

Chapter 14 Groupes

14.1 loi de composition

Exercice 14.1 Étude de lois de composition

Indiquer, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des lois de composition interne. Lorsque c'est le cas, préciser l'éventuelle associativité ou commutativité.

$$\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y$$

$$\square : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ ((u_n), (v_n)) \mapsto (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$$

$$\top : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{4}$$

$$\triangle : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ (x, y) \mapsto e^{x+y}$$

Exercice 14.2 Propriétés de lois de composition

Étudier les lois de composition interne suivantes : commutativité, élément neutre éventuel, éléments inversibles.

$$\star : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (A, B) \mapsto A \cap B$$

$$\square : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto \max(x, y)$$

$$\triangle : (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx', xy' + x'y)$$

14.2 La structure de groupes

Exercice 14.3

Sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la loi \square par $(x, y) \square (x', y') = (xx', xy' + y)$.

1. Montrer que (G, \square) est un groupe.
2. Montrer que $H =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de (G, \square) .

Exercice 14.4

Soit (G, \cdot) un groupe dont on note e l'élément neutre.

Soit $a, b, c \in G$. On suppose que $b^6 = e$ et $ab = b^4a$. Montrer les égalités $b^3 = e$ et $ab = ba$.

Exercice 14.5

Soit (G, \cdot) un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 14.6 Étude des groupes à faibles cardinaux

1. (a) Soit (G, \cdot) un groupe à deux éléments. Construire la table de multiplication de G .
(b) Soit (G, \cdot) et (G', \cdot) deux groupes à deux éléments. Construire un isomorphisme de groupes de G dans G' .

Ainsi, tous les groupes à deux éléments sont isomorphes. On dit qu'il n'y a qu'un groupe à deux éléments à isomorphisme près.

2. Soit (G, \cdot) un groupe à trois éléments. Construire la table de multiplication de G . En déduire qu'il n'y a qu'un groupe à trois éléments à isomorphisme près.
3. Montrer que \mathbb{U}_4 et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ (muni de la loi de groupe produit) ne sont pas isomorphes (il y a donc plusieurs «types» de groupes à quatre éléments).

,difficulty={}]

Exercice 14.7

Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre 6.

Exercice 14.8 *Un exemple de groupe*

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que G est un groupe multiplicatif.

Exercice 14.9

Soit l'ensemble

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, \mathcal{J} est un groupe abélien.

Exercice 14.10 *Un exemple de sous-groupe*

On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{ a + b\sqrt{7} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \}$.

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 14.11

Montrer que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in]-1, 1[\right\}$$

est un groupe pour la multiplication matricielle.

Exercice 14.12

Pour la multiplication usuelle des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes.

1. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2. $\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1 \}$.

Exercice 14.13

Montrer que les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x, y, z \in \mathbb{K}$$

forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 14.14

Soit (G, \star) un groupe. On appelle centre de G l'ensemble

$$Z(G) = \{ x \in G \mid \forall g \in G, x \star g = g \star x \}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Exercice 14.15

Soient G un groupe commutatif d'élément neutre e et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$B = \{ a \in G \mid a^n = e \}.$$

Montrer que B est un sous-groupe de G .

Exercice 14.16 (***)

Soit G un groupe commutatif d'élément neutre e . On pose

$$B = \{ a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = e \}.$$

Montrer que B est un sous-groupe de G .

Exercice 14.17 (*****)

Soit G un groupe abélien fini (loi notée multiplicativement), de cardinal $n \geq 2$, de neutre e , et a , un élément de G .

1. En considérant l'ensemble des a^k , $k = 0, \dots, n$, montrer qu'il existe $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a^d = e$.
2. Justifier l'existence de ω , le plus petit entier supérieur ou égal à 1 vérifiant $a^\omega = e$. ω s'appelle l'**ordre** de l'élément a .
3. Vérifier que

$$\langle a \rangle = \{ e, a, a^2, \dots, a^{\omega-1} \}$$

est un sous-groupe de G à ω éléments.

Exercice 14.18 (**)

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif ; soient A et B deux parties de G . On définit la somme de A et B , notée $A + B$, par

$$A + B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b \}.$$

1. Montrer que si A et B sont deux sous-groupes de G , $A + B$ est un sous-groupe de G .
2. On suppose maintenant que A et $A + B$ sont deux sous-groupes de G ; B est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 14.19 (***)

Soit (G, \cdot) un groupe (non commutatif) ; soient A et B deux sous-groupes de G . On définit le produit de A et B , noté $A \cdot B$, par

$$A \cdot B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a \cdot b \}.$$

Montrer les équivalences

$$(A \cdot B \text{ est un sous-groupe de } G) \iff (A \cdot B = B \cdot A) \iff (B \cdot A \subset A \cdot B).$$

Donner un exemple (en précisant G, A, B) où $A \cdot B$ n'est pas un groupe.

Exercice 14.20

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$. Montrer que f est un endomorphisme du groupe (\mathbb{R}^*, \cdot) . Déterminer

$$x \mapsto x^n$$

son image et son noyau.

Exercice 14.21

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2. Calculer son noyau et son image.
3. f est-elle injective ?

Exercice 14.22

Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes

$$1. \ln(xy) = \ln x + \ln y ;$$

$$2. |zw| = |z||w| ;$$

$$3. (xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} ;$$

$$4. e^{z+w} = e^z e^w ;$$

$$5. \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} ;$$

$$6. \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w.$$

Exercice 14.23

Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $a \in G$ fixé, on considère l'application

$$f_a : G \rightarrow G \\ x \mapsto a.x.a^{-1}.$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de $(G, .)$.

2. On note $I = \{ f_a \mid a \in G \}$. Montrer que (I, \circ) est un groupe où \circ est la loi de composition des applications de G dans G .

3. Soit

$$\varphi : G \rightarrow I \\ a \mapsto f_a$$

Montrer que φ est un morphisme de $(G, .)$ dans (I, \circ) .

Exercice 14.24

Pour tout couple (a, b) de \mathbb{R}^2 , on pose la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathcal{G} = \{ M_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \} \quad \text{et} \quad f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^* \\ M_{a,b} \mapsto a^2 + b^2.$$

1. Montrer que \mathcal{G} est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.

2. Montrer que f est un morphisme du groupe (\mathcal{G}, \times) dans le groupe (\mathbb{R}^*, \times) .

Exercice 14.25

Soit $(G, .)$ un groupe (quelconque). On note $C(G)$ l'ensemble des caractères de G , c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de G vers le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* .

1. Montrer que $C(G)$ est un groupe commutatif pour la loi naturelle. On l'appelle *groupe des caractères* de G .

2. Montrer que $C(\mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{C}^* .

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $F : C(\mathbb{U}_n) \rightarrow \mathbb{U}_n$ est un isomorphisme de groupes.

$$f \mapsto f(\omega)$$

4. Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe produit. En introduisant, pour $f_1 \in C(G_1)$ et $f_2 \in C(G_2)$, l'application

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}^* \\ (x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2)$$

montrer que $C(G)$ est isomorphe à $C(G_1) \times C(G_2)$.

Exercice 14.26

Montrer que si f est une bijection de X sur Y , alors $F : \mathfrak{S}(X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y)$ est un isomorphisme.

$$\sigma \mapsto f\sigma f^{-1}$$
Exercice 14.27

Le but de cet exercice est de montrer que les groupes (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathbb{C}^*, \times) ne sont pas isomorphes. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de (\mathbb{R}^*, \times) sur (\mathbb{C}^*, \times) .

1. Montrer que $\varphi(-1) = -1$.
2. Montrer que si $\alpha = \varphi^{-1}(i)$, alors $\alpha^2 = -1$.
3. Conclure.

Exercice 14.28

Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux et $n = pq$. Soit (G, \cdot) un groupe fini commutatif vérifiant $x^n = 1$ pour tout $x \in G$. On forme

$$M = \{ x \in G \mid x^p = 1 \} \quad \text{et} \quad N = \{ x \in G \mid x^q = 1 \}.$$

1. Montrer que M et N sont des sous-groupes de (G, \cdot) .
2. Vérifier $M \cap N = \{ 1 \}$.
3. Établir que l'application

$$\begin{aligned} f : M \times N &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Anneaux, corps

14.3 Anneaux

Exercice 14.29 Études d'inversibilités dans un anneau

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

1. Soit $a \in A$ tel que $a^2 = 0$. Démontrer que $1 - a$ et $1 + a$ sont inversibles et expliciter leurs inverses.
2. Généraliser pour $a \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $a^n = 0$.

Exercice 14.30 Éléments nilpotents

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Un élément x de A est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1. Démontrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
2. Démontrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors, xy et $x + y$ sont nilpotents.

Exercice 14.31 Étude d'un ensemble de fonctions

Soit A l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} telles que $f(0) = f(1)$. Démontrer que A est un anneau.

Exercice 14.32

Soit a un élément d'un ensemble X . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} E_a : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux.

Exercice 14.33 Nilradical d'un anneau

On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ l'ensemble N formé des éléments nilpotents de A , c'est-à-dire des $x \in A$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $x^n = 0_A$.

Montrer que N est un idéal de A .

Exercice 14.34 Radical d'un idéal

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A . On appelle **radical** de l'idéal I l'ensemble $R(I)$ des éléments x de A pour lesquels il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^q \in I$.

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. Soient I et J deux idéaux. Vérifier

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J).$$

3. On suppose que $A = \mathbb{Z}$. Déterminer le radical de $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

14.4 Corps

Exercice 14.35

Montrer que $\mathbb{Q}[i\sqrt{3}] = \left\{ a + bi\sqrt{3} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ est un corps.

14.5 Algèbres