Chapitre 37

Sommes et projecteurs

37.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

§1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. La **somme** de U et V, noté $U + V$, est l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$

♥

Pour $w \in E$,

$$w \in U + V \iff \exists (u, v) \in U \times V, u + v = w.$$

Test 2

Posons $U = \{ 0, 2, 3 \}$ et $V = \{ 4, 8, 1 \}$. Ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$. Décrire néanmoins en extension l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Test 4

Montrer le!

Test 5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in E$. Montrer

$$\operatorname{Vect}\{u\} + \operatorname{Vect}\{v\} = \operatorname{Vect}\{u, v\}.$$

Remarque

Il faut bien différencier $U + V$ de $U \cup V$. L'ensemble $U \cup V$ *n'est pas*, en général, un sous-espace vectoriel de E (voir l'exercice **??**). Le sous-espace vectoriel $U + V$ contient $U \cup V$, mais il est en général beaucoup plus gros. En fait, $U + V$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant U et V.

Exemple 6

Soient $E = \mathbb{R}^3$,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$$

Montrer que $U + V = \mathbb{R}^3$.

Test 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les énoncés suivants.

1. $U + V = V + U$.

2. $U + U = U$.

3. Si $U \subset V$, alors $U + V = V$.

§2 Sommes directes

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $U + V$ est dite **somme directe** si

$$\forall (u, v) \in U \times V, u + v = 0 \implies u = v = 0.$$

Notation

Lorsque la somme est directe, on utilise la notation spéciale $U \oplus V$ pour désigner $U + V$. Au niveau ensembliste, ce sont les mêmes ensembles. Le symbole $\oplus$ rappelant seulement que la somme est directe.

Il existe une autre façon de caractériser les sommes directes, souvent très utile.

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La somme $U + V$ est directe.*

2. $U \cap V = \{0\}$.

3. *Tout vecteur z de la somme $U+V$ peut s'écrire de manière unique $z=u+v$ où $u \in U$ et $v \in V$, c'est-à-dire*

$$\forall (u, v) \in U \times V, \forall \left(u', v'\right) \in U \times V, u+v=u'+v' \implies u=u' \text{ et } v=v'.$$

Exemple 10 Soit $u, v \in E$ deux vecteurs non colinéaires. Alors, la somme $\operatorname{Vect}\{u\}+\operatorname{Vect}\{v\}$ est directe. Autrement dit,

$$\operatorname{Vect}\{u, v\}=\operatorname{Vect}\{u\} \oplus \operatorname{Vect}\{v\}.$$

§3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E=U \oplus V$.
2. $E=U+V$ et $U \cap V=\{0\}$.
3. Tout vecteur $z \in E$ se décompose de manière unique dans $U+V$:

$$\forall z \in E, \exists!(u, v) \in U \times V, z=u+v.$$

Dans ce cas, on dit que U et V sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** dans E.

La notion de supplémentaire est souvent confondue avec la notion ensembliste de complémentaire qui est très différente. Les différences entre les deux notions sont nombreuses. Tout d'abord, il y a unicité du complémentaire, alors que pour un sous-espace donné, il existe généralement une infinité de supplémentaires différents. Ensuite l'intersection d'un sous-espace avec un supplémentaire n'est pas vide mais contient le vecteur nul (et uniquement celui-là). Par ailleurs, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel. Enfin, la réunion d'un sous-espace et d'un supplémentaire n'est pas égale à tout l'espace, plus subtilement, elle engendre cet espace. De façon intuitive, deux sous-espaces supplémentaires contiennent exactement l'information dont on a besoin pour reconstituer l'espace entier.

Exemple 12 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les deux parties suivantes:

$$F=\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\} \qquad G=\{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. Trouver d'autres supplémentaires pour F (resp. pour G).

Exemple 13 Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels formés respectivement des fonctions constantes, et des fonctions valant 0 en 0 sont supplémentaires.

Test 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $E = U \oplus V$ si, et seulement si

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \times V & \to & E \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 15 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.*

En général, ce supplémentaire n'est pas unique.

Inutile de chercher un contre-exemple en dimension infinie. En effet, ce résultat reste vrai en admettant l'axiome du choix.

Définition 16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E si il existe une droite vectorielle $D = \operatorname{Vect}\{\, a \,\}$ telle que

$$E = H \oplus D.$$

37.2 Projecteurs

§1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 17 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E. Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $p : E \to E$ qui à z associe u est le **projecteur vectoriel sur U parallèlement à V**. On dit également que V est la **direction** de ce projecteur.

L'application $q : E \to E$ qui à z associe v est donc le projecteur vectoriel sur V parallèlement à U.

Si p est le projecteur sur U parallèlement à V, et q le projecteur sur V parallèlement à U, alors

$$\forall z \in E, \quad z = p(z) + q(z) \text{ et } p(z) \in U \text{ et } q(z) \in V.$$

Test 18 Pourquoi demande-t-on que la somme $E = U \oplus V$ soit directe?

Proposition 19 *Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note p le projecteur sur U parallèlement à V. Alors,*

1. *p est un endomorphisme de E.*
2. $U = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = \{\ z \in E \mid p(z) = z\ \}$.
3. $V = \ker(p) = \{\ z \in E \mid p(z) = 0\ \}$.

Remarque Vous aurez peut-être reconnu le contenu du théorème de Thalès : celui-ci veut dire au fond qu'un projecteur (vectorielle) sur une droite est une application linéaire.

Exemples

Exemple 20 Avec $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus V$, où U est le sous-espace vectoriel formés des fonctions constantes, et V le sous-espace vectoriel des fonctions valant 0 en 0. Les projecteurs sur U parallèlement à V et sur V parallèlement à U sont

$$p:\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(0)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad q:\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) - f(0)) \end{array}$$

Exemple 21 Soit $U = \mathrm{Vect}\left\{\ (1, 2, -1)^T, (1, 0, 1)^T\ \right\}$ et $V = \mathrm{Vect}\{\ (1, -1, -1)^T\ \}$.
Soit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation linéaire

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = x \\ 2\alpha - \gamma & = y \\ -\alpha + \beta - \gamma & = z \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$\alpha = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6}, \quad \beta = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, \quad \gamma = \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}.$$

Cela prouve que tout vecteur $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de U et un vecteur de V. Le projecteur sur U parallèlement à V est défini par

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}.$$

Test 22 Vérifier le calcul précédent.

§2 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

Définition 23 Une application $p : E \to E$ est **idempotente** si

$$p \circ p = p.$$

Si p est linéaire, cela s'écrit également $p^2 = p$.

Définition 24 Une matrice carrée A est **idempotente** si $A^2 = A$.

Théorème 25 *Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note p le projecteur sur U parallèlement à V. Alors,*

1. *L'application p est idempotente : $p \circ p = p$.*
2. *$q = \mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur V parallèlement à U. On a $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.*

Théorème 26 *Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors*

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$$

et p est le projecteur vectoriel sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$. On a donc

$$\operatorname{Im} p = \ker\left(p - \mathrm{Id}_E\right) \qquad E = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(p).$$

Les espaces $\ker(p - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(p)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de p.

37.3 Symétries

§1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 27 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E. Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $s : E \to E$ qui a z associe $u - v$ est la **symétrie par rapport à U parallèlement à V**.

Proposition 28 *Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note s la symétrie sur U parallèlement à V. Alors,*

1. *Si p désigne le projecteur sur U parallèlement à V et q le projecteur sur V parallèlement à U, alors*
$$s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2q;$$
on a également $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

2. *s est un automorphisme de E et*

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E \quad \text{d'où} \quad s^{-1} = s.$$

On a donc $\operatorname{Im} s = E$ *et* $\ker s = \{0_E\}$.

3. $U = \ker\left(s - \mathrm{Id}_E\right) = \{\, z \in E \mid s(z) = z \,\}$.

4. $V = \ker\left(s + \mathrm{Id}_E\right) = \{\, z \in E \mid s(z) = -z \,\}$.

Les espaces $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de s.

§2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

Définition 29 Une application $s : E \to E$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ est appelée **involution**.

Ce qui s'écrit également lorsque s est linéaire, $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 30 **Caractèrisation des symétries**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $s \in \mathbf{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Alors

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

et s est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

37.4 Sommes et applications linéaires

§1 Caractérisation universelle

Une application linéaire définie sur $U \oplus V$ est entièrement déterminée par ses restrictions à U et V. Autrement dit,

Théorème 31 **Caractérisation universelle**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E tels que la somme $U + V$ est directe.
Soit $g \in \mathbf{L}(U, F)$ et $h \in \mathbf{L}(V, F)$, alors, il existe une unique application linéaire $f \in \mathbf{L}(U \oplus V, F)$ telle que

$$\forall x \in U, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in V, f(x) = h(x).$$

Exemples 32 Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

1. L'endomorphisme de E définit par

$$\forall x \in U, p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in V, p(x) = 0$$

est le projecteur sur U parallèlement à V.

2. L'endomorphisme de E définit par

$$\forall x \in U, s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in V, s(x) = -x$$

est la symétrie par rapport à U dans la direction V.

§2 Forme géométrique du théorème du rang

Théorème 33 **Forme géométrique du théorème du rang**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit S est un supplémentaire de $\ker f$ *dans E alors*

$$g = f_S^{\operatorname{Im} f} : \begin{array}{ccc} S & \to & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire que tout supplémentaire de $\ker f$ *dans E est isomorphe à* $\operatorname{Im} f$.

On dit que f induit un isomorphisme g de S sur $\operatorname{Im} f$.

Dans le cas où $f \in \mathbf{L}(E)$, il n'y a aucune raison de croire que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

CHAPITRE 37

COMPLÉMENTS

37.5 AFFINITÉS VECTORIELLES

Définition 34

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E. Chaque vecteur $x \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$x = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application de E dans E qui a x associe $u + \alpha v$ est l'**affinité de base U, de direction V et de rapport α**.

Exemple 35

1. L'affinité de base U, de direction V et de rapport 0 est le projecteur sur U parallèlement à V.
2. L'affinité de base U, de direction V et de rapport -1 est la symétrie par rapport à U parallèlement à V.
3. Une affinité de rapport 1 est l'identité de E.

Proposition 36

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\alpha \in \mathbb{K}$. On note f l'affinité de base U, de direction V et de rapport α. Alors,

1. *Si p désigne le projecteur sur U parallèlement à V et q le projecteur sur V parallèlement à U , alors*
$$f = p + \alpha q = (1-\alpha)p + \alpha \operatorname{Id}_E = \operatorname{Id}_E + (\alpha - 1)q.$$
2. *f est un endomorphisme de E.*
3. *Si $\alpha \neq 0$, f est un automorphisme de E. Sa réciproque est l'affinité de base U, de direction V et de rapport $1/\alpha$.*

4. *Si* $\alpha \neq 1$, *on a*

$$\begin{aligned} U &= \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{\, z \in E \mid f(z) = z \,\} \\ \textit{et}\ \ V &= \ker(f - \alpha\,\mathrm{Id}_E) = \{\, z \in E \mid f(z) = \alpha z \,\}\,. \end{aligned}$$