Chapter 31 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Exercice 31.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction u_n de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = x^n(1 - x).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction u que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\|u_n - u\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers u sur $[0, 1]$?

Solution 31.1

1. Pour $0 \le x < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0.$$
Pour $x = 1$, on a $u_n(1) = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(1) = 0.$$
Ce qui montre que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in [0, 1], u(x) = 0.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, étudions la fonction $u_n - u = u_n$. Pour $x \in [0, 1]$,
$$u_n'(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n = x^{n-1}\left(n - (n + 1)x\right).$$
Ainsi
   - u_n est croissante sur $[0, n/n + 1]$ de $u_n(0) = 0$ à $u_n(n/n + 1) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,
   - u_n est décroissante sur $[n/n + 1, 1]$ de $u_n(n/n + 1) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ à $u_n(1) = 0$.

   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\|u_n - u\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\|u_n - u\|_\infty \le \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge donc bien uniformément vers u sur $[0, 1]$.

Exercice 31.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n}x.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

Solution 31.2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}x = 1 \cdot x = x.$$
La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{n+1}{n}x - x\right| = \frac{1}{n}|x|.$$
On a par exemple $\left|f_n(n) - f(n)\right| = 1$ donc $\|f_n - f\|_\infty \geq 1$ (en fait, $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$). Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x|, & |x| < n \\ 0, & |x| \geq n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$?

Solution 31.3

Exercice 31.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on définit la fonction h_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h que l'on précisera.

2. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $\mathbb{R}$?

Solution 31.4

Exercice 31.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction k_n de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$k_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n, & \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 4n^2x, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction k que l'on précisera.

2. La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $[0,1]$?

3. Soit $a, b \in]0,1[$ avec $a < b$. La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $[a,b]$?

Solution 31.5

Exercice 31.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction ℓ_n de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\ell_n(x) = n\left(x^n - x^{n+1}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction ℓ que l'on précisera.
2. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers ℓ sur $[0, 1]$?
3. Soit $a, b \in]0, 1[$ avec $a < b$. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers ℓ sur $[a, b]$?

Solution 31.6

Exercice 31.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction m_n de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par

$$m_n(x) = \frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction m que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\left|m_n(x) - m(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers m sur $\mathbb{R}_+$?

Solution 31.7