Sujet d'étude

Exercice 1 *Construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy*

Partie A Suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$

Une suite $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$ si, et seulement si

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \left(p \geq N \text{ et } q \geq N \implies |r_q - r_p| \leq \alpha\right).$$

On note $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

A1. Vérifier que toute suite constante de $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

A2. Les suites de termes généraux $u_n = n$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sont-elles de Cauchy dans $\mathbb{Q}$?

A3. Montrer que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est bornée.

A4. Dans l'ensemble $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, on note $\mathcal{R}$ la relation définie par

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R} (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies |r_n - s_n| \leq \alpha\right).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une une relation d'équivalence dans $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$.

Partie B Le groupe abélien $(\mathbb{R}, +)$

Pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, on note $\widehat{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. L'ensemble des classe d'équivalence de $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ modulo $\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{R}$.

B1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition des suites, définie par

$$\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r_n + s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

B2. Montrer que l'addition dans $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ est compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, c'est-à-dire, pour toute suites $(r_n)_n$, $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ de $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$, on a

$$\left((r_n)_n \mathcal{R} (s_n)_n\right) \implies \left((r_n)_n + (t_n)_n \mathcal{R} (s_n)_n + (t_n)_n\right).$$

B3. En déduire que l'on peut définir une addition dans $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{(r_n)_n} + \widehat{(s_n)_n} = \widehat{(r_n)_n + (s_n)_n}.$$

B4. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien.

Partie C L'anneau commutatif $(\mathbb{R}, +, \times)$

C1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ est stable pour la multiplication des suites, définie par

$$\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \times \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r_n s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

C2. Montrer que la multiplication dans $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ est compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

C3. En déduire que l'on peut définir une multiplication dans $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{(r_n)_n} \times \widehat{(s_n)_n} = \widehat{(r_n)_n \times (s_n)_n}.$$

C4. Montrer que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

C5. Soit θ l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \theta(r) = \widehat{(r)_{n\in\mathbb{N}}},$$

où $(r)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante égale à r.

Montrer que θ est un morphisme injectif de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Dans la suite, on confondra désormais $r \in \mathbb{Q}$ et $\theta(r) \in \mathbb{R}$.

Partie D Le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$

D1. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^\star$ tel que

$$\begin{aligned} &\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies r_n \geq \alpha\right) \\ \text{ou } &\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies r_n \leq -\alpha\right). \end{aligned}$$

D2. En déduire que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Partie E Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (r_n)_n \in x, \forall n \in \mathbb{N}, r_n \geq 0 \right\} \\ \text{et } \mathbb{R}_- &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{R}_+ \right\}. \end{aligned}$$

E1.
- Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable pour $+$ et $\times$.
- Montrer que $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{ 0 \}$ et $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.

E2. On définit une relation, notée $\leq$, dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+\right).$$

Établir que $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$, prolongeant l'ordre usuel de $\mathbb{Q}$. Démontrer

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

ainsi que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies xz \leq yz.$$

E3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer les assertions suivantes

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| = 0 \iff x = 0)$.

(c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| \cdot |y|$.

(d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.

Partie F Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et partie entière

F1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y)\,.$$

F2. En déduire que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire

$$\forall (\varepsilon, A) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2, \exists N \in \mathbb{N}^\star, N\varepsilon \geq A.$$

F3. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1;$$

l'entier n est appelé la partie entière de x et est notée $\lfloor x \rfloor$.

Partie G Complétude de $\mathbb{R}$

On dit qu'une suite de réels $(x_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ *converge vers un réel ℓ* si, et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies |x_n - \ell| \leq \varepsilon\right).$$

G1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(r_n)_n \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$. Établir que la suite $(r_n)_n$ converge vers x si, et seulement si

$$\left(r_n\right)_n \in \mathcal{C}_\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x = \widehat{\left(r_n\right)_n}.$$

G2. On dit qu'une suite de réels $(x_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ est *de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \left(p \geq N \text{ et } q \geq N \implies |r_q - r_p| \leq \varepsilon\right).$$

Montrer que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$. On dit alors que $\mathbb{R}$ est *complet*.

Partie H Théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

H1. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés non-vides emboîtés, c'est-à-dire

$$I_{n+1} \subset I_n$$

de longueur tendant vers 0. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

H2. En déduire que toute partie majorée, non-vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.