# Chapter 26 Dérivées

## 26.1 Dérivées

**Exercice 26.1**

En utilisant la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = -5x$.
3. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$.
4. $f(x) = x^2 + x - 3$.
5. $f(x) = x^3 - 12x$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
7. $f(x) = \sqrt{x+4}$.
8. $g(x) = -3$.
9. $f(x) = 3x + 2$.
10. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$.
11. $f(x) = 2 - x^2$.
12. $f(x) = x^3 + x^2$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
14. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

**Exercice 26.2**

Étudier la dérivabilité en 0 des applications suivantes.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{array}$.
2. $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$.

**Exercice 26.3** (*)

Soient $V$ un voisinage de $x_0$ et $f, g$ deux fonctions définies sur $V$ et dérivables en $x_0$.
Montrer que si : $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ et $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.
*Application :* $f(x) = x \cos x$ ; calculer $f'(k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

**Exercice 26.4**

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \exp(1/x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $D$ de $f$ et justifier que $f$ est continue sur $D$.
2. Justifier que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On notera encore $f$ la fonction ainsi prolongée.
3. Vérifier que $f$, ainsi prolongée, est dérivable à gauche et à droite en 0. Est-elle dérivable en 0?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$ au voisinage de 0.
5. Préciser un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de l'infini.
6. Cela vous permet-il d'obtenir une asymptote oblique de $f$?

## 26.2 Opérations sur les dérivées

**Exercice 26.5**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.
2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

**Exercice 26.6** (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. *Vrai ou Faux ?*

**1.** Si $f$ est périodique, alors $f'$ est périodique.

**2.** Si $f'$ est périodique, alors $f$ est périodique.

**3.** Si $f$ est paire, alors $f'$ est impaire.

**4.** Si $f$ est impaire, alors $f'$ est paire.

**5.** Si $f'$ est paire, alors $f$ est impaire.

**Exercice 26.7** *Calcul de dérivées*

Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que la fonction dérivée.

**1.** $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$.

**2.** $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\tan(x)}$.

**3.** $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$.

**4.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.

**5.** $f_5 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

**6.** $f_6 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

**7.** $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

**8.** $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

**9.** $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$.

**10.** $f_{10} : x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.

**11.** $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.

**12.** $f_{12} : x \mapsto |x|^3$.

**13.** $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$.

**14.** $f_{14} : x \mapsto x + \dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$.

**15.** $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$.

**16.** $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}$.

**17.** $f_{17} : x \mapsto \left|x^2-3x+2\right|$.

**18.** $f_{18} : x \mapsto \ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$.

**19.** $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$.

**20.** $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$.

**21.** $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

**22.** $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\right)$.

**23.** $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.

**24.** $f_{24} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

**25.** $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.

**26.** $f_{26} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.

**27.** $f_{27} : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

**28.** $f_{28} : x \mapsto \ln\left(e^x-e^{-x}\right)$.

**29.** $f_{29} : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

**30.** $f_{30} : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)}$.

**31.** $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

**Exercice 26.8**

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \left(\frac{x-a}{x}\right)^x.$$

**1.** Déterminer son ensemble de définition.

**2.** La fonction $f$ est-elle dérivable ? Si oui, calculer sa dérivée.

**3.** Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

## 26.3 Étude globale des fonctions dérivables

**Exercice 26.9** (*)

Déterminer les extrémums globaux pour chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

**1.** $f(x) = 3 - x$ sur $[-1, 2]$.

**2.** $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0, 4]$.

**3.** $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2+3}$ sur $[-1, 1]$.

**Exercice 26.10**

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une application dérivable s'annulant en $-1$, $0$ et $1$. On note

$$\begin{array}{rccl} g : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x^4 + x + f(x) \end{array}.$$

Montrer qu'il existe $c \in ]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

**Exercice 26.11** (*)

Montrer que l'équation algébrique $x^n - ax - b = 0$, où $n \geq 2$ ne peut avoir plus de 2 racines réelles si $n$ est pair, ni plus de 3 si $n$ est impair.

**Exercice 26.12** (**)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in ]0, 1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

**Exercice 26.13** (***)

Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe des réels distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $[0, 1]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

.

**Exercice 26.14**

Soit $f : [0, +\infty[$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

**Exercice 26.15**

Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

**Exercice 26.16**

Montrer

$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[, \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x \ln x}.$$

**Exercice 26.17**

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En déduire le comportement de la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**Exercice 26.18**

Soit $\alpha \in ]0, 1[$. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$$

lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 26.19**

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right).$$

**Exercice 26.20**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

**1.** Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq 1$.

**2.** Établir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**Exercice 26.21** *Le théorème de Darboux*

Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de Darboux :

> Une fonction dérivée sur un intervalle, bien que non nécessairement continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $I$ un intevalle véritable de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Considèrons $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ et $\lambda$ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

On considère les applications $\varphi$ et $\psi$ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} ]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} [a, b[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{array}$$

**1.** Montrer que $\varphi$ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore $\varphi$ ce prolongement.

**2.** Montrer que $\psi$ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore $\psi$ ce prolongement.

**3.** Soit $\lambda$ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\varphi(c) = \lambda \text{ ou } \psi(c) = \lambda.$$

**4.** En déduire qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

**Exercice 26.22** *La règle de l'Hospital*

Soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$.

**1.** Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Ce résultat porte parfois le nom de théorème de Cauchy ou formule des accroissements finis généralisée.

**2.** On suppose que $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$.

(a) Montrer que si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

(b) Vérifier que la réciproque est fausse en considérant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x.$$

**3.** Applications : Calculer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad b)\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}, \quad \text{et} \quad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

La règle de l'Hospital est hors programme. Il est d'ailleurs amusant et surprenant de constater qu'il existe une espèce d'aura maléfique autour de cette règle, pourtant fort simple et performante, si bien que son utilisateur est souvent considéré comme ayant commis un sacrilège.

**Exercice 26.23**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. On note $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$.
Montrer

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 M.$$

**Exercice 26.24**

Soit $f$ une fonction définie sur $[a,b]$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}.$$

**Exercice 26.25**

On considère l'application $f$ et la suite $(u_n)$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_0 \in ]0,1[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par $f$.

2. Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0,1[$.

3. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$ dans l'intervalle $]0,1[$.

4. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$

5. Conclure.

6. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

**Exercice 26.26**

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\sqrt{x} \end{array}.$$

1. En revenant à la définition.

2. En utilisant le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

**Exercice 26.27**

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = e^{|t|}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_1 = ]-\infty, 0[$.

2. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_2 = ]0, +\infty[$.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

## 26.4 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

**Exercice 26.28**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$. Déterminer les dérivées successives de $f$.

**Exercice 26.29**

Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$.

2. $g(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

**Exercice 26.30**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée $n$-ième de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}\ln(x) \end{array}$.

**Exercice 26.31**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0. \tag{$E_1$}$$

**2.** On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0. \qquad (E)$$

On considère une fonction $y : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose

$$z : \begin{array}{rcl} ]0,\pi[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\cos(t)) \end{array}.$$

(a) Indiquer pourquoi la fonction $z$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ puis exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de $y'$, $y''$ et de $t$.

(b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $z$ sur $]0,\pi[$ lorsque $y$ vérifie l'équation $(E)$ sur $]-1,1[$ ?

(c) En déduire la solution générale de l'équation $(E)$.

**Exercice 26.32**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

**1.** Montrer que $f$ est continue en 0.

**2.** Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**3.** $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 26.33**

Pour quelles valeurs de $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ la fonction suivante est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ ?

$$f : \begin{array}{rcl} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in ]0,b[, \\ x^2 + 12 & : x \in [b,+\infty[ \end{cases} \end{array}$$

**Exercice 26.34** (**) *Centrale PSI*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $]-\infty,a[$, $\left(y_n\right)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $]a,+\infty[$. On suppose que $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ ont pour limite $a$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}.$$

**1.** On suppose $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $a$. La suite $\left(u_n\right)$ a t-elle une limite ?

**2.** On suppose simplement que $f$ dérivable au voisinage de $a$. La suite $\left(u_n\right)$ a t-elle une limite ?