Chapter 11 Relations binaires sur un ensemble

Exercice 11.1

Déterminer les propriétés des relations binaires suivantes (réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité), et détecter les relations d'équivalence, d'ordre total ou partiel.

1. $\|$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.
2. $\perp$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.
3. $\leq$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\geq$ sur $\mathbb{R}$.
5. # (avoir le même cardinal) sur $E = \mathcal{P}(F)$.
6. $\subset$ sur $E = \mathcal{P}(F)$.
7. «être multiple de» sur $\mathbb{N}$.
8. «être multiple de» sur $\mathbb{Z}$.
9. $<$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\neq$ sur $\mathbb{R}$.
11. $=$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.2

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^\star$, on dira que

$$a\mathcal{R}b \iff \left(\exists n \in \mathbb{N}^\star, a = b^n\right).$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 11.3

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit une relation $\lhd$ sur E^2 par

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (x', y') \in E^2, (x, y) \lhd (x', y') \iff \left((x \preceq x' \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\right)$$

On peut également écrire : $(x, y) \lhd (x', y') \iff \left(x \prec x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\right)$.

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E^2.
2. La relation $\lhd$ s'appelle ordre lexicographique, pourquoi ?
3. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 11.4

Sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, [0, 1[)$, on définit la relation $\leq$ par

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre.
2. Montrer que l'ordre est partiel.
3. Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ?

Exercice 11.5

Soit Q l'ensemble $\{ 1, 2, 3, 4 \}$.

1. Écrivez les éléments de $\mathcal{P}(Q)$.
2. Quels sont les majorants de $\{ 2, 4 \}$ pour la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(Q)$?
3. Quels sont les majorants de $\{ 1 \}$?
4. Quels sont les majorants de l'ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$?
5. La partie $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-elle un maximum ?
6. Donnez un sous-ensemble à plusieurs éléments de $\mathcal{P}(Q)$ qui admette un maximum pour cette relation. Est-ce que $\mathcal{P}(Q)$ a un maximum ?
7. Reprenez pour minimum les questions posées ci-dessus pour maximum.
8. Le sous-ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-il une borne supérieure pour la relation d'ordre $\subset$? Une borne inférieure ?

Exercice 11.6 *Problème des hussards*

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de np réels. Comparer

$$A = \min_{1\leq i\leq n}\left(\max_{1\leq j\leq q} a_{i,j}\right) \qquad \text{et} \qquad B = \max_{1\leq j\leq q}\left(\min_{1\leq i\leq n} a_{i,j}\right).$$

1. Comparer A et B.
2. Donner un exemple de non égalité.

Exercice 11.7 (***)

$(E, \leq)$ est un ensemble ordonné et f une application de E dans E telle que

- f est croissante ;
- $\forall x \in E, f(x) \geq x$;
- $\forall x \in E, f(f(x)) = f(x)$.

On dit que f est une **fermeture**. Soit $F = \{ x \in E \mid f(x) = x \}$.

1. Montrer que, pour tout x de E, l'ensemble $F_x = \{ y \in F \mid y \geq x \}$ est non vide et admet un plus petit élément égal à $f(x)$.
2. Soit G sous -ensemble de E tel que pour tout x de E, $G_x = \{ y \in G \mid y \geq x \}$ admette un plus petit élément noté $g(x)$. Montrer que g ainsi définie est une fermeture et que l'ensemble de ses éléments invariants est G.

Exercice 11.8

Étant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe.

1. R_1 et R_2 étant deux éléments de $\mathcal{R}$, on considère la relation R : «R_1 et R_2» appelée intersection de R_1 et R_2. Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe modulo R est l'intersection d'une classe modulo R_1 et d'une classe modulo R_2.

   Étudier les exemples suivants :

(a) $E = \mathbb{Z}$, R_1 et R_2 étant les congruences de module respectifs p_1 et p_2 (p_1 et p_2 entiers strictement positifs distincts).

(b) E est le plan de la géométrie élémentaire. MR_1M' et MR_2M' sont respectivement les relations «MM' est parallèle à d_1», «MM' est parallèle à d_2» (d_1, d_2 étant deux directions distinctes du plan).

2. Avec les mêmes notations que ci-dessus, la relation «R_1 ou R_2» est-elle une relation d'équivalence ? Quel est son graphe ?

3. (R_i) étant une famille de relations d'équivalences définies sur E et indexées par un ensemble I, on désigne par R la relation suivant, appelée *intersection* des (R_i) :

$$R(x, y) \iff \forall i \in I, R_i(x, y).$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe C modulo R est contenue pour tout i dans une et une seule classe C_i modulo R_i et que C est l'intersection de la famille (C_i).

Exercice 11.9

Étant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe. On dit que R est «*plus fine*» que R' si, et seulement si

$$\forall x, y \in E, xRy \implies xR'y.$$

1. Montrer que cette relation entre R et R' définit un ordre sur $\mathcal{R}$; comparer les graphes de R et R'; cet ordre est-il total ou partiel ?

2. Montrer que R est plus fine que R' si, et seulement si toute classe d'équivalence modulo R' est une réunion de classes d'équivalence modulo R.

3. Y a-t-il un plus petit et un plus grand élément dans $\mathcal{R}$ ordonnée par la relation d'ordre défini ci-dessus ?

4. Lorsque $E = \mathbb{Z}$, déterminer toutes les congruences modulo un entier strictement positif qui sont plus fines que $x \equiv y \pmod{n}$ ou qui sont moins fines que cette relation.