Lycée Colbert — 2023/2024
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 23 décembre 2023, 8:00-10:00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1 *CCINP PC 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, soit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(matrice tridiagonale de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{)}.$$

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (Δ_n).

2. En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 2

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(x). \tag{E}$$

Exercice 3 *Étude des sous-groupes de* $(\mathbb{R}, +)$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il y a trois catégories de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$:

- Le sous-groupe réduit à $\{ 0 \}$.;
- les sous-groupes de la forme $c\mathbb{Z}$ avec $c \in]0, +\infty[$ (par exemple $\mathbb{Z}$ ou $2\pi\mathbb{Z}$);
- les sous-groupes denses dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de ce sous-groupe (par exemple $\mathbb{Q}$).

Dans tout la suite, on considère un sous-groupe $(G, +)$ de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{ 0 \}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que
$$a\mathbb{Z} = \{ ax \mid x \in \mathbb{Z} \}$$
est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2. Dans la suite, on note
$$A = G \cap]0, +\infty[= \{ x \in G \mid x > 0 \}.$$
Justifier que A possède une borne inférieure que l'on note d.

3. Déterminer d lorsque $G = \mathbb{Z}$ et lorsque $G = \mathbb{Q}$.

4. Cas où $d > 0$.

(a) On suppose que $d \notin A$. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2) \in A^2$ tel que $d < x_1 < x_2 < 2d$.

(b) En considérant $x_2 - x_1$, montrer que l'hypothèse $d \notin A$ est fausse.

(c) Montrer que $d\mathbb{Z} \subset G$.

(d) Montrer que, pour tout $x \in G$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - pd < d$.

(e) En déduire que $G = d\mathbb{Z}$.

5. Cas où $d = 0$.

(a) Montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in G, 0 < x < \varepsilon.$$

(b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. En utilisant le caractère archimédien de $\mathbb{R}$, montrer que $]a, b[\cap G \neq \emptyset$.

(c) Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$, puis établir le résultat annoncé dans l'introduction.

Exercice 4

On considère la fonction f suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x+4}{2x+3} \end{array}.$$

1. (a) Étudier les variations de f.

(b) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les solutions de $f(x) = x$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 3}.$$

(a) Étudier la monotonie de (u_n).

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{2} - u_n \leq \frac{2 - u_n^2}{2}.$$

3. (a) Montrer qu'il existe des suites d'entiers naturels non nuls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

avec

$$a_0 = b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont impairs.

(c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 5^n \text{ et } b_n \geq 5^n.$$

(d) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2b_n^2 - a_n^2 = 1.$$

(e) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{2b_n^2}.$$

(f) Étudier la limite de la suite $\left(\cos\left(\sqrt{2}b_n\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \cos(x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminer la borne inférieure de A.