Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 25 septembre 2021, 8 : 00 – 12 : 00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel.
2. Quand dit-on qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée ?
3. Énoncé et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. Préciser le cas d'égalité.
4. Montrer que l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini.

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Exercice 3

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x + m$.

Exercice 4

Soit $k \in]0, +\infty[$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Exercice 5

Exprimer u_n en fonction de n pour la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1.$$

Exercice 6

Résoudre les système suivants.

1. $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ x \quad + z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$

Exercice 7
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Exercice 8 *Vrai ou Faux ?*
Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Les nombres a, b, c, d étant des éléments de $\mathbb{Z}$,

1. Si a divise b et a divise c, alors a divise $2b + 3c$.

2. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.

3. L'équation $3x - 21y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

4. Si $k \in \mathbb{Z}$ et $ka \equiv kb \pmod{n}$, alors $a \equiv b \pmod{n}$.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, et k un entier premier tel que $k \;\Big|\; (a+b)$ et $k \;\Big|\; ab$, alors $k \;\Big|\; a$.

Exercice 9
Montre que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Exercice 10
Calculer par l'algorithme d'Euclide $\operatorname{pgcd}(18480, 9828)$.

Exercice 11
On considère l'équation

$$29x - 11y = 1 \tag{1}$$

dans laquelle les inconnues x et y appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. En déduire une solution particulière de l'équation (1). Donner la solution générale de cette équation.

2. On considère maintenant l'équation

$$29x - 11y = 5. \tag{2}$$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 12
15 pirates chinois se partagent un butin constitué de pièces d'or. Mais une fois le partage (équitable) effectué, il reste 3 pièces. Que va-t-on en faire ? La discussion s'anime. Bilan : 8 morts. Les 7 survivants recommencent le partage, et il reste cette fois ci 2 pièce ! Nouvelle bagarre à l'issue de laquelle il ne reste que 4 pirates. Heureusement, ils peuvent cette fois ci se partager les pièces sans qu'il n'en reste aucune.

Sachant que 32 Tsing-Tao (bière chinoise) coûtent une pièce d'or, combien (au minimum) de Tsing-Tao pourra boire chaque survivant ?

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 22 octobre 2021, $8:00 - 12:00$

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Question de Cours.

1. Définir la contraposée de l'implication $P \implies Q$.

2. À l'aide d'un exemple, montrer que l'on ne peut pas toujours permuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une assertion.

3. Quand dit-on que A est une partie de B ?

4. Donner la définition d'une application injective.

5. Donner la définition d'une application surjective.

6. Donner la définition d'une application bijective.

7. Donner un exemple de fonction injective et non surjective.

8. Donner un exemple de fonction surjective et non injective.

9. Donner la formule calculant la somme d'une progression arithmétique.

10. Donner la formule calculant la somme d'une progression géométrique.

11. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

12. Définir la fonction arccos et donner la représentation graphique de sa courbe.

13. Compléter les formules suivantes:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
- $\tan(\pi - x) =$
- $\sin(x + y) =$
- $\sin(x)\cos(y) =$
- $\cos(p) - \cos(q) =$

14. Donner les formules d'Euler.

15. Donner la formule de De Moivre.

Les définitions et formules demandées doivent (évidement) être précises et complètes.

Exercice 1

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \to &]-\infty,-2[\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{3-x} \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. (question de cours). Définir l'image directe de A par f.
2. (question de cours). Définir l'image réciproque de B par f.
3. Démontrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Démontrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
5. Démontrer que si f est injective, alors $A = f^{-1}(f(A))$.
6. Démontrer que si f est surjective, alors $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.
7. Dans cette question, on suppose que $E = F = \{ -1, 0, 1 \}$ et que $f : E \to F$ est l'application qui à x associe x^2.

   L'application f est-elle injective? Est-elle surjective?

   Soit $A = \{ 1 \}$ et $B = \{ -1, 1 \}$. Écrire en extension les ensembles
   $$f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f\left(f^{-1}(B)\right).$$

Exercice 3

Soient A, B, C trois ensembles et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 4

Calculer les nombres suivants:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1, \qquad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h,$$

Exercice 5

Démontrer par récurrence l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 6

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} i x^{i+j}.$$

Exercice 7

L'objectif du problème est d'étudier la somme S_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

1. Donner, sans démonstration, l'expression de $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$,

$$0 < \arctan(x+1) - \arctan(x) < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x). \tag{2}$$

4. En déduire la valeur de S_n. Puis, déterminer la limite éventuelle de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\phi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.
2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.
   (a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.
   (b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.
4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution d'une équation du second degré.
3. Déterminer l'expression exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Lycée César Baggio — 2021/2022 PTSI2
Devoir de contrôle de mathématiques
Mardi 14 décembre 2021, $13:00 - 17:00$

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. Étudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f est tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal (unité 5 cm).

3. Calculer l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. (On pourra faire une intégration par parties).

4. Pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$g(x) = f(\sin x).$$

Montrer que la fonction g est une primitive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos^2(x)$ en linéarisant son expression.

2. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t \mapsto \sqrt{t}$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t\,\mathrm{d}t$.

4. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x$.

Problème 3

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A Étude de la matrice A

A1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à préciser.

A2. (a) Calculer $A - I_3$, $A - 3I_3$ puis $\left(A - 3I_3\right)^2$. Vérifier que $\left(A - I_3\right)\left(A - 3I_3\right)^2 = \mathbf{0}_3$.

(b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{9}A^2 + xA + yI_3$ avec (x, y) réels à préciser.

A3. On note $T = P^{-1}AP$ et on admet que $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose également $J = T - D$.

(a) La matrice J est-elle inversible ?

(b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $J^k = \mathbf{0}_3$.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer

$$\forall n \geq 2, T^n = D^n + n\, J\, D^{n-1}.$$

En déduire l'écriture de T^n pour $n \geq 2$.

(d) Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, A^n = P\, T^n\, P^{-1}.$$

(e) Calculer PT^n puis donner l'écriture de A^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie B Étude d'une famille de suites

On considère les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(v_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(w_n\right)_{n\geq 0}$ définies par

$$\left(u_0, v_0, w_0\right) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n & +v_n & +w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & +2v_n & +w_n \\ w_{n+1} & = & & & 3w_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

B1. Déterminer $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = BX_n.$$

B2. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = B^n X_0.$$

B3. À l'aide de ce qui précède, déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de α, β, γ et n.

Partie C Commutant de la matrice A

- On utilise dans cette partie la matrice T définie à la partie **A3** par $T = P^{-1}AP$; on a donc $PTP^{-1} = A$.
- On note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$C(A) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \right\}.$$

De même, on pose

$$C(T) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TM = MT \right\}.$$

C1. Montrer

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xI_3 + yT + zT^2 \in C(T).$$

C2. Réciproquement, soit $M \in C(T)$ avec $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

(a) Calculer TM et MT.

(b) En déduire que M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = xI_3 + yT + zT^2.$$

C3. Justifier l'égalité

$$C(T) = \left\{ xI_3 + yT + zT^2 \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

C4. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Démontrer que $M \in C(A)$ si, et seulement si $N \in C(T)$.

C5. Déduire de tout ce qui précède que

$$C(A) = \left\{ \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \;\middle|\; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = \sqrt{1+t^2}. \qquad (E)$$

1. Déterminer la solution $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette équation (E) telle que $f_m(1) = \sqrt{2}m$.
2. Écrire une équation de la tangente T_m au point A de coordonnées $(1, \sqrt{2}m)$, à Γ_m la courbe représentative de f_m.
3. Prouver que lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, toutes ces tangentes T_m sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 5

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0. \qquad (H)$$

2. Trouver une solution $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{it}. \qquad (E_1)$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\cos(t) - \sin(t). \qquad (E)$$

4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.