout ou partie de ces exercices en guise de question de cours.

Exercice 1 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 2 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Chapter 4 La logique des logiciens

Raisonnement et symbolisme mathématiques

4.1 Raisonnement logique

§1 Assertions

- Notion d'assertion, proposition, théorème, démonstration…

§2 Opérations logiques élémentaires

- non P, P ou Q, P et Q.
- Implication, condition nécessaire, condition suffisante…
- Équivalence. Notion de réciproque.

§3 Relations tautologiquement équivalentes

- Assertions tautologiquement équivalentes.
- Loi de De Morgan.
- Contraposée.
- Négation de $P \implies Q$.
- Règle du modus ponens et Règle du modus tollens.

4.2 Ensembles et quantificateurs

§1 Spécialisation et quantification

- Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pseudo quantificateur $\exists!$.

§2 Permutation des quantificateurs

§3 Négation d'une proposition quantifiée

- Négation d'une proposition quantifiée. (notion d'exemple, non-exemple, contre-exemple).

§4 Existence et unicité

- Pseudo quantificateur $\exists!$.

4.3 Ensembles

§1 Éléments d'un ensemble

- Définition naïve des ensembles. Notation $x \in E$, $x \notin E$.
- Égalité entre deux ensembles.
- Ensemble vide, singleton, paire.
- Notation d'un ensemble en extension.

§2 Ensemble défini par une relation

- Notation d'un ensemble en compréhension.

§3 Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

- Inclusion. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique (principe de double inclusion).
- Ensemble des parties d'un ensemble.

4.4 Constructeurs

§1 Intersection et réunion

- Union, intersection. Ensemble disjoints.
- Propriété de l'union et de l'intersection.
- Exemple de démonstration : $A \subset B$ et $C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D$.

§2 Différence et complémentaire

- Différence et complémentaire. Loi de De Morgan.

§3 Produits cartésiens

- Notion de couple. Produit cartésien de deux ensembles.
- Notation A^n.

4.5 Exemples de raisonnements et de rédaction

Chapter 5 Vocabulaire relatif aux applications

5.1 Définition ensembliste d'une application

§1 Notion d'application

- Ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément, antécédent, graphe.
- Ensemble des applications de A dans B, noté $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
- Applications constantes. Application identité de A, notation Id_A.

§2 À propos des fonctions de «définies par morceaux»

§3 Fonctions indicatrices

§4 À propos des fonctions de «plusieurs variables»

5.2 Image directe et image réciproque

§1 Image directe d'une partie par une application

- Image directe d'une partie par une application. Image d'une application notée $\mathrm{Im}(f)$.
- Notion de partie stable, partie invariante par une application. Notion de point fixe.

§2 Image réciproque d'une partie par une application

- Image réciproque d'une partie par une application.

5.3 Opérations sur les applications

§1 Restriction, prolongement

§2 Composée de deux applications

- L'opération $\circ$ est associative.

5.4 Injection, surjection, bijection

§1 Injection

- Application injective ou injection.
- La composée de deux injections est une injection.

§2 Surjection

- Application surjective ou surjection.
- La composée de deux surjections est une surjection.

§3 Bijection

- Application bijective ou bijection.

§4 En résumé

§5 Bijection réciproque d'une bijection

- Application réciproque d'une bijection.
- Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$.
- La composée de deux bijections est une bijection. Réciproque de $g \circ f$.

5.5 Familles

§1 Familles d'éléments d'un ensemble

- Famille d'éléments d'un ensemble A indexée par un ensemble I.

§2 Famille d'ensembles

- Intersection et réunion d'une famille d'ensembles.

§3 Partitions d'un ensemble

Programme de colle

- Chapitre 5 : Vocabulaire relatif aux applications.
- Chapitre 6 : Calculs algébriques.
  Attention : certains n'ont jamais entendu parlé de nombres complexes.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Composée de deux injections.
2. Composée de deux surjections.
3. Somme des termes d'une progression arithmétique.
4. Somme des termes d'une progression géométrique.
5. Formule du binôme de Newton.

Exercices préparés

Les exercices suivants doivent être revus (ils ont déjà été fait en TD). On pourra poser tout ou partie de ces exercices en guise de question de cours.

Exercice 1 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 2 (0.0)

Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Chapter 4 Vocabulaire relatif aux applications

4.1 Définition ensembliste d'une application

§1 Notion d'application

- Ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément, antécédent, graphe.
- Ensemble des applications de A dans B, noté $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
- Applications constantes. Application identité de A, notation Id_A.

§2 À propos des fonctions de «définies par morceaux»

§3 Fonctions indicatrices

§4 À propos des fonctions de «plusieurs variables»

4.2 Image directe et image réciproque

§1 Image directe d'une partie par une application

- Image directe d'une partie par une application. Image d'une application notée $\mathrm{Im}(f)$.
- Notion de partie stable, partie invariante par une application. Notion de point fixe.

§2 Image réciproque d'une partie par une application

- Image réciproque d'une partie par une application.

4.3 Opérations sur les applications

§1 Restriction, prolongement

§2 Composée de deux applications

- L'opération $\circ$ est associative.

4.4 Injection, surjection, bijection

§1 Injection

- Application injective ou injection.
- La composée de deux injections est une injection.

§2 Surjection

- Application surjective ou surjection.
- La composée de deux surjections est une surjection.

§3 Bijection

- Application bijective ou bijection.

§4 En résumé

§5 Bijection réciproque d'une bijection

- Application réciproque d'une bijection.
- Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$.
- La composée de deux bijections est une bijection. Réciproque de $g \circ f$.

4.5 Familles

§1 Familles d'éléments d'un ensemble

- Famille d'éléments d'un ensemble A indexée par un ensemble I.

§2 Famille d'ensembles

- Intersection et réunion d'une famille d'ensembles.

§3 Partitions d'un ensemble

Chapter 5 Calculs algébriques

5.1 Le symbole somme $\sum$

§1 Règles de calcul

- Définition de la notation $\sum_{k=p}^{q} u_k$. Nombres de termes dans une somme. Notion d'indice muet.

§2 Propriétés

- Découpage (relation de Chasles).
- Linéarité.
- Partie réelle et partie imaginaire.

§3 Changement d'indices

- Principe. Exemples.

§4 Simplification télescopiques

5.2 Sommes usuelles

§1 Somme d'une progression arithmétique

§2 Factorisation de $a^n - b^n$

§3 Somme d'une progression géométrique

- Application à la détermination du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

§4 Formule du binôme

- Factorielle. Coefficient binomial d'indices n et p, notation $\binom{n}{p}$.
- Relations entre coefficients binomiaux. Formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton.

§5 Somme de puissances successives

- $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

5.3 Généralisation de la notation $\sum$

§1 Somme d'une famille finie

- Notation $\sum_{i \in I} u_i$ et autres généralisations.

§2 Sommes doubles

- Écriture d'une somme double comme une somme de sommes.

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

- Notation $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$.

§3 Produit de deux sommes finies

- $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_i b_j$.

§4 Sommes triangulaires

- Écriture comme une somme de sommes, par exemple $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.

5.4 Le symbole produit $\prod$

- Notation $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} u_k$.
- Quelques propriétés.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 45 • Colle 06

Programme de colle

- Chapitre 6 : Calculs algébriques.
  Attention : certains n'ont jamais entendu parlé de nombres complexes.
- Chapitre 7 : Fonction circulaires.
- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.
  Sections 1, 2 et 3 (Définitions, forme algébrique, forme trigo).

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Somme des termes d'une progression arithmétique.

2. Formule du binôme de Newton.

3. Présentations des fonctions arc-bidule : arcsin, arccos, arctan. Définition, propriétés, courbe,...

4. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.

5. Inégalité triangulaire.

6. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).

Chapter 6 Calculs algébriques

6.1 Le symbole somme $\sum$

§1 Règles de calcul

- Définition de la notation $\sum_{k=p}^{q} u_k$. Nombres de termes dans une somme. Notion d'indice muet.

§2 Propriétés

- Découpage (relation de Chasles).
- Linéarité.
- Partie réelle et partie imaginaire.

§3 Changement d'indices

- Principe. Exemples.

§4 Simplification télescopiques

6.2 Sommes usuelles

§1 Somme d'une progression arithmétique

§2 Factorisation de $a^n - b^n$

§3 Somme d'une progression géométrique

- Application à la détermination du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

§4 Formule du binôme

- Factorielle. Coefficient binomial d'indices n et p, notation $\binom{n}{p}$.
- Relations entre coefficients binomiaux. Formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton.

§5 Somme de puissances successives

- $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

6.3 Généralisation de la notation $\sum$

§1 Somme d'une famille finie

- Notation $\sum_{i \in I} u_i$ et autres généralisations.

§2 Sommes doubles

- Écriture d'une somme double comme une somme de sommes.

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

- Notation $\sum_{1\leq i,j\leq n}$.

§3 Produit de deux sommes finies

- $\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} a_i b_j.$

§4 Sommes triangulaires

- Écriture comme une somme de sommes, par exemple $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.

6.4 Le symbole produit $\prod$

- Notation $\prod_{k=p}^{q} u_k$.
- Quelques propriétés.

Chapter 7 Fonctions circulaires

7.1 Fonctions trigonométriques

§1 Le cercle trigonométrique

- Définition graphique de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ sur le cercle trigonométrique.
- Relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $u^2 + v^2 = 1$, alors il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que $u = \cos x$ et $v = \sin x$.
- J'ai parlé un peu de $\operatorname{cotan} x$, mais celui-ci est hors-programme.

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

Valeurs remarquables du premier quadrant

7.2 Formulaire de Trigonométrie

§1 Angles associés

§2 Formules d'addition

§3 Formules de duplication

§4 Formules de Carnot

§5 Formules de l'angle moitié

§6 Formules de Simpson inverses

§7 Formules de Simpson

7.3 Équations trigonométriques

§1 La notion de congruence

- Notation $x \equiv y \pmod{\phi}$. Règles de calculs.

§2 Résolution d'équations trigonométriques

- Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$ et $\tan x = \tan y$.

§3 Principe de superposition des sinusoïdes

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi).$$

7.4 Étude des fonctions trigonométriques

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

§2 Étude de la fonction tangente

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

7.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

§1 La fonction arcsin

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1, 1]\ \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§2 La fonction $\arccos$

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1, 1] \cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§3 La fonction $\arctan$

- Définition. Valeurs usuelles.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), limites. Asymptotes et courbe représentative.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a + b)^2$, $(a + b)^3$,..., $(a + b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de sin et cos

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance…
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{()}2\pi)$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ $(m \in \mathbb{C})$ et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 46 • Colle 07

Programme de colle

- Chapitre 7 : Fonction circulaires.
- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Présentations des fonctions arc-bidule : arcsin, arccos, arctan. Définition, propriétés, courbe,...

2. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.

3. Inégalité triangulaire.

4. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).

5. Racines n-ième de l'unité. Définition, description.

Chapter 7 Fonctions circulaires

7.1 Fonctions trigonométriques

§1 Le cercle trigonométrique

- Définition graphique de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ sur le cercle trigonométrique.
- Relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $u^2 + v^2 = 1$, alors il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que $u = \cos x$ et $v = \sin x$.
- J'ai parlé un peu de $\operatorname{cotan} x$, mais celui-ci est hors-programme.

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

Valeurs remarquables du premier quadrant

7.2 Formulaire de Trigonométrie

§1 Angles associés

§2 Formules d'addition

§3 Formules de duplication

§4 Formules de Carnot

§5 Formules de l'angle moitié

§6 Formules de Simpson inverses

§7 Formules de Simpson

7.3 Équations trigonométriques

§1 La notion de congruence

- Notation $x \equiv y \pmod{\phi}$. Règles de calculs.

§2 Résolution d'équations trigonométriques

- Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$ et $\tan x = \tan y$.

§3 Principe de superposition des sinusoïdes

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi).$$

7.4 Étude des fonctions trigonométriques

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

§2 Étude de la fonction tangente

- Parité, périodicité, dérivée, courbe représentative.

7.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

§1 La fonction arcsin

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1,1]\, \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§2 La fonction arccos

- Définition. Valeurs usuelles.
- Propriétés: $\forall x \in [-1,1]\, \cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), tangentes verticales, courbe représentative.

§3 La fonction arctan

- Définition. Valeurs usuelles.
- Étude: parité, dérivabilité (admise), limites. Asymptotes et courbe représentative.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$,..., $(a+b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de sin **et** cos

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance…
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{()2\pi}$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ $(m \in \mathbb{C})$ et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 47 • Colle 08

Programme de colle

- Chapitre 8 : Corps des nombres complexes.
- Chapitre 9 : Notions sur les fonctions en analyse.

La rédaction des questions de cours et exercices doit être complète. On s'attachera à introduire correctement chaque objet utilisé, articuler la rédaction à l'aide de lien logique, et présenter une conclusion (encadrée) en bonne et due forme.

Pour les connaissances, on s'attachera particulièrement à la précision du vocabulaire, la connaissance du cours, en particulier des définition.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Conjugué d'une somme, conjugué d'un produit.
2. Inégalité triangulaire.
3. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. (Ces sommes sont dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne semble pas être une exigence du programme).
4. Racines n-ième de l'unité. Définition, description.
5. Si f est monotone et bijective alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.
6. Si f est impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.

Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

- Opération dans $\mathbb{C}$. Propriété.

§2 Règles d'exponentiation

- Notation z^n.
- Quelques identités remarquables: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$,…, $(a+b)^5$.

§3 Nombres complexes et équations algébriques

- $zw = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

8.2 Règles élémentaires de calcul

§1 Forme algébrique

- Partie réelle, partie imaginaire. Imaginaires purs.
- Somme, produit, inverse en écriture algébrique.

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

- Image, affixe d'un point.
- Image, affixe d'un vecteur.

§3 Conjugaison

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations (somme, produit, quotient, puissance).

8.3 Représentation trigonométrique

§1 Module

- Définition.
- Propriété $z\bar{z} = |z|^2$. Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique.

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (la notion de groupe est hors-programme).
- $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos\theta + \sin\theta)$. Notation $e^{i\theta}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

- Propriétés algébrique de l'écriture $e^{i\theta}$.
- Formule d'Euler. Formule de de Moivre.

Linéarisation

Factorisation d'une somme de sin **et** cos

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

- Définition.
- Arguments d'un produit, quotient, puissance…
- Identifications des nombres complexes sous forme trigonométrique. Pour $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $z = w \iff |z| = |w|$ et $\arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{()2\pi}$.

8.4 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

- Théorème de d'Alembert-Gauß (admis).

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

- Définition.
- Racines carrées sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

§5 Relations coefficients-racines

- Relation coefficient racine pour un polynôme de degré 2. Somme et produit de ses racines.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Le résultat est admis et sera démontrer dans un chapitre d'algèbre linéaire.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

8.5 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

§2 Racines n-ièmes de l'unité

- Définition.
- Les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $\exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Notation $\mathbb{U}_n$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

8.6 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

- Propriétés algébriques.
- $\exp(z) = \exp(w)$ si, et seulement si $z \equiv w \pmod{2i\pi}$.
- Résolution de l'équation $z^n = a$.

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$) et $x \mapsto e^{\phi(x)}$.

Chapter 9 Notions sur les fonctions en analyse

9.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

- Fonction ou application, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément.

§2 Composition de fonctions

§3 Recherche de l'ensemble de définition

- Cas des fonctions en analyse où l'on «cherche» l'ensemble de définition.

9.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

- Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

§2 Transformations élémentaires

- Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

9.3 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

- f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.

§2 Sens de variation

- Monotonie.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et monotone, f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

9.4 Symétries du graphe

§1 Parité, imparité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et impaire, f^{-1} est impaire.

§2 Périodicité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 48 • Colle 09

Programme de colle

- Chapitre 9 : Notions sur les fonctions en analyse.
- Chapitre 10 : Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances.
- Chapitre 11 : Dérivation.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Si f est monotone et bijective alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

2. Si f est impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.

3. Dérivabilité et dérivée des fonctions $\arctan$, $\arcsin$, $\arccos$.

4. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.

Chapter 8 Notions sur les fonctions en analyse

8.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

- Fonction ou application, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément.

§2 Composition de fonctions

§3 Recherche de l'ensemble de définition

- Cas des fonctions en analyse où l'on «cherche» l'ensemble de définition.

8.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

- Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

§2 Transformations élémentaires

- Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

8.3 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

- f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.

§2 Sens de variation

- Monotonie.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et monotone, f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

8.4 Symétries du graphe

§1 Parité, imparité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.
- Si $f : X \to Y$ est bijective et impaire, f^{-1} est impaire.

§2 Périodicité

- Conséquence sur la réduction du domaine d'étude.

Chapter 9 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

9.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

§1 Vocabulaire

- Fonction polynomiale, degré, racine.

§2 Propriétés

- Continuité, dérivabilité.
- Principe d'indentification.

§3 Fonctions puissance n où n est entier

- Allure générale de la courbe $y = x^n$, positions relatives selon n.

§4 Fonctions rationnelles

- Définition, continuité, dérivabilité.

9.2 Logarithmes, exponentielles

§1 Logarithme népérien

- Définition: ln est l'unique primitive de $]0, +\infty[\,, x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.
- Propriétés algébriques.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), courbe.

§2 Exponentielle népérienne

- Définition (réciproque de ln).
- Propriétés algébriques.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), dérivée (admise) courbe.

§3 Exponentielle de base a

- Définition ($\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$).
- Propriétés algébriques. Notation a^x.
- Constante de Néper.
- Étude : limites, branches infinies (croissances comparées), dérivée, courbe.

§4 Logarithme de base a

- Hors-programme mais utile en physique et informatique.

9.3 Fonctions puissances

- Fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Étude : limites, dérivée, courbe, positions relatives.

9.4 Fonctions hyperboliques

- Fonctions ch et sh.
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x \geq 1 \text{ et } \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \text{ et } \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \text{ et } \operatorname{sh} x < \frac{e^x}{2} < \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

  Les formules de trigonométrie hyperbolique sont hors-programme.

- Étude : limites, dérivées, courbes.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors-programme.

Chapter 10 Dérivation

10.1 Dérivée d'une fonction

§1 Définitions

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Opérations sur les dérivées

- Somme, produit, combinaison linéaire.
- Composée.

§4 Fonction affine tangente

- Équation cartésienne de la tangente à la courbe de f.

§5 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

10.2 Étude pratique des fonctions

§1 Caractérisation de la monotonie

- Lien entre variations et signe de la dérivée.

§2 Marche à suivre

- Plan d'étude. On limite les branches infinies aux asymptotes horizontales et verticales.

§3 Exemples d'étude

10.3 Réciproque d'une fonction

§1 Dérivée d'une fonction réciproque

§2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

10.4 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{\phi(t)}$ où $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 49 • Colle 10

Programme de colle

- Chapitre 11 : Dérivation.
- Chapitre 12 : Calcul matriciel élémentaire.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ $10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Dérivabilité et dérivée des fonctions arctan, arcsin, arccos.

2. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.

3. Le produit matriciel est associatif.

4. Transposée. Transposée d'une somme, transposée d'un produit.

5. Matrice inversibles. Produit de deux matrice inversibles. Transposée d'une matrice inversible.

Chapter 11 Dérivation

11.1 Dérivée d'une fonction

§1 Définitions

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Opérations sur les dérivées

- Somme, produit, combinaison linéaire.
- Composée.

§4 Fonction affine tangente

- Équation cartésienne de la tangente à la courbe de f.

§5 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

11.2 Étude pratique des fonctions

§1 Caractérisation de la monotonie

- Lien entre variations et signe de la dérivée.

§2 Marche à suivre

- Plan d'étude. On limite les branches infinies aux asymptotes horizontales et verticales.

§3 Exemples d'étude

11.3 Réciproque d'une fonction

§1 Dérivée d'une fonction réciproque

§2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

11.4 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

§2 Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$.
- Dérivée de $t \mapsto e^{\phi(t)}$ où $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

12.1 Matrices

- Matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. coefficient.
- Matrice carrée d'ordre n, termes diagonaux, matrice diagonale.
- Égalité de deux matrices.

12.2 Addition et multiplication par un scalaire

12.3 Multiplication matricielle

12.4 Algèbre des matrices

- Notations $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Commutativité et associativité de l'addition.
- Associativité de la multiplication.
- Distributivité, bilinéarité de la multiplication.
- Matrices nulles, matrices unités ou identités.
- Produit de matrices diagonales.

12.5 Matrices inversibles

§1 Inverse d'une matrice

- Définition, unicité. Aucune méthode de calcul n'a été vue.
- Cas des matrices diagonales.
- Cas des matrices $(2, 2)$: déterminant et formule pour l'inverse (la formule pour l'inverse est hors-programme). Aucune propriété du déterminant n'a été vue.
- Simplification de $AB = AC$ lorsque A est inversible.

§2 Propriété de l'inverse

- Lorsque A, B sont inversibles, inverses de A^{-1}, de λA, de AB.

12.6 Puissances d'une matrice

- Propriété des puissances.
- Binôme de Newton.
- La formule pour $A^r - B^r = \dots$ a été donnée mais est hors-programme.

12.7 Transposée

§1 Transposée d'une matrice

- Définition.

§2 Propriétés de la transposition

- La transposée est involutive et linéaire.
- Transposée d'un produit.
- Transposée d'une matrice inversible.

§3 Matrices symétriques

§4 Matrices antisymétriques

12.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$

§1 Vecteurs

- Notion de matrices colonnes ou vecteurs colonnes.
- Notion de matrices lignes ou vecteurs lignes.

§2 Produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire de v et w est noté $\langle v|w\rangle$ est vaut $v^T w$.
- Propriétés du produit scalaire.

§3 Vecteurs et matrices

- Écriture du produit Ax comme combinaison linéaire des colonne de A.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 50 • Colle 11

Programme de colle

- Chapitre 12 : Calcul matriciel élémentaire.
- Chapitre 15 : Calcul intégral.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ $10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Le produit matriciel est associatif.
2. Transposée. Transposée d'une somme, transposée d'un produit.
3. Matrice inversibles. Produit de deux matrice inversibles. Transposée d'une matrice inversible.

Chapter 12 Calcul matriciel élémentaire

12.1 Matrices

- Matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. coefficient.
- Matrice carrée d'ordre n, termes diagonaux, matrice diagonale.
- Égalité de deux matrices.

12.2 Addition et multiplication par un scalaire

12.3 Multiplication matricielle

12.4 Algèbre des matrices

- Notations $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Commutativité et associativité de l'addition.
- Associativité de la multiplication.
- Distributivité, bilinéarité de la multiplication.
- Matrices nulles, matrices unités ou identités.
- Produit de matrices diagonales.

12.5 Matrices inversibles

§1 Inverse d'une matrice

- Définition, unicité. Aucune méthode de calcul n'a été vue.
- Cas des matrices diagonales.
- Cas des matrices $(2, 2)$: déterminant et formule pour l'inverse (la formule pour l'inverse est hors-programme). Aucune propriété du déterminant n'a été vue.
- Simplification de $AB = AC$ lorsque A est inversible.

§2 Propriété de l'inverse

- Lorsque A, B sont inversibles, inverses de A^{-1}, de λA, de AB.

12.6 Puissances d'une matrice

- Propriété des puissances.
- Binôme de Newton.
- La formule pour $A^r - B^r = \dots$ a été donnée mais est hors-programme.

12.7 Transposée

§1 Transposée d'une matrice

- Définition.

§2 Propriétés de la transposition

- La transposée est involutive et linéaire.
- Transposée d'un produit.
- Transposée d'une matrice inversible.

§3 Matrices symétriques

§4 Matrices antisymétriques

12.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$

§1 Vecteurs

- Notion de matrices colonnes ou vecteurs colonnes.
- Notion de matrices lignes ou vecteurs lignes.

§2 Produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire de v et w est noté $\langle v|w\rangle$ est vaut $v^T w$.
- Propriétés du produit scalaire.

§3 Vecteurs et matrices

- Écriture du produit Ax comme combinaison linéaire des colonne de A.

Chapter 15 Calcul intégral

Les résultats de ce chapitre ne font l'objet d'aucune question de cours. Pour les techniques d'intégration par parties et changement de variables, on se contente de l'aspect calculatoire, sans rappeler les hypothèses de régularité.

- Primitive d'une fonction définie sur un intervalle. Théorème de Newton-Leibniz.
- Intégration par parties.
- Changement de variables.
- Application au calcul de primitives.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 01 • Colle 12

Programme de colle

- Chapitre 15 : Calcul intégral.
- Chapitre 16 : Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Chapitre 17 : Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

2. Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

3. Solutions de l'équation homogènes $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ dans le cas complexe.

Chapter 15 Calcul intégral

Les résultats de ce chapitre ne font l'objet d'aucune question de cours. Pour les techniques d'intégration par parties et changement de variables, on se contente de l'aspect calculatoire, sans rappeler les hypothèses de régularité.

- Primitive d'une fonction définie sur un intervalle. Théorème de Newton-Leibniz.
- Intégration par parties.
- Changement de variables.
- Application au calcul de primitives.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

16.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1.
- Équation homogène associée.
- Solutions, courbes intégrales, solutions maximales.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solutions.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

16.2 Résolution d'une équation différentielle normalisée

§1 Équation différentielle normalisée

§2 Résolution d'une équation homogène normalisée

- Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

§3 Résolution par changement de fonction inconnue

- Méthode pour déterminer une solution «particulière».

§4 Expression des solutions sous forme intégrale

16.3 Problème de Cauchy

- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

§1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

§2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

17.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants. Ordre.
- Équation homogène (associée).
- Solutions, courbe intégrale.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solution (= linéarité).
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

17.2 Résolution d'une équation d'ordre 2

§1 Solutions complexes de l'équation homogène associée

- Polynôme caractéristique.
- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas complexe.

§2 Solutions réelles de l'équation homogène associée

- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas réel.

§3 Cas d'un second membre exponentielle

- Solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme.
- Solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{mt}$.
- Utilisation des nombres complexes pour un second membre de la forme $t \mapsto \cos(mt)$ ou $t \mapsto \sin(mt)$.

§4 Problème de Cauchy

- Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas particulier admis).

§5 Applications

- Régime libre et régime forcé pour un circuit RLC série.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 02 • Colle 13

Programme de colle

- Chapitre 16 : Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Chapitre 17 : Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.
- Chapitre 13 : Système d'équations linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ 10 $-$ 15 minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. (Équa-diff d'ordre 1) Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

2. Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

3. Solutions de l'équation homogènes $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ dans le cas complexe.

4. (Systèmes linéaires) Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Chapter 16 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

16.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1.
- Équation homogène associée.
- Solutions, courbes intégrales, solutions maximales.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solutions.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

16.2 Résolution d'une équation différentielle normalisée

§1 Équation différentielle normalisée

§2 Résolution d'une équation homogène normalisée

- Solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ lorsque a admet une primitive.

§3 Résolution par changement de fonction inconnue

- Méthode pour déterminer une solution «particulière».

§4 Expression des solutions sous forme intégrale

16.3 Problème de Cauchy

- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

§1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

§2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

17.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

- Équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants. Ordre.
- Équation homogène (associée).
- Solutions, courbe intégrale.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition des solution (= linéarité).
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

17.2 Résolution d'une équation d'ordre 2

§1 Solutions complexes de l'équation homogène associée

- Polynôme caractéristique.
- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas complexe.

§2 Solutions réelles de l'équation homogène associée

- Résolutions de $ay'' + by' + cy = 0$, cas réel.

§3 Cas d'un second membre exponentielle

- Solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme.
- Solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{mt}$.
- Utilisation des nombres complexes pour un second membre de la forme $t \mapsto \cos(mt)$ ou $t \mapsto \sin(mt)$.

§4 Problème de Cauchy

- Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas particulier admis).

§5 Applications

- Régime libre et régime forcé pour un circuit RLC série.

Chapter 13 Systèmes d'équations linéaires

13.1 Systèmes d'équations linéaires

- Système linéaire de m équations à n inconnues. Coefficients. Solution d'un système.
- Matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires, vecteur des inconnues, vecteur des seconds membres.

13.2 Opérations élémentaires sur les lignes

- Systèmes équivalents.
- Matrice augmentée d'un système.
- Matrices équivalentes par lignes (notation $A \underset{L}{\sim} A'$).
- Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. Lien avec les systèmes.

13.3 Procédé d'élimination de Gauß-Jordan

§1 Présentation de l'algorithme; forme échelonnée réduite

- Algorithme d'élimination de Gauß, de Gauß-Jordan.
- Matrice échelonnée par ligne, matrice échelonnée réduite par ligne.

§2 Systèmes compatibles et incompatibles

- Condition de compatibilité.
- Codage des opérations élémentaires:$L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

§3 Variables libres

- Variables principales (ou liées), variables libres (ou paramètres).

§4 Quelques successions d'opérations élémentaires classiques

- Modification de l'ordre des lignes.
- Addition à une ligne L_i, i fixé, d'une combinaison linéaire des *autres* lignes.
- Remplacer une ligne L_i, i fixé, par une combinaison linéaire des lignes dont le coefficient devant L_i est non nul.
- Ajout d'un multiple d'une ligne L_i, i fixé, aux *autres* lignes.
- Somme et différence de deux lignes.

13.4 Systèmes homogènes et noyau

§1 Ensemble solution

- Un système d'équations linéaires admet aucune, exactement une, ou une infinité de solution(s).

§2 Systèmes homogènes

- Système homogène.
- Système homogène associé.

§3 Noyau d'une matrice

- Noyau d'une matrice.
- Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible ($\mathcal{S} = \{ p + z \mid z \in \ker A \}$).

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 03 • Colle 14

Programme de colle

- Chapitre 13 : Système d'équations linéaires.
- Chapitre 14 : Matrices inversibles.
- Chapitre 18 : Suites de nombres réels et complexes.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. (Systèmes linéaires) Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

2. Si A, B sont deux matrices carrée (n, n) telle que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

3. La limite d'une suite convergente est unique (seul le cas réel a été vu en cours).

4. Théorème d'existence de limite par encadrement.

5. Limite de la somme de deux suites convergentes.

6. Limite du produit de deux suites convergentes.

Chapter 13 Systèmes d’équations linéaires

13.1 Systèmes d’équations linéaires

- Système linéaire de m équations à n inconnues. Coefficients. Solution d’un système.
- Matrice des coefficients d’un système d’équations linéaires, vecteur des inconnues, vecteur des seconds membres.

13.2 Opérations élémentaires sur les lignes

- Systèmes équivalents.
- Matrice augmentée d’un système.
- Matrices équivalentes par lignes (notation $A \underset{L}{\sim} A'$).
- Opérations élémentaires sur les lignes d’une matrice. Lien avec les systèmes.

13.3 Procédé d’élimination de Gauß-Jordan

§1 Présentation de l’algorithme; forme échelonnée réduite

- Algorithme d’élimination de Gauß, de Gauß-Jordan.
- Matrice échelonnée par ligne, matrice échelonnée réduite par ligne.

§2 Systèmes compatibles et incompatibles

- Condition de compatibilité.
- Codage des opérations élémentaires:$L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

§3 Variables libres

- Variables principales (ou liées), variables libres (ou paramètres).

§4 Quelques successions d’opérations élémentaires classiques

- Modification de l’ordre des lignes.
- Addition à une ligne L_i, i fixé, d’une combinaison linéaire des *autres* lignes.
- Remplacer une ligne L_i, i fixé, par une combinaison linéaire des lignes dont le coefficient devant L_i est non nul.
- Ajout d’un multiple d’une ligne L_i, i fixé, aux *autres* lignes.
- Somme et différence de deux lignes.

13.4 Systèmes homogènes et noyau

§1 Ensemble solution

- Un système d'équations linéaires admet aucune, exactement une, ou une infinité de solution(s).

§2 Systèmes homogènes

- Système homogène.
- Système homogène associé.

§3 Noyau d'une matrice

- Noyau d'une matrice.
- Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible ($\mathscr{S} = \{ p + z \mid z \in \ker A \}$).

Chapter 14 Matrices inversibles et déterminants

14.1 Matrices inversibles et opérations élémentaires

§1 Matrices d'opérations élémentaires

- Lemme : (opération élémentaire sur AB) = (opération élémentaire sur A) fois B.
- Matrices d'opérations élémentaires : matrice de dilatation, matrice de transposition, matrices de transvection.
- Inversibilité et inverses des matrices d'opérations élémentaires.

§2 Matrice équivalentes par lignes

- La relation $\underset{L}{\sim}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive.
- Traduction matricielle de l'algorithme de Gauß-Jordan ($A = E_r \dots E_1 R$).

§3 Critère d'inversibilité d'une matrice

- Les assertions suivantes sont équivalentes:
  1. A est inversible.
  2. Pour tout $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.
  3. Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.
  4. La forme échelonnée réduite de A est I_n.

§4 Algorithme pour le calcul de l'inverse

- Si $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Une matrice est inversible si, et seulement si elle est le produit de matrice élémentaires.
- $A \underset{L}{\sim} B$ si, et seulement si il existe P inversible telle que $A = PB$.

§5 Inverse à droite, inverse à gauche

- Soit A et B deux matrices carrée (n, n). Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversible, et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

§6 Calcul de l'inverse par résolution du système $Ax = y$

§7 Matrice équivalentes par colonnes

- Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice. Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.

Chapter 18 Suites de nombres réels et complexes

18.1 L'ensemble des suites

§1 Vocabulaire et notations

- Suites numériques, égalité entre suites.
- Suites définies à partir d'un certain rang, suites tronquées.
- Suites extraites.

§2 Quelques exemples

- Révisions: suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre deux.
- Série (notion vue brievement).
- Suites définies de manière implicite.

18.2 Limite d'une suite

§1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

§2 Suites convergentes

- Suites convergente. Suites divergente.
- Unicité de la limite. Notations.

§3 Suites réelles divergeant vers l'infini

§4 Suites extraites et limite

- Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
- Si $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ tendent vers une même limite ℓ, alors $\left(u_n\right)$ tend vers ℓ.

§5 Exemple fondamental : suites géométriques

- Nature et limite de la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$.

18.3 Voisinage

§1 Notion de voisinage

- Notion de voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.

§2 Limite et signe

- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

§3 Modification d'un nombre fini de termes

- Caractère asymptotique de la limite.

18.4 Suite et relations d'ordres

§1 Suites bornées

- Suite numérique bornée.
- Suite réelle majorée, minorée. Une suite réelle est bornée si, et seulement si elle est minorée et majorée.
- Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.

§2 Convergence et caractère borné

- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

§3 Limite infinie et caractère borné

- Si $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ alors u est minorée et n'est pas majorée.
- Si $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$ alors u est majorée et n'est pas minorée.

§4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

§5 Convergence par domination

- Théorème d'existence de limite par domination.

§6 Convergence par encadrement

- Théorème d'existence de limite par encadrement.

§7 Approximations décimales d'un réel

- Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
- Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-p} par défaut et par excès.

§8 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

- Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

§9 Divergence par minoration ou majoration

- Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

18.5 Opérations algébriques

§1 Opérations algébriques sur les suites numériques

- Somme, produit interne, produit externe.

§2 Opérations algébriques sur les limites finies

- Convergence et limite d'une somme de suites convergentes.
- Convergence et limite d'un produit de suites convergentes.
- Existence, convergence et limite de l'inverse du suite convergente. Cas du quotient.

§3 Opérations avec limites infinies

- Somme, produit interne, produit externe, inverse.
- Limite par valeurs supérieures, inférieures.
- Quotient.

§4 Résumé des «formes indéterminées»

§5 Comparaison des suites de référence

- Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, alors
$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \qquad \frac{n^\beta}{a^n} \qquad \frac{a^n}{n!} \qquad \frac{n!}{n^n}$$
ont pour limite 0.

18.6 Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a

- Admis en attendant la notion de limite pour une fonction.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 04 • Colle 15

Programme de colle

- Chapitre 14 : Matrices inversibles.
- Chapitre 18 : Suites de nombres réels et complexes.
- Chapitre 19 : Borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
  Partie 1 uniquement (Borne supérieure, borne inférieure).

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Si A, B sont deux matrices carrée (n, n) telle que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.
2. La limite d'une suite convergente est unique (seul le cas réel a été vu en cours).
3. Théorème d'existence de limite par encadrement.
4. Limite de la somme de deux suites convergentes.
5. Limite du produit de deux suites convergentes.

Chapter 14 Matrices inversibles et déterminants

14.1 Matrices inversibles et opérations élémentaires

§1 Matrices d'opérations élémentaires

- Lemme : (opération élémentaire sur AB) = (opération élémentaire sur A) fois B.
- Matrices d'opérations élémentaires : matrice de dilatation, matrice de transposition, matrices de transvection.
- Inversibilité et inverses des matrices d'opérations élémentaires.

§2 Matrice équivalentes par lignes

- La relation $\underset{L}{\sim}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive.
- Traduction matricielle de l'algorithme de Gauß-Jordan ($A = E_r \dots E_1 R$).

§3 Critère d'inversibilité d'une matrice

- Les assertions suivantes sont équivalentes:
  1. A est inversible.
  2. Pour tout $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.
  3. Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.
  4. La forme échelonnée réduite de A est I_n.

§4 Algorithme pour le calcul de l'inverse

- Si $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Une matrice est inversible si, et seulement si elle est le produit de matrice élémentaires.
- $A \underset{L}{\sim} B$ si, et seulement si il existe P inversible telle que $A = PB$.

§5 Inverse à droite, inverse à gauche

- Soit A et B deux matrices carrée (n, n). Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversible, et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

§6 Calcul de l'inverse par résolution du système $Ax = y$

§7 Matrice équivalentes par colonnes

- Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice. Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.

Chapter 18 Suites de nombres réels et complexes

18.1 L'ensemble des suites

§1 Vocabulaire et notations

- Suites numériques, égalité entre suites.
- Suites définies à partir d'un certain rang, suites tronquées.
- Suites extraites.

§2 Quelques exemples

- Révisions: suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre deux.
- Série (notion vue brievement).
- Suites définies de manière implicite.

18.2 Limite d'une suite

§1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

§2 Suites convergentes

- Suites convergente. Suites divergente.
- Unicité de la limite. Notations.

§3 Suites réelles divergeant vers l'infini

§4 Suites extraites et limite

- Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
- Si $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ tendent vers une même limite ℓ, alors $\left(u_n\right)$ tend vers ℓ.

§5 Exemple fondamental : suites géométriques

- Nature et limite de la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$.

18.3 Voisinage

§1 Notion de voisinage

- Notion de voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.

§2 Limite et signe

- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

§3 Modification d'un nombre fini de termes

- Caractère asymptotique de la limite.

18.4 Suite et relations d'ordres

§1 Suites bornées

- Suite numérique bornée.
- Suite réelle majorée, minorée. Une suite réelle est bornée si, et seulement si elle est minorée et majorée.
- Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.

§2 Convergence et caractère borné

- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

§3 Limite infinie et caractère borné

- Si $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ alors u est minorée et n'est pas majorée.
- Si $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$ alors u est majorée et n'est pas minorée.

§4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

§5 Convergence par domination

- Théorème d'existence de limite par domination.

§6 Convergence par encadrement

- Théorème d'existence de limite par encadrement.

§7 Approximations décimales d'un réel

- Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
- Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-p} par défaut et par excès.

§8 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

- Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

§9 Divergence par minoration ou majoration

- Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

18.5 Opérations algébriques

§1 Opérations algébriques sur les suites numériques

- Somme, produit interne, produit externe.

§2 Opérations algébriques sur les limites finies

- Convergence et limite d'une somme de suites convergentes.
- Convergence et limite d'un produit de suites convergentes.
- Existence, convergence et limite de l'inverse du suite convergente. Cas du quotient.

§3 Opérations avec limites infinies

- Somme, produit interne, produit externe, inverse.
- Limite par valeurs supérieures, inférieures.
- Quotient.

§4 Résumé des «formes indéterminées»

§5 Comparaison des suites de référence

- Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, alors
$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \qquad \frac{n^\beta}{a^n} \qquad \frac{a^n}{n!} \qquad \frac{n!}{n^n}$$
ont pour limite 0.

18.6 Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a

- Admis en attendant la notion de limite pour une fonction.

Chapter 19 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

19.1 Théorème de la borne supérieure

§1 Borne supérieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§2 Borne inférieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§3 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

19.2 Suites monotones

§1 Variations d'une suite réelle

- Suite constante, stationnaire, croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, monotone, strictement monotone, périodique.

§2 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

- Hors-programme, mais utile (c'est un exercice du poly). Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A.

  Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

  1. M est la borne supérieure de A.

  2. Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

  3. Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

§3 Convergence et divergence des suites monotones

- Théorème de la limite monotone.

§4 Suites adjacentes

- Définition.

- Théorème des suites adjacentes.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 05 • Colle 16

Programme de colle

- Révision Chapitre 18 : Suites de nombres réels et complexes.
- Chapitre 19 : Borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

2. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

3. Suites adjacentes. Définition, théorème.

4. Exercice: Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) M est la borne supérieure de A.

(b) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(c) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

Chapter 18 Suites de nombres réels et complexes

18.1 L'ensemble des suites

§1 Vocabulaire et notations

- Suites numériques, égalité entre suites.
- Suites définies à partir d'un certain rang, suites tronquées.
- Suites extraites.

§2 Quelques exemples

- Révisions: suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre deux.
- Série (notion vue brievement).
- Suites définies de manière implicite.

18.2 Limite d'une suite

§1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

§2 Suites convergentes

- Suites convergente. Suites divergente.
- Unicité de la limite. Notations.

§3 Suites réelles divergeant vers l'infini

§4 Suites extraites et limite

- Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
- Si $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ tendent vers une même limite ℓ, alors $\left(u_n\right)$ tend vers ℓ.

§5 Exemple fondamental : suites géométriques

- Nature et limite de la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$.

18.3 Voisinage

§1 Notion de voisinage

- Notion de voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, de $+\infty$, de $-\infty$.

§2 Limite et signe

- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

§3 Modification d'un nombre fini de termes

- Caractère asymptotique de la limite.

18.4 Suite et relations d'ordres

§1 Suites bornées

- Suite numérique bornée.
- Suite réelle majorée, minorée. Une suite réelle est bornée si, et seulement si elle est minorée et majorée.
- Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.

§2 Convergence et caractère borné

- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

§3 Limite infinie et caractère borné

- Si $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ alors u est minorée et n'est pas majorée.
- Si $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$ alors u est majorée et n'est pas minorée.

§4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

§5 Convergence par domination

- Théorème d'existence de limite par domination.

§6 Convergence par encadrement

- Théorème d'existence de limite par encadrement.

§7 Approximations décimales d'un réel

- Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
- Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-p} par défaut et par excès.

§8 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

- Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

§9 Divergence par minoration ou majoration

- Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

18.5 Opérations algébriques

§1 Opérations algébriques sur les suites numériques

- Somme, produit interne, produit externe.

§2 Opérations algébriques sur les limites finies

- Convergence et limite d'une somme de suites convergentes.
- Convergence et limite d'un produit de suites convergentes.
- Existence, convergence et limite de l'inverse du suite convergente. Cas du quotient.

§3 Opérations avec limites infinies

- Somme, produit interne, produit externe, inverse.
- Limite par valeurs supérieures, inférieures.
- Quotient.

§4 Résumé des «formes indéterminées»

§5 Comparaison des suites de référence

- Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, alors
$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \qquad \frac{n^\beta}{a^n} \qquad \frac{a^n}{n!} \qquad \frac{n!}{n^n}$$
ont pour limite 0.

18.6 Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a

- Admis en attendant la notion de limite pour une fonction.

Chapter 19 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

19.1 Théorème de la borne supérieure

§1 Borne supérieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§2 Borne inférieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§3 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

19.2 Suites monotones

§1 Variations d'une suite réelle

- Suite constante, stationnaire, croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, monotone, strictement monotone, périodique.

§2 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

- Hors-programme, mais utile (c'est un exercice du poly). Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A.

  Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

  1. M est la borne supérieure de A.

  2. Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

  3. Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

§3 Convergence et divergence des suites monotones

- Théorème de la limite monotone.

§4 Suites adjacentes

- Définition.

- Théorème des suites adjacentes.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 08 • Colle 17

Programme de colle

- Chapitre 19 : Borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
- Chapitre 20 : Polynômes.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ 10 − 15 minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
3. Suites adjacentes. Définition, théorème.
4. Exercice: Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) M est la borne supérieure de A.
   (b) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.
   (c) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.
5. Formule de Liebniz pour les polynômes.
6. Formule de Taylor pour les polynômes.
7. Tout polynôme non constant est produit de polynômes irréductibles.
8. Relation coefficients-racines. Cas où $\deg P = 2$, $\deg P = 3$. Somme et produit des racines dans le cas général.

Chapter 19 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

19.1 Théorème de la borne supérieure

§1 Borne supérieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§2 Borne inférieure

- Définition.
- Existence pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (admis).

§3 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

19.2 Suites monotones

§1 Variations d'une suite réelle

- Suite constante, stationnaire, croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, monotone, strictement monotone, périodique.

§2 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

- Hors-programme, mais utile (c'est un exercice du poly). Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A.

  Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

  1. M est la borne supérieure de A.
  2. Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.
  3. Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

§3 Convergence et divergence des suites monotones

- Théorème de la limite monotone.

§4 Suites adjacentes

- Définition.
- Théorème des suites adjacentes.

Chapter 20 Polynômes

20.1 Polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

§1 Construction et axiomes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit.

§2 Degré d'un polynôme

- Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$. Coefficient dominant, terme dominant, polynôme unitaire.
- $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
- Degré d'une somme, d'un produit.

§3 Fonction polynômiale

§4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

§5 Composée

20.2 Division dans $\mathbb{K}[X]$

§1 Multiples et diviseurs

§2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

20.3 Polynômes dérivés

§1 Dérivée formelle

- Linéarité de la dérivation. Dérivée d'un produit.

§2 Dérivées successives

- Dérivée k-ième d'un polynôme.
- Formule de Leibniz pour les polynômes.

§3 Formules de Taylor

20.4 Racines

§1 Racines d'un polynôme

- Caractérisation des racines d'un polynôme par la divisibilité.
- Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

§2 Critère differentiel pour la multiplicité d'une racine

20.5 Décomposition en facteurs irréductibles

§1 Polynômes irréductibles

- Théorème de d'Alembert-Gauß.
- Décomposition en facteurs irréductibles.

§2 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
- Décomposition en facteurs irréductible de $X^n - 1$.

§3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

- Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposition en facteurs irréductible de $X^n - 1$.

20.6 Relations entre coefficients et racines

§1 Exemples élémentaires

- Relations entre coefficients et racines pour un polynôme de degré 2.
- Relations entre coefficients et racines pour un polynôme de degré 3.

§2 Cas général

- Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

20.7 Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles

- Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.
- Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 09 • Colle 18

Programme de colle

- Chapitre 20 : Polynômes.
- Chapitre 21 : Espaces vectoriels.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx$ 10 − 15 minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Formule de Liebniz pour les polynômes.

2. Formule de Taylor pour les polynômes.

3. Tout polynôme non constant est produit de polynômes irréductibles.

4. Relation coefficients-racines. Cas où $\deg P = 2$, $\deg P = 3$. Somme et produit des racines dans le cas général.

5. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

6. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

7. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E^p$. Alors

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est un sous-espace vectoriel de E.
- C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Chapter 20 Polynômes

20.1 Polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

§1 Construction et axiomes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit.

§2 Degré d'un polynôme

- Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$. Coefficient dominant, terme dominant, polynôme unitaire.
- $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
- Degré d'une somme, d'un produit.

§3 Fonction polynômiale

§4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

§5 Composée

20.2 Division dans $\mathbb{K}[X]$

§1 Multiples et diviseurs

§2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

20.3 Polynômes dérivés

§1 Dérivée formelle

- Linéarité de la dérivation. Dérivée d'un produit.

§2 Dérivées successives

- Dérivée k-ième d'un polynôme.
- Formule de Leibniz pour les polynômes.

§3 Formules de Taylor

20.4 Racines

§1 Racines d'un polynôme

- Caractérisation des racines d'un polynôme par la divisibilité.
- Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.

§2 Critère différentiel pour la multiplicité d'une racine

20.5 Décomposition en facteurs irréductibles

§1 Polynômes irréductibles

- Théorème de d'Alembert-Gauß.
- Décomposition en facteurs irréductibles.

§2 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
- Décomposition en facteurs irréductible de $X^n - 1$.

§3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

- Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposition en facteurs irréductible de $X^n - 1$.

20.6 Relations entre coefficients et racines

§1 Exemples élémentaires

- Relations entre coefficients et racines pour un polynôme de degré 2.
- Relations entre coefficients et racines pour un polynôme de degré 3.

§2 Cas général

- Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

20.7 Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles

- Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.
- Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Chapter 21 Espaces vectoriels

21.1 Structure d'espace vectoriel

§1 Les axiomes d'espace vectoriel

- Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Premières propriétés ($0x = 0$, $\alpha 0_V = 0_V$, $(-1) \cdot v = -v$, $\dots$).

§2 Exemples

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\{ 0 \}$, $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Si X est un ensemble et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathscr{F}(X, V)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour l'addition et multiplication ponctuelle).
- Espace vectoriel produit.

§3 Combinaisons linéaires

- Notion de combinaison linéaire.

21.2 Sous-espaces vectoriels

§1 Définition

- V est un sous-espace vectoriel de E si $0_E \in V$, V est stable par addition, V est stable par multiplication externe.
- Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites.

§2 Exemples

- Droite vectorielle.

§3 Caractérisation

- V est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si
  $0_E \in V$ et $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in V^2, \alpha u + \beta y \in V$.

§4 Noyau et image d'une matrice

- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Notion de sous-espace affine, de droite affine.
- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

§5 Intersection de sous-espaces vectoriels

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

21.3 Sous-espace vectoriel engendré

§1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

- Une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_k$ est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.
- Soit $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$. Alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$.

§2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

- Si $A \subset E$, $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

§3 Sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice

- Le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice A est $\mathrm{Im}(A)$.

§4 Équation cartésienne d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

- Exemple de passage d'une équation d'un plan à la forme $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
- Passage de la forme $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ à une équation cartésienne.
- D'autre cas sont vus en exercices.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 10 • Colle 19

Programme de colle

- Chapitre 21 : Espaces vectoriels.
- Chapitre 22 : Applications linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10-15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.
3. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^p$. Alors
   - L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$.
4. Si $f \in \mathbf{L}(E, F)$ est bijective, alors f^{-1} est linéaire.
5. L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.
6. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E.
7. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.

Chapter 21 Espaces vectoriels

21.1 Structure d'espace vectoriel

§1 Les axiomes d'espace vectoriel

- Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Premières propriétés ($0x = 0$, $\alpha 0_V = 0_V$, $(-1) \cdot v = -v$, $\ldots$).

§2 Exemples

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\{ 0 \}$, $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Si X est un ensemble et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathscr{F}(X, V)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour l'addition et multiplication ponctuelle).
- Espace vectoriel produit.

§3 Combinaisons linéaires

- Notion de combinaison linéaire.

21.2 Sous-espaces vectoriels

§1 Définition

- V est un sous-espace vectoriel de E si $0_E \in V$, V est stable par addition, V est stable par multiplication externe.
- Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites.

§2 Exemples

- Droite vectorielle.

§3 Caractérisation

- V est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si
  $0_E \in V$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in V^2, \alpha u + \beta y \in V$.

§4 Noyau et image d'une matrice

- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Notion de sous-espace affine, de droite affine.
- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

§5 Intersection de sous-espaces vectoriels

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

21.3 Sous-espace vectoriel engendré

§1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

- Une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_k$ est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.
- Soit $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$. Alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$.

§2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

- Si $A \subset E$, $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

§3 Sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice

- Le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice A est $\mathrm{Im}(A)$.

§4 Équation cartésienne d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

- Exemple de passage d'une équation d'un plan à la forme $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
- Passage de la forme $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ à une équation cartésienne.
- D'autre cas sont vus en exercices.

Chapter 22 Applications linéaires

22.1 Applications linéaires

§1 Définition

- Définition, caractérisation.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
- Endomorphisme, forme linéaire.
- Notation $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathbf{L}(E)$.

§2 Exemples

§3 Quelques applications particulières

- Homothétie, application identique, application nulle.
- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$ est une application linéaire.

§4 Composition et combinaison linéaire d'applications linéaires

- Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires: combinaison linéaire, composée.

§5 Isomorphismes

- Isomorphismes, automorphismes, groupe linéaire $\mathbf{GL}(E)$.
- Espaces vectoriels isomorphes.
- Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.

22.2 Anatomie d'une application linéaire

§1 Noyau et images

- Noyau et image.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Cas du noyau.
- Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Cas de l'image.

§2 Injectivité, surjectivité

- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.
- Rappel pour les applications surjectives et l'image.

§3 Équation linéaire

- Notion d'équation linéaire.
- Structure de l'ensemble des solutions.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 11 • Colle 20

Programme de colle

- Révision chapitre 21 : Espaces vectoriels.
- Chapitre 22 : Applications linéaires.
- Chapitre 23 : Sommes et projecteurs.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Si $f \in \mathbf{L}(E, F)$ est bijective, alors f^{-1} est linéaire.

2. L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.

3. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E.

4. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.

5. Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

6. Soit $s \in \mathbf{L}(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Chapter 22 Applications linéaires

22.1 Applications linéaires

§1 Définition

- Définition, caractérisation.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
- Endomorphisme, forme linéaire.
- Notation $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathbf{L}(E)$.

§2 Exemples

§3 Quelques applications particulières

- Homothétie, application identique, application nulle.
- Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$ est une application linéaire.

§4 Composition et combinaison linéaire d'applications linéaires

- Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires: combinaison linéaire, composée.

§5 Isomorphismes

- Isomorphismes, automorphismes, groupe linéaire $\mathbf{GL}(E)$.
- Espaces vectoriels isomorphes.
- Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.

22.2 Anatomie d'une application linéaire

§1 Noyau et images

- Noyau et image.
- Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Cas du noyau.
- Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Cas de l'image.

§2 Injectivité, surjectivité

- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.
- Rappel pour les applications surjectives et l'image.

§3 Équation linéaire

- Notion d'équation linéaire.
- Structure de l'ensemble des solutions.

Chapter 23 Sommes et projecteurs

23.1 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

§1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

- La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

§2 Sommes directes

- La somme $U + V$ est directe si, et seulement si $U \cap V = \{ 0 \}$ si, et seulement si tout vecteur z de la somme $U + V$ peut s'écrire de manière unique $z = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$.

§3 Sous-espaces supplémentaires

- Existence d'un supplémentaires d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.
- Hyperplan.

§4 Somme directe et applications linéaires

- Une application linéaire définie sur $U \oplus V$ est entièrement déterminée par ses restrictions à U et V.

23.2 Projecteurs

§1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

- Projecteurs. Premières propriétés.

§2 Exemples

§3 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

- Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

23.3 Symétries

§1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

- Symétries. Premières propriétés.

§2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

- Soit $s \in \mathbf{L}(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 12 • Colle 21

Programme de colle

- Chapitre 23 : Sommes et projecteurs.
- Chapitre 24 : Limite, continuité.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

2. Soit $s \in \mathbf{L}(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

3. Limite d'une somme.

4. Limite d'un produit.

5. Théorème des valeurs intermédiaires.

Chapter 23 Sommes et projecteurs

23.1 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

§1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

- La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

§2 Sommes directes

- La somme $U + V$ est directe si, et seulement si $U \cap V = \{ 0 \}$ si, et seulement si tout vecteur z de la somme $U + V$ peut s'écrire de manière unique $z = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$.

§3 Sous-espaces supplémentaires

- Existence d'un supplémentaires d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.

- Hyperplan.

§4 Somme directe et applications linéaires

- Une application linéaire définie sur $U \oplus V$ est entièrement déterminée par ses restrictions à U et V.

23.2 Projecteurs

§1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

- Projecteurs. Premières propriétés.

§2 Exemples

§3 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

- Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

23.3 Symétries

§1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

- Symétries. Premières propriétés.

§2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

- Soit $s \in \mathbf{L}(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Chapter 24 Limite, continuité

24.1 Caractère local d'un problème

§1 Introduction

- Différence entre problème local et problème global.
- Exemples : Tangente, aire sous une courbe...
- Lecture graphique et numérique de limite.

§2 Topologie

- Point adhérent. Point ou extrémité de X (ce qui inclus $\pm\infty$).
- Rappels sur la notion de voisinage (vue avec les suites).

24.2 Limites

§1 Limite d'une fonction en un point adhérent

- Limite finie en un point adhérent.

§2 Limites à gauche, à droite

§3 Limites infinies et limite à l'infini

- Limites infinies en un point a. Asymptote verticale.
- Limite finie à l'infini. Asymptote horizontale.
- Limite infinie en l'infini.

24.3 Théorèmes sur les limites

§1 Unicité de la limite

§2 Limite d'une composée

- Limite d'une composée.
- Cas particulier des suites.

§3 Caractère local de la limite

- Limite d'une restriction.

24.4 Limite et relation d'ordre

§1 Limite et caractère borné

- Si f admet une limite finie au point a, alors f est bornée au voisinage de a.

§2 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

§3 Existence de limite par comparaison

- Théorème d'existence de limite (finie) par domination, par encadrement.
- Théorème d'existence de limite (infinie) par comparaison (majoration ou minoration).

§4 Théorème de la limite monotone

- Théorème de la limite monotone (à une extrémité d'intervalle ou en un point intérieur).

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 13 • Colle 22

Programme de colle

- Chapitre 24 : Limite, continuité.
- Chapitre 25 : Relations de comparaisons sur les fonctions.
- Chapitre 26 : Dérivées.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Limite d'une somme.
2. Limite d'un produit.
3. Théorème des valeurs intermédiaires.
4. Théorème de Rolle.
5. Égalité des accroissements finis.
6. Inégalité des accroissements finis.
7. Théorème de la limite de la dérivée.

Chapter 24 Limite, continuité

24.1 Caractère local d'un problème

§1 Introduction

- Différence entre problème local et problème global.
- Exemples : Tangente, aire sous une courbe...
- Lecture graphique et numérique de limite.

§2 Topologie

- Point adhérent. Point ou extrémité de X (ce qui inclus $\pm\infty$).
- Rappels sur la notion de voisinage (vue avec les suites).

24.2 Limites

§1 Limite d'une fonction en un point adhérent

- Limite finie en un point adhérent.

§2 Limites à gauche, à droite

§3 Limites infinies et limite à l'infini

- Limites infinies en un point a. Asymptote verticale.
- Limite finie à l'infini. Asymptote horizontale.
- Limite infinie en l'infini.

24.3 Théorèmes sur les limites

§1 Unicité de la limite

§2 Limite d'une composée

- Limite d'une composée.
- Cas particulier des suites.

§3 Caractère local de la limite

- Limite d'une restriction.

24.4 Limite et relation d'ordre

§1 Limite et caractère borné

- Si f admet une limite finie au point a, alors f est bornée au voisinage de a.

§2 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

§3 Existence de limite par comparaison

- Théorème d'existence de limite (finie) par domination, par encadrement.
- Théorème d'existence de limite (infinie) par comparaison (majoration ou minoration).

§4 Théorème de la limite monotone

- Théorème de la limite monotone (à une extrémité d'intervalle ou en un point intérieur).

Chapter 25 Relations de comparaisons

25.1 Comparaison des fonctions

§1 Définitions

- Relation de domination, de négligeabilité, d'équivalence lorsque $x \to a$.
- $f(x) \sim g(x)$ si, et seulement si $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

§2 Cours sous forme d'exercices

- Caractérisation à l'aide du quotient lorsque les fonction f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a.

§3 Comparaison des applications usuelles

- Croissance comparée en $+\infty$ des fonction ln, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto a^x$.
- Croissance comparée en 0 des fonction ln et $x \mapsto x^\alpha$.

§4 Notation de Landau

- Notation $f = g + \mathcal{O}(\phi)$ et $f = g + o(\phi)$.

§5 Quelques équivalents classiques

- Équivalents au voisinage de 0 de $(1+x)^\alpha - 1$, $\sin(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\arcsin(x)$, $e^x - 1$, $\cos x - 1$, $\operatorname{ch} x - 1$, $\arctan x$, $\ln(1+x)$, $\tan x$, $\tanh x$.
- Équivalents au voisinage de $\pm\infty$ de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

25.2 Calcul avec les relations de comparaisons

§1 Propriétés des relations de comparaisons

- Liens entre les relations de comparaison.

§2 Propriétés conservées par équivalence

- Propriétés conservées par équivalence: signe et limites.

§3 Opérations sur les équivalents

- Produit, quotient, puissances.

§4 Changement de variable

- Si $f = \mathcal{O}_b(g)$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u = \mathcal{O}_a g \circ u$.
- Si $f = o_b(g)$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u = o_a g \circ u$.
- Si $f \sim_b g$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u \sim_a g \circ u$.
- Changement de variable $x = a + h$ et $x = 1/h$ pour se ramener en 0.

Chapter 26 Dérivées

26.1 Dérivées

§1 Dérivée première

Dérivée en un point. C'est une notion locale.

Exemples de $x \mapsto 1/x$, sin, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$.

Fonction dérivable sur un ensemble. Fonction dérivée.

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Développement limité d'ordre 1

Développement limité à l'ordre 1.

f est dérivable au point a si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 au point a.

§4 Lien entre dérivabilité et continuité

Si f est dérivable au point a alors elle est continue au point a (et la réciproque est totalement fausse malgré ce que semble encore penser certains qui feraient mieux d'ouvrir leur cours).

§5 Dérivée à gauche et à droite

§6 Fonction affine tangente

Tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Tangente verticale.

§7 Des hauts et des bas

Minimum local, maximum local, extrémum local.

Si $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ admet un extrémum et est dérivable au point c, alors $f'(c) = 0$.

26.2 Opérations sur les dérivées

§1 Dérivées et opérations algébriques

Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, puissances.

§2 Dérivée d'une fonction composée

Dérivée d'une composée.

Méthode: dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

26.3 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

Opérations.

Formule de leibniz.

§2 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

26.4 Étude globale des fonctions dérivables

§1 Théorème de Rolle

§2 Théorèmes des accroissements finis

- Égalité des accroissement finis.
- Fonction lipschitzienne.
- Inégalité des accroissement finis : si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est bornée sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I.

§3 Caractérisation de la monotonie

Caractérisation des fonction constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.

§4 Limite des dérivées

- Théorème de la limite de la dérivée : Si f est dérivable sur $I \setminus \{ a \}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable au point a et on a $f'(a) = \ell$.

§5 Dérivée d'une fonction réciproque

- Dérivabilité et dérivée de la réciproque d'une fonction bijective et dérivable.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 14 • Colle 23

Programme de colle

- Chapitre 25 : Relations de comparaisons sur les fonctions.
- Chapitre 26 : Dérivées.
- Chapitre 27 : Développements limités.

Questions de cours

Les questions de cours doivent être présentées en début de colle ($\approx 10 - 15$ minutes) et à haute voix. Les énoncés doivent être précis et les démonstrations détaillées.

1. Théorème de Rolle.

2. Égalité des accroissements finis.

3. Inégalité des accroissements finis.

4. Théorème de la limite de la dérivée.

Chapter 25 Relations de comparaisons

25.1 Comparaison des fonctions

§1 Définitions

- Relation de domination, de négligeabilité, d'équivalence lorsque $x \to a$.
- $f(x) \sim g(x)$ si, et seulement si $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

§2 Cours sous forme d'exercices

- Caractérisation à l'aide du quotient lorsque les fonction f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a.

§3 Comparaison des applications usuelles

- Croissance comparée en $+\infty$ des fonction ln, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto a^x$.
- Croissance comparée en 0 des fonction ln et $x \mapsto x^\alpha$.

§4 Notation de Landau

- Notation $f = g + \mathcal{O}(\phi)$ et $f = g + o(\phi)$.

§5 Quelques équivalents classiques

- Équivalents au voisinage de 0 de $(1+x)^\alpha - 1$, $\sin(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\arcsin(x)$, $e^x - 1$, $\cos x - 1$, $\operatorname{ch} x - 1$, $\arctan x$, $\ln(1+x)$, $\tan x$, $\tanh x$.
- Équivalents au voisinage de $\pm\infty$ de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

25.2 Calcul avec les relations de comparaisons

§1 Propriétés des relations de comparaisons

- Liens entre les relations de comparaison.

§2 Propriétés conservées par équivalence

- Propriétés conservées par équivalence: signe et limites.

§3 Opérations sur les équivalents

- Produit, quotient, puissances.

§4 Changement de variable

- Si $f = \mathcal{O}_b(g)$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u = \mathcal{O}_a g \circ u$.
- Si $f = o_b(g)$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u = o_a g \circ u$.
- Si $f \sim_b g$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u \sim_a g \circ u$.
- Changement de variable $x = a + h$ et $x = 1/h$ pour se ramener en 0.

Chapter 26 Dérivées

26.1 Dérivées

§1 Dérivée première

Dérivée en un point. C'est une notion locale.

Exemples de $x \mapsto 1/x$, sin, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$.

Fonction dérivable sur un ensemble. Fonction dérivée.

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

§3 Développement limité d'ordre 1

Développement limité à l'ordre 1.

f est dérivable au point a si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 au point a.

§4 Lien entre dérivabilité et continuité

Si f est dérivable au point a alors elle est continue au point a (et la réciproque est totalement fausse malgré ce que semble encore penser certains qui feraient mieux d'ouvrir leur cours).

§5 Dérivée à gauche et à droite

§6 Fonction affine tangente

Tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Tangente verticale.

§7 Des hauts et des bas

Minimum local, maximum local, extrémum local.

Si $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ admet un extrémum et est dérivable au point c, alors $f'(c) = 0$.

26.2 Opérations sur les dérivées

§1 Dérivées et opérations algébriques

Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, puissances.

§2 Dérivée d'une fonction composée

Dérivée d'une composée.

Méthode: dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

26.3 Dérivées d'ordre supérieur

§1 Dérivées d'ordre n

Opérations.

Formule de leibniz.

§2 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

26.4 Étude globale des fonctions dérivables

§1 Théorème de Rolle

§2 Théorèmes des accroissements finis

- Égalité des accroissement finis.
- Fonction lipschitzienne.
- Inégalité des accroissement finis : si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est bornée sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I.

§3 Caractérisation de la monotonie

Caractérisation des fonction constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.

§4 Limite des dérivées

- Théorème de la limite de la dérivée : Si f est dérivable sur $I \setminus \{ a \}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable au point a et on a $f'(a) = \ell$.

§5 Dérivée d'une fonction réciproque

- Dérivabilité et dérivée de la réciproque d'une fonction bijective et dérivable.

Chapter 27 Développements limités

27.1 Développement limité en 0

§1 Partie régulière et développement limité

Développement limité d'ordre n au point 0. Lien avec les équivalents.

DL de $\frac{1}{1 \pm x}$ au voisinage de 0.

§2 Troncature

§3 Unicité d'un développement limité

Cas des fonction paires ou impaires.

§4 Développements limités et régularité

Développements limités et continuité

Développements limités et dérivabilité

Contre-exemples importants

Il existe des fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans être deux fois dérivable en 0.

27.2 Formule de Taylor-Young

DL à l'ordre n de e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $(1+x)^\alpha$, au voisinage de 0.

DL à l'ordre 5 de $\tan(x)$ au voisinage de 0.

27.3 Opérations sur les développements limités

§1 Sommes et produits de développements limités

§2 Composition de développements limités

§3 Développement limité d'un quotient

Prédiction de l'ordre d'un développement limité à l'aide de la forme normalisée.

§4 Intégration

§5 Dérivation

Hors-programme : cette partie est surtout une mise en garde contre la dérivation d'un développement limité.

27.4 Développement limité en un point a

Adaptation des résultats précédents pour les développements limités au point $a \in \mathbb{R}$.

27.5 Applications des développements limités

§1 Recherche de limites

§2 Application aux représentations graphiques $y = f(x)$

Tangente à une courbe et position relatives au voisinage du point.

§3 Extrémums

Condition nécessaire. Condition suffisante à l'ordre 2 pour un extrémum local.

27.6 Développements asymptotiques

§1 Exemples de développements asymptotiques

§2 Détermination d'une asymptote

Asymptote.

Recherche d'asymptote à l'aide d'un développement limité de $f(x)/x$ lorsque $x \to \pm\infty$ et du changement de variable $h = 1/x$. Position relative au voisinage de ∞.

27.7 Développements limités usuels au voisinage de $x = 0$

Au programme : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\arctan$ à l'ordre n. $\tan$ à l'ordre 3.

Les développements limités de sh, ch, $\tanh$, arcsin ne sont pas au programme et doivent être retrouvés rapidement. De même pour $\tan$ à un ordre ≥ 5.

PTSI² • Mathématique • Semaine 17 • Colle 24

Programme de colle

- Chapitre 27 : Développements limités.
- Chapitre 28 : Indépendance linéaire, bases.
- Chapitre 29 : Dimension.

Questions de cours

Exercices préparés

Durant les vacances, les étudiants ont eu a faire les exercices ci-joint (calcul de développements limités). Les solutions sont données (en espérant qu'il n'y ait pas trop d'erreurs), mais sans justifications et sans le détail des calculs.

- Les étudiants doivent vous apporter ce travail, contenant le détails des calculs (la note zéro est de rigueur pour ceux dont «la petite sœur a mangé le travail»).

  Vu les contraintes de temps, on pourra éventuellement demander de faire le DL à un ordre plus petit (ou plus grand) pour certains exercices.

Chapter 27 Développements limités

27.1 Développement limité en 0

§1 Partie régulière et développement limité

- Développement limité d'ordre n au point 0.
- Lien avec les équivalents.
- DL de $\frac{1}{1 \pm x}$ au voisinage de 0.

§2 Troncature

§3 Unicité d'un développement limité

- Cas des fonction paires ou impaires.

§4 Développements limités et régularité

Développements limités et continuité

Développements limités et dérivabilité

Contre-exemples importants

- Il existe des fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans être deux fois dérivable en 0.

27.2 Formule de Taylor-Young

- DL à l'ordre n de e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $(1+x)^\alpha$, au voisinage de 0.
- DL à l'ordre 5 de $\tan(x)$ au voisinage de 0.

27.3 Opérations sur les développements limités

§1 Sommes et produits de développements limités

§2 Composition de développements limités

§3 Développement limité d'un quotient

§4 Intégration

§5 Dérivation

- Hors-programme : cette partie est surtout une mise en garde contre la dérivation d'un développement limité.

27.4 Développement limité en un point a

- Adaptation des résultats précédents pour les développements limités au point $a \in \mathbb{R}$.

27.5 Applications des développements limités

§1 Recherche de limites et d'équivalents

§2 Application aux représentations graphiques $y = f(x)$

- Tangente à une courbe et position relatives au voisinage du point.

§3 Extrémums

- Condition nécessaire.
- Condition suffisante à l'ordre 2 pour un extrémum local.

27.6 Développements asymptotiques

§1 Exemples de développements asymptotiques

§2 Détermination d'une asymptote

- Asymptote.
- Recherche d'asymptote à l'aide d'un développement limité de $f(x)/x$ lorsque $x \to \pm\infty$ et du changement de variable $h = 1/x$. Position relative au voisinage de ∞.

27.7 Développements limités usuels au voisinage de $x = 0$

- $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan à l'ordre n.
- tan à l'ordre 3.

Les développements limités de sh, ch, tanh, arcsin ne sont pas au programme et doivent être retrouvés rapidement. De même pour tan à un ordre ≥ 5.

Chapter 28 Indépendance linéaire, bases

28.1 Liberté

§1 Relations linéaires

- Famille libre, famille liée. Vecteurs linéairement indépendants.
- Une famille $(v_1, \dots, v_k)$ est liée si, et seulement si (au moins) un vecteur v_i est combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Vecteurs colinéaires.

§2 Unicité de la décomposition

- Si v est combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants, cette écriture est unique.

§3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

- Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors la famille $(v_1, \dots, v_n, w)$ est libre si, et seulement si $w \notin \operatorname{Vect}\left\{ v_1, \dots, v_n \right\}$.

28.2 Bases

§1 Bases d'un espace vectoriel

- Définition : Une famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille libre qui engendre E, si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

§2 Théorème de la base extraite

- Espace vectoriel de dimension finie.
- De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E et de dimension finie, on peut extraire une base de E.
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

§3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

- Coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Matrice colonne des coordonnées (notation non officielle $\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$, $M_{\mathcal{B}}(v)$ ou $[v]_{\mathcal{B}}$).

Chapter 29 Dimension

29.1 Dimension

§1 Dimension d'un espace vectoriel

- Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E. Alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est liée.
- Dimension.
- Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (base usuelle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$).
- Dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

§2 Caractérisation des bases et de la dimension

- La famille $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ est une base de E si, et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et $\dim E = n$ si, et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E et $\dim E = n$.
- E est de dimension n si, et seulement si n est le plus grand entier tel qu'on puisse extraire de E une famille libre de n vecteurs si, et seulement si n est le plus petit entier tel qu'on puisse extraire de E une famille génératrice de n vecteurs.

§3 Dimension et sous-espace vectoriel

- Théorème de la base incomplète : toute famille libre de V peut être complétée en une base. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.
- Si W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie, alors W est de dimension finie, $\dim(W) \leq \dim(V)$ avec égalité si, et seulement si $V = W$.
- Notion de droite vectorielle, de plan vectoriel.
- Hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

29.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

§1 Caractérisation des sommes directes en dimension finie

- Soit $\left(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\right)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}\{\, v_1, \dots, v_k \,\}$ et $\operatorname{Vect}\{\, v_{k+1}, \dots, v_n \,\}$ sont en somme directe.
- Base adapté à une somme directe.

§2 Formule de Grassmann

§3 Sous-espaces supplémentaires

- Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel en dimension finie : existence, dimension commune, caratérisation par l'intersection et les dimensions.
- Hyperplan.

29.3 Famille de vecteurs

§1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

§2 Rang d'une famille de vecteurs

- Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.
- Caractérisation des familles finies libres, des familles finies génératrices, des bases, par le rang.
- $\operatorname{rg}\left(w_1, \dots, w_p\right) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1, \dots, w_p\right)\right)$.

§3 Matrice de passage

- Matrice de passage d'une base à une autre.
- Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.
- La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 18 • Colle 25

Programme de colle

- Chapitre 28 : Indépendance linéaire, bases.
- Chapitre 29 : Dimension.
- Chapitre 30 : Applications linéaires et dimension.
- Chapitre 31 : Représentation d'une application linéaire par une matrice.

Questions de cours

Exercices préparés

Durant les vacances, les étudiants ont eu a faire les exercices ci-joint (calcul de développements limités). Les solutions sont données (en espérant qu'il n'y ait pas trop d'erreurs), mais sans justifications et sans le détail des calculs.

- Les étudiants doivent vous apporter ce travail, contenant le détails des calculs (la note zéro est de rigueur pour ceux dont «la petite sœur a mangé le travail»).

  Vu les contraintes de temps, on pourra éventuellement demander de faire le DL à un ordre plus petit (ou plus grand) pour certains exercices.

Chapter 28 Indépendance linéaire, bases

28.1 Liberté

§1 Relations linéaires

- Famille libre, famille liée. Vecteurs linéairement indépendants.
- Une famille $(v_1, \dots, v_k)$ est liée si, et seulement si (au moins) un vecteur v_i est combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Vecteurs colinéaires.

§2 Unicité de la décomposition

- Si v est combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants, cette écriture est unique.

§3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

- Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors la famille $(v_1, \dots, v_n, w)$ est libre si, et seulement si $w \notin \operatorname{Vect}\left\{ v_1, \dots, v_n \right\}$.

28.2 Bases

§1 Bases d'un espace vectoriel

- Définition : Une famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille libre qui engendre E, si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

§2 Théorème de la base extraite

- Espace vectoriel de dimension finie.
- De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E et de dimension finie, on peut extraire une base de E.
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

§3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

- Coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Matrice colonne des coordonnées (notation non officielle $\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$, $M_{\mathcal{B}}(v)$ ou $[v]_{\mathcal{B}}$).

Chapter 29 Dimension

29.1 Dimension

§1 Dimension d'un espace vectoriel

- Si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E. Alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est liée.
- Dimension.
- Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (base usuelle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$).
- Dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

§2 Caractérisation des bases et de la dimension

- La famille $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ est une base de E si, et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre et $\dim E = n$ si, et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E et $\dim E = n$.
- E est de dimension n si, et seulement si n est le plus grand entier tel qu'on puisse extraire de E une famille libre de n vecteurs si, et seulement si n est le plus petit entier tel qu'on puisse extraire de E une famille génératrice de n vecteurs.

§3 Dimension et sous-espace vectoriel

- Théorème de la base incomplète : toute famille libre de V peut être complétée en une base. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.
- Si W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie, alors W est de dimension finie, $\dim(W) \leq \dim(V)$ avec égalité si, et seulement si $V = W$.
- Notion de droite vectorielle, de plan vectoriel.
- Hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

29.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

§1 Caractérisation des sommes directes en dimension finie

- Soit $\left(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\right)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}\{\, v_1, \ldots, v_k \,\}$ et $\operatorname{Vect}\{\, v_{k+1}, \ldots, v_n \,\}$ sont en somme directe.
- Base adapté à une somme directe.

§2 Formule de Grassmann

§3 Sous-espaces supplémentaires

- Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel en dimension finie : existence, dimension commune, caratérisation par l'intersection et les dimensions.
- Hyperplan.

29.3 Famille de vecteurs

§1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

§2 Rang d'une famille de vecteurs

- Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.
- Caractérisation des familles finies libres, des familles finies génératrices, des bases, par le rang.
- $\operatorname{rg}\left(w_1, \dots, w_p\right) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1, \dots, w_p\right)\right)$.

§3 Matrice de passage

- Matrice de passage d'une base à une autre.
- Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.
- La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Chapter 30 Applications linéaires et dimension

30.1 Application linéaire en dimension finie

§1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

§2 Caractérisation des isomorphismes par les bases

- Caractérisation des isomorphismes par les bases.
- Espaces isomorphes. Caractérisation par la dimension.
- Si f est un isomorphisme, $\operatorname{rg}\big(f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_n)\big) = \operatorname{rg}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

§3 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

- Si E et F ont même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est bijective si, et seulement si elle est injective si, et seulement si elle est surjective.
- Cas particulier des endomorphismes.

30.2 Rang d'une application linéaire

§1 Applications linéaires de rang fini

- Application linéaire de rang fini.

§2 Théorème du rang pour les application linéaires

- Théorème du rang: si E est de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) + \dim(\ker f) = \dim(E)$.

§3 Invariance du rang par composition par un isomorphisme

- $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))$.
- Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Chapter 31 Représentation d'une application linéaire par une matrice

31.1 Applications linéaires induite par une matrice

- Application linéaire induite par une matrice : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$.
- Si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est linéaire, alors il existe $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $T : x \mapsto Ax$.
- Exemples de transformation du plan ($\mathbb{R}^2$) : symétries, rotations,...

31.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Isomorphisme entre $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Matrice d'une combinaison linéaire. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)$.
- Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

31.3 Changement de base et application linéaires

- Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.

31.4 Cas des endomorphismes

- Adaptation des résultats précédents aux cas des endomorphismes.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 19 • Colle 26

Programme de colle

- Chapitre 30 : Applications linéaires et dimension.
- Chapitre 31 : Représentation d'une application linéaire par une matrice.
- Chapitre 32 : Dénombrement.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Le concours blanc arrive, c'est la bonne occasion pour vérifier la bonne tenue du cahier.

Chapter 30 Applications linéaires et dimension

30.1 Application linéaire en dimension finie

§1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

§2 Caractérisation des isomorphismes par les bases

- Caractérisation des isomorphismes par les bases.
- Espaces isomorphes. Caractérisation par la dimension.
- Si f est un isomorphisme, $\operatorname{rg}\left(f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\right) = \operatorname{rg}(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

§3 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

- Si E et F ont même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est bijective si, et seulement si elle est injective si, et seulement si elle est surjective.
- Cas particulier des endomorphismes.

30.2 Rang d'une application linéaire

§1 Applications linéaires de rang fini

- Application linéaire de rang fini.

§2 Théorème du rang pour les application linéaires

- Théorème du rang: si E est de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) + \dim(\ker f) = \dim(E)$.

§3 Invariance du rang par composition par un isomorphisme

- $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\left(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)\right)$.
- Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Chapter 31 Représentation d'une application linéaire par une matrice

31.1 Applications linéaires induite par une matrice

- Application linéaire induite par une matrice : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$.
- Si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est linéaire, alors il existe $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $T : x \mapsto Ax$.
- Exemples de transformation du plan ($\mathbb{R}^2$) : symétries, rotations,...

31.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Isomorphisme entre $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Matrice d'une combinaison linéaire. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)$.
- Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

31.3 Changement de base et application linéaires

- Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.

31.4 Cas des endomorphismes

- Adaptation des résultats précédents aux cas des endomorphismes.

Chapter 32 Dénombrement

Les propriétés les plus intuitives sont admises sans démonstration (*dixit* le programme officiel).

32.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

- Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \leq q$.
- Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \geq q$.
- Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p = q$.

32.2 Ensembles finis

§1 Cardinal

- Ensemble fini. Cardinal d'un ensemble. Notation $\operatorname{card}(A)$, $|A|$ ou $\#A$.
- S'il existe une bijection de X sur Y, alors X est fini si, et seulement si Y est fini et dans ce cas $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.

§2 Propriétés des ensembles finis

- Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une injection (surjection, bijection) entre deux ensembles finis.
- Principe des tiroirs et des chaussettes.
- Cardinal d'une partie d'une ensemble fini, cas d'égalité.

§3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si, et seulement si elle est injective, si, et seulement si elle est bijective.

§4 Cardinal d'une union

- Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire.

32.3 Analyse combinatoire

§1 Cardinal d'un produit cartésien

- Vocabulaire : p-liste, p-uplet, mots de longueur p.

§2 Principe des Bergers

§3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

§4 Nombre de parties d'un ensemble fini

- Rappel sur les fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

§5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

- Vocabulaire : p-liste d'éléments distincts deux à deux, arrangement de p éléments.
- Nombre de permutation d'un ensemble de cardinal n.

§6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

- Vocabulaire : combinaison de p éléments.
- Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal.

PTSI^2 • Mathématique • Semaine 20 • Colle 27

Programme de colle

- Chapitre 32 : Dénombrement.
- Chapitre 33 : Espace probabilisé fini.

Vade-mecum

Chaque étudiant doit être muni d'un cahier grand format afin de rédiger son *vade-mecum*. Celui-ci lui servira à résumer les cours au fur et à mesure de l'année (il remplace les mini fiche bristol).

Le concours blanc arrive, c'est la bonne occasion pour vérifier la bonne tenue du cahier.

Chapter 32 Dénombrement

Les propriétés les plus intuitives sont admises sans démonstration (*dixit* le programme officiel).

32.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

- Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \leq q$.
- Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \geq q$.
- Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p = q$.

32.2 Ensembles finis

§1 Cardinal

- Ensemble fini. Cardinal d'un ensemble. Notation $\operatorname{card}(A)$, $|A|$ ou $\#A$.
- S'il existe une bijection de X sur Y, alors X est fini si, et seulement si Y est fini et dans ce cas $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.

§2 Propriétés des ensembles finis

- Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une injection (surjection, bijection) entre deux ensembles finis.
- Principe des tiroirs et des chaussettes.
- Cardinal d'une partie d'une ensemble fini, cas d'égalité.

§3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si, et seulement si elle est injective, si, et seulement si elle est bijective.

§4 Cardinal d'une union

- Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire.

32.3 Analyse combinatoire

§1 Cardinal d'un produit cartésien

- Vocabulaire : p-liste, p-uplet, mots de longueur p.

§2 Principe des Bergers

§3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

§4 Nombre de parties d'un ensemble fini

- Rappel sur les fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

§5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

- Vocabulaire : p-liste d'éléments distincts deux à deux, arrangement de p éléments.
- Nombre de permutation d'un ensemble de cardinal n.

§6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

- Vocabulaire : combinaison de p éléments.
- Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal.

Chapter 33 Espace probabilisé fini

33.1 Le langage de l'aléatoire

§1 Notion d'événement et d'univers

Univers, résultat, événement élémentaire (singleton), événement.

§2 Langage ensembliste

A est réalisé, l'événement A implique l'événement B, réalisation de A ou B, réalisation de A et B, événement contraire, événement impossible, événement certain, événements incompatibles.

Rappel de quelques propriétés des opérations sur les événements, notamment les règles de de Morgan.

33.2 Espace probabilisé fini

§1 Espace probabilisable, espace probabilisé

Mesure de probabilité sur un univers fini Ω.

Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Ici $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

§2 Propriétés des mesures de probabilités

Propriété élémentaires : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

§3 Probabilités sur un ensemble fini

Caractérisation d'une probabilité par les images des singletons. Distribution de probabilités.

§4 Systèmes complets d'événements

Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système complet d'événement de Ω et B un événement de Ω, alors $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B \cap A_i\right)$.

§5 Équiprobabilité

Équiprobabilité ou probabilité uniforme (discrète).

33.3 Conditionnement

§1 Probabilités conditionnelles

Notation $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.

P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

§2 Formule des probabilités composées

§3 Formule des probabilité totales

§4 Formule de Bayes

Deux versions:

- Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

- Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements et B un événement. On suppose $P(A_i) > 0$ pour tout i et $P(B) > 0$, alors pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left(A_p|B\right) = \frac{P(A_p) \cdot P(B|A_p)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}.$$

33.4 Indépendance stochastique

§1 Indépendance de deux événements

Couple d'événements indépendants. Si $P(A) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(B|A) = P(B)$.

Si A et B sont indépendants, alors A et B^c le sont ainsi que A^c et B, et que A^c et B^c.

§2 Indépendance mutuelle

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.