Lycée Colbert — 2023/2024
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 23 septembre 2023, 8:00-11:00
Les étudiants qui le souhaitent peuvent rester jusqu'à 12:00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Soient x et y deux réels. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $P\ :\ 0 < x \leq 1$.

2. $Q\ :\ xy = 0$.

3. $R\ :\ x^2 = 1 \implies x = 1$.

Solution 1

1. La proposition P équivaut à $(0 < x \text{ et } x \leq 1)$. La négation de P est donc $(x \leq 0 \text{ ou } x > 1)$.

2. La négation de Q est bien entendu $xy \neq 0$. On peut aussi remarquer que $xy = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$, et que $xy \neq 0 \iff (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$.

3. La négation de R est $(x^2 = 1 \text{ et } x \neq 1)$, c'est-à-dire $x = -1$. Nous retrouvons ainsi le fait que R est vraie si et seulement si $x \neq 1$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\left\lfloor x+\sqrt{2-3x}\right\rfloor = 0$.

Solution 2

Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ tels que $2-3x \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in D =]-\infty, 2/3]$.

Pour $x \in D$,

$$\left\lfloor x+\sqrt{2-3x}\right\rfloor = 0 \iff 0 \leq x+\sqrt{2-3x} \leq 1.$$

On s'intéresse d'abord à l'inégalité $x+\sqrt{2-3x} \leq 1$ qui est équivalente à

$$\sqrt{2-3x} \leq 1-x.$$

Nécessairement, $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, ce qui est assuré par $x \in D$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2-3x} \leq 1-x &\iff 2-3x \leq (1-x)^2 && \because x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\iff 2-3x \leq 1-2x+x^2 \\
&\iff x^2+x-1 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le polynôme X^2+X-1 a pour discriminant 5 et pour racines $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ce polynôme prend des valeurs positives à l'exterieur des racines. On vérifie que ces deux racines sont inférieures à $2/3$. Ainsi,

$$\sqrt{2-3x} \leq 1-x \iff x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

On s'intéresse maintenant à l'inéquation

$$0 \leq x+\sqrt{2-3x}.$$

Si $x \in D$ et $x \geq 0$, celle-ci est trivialement vérifiée. Si $x \leq 0$,

$$\begin{aligned}
0 \leq x+\sqrt{2-3x} &\iff -x \leq \sqrt{2-3x} && \text{et } -x \geq 0 \\
&\iff x^2 \leq 2-3x && \because x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\iff x^2+3x-2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Le polynôme X^2+3X-2 a pour discriminant 17 et pour racines $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ qui sont de signes opposés. Ce polynôme prend des valeurs négatives entre ses racines. Finalement,

$$0 \leq x+\sqrt{2-3x} \iff x \geq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $\left\lfloor x+\sqrt{2-3x}\right\rfloor = 0$ est

$$\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{3}\right].$$

Exercice 3

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$.

Solution 3

L'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} \leq x+m &\iff 1+x^2 \leq (x+m)^2 \text{ et } x+m \geq 0\\ &\iff 1+x^2 \leq x^2+2mx+m^2 \text{ et } x+m \geq 0\\ &\iff 2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m.\end{aligned}$$

- Si $m=0$, l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ n'a pas de solution.
- Si $m>0$,

  $$(2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m) \iff \left(x \geq \max\left(-m, \frac{1-m^2}{2m}\right)\right)$$

  Or $\frac{1-m^2}{2m} > -m$ (car $\frac{1-m^2}{2m}+m = \frac{m^2+1}{m} > 0$),
  Donc l'ensemble des solution de l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est $\left[\frac{1-m^2}{2m}, +\infty\right[$.
- Si $m<0$,

  $$(2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m) \iff \left(-m \leq x \leq \frac{1-m^2}{2m}\right),$$

  or $-m > \frac{1-m^2}{2m}$ (car $\frac{1-m^2}{2m}+m = \frac{m^2+1}{2m} < 0$).
  Donc l'ensemble des solution de l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est vide.

Conclusion

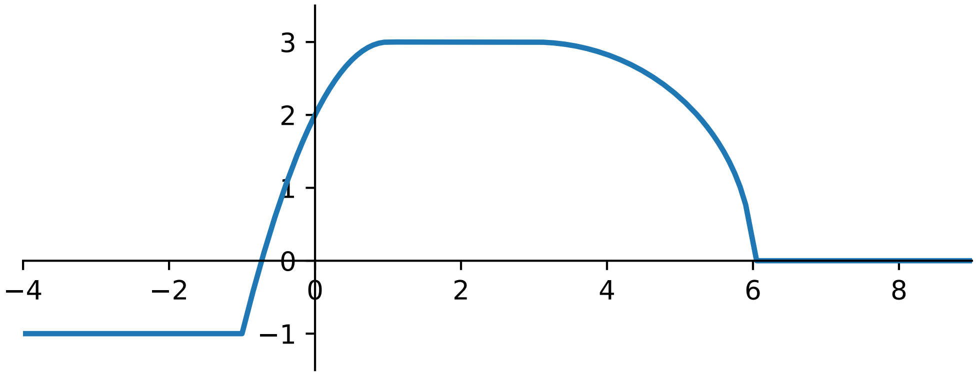
L'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ admet des solutions si, et seulement si $m>0$, et dans ce cas, l'ensemble solution est

$$\left[\frac{1-m^2}{m}, +\infty\right[.$$

Exercice 4

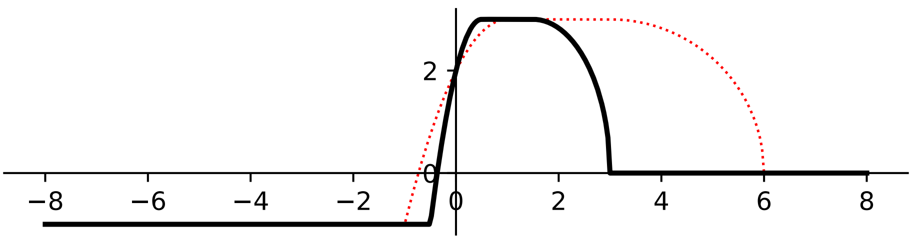
Connaissant le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (voir la figure 4), esquisser les courbes d'équation cartésienne

1. $y = f(2x)$;	**4.** $y = f(-x)$;	**7.** $y = -f(x)$;
2. $y = f(x/2)$;	**5.** $y = 2f(x)$;	**8.** $y = \lvert f(x) \rvert$;
3. $y = f(x+3)$;	**6.** $y = \frac{1}{2}f(x) + 1$;	**9.** $y = f(\lvert x \rvert)$;

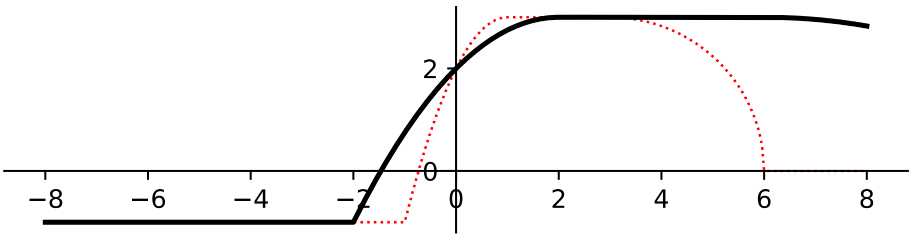


Vous trouverez en dernière page des figures à compléter. Placez deux ou trois courbes par graphique afin de garder de la lisibilité.

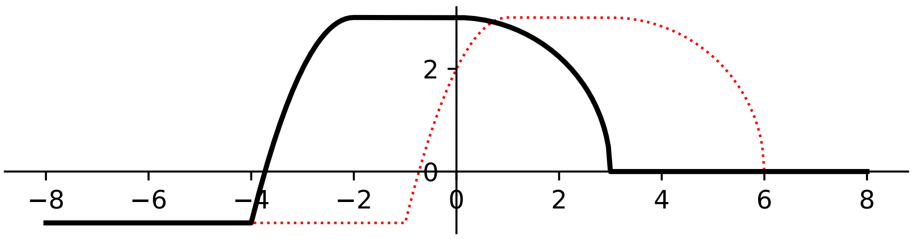
Solution 4



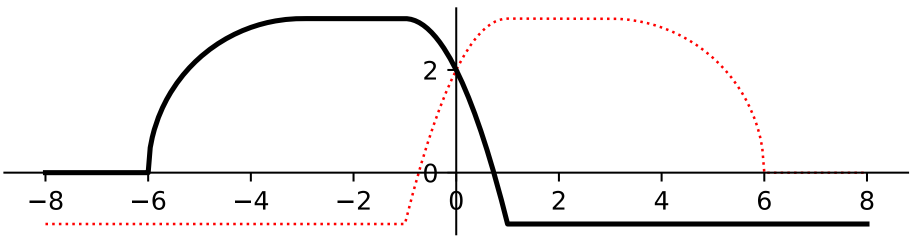
1. $y = f(2x)$



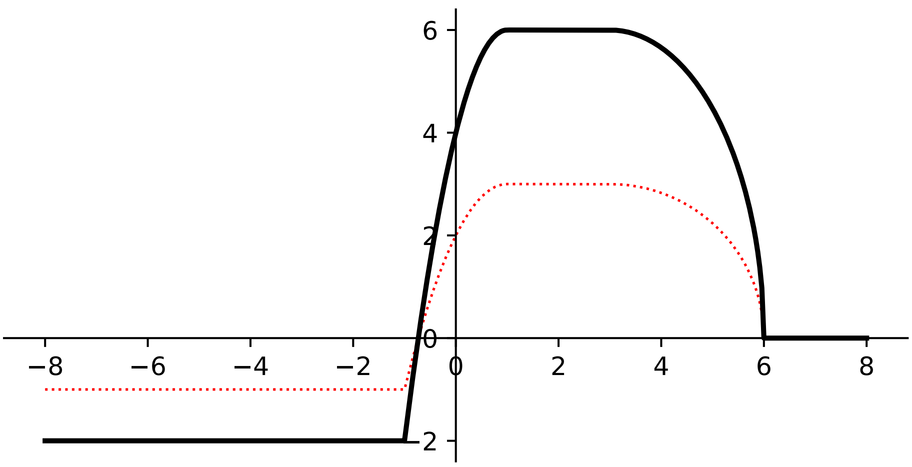
2. $y = f(x/2)$;



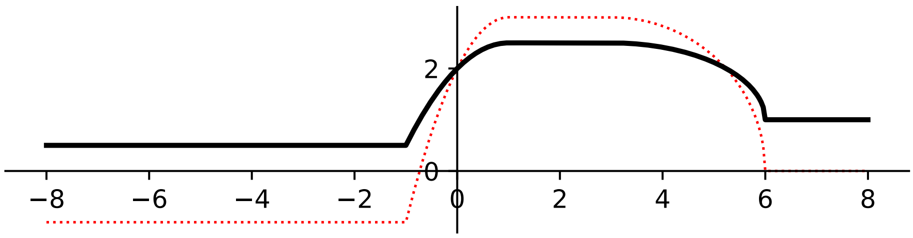
3. $y = f(x+3)$;



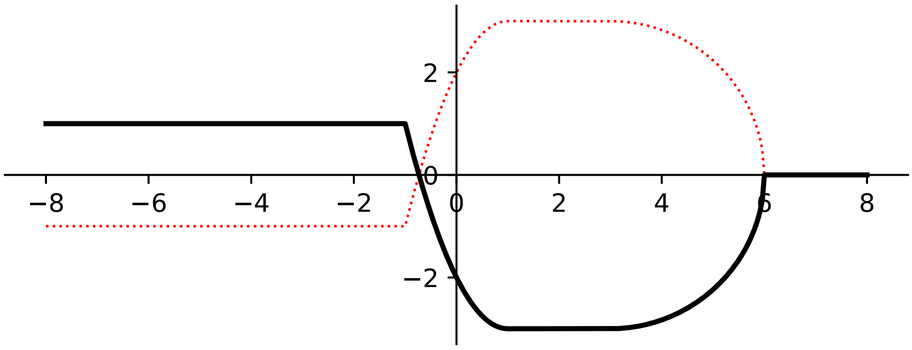
4. $y = f(-x)$;



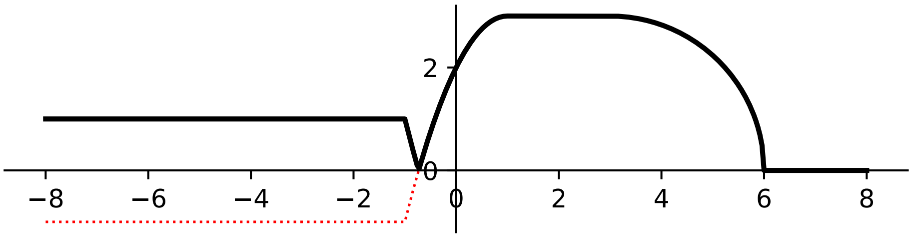
5. $y = 2f(x)$;



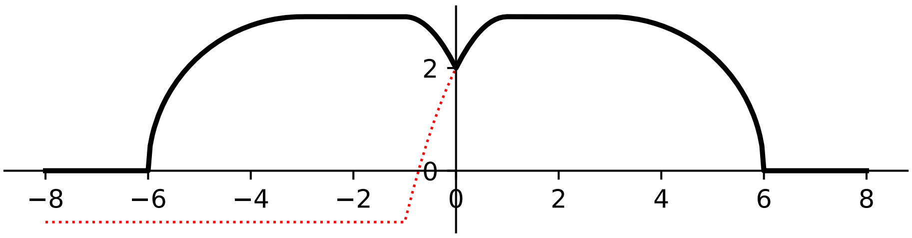
6. $y = \frac{1}{2}f(x) + 1$;



7. $y = -f(x)$;



8. $y = |f(x)|$;



9. $y = f(|x|)$;

Exercice 5

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(e^x + 1\right).$$

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser de deux manières.

On note g cette bijection, exprimer g^{-1} à l'aide des fonctions usuelles exp et ln.

Solution 5

emière méthode. On étudie la fonction f. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 \in \mathbb{R}_+^\star$. De plus, la fonction $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f étant de plus continue, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

conde méthode. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln(e^x + 1) = y \\ &\iff e^x + 1 = e^y && \because \text{exp est injective} \\ &\iff e^x = e^y - 1. \end{aligned}$$

Puisque $e^x > 0$, on a nécessairement $y > 0$. Lorsque cette dernière condition est vérifiée, on a

$$f(x) = y \iff x = \ln(e^y - 1).$$

Conclusion

$$\forall y \in]0, +\infty[, \exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = y.$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. De plus, on a déterminé la réciproque de cette bijection

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(e^y - 1) \end{array}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0.$$

Solution 6

L'équation (E) : $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff \left(8^{3x}\right)^2 - 3\left(8^{3x}\right) - 4 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 3X - 4$ a pour discriminant $25 = 5^2$, et pour $X \in \mathbb{R}$,

$$X^2 - 3X - 4 = 0 \iff X = -1 \text{ ou } X = 4.$$

Finalement,

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff 8^{3x} = -1 \text{ ou } 8^{3x} = 4$$

La première relation est impossible ; et puisque ln est injective,

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff 8^{3x} = 4 \iff 3x \ln 8 = \ln 4 \iff 9x \ln 2 = 2 \ln 2 \iff x = \frac{2}{9}.$$

Conclusion

L'équation $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ admet une unique solution qui est $\frac{2}{9}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Solution 7

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+1}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + x - (x+1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) \geq 0 \iff x\sqrt{x} \geq 1 \iff x^{3/2} \geq 1 \iff x \geq 1.$$

Avec égalité si, et seulement si $x = 1$. D'où le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que le minimum de f sur $]0, +\infty[$ est $f(1) = 2\sqrt{2}$.

Soit $a > 0$ et $b > 0$, alors

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a/b+1}\sqrt{b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a/b+1}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + 1\right) = f\,(a/b) \geq 2\sqrt{2}.$$

Exercice 8

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}.$$

On soignera en particulier les points suivants.

1. Domaines de définition, de dérivabilité.
2. Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique, position du graphe par rapport aux asymptote.
3. Dérivée et tableau de variations.
4. Représentation graphique.

Solution 8

La fonction f est définie, continue, dérivable, pour tout valeur de x différente de 2.

Lorsque $x \to 2$, (…) on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote à la courbe de f.

(…) On trouve pour dérivée

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

Le numérateur est un polynôme du second degré ayant pour racines 1 et 3, on en déduit

$$f'(x) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3.$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

(…) On trouve successivement les limites

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - x = \frac{-3x + 7}{x - 2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -3$$

$$f(x) - x + 3 = \frac{1}{x-2} \begin{cases} > 0 & (x > 2) \\ < 0 & (x < 2). \end{cases}$$

La courbe de f admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite Δ d'équation $y = x - 3$. La courbe de f est en-dessous de Δ au voisinage de $-\infty$ et au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

Joli Dessin...

Exercice 9

1. Résoudre
$$\arccos(1/3) + \arccos(1/4) = \arcsin(x). \tag{1}$$

2. Vérifier
$$\arccos \frac{9}{\sqrt{82}} + \arcsin \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Solution 9

1. On a $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Puisque la fonction arccos est strictement décroissante, on a
$$\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{3} < \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}.$$
Ainsi
$$\arccos(1/3) + \arccos(1/4) > \frac{2\pi}{3}. \tag{3}$$
Puisque $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation (1) n'a pas de solution.

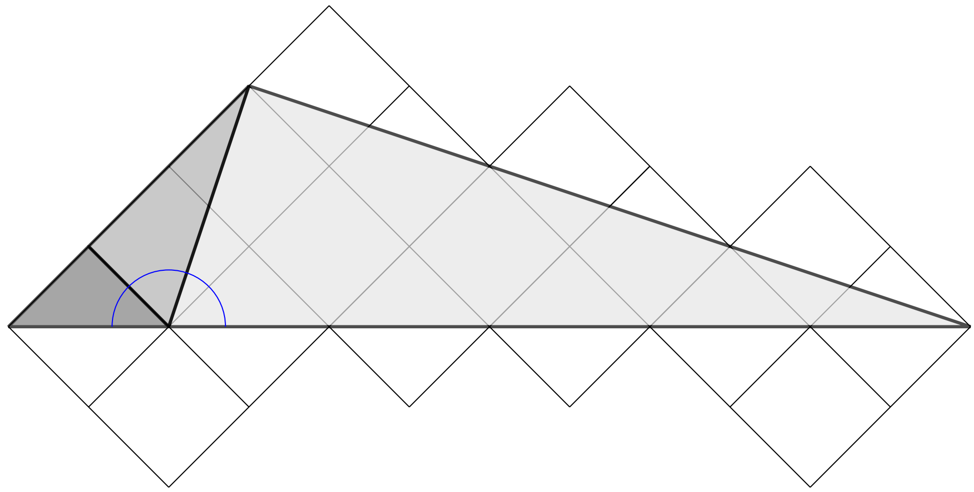
2. Posons $a = \arccos\frac{9}{\sqrt{82}}$ et $b = \arcsin\frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{\pi}{4}$. On a donc
$$\cos a = \frac{9}{\sqrt{82}} \qquad \sin a = \sqrt{1 - \frac{81}{82}} = \frac{1}{\sqrt{82}}$$
$$\cos b = \sqrt{1 - \frac{16}{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \qquad \sin b = \frac{4}{\sqrt{41}}$$
De plus,
$$\cos(a+b) = \frac{9}{\sqrt{82}}.\frac{5}{\sqrt{41}} - \frac{1}{\sqrt{82}}.\frac{4}{\sqrt{42}} = \frac{45-4}{41\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$
Remarquons ensuite que $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{9}{\sqrt{82}} < 1$ et donc $0 < a < \frac{\pi}{6}$. De plus, $0 < \frac{4}{\sqrt{41}} < \frac{1}{2}$ d'où $0 < b < \frac{\pi}{6}$. Ainsi,
$$\cos(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad a+b \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \qquad \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$
L'application cos étant injective sur $[0, \pi/3]$, on obtient $a + b = \frac{\pi}{4}$ d'où le résultat.

Exercice 10

Deviner une expression de

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$$

à l'aide du dessin suivant puis démontrer cette conjecture.



Solution 10

On conjecture

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi.$$

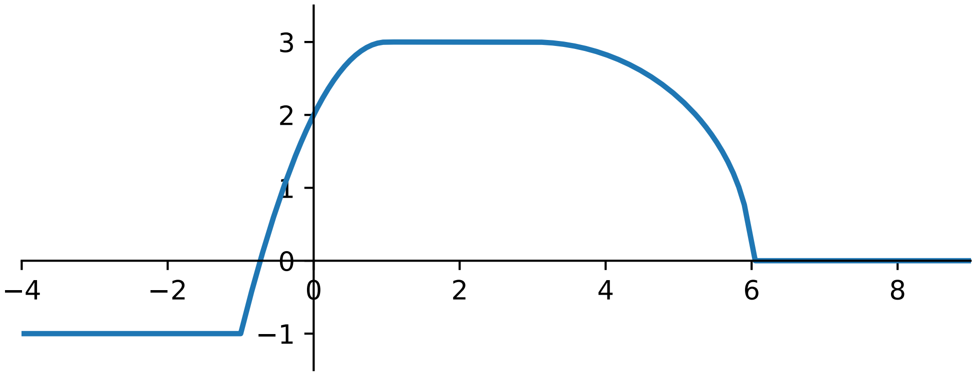
Or

$$\tan(\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{2+3}{1-2\times 3} = -1.$$

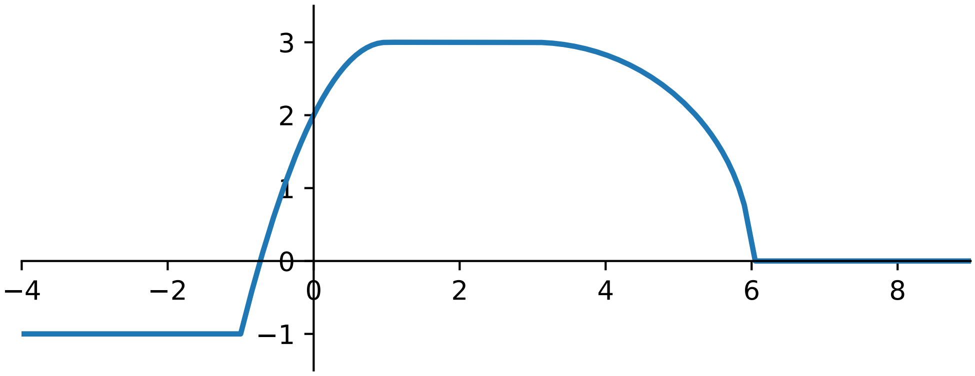
Sachant que arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ et croissante, on a

$$0 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

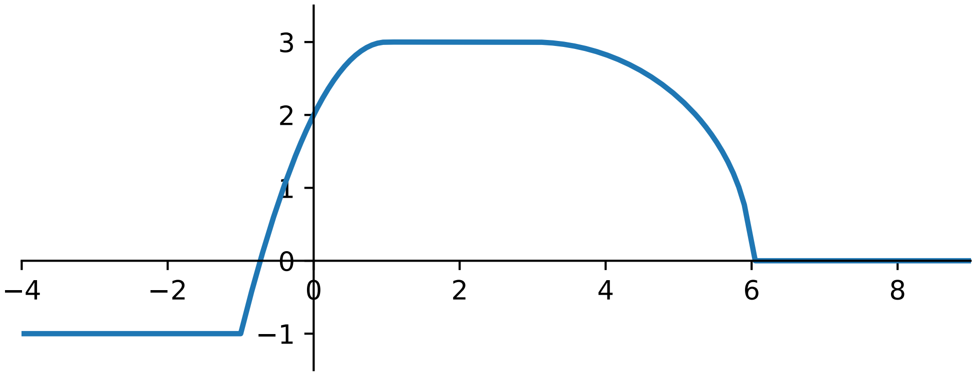
Seul $3\pi/4$ convient. Or $\arctan 1 \ = \pi/4$, ce qui valide la conjecture.



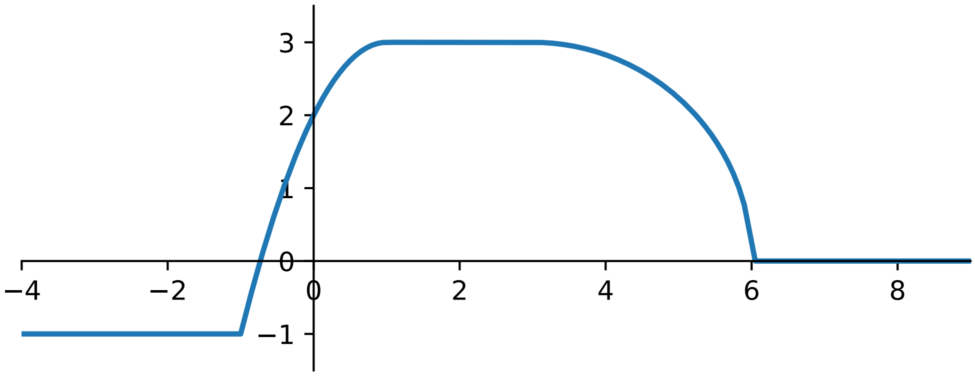
−4
−2
0
2
4
6
8
3
2
1
0
−1



−4
−2
0
2
4
6
8
3
2
1
0
−1



−4
−2
0
2
4
6
8
3
2
1
0
−1



−4
−2
0
2
4
6
8
3
2
1
0
−1