Chapter 22 Relations de comparaisons sur les suites

Exercice 22.1

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = \ln n, \qquad b_n = e^n, \qquad c_n = (\ln n)^{2023}, \qquad d_n = n^{0.1}, \qquad e_n = 5^n,$$
$$f_n = 2^n, \qquad g_n = n^{10}, \qquad h_n = \sqrt{\ln n}, \qquad i_n = n!.$$

Exercice 22.2

Vrai ou Faux ?

1. $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{n+1}$.
2. $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 22.3

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Exercice 22.4

Pour chaque paire de suites (u_n) et (v_n) ci-dessous, A-t-on $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$ ou $u_n \sim v_n$?

1. $u_n = (n^2 - n)/2$ et $v_n = 6n$.
2. $u_n = n + 2\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = n \ln n$ et $v_n = n\sqrt{n}/2$.
4. $u_n = n + \ln n$ et $v_n = \sqrt{n}$.
5. $u_n = 2\,(\ln n)^2$ et $v_n = \ln(n) + 1$.
6. $u_n = 4n \ln n + n$ et $v_n = \left(n^2 - n\right)/2$.

Exercice 22.5

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = (1000)2^n + 4^n$.
2. $u_n = n + n \ln n + \sqrt{n}$.
3. $u_n = \ln\left(n^{20}\right) + (\ln n)^{10}$.
4. $u_n = (0.99)^n + n^{100}$.

Exercice 22.6

Déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{2^n}$;
2. $b_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{10^{32}}{n^2}$;
3. $c_n = n^{-1/2} + 1$;
4. $d_n = \ln n - \sqrt{n} + (-1)^n$;
5. $e_n = 10^n + n!$;
6. $f_n = \dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{n!}$;
7. $g_n = n! + n^{\sqrt{n}} + n^n$;
8. $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^k}$;
9. $i_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
10. $j_n = \ln(n+32)$.

Exercice 22.7

Déterminer un équivalent simple de

1. $u_n = \dfrac{100^n + 3(n!)}{2(n!) + 1000^n}$,
2. $v_n = \dfrac{n! + 2^n}{3^n + n^{30}}$,
3. $w_n = \dfrac{n^3 + n! + 10^n}{(n+2)! + 100^n}$,
4. $t_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n+3} + 1000^n}$,

et en déduire leurs limites.

Exercice 22.8

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = n^{1/n} - 1$;
2. $u_n = \dfrac{1 + \sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$;
3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$;
4. $u_n = (n + 3\ln n)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$;
5. $u_n = \dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$;
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 22.9

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites à valeurs réelles. On suppose que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et qu'à partir d'un certain rang

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Montrer qu'alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \quad \text{et} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Exercice 22.10

Soient u et v deux suites de réels strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.

Exercice 22.11

Déterminer un équivalent simple de (u_n) dans les cas suivants.

1. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, où $a \in \mathbb{R}^\star$.
2. $u_n = \left(1 + \sqrt{n^2+1}\right)^{1/2}$.
3. $u_n = \ln\left(n^2 + n + 1\right)$.

Exercice 22.12

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par

$$u_0 > 0$$
$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

1. Prouver que $\left(u_n\right)$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Déterminer w_n, calculer de deux façons différentes $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$, déduire $\lim_{n\to+\infty} n u_n^2$, puis un équivalent de u_n.

Exercice 22.13 (****)

Soit $T : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \mathcal{O}(n) \quad [n \to +\infty].$$

Montrer que $T(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$.