

Chapter 7 Calculs algébriques

7.1 Le symbole somme \sum

Exercice 7.1

Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^4 k^3$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^4 n^3$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^4 k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^5 (k-1)^3$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^4 (5-k)^3$$

Exercice 7.2

1. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 7.3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer par récurrence (avec prédécesseurs) que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 7.4

Compléter les égalités suivantes.

$$1. \sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^9 k^2 + \dots.$$

$$2. \sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \dots.$$

$$3. \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\dots} \frac{1}{l-2}.$$

$$4. \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^7 \frac{1}{\dots}.$$

$$5. \sum_{k=1}^7 \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\dots}^{\dots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$$

$$6. \sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\dots}^{\dots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$$

$$7. \sum_{k=1}^3 (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^2 \dots.$$

$$8. \sum_{k=\dots}^{\dots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^5 (-1)^{\dots} \frac{\dots}{k}.$$

Exercice 7.5

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^n l;$$

$$2. \sum_{k=0}^n (2k+1);$$

$$3. \sum_{k=1}^n k(k-1);$$

$$4. \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2).$$

Exercice 7.6

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 7.7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 7.8

Calculer

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

Exercice 7.9

1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right).$$

Exercice 7.10

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\arctan \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) = \arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \arctan \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right).$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

7.2 Sommes usuelles

Exercice 7.11

Calculer

$$1. \sum_{k=1}^n k.$$

$$2. \sum_{i=1}^n k.$$

$$3. \sum_{k=1}^n i.$$

$$4. \sum_{k=1}^n n.$$

$$5. \prod_{k=1}^n k.$$

$$6. \prod_{i=1}^n k.$$

$$7. \prod_{k=1}^n i.$$

$$8. \prod_{k=1}^n n.$$

Exercice 7.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$1. \text{ Montrer que } 1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}.$$

2. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx).$$

On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh .

Exercice 7.13

Développer.

$$1. (a + b)^7.$$

$$2. (1 - 3x)^5.$$

Exercice 7.14

Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Exercice 7.15

Calculer.

$$1. \text{ Le terme en } x^5 \text{ du développement de } (x - 2)^8.$$

$$2. \text{ Le terme en } x^{20} \text{ du développement de } (x^2 - y^2)^{14}.$$

$$3. \text{ Le terme en } x^6 \text{ du développement de } (3 - 4x^2)^5.$$

$$4. \text{ Le terme en } x^4 \text{ et le terme en } x^6 \text{ du développement de } \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{14}.$$

Exercice 7.16

Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4 , dans le développement de

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

Exercice 7.17

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Exercice 7.18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}. \quad \left| \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}. \quad \right| \quad 3. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{2k+1}.$$

Exercice 7.19

Soit une suite arithmétique (u_n) , on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$; | 4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$; |
| 2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$; | 5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$; |
| 3. $r = 6$ et $s_5 = 36$; | 6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$. |

Exercice 7.20

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

- Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.
- Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1})$, montrer

$$\sum_{i=1}^p \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \quad (7.1)$$

- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \quad (7.2)$$

7.3 Généralisation de la notation \sum

Exercice 7.21

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$V_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{i+j}.$$

Exercice 7.22

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

Exercice 7.23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculer la somme $S_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j$.

- Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j).$$

On pourra scinder cette somme en deux.

- En déduire l'expression de la somme $S_3 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 7.24

Simplifier les sommes suivantes.

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}.$</p> <p>2. $\sum_{i=0}^n i(i-1).$</p> <p>3. $\sum_{j=1}^n (2j-1).$</p> <p>4. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j).$</p> | <p>5. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}.$</p> <p>6. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}.$</p> <p>7. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i).$</p> <p>8. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2.$</p> <p>9. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}.$</p> |
|---|---|

7.4 Le symbole produit \prod

Exercice 7.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n);$
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1);$
3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$