

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MODÉLISATION

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

<p>Les calculatrices sont autorisées.</p>
--

**Le sujet est composé de quatre parties (pages 2 à 12)
et d'une annexe (page 13).**

Modélisation de la fuite de matière d'un réservoir rempli de dioxyde de carbone gazeux

Présentation générale

Ce sujet porte sur l'étude théorique et numérique d'une fuite de matière au sein d'une cuve contenant du dioxyde de carbone (CO_2) gazeux. Il est constitué de **quatre parties indépendantes**.

Quelques précisions concernant les notations utilisées

Symbole	Nom	Unité
$C_{p,m}$	Capacité thermique molaire à pression constante	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
c_p	Capacité thermique massique à pression constante	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
D_m	Débit massique	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
e_c	Énergie cinétique massique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
H	Enthalpie	J
h	Enthalpie massique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
M	Masse molaire	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
m	Masse	kg
P	Pression	Pa
$\dot{Q} = \delta Q / dt$	Puissance thermique	
R	Constante des gaz parfaits	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
S	Section de fuite	m^2
T	Température	K
T_c	Température critique	K
U	Énergie interne	J
u	Énergie interne massique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
V	Volume	m^3
v	Vitesse des courants de matière	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\dot{W} = \delta W / dt$	Puissance utile	

On prendra garde à bien distinguer les grandeurs **molaires** des grandeurs **massiques**. Certaines de ces grandeurs peuvent être évaluées en entrée ou en sortie du système, ce que l'on identifie par un indice e en entrée ou s en sortie.

Partie I - Modélisation de la fuite d'un réservoir : mise en équation

Généralités sur les bilans de matière et d'énergie en système ouvert

On s'intéresse au système ouvert décrit par la **figure 1**. Ce système possède une entrée et une sortie de matière où la température T , la pression P , la vitesse v , le débit massique D_m et l'enthalpie massique h sont définis. Le système échange algébriquement, avec le milieu extérieur, la puissance thermique \dot{Q} et la puissance utile \dot{W} . Les débits massiques $D_{m,e}$ et $D_{m,s}$ sont positifs. Il n'y a pas de travaux dérivant d'une énergie potentielle.

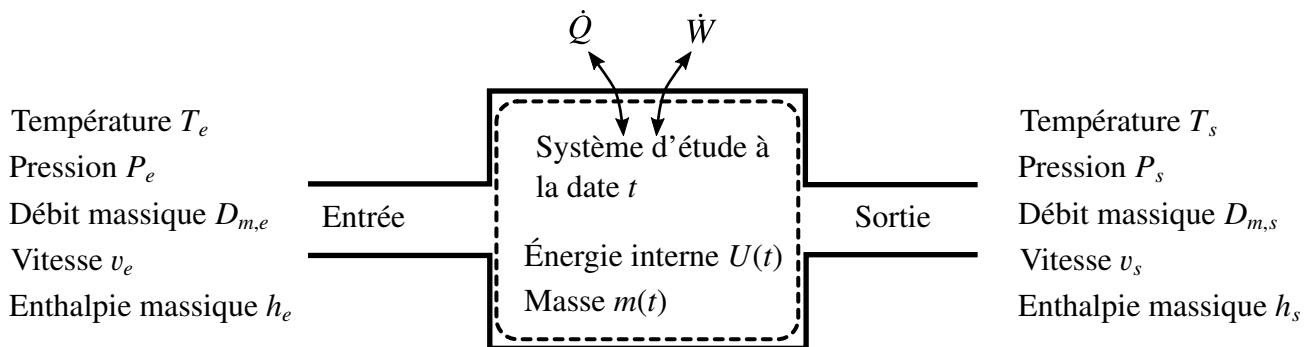


Figure 1 - Représentation schématique d'un système ouvert

- Q1.** Rappeler l'unité des grandeurs \dot{W} , \dot{Q} et D_m mentionnées sur la **figure 1**.
- Q2.** Par une méthode de votre choix (issue de la thermodynamique ou de la mécanique des fluides ou autres), établir l'équation locale de conservation de la matière :

$$\frac{dm}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s} . \quad (1)$$

- Q3.** À l'aide d'un bilan énergétique, établir l'expression du premier principe de la thermodynamique en régime stationnaire pour le système ouvert représenté sur la **figure 1**. On mettra le résultat sous la forme :

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c) = \dot{Q} + \dot{W} . \quad (2)$$

Donner la relation liant D_m , $D_{m,e}$ et $D_{m,s}$ et expliciter Δe_c en fonction des données.

On admet dans la suite l'écriture du premier principe en système ouvert, étendue aux systèmes en régime transitoire :

$$\frac{dU}{dt} = \left(\begin{array}{c} \text{Débit d'énergie} \\ \text{entrant} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Débit d'énergie} \\ \text{sortant} \end{array} \right) \quad (3)$$

où dU/dt désigne la dérivée de l'énergie interne du système étudié par rapport au temps.

- Q4.** Proposer une interprétation qualitative du bilan d'énergie traduit par l'équation (3).

Écriture d'un modèle décrivant la fuite d'un réservoir adiabatique contenant du CO₂

On s'intéresse à présent à un réservoir contenant un gaz supposé parfait. Ce réservoir indéformable (donc de volume V constant) est le siège d'une fuite vers le milieu environnant à la température T_{ext} et à la pression P_{ext} supposées constantes dans tout le problème. Il n'est pas agité mécaniquement. Toutefois, les propriétés du gaz dans le réservoir sont supposées uniformes à chaque instant. Ce réservoir est représenté sur la **figure 2**.

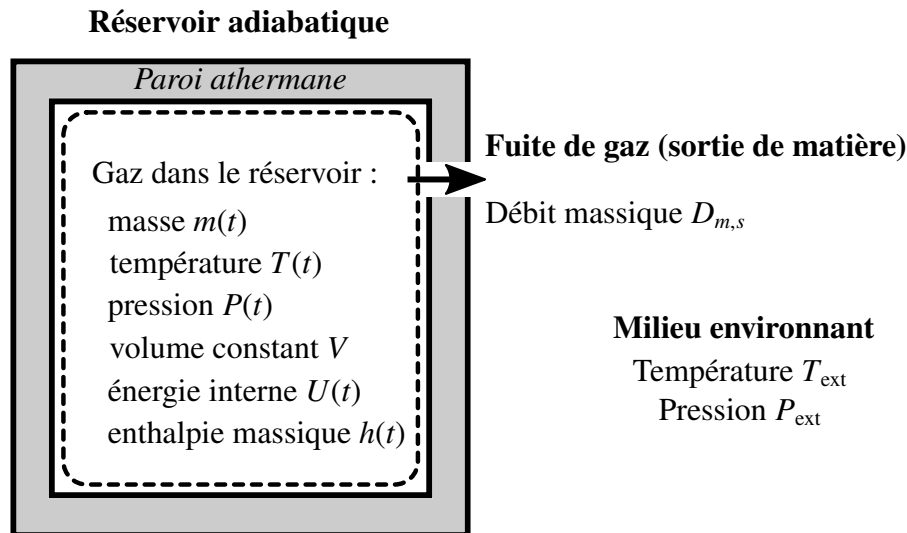


Figure 2 - Réservoir adiabatique renfermant du gaz et sujet à une fuite de gaz vers le milieu environnant

- Q5.** On suppose que les grandeurs intensives du gaz dans le réservoir sont uniformes et que celles du gaz sortant sont identiques à celles du réservoir. On suppose négligeable l'énergie cinétique massique de la matière quittant le système. On s'intéresse au système *{volume contenant le gaz à T et P dans le réservoir, paroi non comprise}* représenté par des pointillés sur la **figure 2**. Justifier que l'application du bilan de matière et du premier principe (équations (1) et (3)) au système en pointillés, décrit par la **figure 2**, permet d'obtenir le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -D_{m,s} \\ \frac{dU}{dt} = -D_{m,s} h \end{cases} \quad (4)$$

Q6. *Le modèle gaz parfait*

- Dans quelle situation limite un gaz réel s'identifie-t-il exactement à un gaz parfait ?
- Donner la valeur du rapport $C_{P,m}/R$ pour un gaz parfait monoatomique.
- On observe expérimentalement que pour le CO₂ gaz parfait, le rapport $C_{P,m}/R$ dépend de la température. Donner un argument physique expliquant pourquoi.
- On note u l'énergie interne massique du gaz parfait, n le nombre de moles de gaz, m sa masse et M sa masse molaire. Justifier la relation $h = u + \frac{nRT}{m}$ et en déduire l'équation :

$$\frac{du}{dT} = \frac{R}{M} [f(T) - 1] \quad (5)$$

dans laquelle $f(T) = C_{P,m}/R$.

Q7. À partir de la relation $u = U/m$ liant l'énergie interne massique u , l'énergie interne U et la masse m du système étudié, montrer que le système d'équations (4) se ramène à l'équation :

$$\frac{du}{dt} = \frac{RT}{M} \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}. \quad (6)$$

Déduire alors de l'équation (5) la relation :

$$[f(T) - 1] \frac{dT}{dt} = \frac{T}{m} \frac{dm}{dt}. \quad (7)$$

On cherche à présent à estimer le débit $D_{m,s}$ de gaz quittant le réservoir. Pour ce faire, on s'intéresse à la zone de l'espace dans laquelle se produit la fuite.

Réservoir adiabatique

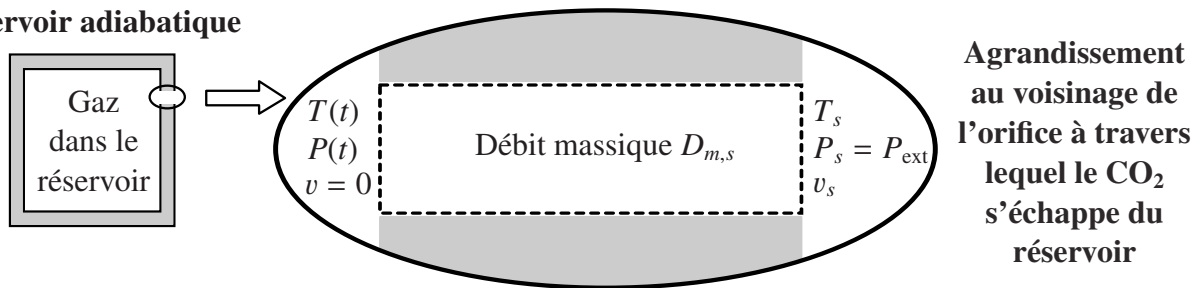


Figure 3 - Fuite de CO_2 gazeux à travers l'orifice dans la paroi du réservoir

On considère le système $\{\text{gaz dans la paroi du réservoir}\}$ (**figure 3**) et on suppose que :

- l'écoulement de gaz à travers l'orifice est **adiabatique** et **stationnaire** ;
- la vitesse du gaz en entrée du système est nulle, elle est notée v_s en sortie ;
- la température et la pression du gaz en entrée sont notées T et P (ce sont celles du gaz à l'intérieur du réservoir) ; en sortie, elles sont notées T_s et $P_s = P_{\text{ext}}$.

Q8. Montrer que le débit massique $D_{m,s}$ de fluide à travers la section de l'orifice est donné par :

$$D_{m,s} = \frac{S v_s M P_{\text{ext}}}{R T_s} \quad (8)$$

où S désigne la section de passage du fluide à travers l'orifice.

Q9. On s'intéresse au système $\{\text{gaz contenu dans la paroi du réservoir}\}$. Justifier que l'équation (2) s'écrit alors $\Delta h + \Delta e_c = 0$ et en déduire que la vitesse de sortie du CO_2 a pour expression :

$$v_s = \sqrt{2 \frac{R}{M} \int_{T_s}^T f(T) dT}. \quad (9)$$

Q10. Méthode de calcul de T_s

a) L'écoulement de fuite du gaz est supposé isentropique. Expliquer comment procéder expérimentalement pour rendre un écoulement pratiquement isentropique.

b) L'isentropie permet d'obtenir l'équation admise $\frac{C_{P,m}}{R} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} = 0$.

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, en déduire que T_s est solution de l'équation :

$$\int_T^{T_s} \frac{f(T)}{T} dT + \ln \left(\frac{m R T}{M V P_{\text{ext}}} \right) = 0. \quad (10)$$

Partie II - Modélisation de la fuite d'un réservoir : traitement numérique

On suppose que le code suivant (**figure 4**) est écrit en préambule de toute réponse s'appuyant sur l'écriture d'un code Python. Il est inutile de le recopier. Toutes les variables définies sont globales et accessibles dans toutes les fonctions, sans avoir à être passées en argument.

```
from math import log, sqrt # logarithme népérien, racine carrée

# constantes générales
M = 44.01e-3      # Masse molaire du CO2 (kg/mol)
Pext = 1.013e5    # Pression extérieure (Pa)
R = 8.314         # Constante des gaz parfaits (J/K/mol)
S = 1.000e-4      # Section de l'orifice de fuite (m^2)
Text = 293.0      # Température extérieure (K)
V = 1.000         # Volume de l'enceinte (m^3)
K = S * Pext * sqrt(2 * M / R) # constante présente dans les équations du
    ↪ modèle

# constantes pour le modèle A de f(T)
A1 = 8.303
A2 = -2810
A3 = 485.6

# initialisation
m0 = 11.00        # Masse initiale du CO2 dans l'enceinte (kg)
T0 = 473.2        # Température initiale du CO2 dans l'enceinte (K)
```

Figure 4 - Préambule 1 Python

On s'intéresse ici à la fuite du gaz dans le réservoir et plus précisément à la température et la masse du gaz en sortie. Pour cela, on dispose des équations suivantes issues du modèle précédent :

$$g(T, T_s, m) = \int_T^{T_s} \frac{f(T)}{T} dT + \ln \left(\frac{m R T}{M V P_{\text{ext}}} \right) = 0 \quad (11)$$

et

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -\frac{K}{T_s} \sqrt{\int_{T_s}^T f(T) dT} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{T}{m[f(T) - 1]} \frac{dm}{dt} \end{cases} \quad \text{avec } K = S P_{\text{ext}} \sqrt{\frac{2M}{R}} \quad (12)$$

On associe à ce modèle la fonction $f(T) = C_{p,m}/R$ qui suit la loi du modèle A :

$$f(T) = A_1 + \frac{A_2}{T + A_3} \quad \text{avec } T \text{ en K et } \begin{cases} A_1 = 8,303 \\ A_2 = -2810 \text{ K} \\ A_3 = 485,6 \text{ K} \end{cases} \quad (13)$$

Pour déterminer les paramètres du gaz en sortie de l'enceinte, il nous faut d'abord trouver la température de sortie T_s , ce que nous allons faire grâce à l'équation (11), en 4 étapes :

- définir la fonction $f(T)$;
- calculer l'intégrale $\int [f(T)/T] dT$ par la méthode des rectangles ;
- définir la fonction $g(T, T_s, m)$;
- résoudre l'équation $g(T, T_s, m) = 0$ par la méthode de Newton pour obtenir T_s .

Q11. Écrire le code Python de la fonction $f(T)$ associée à l'équation (13), qui prend en argument la température T et renvoie la valeur $f(T)$ à cette température.

Q12. On souhaite déterminer numériquement l'expression $\int_{T_1}^{T_2} \frac{f(T)}{T} dT$ en utilisant la méthode des rectangles sur un ensemble de N sous-intervalles.

- a) À l'aide d'une représentation graphique, justifier que l'expression $\frac{T_2 - T_1}{N} \times \frac{f(T)}{T}$ correspond à l'aire d'un des rectangles dont un coin est commun à la courbe représentative de la fonction $f(T)/T$. Donner la valeur de N pour un calcul sur 100 sous-intervalles.
- b) En déduire le code de la fonction Python `integ1(T1, T2)` qui prend en argument 2 températures T_1 et T_2 correspondant aux bornes de l'intervalle d'intégration et renvoie la valeur numérique de l'intégrale de $f(T)/T$ calculée par la méthode des rectangles, sur un ensemble de 100 sous-intervalles.

Q13. Donner le code Python de la fonction $g(T, T_s, m)$ qui prend en argument les températures T , T_s et la masse m et renvoie la valeur de la fonction g définie par l'équation (11). On pourra utiliser toutes les fonctions déjà définies.

Q14. Enfin, pour déterminer la valeur numérique de T_s , on va résoudre l'équation (11) par la méthode de Newton. Les variables T et m sont constantes pour l'étude de la fonction $g(T, T_s, m)$, qui se comporte donc comme une fonction d'une seule variable, T_s .

Pour implémenter la méthode de Newton, on utilise la suite $T_{n+1} = T_n - g(T_n)/g'(T_n)$, fabriquée à partir de la fonction g et de sa dérivée g' , dont on admet qu'elle converge vers un zéro de la fonction g qui est la valeur de T_s recherchée.

- a) À l'aide d'une représentation graphique la plus complète possible, illustrer quelques étapes du principe de convergence de la suite T_n vers un zéro de la fonction g .
- b) La fonction `chercheTs(T, m)` partiellement fournie ci-dessous renvoie, pour des valeurs connues des variables T et m , la valeur correspondante de T_s obtenue par résolution de l'équation (11) selon la méthode de Newton.

```
def chercheTs(T, m):
    "Résolution de l'équation  $g(T, T_s, m) = 0$  par la méthode de
    ↪ Newton"
    Ts = 300.0
    [instruction1]                # À modifier
    while residu > 1e-10:
        gn = [instruction2]       # À modifier
        gpn = f(Ts) / Ts
        Tsold = Ts
        Ts = [instruction3]       # À modifier
        residu = abs(Ts - Tsold)
    return Ts
```

Indiquer par quelles instructions il convient de remplacer les séquences `[instruction1]`, `[instruction2]` et `[instruction3]` présentes dans le code ci-dessus.

Ensuite, pour résoudre le système d'équations (12), il faut :

- calculer l'intégrale $\int f(T) dT$ qui intervient dans l'une d'elles ;
- déterminer les solutions des 2 équations différentielles par la méthode d'Euler.

Q15.

- Déterminer l'expression littérale de $I = \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT$.
- Donner le code de la fonction `integ2(T1, T2)` retournant la valeur de I en fonction des arguments d'entrée $T1$, $T2$ et des variables globales $A1$, $A2$ et $A3$.

Pour résoudre une équation différentielle mise sous la forme $y'(t) = f(t, y(t))$, on utilise le schéma d'Euler suivant :

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t)) \times \Delta t. \quad (14)$$

Ce schéma est implémenté au sein de l'**algorithme 1** présenté ci-dessous, que l'on souhaite appliquer pour résoudre le système d'équations (12) entre les dates $t = 0$ s et $t = 10$ s avec un pas de temps de $\Delta t = 0,10$ s :

- Initialisation des variables dt , N , T , m et P
- Début d'une boucle avec test d'un ou plusieurs critères d'arrêt
 - calcul de T_s
 - calcul de mp et Tp par le schéma d'Euler
 - actualisation des variables
- Renvoie des grandeurs attendues

Algorithme 1 - Résolution du système d'équations (12) par la méthode d'Euler

- Préciser la signification et les valeurs initiales des variables présentes dans la phase d'initialisation de l'**algorithme 1** (on fera référence au préambule Python).
- Préciser la signification des variables `mp` et `Tp` présentes dans la boucle de l'**algorithme 1**. Donner la syntaxe Python du calcul de `mp` et `Tp` respectant le schéma d'Euler proposé. On pourra faire appel à toute fonction précédemment définie, ainsi qu'au préambule Python.
- Écrire le code Python de la fonction `Euler()` traduisant l'**algorithme 1** proposé ci-dessus. On pourra faire appel à toute fonction précédemment définie.
- Intuitivement, quand la fuite s'arrêtera-t-elle en pratique ?

Partie III - Développement de corrélations pour la capacité thermique à pression constante molaire du dioxyde de carbone

On s'intéresse maintenant au modèle B pour la fonction $f(T) = C_{p,m}/R$, dont on suppose qu'elle suit une loi polynomiale de la forme suivante :

$$f(T) = \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{T}{T_c} \right)^i \quad (15)$$

dans laquelle T_c est la température critique connue du CO_2 . Pour déterminer les coefficients réels B_i de ce polynôme de degré n , on dispose de 6 données expérimentales de la valeur de $C_{p,m}/R$ en fonction de la température T en kelvin (voir **tableau 1**).

T	$C_{p,m}/R$
$T_1 = 100,0$	$C_1 = 3,513$
$T_2 = 500,0$	$C_2 = 5,367$
$T_3 = 1\,000$	$C_3 = 6,532$
$T_4 = 2\,000$	$C_4 = 7,257$
$T_5 = 3\,000$	$C_5 = 7,475$
$T_6 = 4\,000$	$C_6 = 7,586$

Tableau 1 - Série de 6 données expérimentales pour le CO_2 gazeux

Préambule

Q20. Les valeurs des capacités thermiques données dans le **tableau 1** ont été mesurées par calorimétrie. Expliquer, à l'aide d'un schéma, comment réaliser expérimentalement cette mesure pour un liquide ou un gaz. Préciser comment la valeur de la capacité thermique est déduite de la mesure.

Q21. Montrer, par une analyse dimensionnelle, que le rapport $C_{p,m}/R$ est sans dimension.

Développement du modèle polynomial

On souhaite déterminer les coefficients B_i d'un polynôme $f(T)$ de degré $n = 5$ donné par l'équation (15) dont la courbe représentative passe exactement par les 6 points expérimentaux.

Q22. Écrire l'expression littérale de l'équation que doivent vérifier les coefficients B_i (pour $0 \leq i \leq 5$) du polynôme pour passer par le point expérimental (T_3, C_3) .

Q23. En déduire que l'on peut rassembler les données expérimentales sous la forme du produit matriciel :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{B} \quad (16)$$

où \mathbf{Y} est le vecteur des mesures expérimentales de $C_{p,m}/R$, \mathbf{B} celui des coefficients B_i (pour $0 \leq i \leq 5$) du polynôme et \mathbf{M} une matrice carrée dont les coefficients ne dépendent que des valeurs expérimentales T_j/T_c (pour $1 \leq j \leq 6$).

Donner l'expression d'une des lignes de la matrice \mathbf{M} en fonction de T_c , T_j et C_j pour $1 \leq j \leq 6$.

Q24. Quelle opération mathématique faut-il effectuer sur la matrice \mathbf{M} pour accéder au vecteur \mathbf{B} ?

On suppose que le code suivant (**figure 5**) est écrit en préambule de toute réponse s'appuyant sur l'écriture d'un code Python. Il est inutile de le recopier. Toutes les variables définies sont globales et accessibles dans toutes les fonctions, sans avoir à être passées en argument.

```
import matplotlib.pyplot as plt # tracés
import numpy as np             # travail matriciel

# Données expérimentales
T = np.array([100.0, 500.0, ...]) # température (K)
CpmR = np.array([3.513, 5.367, ...]) # Cpm/R

# modèle B
Tc = 304.2 # Température critique du CO2 (K)
Y = np.array(...) # Vecteur Y du modèle B
M = np.array(...) # Matrice M du modèle B
```

Figure 5 - Préambule 2 Python

Q25. On suppose que la matrice M et le vecteur Y ont été entièrement saisis sous forme de tableaux numpy (voir **figure 5**). Donner le code Python permettant d'en déduire le vecteur B contenant les coefficients B_i à l'aide d'une fonction du module numpy.

Les points expérimentaux ainsi que les deux courbes associées aux modèles A et B ont été représentés sur la **figure 6**.

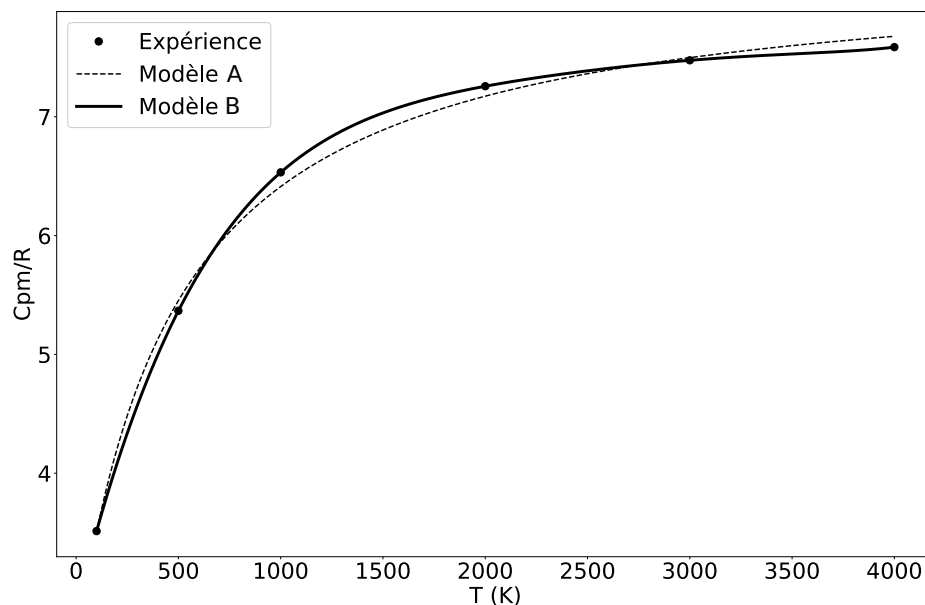


Figure 6 - Confrontation des points expérimentaux et des deux modèles

Q26. Donner le code permettant de représenter le nuage des points expérimentaux ou le modèle A ou le modèle B, en précisant quel est le tracé choisi.

Q27. Commenter le graphe de la **figure 6**. Finalement, parmi les deux modèles proposés, lequel retiendriez-vous et pourquoi ?

Partie IV - Traitement informatique des données expérimentales

On suppose que le code suivant (**figure 7**) est écrit en préambule de toute réponse s'appuyant sur l'écriture d'un code Python. Il est inutile de le recopier.

```
def tri(L):
    "Trie la liste L"
    n = len(L)
    if n <= 1:
        return L
    a = L[-1]
    L1 = []
    L2 = []
    for i in range(n - 1):
        if L[i] <= a:
            L1.append(L[i])
        else:
            L2.append(L[i])
    return tri(L1) + ... + ...      # À compléter
```

Figure 7 - Préambule 3 Python

Les données expérimentales doivent éventuellement être triées. Pour cela, on utilise la fonction `tri(L)` qui prend en argument la liste à trier (voir **figure 7**).

Q28. Préciser, sans justification, s'il s'agit du *tri rapide*, du *tri par fusion* ou du *tri par insertion*. Expliquer pourquoi ce tri est récursif. Donner sa complexité temporelle dans le meilleur cas.

Q29. Les variables `a`, `L1` et `L2` ont une signification bien précise que l'on ne retrouve pas dans leur nom. Donner le nom usuel de la variable `a` et expliquer ce qui différencie les listes `L1` et `L2`. Proposer des noms plus pertinents pour ces 3 variables.

Q30. Compléter la dernière ligne de la fonction `tri`.

Après leur acquisition, les résultats expérimentaux sont stockés dans une base de données. Les molécules y sont identifiées par une clé primaire appelée `idcas`.

On s'intéresse aux **2 tables** suivantes contenues dans la base de données :

- la table `general` contenant des informations diverses sur les molécules ;
- la table `capa` contenant les données expérimentales de mesure du rapport $C_{p,m}/R$ en fonction de la température pour différentes molécules.

idcas	nom	symbole	Tc	Pc	...
7727-37-9	diazote	N2	126.19	33.978	
124-38-9	dioxyde de carbone	CO2	304.18	73.825	
...					

Table 1 - Extrait de la table `general`

idcas	CpmR	T
124-38-9	5.367	500.0
124-38-9	7.475	3000.0
7727-37-9	3.499	500.0
124-38-9	3.513	100.0
...		

Table 2 - Extrait de la table capa

- Q31.** Donner le code SQL permettant d'afficher le nom et le symbole de toutes les molécules.
- Q32.** Donner le code SQL permettant d'afficher toutes les informations de la table capa pour le dioxyde de carbone (repéré par son idcas).
- Q33.** Expliquer ce que renvoie la requête suivante :

```
SELECT g.symbole, count(*) AS nb
FROM general AS g
JOIN capa AS c ON g.idcas = c.idcas
GROUP BY c.idcas
```

- Q34.** Donner le code SQL permettant d'afficher, pour chaque molécule, son identifiant et la valeur moyenne de $C_{p,m}/R$ pour les températures inférieures ou égales à 500,0 K.

ANNEXE

Bibliothèque numpy de Python

La bibliothèque numpy est importée de la façon suivante :

```
>>> import numpy as np
```

La création d'un tableau numpy à 2 lignes et 3 colonnes, appelé M, est réalisée ainsi :

```
>>> tab = np.array([[1.5, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> print(M)
[[1.5 2. 3. ]
 [4. 5. 6. ]]
```

L'inversion d'une matrice M carrée se fait à l'aide de la commande `np.linalg.inv(M)` :

```
>>> M = np.array([1.5, 2], [4, 5])
>>> N = np.linalg.inv(M)
>>> print(N)
[[-10.,  4.],
 [ 8., -3.]]
```

Bibliothèque matplotlib de Python

La bibliothèque matplotlib est importée de la façon suivante :

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
```

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ peut être tracée de la façon suivante :

```
>>> X = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
>>> Y = [0, 1, 4, 9, 16, 25]
>>> plt.plot(X, Y)
>>> plt.show()
```

Mémento de commandes sql

SELECT ...	- sélection d'attributs
FROM ...	- choix de tables
JOIN ... ON ...	- jointure entre tables
WHERE ...	- condition
GROUP BY ...	- groupements
HAVING ...	- condition sur les agrégations
ORDER BY ...	- classement
AVG(...), MIN(...), MAX(...), SUM(...), COUNT(...)	- commandes d'agrégation
AS	- renommage

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MODÉLISATION ET INGÉNIERIE NUMÉRIQUE

Jeudi 3 mai : 8 h - 11 h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la précision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut ressembler à une erreur d'énoncée, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été mené à prendre.

<p>Les calculatrices sont autorisées</p>

Le sujet est composé de 20 pages d'énoncé. Il comporte 3 parties indépendantes.

Il est demandé au candidat de bien vouloir préciser le numéro de chaque question traitée. Les résultats attendus seront encadrés.

MODÉLISATION DU CAPTAGE DU COURANT DANS UN TRAIN À GRANDE VITESSE

Présentation générale

Le train est un moyen de transport en commun très fiable et il n'existe pas, de nos jours, de moyen plus efficace pour alimenter électriquement les trains que le captage de courant via le contact pantographe/caténaire. La caténaire forme la partie aller du circuit électrique depuis la sous-station d'alimentation, tandis que les rails sont le circuit retour (**figure 1**).

L'usure mécanique par frottement de la caténaire est une contrainte majeure dans le captage du courant en ligne lorsque le train roule.

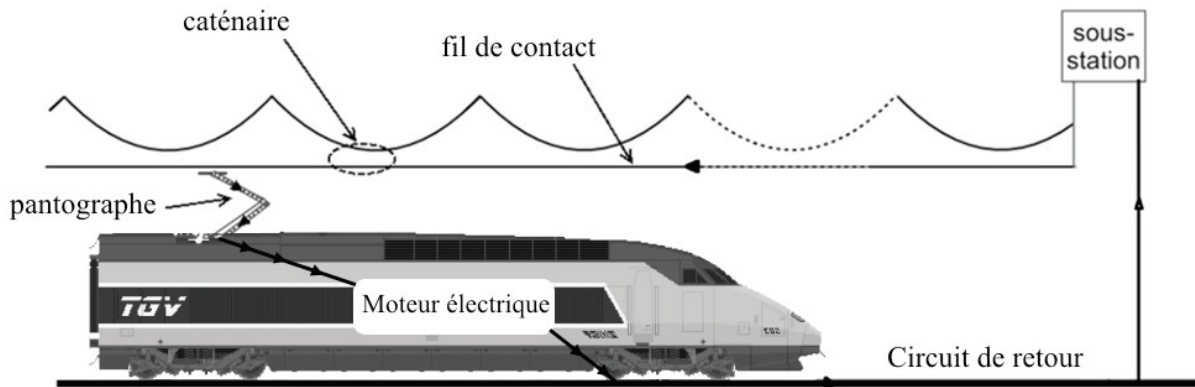


Figure 1 – Schéma de circulation du courant électrique

L'usure par frottement du fil de contact peut être diminuée par une modification du matériau de la bande de contact et en réduisant la force de contact du pantographe sur la caténaire. En revanche, lorsque le train est à l'arrêt, un problème jusque là inexistant apparaît dans certains cas : la rupture du fil de contact due à un échauffement trop important causé par le passage du courant entre la caténaire et le pantographe.

Les principaux cas de rupture de la caténaire sont finalement dus à :

- l'alimentation à l'arrêt : par échauffement et risque de rupture par striction ;
- l'alimentation en mouvement : par frottement excessif sur la caténaire ou accrochage du pantographe et arrachage.

De nombreux retards sont imputables à ces deux causes de rupture de la caténaire et représentent une perte d'exploitation importante pour la SNCF. C'est dans ce contexte que la Direction de l'Ingénierie de la SNCF a lancé une série d'études expérimentales et théoriques pour modéliser ces phénomènes.

Le sujet comporte 3 parties indépendantes :

- la **Partie I** étudie les pertes par effet Joule dans la caténaire et dans les rails ;
- la **Partie II** a pour objectif de modéliser l'évolution de la température au sein du fil de contact de la caténaire lorsque le train est à l'arrêt ;
- la **Partie III** a pour objectif de mettre en place un dispositif de mesure de la force de contact du pantographe sur la caténaire et de vérifier les performances de l'asservissement de cette force.

Partie I - Étude préliminaire de la ligne d'alimentation

Objectif : proposer une modélisation du contact électrique pantographe-caténaire en vue d'évaluer les pertes par effet Joule.

L'interface pantographe/caténaire était initialement un contact cuivre/cuivre, dommageable pour le fil en terme **d'usure par frottement** et nécessitant une lubrification supplémentaire externe au système.

Le cuivre de la bande de captage (**figure 2**), élément du pantographe assurant le contact, est remplacé par du carbone graphite.

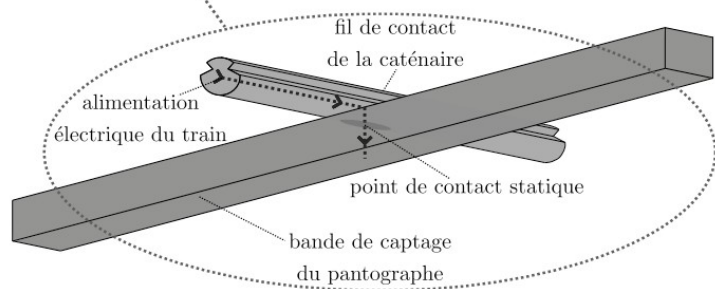
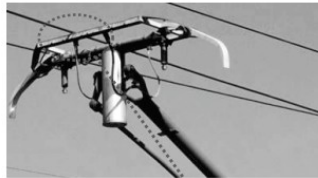


Figure 2 – Interface pantographe/caténaire

Q1. Justifier la nécessité de changer le matériau de la bande de captage du pantographe plutôt que celui du fil de contact de la caténaire.

Q2. Donner 2 propriétés physiques qui justifient l'emploi du carbone graphite. Dans quel autre usage similaire et courant retrouve-t-on l'usage du carbone graphite ?

Cette avancée du système s'avère concluante en ligne, l'usure par frottement du fil diminue et le contact cuivre/carbone est auto-lubrifiant. En revanche, lors d'arrêts prolongés du train, à cause d'incidents sur la voie par exemple, la rupture du fil de contact due à un échauffement trop important causé par le passage du courant entre la caténaire et le pantographe peut arriver.

Le captage à l'arrêt peut être décrit comme un contact électrique (alimentation du train via le contact) avec des contraintes mécaniques (force de contact pouvant varier d'un cas à l'autre) provoquant des phénomènes thermiques (diffusion de la chaleur et échanges entre les solides et l'extérieur).

Ce problème **multiphysique**, complexe, repose sur l'interface de deux solides. En physique, l'étude d'interfaces est toujours compliquée. En effet, leurs caractéristiques sont particulièrement interdépendantes et difficilement mesurables.

Dans le domaine électrique, l'interface est caractérisée par la résistance électrique de contact qui détermine la capacité du contact à ralentir le passage du courant.

D'un **point de vue mécanique**, c'est la surface de contact qui caractérise l'interface.

Enfin, **en thermique**, l'interface est caractérisée par la résistance thermique de contact qui représente l'aptitude du contact à laisser passer le flux de chaleur.

La compréhension de ces phénomènes multiphysiques passe donc non seulement par des phases expérimentales mais aussi par une étude théorique du système.

I.1 – Calcul des pertes dues à la caténaire

Nous étudions ici l'alimentation de la motrice par caténaire depuis des sous-stations A et B distantes de $L = 10 \text{ km}$ l'une de l'autre (figure 3). La tension de ces sous-stations par rapport à la terre est de $U = 1,5 \cdot 10^3 \text{ V}$ continu. La motrice se situe à une distance x de la station A. La résistance linéique des caténaires est de $r = 0,020 \text{ } \Omega \cdot \text{km}^{-1}$. Pendant la phase d'accélération, le courant absorbé par la motrice est $I = 2,5 \cdot 10^3 \text{ A}$.

On néglige les résistances des rails.

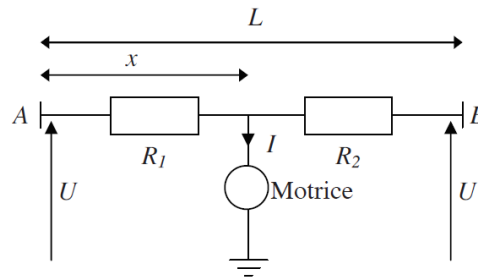


Figure 3 – Schéma simplifié de l'alimentation de la motrice

Dans la figure 3, les deux résistances R_1 et R_2 dépendent de x . Compte tenu de la configuration du circuit, elles peuvent être remplacées par une seule résistance équivalente R_e .

Q3. Donner le schéma électrique équivalent. En déduire l'expression de R_e en fonction de r , L et x .

Q4. Déterminer la valeur de x pour laquelle la résistance R_e est maximale.

Pour les questions suivantes, on considérera que la motrice se situe en $x = L/2$.

Q5. Déterminer l'expression de R_e . Faire l'application numérique.

Q6. En déduire l'expression de la chute de tension aux bornes de cette résistance : U_R .
Faire l'application numérique.

Q7. Donner l'expression du rendement lié à l'alimentation de la motrice via la caténaire. Faire l'application numérique. Que devient ce rendement lorsque la motrice est au niveau d'une sous-station (en A ou B) ?

I.2 – Passage au 25 kV alternatif

Depuis les années 1950, les nouvelles lignes françaises de chemin de fer sont alimentées en 25 kV tension alternative monophasée 50 Hz.

Q8. Quel est l'intérêt principal d'utiliser une tension de 25 kV par rapport à une tension de 1,5 kV ?

Q9. Justifiez la fréquence de 50 Hz. Les sous-stations étant elles-mêmes alimentées par des lignes à haute tension 63 kV, quel élément permet le passage d'une tension de 63 kV à une tension de 25 kV ?

Pour toute la suite du sujet, le courant circulant dans la caténaire et dans le pantographe sera un courant continu. La motrice comportera donc un moteur à courant continu.

Partie II - Modélisation thermique de la caténaire, train à l'arrêt

Objectif : connaître l'évolution de la température au sein de la caténaire lorsque le train est à l'arrêt.

On décompose pour cela la caténaire en plusieurs zones : P_1 , P_2 et la zone de contact. Nous nous limiterons à une étude simplifiée de ces zones (**figure 4**).

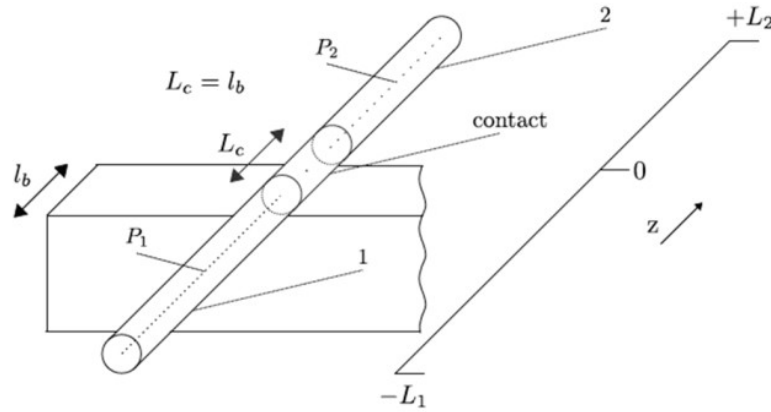


Figure 4 – Caténaire et bande de captage du pantographe, au niveau de la zone de contact

La caténaire est modélisée par un cylindre de rayon R , en cuivre de conductivité électrique γ , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ . Le pantographe est modélisé dans la **figure 4** par un parallélépipède de largeur L_c .

Pour l'étude de la caténaire, on utilisera les coordonnées polaires (r, θ, z). L'axe z est l'axe de la caténaire, orienté sur la figure 4 et u_z est le vecteur unitaire.

Les échanges conducto-convectifs à l'interface caténaire/air sont régis par la relation de Newton

$$\delta\Phi = h(T_{\text{paroi}} - T_e) dS \quad (1)$$

avec $\delta\Phi$ le flux thermique en Watt (W) fourni par la caténaire à l'air à travers une surface dS , T_{paroi} la température de la caténaire en $r = R$, $T_e = 20^\circ\text{C}$ la température de l'air et h un coefficient constant.

II.1 – Régime transitoire dans la zone P1 : $-L_1 < z < -L_c/2$

Dans la zone P_1 , on considère qu'il y a invariance suivant r et θ . On étudie le régime transitoire. La température T ne dépend donc que de z et t : $T(z, t)$.

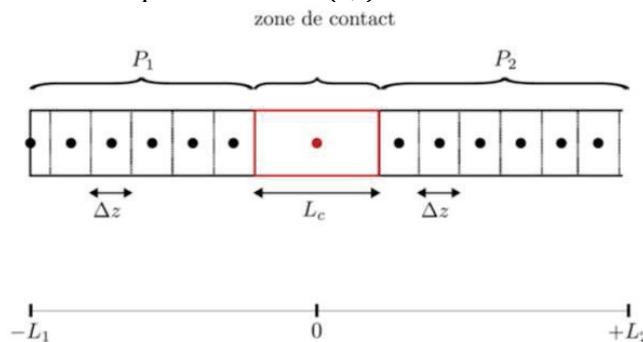


Figure 5 – Discrétisation spatiale de la caténaire autour de la zone de contact

À l'arrêt, la caténaire est parcourue par un courant continu d'intensité $I = 60 \text{ A}$, réparti uniformément.

On prend comme système au sein de la zone P1 un cylindre plein en cuivre, de rayon R , compris entre z et $z + dz$ étudié entre t et $t + dt$ (**figure 5**). La relation de Newton (1) définie précédemment s'applique.

Q10. Pour le système défini précédemment, donner les expressions des flux thermiques entrant en z , sortant en $z + \Delta z$ et sur les parois latérales (pertes conducto-convectives).

Q11. Donner l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans le système entre t et $t + \Delta t$ en fonction de Δz , Δt , I , γ et R le rayon de la caténaire.

Q12. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système et en considérant Δz et Δt comme des infiniments petits du premier ordre, montrer que T est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - b(T - T_e) + d$$

avec a, b et d des constantes à exprimer en fonction de $R, \lambda, \rho, c, \gamma, I$ et h .

II.2 – Résolution numérique dans la zone P₁

L'objectif est de résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - bT + e \text{ avec } a, b \text{ et } e \text{ des constantes.} \quad (2)$$

Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I et $x \in I$.

Q13. À l'aide de la formule de Taylor-Young, écrire le développement limité à l'ordre 2 de $f(x + \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Déterminer aussi le développement limité à l'ordre 2 de $f(x - \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Q14. En déduire la valeur de :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x)}{\varepsilon^2} \right).$$

On découpe maintenant l'intervalle $[-L_1, -L_c/2]$ en N sous intervalles $[z_k, z_{k+1}]$ de longueur Δz avec $\Delta z = (L_1 - L_c/2)/N$. z_0 correspond à $-L_1$ et z_N à $-L_c/2$.

Q15. Déduire des **questions Q13 et Q14** une expression approchée de $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_k, t)$

On choisit Δt comme pas de temps. On cherche l'évolution de la température pendant une durée $M\Delta t$ avec M un entier naturel. On définit donc les temps $t_p = p\Delta t$ avec $p \in [0, M]$.

Q16. En utilisant la méthode d'Euler, donner l'expression de $\frac{\partial T}{\partial t}(z_k, t_p)$ en fonction notamment de $T(z_k, t_{p+1})$ et de $T(z_k, t_p)$.

Q17. En utilisant l'équation aux dérivées partielles (2), déterminer l'expression de $T(z_k, t_{p+1})$ en

fonction de $T(z_k, t_p)$, $T(z_{k+1}, t_p)$, $T(z_{k-1}, t_p)$, a , b , e , Δt et Δz .

L'objectif est de construire un tableau de M+1 lignes et N+1 colonnes pour lequel :

- la première ligne contient N+1 valeurs représentant les températures initiales pour chaque position z_k ;
- la deuxième ligne contient N+1 valeurs représentant les températures à $t = \Delta t$ pour chaque position z_k ;
- la p-ième ligne contient N+1 valeurs représentant les températures à $t = p\Delta t$ pour chaque position z_k .

On donne dans le **tableau 1** le programme avec des lignes incomplètes. On utilisera les constantes définies en début de programme pour l'écriture des lignes incomplètes. On note T0 la température initiale de la caténaire. **Le candidat doit utiliser au choix un des deux langages : Python ou Scilab.**

Q18. Donner le contenu de la ligne 18 (on pourra également utiliser les lignes suivantes si nécessaires) qui enregistre les conditions initiales dans le tableau Tab.

Q19. Recopier et compléter la ligne 27 qui permet de remplir une ligne de Tab en fonction de la précédente. Veuillez respecter l'ordre des paramètres p et k utilisés dans les lignes 27 et suivantes.

Python	N°	Scilab
import numpy as np	1	
	2	
#Définition des constantes :	3	//Définition des constantes :
T0=23 #Température initiale de la caténaire.	4	T0=23 //Température initiale de la caténaire.
	5	
a=10**(-4)	6	a=1e-4
b=1.2*10**(-3)	7	b=1.2e-3
e=3*10**(-2)	8	e=3e-2
L=0.95 #Longueur de la caténaire étudiée (L1-Lc/2)	9	L=0.95 //Longueur de la caténaire étudiée (L1-Lc/2)
Lc=0.05 #Longueur de la zone de contact	10	Lc=0.05 //Longueur de la zone de contact
N=50 #Nombre d'intervalles de longueur dz	11	N=50 //Nombre d'intervalles de longueur dz
dt=1 #Pas de temps en s	12	dt=1 //Pas de temps en s
M=1200 #Nombre de pas de temps de l'étude	13	M=1200 //Nombre de pas de temps de l'étude
g=0.09 #Grandeur proportionnelle au flux en z=-Lc/2	14	g=0.09 //Grandeur proportionnelle au flux en z=-Lc/2
dz=L/N	15	dz=L/N
Tab=np.zeros((M+1,N+1))	16	Tab=zeros(M+1,N+1)
#Définition des conditions initiales :	17	//Définition des conditions initiales :
...	18	...
...	19	...
	20	
#Condition à la limite z=-L1	21	//Condition à la limite z=-L1
...	22	...
	23	
#Résolution de l'équation aux dérivées partielles	24	//Résolution de l'équation aux dérivées partielles
for p in range(0,M):	25	for p=1:M
for k in range(1,N):	26	for k in 2:N
Tab[p+1,k]=Tab[p,k]+ ...	27	Tab(p+1,k)=Tab(p,k)+ ...
	28	end
Tab[p+1,N]=Tab[p,N]+dt*(-a*(Tab[p,N]-Tab[p,N-1])/dz-b*Tab[p,N]*dz+e*dz+g)/dz	29	Tab(p+1,N)=Tab(p,N)+dt*(-a*(Tab(p,N)-Tab(p,N-1))/dz -b*Tab(p,N)*dz+e*dz+g)/dz
	30	end

Tableau 1 – Programme incomplet

Pour tester le fonctionnement du programme, de façon indépendante par rapport aux zones voisines, on impose des conditions aux limites :

- limite en $z = -L_1$: une température constante, identique à la température initiale T_0

Q20. Donner la ligne 22 (et suivantes si nécessaires) qui fixe la condition en $z = -L_1$.

- limite en $z = -L_c/2$: on admettra une densité de courant thermique constante $j(-L_c/2, t) = -ju_z$ avec $j = cste > 0$ due au transfert de chaleur provenant de la zone de contact. Cette condition est définie aux lignes 29 et 30.

Q21. En faisant un bilan d'énergie sur le dernier élément de largeur Δz situé juste avant $z = -L_1$ déterminer l'expression du terme g de la ligne 30, qui traduit le transfert de chaleur, en fonction de j, ρ et c .

Q22. En exploitant la **figure 6**, indiquer si le régime stationnaire est atteint ou non au bout de 1200s. Justifier sans aucun calcul.

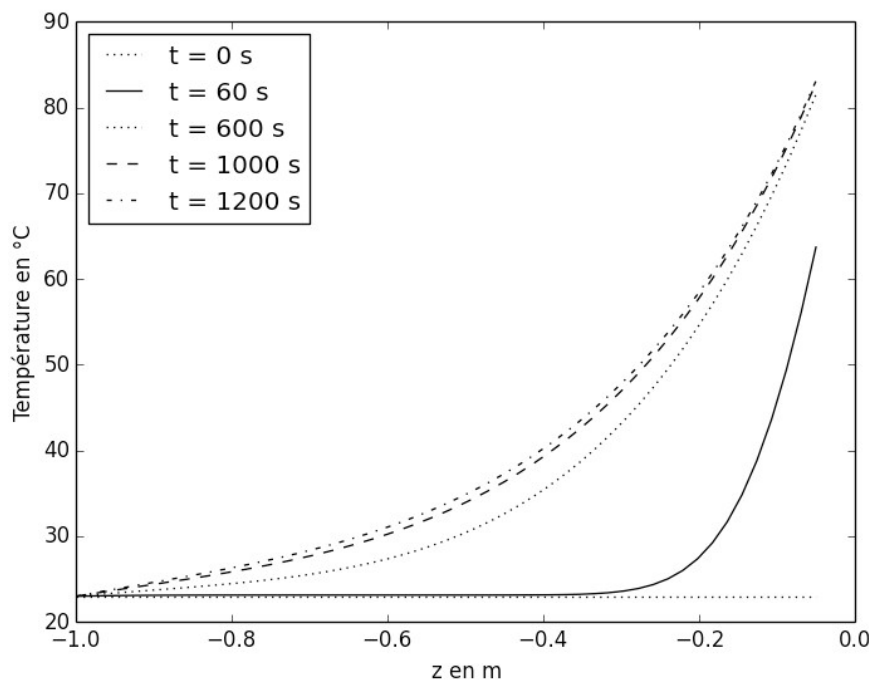


Figure 6 – Résultats de la résolution de l'équation : température en fonction de z pour différents temps

II.3 – Modélisation de la zone de contact de longueur L_c , au sein du caténaire

Pour établir l'expression des pertes joules, il est nécessaire de connaître le champ de potentiel $V(r, \theta, z)$ partout dans la zone de contact de longueur L_c , au sein du caténaire. D'un point de vue électrique, on se place en régime stationnaire. On considère la densité volumique de charge nulle dans la caténaire.

Q23. Quelle relation relie le champ électrique E et le potentiel V .

Q24. En utilisant une équation de Maxwell, déduire une équation simple pour le champ de potentiel V .

La résolution de cette équation a permis d'établir la carte des potentiels à un instant donné (figure 7)

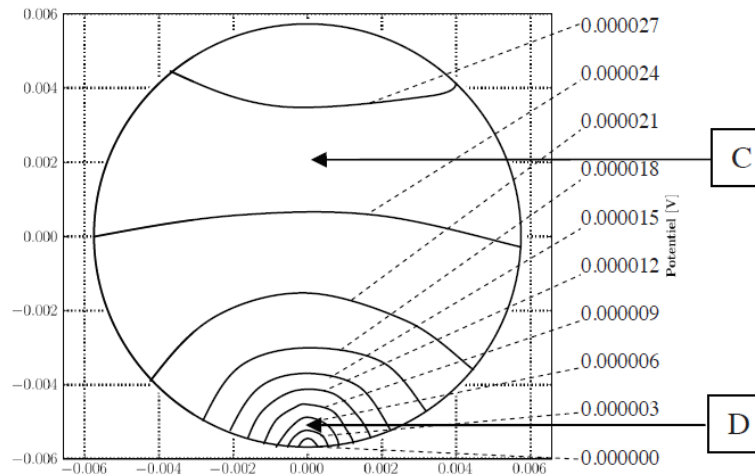


Figure 7 – Carte avec quelques équipotentiels de la section de la caténaire en $z=0$
les distances sont en mètre en abscisse et les potentiels en volt en ordonnée

Q25. À partir des grandeurs relevées sur la figure 7, donner les ordres de grandeur de la composante du champ électrique contenue dans le plan $z=0$, respectivement aux points C et D. En déduire une conséquence pour la température en ces points. Une justification succincte est attendue.

Dans la zone de contact, la modélisation à une dimension n'est pas acceptable, les grandeurs dépendent des variables r, θ et z . En outre, on étudie dans cette zone le régime transitoire. La température dépend donc des 4 variables r, θ, z et t .

Q26. Pourquoi l'étude du régime transitoire en thermique n'est-elle pas incompatible avec le régime stationnaire électrique ? Une réponse succincte est attendue.

Pour un profil de courant donné par la **figure 8**, la **figure 9** donne la comparaison des profils d'échauffement entre les résultats de simulations numériques et les valeurs expérimentales ($z=0$ correspond au point de contact caténaire/pantographe)

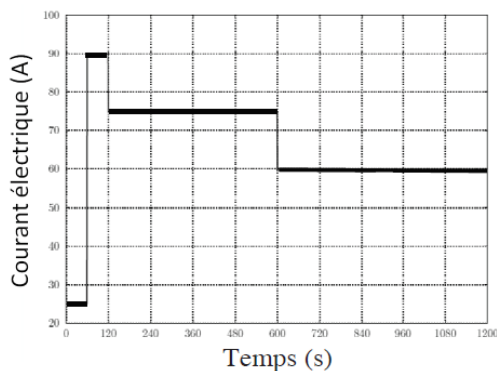


Figure 8 – Profil du courant électrique lors des essais

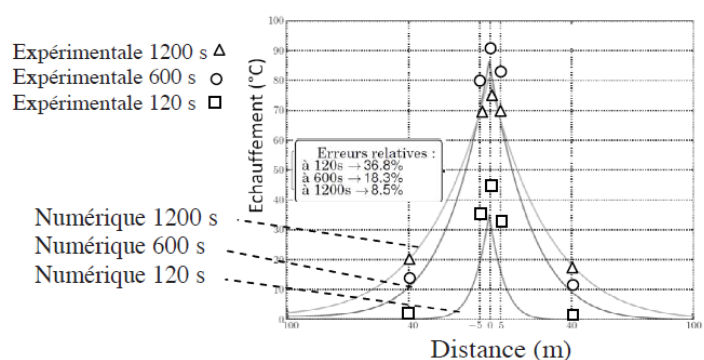


Figure 9 – Comparaison des profils d'échauffement entre les courbes de simulations numériques et les valeurs expérimentales autour de la zone de contact

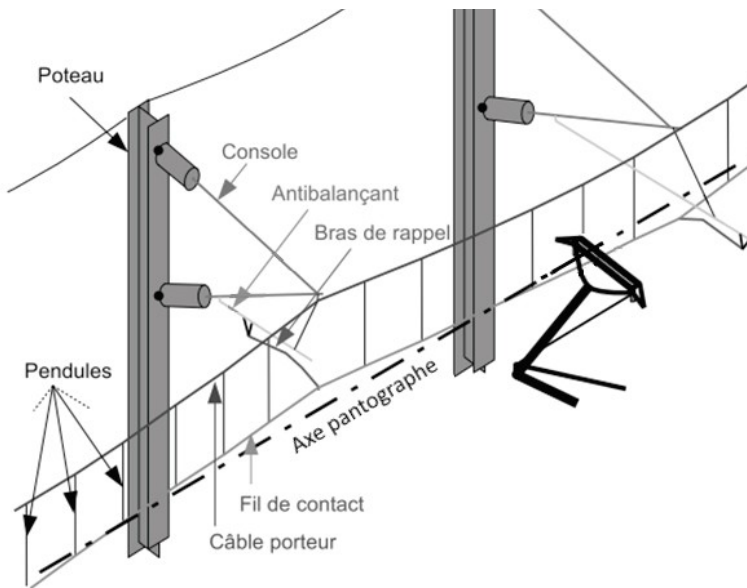
Q27. D'après la **figure 9**, le modèle est-il adapté au régime transitoire ? Justifier votre réponse.

Partie III - Risque de rupture de la caténaire par frottement excessif

Objectif : dans cette partie, on souhaite étudier la possibilité de maintenir la force de contact sur la caténaire dans des limites acceptables.

Les incidents de rupture de la caténaire sont aussi d'origine mécanique. Le principal problème est la dégradation du fil de contact et des bandes de captage due à une usure mécanique lorsque l'effort appliqué est trop important ou due à une usure électrique lorsque l'effort appliqué est insuffisant. En effet, il se forme dans ce dernier cas des arcs électriques qui endommagent rapidement le système.

III.1 – Mesure de l'effort sur la caténaire



L'architecture générale de la caténaire souple est construite autour des éléments suivants (figure 10) :

le fil de contact, le câble porteur, les pendules, les bras de rappel, les consoles et les poteaux.

Pour corriger la flèche du fil de contact, un câble porteur soutient le poids du fil de contact par l'intermédiaire de pendules tous les 2,5 m qui sont des câbles tressés de faible section reliant le fil de contact et le câble porteur.

Figure 10 – Éléments de la ligne d'alimentation

Le pantographe est un assemblage de tubes articulés représenté figure 11 qui adapte son déploiement en fonction de la caténaire pour conserver un contact permanent avec le fil de contact. La bande de captage en contact avec la caténaire est la pièce d'usure du système. Elle est fixée sur un archet qui est lui-même fixé sur le grand cadre par l'intermédiaire de boîtes à ressort servant à absorber les vibrations hautes fréquences.

La mise en mouvement du pantographe est assurée par un coussin pneumatique qui exerce un couple sur le bras inférieur par le biais d'un mécanisme élingue/came non étudié dans ce sujet. C'est ce couple moteur qui va permettre de lever le pantographe. Le pantographe descend sous l'effet de son propre poids.

La bielle inférieure transmet le mouvement au bras supérieur.

La bielle supérieure permet quant à elle de maintenir l'archet dans le plan horizontal.

La distance entre le toit du train et la caténaire n'est toutefois pas constante, car tous les trains ne sont pas identiques, mais également car il existe différents modèles de pantographe. La caténaire elle-même n'est pas toujours parallèle à la voie à cause des ouvrages d'art, mais également en raison de la flèche inévitable de la caténaire entre deux poteaux.

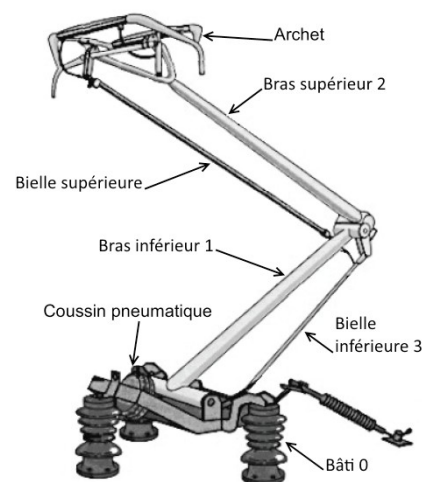


Figure 11 – Pantographe de type CX

Pour pallier ces variations, nous décidons d'étudier **l'asservissement de cet effort**. Dans un premier temps, nous rechercherons une façon de mesurer cet effort puis dans un second temps, nous nous intéresserons aux performances de l'asservissement.

Choix de l'emplacement du capteur d'effort

Hypothèses simplificatrices : en toute rigueur, le pantographe subit des efforts statiques, dynamiques dus à la masse de l'archet ainsi que des efforts aérodynamiques avec la vitesse du train. Nous nous limiterons dans ce sujet à l'effort statique.

Pour la mesure de la force de contact, on choisit d'utiliser une jauge d'extensométrie qui permet une mesure indirecte de la force de contact. Cette jauge est un film plastique sur lequel se trouve un circuit résistif ; elle est solidement collée sur une pièce pour suivre ses déformations.

Q28. Expliquer comment ce capteur peut mesurer un effort ? En particulier, quel est le corps d'épreuve et la grandeur de sortie de ce capteur ?

On se propose dans cette sous-partie d'établir le lien entre l'effort F_C sur la caténaire et le couple C_m transmis par le coussin pneumatique, puis de choisir le meilleur emplacement pour la jauge d'extensométrie.

La modélisation du pantographe est donnée **figure 12**.

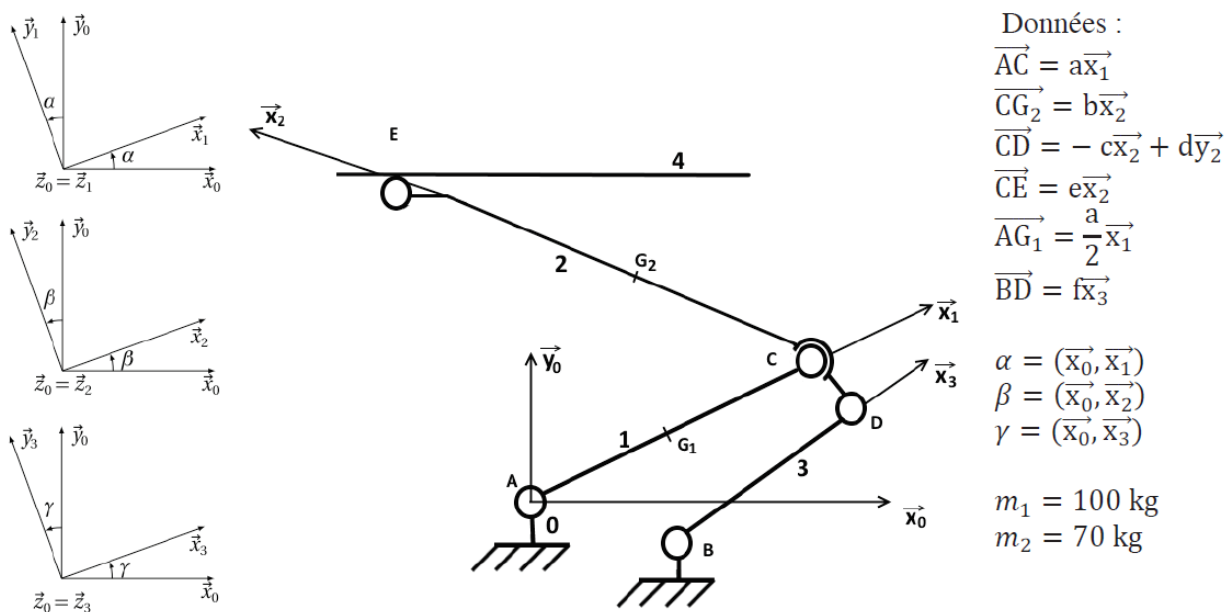


Figure 12 – Schéma cinématique du pantographe

Le torseur en un point M de l'action mécanique du solide i sur le solide j sera noté :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{M, R_0} .$$

Hypothèses

- On néglige le frottement de la caténaire sur l'archet.
- On néglige la masse de toutes les pièces sauf le bras inférieur 1 et le bras supérieur 2. Les centres de masse des solides 1 (masse m_1) et 2 (masse m_2) sont les points G_1 et G_2 .
- Le champ de pesanteur est tel que $g = -g y_0$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- On considère ici le pantographe en équilibre statique.

On donne ci-dessous les torseurs des actions mécaniques extérieures :

$$\{T_{4 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_c & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{E, R_0} \quad \{T_{moteur \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_{A, R_0} .$$

Q29. Reproduire et compléter le graphe de structure du système de la figure 13. On rappelle que le graphe de structure permet de représenter les solides, les liaisons et les actions mécaniques.

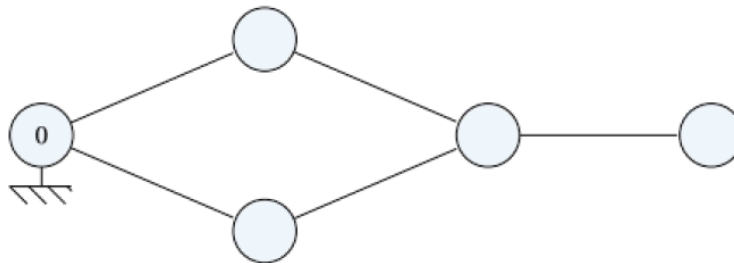


Figure 13 – Graphe de structure du pantographe

Le problème sera, pour la suite, considéré comme plan.

Q30. En isolant la pièce 3, déterminer l'expression simplifiée au point D dans la base (x_3, y_3, z_3) du torseur $\{T_{2 \rightarrow 3}\}$.

Q31. En isolant la pièce 2, montrer que la composante sur x_3 de la résultante du torseur $\{T_{32}\}$ s'exprime par l'équation (3) :

$$X_{32} = - \frac{\cos \beta (b m_2 g + e F_c)}{c \sin(\gamma - \beta) + d \cos(\gamma - \beta)} . \quad (3)$$

Q32. Sans résoudre les équations, donner l'isolement, le bilan des actions mécaniques extérieures et le théorème à appliquer pour aboutir à la relation liant le couple C_m , à la force de contact F_c , qui est de la forme

$$C_m = X \cdot F_c + Y \cdot m_2 g + Z \cdot m_1 g \quad (4)$$

où X , Y et Z sont des paramètres dépendants des données de l'énoncé.

On donne, figure 14, les tracés du couple C_m en fonction de F_c dans 3 conditions différentes.

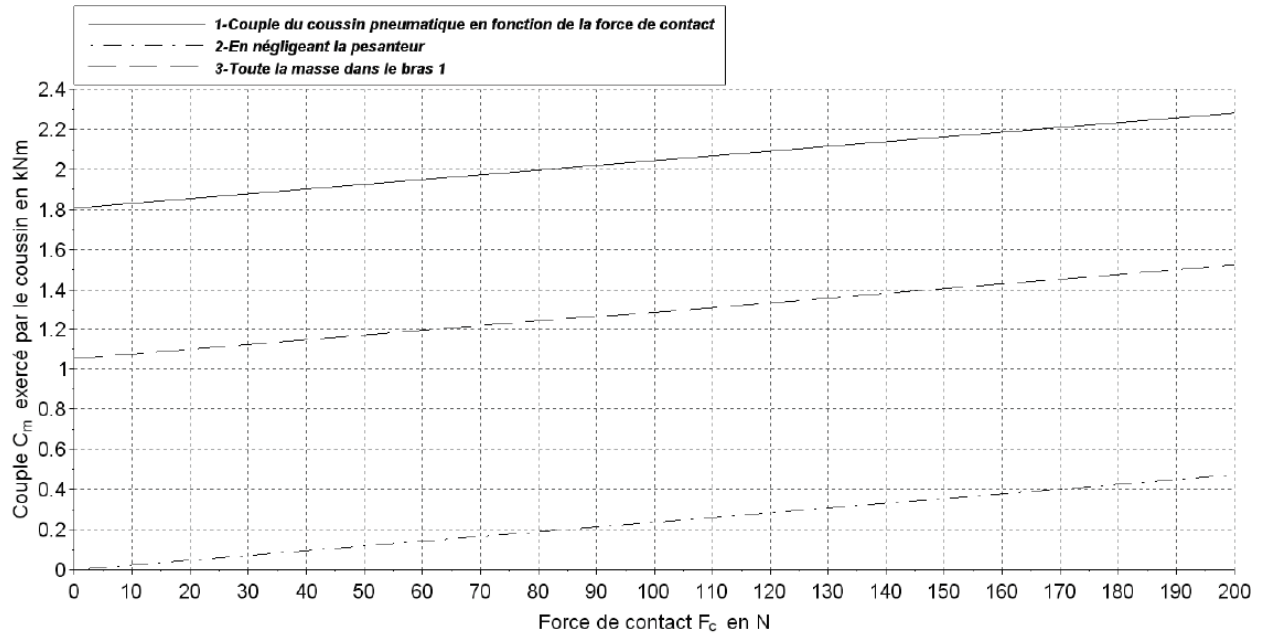


Figure 14 – Couple en fonction de la force de contact

Q33. Expliquer l'allure des tracés. Dans la perspective d'une modélisation par un gain de la fonction de transfert entre F_c et C_m , est-il possible de simplifier le problème en négligeant les masses ou en concentrant la masse dans le bras 1 ?

Afin de permettre le bon choix de l'emplacement de la jauge de déformation, l'évolution de l'effort normal dans le bras inférieur et le bras supérieur a été tracée figure 15.

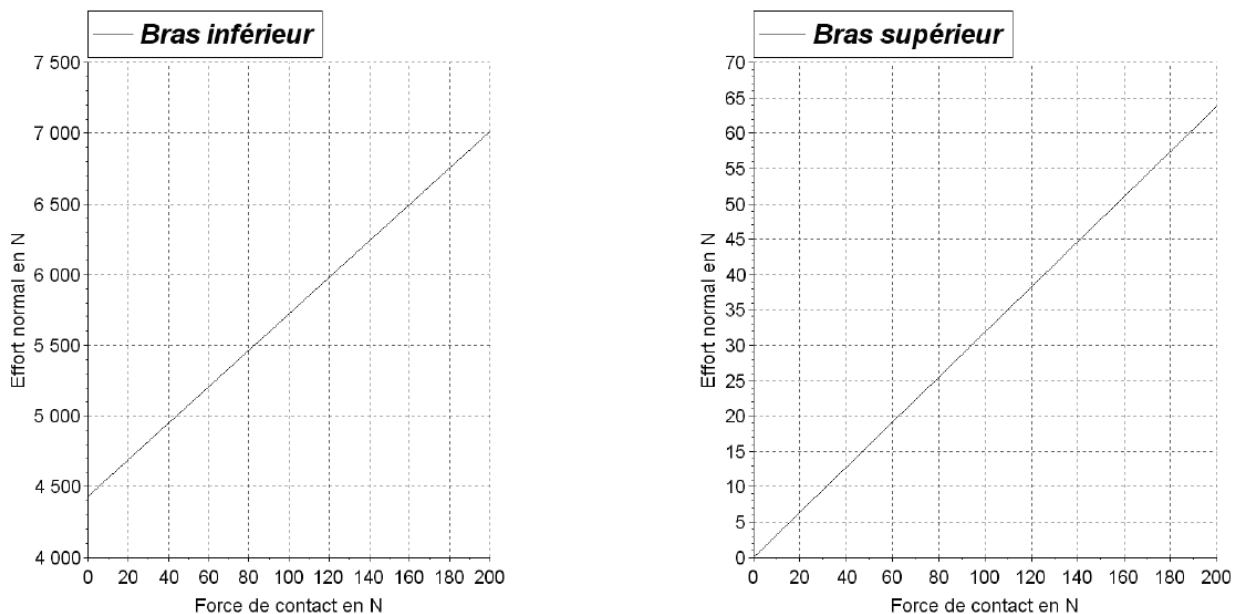


Figure 15 – Effort normal en fonction de la force de contact pour les 2 bras

Q34. À l'aide des courbes des **figures 14 et 15**, donner les avantages et inconvénients du placement de la jauge sur les 2 bras. Pour cela, calculer la sensibilité du capteur dans chaque cas.

III.2 – Cahier des charges de l'asservissement de l'effort sur la caténaire

Nous sommes maintenant en mesure de connaître la force de contact sur la caténaire. On souhaite

maintenir cette force autour d'une valeur moyenne. Le **document 1** est un extrait des recommandations SAM E 903 de l'Etablissement Public de la Sécurité Ferroviaire (EPSF) concernant les limites acceptables de la force de contact de l'archet sur la caténaire.

La force moyenne de contact doit rester dans la plage $[F_{c_{min}}, F_{c_{max}}]$.
La force moyenne minimale de contact doit respecter la formule suivante :
 $F_{c_{min}} \geq 0,00047 \cdot V^2 + 60 \text{ N}.$
La force moyenne maximale de contact doit respecter les formules suivantes :
 $V \leq 200 \text{ km/h} : F_{c_{max}} \leq 0,00047 \cdot V^2 + 90 \text{ N} ;$
 $V > 200 \text{ km/h} : F_{c_{max}} \leq 0,00097 \cdot V^2 + 70 \text{ N} .$

Document 1 – Recommandations de l'EPSF en matière de force de contact

À partir des équations des recommandations de l'EPSF du **document 1**, on définit la valeur moyenne $F_{c_{moy}}$ de la force de contact telle que représentée sur la **figure 16**.

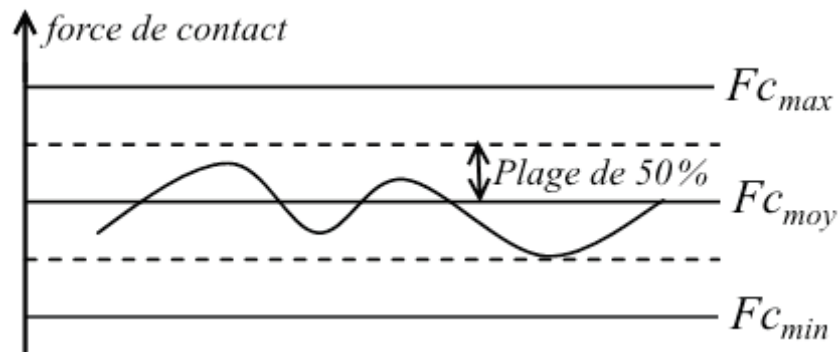


Figure 16 – Plage de maintien de la force

Q35. Déterminer l'équation de la valeur moyenne $F_{c_{moy}}$ de la force de contact en fonction de la vitesse V du train pour les deux plages de vitesse définies dans le **document 1**.

On souhaite que l'asservissement de la force de contact maintienne cette dernière le plus proche possible de $F_{c_{moy}}$. Les variations de F_c doivent être limitées à une *plage de 50 %* autour de $F_{c_{moy}}$ pour garder une marge d'erreur suffisante par rapport aux valeurs extrêmes $F_{c_{max}}$ et $F_{c_{min}}$ comme illustré dans la **figure 16**.

On pose l'erreur relative : $\varepsilon_{\%} = \frac{\text{plage}_{50\%}}{F_{c_{moy}}}$.

Q36. À partir des équations de la **Q35**, exprimer l'erreur relative pour les deux plages de vitesse en fonction de V .

Q37. Pour quelle valeur de la vitesse du train l'erreur relative $\varepsilon_{\%}$ est-elle la plus faible ?

En déduire la valeur maximale de l'erreur statique relative admissible dans l'asservissement de la force de contact.

Pour la suite, on prendra une erreur statique relative maximale de 8 %.

Sous l'effet de la gravité illustré figure 17, le fil de contact FC décrit une courbe appelée chaînette dont la flèche varie en fonction de la masse linéique et de la longueur séparant les deux poteaux supports.

Pour réduire cette flèche, une tension mécanique est appliquée à chacune des extrémités du fil. Néanmoins, les propriétés du matériau ne permettent pas de compenser la flèche par la seule application d'une tension mécanique aux extrémités du fil.

Lorsque la vitesse du train dépasse 100 km/h, pour assurer une bonne qualité de captage, le fil de contact doit être presque horizontal afin de minimiser les déplacements du pantographe.

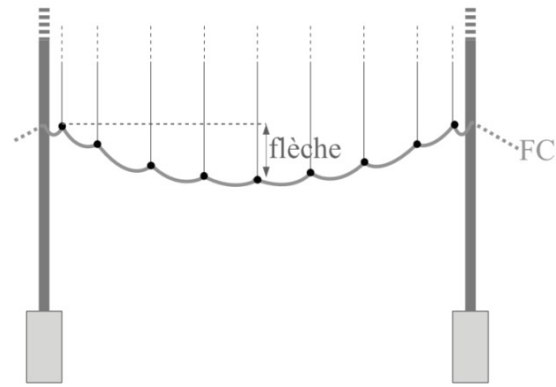


Figure 17 – Chaînette du fil de contact sur un tronçon

Q38. Quel problème va poser cette flèche du fil de contact pour l'asservissement de la force de contact ?

On se propose dans cette sous-partie de déterminer cette flèche selon le modèle de la figure 18.

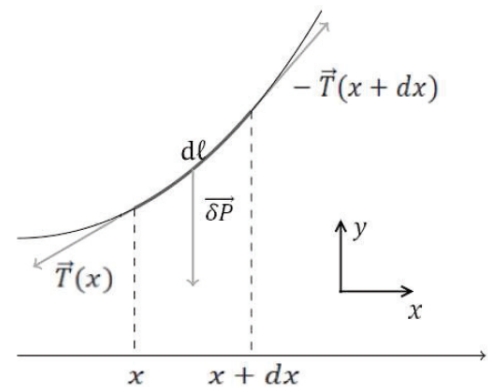
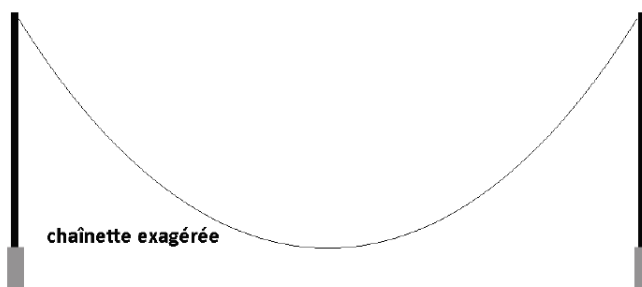


Figure 18 – Courbe en chaînette

Si on isole un tronçon de longueur $d\ell$ de la chaînette, compris entre les abscisses x et $x + dx$, il est en équilibre sous l'action de 3 glisseurs :

- le poids δP : force proportionnelle à la masse du tronçon. Si μ est la masse linéique (masse d'un mètre de chaînette exprimée en kg/m), la masse du tronçon est $\mu d\ell$;
- la tension à gauche $T(x)$: force exercée par le brin de gauche sur le tronçon isolé qui s'applique au point dont l'abscisse est x . Par ailleurs, les forces de tension du tronçon à l'équilibre sont des forces tangentes à la chaînette ;
- la tension à droite $-T(x + dx)$: la tension à droite qui s'applique au point d'abscisse $x + dx$.

Comme le tronçon est en équilibre, elle s'oppose à la tension à gauche du tronçon suivant compris entre $x + dx$ et $x + 2dx$. La tension à droite de notre tronçon est donc l'opposée de la tension à gauche du tronçon suivant, cette force est donc $-T(x + dx)$.

Q39. En appliquant le Principe Fondamental de la Statique au tronçon isolé, puis en projetant sur x et y , établir les deux équations suivantes

$$\begin{cases} T_h(x+dx) - T_h(x) = 0 \\ T_v(x+dx) - T_v(x) - \delta P = 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec T_h et T_v les valeurs absolues des composantes horizontales et verticales de la tension.

Q40. En déduire que la tension horizontale T_h est constante.

Nous noterons $y(x)$ l'équation de la chaînette.

Q41. En considérant que chaque tronçon infinitésimal de la chaînette est rectiligne (**figure 19**), démontrer la relation suivante :

$$\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6)$$

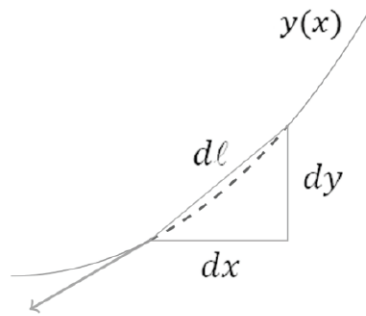


Figure 19 – Approximation d'ordre 1

Q42. En exploitant les résultats des **questions Q39** et **Q41**, montrer que

$$T'_v(x) = \mu g \sqrt{1 + (y'(x))^2} \quad (7)$$

avec $T'_v(x)$ et $y'(x)$ les dérivées par rapport à x de $T_v(x)$ et $y(x)$.

On admet que $T_v(x) = T_h(x) \cdot y'(x)$.

Rappel

On admet que \sinh admet une bijection réciproque notée $\operatorname{arcsinh}$ dont la dérivée est $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q43. En exploitant le rappel ci-dessus et les résultats démontrés **Q42**, déterminer l'expression de $y''(x)$. Montrer alors que l'équation de la chaînette s'écrit

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta \quad (8)$$

avec α et β , les constantes d'intégration et a un paramètre à expliciter.

Ainsi, pour une distance entre 2 poteaux de 60 m, avec une tension de 20 kN, on trouve par application numérique une flèche de l'ordre de 5,4 cm. La flèche reste relativement faible, de l'ordre d'1/1000 d'un tronçon, mais va générer une perturbation du point de vue de l'asservissement.

Des simulations de la force de contact, filtrée à 20 Hz, pour un train circulant à 90 km/h et 320 km/h sont données dans une configuration le long de 5 tronçons (**figure 20**). Les passages sur les poteaux sont représentés avec les lignes verticales pointillées.

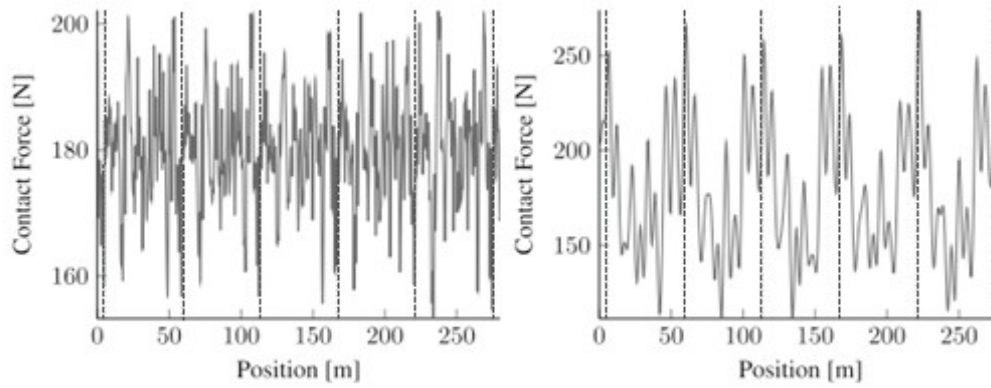


Figure 20 – Forces de contact pour un train circulant à 90 km/h (à gauche) et 320 km/h (à droite)

Afin d'estimer la bande passante de l'asservissement, il a été calculé figure 21, le spectre non filtré, pour une vitesse de 320 km/h, obtenu par une transformée de Fourier discrète (FFT).

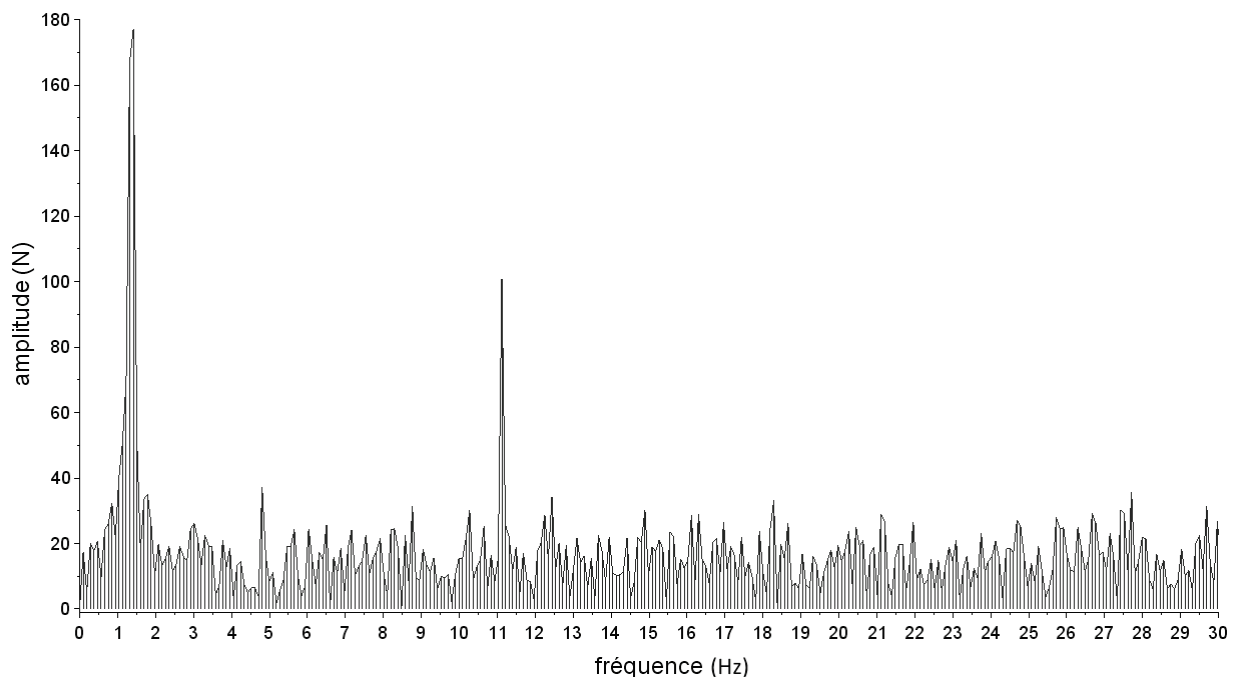


Figure 21 – Transformée de Fourier discrète de la force de contact

- Q44.** Justifier les valeurs des deux raies principales du spectre.
- Q45.** En prenant un coefficient de 1,5 pour les simplifications et les incertitudes sur le modèle, quelle doit être la bande passante minimale de l'asservissement ?
- Q46.** En conclusion, proposer un résumé des éléments du cahier des charges (performances) pour l'asservissement. On explicitera également le temps de réponse et les dépassements envisageables.

III.3 – Asservissement de l'effort sur la caténaire

Objectif : vérifier les performances attendues de l'asservissement.

On souhaite maintenant mettre en place l'asservissement afin de maintenir la force de contact de l'archet sur la caténaire la plus proche possible de la valeur moyenne. La force de contact souhaitée F_C , proportionnelle à la vitesse, est déterminée par le calculateur. De plus comme nous venons de le voir, la variation de hauteur du fil de contact de la caténaire entraîne une perturbation sur

l'asservissement de la force de contact.

Le pantographe est une structure élastique possédant sa propre dynamique et, pour mettre en évidence les phénomènes de manière simplifiée, nous allons le représenter (figure 22) par un système linéarisé, de type masse/ressort à un étage, associé à la dynamique de l'archet (un modèle plus fin, non étudié ici, est possible avec trois étages).

Les caractéristiques proviennent d'une linéarisation du modèle multicorps. Le système comportera une masse (m), un amortisseur (de coefficient de frottement visqueux f en N.m/s) et un ressort (de raideur en N/m).

Le déplacement vertical de la caténaire par rapport à la motrice est noté $y_L(t)$ et le déplacement de l'extrémité basse de l'archet par rapport à la motrice est noté $y_M(t)$.

Ainsi, pour assurer un effort de contact entre l'archet et la caténaire le plus constant possible, on a choisi d'asservir en position le pantographe, c'est-à-dire $y_M(t)$. Le coussin pneumatique exerce un effort F_m sur la masse m (figure 22).

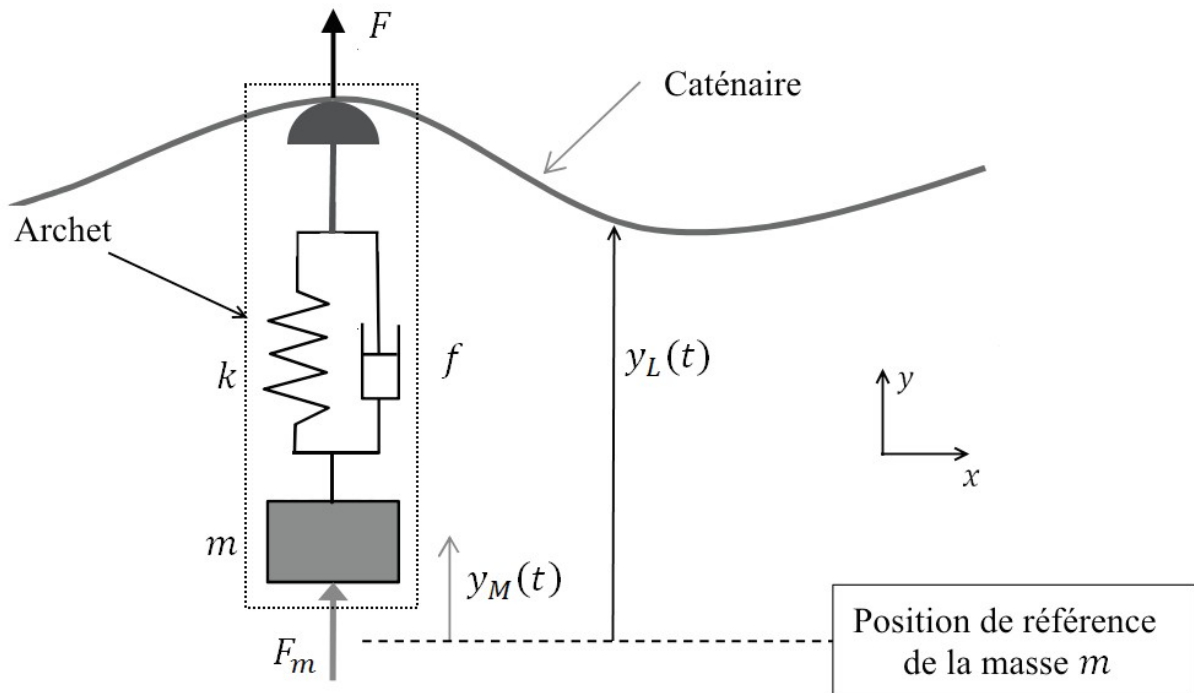


Figure 22 – Modèle dynamique de l'archet

On notera F la force qu'exerce l'archet sur la caténaire et qui sera comptée positive vers le haut.

On notera F_C l'effort de contact de consigne. L'archet est instrumenté et dispose d'un capteur d'effort mesurant l'effort de contact F .

L'action de l'actionneur F_m sur la masse est telle que $F_m(p) = H(p)C(p)(F_C(p) - F(p))$.

Q47. Expliquer pourquoi la variation de hauteur de la caténaire fait varier l'effort de contact F .

L'équation différentielle qui régit le mouvement du pantographe autour de sa position d'équilibre est la suivante :

$$m \frac{d^2 y_M}{dt^2} = -k(y_M(t) - y_L(t)) - f \left(\frac{dy_M(t)}{dt} - \frac{dy_L(t)}{dt} \right) + F_m(t). \quad (9)$$

On pose $Y_M(p)$, $Y_L(p)$, $F_m(p)$ les transformées de Laplace de $y_M(t)$, $y_L(t)$ et $F_m(t)$.

Epreuve d'Informatique et Modélisation de Systèmes Physiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille dont l'entête n'a pas été intégralement renseignée, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Il est conseillé de répartir votre temps de composition comme suit :

- 1h30 pour lire et traiter la partie modélisation (partie II).
- 2h30 pour lire et traiter la partie informatique (partie III).

À rendre en fin d'épreuve avec la copie un document réponse.

Étude d'un système autofocus d'appareil photo numérique

I Présentation

Nous nous intéressons dans ce sujet à l'étude de différentes méthodes permettant de réaliser l'auto-focus sur les appareils photos numériques. L'auto-focus consiste à régler de manière automatique la netteté de l'image avant d'effectuer la prise de vue.

Les applications numériques seront données avec 1 chiffre significatif, sauf contre ordre.

II Modélisation : principe de la méthode de l'auto-focus.

Un formulaire d'optique géométrique est rappelé en fin de cette partie.

Un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente (L), l'objectif, de focale $f'_0 = 10$ cm et un plan récepteur (P) placé orthogonalement à l'axe optique. Ce plan récepteur est de taille $20 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ et contient 6 méga pixels.

Lorsque le réglage de l'appareil est optimal l'image de l'objet à photographier se trouve sur le plan (P). Sinon, il convient de modifier la position de ce plan.

Prenons l'exemple d'un objet réduit à un point objet A_0 qui donne un point image A . En cas de défaut de réglage on a la situation décrit sur la figure 1.

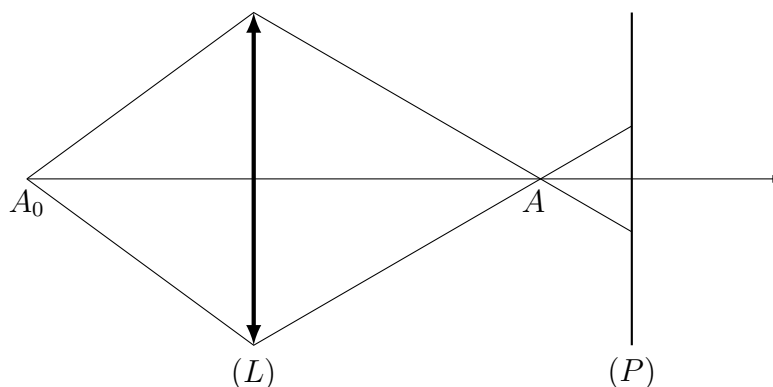


FIGURE 1 – Défaut de réglage

Sur (P) se forme alors une tache à la différence d'un point.

Il faut donc déplacer le plan (P) d'une certaine distance pour obtenir une image nette. Pour cela la méthode la plus rapide consiste à calculer cette distance à partir de la différence d'ordonnées des points inférieurs et supérieurs de la tache.

Il y a cependant une difficulté du fait que l'on obtient la même tache que (P) soit placé devant ou derrière l'image.

Nous allons étudier un dispositif astucieux qui permet de calculer algébriquement le déplacement à opérer partant d'un défaut de réglage.

II.1 Mise au point.

Dans cette partie on attend, pour chaque question, une expression littérale puis une valeur numérique.

On souhaite photographier un objet de de hauteur $h = 10$ cm, transverse à l'axe de l'objectif et situé à une position $x_0 = -2$ m, l'origine étant prise au centre de la lentille (L). L'axe optique est orienté de la gauche vers la droite.

Q1. À quelle distance d' du centre de la lentille (L) faut-il placer (P) pour avoir une image nette (ceci définit le plan P_0) ? Donner la taille h' de l'image.

On se place dans le cas où l'objet précédent se ramène à un point situé sur l'axe toujours à la position $x_0 = -2$ m. (P) est placé à une distance $\delta = +0,5$ cm derrière P_0 . La lentille a un rayon $a = 5$ cm (figure 2). On observe alors une tache lumineuse sur (P).

Q2. Faire un schéma et tracer les rayons qui parviennent à l'extrémité de cette tache.

Déterminer le rayon a' de la tache lumineuse formée sur (P).

NB : le rayon de la lentille a est défini par la hauteur de lentille par rapport à l'axe optique (figure 2).



FIGURE 2 – Illustration de la lentille

Q3. Après avoir déterminé la taille d'un pixel, supposé carré, donner un critère sur a' , puis sur δ pour que l'image transmise par le capteur soit nette.

II.2 Principe simplifié de l'auto focus.

Dans un souci de simplification on considère un objet réduit à un point objet situé sur l'axe de la lentille (L) qui donne un point image noté A .

Pour déterminer si A se trouve ou non sur (P) on utilise deux lentilles annexes (L_1) et (L_2), situées à une distance d_0 de (P), de focale f' et de rayon a auxquelles sont associées des capteurs plans (P_1) et (P_2) situés à une distance d de chaque lentille. (P_1) (**resp** (P_2)) **est conjugué de (P) par (L_1) (resp (L_2))**. Attention : en réalité les deux lentilles son désaxées par rapport à l'axe optique de (L), les rayons étant déviés par des miroirs. Ici, on considère simplement que tout se passe comme si (P) est transparent.

Le schéma est représenté figure 3.

Q4. Exprimer d en fonction de d_0 et f' .

Q5. On se place dans le cas où A est sur (P). On note A_1 son image par (L_1).

Faire un schéma représentant A , A_1 , F'_1 (le foyer image de (L_1)) et les rayons issus de A passant par les bords inférieurs et supérieurs de (L_1).

Q6. Déterminer l'ordonnée y_1 de A_1 en prenant l'origine O' située sur l'axe (Ox) (on pourra préalablement déterminer l'ordonnée par rapport à l'axe optique de la lentille (L_1)).

En déduire l'expression de y_2 l'ordonnée de A_2 l'image de A par (L_2) en prenant également l'origine en O' .

Q13. On mesure $\Delta^2\Phi = 0,66 \text{ cm}$. Donner la distance de laquelle on doit translater (P) pour obtenir une image nette. On précisera la direction de la translation. On a $d = 2f'$ et $d_0 = 2f'$ avec $f' = 10 \text{ cm}$ et $a = 3 \text{ cm}$.

Pour un objet étendu orthogonal à l'axe, on peut montrer que la différence de phase due à chaque point source de l'objet est identique.

Le principe de la méthode peut alors être généralisé.

II.3 Moteur pas à pas

Un moteur pas à pas est constitué d'un rotor qui peut tourner autour d'un axe (Δ). On place un ensemble de bobines plates, ($B1$)...($B6$) qui sont susceptibles de créer un champ magnétique lorsqu'on les alimente (figure 4). Celles-ci sont alimentées par un courant continu dans le sens des orientations, ou non alimentées.

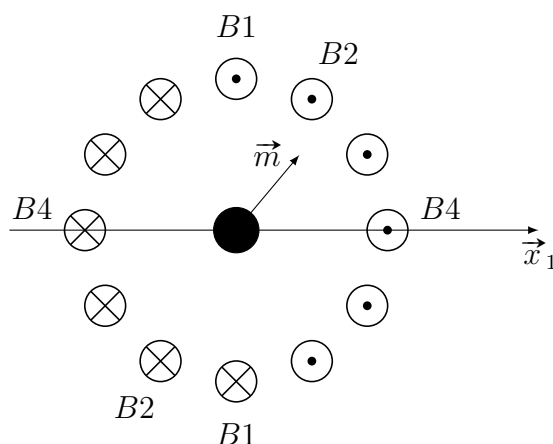


FIGURE 4 – Vue en coupe : 6 bobines au centre desquelles se trouve le rotor.

En commandant les bobines les unes après les autres, on fait tourner le moteur de pas successifs. Le rotor est en général caractérisé par un moment magnétique \vec{m} qui peut tourner librement autour de l'axe Δ orthogonal au plan de la figure.

Q14. Déterminer la direction et sens du champ magnétique créé par la bobine B_1 en un point de son plan.

Donner la direction d'un moment magnétique à l'équilibre dans un champ magnétique uniforme (à justifier).

La bobine B_1 est alimentée seule ; on coupe l'alimentation et on alimente la bobine B_2 . Représenter les positions successives du moment magnétique en se limitant aux deux bobines considérées.

Moment magnétique.

Q15. On considère une spire plane rectangulaire $ABCD$ de cotés a et b , parcourue par un courant i . Donner l'expression de son moment magnétique.

À un aimant on associe également un moment magnétique. Pourquoi ? Quel est l'ordre de grandeur d'un moment magnétique associé à un aimant ?

Nous étudions le cas où le rotor est un cadre sur lequel sont bobinées N spires parcourues par un courant i .

Moment des forces de Laplace.

La spire précédente peut tourner autour de l'axe $(\Delta) = (Oz)$. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} sur le cadre ce qui donne vue de dessus la figure 5(a) où \vec{n} est le vecteur normal à la spire. Dans le plan du cadre on a le schéma de la figure 5(b).

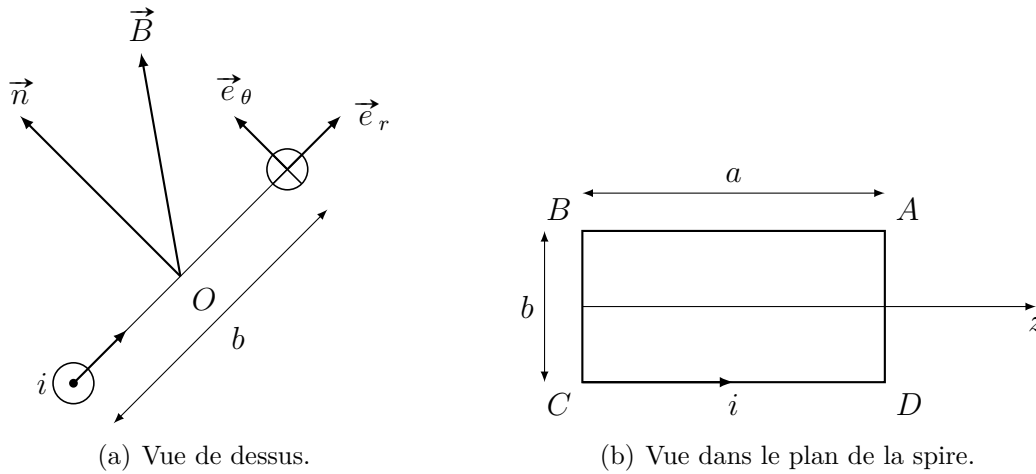


FIGURE 5 – Modélisation de la spire.

On pose $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$ avec la base locale définie sur la figure 5(a).

Q16. Déterminer le moment des forces qui s'exerce sur la spire par rapport à l'axe (Δ) .

Retrouver ce résultat à partir de la forme vectorielle du moment donnée en cours.

Équation électrique

Q17. En utilisant la conversion de puissance $P_{\text{laplace}} + P_{\text{fem induite}} = 0$, déterminer la force électromotrice induite dans le cadre lors de son mouvement.

Le cadre de résistance R est parcouru par un courant constant i_0 . Déterminer la force électro-motrice du générateur qui doit alimenter le cadre.

Rappel des lois de Descartes.

On considère un point objet A situé sur l'axe d'une lentille mince de focale f' , A' le point image.

On a les relations :

$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et la relation de grandissement transverse : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ où AB est un objet transverse et $A'B'$ son image.

III Partie informatique

On supposera dans cette partie que tous les modules nécessaires ont été importés. Par exemple, toutes les fonctions de `numpy` ou celles de `matplotlib.pyplot`. Les fonctions importés peuvent être utilisées sans préfixe (`plot`, `arange`...).

Pour réaliser l'autofocus, il existe deux méthodes principales :

- la mesure du contraste,
- la mesure de détection de phase.

III.1 Mesure du contraste

Le principe de cette méthode repose sur le fait qu'une image bien mise au point présente un maximum de contraste. Plus précisément l'écart de valeur entre les pixels est la plus grande.

En fonctionnement, l'appareil mesure le contraste, puis par tâtonnement, va déplacer l'objectif jusqu'à détecter le maximum.

Représentation d'une image Une image matricielle est représentée sous la forme d'une matrice. Chaque élément de la matrice correspondra à un pixel qui est généralement représentée par une liste de 3 entiers naturels, représentant les composantes rouge, vert et bleu ; c'est le codage RVB.

Chaque valeur est représentée par un entier allant de 0 à 255. On suppose, dans cette partie, travailler avec un appareil photo doté d'un capteur de 48 MPixels, c'est-à-dire que la photo sera composée de 48 millions de pixel.

On suppose que le stockage des photos se fait en mode RAW sans compression, c'est-à-dire que l'on stocke directement ce que récupère le capteur.

L'image sera représentée en mémoire dans une variable `I`, de type liste de liste de liste Python classique ou de type `numpy.ndarray`. Dans les deux cas, on accédera aux données RVB d'un pixel de coordonnée (i,j) , par l'instruction `I[i][j]`. Le candidat choisira librement le type qu'il préfère manipuler.

Q18. Préciser l'espace mémoire nécessaire pour stocker la valeur d'une composante, puis celle d'un pixel et enfin celle d'une image en Mo (= 1000 ko) ou Mio (=1024 kio).

Conversion en niveau de gris La première étape de la détection du contraste est de convertir l'image en niveau de gris pour n'obtenir qu'une valeur par pixel.

Cette transformation s'opère en plusieurs étapes :

- chaque composante R, V et B qui ne sont pas linéaires en terme d'intensité lumineuse sur le rendu, sont d'abord transformées dans un espace linéaire. Une composante C sera transformée selon la définition suivante :

- $C_{\text{lin}} = \frac{C}{12,92}$ si $C \leq 0,04045$;

- $C_{\text{lin}} = \left(\frac{C + 0,055}{1,055} \right)^{2,4}$ sinon.

- la valeur du niveau de gris Y_{lin} en échelle linéaire sera calculée à partir des valeurs linéarisées par : $Y_{\text{lin}} = 0,2126R_{\text{lin}} + 0,7152V_{\text{lin}} + 0,0722B_{\text{lin}}$
- on repasse dans l'espace non linéaire avec le calcul suivant :

- $Y = 12,92Y_{\text{lin}}$ si $Y_{\text{lin}} \leq 0,0031308$;

- $Y = 1,055Y_{\text{lin}}^{1/2,4} - 0,055$ sinon.

Q19. Écrire une fonction `Clinear(val)`, qui prend en argument une valeur de l'espace non linéaire et qui renvoie la valeur linéarisée.

Q20. Écrire une fonction `Y(pix)` qui prend en argument une liste de trois valeurs correspondant à un pixel au format RVB et qui renvoie la valeur Y du niveau de gris dans l'espace non linéaire.

Q21. Écrire une fonction `NiveauxGris(I)` prenant en argument une image I au format RVB et qui renvoie une image de même dimension en niveau de gris.

Pour détecter le contraste d'une image en niveau de gris, on va comparer pour chaque pixel les valeurs autour de celui-ci. Plus l'écart est grand (ce qui est le cas quand l'image est nette), plus les pixels autour du pixel de référence ont une valeur différente; on calcule d'une certaine manière la dérivée en chaque pixel.

Cette opération est réalisée par un filtre de Sobel. Partant d'une image I , on extrait les pixels autour du pixel (i,j) sous la forme d'une matrice 3×3 , notée $I_e = \begin{pmatrix} I_{i-1,j-1} & I_{i-1,j} & I_{i-1,j+1} \\ I_{i,j-1} & I_{i,j} & I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j-1} & I_{i+1,j} & I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$.

On réalise ensuite une convolution entre cette matrice et la matrice de filtration. On définit la convolution entre deux matrices A et B de taille 3×3 par $A \otimes B = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 A_{ij} B_{ij}$.

On réalise une filtration selon les deux directions de l'image. On donne les deux matrices de filtration : $G_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin on calcule une norme euclidienne des deux convolutions dont on prend la partie entière pour obtenir la valeur du contraste c du pixel (i,j) : $c = \text{Ent}(\sqrt{(I_e \otimes G_x)^2 + (I_e \otimes G_y)^2})$.

Pour terminer, on calcule le contraste de cette manière pour chaque pixel intérieur à l'image (on ne calcule rien sur les bords pour simplifier), puis on réalise la moyenne des valeurs pour obtenir l'indice de contraste de référence c_{ref} .

Q22. Écrire une fonction `convolution(A,B)` prenant en argument deux matrices de taille 3×3 et qui renvoie la valeur du produit de convolution.

Q23. Écrire une fonction `contraste_pixel(I,i,j)` prenant en argument une image I au format niveaux de gris et les coordonnées du pixel (i,j) qui renvoie la valeur du contraste défini précédemment par la quantité c .

Q24. Écrire une fonction `contraste(I)` prenant en argument une image I au format niveau de gris et qui renvoie la valeur du contraste de référence c_{ref} .

Pour régler la netteté de l'image, l'objectif est déplacé à l'aide d'un moteur pas à pas. L'objectif est déplacé d'un pas, une photo est prise, la valeur du contraste de référence est calculée puis comparée à la valeur obtenue au pas précédent; l'algorithme s'arrête dès que la valeur du contraste de référence diminue. Le moteur pas à pas recule d'un pas pour retourner à la position précédente où le contraste était maximale.

Pour cela, on utilise une fonction `position_objectif(val)` qui prend en argument un entier `val` allant de 0 à 1000 correspondant à la position en pas demandée et qui déplace l'objectif à cette position. Une fonction `prise()` permet de prendre un cliché et de retourner une image au format RGB.

Q25. Écrire une fonction `reglage`, dont les arguments et les valeurs de retour sont à définir, répondant au comportement décrit en partant de la position 0 en pas. On supposera que le maximum de contraste existe.

III.2 Détection de phase

La méthode par détection de phase (décrite à la partie I) consiste à mesurer une petite partie de l'image par deux capteurs différents. Quand les deux mesures sont identiques, l'image est nette. En calculant la différence de phase entre les deux mesures, il est possible de calculer directement la valeur dont doit se déplacer l'objectif.

On suppose que l'on dispose de deux capteurs de longueurs 100 pixels (dont les valeurs seront stockées dans des listes) et que l'on a exactement la même séquence de valeurs mais décalées de quelques pixels. La différence de phase est le nombre de pixels (donc le nombre d'indice de décalage entre les deux listes) permettant de retrouver les mêmes séquences de pixels.

L'objectif est donc de comparer deux listes de valeurs, de même dimension, extraites des listes de données des deux capteurs. Trois cas peuvent se poser en fonction de la valeur du décalage noté `dec` et sont illustrés sur la figure 6. Les sous listes extraites sont grisées.

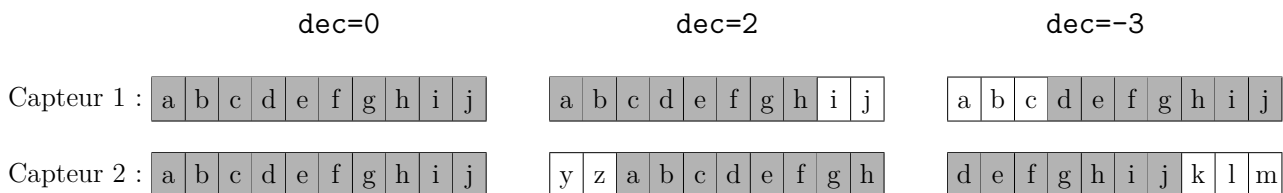


FIGURE 6 – Illustration du décalage (sur l'alphabet)

Q26. Écrire une fonction `extraction(L1,L2,dec)` prenant en argument deux listes `L1` et `L2` ainsi qu'une valeur entière de décalage et qui renvoie deux sous-listes à comparer de longueur `len(L1)-dec`, conformément à aux règles présentées ci-dessus. On supposera que les deux listes `L1` et `L2` sont de même taille.

Q27. Écrire une fonction `comparaison(L1,L2)` (n'utilisant pas la comparaison interne de Python entre les listes) prenant en argument deux listes `L1` et `L2` qui renvoie `True` si les listes sont identique et `False` sinon.

On suppose que le décalage est compris entre -80 et 80 .

Q28. Écrire une fonction `recherche_decalage(L1,L2)` prenant en argument deux listes `L1` et `L2` et qui renvoie la valeur du décalage ou `None` s'il n'existe pas.

Q29. Évaluer la complexité de la fonction `recherche_decalage(L1,L2)` en prenant en compte le nombre de comparaison en fonction de n la taille des listes et de m le nombre de décalage maximal à prendre en compte (161 dans notre exemple) dans le meilleur et dans le pire des cas.

En pratique, il n'y a pas de raisons que les deux capteurs CCD mesurent exactement les mêmes valeurs décalées. Les valeurs mesurées décalées seront approximativement les mêmes. Pour résoudre ce problème, on va calculer une erreur quadratique moyenne entre les deux sous-listes et puis chercher le minimum en fonction du décalage.

Pour deux sous-listes $L1$ et $L2$ de taille n , l'erreur sera définie par :

$$\text{erreur} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (L1_i - L2_i)^2$$

Q30. Écrire une fonction `erreur(L1,L2)` qui retourne l'erreur quadratique définie ci-dessus.

Q31. Écrire une fonction `recherche_decalage_2(L1,L2)` qui cherche le minimum de l'erreur pour des décalages de -80 à 80 et qui retourne la valeur de ce décalage.

III.3 Comparaison des deux méthodes

Deux méthodes de réglage de l'objectif ont été introduites dans les parties précédentes.

Q32. Décrire en 5 lignes maximum les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes et laquelle vous semble être la plus pertinente.

III.4 Commande du moteur pas à pas

L'objectif de mise au point est motorisé par un moteur pas à pas bipolaire commandé en « demi pas ».

Les paragraphes suivants permettent de décrire le principe de fonctionnement et la commande du moteur mais leurs compréhensions détaillées n'est pas utile pour répondre à la suite des questions.

Le principe du moteur pas à pas consiste à positionner le rotor sur lequel se trouvent des aimants permanents polarisé nord ou sud régulièrement espacé. Sur le stator se trouvent deux demi-bobines. La commande des demi-bobines se fait de tel sorte que le rotor va s'aligner sur le stator par pôle opposée (un nord en face d'un sud et un sud en face d'un nord).

Prenons un exemple simplifié de la figure 7 avec d'un moteur avec deux bobines (AB pour la première et CD pour la seconde). Les bobines sont en deux parties situées de part et d'autres du rotor. Sur le rotor se trouve un aimant permanent avec deux pôles.

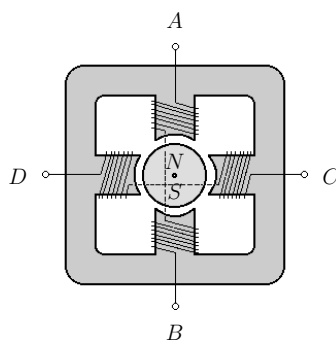


FIGURE 7 – Structure élémentaire d'un moteur pas à pas

Les deux demi-bobines étant positionné à 90° , la commande en demi pas consiste à faire des :

- pas entier : les bobines sont alimentées l'un après l'autre
- demi pas : les deux bobines sont alimentées et le rotor s'aligne entre deux bobines

La figure 8 montre les différentes positions associées à la séquence d'alimentation présentée dans la suite.

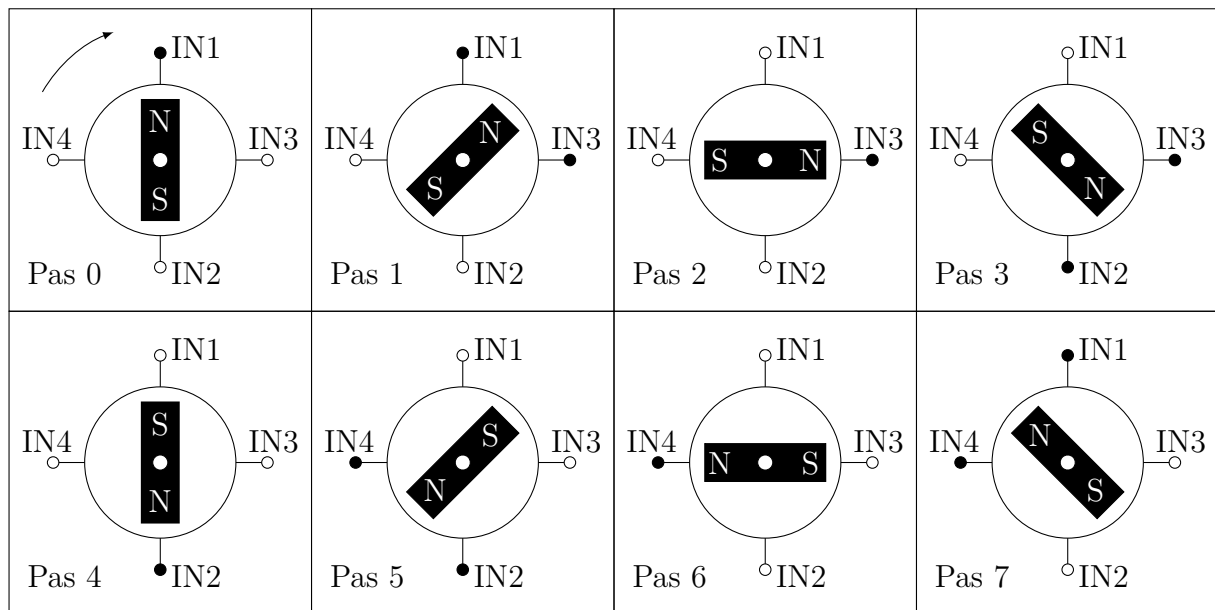


FIGURE 8 – Séquence d'alimentation des bobines : —● IN à 1 ; —○ IN à 0

La séquence d'alimentation du préactionneur des bobines (non détaillé ici) est donné par le chronogramme de la figure 9 et donne les 8 cas d'alimentation possibles pour obtenir la rotation dans le sens positif. Pour obtenir la rotation dans le sens négatif, il suffit de parcourir la séquence d'alimentation dans l'autre sens.

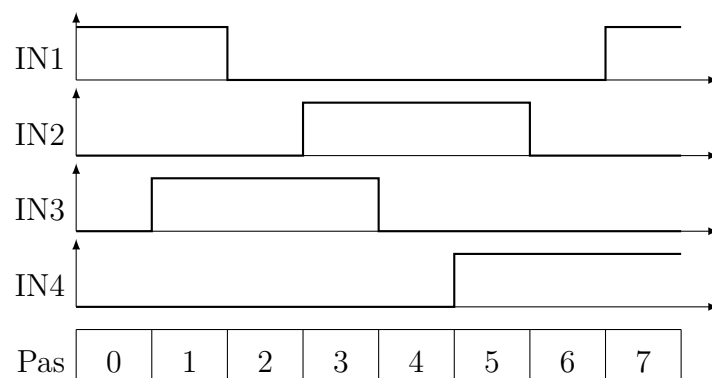


FIGURE 9 – Chronogramme d'alimentation des 4 entrées.

On se propose pour la suite de programmer le déplacement pas à pas de l'objectif. Pour cela, on supposera que les variables IN1, IN2, IN3 et IN4 ont été déclarées de manière globale et représentent les sorties à piloter sur un microcontrôleur. Pour piloter ces sorties, on utilisera la fonction `modif_sortie(IN, valeur)` où IN sera la sortie à modifier et valeur la valeur de type booléen souhaitée pour la sortie.

Exemple : `modif_sortie(IN4, True)` passera la sortie IN4 à 1 et `modif_sortie(IN4, False)` la passera à 0.

On remarquera que la séquence d'alimentation présente les 8 premier pas, les autres pas étant obtenus à un modulo près.

Q33. Écrire une fonction `faire_un_pas_positif(pas_actuel)` qui prend en argument la valeur du pas courant qui modifie l'état des sorties IN1 à IN4 et qui renvoie la nouvelle valeur du pas. On veillera à ne changer l'état que des sorties nécessaires.

On supposera l'existence d'une variable globale `pas_courant` comprise entre 0 et 1000 correspondant à la position courante du moteur pas à pas, ainsi qu'une fonction `faire_un_pas_negatif(pas_actuel)` qui permet de réaliser un pas négatif.

Q34. Écrire une fonction `position_objectif(pas)` qui prend en argument la position en pas à atteindre à partir de la position courante réalisant le déplacement demandé pas à pas. Il peut y avoir plus d'un pas à effectuer. On vérifiera que le pas demandé est atteignable (compris entre 0 et 1000).

IV Gestion des photographies

Une société emploie des photographes pour réaliser des photographies, qu'ils déposent ensuite sur un site et qui sont gérées à l'aide d'une base de données.

La base de données est composée de plusieurs tables, notamment :

— table `PHOTOS` contenant notamment les attributs :

- `id` : identifiant de la photographie, clé primaire, de type entier ;
- `date` : date à laquelle a été prise la photographie, de type texte, au format `YYYYMMDD`. Par exemple, le 22 juin 2021 sera stocké sous la forme `20210622` ;
- `heure` : heure à laquelle a été prise la photographie, de type texte ;
- `idp` : identifiant du photographe, de type entier ;
- `orientation` : orientation de l'appareil lors de la prise de photographie, de type entier ;
- ...

— table `PHOTOGRAPHES` contenant notamment les attributs :

- `id` : identifiant du photographe, clé primaire, de type entier ;
- `nom` : nom du photographe, de type texte ;
- `prenom` : prénom du photographe, de type texte ;
- ...

Q35. Donner la définition d'une clé primaire.

Q36. Donner une requête en SQL permettant de sélectionner les identifiants de toutes les photos prises le 11 novembre 2018.

Q37. Donner une requête en SQL permettant de sélectionner les noms et prénoms des photographes ayant pris des photographies le 11 novembre 2018.

Q38. Donner une requête en SQL permettant de sélectionner les noms, prénoms des photographes et heure de la prise de vue des photographies prises le 11 novembre 2018.

Afin d'afficher correctement sur le site les clichés sélectionnés, il faut réorienter l'image en fonction de l'orientation initiale du cliché. Les réorientations automatiques classiques à gérer sont le pivotement de 90 degrés dans le sens horaire ou le sens trigonométrique ainsi que la rotation de 180 degrés.

Q39. Illustrer sur un schéma les nouvelles coordonnées d'un pixel de coordonnées (i,j) après une rotation de 180 degrés. Écrire une fonction `rotation_180(image)` qui prend en argument une image au format RVB et qui renvoie une nouvelle image pivotée de 180 degrés.

Q40. Illustrer sur un schéma les nouvelles coordonnées d'un pixel de coordonnées (i,j) après une rotation de 90 degrés. Écrire une fonction `rotation_90(image)` qui prend en argument une image au format RVB et qui renvoie une nouvelle image pivotée de 90 degrés dans le sens trigonométrique.

Nom de famille :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)



Prénom(s) :

Numéro
Inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Section/S spécialité/Série :

Epreuve : Matière : Session :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

060

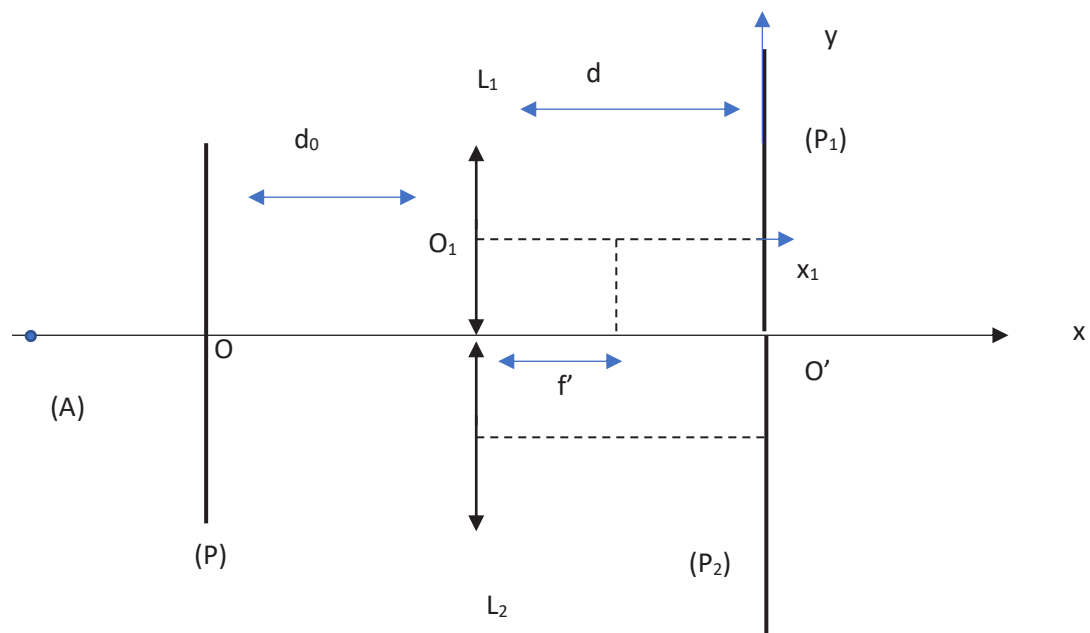
Document réponse
À rendre en fin d'épreuve

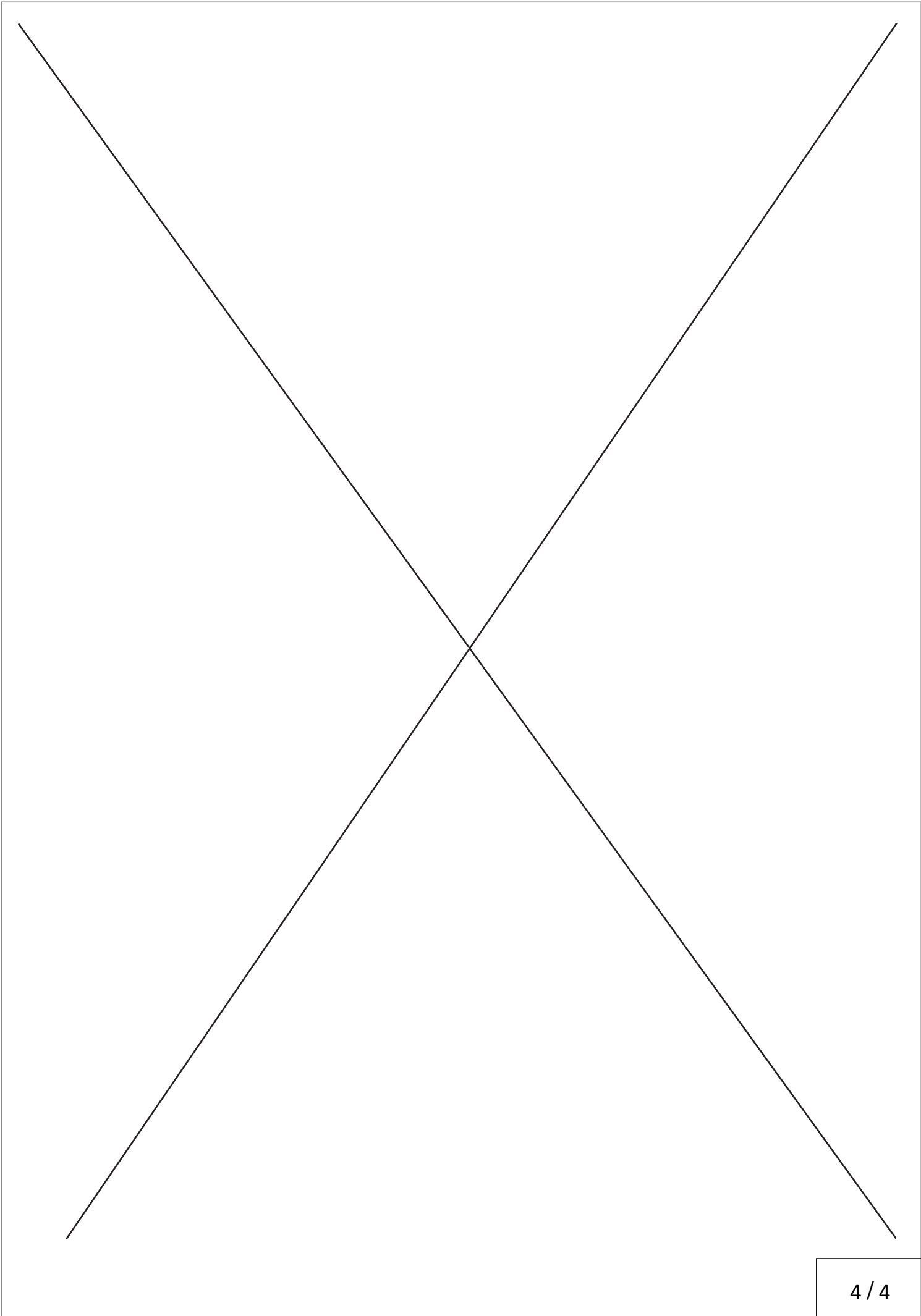
B

Tournez la page S.V.P.

1 / 4

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE





**ECOLE NORMALES SUPERIEURES – ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 2020**

**VENDREDI 24 AVRIL 2020 - 8h00 – 13h00
FILIERE PSI**

COMPOSITION de MODELISATION

Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être
une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa
composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené
à prendre**



VENDREDI 24 AVRIL 2020 - 8h00 – 13h00
FILIERE PSI

ERRATUM

COMPOSITION de MODELISATION

Remplacer les question 11 et 12 par :

Question 11 - Écrire une fonction ***dicho***(***f, ψ_i, ψ_f, eps***), qui renvoie la solution ***ψ*** de l'équation ***f(ψ) = 0***. La méthode choisie est la dichotomie, ***eps*** est la précision recherchée. Vous préciserez l'hypothèse qui assure l'existence d'une solution unique sur l'intervalle de recherche ***[ψ_i, ψ_f]***.

Ce vent apparent génère une force de portance $\overrightarrow{F_{P(Va \rightarrow voile)}}$ suivant $\overrightarrow{n_a}$ (figure 10).

On rappelle que la surface de la voile est notée S_v .

Question 12 - Exprimer la force de traction qui permet au bateau d'avancer : $\overrightarrow{F_{P(Va \rightarrow voile)}} \cdot \overrightarrow{e_x}$, en fonction de ρ_{air} , S_v , $\|\overrightarrow{V_{app}}\|$ et ψ .

Etude d'un hydrofoil



PLAN

- **Présentation**
- **Partie A – Etude des surfaces portantes, dynamique du vol et étude de stabilité**
 - 1- Etude de l'aile portante
 - 2- Choix du profil
 - 3- Conditions d'équilibre et performances de vitesse
 - 4- Modèle dynamique, stabilité
- **Partie B – Etude des actionneurs hautes performances**
 - 1- Introduction
 - 2- Modèle magnétostatique d'une machine brushless
 - 3- Modèle thermique d'une machine brushless
- **Conclusion**
- **Annexe Python**

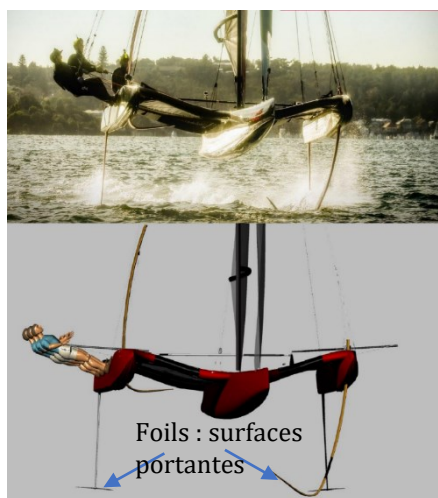
Les différentes parties du sujet sont indépendantes.

Le codage des fonctions se fera en langage Python.

Présentation

L'intérêt pour un bateau de "déjauger", c'est-à-dire de sortir sa coque de l'eau, est connu depuis déjà longtemps. Quand il déjàuge, le bateau voit sa résistance à l'avancement notablement réduite, augmentant ainsi ses performances en vitesse.

Des logiciels extrêmement puissants ont permis de faire des calculs aérodynamiques et hydrodynamiques de plus en plus poussés, créant des navires incroyablement perfectionnés à une, deux ou trois coques. Mais ces bateaux ont rapidement atteint leurs vitesses limites, car leur surface mouillée reste importante.



Présentement, la nouvelle tendance est le développement d'**hydrofoils**, un voilier possédant plusieurs dérives portantes (des **foils**) qui soulève la coque grâce à une forme hydrodynamique générant une force verticale.

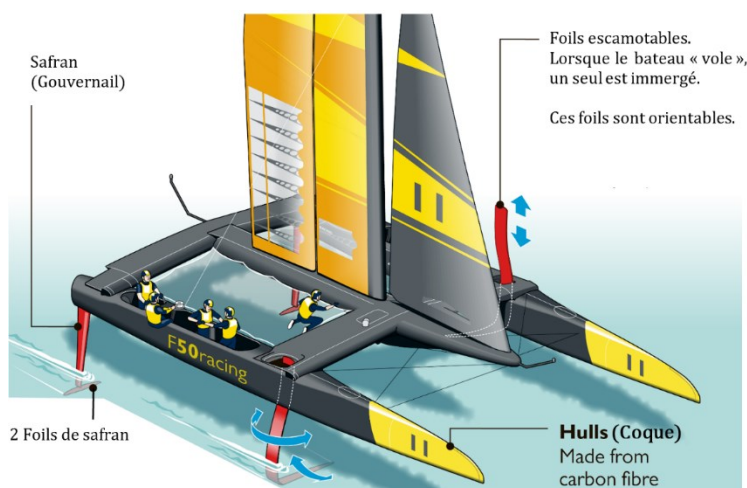
Les hydrofoils existent depuis longtemps, mais sont revenus au-devant de la scène lors de la coupe de l'America et de la coupe Louis-Vuitton de 2013. En effet, une faille dans le règlement de ces coupes a permis aux AC72, immenses catamarans de 72 pieds, d'utiliser des hydrofoils validant ainsi le concept et faisant rêver des milliers de marins par le fait même. Depuis, les hydrofoils sont de plus en plus présents sur tous les marchés nautiques.

Les plus rapides peuvent dépasser les 50 nœuds (25 m/s ou 90 km/h) pour un vent soufflant à 16 nœuds (8 m/s ou 30km/h).

Afin de mieux comprendre le rôle des foils, il faut les considérer comme des ailes d'avion; seulement, au lieu d'agir dans l'air, leur milieu d'action est l'eau.

L'objectif de ce sujet est d'établir un modèle qui vérifie cette performance de vitesse (atteindre le triple de la vitesse du vent !) et ensuite d'utiliser ce modèle pour déterminer des conditions d'instabilités (Première partie), car à ces vitesses, il s'agit d'un jeu d'équilibre délicat qu'il faut maîtriser.

Une solution pour contrôler le vol de ces voiliers est de piloter l'inclinaison et l'orientation des foils avant. La maîtrise des phénomènes physiques qui interviennent au niveau de l'actionneur est essentielle, ce sera l'objet de la seconde partie.



PARTIE A – ETUDE DES SURFACES PORTANTES, DYNAMIQUE DU VOL ET ETUDE DE STABILITE

1- Le modèle de l'aile portante

Le déplacement de l'hydrofoil repose sur le principe de l'aile portante : lorsque qu'une aile est placée dans un écoulement avec une incidence non nulle, une force de portance apparaît. La figure ci-dessous représente le profil de vitesse de l'écoulement :

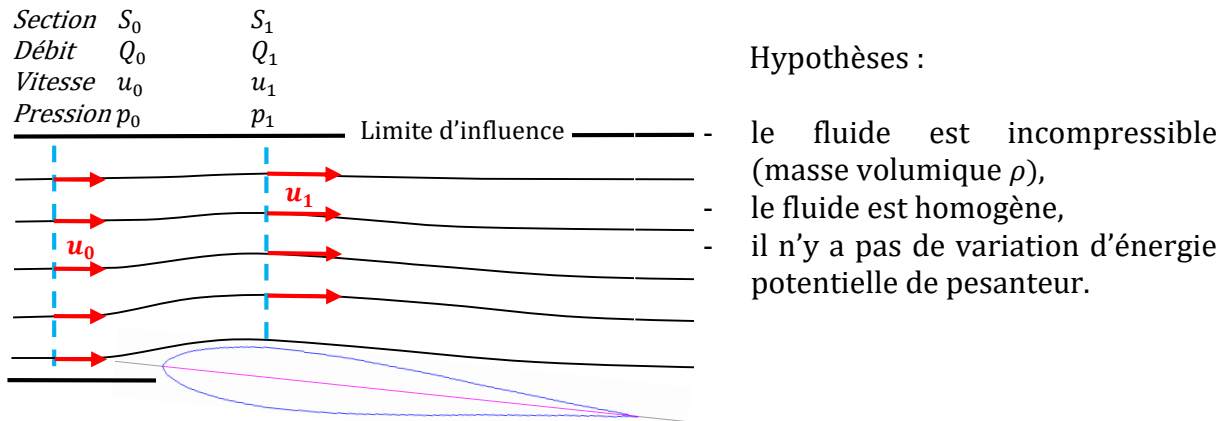


Figure 1 - Profil d'un écoulement sur l'extrados d'une aile et hypothèses

La vitesse de l'écoulement non perturbé est notée u_0 . La limite d'influence est la frontière entre la zone perturbée par l'aile et celle où l'écoulement n'est pas modifié.

Question 1 - Montrer que, pour un écoulement parfait, la pression p_1 de la section S_1 est inférieure à la pression p_0 de la section S_0 .

On donne la longueur caractéristique d'un foil (corde) ainsi que la viscosité cinématique de l'eau :

$$L_c = 0,3 \text{ m} \quad \text{et} \quad \nu_e = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Question 2 - L'écoulement est-il laminaire dans le cas du foil (aile immergée) ?

Devant la complexité du modèle de connaissance, une approche expérimentale est privilégiée. Les actions hydrodynamiques sont modélisées par une force de portance, perpendiculaire à l'écoulement et une force de traînée (résistante), dans le sens de l'écoulement.

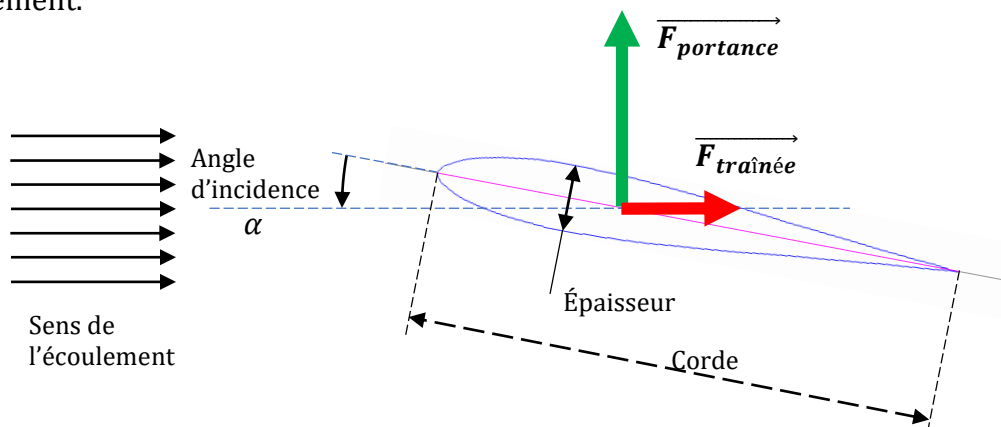


Figure 2 - Forces de portance et de traînée d'une aile placée dans un écoulement

Ces forces de portance et de traînée ont pour expression :

$$F_{portance} = \frac{1}{2} \rho S C_z(\alpha) V_{fluide}^2$$

$$F_{traînée} = \frac{1}{2} \rho S C_x(\alpha) V_{fluide}^2$$

Avec :

α : angle d'incidence entre l'aile et l'écoulement

S : surface de l'aile (m^2)

C_z, C_x : coefficients de portance et de traînée
(dépendent de α), sans unité

ρ : masse volumique du fluide

$$\rho_{air} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

V_{fluide} : vitesse de l'écoulement loin de l'aile (m/s)

Pour information, la force d'inertie du fluide (masse ajoutée) est prise en compte dans la force de traînée à travers le coefficient C_x . La poussée d'Archimède sera négligée devant la portance générée.

Question 3 - Dans le contexte des foils, le dimensionnement de ces profils sous de tels efforts est inspiré de l'aérodynamique des avions de ligne ($\approx 850 \text{ km/h} \approx 240 \text{ m/s}$). Montrer que, pour une taille d'aile donnée, les efforts sont du même ordre de grandeur.

Des essais dans un bassin de carène nous donnent la répartition de pression autour de l'aile (*figure 3*). Les profils de pression relevés sur l'extrados et l'intrados sont tracés. Les valeurs de pression sont données en pascals, 101325 correspond donc à la pression atmosphérique. On remarque bien que l'extrados est en surpression tandis que l'intrados est en dépression.

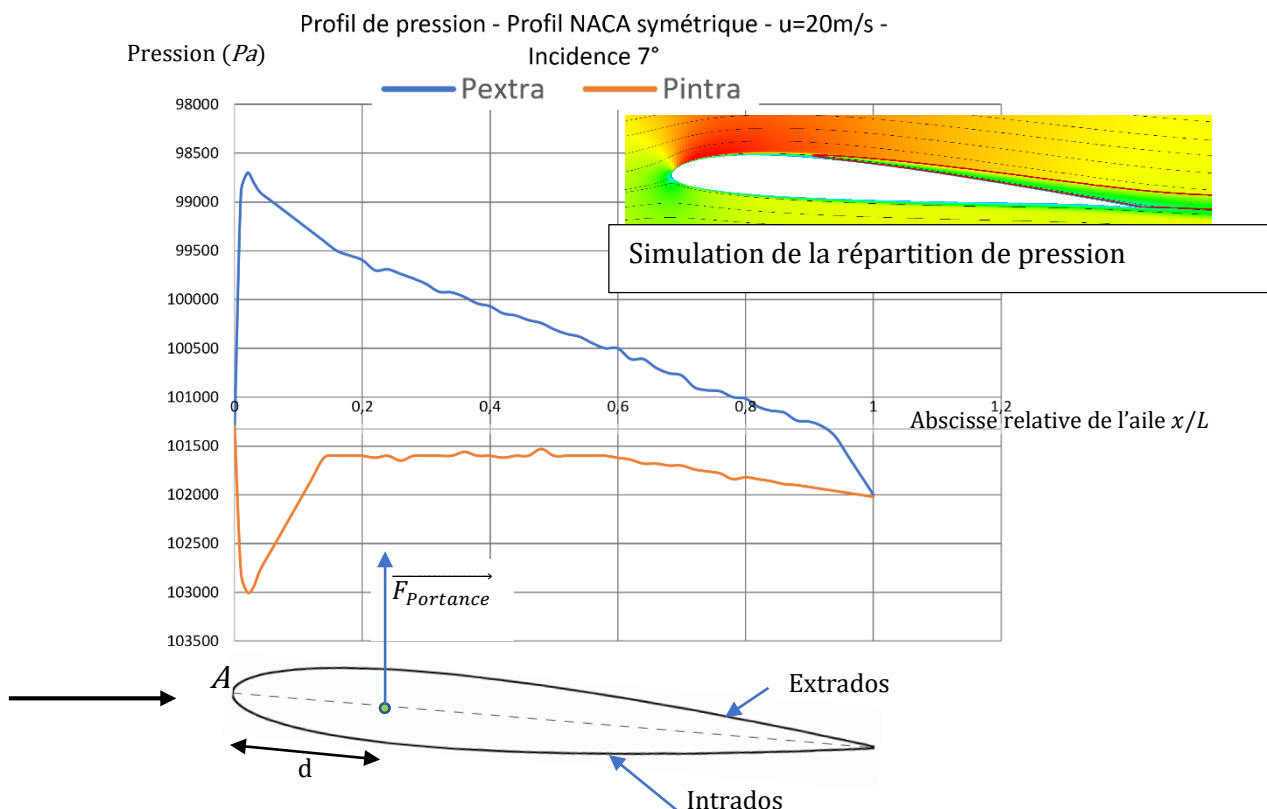


Figure 3 - Profils de pression expérimentaux

Cet essai permet de déterminer les paramètres C_x et C_z mais également le point d'application de la force de portance (centre de poussée).

L'écoulement est plan et loin des effets de bords. Nous ne nous intéressons ici qu'à la composante de portance.



Figure 4 - Modélisation de l'aile dans son écoulement

L'aile est modélisée par un segment de longueur L suivant \vec{x} et de largeur unitaire suivant \vec{z} (par symétrie on se place dans le plan médian).

- On note :
- A le bord d'attaque de l'aile, d'abscisse nulle,
 - M un point d'abscisse x ($x \in [0, L]$),
 - $p(x)$ l'écart de pression au point M : $p(x) = p_{intra}(x) - p_{extra}(x)$

Question 4 - Montrer que le point I de moment nul (point d'application de la résultante de portance) est situé à une distance d du bord d'attaque telle que :

$$\|\vec{AI}\| = d = \frac{\int_0^L x \cdot p(x) dx}{\int_0^L p(x) dx} \quad \text{avec } \vec{M}_I = \vec{0}$$

Les relevés de pression intrados/extrados sont stockés dans un fichier au format *csv*.

Les mesures sont organisées de la manière suivante :

chaque ligne contient 3 valeurs réelles séparées par des points virgules :

- L'abscisse (en *m*) entre 0 et L (inclus). Les abscisses sont régulièrement espacées.
- La pression extrados (en *Pa*)
- La pression intrados (en *Pa*)

Exemple de ligne: 0.2 ; 98700 ; 103000\n indique : $\begin{cases} x = 0.2 \text{ m} \\ p_{extra} = 98700 \text{ Pa} \\ p_{intra} = 103000 \text{ Pa} \end{cases}$

Question 5 -Ecrire une fonction **Extraire** prenant comme argument un nom de fichier. L'appel de cette fonction doit renvoyer une liste dont chaque élément est un tuple de 3 réels (x, p_{ext}, p_{int}) où x est l'abscisse, p_{ext} la pression extrados et p_{int} la pression intrados.

Question 6 -Écrire une fonction **CDP** qui renvoie l'abscisse d du centre de poussée I . Cette fonction recevra comme argument la liste **Valeurs** contenant les triplets (x, p_{ext}, p_{int}) décrits dans la question 5.

La méthode d'intégration utilisée sera celle des trapèzes.

Cette fonction a été utilisée pour différents relevés expérimentaux où la vitesse de l'écoulement et l'incidence variaient.

Pour information, les valeurs retournées se situent toutes autour de 0.25, ce qui est caractéristique des profils symétriques. Cette valeur est utilisée comme référence pour les distances concernant les surfaces portantes (foils).

Les profils utilisés étant symétriques, comme celui de la figure 3, les actions mécaniques des fluides sur ces surfaces seront assimilées à des glisseurs.

2- Choix du profil

La géométrie générale des surfaces portantes a été choisie à partir d'essais réalisés en soufflerie. Un choix plus précis des profils peut maintenant être fait en consultant une base de données (<http://airfoiltools.com>) qui regroupe de nombreux profils différents.

Après extraction, nous disposons du schéma relationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Géométrie}(\underline{\text{Nom}}, \text{Sym}, \text{Emax}, \text{Cmax}) \\ \text{Polaire}(\underline{\text{Id}}, \text{Nom}, \text{Re}, \text{Inc}, \text{Cz}, \text{Cx}) \end{array} \right.$$

Voici la signification des attributs ainsi que leur type :

Attribut	Signification	Type	Attribut	Signification	Type
Nom	Nom du profil	Chaine de caractères	Id	Identifiant du profil	Entier positif
Sym	Symétrie	Caractère : « O » ou « N »	Re	Nombre de Reynolds	Réel
Emax	Epaisseur max (%)	Réel, entre 0 et 100	Inc	Angle d'incidence (°)	Réel
Cmax	Courbure max (m^{-1})	Réel	Cz	Coef. de portance	Réel
			Cx	Coef. de traînée	Réel

Figure 5 - Description des attributs

Les critères de sélection sont donnés par les exigences suivantes :

Performances	Critère	Niveau
Recherche d'une vitesse maximale	C1 - Finesse C_z/C_x	> 70 pour un angle d'incidence inférieur à 10°
	C2 - Nombre de Reynolds	7.10^6
	C3 - Epaisseur du profil	11% de la corde
Surface de portance	C4 - Longueur de la corde	Entre 300 mm et 400 mm
Stabilité de l'hydrofoil	C5 - Profil du foil	Symétrique

Figure 6 - Exigences relatives au choix d'un profil de foil

Question 7 -Écrire une requête SQL permettant de choisir un nom de profil selon les critères C1, C2, C3 et C5 ci-dessus.

Un profil qui ressort est le NACA0009, dont les courbes caractéristiques sont données sur les figures ci-dessous.

Question 8 - Montrer que l'exigence C1 est effectivement vérifiée.

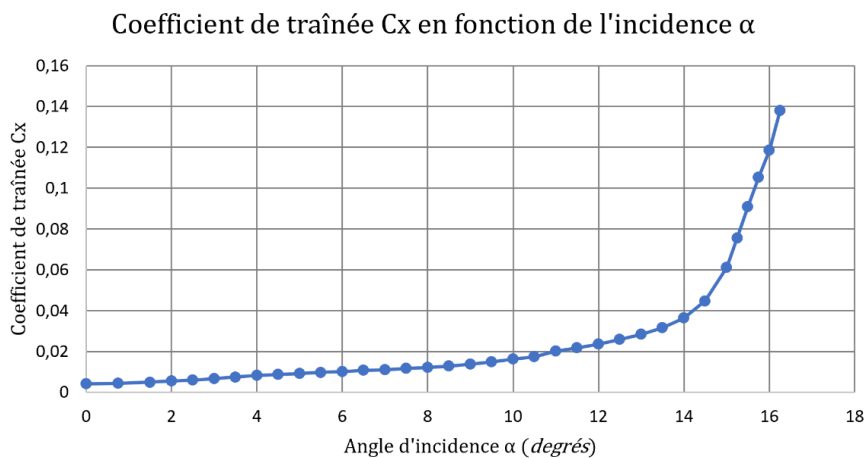
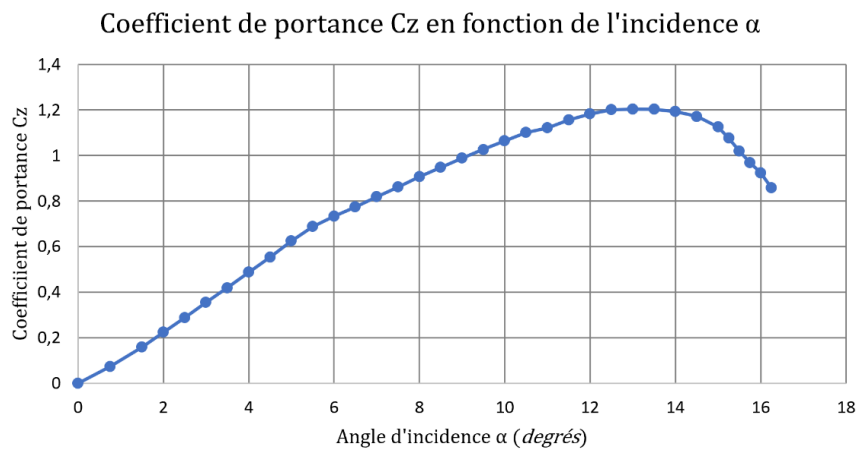
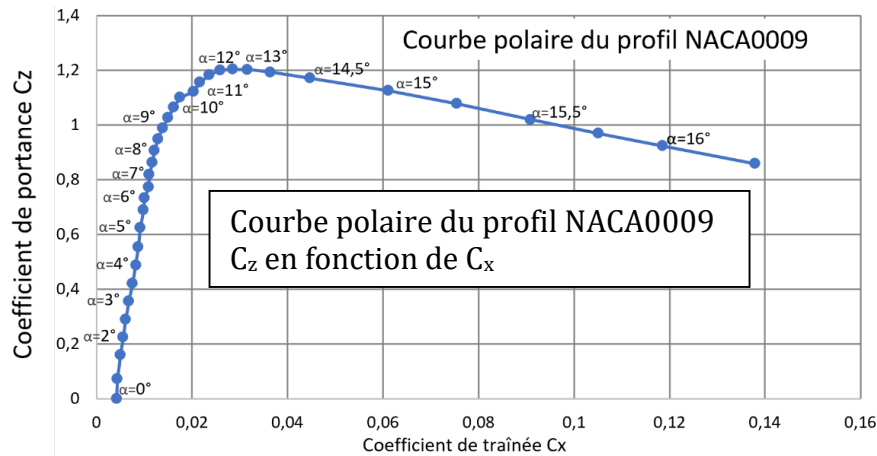


Figure 7 - Courbes caractéristiques du profil retenu

3- Conditions d'équilibre et performance de vitesse

L'étude qui suit porte sur les conditions d'équilibre de ces merveilleux bateaux volants. Les données numériques qui interviennent proviennent de simulations issues de modèles simplifiés ou de caractéristiques réelles des catamarans de la classe F50. Elles appuieront les discussions concernant la possibilité de naviguer au triple de la vitesse du vent.

Pour analyser l'équilibre de l'hydrofoil, nous prendrons en compte les forces de portance et de traînée des foils immergés et de la voile soumise au vent ainsi que le poids du bateau.

Les figures 8 et 9 précisent le paramétrage choisi :

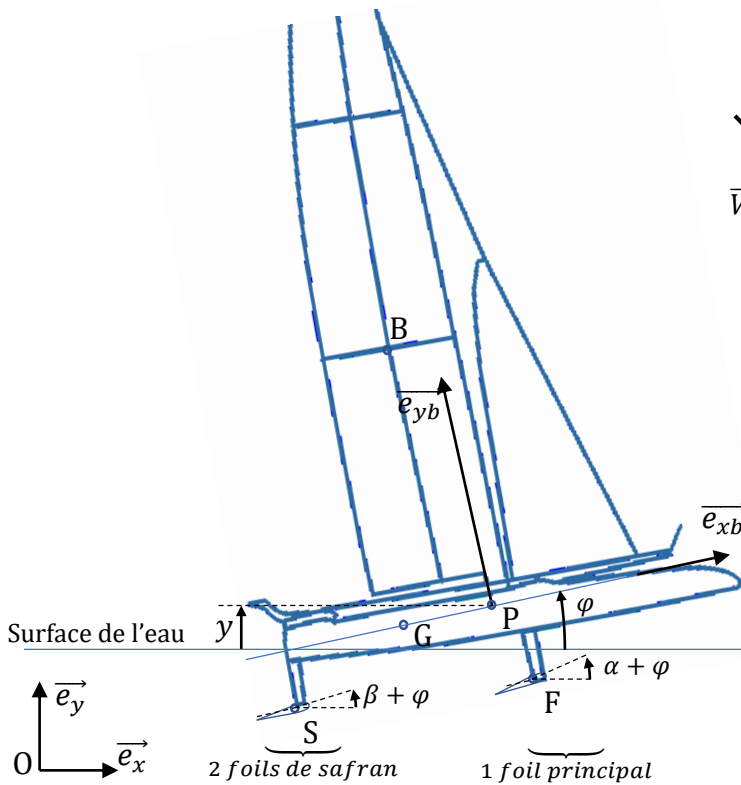


Figure 8 - Vue de côté et paramétrage

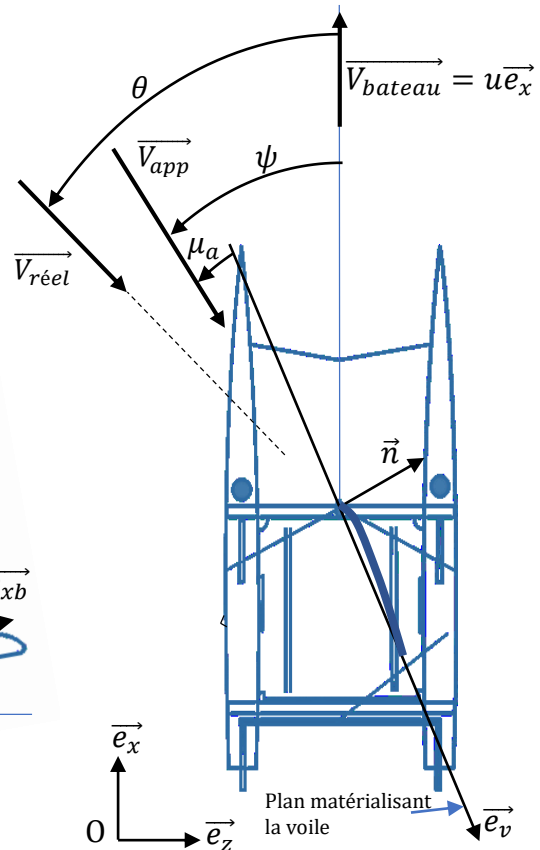


Figure 9 - Vue de dessus

<p>G : centre de gravité du bateau P : centre de poussée des forces hydrodynamiques sur le bateau B : centre de poussée des forces aérodynamiques sur la voile.</p> <p>$\overrightarrow{PG} = -x_G \overrightarrow{e_{xb}}$ $\overrightarrow{PS} = -x_S \overrightarrow{e_{xb}} - y_S \overrightarrow{e_{yb}}$ $\overrightarrow{PF} = x_F \overrightarrow{e_{xb}} - y_F \overrightarrow{e_{yb}}$ $\overrightarrow{PB} = -x_B \overrightarrow{e_{xb}} + y_B \overrightarrow{e_{yb}}$ $R_0(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$: repère galiléen lié au sol où $\overrightarrow{e_y}$ est vertical ascendant ; u : vitesse du bateau (m/s) suivant $\overrightarrow{e_x}$ $R_b(P, \overrightarrow{e_{xb}}, \overrightarrow{e_{yb}}, \overrightarrow{e_z})$ est lié au bateau</p>	<p>$\overrightarrow{V_{réel}}$ est le vecteur vitesse du vent par rapport au sol (vent réel). On note V sa norme. $\overrightarrow{V_{app}}$ est le vecteur vitesse du vent par rapport au bateau (vent apparent) α et β sont les angles d'incidence respectifs du foil principal et des foils de safran dans le repère du bateau $\varphi = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_{xb}})$ angle de tangage $\theta = (\overrightarrow{e_x}, -\overrightarrow{V_{réel}})$ $\psi = (\overrightarrow{e_x}, -\overrightarrow{V_{app}})$ $\mu_a = (\overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{V_{app}})$ y désigne l'élévation du bateau par rapport au niveau de la mer (m), au point P.</p>
---	---

Caractéristiques de l'eau, de l'air et du bateau :

- ρ_{air} : masse volumique de l'air ($1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- ρ_{eau} : masse volumique de l'eau ($1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- g : accélération de la pesanteur ($10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
- m : masse du bateau (kg)
- I_P : moment d'inertie du bateau autour de (P, \vec{e}_z) (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
- S_p, S_{sa} : surfaces portantes respectives du foil principal et de safran (m^2)
- S_v : surface de la voile (m^2)
- C_z : coefficient de portance (voile ou foil)
- C_x : indique un coefficient de traînée (voile ou foil)

ψ et φ sont les variables décrivant le mouvement du bateau

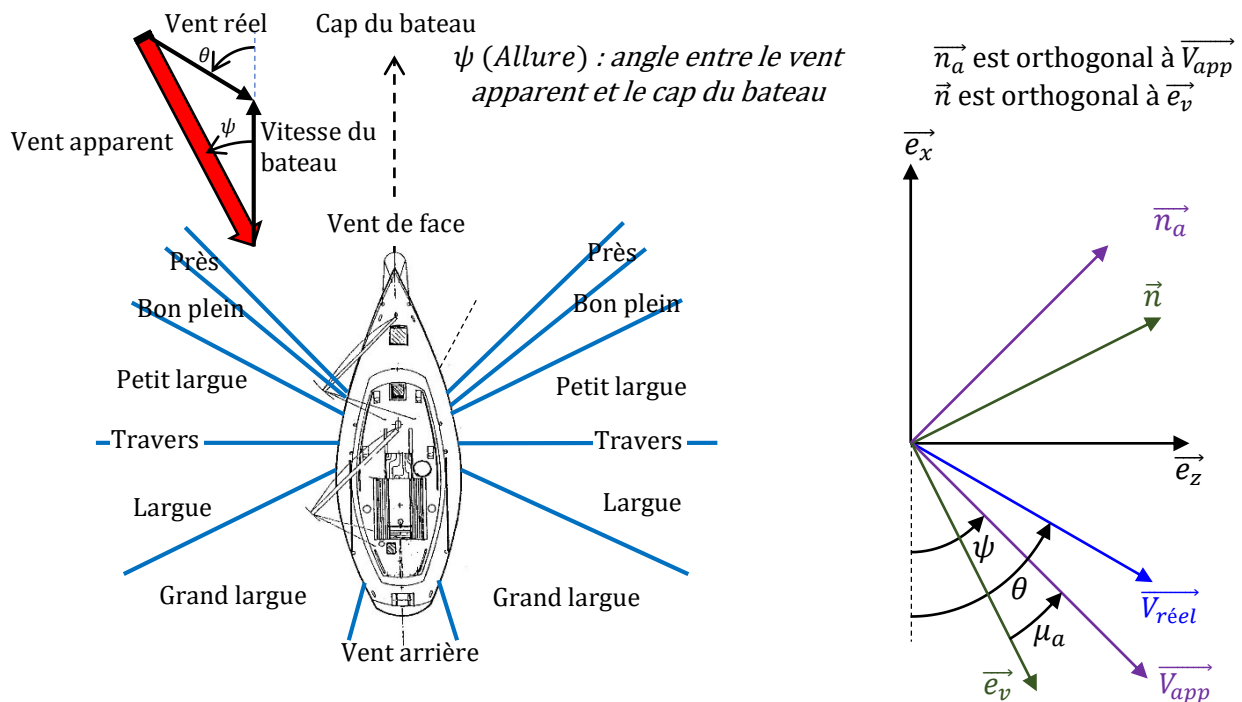


Figure 10 - Termes de navigation, définition de l'allure, du vent apparent et des angles

On peut voir sur les figures 8, 9 et 10 les vecteurs vitesse :

- du vent par rapport au sol : $\vec{V}_{réel}$
- du bateau par rapport au sol : $u\vec{e}_x$
- du vent par rapport au bateau : \vec{V}_{app}

Cette dernière vitesse, \vec{V}_{app} , est celle du vent apparent, c'est-à-dire le vent relatif que perçoit la voile. L'angle ψ formé par la direction du vent apparent et du cap du bateau se nomme l'**allure** (figure 10).

Question 9 - Déterminer \vec{V}_{app} ainsi que sa norme en fonction de $V = \|\vec{V}_{réel}\|$, θ et u (vitesse du bateau). Ce vecteur sera exprimé dans la base (\vec{e}_z, \vec{e}_x) .

Question 10 - Exprimer $\vec{V}_{app} \cdot \vec{n}$ et en déduire une relation entre μ_a , θ , ψ , u et V .

Le résultat sera exprimé sous la forme $f(\mu_a, \theta, \psi, \frac{u}{V}) = 0$.

On souhaite résoudre cette équation. Les paramètres suivants sont constants :

- μ_a : cet angle dépend du choix de la voile,
- $\frac{u}{V}$: ce ratio est fixé par la vitesse du vent et celle du bateau.

Question 11 -Écrire une fonction **dicho**($f, \theta_i, \theta_f, eps$), qui renvoie la solution ψ , pour θ fixé, de l'équation $f(\theta, \psi) = 0$. La méthode choisie est la dichotomie, **eps** est la précision recherchée. Vous préciserez l'hypothèse qui assure l'existence d'une solution unique sur l'intervalle de recherche $[\theta_i, \theta_f]$.

Ce vent apparent génère une force de portance $\overrightarrow{F_{P(Va \rightarrow voile)}}$ suivant \vec{n}_a (figure 10).

On rappelle que la surface de la voile est notée S_v .

Question 12 -Exprimer la force de traction qui permet au bateau d'avancer : $\overrightarrow{F_{P(Va \rightarrow voile)}} \cdot \vec{e}_x$, en fonction de ρ_{air} , S_v , $\|\vec{V}_{app}\|$ et θ .

Question 13 -Ecrire une fonction **Fi**(u, V, μ_a) utilisant la fonction **dicho** précédente, qui renvoie l'allure ψ permettant au bateau de subir une force de traction maximale.

Le résultat est donné sur la figure 11. Pour cette simulation, nous avons choisi $\mu_a = 20^\circ$, ce qui correspond aux conditions de portance maximale pour les voiles des catamarans auxquels nous nous intéressons ici.

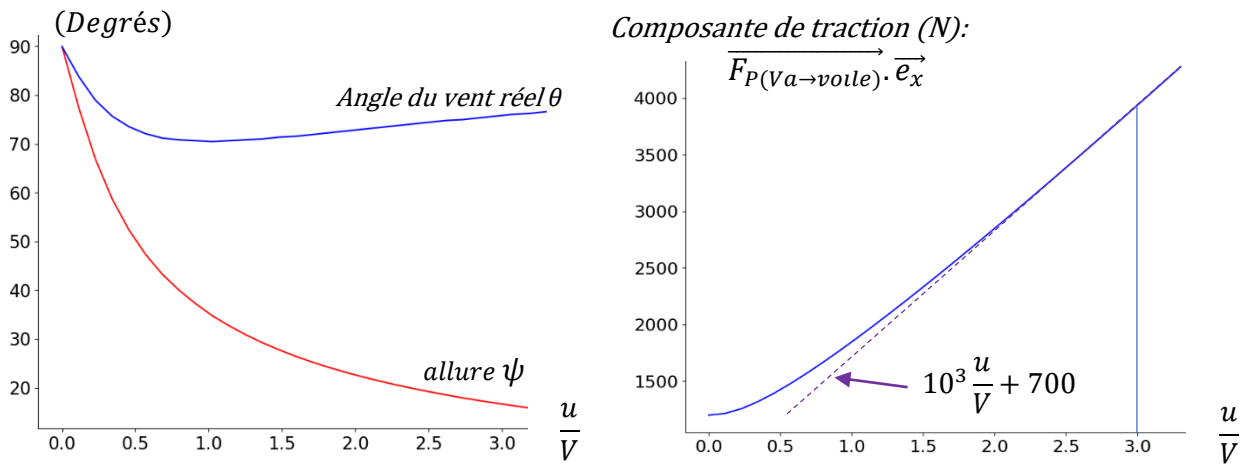


Figure 11 - Variation des paramètres de navigation en fonction de $\frac{u}{V}$

Nous cherchons à travers cette étude à confronter notre modèle aux performances observées, c'est à dire lorsque la vitesse du bateau atteint le triple de celle du vent réel.

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

H1	Angles faibles : linéarisation des courbes de la figure 7 aux petits angles	$(\alpha, \beta) \in [0^\circ, 9^\circ]^2$ $C_x(\alpha) = k_x \alpha$ $C_z(\alpha) = k_z \alpha$
H2	La vitesse du bateau a permis la linéarisation de la force de portance sur la voile (figure 11)	$\frac{u}{V} \approx 3$

Les actions mécaniques agissant sur les foils s'expriment ainsi :

$$\{T_{E \rightarrow FP}\}_F = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \rho_{eau} S_p \alpha \cdot u^2 (k_{z1} \vec{e}_y - k_{x1} \vec{e}_x) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{action de l'eau sur le foil principal,}$$

$$\{T_{E \rightarrow 2FS}\}_S = \begin{Bmatrix} \rho_{eau} S_{sa} \beta \cdot u^2 (k_{z2} \vec{e}_y - k_{x2} \vec{e}_x) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{action de l'eau sur les 2 foils de safran.}$$

Dans ces expressions, les valeurs de α et β sont en degrés.

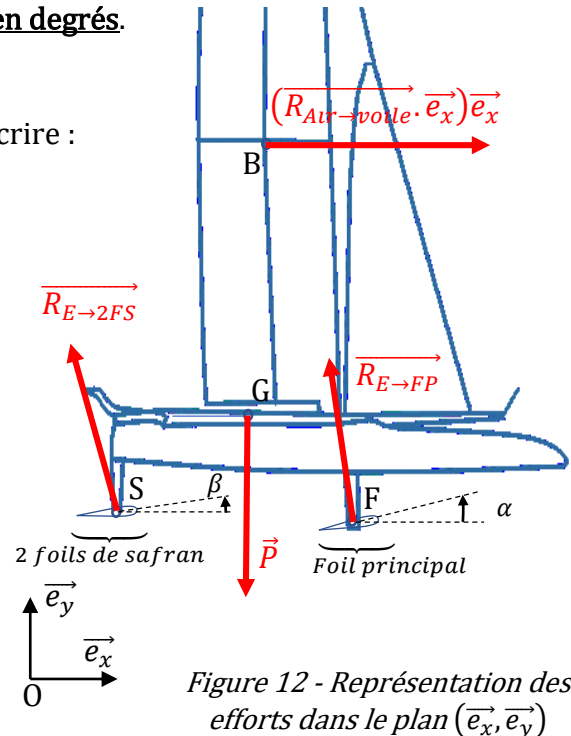
L'action mécanique de l'air sur la voile peut s'écrire :

$$\{T_{Air \rightarrow voile}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{Air \rightarrow voile} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec:
$$\begin{cases} \vec{R}_{Air \rightarrow voile} \cdot \vec{e}_x = a_0 \frac{u}{V} + a_1 \\ \vec{R}_{Air \rightarrow voile} \cdot \vec{e}_y = 0 \\ a_0 = 10^3 \text{ N et } a_1 = 700 \text{ N} \end{cases}$$

Pour information, ces valeurs ont été obtenues dans les conditions suivantes :

- Surface de voile : 103 m^2
- Allure ψ : 18°
- Angle de vent réel : $\theta = 75^\circ$.



Nous cherchons à vérifier la performance suivante :

« Le bateau peut atteindre trois fois la vitesse du vent réel V , avec des angles d'incidence α et β inférieurs à 9° , lorsque le vent souffle à 16 nœuds (8 m/s) »

Dans ces conditions, le bateau avance à vitesse constante sur ses foils (la coque ne touche pas l'eau) et n'a pas de mouvement vertical ($\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0, \ddot{\varphi} = 0, \dot{u} = 0$).

Question 14 - Dans ce contexte, écrire les 2 équations du théorème de la résultante dynamique appliqué au voilier. Mettre le système obtenu sous la forme :

$$A_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{bmatrix} 3a_0 + a_1 \\ mg \end{bmatrix} \quad \text{où } A_1 \text{ est une matrice } 2 \times 2 \text{ à préciser}$$

Question 15 - Montrer qu'avec ce modèle, la performance de vitesse ne peut être atteinte que si les profils des foils avant et arrière sont différents.

On choisit des profils tels que :

$$k_{x1} = 0.002 \text{ } ^\circ^{-1}; \quad k_{z1} = 0.12 \text{ } ^\circ^{-1}; \quad k_{x2} = 0.008 \text{ } ^\circ^{-1}; \quad k_{z2} = 0.085 \text{ } ^\circ^{-1}; \quad S_p = S_{sa} = 0.7 \text{ m}^2$$

Le système matriciel s'écrit alors :
$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 380 \end{bmatrix}$$

Question 16 - Donner une valeur approchée de α et β . L'hypothèse H1 est-elle vérifiée ?

4- Modèle dynamique, Stabilité

La partie précédente a permis de mettre en évidence une propriété intéressante : lors de la phase de vol, la vitesse du bateau peut dépasser la vitesse du vent, jusqu'à la tripler. Le concept de l'hydrofoil prend alors tout son sens, notamment lors des compétitions grandes distances telles que la coupe de l'Amérique, le trophée Jules Verne, le Vendée Globe, etc...

Cependant, le modèle que l'on a utilisé pour démontrer cette propriété ne couvre pas toute la plage de vitesse exploitable par l'hydrofoil.

Nous allons dans cette partie étudier le vol dynamique du bateau, avec un modèle plus général et tenter d'y rechercher des conditions d'instabilité.

Les paramètres décrivant le mouvement du bateau sont φ et y . A l'équilibre, on a : $\varphi = 0$ et $y = 0$.

Hypothèses de modélisation :

- Le point P vérifie :

$$\overrightarrow{V_{P \in R_b / R_0}} = u \overrightarrow{e_x} + \dot{y} \overrightarrow{e_y}$$

- Les variations de la vitesse horizontale ne seront pas prises en compte :

$$u = \text{constante}$$

- La vitesse horizontale est grande devant la vitesse verticale ($u \gg \dot{y}$), on peut donc donner une expression simplifiée des vitesses apparentes au niveau des foils :

$$\|\overrightarrow{V_{S \in R_b / R_0}}\| = \|\overrightarrow{V_{F \in R_b / R_0}}\| \approx u$$

Commençons par nous intéresser à l'angle d'incidence du flux d'eau sur un foil. Cet angle apparent d'incidence est modifié par le mouvement vertical du bateau.

On notera α_a l'incidence apparente du foil principal et β_a celle des foils de safran.

La figure suivante résume les différents angles qui paramètrent le foil de safran :

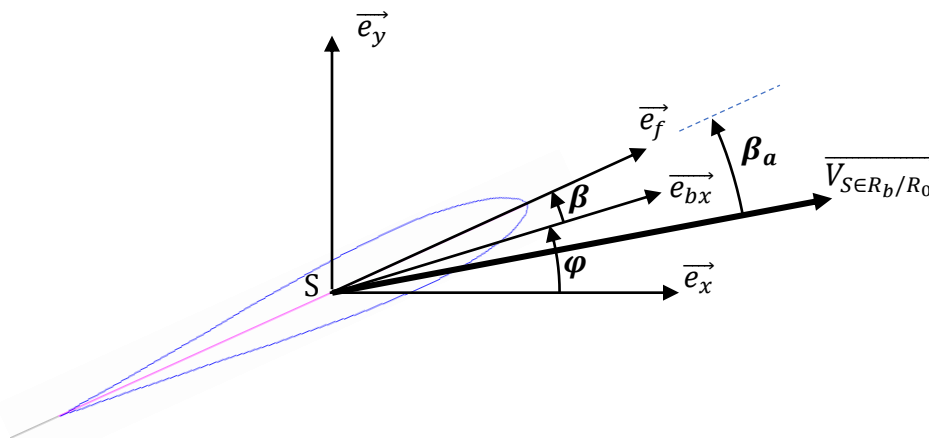


Figure 13 - Paramétrage du safran lors de mouvements verticaux et angulaires

Question 17 -Exprimer $\sin \beta_a$ en fonction de $\overrightarrow{V_{S \in R_b / R_0}}$, β , φ , u et des vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

Le calcul numérique de α_a et β_a ne sera pas développé ici. Concentrons-nous sur le modèle dynamique.

On reprend l'expression des forces hydrodynamiques :

$$\{T_{E \rightarrow FP}\}_F = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \rho_{eau} S_p \cdot u^2 (k_{z1} \alpha_a \vec{e}_y - k_{x1} \alpha_a \vec{e}_x) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{eau sur le foil principal})$$

$$\{T_{E \rightarrow 2FS}\}_S = \begin{Bmatrix} \rho_{eau} S_{sa} \cdot u^2 (k_{z2} \beta_a \vec{e}_y - k_{x2} \beta_a \vec{e}_x) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{eau sur les 2 foils de safran})$$

Les coefficients C_x et C_z ont été linéarisés aux petits angles ($< 9^\circ$) :

$$\begin{aligned} C_{x1}(\alpha_a) &= k_{x1} \alpha_a \\ C_{z1}(\alpha_a) &= k_{z1} \alpha_a \\ C_{x2}(\beta_a) &= k_{x2} \beta_a \\ C_{z2}(\beta_a) &= k_{z2} \beta_a \end{aligned} \quad \text{Avec :} \quad \begin{aligned} k_{z1} &\gg k_{x1} \\ k_{z2} &\gg k_{x2} \end{aligned}$$

L'angle de tangage du bateau φ , est également faible.

On donne également l'expression des forces aérodynamiques sur la voile :

$$\{T_{Air \rightarrow voile}\}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{Air \rightarrow voile}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\overrightarrow{R_{Air \rightarrow voile}} \cdot \vec{e}_x = -\frac{1}{2} \rho_{air} S_v C_z(\mu_a) \cdot V_{app}^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R_{Air \rightarrow voile}} \cdot \vec{e}_y = 0$

Question 18 -Ecrire le torseur dynamique du bateau, au point P, dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R_0 : \{\mathcal{D}_{R_b/R_0}\}$.

Question 19 -En appliquant le principe fondamental de la dynamique au bateau au point P, écrire 2 équations décrivant le mouvement en φ et y . On prendra soin de simplifier ces équations compte tenu des ordres de grandeurs des différents paramètres (angle φ faible, vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ négligeable, ...).

Montrons maintenant qu'en dessous d'une vitesse minimale, le bateau ne peut pas être en équilibre sur ses foils.

A l'équilibre, on a $\alpha_a = \alpha_{a0}$ et $\beta_a = \beta_{a0}$, avec :

$$|\alpha_{a0}| < 9^\circ \text{ et } |\beta_{a0}| < 9^\circ$$

Question 20 -Déterminer la matrice A_2 telle que :

$$A_2 \begin{bmatrix} \alpha_{a0} \\ \beta_{a0} \end{bmatrix} = \frac{1}{u^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La géométrie du bateau est telle que A_2 est inversible.

Question 21 -Sans résoudre ce système, montrer qu'en dessous d'une certaine vitesse du bateau, l'équilibre n'est pas possible.

La discussion sur la stabilité dynamique s'appuie sur la linéarisation des équations précédentes (Q19) autour d'une position d'équilibre, à laquelle correspondent les angles d'incidences α_{a0} et β_{a0} . Ces angles, qui dépendent de la vitesse u du bateau, sont solutions du système de la question 20.

On note donc :

$$\begin{cases} \alpha_a = \alpha_{a0} + \delta \\ \beta_a = \beta_{a0} + \delta \\ \varphi = \varphi_0 + \delta \end{cases}$$

Question 22 -Ecrire les équations de la dynamique de la question 19 sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{X}_0$$

Avec :

- $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y \\ \delta \end{pmatrix}$
- \mathbf{M} : matrice 2×2 à préciser
- $\mathbf{K} = -\rho_{eau} u^2 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R}_1 \\ 0 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$ où \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 sont à préciser,
- \mathbf{F}_0 un vecteur à préciser,
- \mathbf{X}_0 un vecteur contenant les termes liés à α_0 et β_0 , à préciser également,

Question 23 -Montrer qu'on peut écrire, avec les notations précédentes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Notons maintenant $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}$.

Question 24 -Ecrire l'équation matricielle de la question précédente sous la forme :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

où \mathbf{A} est une matrice à préciser qui dépend de \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{I}_2 (matrice identité).

Les solutions de l'équation précédente sont :

$$\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{Y}_0$$

Cette formulation est donnée à titre indicatif, la connaissance des propriétés de l'exponentielle d'une matrice n'est pas exigée.

La stabilité est donc gouvernée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} et plus précisément :

Le système est stable si, et seulement si :
 $\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A}), \text{Re}(\lambda) \leq 0$ où $\sigma(\mathbf{A})$ désigne le spectre de \mathbf{A} .

Question 25 -Montrer que les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont alors solutions de :

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$$

Question 26 -Écrire la relation entre \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 conduisant à l'instabilité de l'hydrofoil.

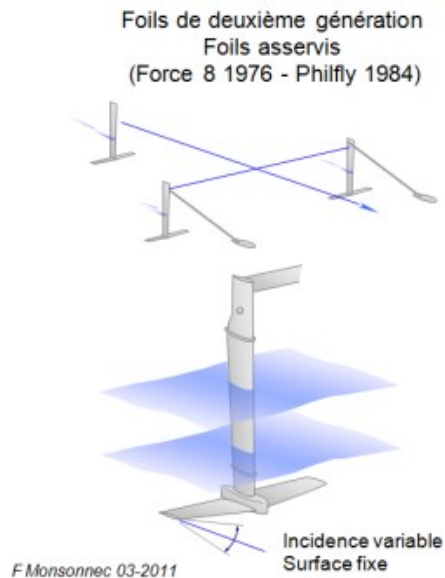
PARTIE B – ETUDE DES ACTIONNEURS HAUTES PERFORMANCES

1- Introduction

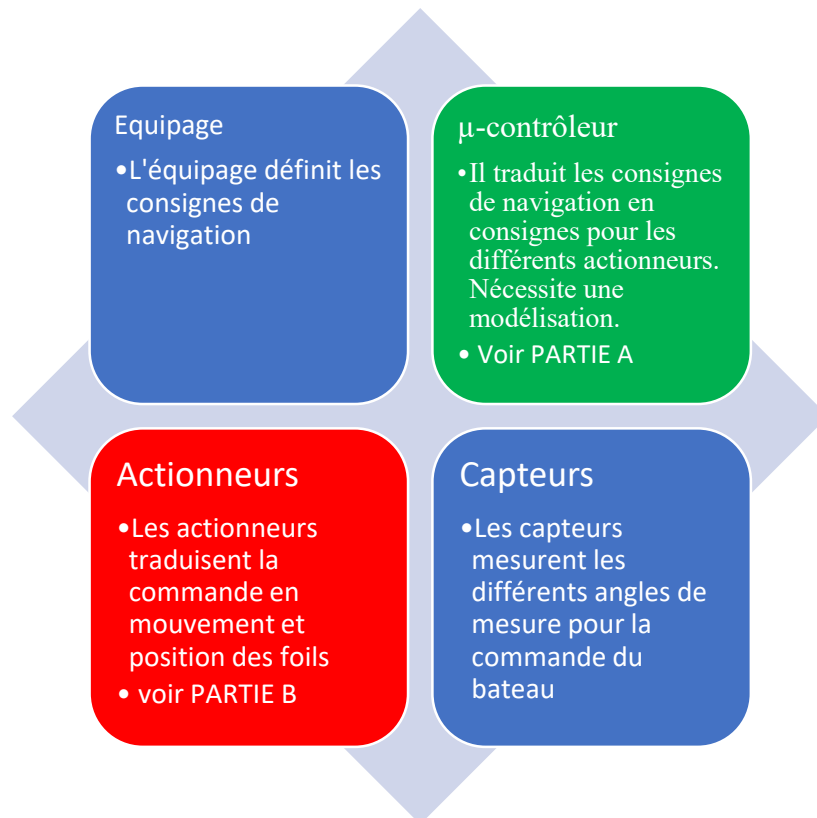
La navigation sur un bateau de type foil nécessite un pilote / équipage mais également dans le cas des bateaux à foils actifs d'un asservissement des grandeurs de contrôle. La stabilisation du bateau peut se faire dans ce cas par un asservissement des foils, on parle alors de stabilisation active.

La régulation de la portance du bateau peut se faire par différentes techniques :

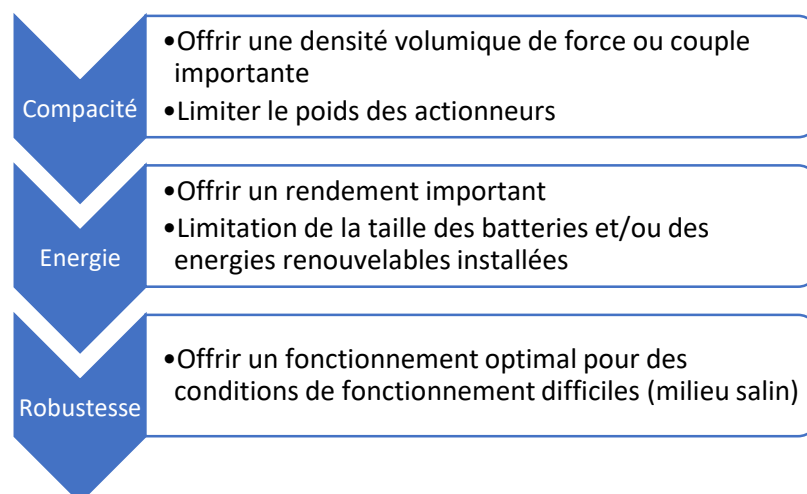
- Par la modification de l'angle de calage du foil et de sa jambe
- Modification du calage du foil
- Modification de la cambrure du profil
- Diminution de la portance par ventilation de l'extrados



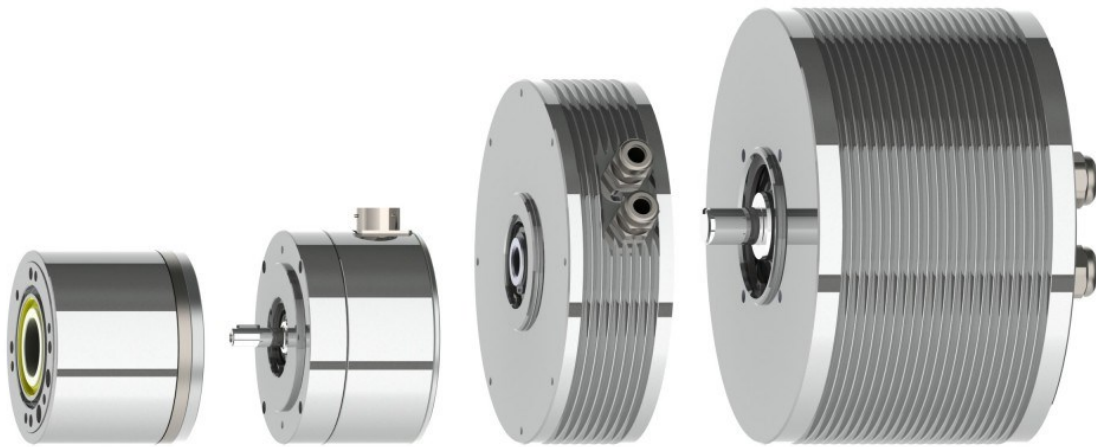
La navigation sur ce type de bateau tient donc de la coopération entre différents organes, l'équipage, le microcontrôleur, les actionneurs et les capteurs, synoptique ci-dessous.



Les asservissements des différents organes de contrôle du foil nécessitent des actionneurs performants du point de vue de la commande mais également avec des rendements très importants et une compacité accrue car l'énergie embarquée à bord du bateau est limitée.



Dans la palette des actionneurs électriques performants, nous trouvons les machines synchrones autopilotées (dont les références de courants sont en phases avec la position mécanique du rotor) plus communément appelées moteurs brushless ou moteurs sans balais, figure page suivante.



C'est l'étude du dimensionnement de cet actionneur qui va être détaillé dans la suite.

D'un point de vue de la commande, la relation courant-couple s'écrit :

$$C = \frac{3}{2} p_p \Phi_{max} I_{max}$$

Dans cette équation, les différents termes qui apparaissent :

- | | |
|--------------|--|
| p_p | Le nombre de paires de pôles, i.e. le nombre de fois que le motif élémentaire électrique se répète de manière géométrique. Une machine trois phases à 2 paires de pôles aura sur sa circonférence (2π) une succession de phases telles que : Phase A, Phase B, Phase C, Phase A, Phase B, Phase C. |
| Φ_{max} | Le flux maximal dû aux aimants permanents dans le cas d'un moteur à aimants. Ce terme se détermine en résolvant les équations de Maxwell en magnétostatique lorsqu'aucun courant n'alimente les phases. |
| I_{max} | Le courant maximal que l'on peut mettre dans les phases de telle manière que l'échauffement de température de la machine ne dépasse pas un seuil critique pour les isolants (Classe de fonctionnement) ou les aimants. |

Dans cette partie, nous proposons de déterminer le flux maximal par un modèle magnétostatique et le courant maximal par un modèle thermique.

2. Modèle magnétostatique d'une machine brushless

Nous allons considérer une machine brushless élémentaire trois phases (A, B et C) avec une seule paire de pôles ($p_p=1$).

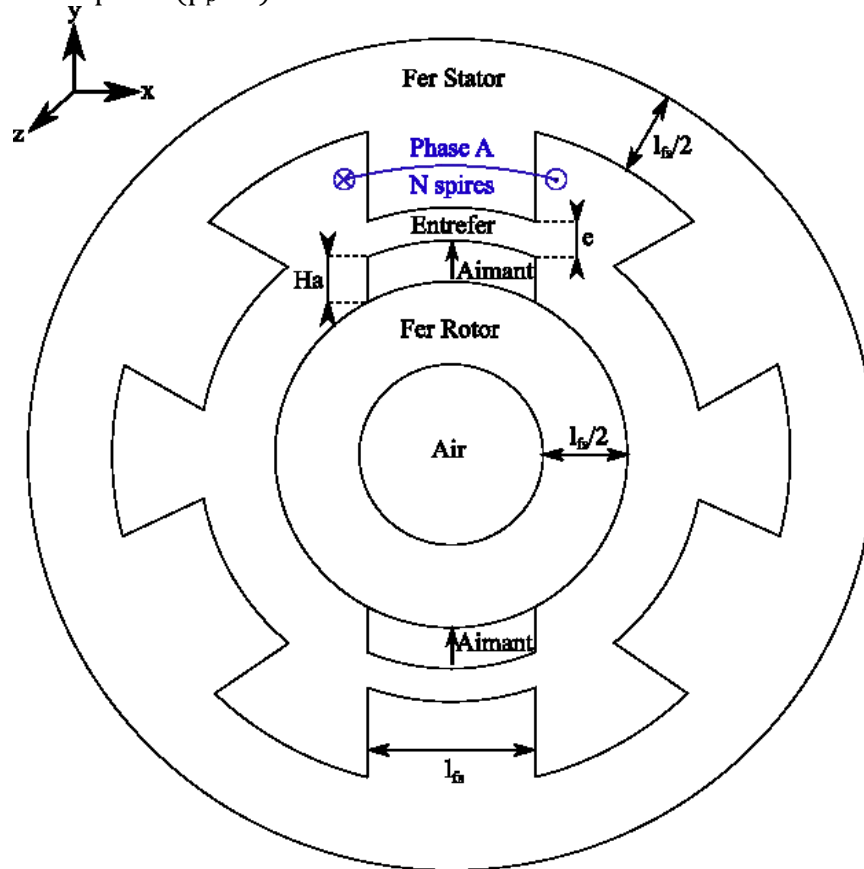


Figure 14 – Représentation schématique de l'actionneur synchrone brushless

Les paramètres géométriques du moteur sont les suivants :

e	Longueur de l'entrefer [m]
H _a	Hauteur de l'aimant [m]
l _{fs}	Largeur de la dent au stator, équivalente à la largeur de l'aimant [m]
L _{cmfs}	Longueur totale des lignes de champ magnétique dans le stator [m]
L _{cmfr}	Longueur totale des lignes de champ magnétique dans le rotor [m]
L _a	Longueur active. Longueur de la partie 3D (axe z), dimension dans l'axe perpendiculaire à la figure [m]
N	Nombre de spires total de la phase A
I	Le courant qui traverse la phase A

Les paramètres magnétiques des matériaux composant le moteur sont :

μ_0	Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [\text{kg m A}^{-2} \text{s}^{-2}]$
μ_{rfs}	Perméabilité relative du fer au stator
μ_{rfr}	Perméabilité relative du fer au rotor
μ_{ra}	Perméabilité relative de l'aimant $\mu_{ra} = 1$

Les grandeurs magnétiques des matériaux composant le moteur sont :

B_a, B_r, H_a	L'induction magnétique, l'induction rémanente et le champ magnétique des aimants permanents
B_e, H_e	L'induction magnétique et le champ magnétique dans l'entrefer
B_{fs}, H_{fs}	L'induction magnétique et le champ magnétique dans le fer stator
B_{fr}, H_{fr}	L'induction magnétique et le champ magnétique dans le fer rotor

La relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique dans le cas d'un aimant s'écrit :

$$B_a = \mu_0 H_a + B_r$$

Question 27 - Quelles sont les hypothèses liées à un modèle magnétostatique ?

Dans la suite nous utiliserons les grandeurs liées au champ magnétique H [A/m], à l'induction magnétique B [T], au flux par spire φ [Wb] et au flux total sur toutes les spires d'une phase Φ [Wb].

Question 28 - Comment s'écrit le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale avec le champ magnétique H ?

Avec un courant dans la phase A nul, et les aimants permanents ayant une induction rémanente B_r , une simulation par la méthode des éléments finis a été réalisée, figure 15.

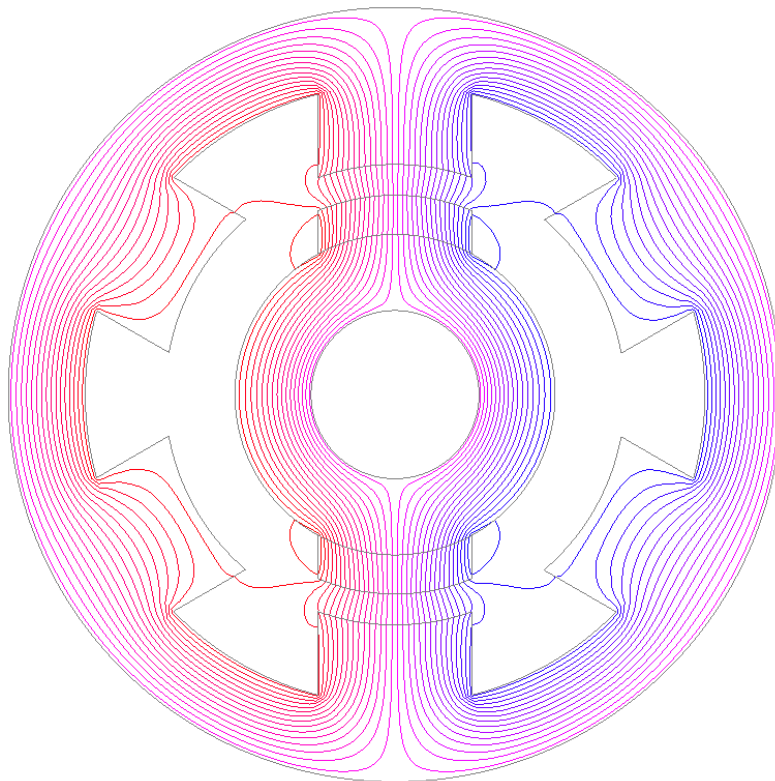


Figure 15 – Représentation des lignes d'induction matgnétique de l'actionneur synchrone brushless

Dans cette simulation, les lignes d'induction magnétique traversant le stator, l'entrefer, les aimants et le rotor sont considérées comme les lignes d'induction magnétique principales. Ce sont elles qui participent à la conversion d'énergie.

Les lignes d'induction qui ne passent pas par l'entrefer sont considérées comme des lignes d'induction de fuite. Elles ne participent pas à la conversion d'énergie et ne seront donc pas considérées pour la suite du sujet.

Question 29 - A partir de la figure 14 et de la répartition des lignes d'induction magnétique, figure 15, proposer un contour d'Ampère qui traverse le stator, l'entrefer, les aimants et le rotor et appliquer le théorème d'Ampère sur ce contour.

Question 30 - Ecrire l'équation de conservation du flux magnétique. Dans la suite, nous considérerons que les sections de passage du flux dans les aimants, l'entrefer, le fer stator et rotor sont égales.

Question 31 - Ecrire les relations entre l'induction magnétique et le champ magnétique dans le cas du fer stator, fer rotor, entrefer et les aimants.

Question 32 - A partir des questions précédentes déterminer l'induction magnétique dans l'entrefer en fonction des paramètres de la machine et de l'induction rémanente des aimants permanents. En déduire l'expression du flux total vu par la phase A (le flux qui traverse toutes les spires de la phase).

Question 33 - Tracer l'allure du flux maximal en fonction de la hauteur de l'aimant a.

Dans la plupart des applications, le volume d'aimant cherche à être réduit au maximum pour des raisons d'approvisionnement et de raréfaction des terres rares nécessaires à la fabrication des aimants permanents.

3- Modèle thermique d'une machine brushless

Dans un premier temps, nous considérons un barreau métallique de section S et de longueur infinitésimale dx , figure 16. Nous allons étudier la conduction thermique au sein de ce barreau. La convection et le rayonnement seront négligés. Une densité de flux thermique j_{th} [$W.m^{-2}$] traverse la surface en x et en $x+dx$. Toutes les grandeurs ne dépendent que de x et du temps t . Soit K [$W.m^{-1}.K^{-1}$] la conductivité thermique du matériau.

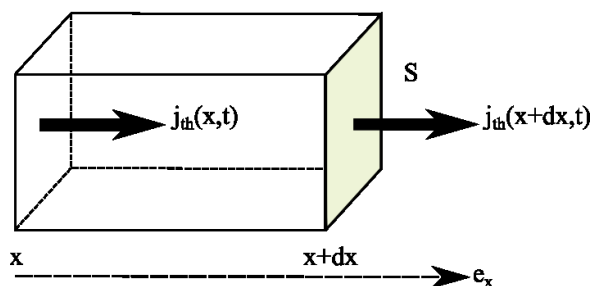


Figure 16 - Représentation d'un élément élémentaire de longueur dx

Question 33 - Ecrire la loi de Fourier de la thermique liant la densité de flux thermique et la température $T(x,t)$.

Nous proposons d'appliquer le premier principe de la thermodynamique au barreau. Nous supposons qu'il n'y a aucun apport de travail externe.

Question 34 - Ecrire la variation d'énergie calorifique en entrée $\delta Q(x, t)$ et en sortie $\delta Q(x + dx, t)$ en fonction de la densité de flux thermique.

Question 35 - Ecrire la variation d'énergie interne dans le barreau. On définit C [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] la capacité calorifique isochore du matériau.

Question 36 - Dédire des questions précédentes que l'équation vérifiée par la température s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho_{th} C}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec ρ_{th} la masse volumique du matériau.

Question 37 - Résoudre l'équation aux dérivées partielles en régime statique pour une température $T(x) = T_{in}$ et $T(x+dx) = T_{out}$. En déduire la relation entre le flux thermique J_{th} [W] et la température T . Par analogie avec l'électricité, mettre cette relation sous la forme :

$$\Delta T = R_{th} J_{th}$$

Avec R_{th} la résistance thermique du matériau. Cette relation permet d'obtenir un schéma électrique équivalent où ΔT joue le rôle d'une tension et J_{th} le rôle d'un courant.

Dans la suite, nous proposons d'étudier le transfert thermique au sein d'une encoche d'une phase électrique. Une encoche est composée des fils de cuivre qui conduisent le courant électrique mais qui génère également des pertes par effet Joule. Ces fils de cuivre sont recouverts d'une couche fine d'isolant et de l'air entre les différents fils de cuivre. Les bords de l'encoche correspondent à l'interface entre l'encoche et le fer au stator. Les pertes par effet Joule vont donc vouloir être extraites des conducteurs de cuivre vers le stator (puis vers l'extérieur).

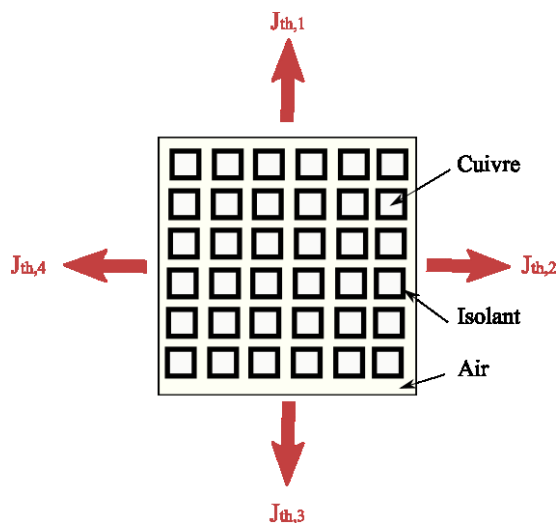


Figure 17 - Schéma d'une encoche avec des conducteurs rectangulaires

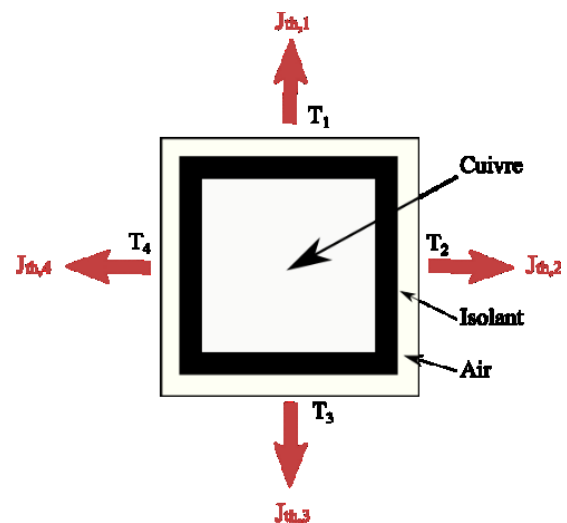


Figure 18 - Schéma d'une encoche avec un seul conducteur équivalent et rectangulaire

Pour commencer l'étude, nous allons considérer une approximation de l'encoche. La forme des conducteurs est carrée (pour maximiser le remplissage des encoches). Et les dimensions du conducteur sont obtenues par équivalence avec toutes les dimensions de tous les conducteurs, figure 18.

Les paramètres de l'encoche simplifiée sont alors :

L_e	Largeur de l'encoche (encoche carrée)
$e_{i,eq}$	Epaisseur équivalente de l'isolant
K_i	Coefficient de conduction thermique de l'isolant
$L_{c,eq}$	Largeur équivalente du fil de cuivre (fil carré)
K_c	Coefficient de conduction thermique du fil de cuivre
$e_{air,eq}$	Epaisseur équivalente de la couche d'air
K_{air}	Coefficient de conduction thermique de l'air
L_a	Longueur active. Longueur de la partie 3D, dimension dans l'axe perpendiculaire à la figure [m]. Cette longueur est identique à celle définie pour la partie magnétique.
N	Nombre de spires total dans l'encoche
J_{PJ}	Pertes par effet Joule totales dans l'encoche [W] (pour tous les conducteurs)

Question 38 - Proposer un schéma thermique à partir de résistances thermiques équivalentes (analogie avec les circuits électriques) de l'encoche simplifiée.

Les températures T_1, T_2, T_3, T_4 et les pertes par effet Joule J_{PJ} sont connues.

Question 39 - Mettre le système d'équations du schéma thermique équivalent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -R_{eq} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -R_{eq} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -R_{eq} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R_{eq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_c \\ J_{th,1} \\ J_{th,2} \\ J_{th,3} \\ J_{th,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{PJ} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}$$

Avec R_{eq} la résistance thermique équivalente à l'ensemble cuivre, isolant et air et T_c la température au centre du cuivre.

Pour résoudre le système linéaire, nous proposons de coder un algorithme de pivot de Gauss.

Question 40 - Calculer le déterminant de la matrice du système. La matrice est-elle inversible ?

Question 41 - Tracer l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss.

Pour coder l'algorithme du pivot de Gauss avec le langage Python, nous proposons d'utiliser la bibliothèque numpy appelée par : **import numpy as np**

Un vecteur est donc défini comme :

```
#####
#
# Load des modules nécessaires
#
#####

import numpy as np

#####
#
# Exemple d'utilisation de vecteurs / matrices
#
#####

VECTEUR = np.array([1, 2, 3], float)

MATRICE = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]], float)
```

La méthodologie employée pour l'écriture du programme est un découpage en sous fonctions élémentaires.

Question 42 - Coder la fonction **cherche_pivot(MATRICE, i)** qui recherche le meilleur pivot pour la i-ème variable dans les lignes suivant la ligne courante. Retourne l'indice de la ligne du pivot.

Question 43 - Coder la fonction **echange_lignes(MATRICE, i, j)** qui échange les lignes i et j dans la matrice.

Question 44 - Coder la fonction **transvection(MATRICE, k, i, alpha)** qui transvecte la ligne k par la ligne i et le coefficient ALPHA.

Question 45 - Coder l'algorithme général.

Question 46 - Proposer une méthode d'homogénéisation permettant de passer de l'encoche réelle à l'encoche approchée.

Conclusion

Question 47 - Faites ressortir trois points importants de cette étude.

--- Fin du sujet ---

Annexe Python

Rappels des syntaxes en Python et Numpy :

Le module numpy importé dans python permet de réaliser des opérations sur les tableaux (et matrices). Les indices de ces tableaux commencent à 0.

Fonction à réaliser	Syntaxe Python
Importation du module Numpy et de ses fonctions	<code>import numpy as np</code>
Définition d'un vecteur	<code>VECTEUR = np.array([1, 2, 3], float)</code>
Sélection de l'indice i d'un vecteur	<code>VECTEUR[i]</code>
Définition d'une matrice	<code>MATRICE = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]], float)</code>
Définition d'une matrice de 0 de taille A, B	<code>np.zeros((A, B))</code>
Sélection de l'élément ligne = i, colonne = j de la matrice	<code>MATRICE[i, j]</code>
Sélection des N éléments d'une colonne de la matrice	<code>MATRICE[:, 0:N-1]</code>
Taille d'une matrice	<code>(ligne, colonne) = np.shape(MATRICE)</code>
Produit matrice-vecteur	<code>np.dot(MATRICE, VECTEUR)</code>
Boucle for	<code>for iteration in range(N) :</code> <code>instruction</code>
Condition if	<code>if condition :</code> <code>instruction_A</code> <code>else :</code> <code>instruction_B</code>

Documentations :

Photos :

<https://www.redbull.com/my-en/aerial-video-photos-of-oracle-team-usa>
<https://www.thetimes.co.uk/article/larry-ellison-launches-sailgp-to-rival-americas-cup-rwg5jjcj7>
<http://www.morrellmelvin.com/>
<https://foils.wordpress.com/2016/07/19/foils-en-l-2-0-reflexions/>
<https://www.printedmotorworks.com/brushless-pancake-motors/>

Sujet réalisé à partir des documents suivants :

Morrelli&Melvin Superfoiler Design Intro
Conception d'un système de stabilisation de vol de catamaran classe C – Enrique Delgado Rodriguez Thibault Martin
On the stability of racing sailing boats with foils – Philippe Destuynder & Caroline Fabre