Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le jeudi 5 octobre 2023

Exercice 1

Pour tout entier n, on note

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk.$$

2. Montrer ensuite

$$2 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} j \right)^2 .$$

3. À l'aide des questions précédentes, retrouver l'expression de Q_n vue en cours.

Exercice 2

On considère (a_k), (b_k), (c_k), (d_k) des familles de nombres réels.

1. Donner une expression développée (relativement simple) de

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j \right) \left(c_j d_k - c_k d_j \right) .$$

2. En déduire l'identité de Lagrange:

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 .$$

3. Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$