

Fractions rationnelles

Exercice 28.1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

1. $\frac{1}{X^3+4X^2+4X}$.
2. $\frac{X^4}{(X^2+1)^2}$.
3. $\frac{1}{X^n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\frac{X^6+2}{X^5-2X^3+X}$.

Exercice 28.2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

1. $\frac{1}{X^2+a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{3}{X^3+1}$.
3. $\frac{1}{(X^2-1)(X^2+4)}$.
4. $\frac{2n}{X^{2n}-1}$ avec $n \geq 2$.
5. $\frac{1}{X^4+X^2+1}$.

Exercice 28.3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$

$$F_n = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$