Chapter 9 Corps des nombres complexes

9.1 Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9.2 Définition des nombres complexes

Exercice 9.1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1-2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2+i)^3$.
6. $z_6 = (1+i)^2 - (2-i)^2$.

Exercice 9.2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3+i)(2-3i)(4+5i)$.
2. $z_2 = (1+i)^{10}$.
3. $z_3 = (2-i)^4$.

9.3 Règles élémentaires de calcul

Exercice 9.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1+4i)z + (1-2i) = iz + 3$
2. $\dfrac{1+3iz}{1+3z} = i\dfrac{z+2}{z-5}$

Exercice 9.4

Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Exercice 9.5

À tout nombre complexe z différent de 0 et -1, on associe

$$u = \frac{z^2}{z+1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{z(z+1)}.$$

1. Déterminer z pour que u et v soient tous deux réels.
2. Calculer les valeurs correspondantes de u et v.

9.4 Représentation trigonométrique

Exercice 9.6 (***)

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1+i$;
2. $1-i\sqrt{3}$;
3. i ;
4. $-2\sqrt{3}+2i$;
5. $2+i$;
6. 17 ;
7. $-3i$;
8. $-\pi$;
9. $-12-5i$;
10. $-5+4i$.

Exercice 9.7

Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 9.8

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 9.9

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 9.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 9.11

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z-2| = 3$.
2. $|2z-1+i| = 4$.
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.
4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Exercice 9.12 *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 9.13

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\varrho e^{i\theta}$ où ϱ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
2. $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$.
3. $1 + i\tan\alpha$.
4. $\cos\alpha + i(1+\sin\alpha)$.
5. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.
6. $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\beta+i\sin\beta}$.
7. $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$.
8. $e^{i\beta} + e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Exercice 9.14

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

2. En déduire α et β.

3. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.

4. Déterminer $\sin \frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

Exercice 9.15

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0 \implies |z| \leq 1.$$

Exercice 9.16

Soit z un nombre complexe différent de -1 et M le point du plan d'affixe z. On pose $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. z' soit réel ;

2. z' soit imaginaire pur ;

3. z' soit de module 2.

Exercice 9.17

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 9.18

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Exercice 9.19

Linéariser les expressions suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2 x \sin x$.
2. $\sin^3 x \cos^3 x$.
3. $\sin^4 x \cos^2 x$.
4. $\cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 9.20 *BanqueCCINP 2023 Exercice 94 algèbre*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On note A le point d'affixe i.

À tout point M du plan distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe
$$z' = \frac{iz}{z - i}.$$

1. Déterminer les coordonnées des points M tels que l'on ait $M = M'$.

2. Déterminer les coordonnées du point B' associé au point B d'affixe 1.
   Déterminer les coordonnées du point C tel que le point C' associé ait pour affixe 2.

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

4. Placer A, B, B', C, C' et Γ sur une même figure.

5. Soit z un nombre complexe différent de i.

(a) Montrer que l'on a $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$.

(b) On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 9.21

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta).$$

Exercice 9.22 *IMT PSI 2022*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 9.23

Calculer le module et un argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\leq 2p\leq n}} (-1)^p \binom{n}{2p} = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\leq 2p+1\leq n}} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$$

Exercice 9.24 *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

9.5 Racines d'un polynôme

Exercice 9.25

Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.

Exercice 9.26

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0. \tag{9.1}$$

Exercice 9.27

Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Exercice 9.28

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Exercice 9.29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 6 + 8i = 0. \tag{9.2}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Exercice 9.30

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.

2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.

4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Exercice 9.31

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.

2. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$.

3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

9.6 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

Exercice 9.32

Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 9.33

On considère le polynôme $P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

1. (Cours) Donner la définition et les expressions des racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
2. À l'aide de ces racines cinquièmes de l'unité, déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
3. Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec a, b, c des réels que l'on calculera.

   Déterminer alors une autre écriture des racines de P.
4. Comparer les résultats obtenus et en déduire une expression algébrique de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 9.34

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{9.3}$$

1. Résoudre (9.3) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (9.3) sous forme trigonométrique.
2. On va maintenant résoudre (9.3) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{9.4}$$
3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,
$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{9.5}$$
4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,
$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{9.6}$$
5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$
7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 9.35

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.
2. $(z^2 - 2z)\cos^2\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.
3. $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.36

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

2. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.

3. $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

Exercice 9.37

Soit n un entier naturel impair fixé.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(z^2+1\right)^n - (z-i)^{2n} = 0. \tag{E}$$

Exercice 9.38

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - (3-2i)z + (2-2i) = 0. \tag{9.7}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. En déduire les solutions de l'équation suivante, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

$$Z^6 - (3-2i)Z^3 + (2-2i) = 0. \tag{9.8}$$

On donnera une forme trigonométrique des solutions.

Exercice 9.39 *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

9.7 Exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 9.40

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

9.8 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 9.41

1. Quels sont les complexes z non nuls tels que $z + \frac{1}{z}$ est réel ?

2. Quels sont les complexes z tels que les points d'affixes 1, z, z^3 sont alignés.

Exercice 9.42

Dans le plan complexe, soit I le point d'affixe i. À tout point M d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe iz.

1. On suppose que $z \neq 0$. Calculer la partie imaginaire de $\frac{z-i}{z-iz}$ en fonction de x et y.

2. On suppose toujours que $z \neq 0$. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\frac{z-i}{z-iz}$ pour que les trois points I, M et M' soient alignés. Exprimer cette condition en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.