Chapter 30 Développements limités

30.1 Développement limité en 0

30.2 Formule de Taylor-Young

30.3 Opérations sur les développements limités

Exercice 30.1
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \mathrm{sh}(x) - 2\sqrt{1+x}$.
Exercice 30.2
Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction $\arctan$.
Exercice 30.3
Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \sin(x)$.
Exercice 30.4
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$.
Exercice 30.5
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.
Exercice 30.6
Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $\tanh$.
Exercice 30.7 (***)

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p+2q = k$.

Exercice 30.8 (*)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $x = 0$ de
$$f(x) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x).$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de $x = 0$ de
$$f(x) = e^{\sin(2x)}.$$
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $x = 0$ de
$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{sh}\, x).$$

Exercice 30.9 (**)
Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \exp\sqrt{1+x}$.
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(2 + \sin x)$.

Exercice 30.13
Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = (\cos x)\sqrt{1+x}$;
2. $DL4$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1+x}$;
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3}}{1-x}$;
4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^{\cos x}$;
5. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$;
6. $DL4$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Exercice 30.17

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués.

1. $\dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0).
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0).
3. $\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0).
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\dfrac{\pi}{4}$).
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0).
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0).
7. $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1).
8. $\operatorname{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0).
9. $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0).
10. $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0).
11. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$ (ordre 10 en 0).
12. $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0).
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π).

Exercice 30.18

Écrire le développement limité à l'ordre 4 en zéro de

$$f : x \mapsto \arctan\frac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}.$$

30.4 Développement limité en un point a

Exercice 30.19

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = 1$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Exercice 30.20

Donner les développements limités suivants.

1. $DL4$ en $\pi/3$ de $f(x) = \cos x$;
2. $DL4$ en 1 de $f(x) = e^x$;
3. $DL4$ en 2 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
4. $DL3$ en $\pi/4$ de $f(x) = \tan x$;
5. $DL4$ en e de $f(x) = \ln x$;
6. $DL4$ en 1 de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 30.21

Déterminer un équivalent simple, au voisinage de $x = e$ de $e^x - x^e$.

30.5 Applications des développements limités

Exercice 30.23

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{1-e^{2x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\arcsin(x)}{x^3}$.

Exercice 30.24

Déterminer la limite de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

Exercice 30.25

Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+2x+2x^2)}{\ln(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)}.$$

Exercice 30.26 (**)

Déterminer a, b et c tels que la limite en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{a(1-\cos x) + b\sin x + c\tan x + \ln(1+x)}{x^4}$$

soit finie. Quelle est alors cette limite ? Avec les valeurs trouvées, prolonger f par continuité en 0 et examiner si ce prolongement est de classe C^1 en 0.

Exercice 30.27 (**)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le développement limité demandé. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ainsi que les positions relatives.

1. $DL2$ en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\sqrt{1+x}$.

2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x) + \mathrm{e}^x$.

3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1-x) - \cos x$.

4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^x\cos(x) + \dfrac{x^3}{3} - x$.

Exercice 30.28

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de $f(x)$.

2. En déduire le prolongement par continuité de f en zéro. On note encore f ce prolongement.

3. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en zéro.

4. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse zéro, au voisinage de ce point.

Exercice 30.29 (**)

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 30.30 (***)

Pour les fonctions suivantes au voisinage du point a indiqué, étudier la possibilité de prolonger par continuité, puis, dans l'affirmative, la dérivabilité et l'existence d'une tangente à la courbe ; enfin préciser le placement local de la courbe par rapport à sa tangente.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x\ln x}{x-1}$ au point $a = 1$.

2. $g : x \mapsto \ln(\tan x)$ au point $a = \pi/4$.

3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x(e^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x}$ au point $a = 0$.

Exercice 30.31
Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.

2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

30.6 Développements asymptotiques

Exercice 30.35

1. Montrer que, pour $\lambda > e$, l'équation $e^x = \lambda x$ a deux solutions dans $]0, +\infty[$.
On notera $x(\lambda)$ la plus petite.

2. Se convaincre sur un dessin que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.

3. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.

4. Établir successivement les résultats suivants lorsque λ tend vers $+\infty$:

   (a) $x(\lambda) \sim \dfrac{1}{\lambda}$.

   (b) $e^{x(\lambda)} = 1 + \dfrac{1}{\lambda} + o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

   (c) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$.

   (d) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{3}{2\lambda^3} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^3}\right)$.

On a ainsi obtenu un développement asymptotique de $x(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.
Exercice 30.37 *Applications des développements limités à l'étude de suites*
Déterminer un équivalent des suites dont le terme général est donné.

1. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

2. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

Exercice 30.42
Étudier avec soin les branches infinies et leur placement local par rapport aux éventuelles asymptotes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sqrt{x^2+1} \end{array}.$$

Exercice 30.46

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Étudier les branches infinies (pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$) de la courbe de f.

Exercice 30.48

Étudier la fonction d'une variable réelle définie par la relation

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

en portant une attention particulière aux asymptotes et demi-tangentes.

Exercice 30.50

Réaliser l'étude complète des fonctions suivantes et les tracer. Étudier avec soin les branches infinies et leur placement local par rapport aux éventuelles asymptotes.

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}, \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Exercice 30.51

Soit λ un réel strictement positif, différent de $\sqrt{2}$, et (f_λ) la famille de fonctions définie par

$$f_\lambda(x) = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda/x}.$$

On note C_λ sa courbe représentative.

1. *Étude de f_1.*

(a) Étudier les variations de la fonction f_1.

(b) À l'aide d'un développement limité — on dit aussi développement asymptotique —, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que sa courbe admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

(c) Calculer les limites à gauche et à droite de f_1 en 0. La fonction f_1 admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Si oui, ce prolongement est-il dérivable ? Que peut-on en déduire pour la courbe C_1 ?

(d) Représenter graphiquement C_1 et son asymptote oblique.

2. Dans cette question, on étudie f_2. À l'aide d'un développement limité, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que la courbe C_2 admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

3. À l'aide d'un développement limité, étudier les branches infinies de C_λ.

Exercice 30.53

Tracer la courbe représentative de la fonction suivante

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Exercice 30.106

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1+\cos 4x}$.

2.