

Chapter 43 Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 43.1

On lance deux dés équilibré à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 43.2

On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X . Établir la loi de X .

Exercice 43.5

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.

On note X la variable aléatoire «nombre d'ampoules défectueuses». Déterminer la loi de X .

Exercice 43.7

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On en tire n une à une ($n \leq N$). On étudie d'abord le cas avec remise, puis le cas sans remise.

Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $P(X \geq x)$ pour tout $x \in \llbracket 1, N \rrbracket$. En déduire la loi de X .
2. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in \llbracket 1, N \rrbracket$. En déduire la loi de Y .

Exercice 43.8

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
5. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Exercice 43.9

De l'autre côté du miroir¹, les lapins sont soit blancs, soit roses. La probabilité pour un lapin d'être rose est $p = 0.1$.

1. Alice rencontre deux lapins au hasard de sa promenade aléatoire. On note T le nombre de lapins roses. Établir la loi de probabilité de T .
2. Alice attrape sept lapins au hasard. On note X le nombre de lapins roses. Établir la loi de probabilité de X .
3. Alice place ces sept lapins dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de lapins roses parmi ces deux lapins. Établir la loi de probabilité de Y .
4. Elle installe ces deux lapins dans une cage. Sachant que si les lapins sont de sexes différents, ils auront des lapereaux blancs s'ils sont tous les deux blancs, des lapereaux roses sinon. Calculer la probabilité pour qu'il y ait des lapereaux roses.

Exercice 43.11

On retapisse la flopée de louchébems aux layoncrems qu'ils se carrent sur chaque loche. La proba de larguer un layoncrem est la même pour chaque loche. On dégauchit m_2 louchébems qui ont encore deux layoncrems à leur loches et m_1 qui en ont paumé un.

Soit $p = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, coller une estimation de la proportion de louchébems qui ont paumé leurs deux layoncrems.

Exercice 43.12

On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0.5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0.4 et 0.6 (bornes incluses) ?
4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5 - \frac{a}{10}, 0.5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

¹cf. Lewis Carroll.

Moments d'une variable aléatoire finie

Exercice 43.13

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2.
Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 43.14

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k . On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire réelle associée au lancer de dé.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 43.15

Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc quinze dromadaires, dix chameaux et cinq lamas. Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard.

Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses photographiées.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Indication : Le chameau (chameau de Bactriane) a deux bosses, le dromadaire (chameau d'Arabie) a une bosse et le lama n'a pas de bosse.

Exercice 43.16

Marguerite élève huit poules, dont une ne possédant qu'une patte, et six canes. Son panier contient un œuf de chacune de ses pensionnaires. Elle en prend quatre au hasard pour faire une omelette avec les trois cèpes qu'elle a ramassés au lever du soleil. Soit X le nombre de pattes des poules impliquées dans la production des œufs de l'omelette.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 43.17

Dans le restaurant de Marco, on sert le café accompagné de deux sucres. La moitié des clients boivent leur café sans sucre, un tiers y plongent un seul sucre et les autres deux. À la table numéro 7, les trois clients ont commandé un café chacun.

Soit X le nombre de sucres consommés à cette table.

Établir la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 43.18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 43.20

Andy est un ivrogne. Quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même. Quand il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. Il est licencié du chantier naval et le soir même il rend ivre chez lui. Il reste au chômage pendant n jours. On note X le nombre de jours de sobriété de cette période.

Calculer $E(X)$.

Exercice 43.21

Ingmar a bricolé un ordinateur avec un processeur 4 bits récupéré sur le système de navigation d'un sous-marin soviétique échoué dans un fjord. Son ami Blaise y a adapté un compilateur Pascal. Dans son premier programme, il déclare une variable I , codée sur 4 bits, à laquelle il n'affecte pas de valeur. Chaque bit se trouve ainsi dans un état aléatoire: 0 avec la probabilité p et 1 avec la probabilité $1 - p$.

On note K la variable aléatoire égale à la valeur de I , en considérant I comme un nombre entier exprimé dans la base 2.

1. Établir la loi de K . Calculer $E(K)$ et $V(K)$.
2. Calculer la probabilité d'avoir un nombre pair.
3. Calculer la probabilité d'avoir un palindrome en base deux.

Exercice 43.23

On fixe un entier naturel non nul n .

Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc... On ajoute donc $k + 1$ boules noires lors de la k -ième obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X .
2. Quelle est la loi de X ?

3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N .

On tire une boule de l'urne et on pose B : «la boule tirée est blanche».

4. Démontrer rigoureusement que $P(B) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Calculer cette somme.

On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k -ème pile, c'est-à-dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc... en doublant à chaque fois le nombre de boules noires *ajoutées*.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X .
7. Calculer $E(N')$.
8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : «la boule tirée est blanche».

Exercice 43.24

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n .

1. Déterminer l'espérance et la variance de S .
2. On suppose $\beta = 1/\alpha$. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$?
3. On suppose que $\alpha = 1 + h$ et $\beta = 1 - h$ pour $h \in]0, 1[$ donné. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$? Que vaut alors $V(S)$?

Exercice 43.26

Un jeu de dés très populaire dans les bars anglais et le *chuck-a-luck*. Il consiste pour la banque à jeter 3 dés. Un joueur peut parier sur n'importe quel résultat compris entre 1 et 6. Si exactement un de ces 3 dés montre le chiffre prévu, le joueur récupère sa mise plus un montant équivalent. Si 2 dés montrent ce résultat, le gain net est de 2 pour 1. Si les 3 dés montrent indiquent le chiffre prévu, le gain net est de 3 pour 1. Si aucun dé ne montre le chiffre choisi par le joueur, ce dernier perd sa mise.

1. Calculer l'espérance de gain lorsque l'enjeu est d'une livre.
2. Quel montant devrait recevoir le joueur si les 3 dés montrent le chiffre prévu pour que le jeu soit *fair* (c'est-à-dire pour que l'espérance de gain soit nulle)?

Exercice 43.28 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) . On suppose que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et on pose

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k) t^k.$$

1. Calculer $G_X(1)$.
2. Exprimer $E(X)$ en fonction de G'_X .
3. Exprimer $V(X)$ en fonction de G''_X .

Exercice 43.29

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que pour tout $c \in [a, b]$,

$$\frac{E(X) - c}{b - c} \leq P(X \leq c) \leq \frac{E(X) - a}{c - a}.$$