Chapter 18 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 18.1

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Solution 18.1

1. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5.(-1).2 = -10.$

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$ car $C_1 = 10C_2 + C_3$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 30 & 12 \end{vmatrix} = 12.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{transposée}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Exercice 18.2

En développant selon une ligne ou une colonne bien choisie, calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$,

2. $\begin{vmatrix} 1 & 23 & 6 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

Solution 18.2

1. On peut par exemple développer le déterminant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 5(2-7) - 2(-6+1) - 4(-21+1) = 65.$$

2. Ici, le developpement selon la troisième colonne semble tout indiqué.

$$\begin{vmatrix} 1 & 23 & 6 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\,(2(4-3) - 1(5-1)) = -12.$$

Exercice 18.3

Soit $w \in \mathbb{R}$ et B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & w \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de w telles que $\det B = 0$.

Solution 18.3

En développant par exemple selon la troisième colonne:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & w \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = w(-10) + 1(-5) + 7(5) = -10w + 30.$$

Finalement, $\det B = 0$ si, et seulement si $w = 3$.

Exercice 18.4

Évaluer le déterminant ci-dessous en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes pour simplifier vos calculs.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vérifier le résultat de votre calcul en utilisant cette fois des opérations élémentaires sur les colonnes.

Solution 18.4

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -24 & 8 \\ 0 & -5 & 17 & -5 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}{=} -4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 5 & -9 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -32 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -160 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -160(1) = -160.
\end{aligned}$$

Et en utilisant des opérations sur les colonnes,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & -4 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4(40) = -160,$$

Exercice 18.5

Pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible?

Solution 18.5

Calculons le déterminant de la matrice A,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-4-\lambda) + 30 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Ainsi, A n'est pas inversible si, et seulement si $\det A = 0$, si, et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Exercice 18.6 *Dérivation d'un déterminant*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère un déterminant Δ d'ordre 3 dont les neuf coefficients sont des fonctions $a_{i,j}$ dérivables sur I:

$$\forall x \in I, \Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est dérivable en tout point $x \in I$ et que

$$\forall x \in I, \Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a'_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a'_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a'_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a'_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a'_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a'_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a'_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a'_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

2. Sans aucun calcul de déterminant, montrer que le déterminant suivant est indépendant de x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(x+1) & \operatorname{sh}(x+1) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+2) & \operatorname{sh}(x+2) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+3) & \operatorname{sh}(x+3) & -4 \end{vmatrix}.$$

Donner sa valeur.

Solution 18.6 *Dérivation d'un déterminant*

Exercice 18.7

Prouver l'identité suivante

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c). \tag{1}$$

Solution 18.7

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \end{vmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2 + L_3$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut continuer de manière un peu brutale mais efficace: faire disparaitre les «1» de la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} x & a-x & b-x & c-x \\ a & x-a & c-a & b-a \\ b & c-b & x-b & a-b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array}$$

$$= -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & b-x+c-a & c-x+b-a \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ x-a & c-a & b-c \\ c-b & x-b & a-x \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

$$= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ c-b & a-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ x-a-b+c & -x+a+b-c \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$= -(x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a-b+c)(x-a+b-c).$$

Une version un peu plus subtile et rapide est d'utiliser le 1 comme pivot sur les lignes avec les opérations (totalement licites) $L_1 \leftarrow L_1 - xL_4$, $L_2 \leftarrow L_1 - aL_4$,...

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} &= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a-x & b-x & c-x \\ 0 & x-a & c-a & b-a \\ 0 & c-b & x-b & a-b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - xL_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_4 \end{matrix} \\
&= -(x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ 0 & c-a+b-x & b-a+c-x \\ c-b+a-x & 0 & a-b+c-x \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&= -(x+a+b+c)(c+b-a-x)(c-b+a-x)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(x+a+b+c)(c+b-a-x)(c-b+a-x)\left((a-x)+(b-x)-(c-x)\right) \\
&= (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c).
\end{aligned}$$

Exercice 18.8

Soit $(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les déterminants suivants en présentant, si possible, les résultats sous forme factorisée.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$.

Exercice 18.9

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, donner une forme factorisée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Solution 18.9

Exercice 18.10

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

Solution 18.10

1. $D = (c-b)(c-a)(b-a)$.
   $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \dots)$
2. $D = -(a+b+c)^3$.
   $(L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3, L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3, \dots)$
3. $D = (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c)$.
   $(C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \dots)$

Exercice 18.11

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

Solution 18.11

1. Avec $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$

$$D = \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$D = -2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

On reconnait un déteminant de Vandermonde : $D = 2abc(b-a)(c-b)(c-a)$.

2.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a^2 & a^2 & b^2-a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2-c^2 & c^2 & -c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -a^2 & b^2-a^2 \\ 1 & a^2 & c^2 \\ 1 & b^2-c^2 & -c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2a^2 & b^2-a^2-c^2 \\ 1 & a^2 & c^2 \\ 0 & b^2-c^2-a^2 & -2c^2 \end{vmatrix} \\ &= -4a^2c^2 - (b^2-a^2-c^2)^2 \\ &= -(2ac - b^2 + a^2 + c^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2) \\ &= ((a+c)^2 - b^2)((a-c)^2 - b^2) \\ &= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

3. Facile, $D = 2abc(a+b+c)^3$.

Exercice 18.12 *Déterminant et suites récurrentes linéaire*

Soient a et b deux réels distincts et non nuls. Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

- Déterminer une relation entre Δ_n, Δ_{n+1} et Δ_{n+2}.
- Donner l'expression de Δ_n en fonction de n.

Solution 18.12 *Déterminant et suites récurrentes linéaire*

Exercice 18.13

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, tel que $\sin\varphi$ soit non nul. On note A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ avec $a_{i,i} = 2\cos\varphi$ pour $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leq i < n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. On pose $D_n = \det A_n$.

Établir une formule de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$. En déduire

$$\forall n \geq 1, D_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Solution 18.13

Notons D_n le déterminant de la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ définie comme dans l'énoncé. Soit $n \geq 3$; en développant D_n suivant la première ligne, on obtient

$$D_n = (2\cos\varphi)D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

puis, en développant le déterminant d'ordre $n-1$ suivant la première colonne:

$$D_n = 2\cos\varphi D_{n-1} - D_{n-2}.$$

On a $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, donc

$$D_1 = 2\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

D'autre part:

$$\sin 3\varphi = \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi = \sin\varphi(4\cos^2\varphi - 1),$$

donc

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 \\ 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = 4\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}.$$

On finit alors avec une récurrence sur k (à faire!) et quelques formules de trigonométrie pour montrer que

$$\forall k \geq 1, D_k = \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

ue

On peut également remarquer que la relation $D_n = 2\cos\varphi D_{n-1} - D_{n-2}$ est une récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2\cos\varphi + 1 = 0$, dont les racines sont $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, D_n = A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi).$$

Et il ne reste plus qu'à déterminer A et B à partir de D_1 et D_2. Il peut être astucieux d'introduire un $D_0 = 2\cos\varphi D_1 - D_2$ (artificiellement) pour simplifie les calculs.

Exercice 18.14 *Matrices à petits coefficients*

Soit $n \geq 1$ et $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes:

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \in [0,1[$.
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \leq 1$.

Démontrer que $|\det(A)| < 1$.

Solution 18.14 *Matrices à petits coefficients*

Exercice 18.15 *Factorisation d'un déterminant circulant*

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère les deux matrices U et V de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ définies par

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit UV.

2. Calculer $\det(UV)$ en le mettant sous la forme

$$\det(UV) = P(1)P(j)P(j^2)\det(V).$$

où $P(x) = a + bx + cx^2$.

3. En déduire une factorisation complexe de $\det(U)$.

Solution 18.15 *Factorisation d'un déterminant circulant*

Exercice 18.16

Soit A une matrice $(3,3)$ telle que $\det A = 7$.
Déterminer $\det(2A)$, $\det(A^2)$, $\det\left(2A^{-1}\right)$ et $\det\left((2A)^{-1}\right)$.

Solution 18.16

Puisque A est une matrice $(3,3)$ et $\det A = 7$, on a

$$\det(2A) = 2^3 \det A = 56, \qquad \det(A^2) = \det(A)\det(A) = 49,$$
$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \frac{2^3}{\det A} = \frac{8}{7}, \qquad \det((2A)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{56}.$$

Exercice 18.17 *Une famille de matrices inversibles*

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, A + xB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Solution 18.17 *Une famille de matrices inversibles*

Exercice 18.18 *Matrices à coefficients entiers et inversibilité*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que son inverse ait tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution 18.18 *Matrices à coefficients entiers et inversibilité*

Exercice 18.19

Soient des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $\det(A)$ et $\det(B)$ soient premiers entre eux.

Montrer l'existence de $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n.$$

Solution 18.19

Exercice 18.20

Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauß puis à l'aide des formules de Cramer.

1. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x + 4y + z = 1 \end{cases}.$

Solution 18.20

Exercice 18.21

1. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer le déterminant de Vandermonde

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec a, b, c deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}. \tag{S}$$

Solution 18.21