Chapter 5 Fonctions circulaires

5.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 5.1
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

5.2 Formulaire de Trigonométrie

Exercice 5.2

Cours Soit a et b deux nombres réels. Rappeler (sans démonstration) les expressions de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$.

1. En déduire une expression du produit $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a + b)$ et de $\cos(a - b)$.
2. En déduire que, pour tous nombres réels p et q, on a

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Exercice 5.3
Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sachant que $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Exercice 5.4
Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.
Exercice 5.5

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel x on a

$$\frac{x-1}{2x} \in [0, 1[\,.$$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonctions de $\tan^2(\theta)$.
4. Supposons maintenant que $\theta \in [0, \pi[$ et que x est un réel tel que

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}.$$

Calculer $\tan(\theta)$ en fonction de x.

5.3 Équations trigonométriques

Exercice 5.6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Exercice 5.7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5.8
Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{5.1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

Exercice 5.9
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0. \tag{5.2}$$

Exercice 5.10
Résoudre l'inéquation

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0. \tag{5.3}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 5.11
Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.
2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.
3. La résoudre pour $m = 1$.

Exercice 5.12
Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \phi) + B$, A, B et ϕ étant des constantes réelles.

5.4 Étude des fonctions trigonométriques

5.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Exercice 5.13
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1-2x)$.
2. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \arccos \sqrt{x(4-x)}$.

Exercice 5.14

Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos\frac{89\pi}{3}\right).$$

Exercice 5.15

Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

Exercice 5.16

Calculer $2\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{7}{25}$.

Exercice 5.17

Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$.
3. Soit $x \in \left[0, \pi/2\right]$, que vaut $f(x)$?
4. Soit $x \in \left[\pi/2, \pi\right]$, que vaut $f(x)$?
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
6. ♨ Résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \pi$.
7. ♨♨ Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in I_k$.

Exercice 5.18

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice .

Exercice 5.19

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice J asinsin.

Exercice 5.20

Montrer

$$\forall x \in [-1,1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.21

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.22

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\phi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.

2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.

(a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.

(b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.

4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.

5. Tracer le graphe de f.

6. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable. Calculer sa dérivée et confronter votre résultat à celui de la question **4.**.

Exercice 5.23 *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :

(a) $\arctan(\tan(x)) = x$;

(b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

arque

Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.