Chapter 13 Calcul matriciel élémentaire

Exercice 13.1

Effectuer les produits des matrices.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

Solution 13.1

Voir `http://youtu.be/XwtvirsK2HUh`

Exercice 13.2

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\\-1&4\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont définies ? Calculer les.

1. Ad

2. $AB+C$

3. $A+C^T$

4. C^TC

5. BC

6. d^TB

7. Cd

8. d^Td

9. dd^T.

Solution 13.2

1. $Ad=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

2. AB est une matrice $(3,2)$, C est une matrice $(2,3)$.

3. $A+C^T=\begin{pmatrix}2&6&4\\0&3&4\end{pmatrix}$.

4. $C^TC=\begin{pmatrix}11&3\\3&21\end{pmatrix}$.

5. $BC=\begin{pmatrix}0&5\\4&8\\5&-1\end{pmatrix}$.

6. $d^TB=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$.

7. C est une matrice $(3,2)$ et d est une matrice $(3,1)$ et $2\neq 3$.

8. $d^Td=\begin{pmatrix}6\end{pmatrix}$.

9. $dd^T=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 13.3

On pose

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\quad;\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & -2\\ 4 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel ABC.

Exercice 13.4

Déterminer, si possible, une matrice A et un scalaire x tels que

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 5 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-4 & 14\\ 15 & 0\\ 24 & x\end{pmatrix}$$

Solution 13.4

La matrice A est nécessairement une matrice $(2,2)$. On note

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

On alors

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 5 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 5 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+7c & b+7d\\ 5a & 5b\\ 9a+3c & 9b+3d\end{pmatrix}.$$

Or deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont même type et mêmes coefficients, d'où

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 5 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-4 & 14\\ 15 & 0\\ 24 & x\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a+7c & b+7d\\ 5a & 5b\\ 9a+3c & 9b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 14\\ 15 & 0\\ 24 & x\end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, on trouve

$$\begin{cases}a+7c & =-4\\ b+7d & =14\\ 5a & =15\\ 5b & =0\\ 9a+3c & =24\\ 9b+3d & =x\end{cases}\iff\begin{cases}a+7c & =-4\\ 7d & =14\\ a & =3\\ b & =0\\ 9a+3c & =24\\ 3d & =x\end{cases}\iff\begin{cases}7c & =-7\\ d & =2\\ a & =3\\ b & =0\\ 3c & =-3\\ 3d & =x\end{cases}$$

Ce système admet une solutions si, et seulement si $x=6$ et dans ce cas, on a

$$a=3\qquad b=0\qquad c=-1\qquad d=2.$$

c'est-à-dire $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Exercice 13.5

Soit $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer aa^T et $a^T a$.

Solution 13.5

Exercice 13.6

On note $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indices (i, j) et (k, ℓ) convenable. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$.

Solution 13.6

Exercice 13.7

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\sigma(A)$ la somme des termes de A.

Vérifier $JAJ = \sigma(A)J$.

Solution 13.7

Exercice 13.8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice $(2, 2)$ telle que,

$$\forall B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K}), AB = BA.$$

Montrer que $a = d$, $b = 0$, $c = 0$. En déduire que les seules matrices vérifiant cette propriété sont les multiples scalaires de la matrice unité I_2.

Pouvez-vous généraliser ce résultat aux matrices $(3, 3)$? Aux matrices (n, n) ?

Solution 13.8

Supposons que la matrice A commute avec tous les éléments de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. En particulier,

- avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  d'où $b = c = 0$.

- avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  d'où $a = d$.

Finalement A est nécessairement de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2.$$

Réciproquement, les matrices de la forme aI_2, avec $a \in \mathbb{K}$, commutent avec tout autre matrice de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$:

$$\forall B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K}), (aI_2)B = a(I_2B) = aB = a(BI_2) = B(aI_2).$$

Exercice 13.9

Pour toute matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Calculer $\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer
$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$
On dit que la trace est linéaire.
3. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a
$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$
4. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?
5. Trouver trois matrices A, B, C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(BAC)$.

Solution 13.9

1. La trace de A est la somme de ses termes diagonaux, ici $\operatorname{Tr} A = -3 + 1 + 4 = 2$.
2. On note $A = \left(A_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$. On utilise la définition de la somme de matrice ainsi que la linéarité de $\sum$
$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} \\ = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B).\end{aligned}$$
De manière similaire,
$$\operatorname{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$
3. La matrice AB est une matrice (n, n) donc
$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} a_{ik} b_{ki}.$$
De même
$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p} (BA)[k,k] = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$
Or b_{ki} et a_{ik} sont des scalaires, ainsi $b_{ki} a_{ik} = a_{ik} b_{ki}$, d'où
$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} a_{ik} b_{ki} = \operatorname{Tr}(AB).$$

4. Si deux telles matrices A, B existent, alors

$$\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(I_n) = n.$$

Or la trace et linéaire et $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$, donc

$$\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0.$$

5. Si de telles matrices existent, alors A et B ne commutent pas. D'ailleurs, avec les résultats précédents, on montre que $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BCA) = \operatorname{Tr}(CAB)$ et donc A, B, C ne commutent pas deux à deux. On peut essayer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\operatorname{Tr}(ABC) = 1$ et $\operatorname{Tr}(BAC) = 0$.

Exercice 13.10

Résoudre

$$A(X+B)-(C+D)X = A(A-X)-C(B+X)$$

où

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Solution 13.10

Exercice 13.11

L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd $\delta > 0$ de deux entiers $u \geq v > 0$, peut être décrit ainsi. On définit, par récurrence à deux pas, une suite $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et, tant que $x_i > 0$, $x_{i+1} = x_{i-1} \bmod x_i$ (le reste de la division euclidienne de x_{i-1} par x_i) :

$$x_{i-1} = q_i x_i + x_{i+1}.$$

Il existe alors un entier k tel que $x_k \neq 0$ et $x_{k+1} = 0$; le pgcd de u et v est alors $\delta = x_k$. Démontrer que, pour $i \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{bmatrix}.$$

En déduire que $x_i = a_i u + b_i v$, où

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix}.$$

Que valent les $*$ de la deuxième ligne ? Donner une définition par récurrence mutuelle des suite $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$, puis une méthode de calcul des coefficients de Bézout $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \delta$.

Solution 13.11

Exercice 13.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice unité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Solution 13.12

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $A^2 = A + 2I_3$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(A^2 - A\right) = I_3$, d'où

$$A\left(\frac{1}{2}\left(A - I_3\right)\right) = I_3 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{2}\left(A - I_3\right)\right)A = I_3;$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A - I_3\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Solution 13.13

Voir `http://youtu.be/XwtvirsK2HU` jusqu'à 9:00.

Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I_3$ et $\frac{1}{4}(A^2 - I) \times A = I_3$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.14 (***)

Soit A et B deux matrices (n, n) inversibles. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Solution 13.14

Posons $M = B^{-1}A^{-1}$, alors

$$(AB)\, M = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et

$$M\,(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

On a donc $(AB)M = M(AB) = I_n$, c'est-à-dire AB est inversible et $(AB)^{-1} = M$.

Exercice 13.15 (***)

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système de quatre équations donné par l'équation matricielle $BC = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier alors que B est inversible en utilisant la définition de matrice inverse.

3. Vérifier à nouveau votre solution en calculant B^{-1} à l'aide du déterminant.

Solution 13.15

1. Un calcul explicite donne

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7z & 3y + 7w \\ -z & -w \end{pmatrix},$$

L'équation matricielle $BC = I_2$ est donc équivalente à

$$\begin{cases} 3x & +7z & = 1 \\ 3y & +7w & = 0 \\ & -z & = 0 \\ & -w & = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} z & = 0 \\ w & = -1 \\ x & = 1/3 \\ y & = 7/3 \end{cases}$$

ou encore

$$BC = I_2 \iff C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Avec $C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on sait déjà que $BC = I_2$. De plus,

$$CB = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 & 7/3 - 7/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

La matrice B est donc inversible et $B^{-1} = C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Le déterminant de B est $\det B = -3$. La matrice B est donc inversible et

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13.16

Soit deux matrices A et B telles que A et AB soient inversibles. On suppose

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}. \tag{1}$$

Déterminer B.

Solution 13.16

Nous pouvons multiplier la relation (**??**) à droite par AB ;

$$(\textbf{??}) \implies (AB)^{-1}(AB) = 2A^{-1}AB. \implies I_n = 2I_nB \implies I_n = 2B.$$

Réciproquement, si $B = \frac{1}{2}I_n$, alors

$$(AB)^{-1} = \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2A^{-1}.$$

Conclusion

On a $B = \frac{1}{2}I_n$.

Exercice 13.17 (**)

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et en déduire que J n'est pas inversible.

Solution 13.17

Exercice 13.18 (***)

A étant une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe α et β de $\mathbb{K}$ tels que

$$A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0.$$

Quel est l'inverse de A si A est inversible ?

Solution 13.18

Exercice 13.19 (****)

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Solution 13.19

$$M^0 = I_4 \qquad M^1 = M$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par un récurrence immédiate, pour $k \geq 4$, $M^k = \mathbf{0}_4$.

Exercice 13.20

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = I_3 + B$, calculer les puissances de A.

Solution 13.20

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et B commutent car $BI_3 = B$ et $I_3B = B$. Nous allons donc chercher à appliquer la formule du binôme de Newton. Or, on a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate, si $k \geq 3$, $B^k = \mathbf{0}_3$. Donc, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3 B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cancel{B^k} \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 \\
&= I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 13.21

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que M est inversible et calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution 13.21

Exercice 13.22

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_p$.

1. Démontrer qu'il existe deux suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_nA + b_nI_p$.

2. En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, vérifier que $X_{n+1} = BX_n$ pour une certaine matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

   On suppose que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1}BP$ est diagonale ; les coefficients de cette dernière seront exprimés uniquement en fonction de r_1 et r_2.

4. En déduire une expression simple de a_n et b_n en fonction de n, r_1 et r_2.

Solution 13.22

1. On a déjà $A^0 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_p$, $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_p$ et, d'après l'énoncé, $A^2 = aA + bI_p$. Ensuite, on a $A^3 = A^2 \cdot A = aA^2 + bA = a(aA + bI_p) = a^2A + abI_p$. On voit ainsi que les coefficients de chaque puissance de A peuvent se déduire de ceux de la puissance précédente, d'où une démonstration par récurrence.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n: «il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^n = a_nA + b_nI_p$».

   Pour $n = 0$, on peut prendre $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, d'où H_0.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie; on a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times \left(a_nA + b_nI_p\right) && \text{d'après } H_n \\ &= a_nA^2 + b_nA \\ &= a_n(aA + bI_p) + ba_nI_p \\ &= (aa_n + b_n)A + ba_nI_p. \end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $a_{n+1} = aa_n + b_n$ et $b_{n+1} = ba_n$, on obtient $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_p$. Donc H_{n+1} est vraie.

   Conclusion

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n.

   Nous avons même fait mieux que de démontrer l'existence de ces suites : nous avons obtenu une relation de récurrence sur leurs termes, qui permettra de les déterminer.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + b_n \\ ba_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, la matrice $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3. On a $\det(P) = -r_1 + r_2 \neq 0$, donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1 & -1 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que les relation coefficients-racines donnent $a = r_1 + r_2$ et $b = -r_1 r_2$. Ainsi,

$$BP = \begin{pmatrix} a - r_2 & a - r_1 \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_1 r_2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix},$$

puis

$$P^{-1} BP = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1^2 + r_1 r_2 & -r_1 r_2 + r_1 r_2 \\ r_1 r_2 - r_1 r_2 & r_2^2 - r_1 r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

4.
- En notant $D = \mathrm{diag}(r_1, r_2)$, on a $B = PD\,P^{-1}$.
- On montre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = PD^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- On montre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = B^n X_0$, ainsi

$$X_n = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2^n - r_1^n \\ r_2 r_1^n - r_1 r_2^n \end{pmatrix},$$

ce qui donne finalement,

$$\begin{cases} a_n & = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1} \\ b_n & = \frac{r_2 r_1^n - r_1 r_2^n}{r_2 - r_1}. \end{cases}$$

Exercice 13.23

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $U = (A - I_3)(2A + I_3)$, $V = (2A + I_3)^2$, AU et AV.

2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $A = aU + bV + cI_3$.

3. En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, une expression de A^k comme combinaison linéaire de U, V et A^{k-1}.

4. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, $B^k - B^{k-1} = \frac{2}{3}U + \frac{(-2)^k}{6}V$, où $B = -2A$.

5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de B^n, puis de A^n, comme combinaison linéaire de U, V et I_3.

Solution 13.23

$$U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad AU = -\frac{1}{2}U \qquad AV = V.$$

Exercice 13.24

Sur le plan d'une ville, on a n carrefours $C_1, \dots, C_n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$). On définit une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $V[i,j] = 1$ si une rue mène directement du carrefour C_i au carrefour C_j en automobile, sans passer par un autre carrefour ; $V[i,j] = 0$ sinon. On convient $V[i,i] = 0$.

1. Que dire de V si toutes les rues sont à double sens ?

2. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $V^k[i,j]$ – le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de V^k – est le nombre d'itinéraires de C_i à C_j empruntant k rues, distinctes ou non. On appelle *k-chemins* ces itinéraires.

3. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $V^N = 0$. Montrer que, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, le nombre total $\gamma_{i,j}$ de chemins de C_i à C_j est fini. On pose $\Gamma = \left(\gamma_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer $\left(I_n + \Gamma\right) = \left(I_n - V\right)^{-1}$.

Solution 13.24

Exercice 13.25

Soit $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Solution 13.25

Exercice 13.26

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A \in \mathscr{M}_n\mathbb{C}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. On note

$$e(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

appelée *exponentielle de A* (la somme est en fait «finie»).

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $A + B$ est nilpotente et

$$e(A + B) = e(A)e(B).$$

2. En déduire que, pour toute matrice A nilpotente, $e(A)$ est inversible et $(e(A))^{-1} = e(-A)$.

3. Calculer $e(A)$ dans le deux exemples suivants.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 13.26

Exercice 13.27 *Mines MP*

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = I_n.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

Solution 13.27 *Mines MP*

Écrire $B_k = A^k + A^{-k}$ et obtenir $B_k = B_{k+1} + B_{k-1}$. Par récurrence $B_k = \lambda_k I_n$ avec (λ_k) suite récurrente linéaire...

Exercice 13.28

Résoudre l'équation d'inconnue A

$$\left(5A^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)^T = 3A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1}$$

Solution 13.28

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est 1. Elle est donc inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, la transposée est linéaire et $\left(A^T\right)^T = A$, donc

$$\begin{aligned} (\textbf{??}) &\iff 5A + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 3A + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 13.29

Déterminer la matrice A si

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 13.29

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1, elle est donc inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalement

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1} = B \iff A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.30

Soit A un matrice (m, n) et B une matrice (n, n). Simplifier l'expression

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1} A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1}$$

en supposant que les matrices inverses apparaissant dans l'expression sont bien définies.

Solution 13.30

Remarquons que $A^T A$ est une matrice de type (n, n). De plus, on a $\left(B^{-1} A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \left(B^{-1}\right)^T = A \left(B^T\right)^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1} A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1} &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(A \left(B^T\right)^{-1}\right) B^T \left(B^2 B^{-1}\right) \\
&= \left(A^T A\right)^{-1} \left(A^T A\right) \left(B^T\right)^{-1} B^T B^1 \\
&= I_n I_n B \\
&= B.
\end{aligned}$$

Exercice 13.31

Soit A une matrice carrée (n, n).

1. Montrer que la matrice $A + A^T$ est symétrique et que la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.
2. Montrer que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution 13.31

1. Par linéarité de la transposée,

$$\begin{aligned} \left(A + A^T\right)^T &= A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A \\ \text{et } \left(A - A^T\right)^T &= A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right). \end{aligned}$$

   La matrice $A + A^T$ est donc symétrique, la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.

2. En additionnant les matrices précédentes, on obtient $\left(A + A^T\right) + \left(A - A^T\right) = 2A$, c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right);$$

   et la matrice $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ est symétrique, la matrice $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ est antisymétrique.

Exercice 13.32

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ un matrice (m, n) sur le corps $\mathbb{R}$. Calculer Tr $\left(AA^T\right)$. En déduire

$$AA^T = 0 \implies A = 0 \text{ et } A^T = 0.$$

2. Les matrices A, B, et C étant de dimensions convenables, prouver

$$BAA^T = CAA^T \implies BA = CA.$$

   On se ramènera à la propriété précédente.

Solution 13.32

Exercice 13.33

Soit B une matrice (m, k). Montrer que la matrice $B^T B$ est une matrice symétrique (k, k).

Solution 13.33

Puisque B est de type (m, k), B^T est de type (k, m) donc $B^T B$ est de type (k, k). De plus

$$\left(B^T B\right)^T = B^T \left(B^T\right)^T = B^T B;$$

la matrice $B^T B$ est donc symétrique.