Chapter 7 Calculs algébriques

Exercice 7.1

Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$
$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Solution 7.1

En écrivant explicitement les sommes, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Exercice 7.2

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Solution 7.2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$R(0)$ est vraie car
$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{0(0+1)(2\times 0+1}{6} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $R(n)$ vraie. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \because R(n) \\ &= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}.\end{aligned}$$

Or $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on a donc $R(n+1)$:
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7.3 (***)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer par récurrence (avec prédécesseurs) que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Solution 7.3

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)\,:\, u_n = 2^{n-1}$.

On a $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, d'où $R(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose $R(1), \ldots, R(n)$ vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} && \text{d'après } R(1), \ldots, R(n) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= 1 + 2^n - 1 = 2^n \\
u_{n+1} &= 2^{n+1-1}
\end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 7.4

Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$

8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Solution 7.4

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2$ ou également $\displaystyle\sum_{k=10}^{10} k^2.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + 1$ ou encore 2^0 ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{5} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k-4}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=-1}^{5} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. Poser $l = k - 1$. Lorsque $k \in \{ 1, 2, 3 \}$, on a $l = k - 1 \in \{ 0, 1, 2 \}$.

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{l=0}^{2} (-1)^l \frac{(l+1)^2}{(2l+2)!}.$$

Puis l'indice étant muet, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^l \frac{(k+1)^2}{(2k+2)!}.$$

8. Poser $l = k + 1$.

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{l=2}^{5} (-1)^{l-1} \frac{2l-2}{l} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{k-1} \frac{2k-2}{k}$$

Exercice 7.5

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Solution 7.5

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{k=0}^{n} (k-k) + n + 1 = n+1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum k = 1^n \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$ $\displaystyle 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Exercice 7.6

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Solution 7.6

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Finalement, par téléscopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 7.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Solution 7.7

Une solution directe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1} - \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=p-2}^{q} u_k - \sum_{k=p-4}^{q-2} u_k \\
&= \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k + u_{q-1} + u_q - \left(u_{p-4} + u_{p-3} + \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k \right) \\
&= u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.
\end{aligned}$$

Une solution astucieuse avec télescopage, on écrit $u_{k+1} - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \\
&= u_q - u_{p-3} + u_{q-1} - u_{p-4}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.8

Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Solution 7.8

Pour $k \geq 2$, on a

$$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln(k) + \ln(k+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k)\\
&= \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(1) + \ln(2) - 2\left(\cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(2) + \ln(n)\right) + \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(n) + \ln(n+1)\\
&= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2)\\
&= \boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.9

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Solution 7.9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
De manière analogue, $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En sommant les inégalités précédente pour $n = 1..10000$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{100000} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{10000} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$
Après telescopage, on obtient
$$\sqrt{10001} - 1 < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{10000} = 100$$
Or $\sqrt{10001} - 1 > \sqrt{10000} - 1 = 99$, d'où
$$99 \leq \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < 100$$
et donc
$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) \right\rfloor = 99.$$

Exercice 7.10

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

3. En déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution 7.10

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a $\frac{1}{k} > 0$ et $\frac{1}{k+1} > 0$. Or la fonction arctan est croissante majorée par $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$0 < \arctan\frac{1}{k} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 < \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1-k}{k(k+1)+1} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

Et puisque $\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on a bien

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. On a par telescopage,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \arctan(1) - \arctan\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \arctan x = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7.11

Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. $\sum_{i=1}^{n} k$.
3. $\sum_{k=1}^{n} i$.
4. $\sum_{k=1}^{n} n$.
5. $\prod_{k=1}^{n} k$.
6. $\prod_{i=1}^{n} k$.
7. $\prod_{k=1}^{n} i$.
8. $\prod_{k=1}^{n} n$.

Solution 7.11

1. $n(n+1)/2$.
2. nk.
3. ni.
4. n^2.
5. $n!$.
6. k^n.
7. i^n.
8. n^n.

Exercice 7.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}$.

2. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx).$$

On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh.

Solution 7.12

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k .$$

- Si $x \neq 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \frac{e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} = e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k = e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2}e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{nx/2} + e^{-nx/2}\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{ch}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

- Si $x = 0$, on a $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = n + 1$.

Exercice 7.13

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + bk) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a + bk).$$

Exprimer de manière simple C_n et S_n à l'aide des fonctions hyperboliques.

Solution 7.13

Si $b = 0$, on a $C_n = n \operatorname{ch} a$ et $S_n = n \operatorname{sh} a$. Supposons maintenant $b \neq 0$.

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} &= e^a \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^b\right)^k \\
&= e^a \frac{1 - e^{nb}}{1 - e^b} \\
&= e^a \frac{e^{nb/2}}{e^{b/2}} \frac{e^{nb/2} - e^{-nb/2}}{e^{b/2} - e^{-b/2}} \\
&= e^{a+(n-1)b/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant a et b par $-a$ et $-b$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-a-kb} = e^{-a-(n-1)b/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} + e^{-a-kb} \right) \\
&= \operatorname{ch}\left(a + \frac{n-1}{2} b\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} - e^{-a-kb} \right) \\
&= \operatorname{sh}\left(a + \frac{(n-1}{2} b\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.14

Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Solution 7.14

1. $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

2. $1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5$.

Exercice 7.15

Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Solution 7.15

On a

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x)^k \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k (2x)^{3k-24}.$$

L'exposant de x vaut 3 si, et seulement si $3k - 24 = 3$, c'est-à-dire si $k = 9$, et le terme en x^3 est donc

$$\binom{12}{9} (-1)^9 (2x)^{3 \cdot 9 - 24} = -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} (2x)^2 = -220 \cdot 8x^3 = -1760x^3.$$

Exercice 7.16

Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.
2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.
3. Le terme en x^6 du développement de $(3-4x^2)^5$.
4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{14}$.

Solution 7.16

De manière analogue à l'exercice 7.15, on obtient

1. $-448x^5$.
2. $1001x^{20}y^8$.
3. $-5760x^6$.
4. $3003x^4$ et $0x^6$.

Exercice 7.17

Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4, dans le développement de

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

Solution 7.17

On a

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k \left(\frac{a}{x^2}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} x^{3k-14}.$$

Le terme en x^4 de ce développement correspond à $k = 6$. Le coefficient du terme en x^4 est donc $\binom{7}{6} a = 7a$. Celui-ci est égal à 14 si, et seulement si $a = 2$.

Exercice 7.18

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Solution 7.18

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
1000003^5 = \left(10^6+3\right)^5 &= 10^{30} + 5\times 3\cdot 10^{24} + 10\times 9\cdot 10^{18} + 10\times 27\cdot 10^{12} + 5\times 81\cdot 10^6 + 243 \\
&= 10^{30} + 15\cdot 10^{24} + 90\cdot 10^{18} + 270\cdot 10^{12} + 405\cdot 10^6 + 243 \\
&= 1\,000\,015\,090\,000\,270\,000\,405\,000\,243.
\end{aligned}$$

Exercice 7.19

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Solution 7.19

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = -\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3 \times \left(3^2\right)^k \binom{n}{k} = 3\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(3^2\right)^k = 3\left(1 + 3^2\right)^n = 3 \cdot 10^n.$

Exercice 7.20

Soit une suite arithmétique (u_n), on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$;
2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$;
3. $r = 6$ et $s_5 = 36$;
4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$;
5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$;
6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

Solution 7.20

1. $r = -6/5$.
2. $r = 4$.
3. $u_0 = -9$.
4. $u_0 = 60$ et $r = 4$.
5. $u_0 = 320/3$ et $r = -10/3$.
6. $u_0 = 7$ et $r = 2$.

Exercice 7.21

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.
2. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer
$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \tag{7.1}$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{7.2}$$

Solution 7.21

Exercice 7.22

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^{i+j}.$$

Solution 7.22

Exercice 7.23

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

Solution 7.23

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \frac{j(j+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(j^3 + j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n(n+1) + 2(2n+1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n^2 + 7n + 2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Exercice 7.24

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i + j$.

2. Calculer la somme
$$S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j).$$
On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i, j)$.

arque Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Solution 7.24

Exercice 7.25

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$.
4. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} (i+j)$.
5. $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j}$.
6. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j+1}$.
7. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} (j-i)$.
8. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2$.
9. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i^2}{j}$.

Solution 7.25

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i = 3\frac{2}{9}\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right)$.

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

4. On écrit une somme double

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j\right) = \frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)\\ &= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2+j = \frac{3}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\right)\\ &= \frac{3}{2}\frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

5. Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^i x^j = \sum_{i=0}^{n} x^i\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n} x^i\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.\end{aligned}$$

6. Nous allons écrire une somme double. Puisque l'on ne sait pas calculer une somme du type $\displaystyle\sum_j \frac{1}{j}$, nous allons plutôt commencer par sommer sur l'indice i.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j+1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\frac{j(j+1)}{2}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

7. On peut écrire une somme double ($\sum_i\sum_j$), mais on peut aussi utiliser d'abord la linéarité.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(j-i)=\sum_{1\le i\le j\le n}j-\sum_{1\le i\le j\le n}i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}i$$
$$=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}\big((n+1)k-k^2\big)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(n+1)k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)^2}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(4n+2-3n-3)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

8.

$$\sum_{1\le i,j\le n}(i+j)^2=\sum_{1\le i,j\le n}i^2+2ij+j^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2+2ij+j^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}i^2+\sum_{j=1}^{n}2ij+\sum_{j=1}^{n}j^2\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$=n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n^2(n+1)(2n+1+3n+3+2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

9.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i^2}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}j^2+\frac{1}{2}j+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{6}n=\frac{n(4n^2+6n+2+9n+9+6)}{36}$$
$$=\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}$$

Exercice 7.26

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Solution 7.26

Exercice 7.27

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.

2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Solution 7.27

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, et donc

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

et en évaluant en 1,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = \boxed{n2^{n-1}}.$$

2. Le premier terme de la somme étant nul, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}$$

Or,

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} 1^{n-p} 1^p = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.$$

Finalement, $\boxed{A_n = n2^{n-1}}$.

Exercice 7.28

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$. Déterminer les dérivées successives de f.

Solution 7.28

Exercice 7.29

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}\ln(x) \end{array}$.

Solution 7.29

Exercice 7.30 *BanqueCCINP 2023 Exercice 3 analyse*

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Solution 7.30 *BanqueCCINP 2023 Exercice 3 analyse*

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
On prouve, par récurrence, que :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.

2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{e}^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons (P_n) la propriété:
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
$\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et: $\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right.$
En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient: $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)$.
Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.

On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.