Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le lundi 20 novembre 2023

Exercice 1

Partie A Nombre de surjections entre deux ensembles finis

On note $s(n, p)$ le nombre de *surjections* d'un ensemble E de n éléments dans un ensemble F de p éléments.

A1. Calculer $s(2, 1)$, $s(n, n)$, $s(n, 1)$, pour $n \geq 1$, et $s(n, p)$ pour $p > n$.

A2. Montrer (par un raisonnement combinatoire)

$$\forall n \geq 2, \forall p \geq 1, s(n, p) = p\left(s(n-1, p) + s(n-1, p-1)\right). \tag{1}$$

Indication : On pourra enlever un élément à E : soit $E' = E \setminus \{ a \}$ l'ensemble ainsi obtenu. Classer les surjections de E vers F selon que leur restriction à E' est ou n'est pas surjective vers F.

A3. Montrer (par un raisonnement combinatoire)

$$\forall n \geq 1, \forall p \geq 1, \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s(n, k) = p^n. \tag{2}$$

Indication : On remarquera que p^n est le nombre d'applications de E vers F et qu'il s'agit de compter autrement ces applications.

A4. On veut en déduire, en utilisant les questions **A2** et **A3** de cette partie

$$\forall n \geq 1, \forall p \geq 1, \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{p-k} (p-k)^n = s(n, p). \tag{3}$$

(a) Traiter le cas $n = 1$.

(b) Traiter le cas où $p = 1$ et $n \geq 1$.

(c) Traiter par récurrence sur n le cas où $p > 1$ et $n \geq 1$.
Indication : On pourra utiliser la formule valable pour $p \geq 1$ et $0 \leq k \leq p$, $\binom{p-1}{p-k} = \frac{k}{p}\binom{p}{p-k}$.

A5. Donner les valeurs de $s(n, p)$ pour $1 \leq p \leq 5$ dans un tableau (du type triangle de Pascal) en indiquant la méthode de remplissage.

A6. Application. Dans un (in)certain pays, chaque fois que l'on implante une grande surface de chez LARNAK, les dirigeants doivent verser un dessous de table à l'un des quatre partis de la coalition au pouvoir. Chaque parti de cette coalition touche au moins un dessous de table (sinon il dénoncerait le système). LARNAK a décidé d'implanter 10 grandes surfaces dans ce merveilleux pays. Combien y a-t-il de répartitions possibles des 10 pots de vins ?

Partie B Une formule d'inversion

On considère deux suites de nombres (f_n) et (g_n) liées par la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k. \tag{4}$$

B1. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer le terme général de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si on prend successivement pour terme général de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les quantités

(a) $g_n = 1$;

(b) $g_n = 2^n$;

(c) $g_n = (-1)^n$;

(d) $g_n = e^{na}$ où a est un réel fixé.

B2. Démontrer par récurrence la relation réciproque suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k. \tag{5}$$

B3. Retrouver la formule pour $s(n, p)$ de la question **A4** en utilisant la formule d'inversion.