# Sujet d'étude

**Exercice 1** *Une introduction à l'analyse d'algorithmes*

Les algorithmes de Gauß et Gauß-Jordan décrivent une méthode pour résoudre un système linéaire. Ces algorithmes sont particulièrement adaptés pour une implémentation informatique, mais tous les algorithmes ne naissent pas égaux. Mis à part la vitesse, la mémoire et autres attributs de l'ordinateur sur lequel ils sont exécutés, certains sont plus rapides que d'autres. Une mesure de cette efficacité est appelée **complexité** d'un algorithme.

Essayons d'examiner le cas des deux algorithmes à notre disposition pour résoudre un système linéaire : Gauß et Gauß-Jordan. *Pour simplifier, nous appellerons « opérations » une multiplication ou une division entre deux réels* ; nous supposerons que les autres opérations usuelles ( addition, permutation,...) sont exécutées bien plus rapidement et peuvent être ignorées dans notre calcul (c'est un choix raisonnable, mais nous n'essayerons pas de le justifier). Nous ne considèrerons également que des systèmes de Cramer qui ont donc le même nombre $n$ d'équations que d'inconnues. Afin de minimiser les divisions, nous normaliseront les lignes afin que les pivots soient tous égaux à 1 dans l'algorithme de Gauß (comme pour l'algorithme de Gauß-Jordan).

Ainsi, notre but est de déterminer le nombre $T(n)$ d'opérations utilisées lors des algorithmes de Gauß et Gauß-Jordan en fonction de $n$. De plus, nous ne considèrerons que le *pire cas*, c'est-à-dire lorsque l'algorithme effectue le plus possible d'opérations.

1. Considérons la matrice augmentée

$$(A,B)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 9 & 6 & 12\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right].$$

Déterminer le nombre d'opérations nécessaires avec l'algorithme de Gauß (en normalisant les lignes) pour arriver à la matrice échelonnée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

(Par «opération», on entend multiplication ou division entre réels.) Ensuite, déterminer le nombre d'opérations nécessaires lors de la phase de substitution.

2. Déterminer le nombre d'opérations nécessaires avec l'algorithme de Gauß-Jordan pour arriver à la matrice échelonnée réduite

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

(où les zéros sont obtenus immédiatement après que le pivot soit transformé en 1).

Que suggèrent vos réponses quand à l'efficacité relative des deux algorithmes ?

3. Nous allons maintenant analyser l'algorithme de manière générale. Suposons que la matrice augmentée $(A, B)$ proviennent d'un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues :

$$(A,b)=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n\end{array}\right]$$

Nous supposerons que l'échange de lignes n'est jamais nécessaire, c'est-à-dire que nous pouvons toujours obtenir un premier 1 en divisant par le pivot.

(a) Montrer que l'on effectue $n$ opérations afin d'obtenir le premier 1 :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & * \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Ensuite, montrer que l'on effectue $n$ opérations pour obtenir le premier zéro de la colonne 1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Lorsque la première colonne a été «nettoyée», nous obtenons la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & * & \dots & * & * \end{array}\right]$$

Montrer que le nombre d'opérations nécessaire jusqu'à obtenir cette matrice est $n + (n-1)n$.

(b) Montrer que le nombre d'opérations effectuées pour obtenir la matrice échelonnée

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}\right]$$

est

$$n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2.$$

(c) Montrer que le nombre d'opérations effectuées lors de la phase de substitution est

$$1 + 2 + \dots + (n-1).$$

(d) On donne $n^2+(n-1)^2+\dots+2^2+1^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que le nombre total d'opérations effectuées par l'algorithme de Gauß est

$$T(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n.$$

Pour $n$ assez grand, on peut donc écrire $T(n) \approx \frac{1}{3}n^3$.

**4.** Montrer que dans le cas de l'algorithme de Gauß-Jordan, nous effectuons $T(n) \approx \frac{1}{2}n^3$ opérations. Quel algorithme est le plus efficace lorsque $n$ est «grand» ?