Chapter 36 Applications linéaires

36.1 Applications linéaires

36.1.1 Définition

Exercice 36.1

Vérifier la linéarité des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$.
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(0) \end{array}$.
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \Re\mathrm{e}(z) \end{array}$.
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}$.
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Exercice 36.2

Les applications suivantes de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}$ sont-elles des formes linéaires ?

1. $u : (x,y,z) \mapsto x+y$.
2. $u : (x,y,z) \mapsto xy$.
3. $u : (x,y,z) \mapsto 2x-y+z$.
4. $u : (x,y,z) \mapsto x^2-y$.
5. $u : (x,y,z) \mapsto x+y+1$.
6. $u : (x,y,z) \mapsto 3y$.

Exercice 36.3

Montrer que l'application $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto f'$ est une application linéaire.

Exercice 36.4

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute application $f \in E$, on associe l'application $A(f)$ définie par

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que A est une application de E à valeurs dans E.
2. Montre que A est linéaire.

36.1.2 Exemples

36.1.3 Quelques applications particulières

36.1.4 Composition et combinaison linéaire d'applications linéaires

36.1.5 Isomorphismes

Exercice 36.5

Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 4x-2y) \end{array}$ appartient à $\mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$.

Préciser f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est effectivement linéaire.

Exercice 36.7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$ vérifiant

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = 0. \tag{1}$$

Montrer que f est bijective.

36.2 Anatomie d'une application linéaire

36.2.1 Noyau et image

Exercice 36.12

Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si u est injective, surjective, bijective.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.

4. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - (X-2)P' \end{array}$.

Exercice 36.13

On définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ deux applications A et B par

$$A\,(P(X)) = P'(X) \qquad \text{et} \qquad B\,(P(X)) = X\,P(X).$$

Démontrer les assertion suivantes.

1. A et B sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[X]$ et $\ker A \neq \{\ 0\ \}$.
3. $\ker B = \{\ 0\ \}$ et B n'a pas d'application réciproque.
4. $A \circ B - B \circ A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $A^k \circ B - B \circ A^k = kA^{k-1}$.

Exercice 36.14

On considère l'application T définie par

$$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P'' \end{array}.$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Préciser $T(1)$, $T(X)$, $T(X^2)$ et $T(X^3)$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(T(P)) \leq n$.

4. Démontrer que $T(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]$.

5. Dans quel sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ doit-on chercher le noyau de T ? Déterminer $\ker T$. Que peut-on en déduire ?

6. En raisonnant par l'absurde, démontrer que le polynôme X n'admet pas d'antécédent par T.

7. Déterminer V_8, l'ensemble de tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $T(P) = 8P$.

8. On considère l'ensemble V des polynômes P pour lesquels il existe un scalaire λ tel que $T(P) = \lambda P$. Montrer que V contient quatre polynômes normalisés.

Exercice 36.15

On désigne par $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'application φ définie sur E par

$$\forall f \in E, \varphi(f) = f'(1).$$

1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur E.

2. En déduire que $F = \left\{ f \in E \mid f'(1) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 36.16

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $\varphi : f \mapsto f''$ est un endomorphisme de E, et déterminer $\operatorname{Im} \varphi$ et $\ker \varphi$.

Exercice 36.18

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

2. Montrer que $\ker f \subset \ker g \circ f$.

3. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Exercice 36.20

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.

Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Exercice 36.21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On pose $f^2 = f \circ f$. Montrer que

$$\ker(f) = \ker\left(f^2\right) \iff \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{ 0_E \}.$$

Exercice 36.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

36.2.2 Injectivité, surjectivité

Exercice 36.24

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 36.25

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 3z, 2x + 4y - 4z)$.

Exercice 36.26

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = X\left(P'(X+1) - P'(1)\right)$.

2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - XP' - P(0)$.

Exercice 36.27

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + y)$.

2. $M : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $M(P) = XP$.

3. $\varphi : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = f' - f$.

4. $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z)$.

Exercice 36.28

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \left(P(0), P'(1), P(2)\right) \end{array}$.

1. Prouver que φ est linéaire.

2. Déterminer le noyau de φ.

3. Déterminer l'image de φ.

4. L'application φ est-elle injective? Est-elle surjective?

Exercice 36.29

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$.

1. Prouver que φ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Soit $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur y pour avoir $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
4. L'application φ est-elle injective? Est-elle surjective?

Exercice 36.30

Soit $\theta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

1. Prouver que $\theta \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est surjective.

Exercice 36.31

Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$.
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + z, x - z) \end{array}$.
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y + z, x + y + z) \end{array}$.
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$.
5. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.
6. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0) \end{array}$.
7. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2 P' \end{array}$.
8. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & u_3 \end{array}$.
9. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.
10. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

36.2.3 Équation linéaire

36.2.4 Notion de sous-espace affine