Sujet d'étude 1

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

3. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2^n}.$$

4. La suite (u_n) admet-elle une limite?

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Sujet d'étude 2

Problème 1 *Les feux de l'amour*

Dans ce problème, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des homme et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Définissons la relation «être amoureux»: pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, notons $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$. Ainsi $h \not\heartsuit f$ signifiera que h n'aime pas f.

À titre d'exemple, exprimons la phrase «chaque homme est amoureux d'une femme». Nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f. Cela s'écrit:

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$$

On rappelle qu'en mathématique, «une» signifie «au moins une», et non pas «exactement une».

Dans les exercices qui suivent, il y a généralement plusieurs réponses possibles. Dès que la réponse n'est pas directement évidente, expliquez-la. Par ailleurs, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

Partie A Thème

Écrire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

A1. Tous les hommes aiment toutes les femmes.

A2. Chaque femme aime un unique homme.

A3. Certaines femmes aiment deux hommes.

A4. Il existe une femme amoureuse d'elle-même.

A5. Certains hommes aiment un homme et une femme.

A6. Tout le monde aime tout le monde.

Partie B Version

Que signifient, dans un français naturel, les assertions suivantes?

B1. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f.$

B2. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$

B3. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h.$

B4. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h).$

B5. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \not\heartsuit h).$

B6. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F} h \heartsuit f) \text{ et } (\exists f \in \mathcal{F}, f \heartsuit h).$

Partie C Négations

On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny, et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale (B, J, M, D).

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes, puis écrire la phrase et sa négation à l'aide de quantificateurs.

C1. Brenda aime Mike et Dick.

C2. Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.

C3. Jenny n'aime aucun homme.

C4. Brenda aime une femme.

C5. Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

C6. Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Jenny.

Indication. Dans cet partie, écrire la phrase en quantificateurs vous aidera à écrire la négation. En effet, écrire la négation d'une phrase en quantificateurs est un procédé purement mécanique et facile à retenir (remplacer les $\forall$ par des $\exists$, etc…).

Partie D Implications

D1. Traduire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

(a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.
(b) Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.
(c) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.
(d) Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.
Vous êtes libre du sens précis que vous donnerez au mot «homosexuel» mais vous l'expliquerez dans votre réponse.

D2. Que signifient les assertions suivantes?

(a) $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \implies M \heartsuit f$.
(b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \implies (\forall f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f)$.
(c) $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \implies J \not\heartsuit h$.
(d) $\forall h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \implies h = M$.
(e) $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.
(f) $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.

Partie E Négation d'implication

Écrire la négation des assertions de la partie 4.

Sujet d'étude 3

Problème 1

On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$. On considère les fonctions définies sur E par

$$f_1 : x \mapsto 2 \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}; \qquad f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; \qquad f_3 : x \mapsto -\arctan \frac{2x}{1-x^2}.$$

1. Calculer $\arcsin(\sin \alpha)$, $\arccos(\cos \alpha)$ et $\arctan(\tan \alpha)$ dans les cas suivants

(a) $\alpha = \frac{59}{5}\pi$;

(b) $\alpha = \frac{84}{5}\pi$;

(c) $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Votre calculatrice a-t-elle l'air d'accord ?

2. Calculer $\arccos(\cos u)$, $\arcsin(\sin u)$ et $\arctan(\tan u)$ pour

(a) $u \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$;

(b) $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$;

(c) $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

(d) $u \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Vérifiez vos formules sur des exemples simples.

3. Ici ϕ est un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que $\cos 2\phi = \dfrac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(b) Montrer de même que $\sin 2\phi = \dfrac{2\tan\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(c) Montrer enfin que $\tan 2\phi = \dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}$.

Dans la suite, on pose $\phi = \arctan x$ *avec* $x \in E$.

4. Calculer $g_1(\phi) = f_1(\tan\phi)$ en utilisant la question **2.**.

5. Calculer, de même $g_2(\phi) = f_2(\tan\phi)$.

6. Calculer, enfin $g_3(\phi) = f_3(\tan\phi)$.

7. Soit $h : x \mapsto f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. On pose $g(\phi) = g_1(\phi) + g_2(\phi) + g_3(\phi)$. En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression de $g(\phi)$ sur les intervalles

$$\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[, \quad \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[, \quad \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

En déduire l'expression de h.

8. Faire un beau dessin de la courbe de h.

9. Résoudre l'équation $h(x) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Sujet d'étude 4

Exercice 1

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

Soit f la fonction qui à nombre complexe z associe, lorsque c'est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.

(b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.

3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

4. L'application f est-elle une surjection de D sur $\mathbb{C}$?

5. L'application f est-elle injective ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha. \tag{1}$$

Sujet d'étude 5

Exercice 1

1. Déterminer le signe de la fonction polynomiale

$$p : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x^3+4x+1 \end{array}.$$

Pour cela, on effectuera une étude des variations de p.
On admettra qu'il existe un unique réel $\beta \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right[$ tel que $p(\beta)=0$.

2. Faire une étude complète de la fonction suivante, définies à l'aide de fonctions trigonométriques.

$$f : x \mapsto \frac{\tan x}{1+2\cos x}.$$

On soignera en particulier les points suivants.

(a) Domaines de définition, de dérivabilité.

(b) Réduction du domaine d'étude autant que possible en utilisant la périodicité et les éléments de symétrie du graphe.

(c) Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique.

(d) Dérivée (utiliser la fonction p pour le signe) et tableau de variations.

(e) Représentation graphique.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de minimiser la quantité x^y+y^x, où x et y sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer sa dérivée.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer qu'elle admet un minimum unique, au pont d'abscisse $1/e$ et d'ordonnée $m = e^{-1/e}$.

3. Soient x et y deux réels vérifiant

$$0 < y \leq x < 1.$$

Montrer

$$x^y + y^x \geq m^{y/x} + m\frac{y}{x}. \tag{1}$$

4. Montrer que la fonction $\phi : t \mapsto m^t + mt$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée, ainsi que sa dérivée seconde.

5. Montrer que pour tout $t \in]0,1]$, $m^t + mt > 1$.

6. En déduire

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, x^y+y^x > 1.$$

Sujet d'étude 6

Exercice 1

On considère les matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A Calcul des puissances de M.

A1. Déterminer l'expression de D^n, pour tout entier naturel n non nul.

A2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible, et exprimer P^{-1} sous la forme d'un tableau de nombres.

A3. Calculer le produit $P^{-1}MP$.

A4. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, M^n = PD^nP^{-1}.$$

A5. Écrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

Partie B Suites définie par une relation de récurrence

On considère les suite (u_n), (v_n) et (w_n) définie par

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + 2v_n}{2} \\ w_{n+1} &= \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

B1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n.

B2. En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

B3. À l'aide des résultats obtenus à la question **A5**, déterminer alors l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

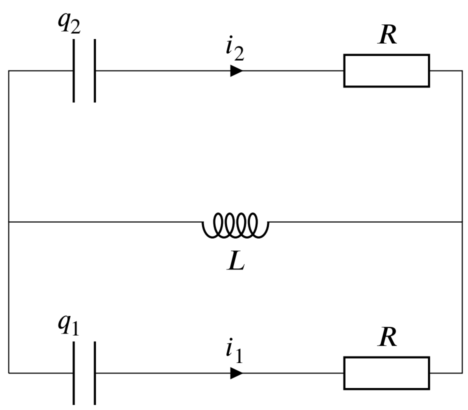
B4. Déterminer la limite des suites (u_n), (v_n) (w_n).

Sujet d'étude 7

Exercice 1 *Deux circuits RLC*

On étudie le circuit électrique suivant. Les deux résistances sont identiques de même que les deux condensateurs. On note R la résistance des résistors, C la capacité des condensateurs, et L l'inductance de la bobine.

Pour tout instant $t \in \mathbb{R}$, on note $q_1(t)$ la chage du premier condensateur, $q_2(t)$ la charge du second condensateur, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les intensités, comme indiqué sur le schéma.



À l'instant initial ($t = 0$) les intensités dans le circuit sont nulles. Pour ne pas rajouter de notations, on notera juste $q_1(0)$ et $q_2(0)$ les charges initiales des condensateurs.

Toute notation supplémentaire devra être clairement définie.

1. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} q_2(t) + CRq_2'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) &= 0 \\ q_1(t) + CRq_1'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) &= 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la matrice A telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_2'(t) \\ q_2''(t) \\ q_1'(t) \\ q_1''(t) \end{pmatrix}.$$

On fixe A dans la suite.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Prouver que P est inversible, et calculer P^{-1}.

4. Calculer $P^{-1}AP$.

5. Déterminer deux fonctions f et g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P^{-1} \begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix},$$

et démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -R & -2L & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}.$$

6. Écrire les équations obtenues sur f et g.

7. Dans le cas où $R = 0$, déterminer q_1 et q_2.

Indication : N'oubliez pas les conditions initiales.

8. *Dans la suite, on suppose* $R \neq 0$.

À quelle condition le système sera-t-il en régime pseudo-périodique?

On suppose qu'on est dans cette situation pour la fin du problème.

9. Déterminer f et g. On pourra noter $\omega = \dfrac{\sqrt{8LC - R^2C^2}}{4LC}$.

10. En déduire q_1 et q_2.

11. Quelle est la limite en $+\infty$ de q_1 et q_2? S'y attendait-on?

12. Que constate-t-on lorsque les deux condensateurs sont initialement à la même charge? Était-ce prévisible?

Sujet d'étude 8

Problème 1 *Théorème de Cesàro, début d'un sujet de la Banque PT*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

(d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.

Sujet d'étude 9

Problème 1 *Polynômes de Tchebychev*

Dans tout le problème, et pour tout polynôme P à coefficients réels, on note $M(P)$ le maximum de la fonction $x \mapsto |P(x)|$ sur le segment $[-1, +1]$, c'est-à-dire

$$M(P) = \max \{ \, |P(x)| \mid x \in [-1, 1] \, \} .$$

On se propose d'étudier, la famille de polynômes définie par récurrence par $T_0 = 1$, $T_1 = X$, puis pour $n \geq 1$ par

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}. \tag{1}$$

Dans toute la suite, on pourra identifier polynôme et fonction polynômiale.

Partie A Étude des polynômes T_n

A1. Calculer T_n pour $n \leq 4$.

A2. Établir que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que

$$T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

A3. Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

A4. On note T_n sous la forme

$$T_n = \lambda_n \left(X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \cdots \right) .$$

Calculer le coefficient dominant λ_n du polynôme T_n. À l'aide de la relation (1), exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et calculer b_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

Partie B Étude de la fonction T_n sur $]1, +\infty[$ pour $n \geq 1$

B1. Établir que l'application $\phi : u \mapsto \frac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

B2. Pour tout u appartenant à $]1, +\infty[$, on pose

$$x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right).$$

Montrer que

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

B3. En déduire pour $x > 1$ que $T_n(x) > 1$, et montrer, par récurrence, pour $x \geq 1$ l'inégalité

$$T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n.$$

Partie C Étude de la fonction T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \geq 1$

C1. À l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel θ l'égalité

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta). \tag{2}$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

C2. Pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \dots, n\}$, on pose $\alpha_k = \cos \dfrac{(n-k)\pi}{n}$. On remarquera que

$$-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = +1.$$

Calculer $T_n(\alpha_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis prouver que, si x désigne un nombre réel, l'égalité $\left|T_n(x)\right| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si x appartient à l'ensemble $\left\{\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\ \right\}$.

Partie D Équation différentielle vérifiée par T_n pour $n \geq 1$.

D1. En dérivant la relation (2), exprimer $T_n'(\cos\theta)$ en fonction de θ $(0 < \theta < \pi)$.
En déduire pour $n \geq 2$, la valeur de $T_n'(\alpha_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$.
Était-ce prévisible ?
À l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T_n'(1)$ et $T_n'(-1)$.

D2. En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel x de $[-1, +1]$

$$(x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2T_n(x) = 0. \tag{3}$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel x.

D3. Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n-1$. En dérivant j fois la relation (3), établir que

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

D4. En déduire en fonction de n le nombre réel μ_n tel que, pour $1 \leq j \leq n$,

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n . 2^{j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}.$$

Sujet d'étude 10

Problème 1

On considère l'application T définie par

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ & P & \mapsto & (3X+8)P+(X^2-5X)P'-(X^3-X^2)P'' \end{array}.$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Préciser $T(1)$, $T(X)$, $T(X^2)$ et $T(X^3)$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(T(P)) \leq n$.
4. Démontrer que $T(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]$.
5. Dans quel sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ doit-on chercher le noyau de T ? Déterminer $\ker T$. Que peut-on en déduire ?
6. En raisonnant par l'absurde, démontrer que le polynôme X n'admet pas d'antécédent par T.
7. Déterminer V_8, le sous-espace propre de T relativement à la valeur 8, c'est-à-dire l'ensemble de tous les polynômes tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $T(P) = 8P$.
8. On considère l'ensemble V des polynômes P pour lesquels il existe un scalaire λ tel que $T(P) = \lambda P$. Montrer que V contient quatre polynômes normalisés.

Sujet d'étude 11

Problème 1

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On sait que tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique

$$x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle *affinité vectorielle* de base F, de direction G et de rapport α, l'endomorphisme de E défini par

$$f(x) = y + \alpha z.$$

Partie A Généralités

A1. Montrer que la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques (base, direction, rapport).

A2. Décrire l'application f quand $\alpha = 0$ et quand $\alpha = 1$.

A3. On suppose $\alpha \neq 1$, montrer que $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(f - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$.

A4. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors f est bijective et que f^{-1} est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie B Détermination d'une affinité de $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels définis par

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 3y - 2z = 0 \right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\,(1, 1, 1).$$

B1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

B2. Donner la décomposition de tout élément (x, y, z) de E dans $F \oplus G$.

B3. Donner l'expression de l'affinité f de base F, de direction G et de rapport $\alpha = 3$.

Partie C Exemple d'affinité de $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application

$$g : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, 3x - 2y, -3x + 3y + z) \end{array}.$$

C1. Montrer que g est linéaire.

C2. Déterminer l'ensemble $F = \ker(g - \mathrm{Id}_E)$ des vecteurs invariants par g.

C3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$. Montrer que $\ker(g - \alpha\,\mathrm{Id}_E) \neq \{ (0, 0, 0) \}$ pour une unique valeur de α. Préciser cette valeur et déterminer dans ce cas l'ensemble

$$G = \ker(g - \alpha\,\mathrm{Id}_E).$$

C4. Montrer que g est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques. Détailler soigneusement le raisonnement.

Sujet d'étude 12

Exercice 1

On désigne par f la fonction numérique définie par

$$f(x) = 2x - \sin x$$

et on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

Partie A Étude de la fonction f et de sa courbe représentative

A1. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer soigneusement les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

A2. On appelle D_1 et D_2 les droites d'équation respective $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.

Déterminer les points communs à C et D_1, d'une part, à C et D_2 d'autre part. Préciser les tangentes à C en ces points.

A3. Étudier la parité de f. Calculer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe C^+ représentant la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ à la courbe de C^- représentant là restriction de f à $\mathbb{R}_-$?

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe C_0 représentant la restriction de f à $[-\pi, \pi]$ à la courbe C_k représentant là restriction de f à $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$?

A4. Tracer avec précision dans le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ (unité : 2 cm) la courbe C sur l'intervalle $[0, \pi]$. Déterminer et tracer les tangentes au point O et au point A d'abscisse π ; tracer également D_1 et D_2.

Indiquer l'allure de la courbe C sur $[-\pi, 3\pi]$ (sur un autre graphique).

A5. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par l'axe $\left(O, \vec{e_1}\right)$, la courbe C et les droites d'équation respective $x = 0$ et $x = \pi$.

Partie B Étude de l'équation $2x - \sin x = m$

B1. Montrer que f admet une application réciproque g (on ne cherchera pas à calculer g).

Quelles propriétés possède la fonction g ?

Déterminer $g(0)$, $g(2\pi)$, $g(4k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$).

Déterminer $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

Tracer la représentation graphique de g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

B2. Montrer que, pour tout réel m, l'équation $2x - \sin x = m$ admet une solution unique.

B3. On considère l'équation

$$2x - \sin x = 4$$

et on note x_0 sa solution.

Utiliser la courbe C pour avoir une estimation de x_0 à 10^{-1} près.

Partie C Une méthode d'approximation de x_0

C1. On considère la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x).$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 4 \iff x = \phi(x)).$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\phi'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

C2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \phi(u_n). \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|.$$

En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - x_0|.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

C3. Si on suppose que $|u_0 - x_0| \leq 10^{-1}$, combien suffit-il calculer de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-p} près ?

Sujet d'étude 13

Exercice 1

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right).$$

Solution 1

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 2

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(3e^x + e^{-x}\right).$$

Solution 2

$$f(x) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Exercice 3

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right).$$

Solution 3

$$f(x) = \ln 3 + \frac{5}{12}x - \frac{53}{576}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 4

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right).$$

Solution 4

$$f(x) = \ln 2 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{64}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 5

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln(\ln(e+x)).$$

Solution 5

$$f(x) = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e^2}x^2 + \frac{7}{6e^3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Exercice 6

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1+e^x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right).$$

Solution 6

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{17}{96}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 7

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}.$$

Solution 7

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + o\left(x^3\right)\right).$$

Exercice 8

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}.$$

Solution 8

$$f(x) = \frac{1}{e^{1/2}}\left(1 - \frac{x^2}{60} + o\left(x^2\right)\right).$$

Exercice 9

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x^2}.$$

Solution 9

$$\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 10

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Solution 10

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 11

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Solution 11

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 12

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{\ln(2+x)}\right).$$

Solution 12

$$f(x) = e^{\sqrt{\ln 2}} + \frac{e^{\sqrt{\ln 2}}}{4\sqrt{\ln 2}}x - e^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{1}{16\sqrt{\ln 2}} - \frac{1}{32\ln 2} + \frac{1}{32\ln 2\sqrt{\ln 2}}\right)x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 13

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\cos x)^{1/x^2}.$$

Solution 13

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{160}x^4\right) + o\left(x^4\right).$$

À moins que ce soit un $-\frac{3}{80}x^4$…

Exercice 14

Former le développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{x^2 + \cos x}\right).$$

Solution 14

$$e\left(1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + \frac{11}{5760}x^6\right) + o\left(x^7\right).$$

Exercice 15

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\cos x}.$$

Solution 15

$$f(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 16

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}.$$

Solution 16

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^5\right).$$

Exercice 17

Former le développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

Solution 17

$$e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6\right) + o\left(x^6\right).$$

Exercice 18

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \left(e^{\sin x} - 1\right)\left(\operatorname{ch} x - \sqrt{\cos x}\right).$$

Solution 18

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{96}x^5 \ + o\left(x^5\right).$$

Exercice 19

Former le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (e^x - 1 - \ln(1+x))(\sin x - \operatorname{sh} x).$$

Solution 19

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + o\left(x^8\right).$$

Exercice 20

Former le développement limité à l'ordre 8 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\tan x)^3 \left((\cos x)^{x^2} - 1\right).$$

Solution 20

$$-\frac{1}{2}x^7 + o\left(x^8\right).$$

Exercice 21

Former le développement limité à l'ordre 16 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\operatorname{sh} x - \sin x)^2 (\tan x - \tanh x)^3.$$

Solution 21

$$f(x) = \frac{8}{243}x^{15} + o\left(x^{16}\right).$$

Exercice 22

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/4$ de

$$f(x) = \tan x.$$

Solution 22

Avec $h = x - \frac{\pi}{4}$,

$$f(x) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o\left(h^3\right).$$

Exercice 23

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ de

$$f(x) = \arctan x.$$

Solution 23

Avec $h = x - \frac{\pi}{4}$,

$$f(x) = \arctan\frac{\pi}{4} + \frac{16}{16+\pi^2}h - \frac{64\pi}{\left(16+\pi^2\right)^2}h^2 + o\left(h^2\right).$$

Exercice 24

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

Solution 24

Avec $h = x - 1$,

$$f(x) = \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)h + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)h^2 + \left(\frac{43}{24} - 4\ln 2\right)h^3 + o\left(h^3\right).$$

Exercice 25

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de

$$f(x) = x^x.$$

Solution 25

Avec $h = x - 2$,

$$f(x) = 4 + 4(1+\ln 2)h + \left(2(1+\ln 2)^2 + 1\right)h^2 + \left(\frac{2}{3}(1+\ln 2)^3 + (1+\ln 2) - \frac{1}{6}\right)h^3 + o\left(h^3\right).$$

Exercice 26

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/4$ de

$$f(x) = \sqrt{\tan x}.$$

Solution 26

Avec $h = x - \frac{\pi}{4}$,

$$f(x) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o\left(h^3\right).$$

Exercice 27

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/3$ de

$$f(x) = \sin(\pi \cos x).$$

Solution 27

Avec $h = x - \frac{\pi}{3}$,

$$f(x) = 1 - \frac{3\pi^2}{8}h^2 + o\left(h^2\right).$$

Exercice 28

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2π de

$$f(x) = \sin\sqrt{x^2 - 3\pi^2}.$$

Solution 28

Avec $h = x - 2\pi$,

$$f(x) = -2h + \frac{3}{2\pi}h^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{\pi^2}\right)h^3 + o\left(h^3\right).$$

Exercice 29

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $\pi/4$ de

$$f(x) = (\tan x)^{\cos 2x}.$$

Solution 29

Avec $h = x - \pi/4$,

$$f(x) = 1 - 4h^2 + 8h^4 + o\left(h^5\right).$$

Exercice 30

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/6$ de

$$f(x) = e^{\sin x}.$$

Solution 30

Avec $h = x - \pi/6$,

$$f(x) = \sqrt{e}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{7\sqrt{3}}{48}h^3\right) + o\left(h^3\right).$$

Exercice 31

Former le développement limité à l'ordre 100 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Solution 31

$$f(x) = x - \frac{1}{100!}x^{100} + o\left(x^{100}\right).$$

Exercice 32

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}.$$

Solution 32

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{12}x - \frac{17\sqrt{2}}{288}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 33

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Solution 33

$$f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Exercice 34

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\pi/3$ de

$$f(x) = \ln(\sin x).$$

Solution 34

Avec $h = x - \pi/3$,

$$f(x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}h^3 - \frac{2}{9}h^4 + o\left(h^4\right).$$

Sujet d'étude 14

Exercice 1

Problème d'algèbre du concours Blanc PTSI 2017

Dans la suite du problème, on considère les matrices

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note

- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B.

On définit la suite de matrices $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante

$$\begin{cases} U_0 & \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} & = AU_n + B. \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$L = AL + B.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = L + A^n \left(U_0 - L\right).$$

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)^T$ appartient à l'image de b si, et seulement si

$$-x + y + z = 0$$

puis montrer que

$$\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - a).$$

3. Donner une base du noyau de b puis montrer que $\ker(b) = \ker(\mathrm{Id} - a)$.

4. On pose $f_2 = (1, 0, 1)^T$ et $f_3 = (0, -1, 1)$. Déterminer un vecteur f_1 de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est 1, tel que la famille $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de a dans la base $\boldsymbol{f}$ soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice B' de l'endomorphisme b dans la base $\boldsymbol{f}$.

5. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\boldsymbol{f}$. Expliciter la matrice P sous forme d'un tableau de nombres et calculer P^{-1}.

6. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

7. En écrivant convenablement D comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n,

$$A^n = E + \frac{1}{2^n}F + \frac{1}{3^n}G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

8. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$, telle que

$$L' = DL' + B'.$$

9. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie

$$L = AL + B.$$

10. Établir que $EL = 0$.

11. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Sujet d'étude 15

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels: les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.

Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien.

On considère les événements suivants:

- E : «un appel concerne le petit électroménager.»
- A : «un appel concerne les appareils audio-vidéo».
- T : «le problème posé se résout directement par téléphone».

Des études ont permis d'établir les résultats suivants:

(H_1) Le standard reçoit 20% d'appels concernant le petit électroménager et 80% d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de 0.5.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio-vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de 0.375.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).

(b) Calculer $P(T)$.

(c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone, calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.

2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant du petit électroménager.

(a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.

(b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.

- Donner la loi de Y.
- Déterminer $P(Y \leq 252)$.