Chapter 21 Suites de nombres réels et complexes

21.1 L'ensemble des suites

Exercice 21.1

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 21.2

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

21.2 Limite d'une suite

Exercice 21.3

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 21.4

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 21.5

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3n}{2n^2-1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ donné.

Exercice 21.6

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 21.7

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 21.8

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers ℓ.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2023\varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}$.

Exercice 21.9

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

21.3 Suite et relations d'ordres

Exercice 21.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Exercice 21.11

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 21.12

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 21.13

Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 21.14

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 21.15

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq k u_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21.16

Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 21.17

Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 21.18

Soit u et v deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

21.4 Opérations algébriques

Exercice 21.19

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}.$$

Exercice 21.20

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;
5. $u_n = (-1)^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

Exercice 21.21

Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Exercice 21.22

On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 21.23

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$.
2. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$.
3. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$.
4. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$.
5. $u_n = \dfrac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos(\frac{n\pi}{5})}$.
6. $u_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$.

Exercice 21.24 *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.

Exercice 21.25

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell$, avec $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

(a) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ avec $\ell \in [0, +\infty]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \ell.$$

(b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

21.5 Comparaison des suites de référence

21.6 Suites monotones

Exercice 21.26

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 21.27

Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est convergente.

Exercice 21.28

Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.

3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 21.29

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 21.30

Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 21.31

Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 21.32

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 21.33

Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.

4. Calculer $u_n v_n$. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Exercice 21.34 *Suites de Cauchy*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \left(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \implies \left|u_n - u_p\right| \leq \varepsilon\right). \tag{1}$$

1. Montrer que la suite est bornée.

2. Montrer qu'elle est convergente.

21.7 Suite extraites

Exercice 21.35

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{3p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 21.36

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

narque Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 21.37

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \sin^2\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

Exercice 21.38

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 21.39

Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 21.40 $\limsup$ *et* $\liminf$

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = \inf \left\{ u_k \;\middle|\; k \geq n \right\} \quad \text{et} \quad b_n = \sup \left\{ u_k \;\middle|\; k \geq n \right\}$$

1. Montrer que les suite (a_n) et (b_n) convergent. On note $\liminf u_n$ la limite de (a_n) et $\limsup u_n$ la limite de (b_n).

2. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n), alors

$$\liminf u_n \leq a \leq \limsup u_n.$$

3. Montrer que $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si, et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$.

4. Montrer que cette notion coïncide avec

$$\limsup u_n = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n \right\}.$$

Exercice 21.41

Soit (x_n) une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de (x_n) convergeant vers des limites distinctes.

21.8 Caractérisations séquentielles

Exercice 21.42

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 21.43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence $\overline{U}$ de U.

Exercice 21.44

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence A de la suite (u_n) est fermé.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq n \}$. Montrer que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

3. Montrer que $\overline{U} = A \cup U$.

21.9 Exemples de suites complexes