Sujet d'étude d'après Centrale 1989 Maths I M

Suites vérifiant $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$

Exercice 1 *Suites vérifiant* $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$

Définitions et notations.

- On note S l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et
$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$$
pour tout entier naturel n.
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $u(x, y)$ désigne l'unique suite u de S telle que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Le terme de rang n de la suite $u(x, y)$ est noté $u_n(x, y)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty, -\infty \}$, on note E_λ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que la suite $u(x, y)$ tende vers λ.

Le but du problème est d'étudier les éléments de S, en particulier de décrire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que la suite $u(x, y)$ tend vers 0.

Partie A

généralités

A1. (a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

(b) Soit $u \in S$. On suppose que u tend vers $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?

(c) Si $u \in S$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+3} - u_{n+2}$ en fonction de u_{n+2} et u_n.

A2. Dans cette question, on suppose que $u \in S$ vérifie la condition (C_1) suivante
$$(C_1) \quad \exists N \in \mathbb{N}, u_{N+2} > \max\left(u_N, u_{N+1}\right).$$

(a) Si N est fixé comme dans (C_1), montrer que $(u_n)_{n\geq N+1}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que u tend vers $+\infty$.

On prouverait de même que si u vérifie la condition
$$(C_2) \quad \exists N \in \mathbb{N}, u_{N+2} < \min\left(u_N, u_{N+1}\right),$$
alors u converge vers 0.

A3. (a) Étudier les suite $u(2, 0)$ et $u(1, 0)$.

(b) Montrer que E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides.

A4. Dans cette question, on suppose que $u \in S$ est non nulle et vérifie la condition
$$(C_3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \min(u_n, u_{n+1}) \leq u_{n+2} \leq \max\left(u_n, u_{n+1}\right).$$

Dans les questions **A4**a et **A4**b, on suppose de plus que $u_0 \leq u_1$.

(a) Montrer que $\left(u_{2k}\right)_{k\geq 0}$ est croissante et $\left(u_{2k+1}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante.

(b) Montrer que u converge vers 1.

(c) Si $u_0 > u_1$, que deviennent les résultats de **A4**a et **A4**b ?

A5. Déterminer $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.

Partie B

Étude des bassins d'attraction

B1. Soit $u \in S$. On suppose que u converge vers 1. Soit $u' \in S$ telle que $u'_0 \geq u_0$ et $u'_1 \geq u_1$, l'une au moins des deux inégalités étant stricte.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u'_n \geq u_n + \varepsilon$ pour tout $n \geq 2$.

(b) Que dire de u'_n lorsque n tend vers $+\infty$?

B2. Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; u_n(x,0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$.

(a) Justifier l'existence de $a = \sup A$. Établir que $1 \leq a \leq 2$.

(b) Si $k \in \mathbb{N}$, montrer que $x \mapsto u_k(x,0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En utilisant **B2**b et les résultats de la partie A, montrer que $u(a,0)$ converge vers 1.

(d) Étudier le comportement de $u(x,0)$ selon la position de x par rapport à a.

(e) Si $x > a$ et $y \in \mathbb{R}_+$, étudier $u(x,y)$.

B3. Ici $x \in [0,a]$ est fixé.

(a) Montrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $u(x,y)$ converge vers 1. On note $y = \varphi(x)$ ce réel. L'application φ est donc définie sur $[0,a]$.

(b) Décrire les trois ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ à l'aide du réel a et de l'application φ.

B4. (a) Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,a]$.

(b) Montrer que φ est continue sur $[0,a]$.