Chapter 10 Vocabulaire relatif aux applications

Exercice 10.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \}$ comme une image réciproque.

Solution 10.1

$f^{-1}(\mathbb{R}^\star)$.

Exercice 10.2

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer

1. $f(2)$,
2. $f(\{2\})$,
3. $f(\{-1, 0, 1, 2\})$,
4. $f^{-1}(4)$,
5. $f^{-1}(\{4\})$,
6. $f^{-1}(\{-2, 0, 1, 4\})$,
7. $f\left(f^{-1}(\{-2, 0, 1, 4\})\right)$,
8. $f^{-1}(f(\{-1, 0, 1, 2\}))$,
9. $f([1, 2])$,
10. $f([-1, 4[)$,
11. $f^{-1}(]1, 2])$,
12. $f^{-1}([-1, 4])$,
13. $f(\mathbb{R})$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R})$,
15. $\operatorname{Im} f$.

Solution 10.2

Voici les solutions. Ne reste plus qu'à les démontrer (voir le cours!).

1. $f(2) = 4$,
2. $f(\{2\}) = \{4\}$,
3. $f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$,
4. $f^{-1}(4)$ n'a aucun sens car f n'est pas bijective,
5. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$,
6. $f^{-1}(-2, 0, 1, 4) = \{0, -1, 1, -2, 2\}$,
7. $f\left(f^{-1}(-2, 0, 1, 4)\right) = f(\{0, -1, 1, -2, 2\}) = \{0, 1, 4\}$,
8. $f^{-1}(f(\{-1, 0, 1, 2\})) = f^{-1}(\{0, 1, 4\}) = \{0, -1, 1, -2, 2\}$,
9. $f([1, 2]) = [1, 4]$,
10. $f(]-1, 4[) = [0, 16[$,
11. $f^{-1}(]1, 2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$,
12. $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$,
13. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
15. $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Exercice 10.3

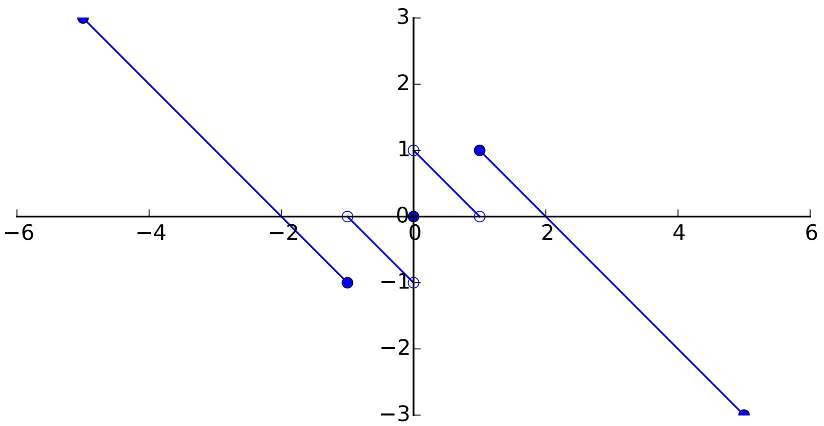
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f (sur $\mathbb{R}$).

2. Déterminer (graphiquement) $f([0,2])$ et $f^{-1}([0,2])$.

Solution 10.3

1. 

2. Une lecture graphique donne

$$f([0,2]) = [0,1] \quad \text{et} \quad f^{-1}([0,2]) = [-4,-2] \cup [0,2].$$

La démonstration est un peu pénible…

Exercice 10.4

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $\varphi(\mathbb{R})$.

Solution 10.4

Commençons par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les encadrements

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Il s'en suit

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

Tenant compte du fait que $\varphi(x) \in \mathbb{Z}$, on a donc $\varphi(x) = 0$ ou $\varphi(x) = 1$. Ainsi

$$\varphi(\mathbb{R}) \subset \{ 0, 1 \}.$$

Réciproquement, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(0.7) = 1$, d'où $\{ 0, 1 \} \subset \varphi(\mathbb{R})$.

Conclusion

Par double inclusion,

$$\varphi(\mathbb{R}) = \{ 0, 1 \}.$$

Exercice 10.5

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \left(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3\right) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{ (0,0,0) \})$.
2. Soit $P = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + 3c = 0 \right\}$. Déterminer $f^{-1}(P)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $\Delta = \{ (t,t,t) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Déterminer $f(\Delta)$.
5. Soit $Q = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + c = 0 \right\}$. Déterminer $f(Q)$.

Exercice 10.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble

$$J = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 \right\}.$$

2. Que valent $f(J)$ et $f^{-1}(f(J))$?

Solution 10.6

Exercice 10.7

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Solution 10.7

1. Supposons $X_1 \subset X_2$ et montrons que $f(X_1) \subset f(X_2)$.
Soit y un élément de $f(X_1)$.
Par définition de $f(X_1)$, il existe un élément $x \in X_1$ tel que $y = f(x)$.
Or $X_1 \subset X_2$ donc

$$x \in X_2 \qquad \text{et} \qquad y = f(x);$$

il s'en suit $y \in f(X_2)$[1].
Nous pouvons conclure que $f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. Nous allons effectuer un raisonnement par double inclusion. Montrons d'abord que $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$.

Soit $y \in f(X_1 \cup X_2)$.
Il existe $x \in X_1 \cup X_2$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in X_1 \cup X_2$, nous savons que $x \in X_1$ ou $x \in X_2$.

- Si $x \in X_1$; alors $y = f(x) \in f(X_1)$, et *a fortiori* $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.
- Si $x \in X_2$; alors $y = f(x) \in f(X_2)$, et *a fortiori* $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

Dans tous les cas, nous avons donc $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

Nous avons donc montré que $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$. Montrons maintenant que $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

Soit $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Alors $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$.

- Supposons $y \in f(X_1)$, alors il existe $x \in X_1$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in X_1$, nous pouvons écrire
$$x \in X_1 \cup X_2 \text{ et } y = f(x)$$
c'est-à-dire $y \in f(X_1 \cup X_2)$.
- Supposons $y \in f(X_2)$, le raisonnement est analogue : il existe $x \in X_2$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x \in X_1 \cup X_2$ puis $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$.

Dans tous les cas, nous avons montré que $y \in f(X_1 \cup X_2)$, donc $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

Nous avons montré que

$$f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2) \quad \text{et} \quad f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2);$$

par double inclusion, nous pouvons conclure $f(X_1) \cup f(X_2) = f(X_1 \cup X_2)$.

[1]Nous avons démontré une propriété de y ($y \in f(X_2)$). Nous pouvons alors affirmer qu'elle est vérifiée par **tous** les objets qui ont les propriétés qui ont été annoncées par «Soit y…», c'est-à-dire ici tous les éléments de l'ensemble $f(X_1)$. On a donc $\forall y \in f(X_1), x \in f(X_2)$.

3. Soit $y \in f(X_1 \cap X_2)$. Il existe $x \in X_1 \cap X_2$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $x \in X_1 \cap X_2$, nous pouvons écrire que $x \in X_1$ et donc $y = f(x) \in f(X_1)$.
De même, $x \in X_2$ et donc $y = f(x) \in f(X_2)$.
Nous avons donc montré que $y \in f(X_1)$ et $y \in f(X_2)$, c'est-à-dire $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Nous pouvons conclure

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2).$$

4. L'inclusion $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ est fausse en général.
Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$:

$$f\left(\mathbb{R}_+\right) \bigcap f\left(\mathbb{R}_-\right) = [0, +\infty[\bigcap [0, +\infty[= [0, +\infty[$$

mais

$$f\left(\mathbb{R}_+ \bigcap \mathbb{R}_-\right) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

Exercice 10.8

Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Solution 10.8

1. Supposons $Y_1 \subset Y_2$. Soit $x \in f^{-1}(Y_1)$. Nous avons donc $f(x) \in Y_1$ d'où $f(x) \in Y_2$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(Y_2)$. Nous avons donc montré que $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &\iff f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \\ &\iff f(x) \in Y_1 \text{ ou } f(x) \in Y_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &\iff f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \\ &\iff f(x) \in Y_1 \text{ et } f(x) \in Y_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \text{ et } x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 10.9

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. On considère une partie A de E et une partie B de F. Démontrer l'égalité

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Solution 10.9

Exercice 10.10

Étant donné une application f de E dans F, on désigne pas $\mathcal{S}$ la famille des parties X de E telle que

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

1. A étant une partie quelconque de E, démontrer que $f^{-1}(f(A))$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.
2. Démontrer que toute intersection et toute réunion d'ensembles de $\mathcal{S}$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.
3. X étant un ensemble de $\mathcal{S}$ et A une partie de E telle que X et A soient disjoints, démontrer que X et $f^{-1}(f(A))$ sont disjoints.
4. X_1 et X_2 étant deux ensembles de $\mathcal{S}$ tels que $X_1 \subset X_2$, démontrer que $X_2 \setminus X_1$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.

Solution 10.10

Exercice 10.11

On définit la somme de deux parties E et F de $\mathbb{R}$ par

$$E + F = \{ x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F \} .$$

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. Vrai ou Faux?

1. $(f+g)(A) \subset f(A) + g(A)$.

2. $f(A) + g(A) \subset (f+g)(A)$.

3. $(f+g)^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) + g^{-1}(A)$.

4. $f^{-1}(A) + g^{-1}(A) \subset (f+g)^{-1}(A)$.

Solution 10.11

Exercice 10.12

Donner, pour chacun des énoncés suivants, une formulation du type «l'application de ... vers ... qui à tout ... associe ... est (n'est pas) injective (surjective)».

1. Dans mon quartier, il y a deux personnes qui ont le même modèle de voiture.
2. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
3. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
4. Toute ville de France possède au moins une église.
5. Il y a des villes de France qui ont plusieurs églises.
6. Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée réelle.
7. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
8. On peut avoir $a + b = c + d$ sans que $a = c$ et $b = d$.

Solution 10.12

1. L'application de l'ensemble des habitants de mon quartier vers l'ensemble des modèles de voitures qui à toute personne associe son modèle de voiture n'est pas injective.
2. L'application de l'ensemble des élèves de la classe vers $\mathbb{N}$ qui à chaque personne associe son age n'est pas injective.
3. L'application de l'ensemble des élèves de la classe vers l'ensemble des jours de l'année qui à chaque personne associe son jour d'anniversaire est injective.
4. L'application de l'ensemble des églises vers l'ensemble des ville de france qui à toute église associe sa ville est surjective.
5. L'application de l'ensemble des églises vers l'ensemble des ville de france qui à toute église associe sa ville n'est pas injective.
6. L'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel associe son carré n'est pas surjective.
7. L'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ qui à un réel associe son carré est bijective.
8. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à un couple (a, b) associe sa somme $a + b$ n'est pas injective.

Exercice 10.13

On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n-1, & n > 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer $g \circ f$.

2. Les applications f et g sont-elles bijectives ? Que dire de $f \circ g$?

Solution 10.13

1. On a $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1) - 1 = n.$$

car $n + 1 > 0$. Finalement, on a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

2. L'application f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f. L'application g n'est pas injective car $g(1) = g(0) = 0$.

Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, on a nécessairement, $f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, car sinon f et g serait bijectives. Remarquez qu'en fait $f \circ g$ n'est ni injective car $f \circ g(1) = f \circ g(0)$, ni surjective car 0 n'a pas d'antécédent par $f \circ g$.

Exercice 10.14 (***)

1. Une application admet un point fixe s'il existe x tel que $f(x) = x$. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.

2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 10.15

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-3\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Solution 10.15

Exercice 10.16 (***)

1. Démontrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{ -i \}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{ 1 \}$ et que la bijection réciproque est l'application $w \mapsto i\dfrac{1+w}{1-w}$.
2. On note $\mathcal{D}$ le disque unité ouvert et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré:

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \} \qquad\qquad \mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z > 0 \}.$$

   Démontrer *géométriquement* que $z \in \mathcal{H}$ si, et seulement si $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$. En déduire une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$.

Solution 10.16

Exercice 10.17

On considère l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \end{array}.$$
On rappelle que $i\mathbb{R} = \{\ iy \mid y \in \mathbb{R}\ \}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

1. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.
3. Déterminer, selon la valeur du complexe Z le nombre d'antécédents de Z par f.
   L'application f est-elle injective ?
   L'application f est-elle surjective ?
   Lorsque Z possède deux antécédents, que valent leur somme et leur produit ?
4. On note
$$\mathbb{U} = \left\{\ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| = 1\ \right\}, \qquad V_1 = \left\{\ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| < 1\ \right\}, \qquad V_2 = \left\{\ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; |z| > 1\ \right\}.$$
   (a) Que représentent géométriquement les ensemble $\mathbb{U}$, V_1, V_2 ?
   (b) Montrer que $f^{-1}\left([-1, 1]\right) = \mathbb{U}$.
   (c) Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer
$$z_1 z_2 = 1 \implies \left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{U}^2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_1 \times V_2 \text{ ou } \left(z_1, z_2\right) \in V_2 \times V_1.$$
   (d) Démontrer que f réalise une bijection de V_1 sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
   On notera $g : \begin{array}{ccc} V_1 & \to & \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$.

Solution 10.17

Exercice 10.18

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$

2. $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}.$

3. $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2-y^2) \end{array}.$

4. $k: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^3) \end{array}.$

5. $\ell: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^2) \end{array}.$

Solution 10.18

1. f n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(1,-1)$ ont l amême image par f.

   f est-elle surjective? Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, existe-t-il un coupel $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x+y=\alpha$?

   On choisit par exemple $x=0$ et $y=\alpha$, ainsi

   $$(0,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } f((0,\alpha)) = \alpha$$

   donc $(0,\alpha)$ est un antécédent de α par f, et f est surjective.

   Remarque. On peut remarquer que $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{(t,\alpha-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, (u,v) admet-il un antécédent par g? Un tel éventuel antécédent (x,y) vérifie $\begin{cases} x+y &= u \\ x-y &= v \end{cases}$.

   Or

   $$\begin{cases} x+y &= u \\ x-y &= v \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u+v) \\ y &= \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}.$$

   Ainsi, (u,v) admet un antécédent par g et de plus, cet antécédent est unique, il s'agit de

   $$\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right).$$

   Ceci prouve que g est bijective.

3. h n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(1,-1)$ distincts ont la même image par h.

   h n'est pas surjective car les couples $(0,a)$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$ n'ont pas d'antécédent par h. En effet, un éventuel antécédent (x,y) vérifie

   $$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = a \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x+y &= 0 \\ 0 = x^2-y^2 &= a \end{cases}$$

   et ce système n'admet aucune solution car $a \neq 0$.

4. k n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(1,-1)$ distincts ont la même image par k.

   k est-elle surjective?

   Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, (u,v) admet-il un antécédent par k? Un tel éventuel antécédent (x,y) vérifie

   $$\begin{cases} x+y &= u \\ x+y^3 &= v \end{cases} \iff \begin{cases} x &= u-y \\ y^3-y+u-v &= 0 \end{cases}$$

   Or l'équation d'inconnue réelle $y^3-y = v-u$ admet au moins une solutions y_1 dans $\mathbb{R}$. En effet, l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto y^3-y$ est continue et

   $$\lim_{x\to-\infty} \varphi(y) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(y) = +\infty.$$

   Le couple $(u-y_1, y_1)$ est ainsi un antécédent de (u,v) par k et k est surjective.

5. ℓ n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(-1,1)$ distincts ont la même image par ℓ.

En s'aidant de la méthode proposée à la question précédente, il apparaît que le couple $(0,-1)$ n'admet pas d'antécédent par ℓ. En effet, un tel éventuel antécédent (x,y) vérifie

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & =0 \\ x+y^2 & =-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & =-y \\ y^2-y+1 & =0 \end{array}\right.$$

et l'équation $y^2-y+1=0$ n'admet aucune solution réelle.

Exercice 10.19

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. On considère un élément $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{ (u,v) \})$. (Les notations sont-elles correctes ?)

2. f est-elle injective ? surjective ?

3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \right\}$ et φ la restriction de f à D. L'application φ est-elle injective ?

Exercice 10.20

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $q \in \mathbb{Z}$, on considère l'application

$$\varphi_q : \begin{array}{rcl} \mathbb{U}_n & \to & \mathbb{U}_n \\ z & \mapsto & z^q \end{array}.$$

1. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer $\varphi_p \circ \varphi_q$.

2. On suppose que n et q sont premiers entre eux. Vérifier que l'application φ_q est bijective.

3. Réciproquement, on suppose l'application φ_q bijective. Montrer que n et q sont premiers entre eux.

Solution 10.20

Exercice 10.21

Soient trois ensembles A,B,C et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que g ne l'est pas nécessairement.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que f ne l'est pas nécessairement.

3. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective sans que ni g ni f ne le soit.

Solution 10.21

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective. Soit $x_1, x_2 \in A$. On suppose $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ et puisque $g \circ f$ est injective $x_1 = x_2$. L'application f est donc injective.

   Par contre, g n'est pas nécessairement injective. En prenant par exemple $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$, alors $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$ est injective (car strictement croissante par exemple) mais g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$.

   On peut également utiliser $f : \{ 0, 1 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

   Ou encore, $f = \arcsin$ et $g = \sin$.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $y \in C$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x_1 \in A$ tel que $y = g \circ f(x_1)$. En posant $x = f(x_1)$, on a bien $x \in B$ et $g(x) = y$. L'application g est donc surjective.

   Par contre, f n'est pas nécessairement surjective.

   En prenant par exemple $f : \{ 0, 1 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4$ et $g : \mathbb{R} \to \{ 11 \}, x \mapsto 11$.

   Ou encore, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$.

3. Plusieurs exemples précédents répondent au critère.

   Un exemple très simple : $g : \mathbb{R} \to \{ 0 \}, x \mapsto 0$ et $f : \{ 0 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3$.

Exercice 10.22

Soit f une application de E dans E telle que

$$f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Solution 10.22

En posant $g = f \circ f$, on a $g \circ f = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. L'application f est donc bijective et

$$f^{-1} = f \circ f.$$

Exercice 10.23

Soient E et F deux ensembles non vides, on considère une application $f : E \to F$.

1. (a) Soit A une partie de E, montrer l'inclusion
$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$
(b) Montrer que si A est une partie de E et f est injective, alors
$$f^{-1}(f(A)) = A.$$
(c) Réciproquement, on suppose
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)).$$
Montrer que l'application f est alors injective.

2. (a) Soit B une partie de F, montrer l'inclusion
$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$
(b) Montrer que si B est une partie de E et f est surjective, alors
$$f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$
(c) Réciproquement, on suppose
$$\forall B \in \mathcal{P}(E), f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$
Montrer que l'application f est alors surjective.

Solution 10.23

1. (a) Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, ce qui s'écrit également $x \in f^{-1}(f(A))$.
Conclusion : $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, on a donc $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. Puisque f est injective, on a $x = x'$ d'où $x \in A$.
Conclusion : on a montrer $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Le résultat demandé découle de la question précédente par double inclusion.

(c) Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors $f\left(\{ x_1 \}\right) = \{ f(x_1) \} = \{ f(x_2) \} = f\left(\{ x_2 \}\right)$ d'où
$$\{ x_1 \} = f^{-1}\left(f\left(\{ x_1 \}\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(\{ x_2 \}\right)\right) = \{ x_2 \},$$
ce qui implique $x_1 = x_2$: f est alors injective.

2. (a) Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, il existe alors $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $y = f(x) \in B$.
Conclusion : $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

(b) Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $y = f(x) \in B$, on a donc en effet
$$x \in f^{-1}(B) \qquad \text{et} \qquad y = f(x).$$
Donc $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Conclusion : on a montrer $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Le résultat demandé découle de la question précédente par double inclusion.

(c) Soit $y \in F$, on a $f\left(f^{-1}(\{ y \}\right) = \{ y \}$, en particulier, $f^{-1}(\{ y \}) \neq \emptyset$, c'est-à-dire que y possède au moins un antécédent par f : f est surjective.

Variante. Puisque $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $f^{-1}(F) = E$. On a donc $f(E) = f\left(f^{-1}(F)\right) = F$; c'est-à-dire f est surjective.

Exercice 10.24

Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 10.25

Soit f une application de E dans F et soit $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ définie par

$$\forall Y \in \mathcal{P}(F), g(Y) = f^{-1}(Y).$$

1. Montrer que g est injective si, et seulement si f est surjective.

2. Montrer que g est surjective si, et seulement si f est injective.

Solution 10.25

Exercice 10.26 (***)

Donner une écriture simple les ensembles suivants.

1. $I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$.
2. $I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$.
3. $I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$.
4. $I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$.

Solution 10.26

1. Montrons que $I_1 = \{ 3 \}$ par double inclusion.

   Pour tout $n \geq 1$, on a $3 \in \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$, donc $\{ 3 \} \subset I_1$.

   Réciproquement, soit $x \in I_1$. Alors,

   $$\forall n \geq 1, 3 \leq x \leq 3 + \frac{1}{n^2}.$$

   Par compatibilité de la relation d'ordre avec la limite, on a $3 \leq x \leq 3$, c'est-à-dire $x = 3$. On a donc $I_1 \subset \{ 3 \}$.

2. Montrons que $I_2 = [-2, 5]$ par double inclusion.

   Soit $x \in I_2$, alors

   $$\forall n \geq 1, -2 - \frac{1}{n} \leq x \leq 4 + n^2.$$

   Par compatibilité de la relation d'ordre avec la limite, on a $-2 \leq x$. De plus, en spécifiant la relation précédente pour $n = 1$, on obtient $x \leq 5$.

   Finalement $x \in [-2, 5]$. On a donc $I_2 \subset [-2, 5]$.

   Réciproquement, soit $x \in [-2, 5]$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a

   $$-2 - \frac{1}{n^2} < -2 \leq x \leq 5 \leq 4 + n^2.$$

   On a donc,

   $$\forall n \geq 1, x \in \left]-2 - \frac{1}{n^2}, 4 + n^2\right].$$

   c'est-à-dire $x \in I_2$.

3. $I_3 = [0, 2]$. La démonstration est analogue aux précédentes.

4. Montrons que $I_4 =]1, +\infty[$ par double inclusion.

   Soit $x \in I_4$. Alors, il existe $n \geq 2$ tel que

   $$1 + \frac{1}{n} \leq x \leq n.$$

   Et puisque $1 < 1 + \frac{1}{n}$, on a bien $x > 1$, c'est-à-dire $x \in]1, +\infty[$.

   Réciproquement, soit $x \in]1, +\infty[$. On a donc $x > 1$ et donc, pour $n \geq 2$,

   $$x \geq 1 + \frac{1}{n} \iff x - 1 \geq \frac{1}{n} \iff n \geq \frac{1}{x-1}.$$

Posons $n_1 = \left\lfloor \frac{1}{x-1} \right\rfloor + 1$ et $n_2 = \lfloor x \rfloor + 1$. Alors, pour $n = \max 2, n_1, n_2$, on a

$$1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n_1} \leq x \leq n_2 \leq n.$$

On a donc montrer l'existence d'un entier $n \geq 2$, tel que $x \in \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$, donc $x \in I_4$.