CHAPITRE 9

CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

> L'esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative.
>
> Gottfried Leibniz

On résout des équations du premier et du second degré au moins depuis les Babyloniens, au début du deuxième millénaire avant notre ère, mais ce n'est que depuis les XVIe et surtout XVIIe siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres positifs. Ainsi il y avait avant une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour $x^2 + ax = b$, a et b étant supposés positifs.

Au début du IXe siècle Al Khawarizmi (dont le nom a donné algorithme) décrit la méthode de résolution des équations du second degré, pratiquement telle que vous la connaissez (mais en supposant que le discriminant est positif ou nul). Il faudra attendre sept siècles et une belle bagarre avant que l'on sache résoudre les équations de degrés 3 et 4. Elle mit aux prises essentiellement deux mathématiciens italiens de la renaissance, Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557) et Girolamo Cardano (1501-1576) (l'inventeur du joint de Cardan) : si vous êtes sages, nous vous la raconterons dans un autre chapitre.

Voici ce que l'on appelle de manière assez injuste les «formules de Cardan». Considérons l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{E}$$

avec $a \neq 0$. En divisant par a puis en posant $z = x + b/(3a)$, on obtient l'équation

$$z^3 + pz + q = 0\ , \tag{E'}$$

où

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}.$$

Si $4p^3 + 27q^2 \geq 0$, La formule suivante donne une solution réelle en z :

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}. \tag{S}$$

Tartaglia et Cardan n'utilisaient leurs formules que pour des équations dont on savait à l'avance qu'elles avaient des solutions réelles. Quand tout se passait bien, (S) donnait cette solution réelle. En factorisant par $(z - z_0)$, on se ramenait à une équation de degré 2 que l'on savait résoudre.

Cardan, puis Bombelli furent intrigués par l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, dont 4 est racine. Pourtant, la formule de Cardan donne comme solution

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

En fait dans le cas général (S) définit six nombres complexes, parmi lesquels seulement trois sont solutions de l'équation (E'). En effet, si u est tel que $u^3 = z$, les deux autres racines cubiques de z sont ju et $\overline{j}u$, où $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\overline{j} = j^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ sont les deux racines cubiques de l'unité différentes de 1. Voici la solution complète de (E').

1. Si $4p^3 + 27q^2 \geq 0$, soient u et v les deux réels tels que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}$$

Les trois solutions de (E') sont

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = ju + \overline{j}v, \quad z_3 = \overline{j}u + jv.$$

L'équation (E') a une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées.

2. Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u un des complexes tels que :

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{-4p^3 - 27q^2}{27}}.$$

Les trois solutions de (E') sont :

$$z_1 = u + \overline{u}, \quad z_2 = ju + \overline{j}\overline{u}, \quad z_3 = \overline{j}u + j\overline{u}.$$

L'équation (E') a trois solutions réelles, même s'il faut passer par les complexes pour les écrire.

En 1540, un élève de Cardan, Ludovico Ferrari donne des expressions explicites pour les solutions d'équations de degré 4, mais le problème des solutions non réelles demeure. En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion à l'égard des racines carrées de nombres négatifs et écrit le nombre «più di meno», c'est-à-dire i, puis définit les règles que vous connaissez, en particulier «più di meno via più di meno fa meno» : $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$. On constata bientôt qu'en acceptant les racines complexes et en comptant ces racines avec leur multiplicité, toute équation de degré 2 avait 2 racines, toute équation de degré 3 en avait 3 et toute équation de degré 4 en avait 4. Ceci fut énoncé par Girard en 1629, puis Descartes en 1637.

Et les équations de degré 5 ? On chercha longtemps une «résolution par radicaux» : une formule générale ne faisant intervenir que les opérations de $\mathbb{C}$ et l'extraction de racines. Le mémoire sur la résolution algébrique des équations que Joseph Louis Lagrange (1736-1813) publia en 1772 était une avancée importante. Il proposait une théorie ramenant le problème à l'étude des différentes valeurs que peuvent prendre certaines fonctions des racines lorsque l'on permute ces racines entre elles. Il y montrait aussi que les méthodes qui avaient conduit à la résolution des équations de degrés 2 3 et 4 ne pouvaient pas fonctionner sur une équation de degré 5 générale. Il s'écoula encore 60 ans avant qu'Evariste Galois (1811-1832) ne comprenne que la résolubilité par radicaux était liée aux propriétés du groupe des permutations des racines. Une conséquence de la théorie de Galois était la démonstration du fait que les équations de degré 5 n'étaient pas résolubles par radicaux en général. Ce n'est qu'en 1870, avec la parution du «Traité des substitutions et des équations algébriques» de Camille Jordan (1838-1922) que l'ampleur des conceptions de Galois fut pleinement comprise.

Il faut dire que Galois avait exposé ses idées dans des articles plutôt mal écrits, souvent incomplets, ainsi que dans une lettre à un ami, fébrilement écrite dans la nuit du 29 mai 1832. Elle se terminait par ces mots : «Après cela, il y aura j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis. Je t'embrasse avec effusion». Le lendemain matin, il mourait des suites d'un duel ; il avait 21 ans.

9.1 Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

§1 Construction de $\mathbb{C}$ (hors-programme)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

On définit ainsi sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$.

Théorème 1

- $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *est un corps.*
- $(0, 0)$ *est l'élément neutre de* $+$*, noté* $0_{\mathbb{C}}$ *ou* 0.
- $(1, 0)$ *est l'élément neutre de* $\cdot$*, noté* $1_{\mathbb{C}}$ *ou* 1.
- *Tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *a pour symétrique par la loi* $+$ $(-x, -y)$ *que l'on note* $-(x, y)$.
- *Tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ *a pour symétrique par la loi* $\cdot$ $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Notation

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se note $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ appelé **corps des nombres complexes**.

Remarque

En toute rigueur, $\mathbb{C}$ ne contient pas $\mathbb{R}$, mais on identifie l'ensemble $\mathbb{R}$ avec

$$\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2.$$

En ce sens, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2

On pose $i = (0, 1)$. Alors $i^2 = -1$.

9.2 Définition des nombres complexes

§1 Approche axiomatique

Théorème 3 **Définition de $\mathbb{C}$**

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, muni de deux opérations $+$ et $.$, tel que

1. *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
2. *Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = i.i = -1$.*
3. *Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + i.y$ où x et y sont réels.*
4. *Les opérations $+$ et $.$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication usuelles.*
5. *Les règles habituelles d'usage de ces opérations restent valables dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire*
   - *$+$ et $.$ sont associatives et commutatives.*
   - *$.$ est distributive par rapport à $+$.*
   - *tout* élément *z de $\mathbb{C}$ possède un opposé, noté $-z$.*
   - *tout élément z de $\mathbb{C}$ différent de 0 possède un inverse, noté z^{-1}.*

On dit que $+$ et $.$ sont des **lois de compositions internes** et que $(\mathbb{C}, +, .)$ est un **corps**. Afin d'alléger les notations, nous noterons les produits zw au lieu de $z.w$.

Test 4 Calculer $(1 + 2i)(8 - 3i)$.

§2 Règles d'exponentiation

On notera $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$.

Nous utiliserons la convention usuelle d'exponentiation : pour tout nombre complexe z, z^0 sera par convention égal à 1 ; pour tout $n \geq 1$, z^n désignera le nombre $z \cdot \cdots \cdot z$ (n fois). Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note z^{-n} le nombre complexe $(1/z)^n$.

Exemple 5

$$\begin{array}{llllll} i^{-1} = -i, & i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, & i^4 = 1. \\ \text{Pour } k \in \mathbb{Z}, & i^{4k} = 1, & i^{4k+1} = i, & i^{4k+2} = -1, & i^{4k+3} = -i. & \end{array}$$

Remarque **Règles d'exponentiation**

Les propriétés des puissances sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$. Soient $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. $z^n z^m = z^{m+n}$.
2. $(z^n)^m = z^{nm}$.
3. $z^n w^n = (zw)^n$.

On retrouve également les identités remarquables bien connues, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \text{(Binome de Newton)}$$

par exemple,

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Test 6 Développer et simplifier $(2 + 3i)^2$ et $(3 - 4i)^2$.

Test 7 Développer et simplifier $(2 + 3i)^7$.

Test 8 Développer et simplifier

$$s = (1 + i)^7 + (1 + i)^9 + (1 + i)^{11} + \cdots + (1 + i)^{17}.$$

§3 Nombres complexes et équations algébriques

Les nombres complexes sont nés de la résolution des équations algébriques. Par exemple, $z^2 = -1$ équivaut à $z^2 - i^2 = 0$, c'est-à-dire $(z - i)(z + i) = 0$. Arrivés à ce stade de la résolution nous appliquons la propriété ci-dessous pour affirmer que les seules solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont $\pm i$.

Proposition 9 *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ ou } w = 0.$$

Test 10 Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

9.3 RÈGLES ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL

§1 Forme algébrique

Définition 11 Soit z un nombre complexe, de la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- L'écriture $z = x + iy$ est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Les réels x et y sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. Ils sont notés respectivement $\mathfrak{Re}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z = \mathfrak{Re}\, z + i\, \mathfrak{Im}\, z.$$
- Les nombres complexes de la forme iy, avec $y \in \mathbb{R}$, sont dits **imaginaires purs**. On note leur ensemble
$$i\mathbb{R} = \{\, iy \mid y \in \mathbb{R} \,\}.$$
Remarquons que 0 est un réel et un imaginaire pur.

Proposition 12 *Soient z et w deux nombres complexes, alors*
$$z = w \iff \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, w \text{ et } \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, w$$
Autrement dit, pour tous réels x, y, x', y', *on a*
$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Proposition 13 **Règles de calcul dans $\mathbb{C}$**
Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$, avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

1. *La somme des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe*
$$z + w = (x + x') + i(y + y')$$
autrement dit, $\mathfrak{Re}(z + w) = \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(w)$ et $\mathfrak{Im}(z + w) = \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(w)$.
2. *Le produit des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe*
$$z \times w = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Remarque Plus généralement, on peut écrire
$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Re}(a_k); \qquad \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Im}(a_k);$$

Remarque Pour tout *réel* λ et tout complexe $z = x + iy$, on a $\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$, d'où
$$\mathfrak{Re}\,(\lambda x) = \lambda\, \mathfrak{Re}(x) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\,(\lambda x) = \lambda\, \mathfrak{Im}(x).$$

Proposition 14 *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z \neq 0$ si, et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$; et dans ce cas l'inverse de z est donnée par*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

§2 Le plan d'Argand-Cauchy

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition 15 Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y), c'est-à-dire tel que

$$\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

On appelle **affixe** de $\vec{u}$ le complexe $z = x + iy$.
Réciproquement, $\vec{u}$ est appelé (**vecteur**) **image** du complexe z.

On notera de manière condensée $\vec{u}(z)$ le vecteur d'affixe z.

Définition 16 Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y), c'est-à-dire tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

On appelle **affixe** de M le complexe $z = x + iy$. Réciproquement, on dit que M est le (**point**) **image** du complexe z.

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M, alors l'abscisse de M est $\mathfrak{Re}(z)$ et son ordonnée est $\mathfrak{Im}(z)$.

Proposition 17 *Soient $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A l'affixe de A et z_B l'affixe de B. Alors, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.*

§3 Conjugaison

Définition 18 Le **conjugué** du complexe $z \in \mathbb{C}$ est le complexe $\overline{z} = \mathfrak{Re}\, z - i\, \mathfrak{Im}\, z$. En représentation algébrique

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overline{x + iy} = x - iy.$$

Lemme 19 *Pour tout nombre complexe z,*

$$z\overline{z} = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2,$$

en particulier $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

Test 20 Vérifier le lemme précédent.

Proposition 21

Si $z, w \in \mathbb{C}$ *et* $w \neq 0$, *alors*

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}.$$

Remarquez que $w\overline{w}$ *est un réel.*

Test 22

Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{2+3i}$ et $\dfrac{1-5i}{2+i}$.

Proposition 23

Propriétés de la conjugaison

Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$ *est un réel.*
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$ *est un imaginaire pur.*
3. $\overline{\overline{z}} = z$.
4. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
6. *Si* $w \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
7. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Test 24

Soit $z = a + ib$ et $w = c + id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vérifier les propriétés précédentes.

Remarque

Plus généralement, on peut écrire

$$\overline{\sum_{k=p}^{q} a_k} = \sum_{k=p}^{q} \overline{a_k}.$$

9.4 Représentation trigonométrique

§1 Module

Définition 25

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}.$$

Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Rappelons que pour tout nombre réel a, on a

$$\sqrt{a^2 + 0} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Si z est réel, alors le module de z est égal à la valeur absolue de z, il n'y a donc pas conflit de notations.

Proposition 26 **Propriétés du module**

Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

1. $z\overline{z} = |z|^2$.
2. $z = 0 \iff |z| = 0$.
3. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.
4. $|zw| = |z||w|$.
5. *Si* $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

Théorème 27 *Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes.*

1. $\mathfrak{Re}\, z \leq |\mathfrak{Re}\, z| \leq |z|$,
2. $\mathfrak{Im}\, z \leq |\mathfrak{Im}\, z| \leq |z|$.
3. *L'inégalité triangulaire :*
$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$
de plus, il y a égalité si et seulement si $w = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda w$.
4. *Plus généralement,*
$$\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Remarque **Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des vecteurs**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z et w. Puisque $|z + w| \leq |z| + |w|$, on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Remarque **Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des points**

Soit A, B et C trois points d'affixes z_A, z_B et z_C. Alors

$$AC = |z_C - z_A| = |z_C - z_B + z_B - z_A| \leq |z_C - z_B| + |z_B - z_A| = AB + BC$$

De plus, il y a égalité si et seulement si A, B et C sont alignés dans cet ordre.

Remarque Soit A un point du plan d'affixe z_A et R un réel > 0.

- Le **cercle** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = R$.
- Le **disque ouvert** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| < R$.
- Le **disque fermé** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| \leq R$.

La distance de A à B est $\mathrm{d}(A, B) = AB = |z_B - z_A|$.

Test 28 Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie

$$|z - 1| = |z + 1 + 3i|.$$

§2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition 29

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{ \, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \, \}$$

Proposition 30

L'ensemble $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, c'est-à-dire

1. $1 \in \mathbb{U}$.
2. $\forall (z, w) \in \mathbb{U}^2, zw \in \mathbb{U}$.
3. $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Proposition 31

L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est un groupe commutatif.

Proposition 32

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists t \in \mathbb{R}, z = \cos(t) + i \sin(t).$$

Définition 33

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

Test 34

1. $e^{i0} =$
2. $e^{i\pi} =$
3. $e^{i\frac{\pi}{2}} =$

Proposition 35

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$.
2. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.
3. $\dfrac{1}{e^{ia}} = e^{-ia} = \overline{e^{ia}}$.

Test 36

Démontrer ces propriétés.

Définition 37

Soient $(E, \top)$ et $(F, \perp)$ deux groupes et φ une application de E dans F. On dit que φ est un **morphisme de groupe** si

$$\forall (x, y) \in E^2 \varphi\,(x \top y) = \varphi(x) \perp \varphi(y).$$

Exemple 38

La fonction ln est un morphisme du groupe $(]0, +\infty[, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Proposition 39

L'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{U}, \cdot) \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$$

est un morphisme de groupe surjectif.

L'application φ n'est pas injective. En effet,

Lemme 40

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ia} = e^{ib} \iff \cos a = \cos b \text{ et } \sin a = \sin b \iff a \equiv b \pmod{2\pi}.$$

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

Proposition 41

Formules d'Euler
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{Euler}$$

Proposition 42

Formule de (De) Moivre
Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\left(e^{it}\right)^n = e^{int}$, c'est-à-dire

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt).$$

Test 43

Soit $t \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(5t)$ et $\sin(5t)$ en un polynôme en $\sin(t)$ et $\cos(t)$. En déduire une expression sympathique de $\tan(5t)$.

Proposition 44

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos(nt) =$$

$$\text{et } \sin(nt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).

Savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ est dans la partie «capacités» du programme. Connaître la formule ne me semble pas une exigence du programme. Par contre, vous devez savoir retrouver le résultat rapidement. ∎

Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est la transformer en une combinaison linéaire de $\sin(at)$ et $\cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$ (il n'y a donc pas de carré, cube,...).

On utilise pour cela les formules d'Euler ainsi que la formule du binôme de Newton

Test 45

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\sin^3(t)$.
2. Linéariser $\cos^4(t)$.

Délinéarisation

Lemme 46

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + e^{it} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} \qquad \textit{et} \qquad 1 - e^{it} = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}.$$

Test 47

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}$. En factorisant «par l'angle moitié» $e^{ip} + e^{iq}$, retrouver les formules de Simpson.

On peut utiliser le même type d'idée que pour $1 + e^{it}$ pour des sommes plus générales. On peut calculer un grande variété de sommes trigonométriques de cette façon.

Proposition 48

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) =$$
$$\textit{et} \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).

Le calcul de ces sommes est dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne me semble pas une exigence du programme. Par contre, vous devez savoir retrouver le résultat rapidement. ∎

§4 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

Définition 49

Si z est un nombre complexe non nul, le complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est-à-dire

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Une telle écriture est **une forme trigonométrique**. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé **un argument** de z.

Remarque

Géométriquement, si $z \in \mathbb{C}^\star$ est l'affixe d'un point M, alors un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$.

Pour mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, on commence par factoriser son module.

Test 50

Mettre sous forme trigonométrique.

1. $1 + i$. | **2.** $1 - i\sqrt{3}$. | **3.** $1 + 7i$.

Proposition 51

Soient $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\varphi}$ deux nombres complexes non nuls *écrits sous forme trigonométrique. Alors*

$$z = w \iff (|z| = |w| \text{ et } \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi})\,.$$

Ainsi, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et *les* mêmes arguments.

Lemme 52

Soient z et w deux complexes non nuls dont on donne une forme trigonométrique

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad w = |w|e^{i\varphi}.$$

Alors, on a les formes trigonométriques suivantes

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Notation

Pour dire que θ est *un* argument de z, on note

$$\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

La notation est cohérente en raison de la transitivité de la relation modulo 2π.

Remarque

Tout nombre complexe non nul possède un argument unique dans $]-\pi, \pi]$ (ou $[0, 2\pi[$).

Corollaire 53

Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

1. $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$
2. $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$

3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$

4. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}$

5. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$.

9.5 Racines d'un polynôme

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 54 **d'Alembert-Gauß**
Tout polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Admise. ∎

Remarque Si z est racine d'un polynôme à coefficient réel, alors $\overline{z}$ aussi.

Méthode Si un polynôme P admet une racine $a \in \mathbb{C}$, il est alors possible de factoriser $(X-a)$ dans P. Par exemple, 3 est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ et on a

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-3)(X^2 - 3X + 2).$$

Pour déterminer cette factorisation, on peut par exemple utiliser des «coefficients inconnus»:

$$(X-3)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-3a)X^2 + (c-3b)X - 3c,$$

et «par identification»,

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-3a &= -6 \\ c-3b &= 11 \\ -3c &= -6 \end{cases} \text{ et par substitution } \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -6+3 = -3 \\ c &= 11-9 = 2 \\ c &= 2 \quad \text{(pour vérification)} \end{cases}$$

On peut également «poser» la division (voir le chapitre «Polynômes»).

$$\begin{array}{l|l} X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & X - 3 \\ & \\ \end{array}$$

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 55 On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine carrée** de $a \in \mathbb{C}$ si $z^2 = a$.

Théorème 56 *Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes opposées.*

Démonstration. Soit a un nombre complexe non nul. Écrivons a sous forme polaire $a = |a|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

De même, pour $z \in \mathbb{C}$, écrivons $z = |z|e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^2 = a \iff |z|^2 e^{2i\varphi} = |a|e^{i\theta} \iff \left(|z| = \sqrt{|a|} \text{ et } 2\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}\right).$$

On trouve alors facilement *une* racine carrée de a car

$$\left(\sqrt{|a|}e^{i\theta/2}\right)^2 = |a|e^{i\theta} = a.$$

Reste à montrer qu'il n'en existe que deux, et qu'elles sont opposées. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 - \left(\sqrt{|a|}e^{i\theta/2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \sqrt{|a|}e^{i\theta/2}\right)\left(z + \sqrt{|a|}e^{i\theta/2}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{|a|}e^{i\theta/2} \text{ ou } z = -\sqrt{|a|}e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

∎

Corollaire 57 **Racines carrées sous forme trigonométrique**
Soit $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec θ réel. Les racines carrées de a sont

$$\sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } -\sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Pour un réel positif, on parle de *la* racine carrée pour désigner celle des deux racines qui est positive. Dans le cas d'un complexe quelconque, on ne dispose pas de moyen satisfaisant pour particulariser l'une des deux racines (même problème que la notation $\sqrt{-1}$). On parle donc toujours d'*une* racine carrée. Pour la même raison, on s'interdit d'utiliser le symbole déterministe $\sqrt{z}$, qui reste réservé aux réels positifs (attention aux variations sur vos calculatrices, python, etc…).

Test 58 Déterminer les racines carrées de $w = 1 + i$ sous forme trigonométrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 59

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes données par :*

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

  On dit que ces nombres sont ***racines simples*** *du trinôme $az^2 + bz + c$.*

- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution : $\dfrac{-b}{2a}$. On dit qu'elle est* ***racine double*** *du trinôme $az^2 + bz + c$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et notons δ une racine carrée de Δ. Puisque $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\
&\iff z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \ \text{ ou } \ z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \\
&\iff z = \frac{-b-\delta}{2a} \ \text{ ou } \ z = \frac{-b+\delta}{2a}.
\end{aligned}$$

∎

Test 60

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1-i)z - i = 0$.

Test 61

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.

§4 Extraction des racines carrées sous forme algébrique

Méthode **Extraction des racines carrées sous forme algébrique**

On cherche les racines carrées d'un nombre complexe $w = u + iv$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 = w &\iff z^2 = w \text{ et } |z|^2 = |w| \\ &\iff (x+iy)^2 = u + iv \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{u^2+v^2} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2+v^2} \\ x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}. \end{aligned}$$

Des deux première lignes, on déduit x^2 et y^2, puis x et y au signe près. La troisième donne le signe du produit xy, donc les deux racines recherchées.

Remarque

On se gardera d'appliquer cette méthode dans le cas où w est un nombre réel. Les racines carrés de w sont alors évidentes, égales à $\pm\sqrt{w}$ si w est positif et à $\pm i\sqrt{|w|}$ si w est négatif.
En particulier, si a, b et c sont des *réels* et que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, une racine carrée de Δ est donnée par $\delta = i\sqrt{-\Delta}$. Le polynôme $aX^2 + bX + c$ a donc deux racines complexes conjuguées

$$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Test 62

Déterminer les racines carrées de $1 + i$ sous forme algébrique.
En déduire une expression de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

Test 63

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.

§5 Relations coefficients-racines

Proposition 64 **Relations coefficients-racines**

Soit z_1 et z_2 les deux solutions (éventuellement confondues) de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{E}$$

On a alors les relations

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \textit{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Corollaire 65 *Soit S et P deux nombres complexes. Alors, les seuls nombres complexes z_1 et z_2, éventuellement égaux, qui vérifient*

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= S \\ z_1 z_2 &= P \end{cases}$$

sont les deux racines du trinôme $z^2 - Sz + P$.

§6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^3$. On note

$$S_{a,b}(\mathbb{K}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$

Proposition 66 *Une suite géométrique de raison q est élément de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ si et seulement si q est zéro du polynôme du second degré $X^2 - aX - b$.*

Définition 67 Le polynôme $X^2 - aX - b$ s'appelle le **polynôme caractéristique** de $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Il s'agit donc de discuter une équation du second degré. Pour écarter les trivialités, nous supposerons $(a, b) \neq (0, 0)$ et nous poserons $\Delta = a^2 + 4b$.

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 68 *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $\left(u_n\right)$ une suite complexe vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. *Si le polynôme P admet deux racines distinctes q_1 et q_2, alors*

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. *Si le polynôme P admet une racine double $q = a/2$, alors*

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)\, q^n.$$

Exemple 69 Résolvons la récurrence

$$u_0 = 1, u_1 = -1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2iu_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2iX - 1$, son discriminant est $\Delta = -4 + 4 = 0$. On est dans la seconde situation avec $q = i$ – on peut vérifier que $X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$. On a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)i^n,$$

λ et μ étant à déterminer ; mais par définition de (u_n),

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = (\lambda + \mu)i = -1 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = i - 1 \end{cases};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n + ni)i^n.$$

Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème 70

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* (u_n) *une suite réelle vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. *Si le polynôme* P *admet deux racines réelles* q_1 *et* q_2*, alors*

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. *Si le polynôme* P *admet une racine double* $q = a/2$*, alors*

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)\, q^n.$$

3. *Si le polynôme* P *admet deux racines complexes conjuguées* $q_1 = \varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *et* $q_2 = \varrho\,(\cos\alpha - i\sin\alpha)$*, alors*

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\varrho^n\cos(n\alpha) + \mu\varrho^n\sin(n\alpha).$$

Exemple 71

Soit u la suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, son discriminant est $\Delta = 5 > 0$ et ses racines sont $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a pour tout entier n,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

λ et μ étant à déterminer d'après les conditions initiales ;

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_1 = \lambda\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \text{d'où } \lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Remarquons (ce qui n'est pas évident sur la formule !) que u_n est un nombre entier et qu'il représente le nombre de façon de payer la somme de n € en utilisant uniquement des pièces de 1€ et 2€, avec ordre.

Exemple 72

Soit u la suite définie par

$$u_0 = 2, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4$, son discriminant est $\Delta = 0$ et la racine double est $q = 2$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n,$$

où λ et μ sont à trouver. Tous calculs faits, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2 - n)2^n.$$

Exemple 73

Soit u la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 4$, son discriminant est $-12 < 0$ et les racines complexes sont $-1 \pm i\sqrt{3}$. On a donc

$$\varrho^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4$$

$$\text{et } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\varrho} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n \cos\frac{2n\pi}{3} + \mu 2^n \sin\frac{2n\pi}{3},$$

où λ et μ sont à trouver avec

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = -\lambda + \mu\sqrt{3} = 2 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \sqrt{3} \end{cases};$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

9.6 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

§1 Notion de racine n-ième

Définition 74 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième** de a est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = a.$$

Lorsque $n = 2$, on dit que z est une **racine carrée** de a. Lorsque $n = 3$, on dit que z est une **racine cubique** de a.

Certains nombres ont plus d'une racine n-ième. Par exemple, 5 et -5 sont tout deux racine carrée de 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, 0 possède une unique racine n-ième, c'est 0.

Lemme 75 *Si $a = |a|e^{i\theta}$, alors*

$$|a|^{1/n}e^{i\theta/n}$$

est une *racine n-ième de a.*

Exemple 76 Déterminons les racines cubique de 1, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$z^3 = 1.$$

Il y a une solution apparente qui est $z = 1$. Ainsi,

$$z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2+z+1) = 0.$$

On trouve alors, trois solutions,

$$1 \qquad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 77 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième** de l'unité est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = 1.$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les racines n-ièmes de 1.

Théorème 78 **Racines n-ièmes de 1**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ième de l'unité. Ce sont les complexes $1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{n}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$ *c'est-à-dire les nombres complexes*

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \textit{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Notation On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 79 *L'ensemble des racines n-ième de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif à n éléments.*

Test 80 Déterminer $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

Proposition 81 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.*

1. $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.
2. $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \omega_k = \omega_1^k$.
3. *Si $n \geq 2$, alors la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.*

Par exemple, on a $1 + j + j^2 = 0$.

Remarque Les images des racines n-ièmes de l'unité ω_k sont réparties régulièrement sur le cercle unité. Les images des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'affixe 1.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

Théorème 82 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Alors a admet exactement n racines n-ièmes. Si z_0 désigne l'une d'entre elles, alors les racines n-ièmes de a sont les complexes*

$$z_0 \times \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \textit{où} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Méthode Si on écrit a sous forme trigonométrique : $a = |a|e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, les racines n-ième de a sont les complexes

$$z_k = |a|^{1/n} \exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

On peut également choisir $k \in [\![1, n]\!]$ ou parmi n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.

Remarque Les points d'affixes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O, de côté $|z_1 - z_0| = 2\sqrt[n]{r}\sin\frac{\pi}{n}$.

Test 83 Résoudre l'équation $z^5 = -1 + i\sqrt{3}$.

9.7 Exponentielle d'un nombre complexe

§1 Définition

On a défini le symbole e^z dans deux cas : z est réel et z est imaginaire pur. On veut prolonger sa définition à tout $z \in \mathbb{C}$ tout en conservant sa propriété fondamentale $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$.

Définition 84

Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On note également $e^z = \exp(z)$.

Proposition 85

Soient $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\exp(z) \neq 0$.
2. $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
3. $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
4. $\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right)$.
5. $|\exp(z)| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$.
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, (\exp(z))^n = \exp(nz)$.

On dit que l'application $\exp : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Proposition 86

Soient $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$$\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = w + 2ik\pi.$$

Méthode

Résolution de l'équation $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $a \neq 0$, on écrit a sous forme trigonométrique $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \exp(z) = a &\iff e^x e^{iy} = |a|e^{i\theta} \\ &\iff \begin{cases} e^x = |a| \\ y \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln|a| + i(\theta + 2k\pi) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^z = a$ sont les complexes $\ln|a| + i(\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Test 87

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i$.

9.8 Nombres complexes et géométrie plane

§1 Interprétation géométrique

Proposition 88 **Interprétation géométrique du module et de l'argument**
Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors :

1. $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z|$.
2. *si $M \neq O$, alors* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Proposition 89 *Soit $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A et z_B les affixes respectives de A et B.*

1. $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.
2. *Si $A \neq B$,* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

Corollaire 90 *Soit A, B, C et D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On note z_A, z_B, z_C et z_D leurs affixes respectives. Alors*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}.$$

En particulier,

- $(AB) \parallel (CD) \iff \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- $(AB) \perp (CD) \iff \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

§2 Représentation analytique complexe

Proposition 91 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z et w et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + w$.*
2. *Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz.*
3. *On a $\|\vec{u}\| = |z|$.*

Définition 92 Si $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ est une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, on appelle **représentation analytique complexe** de F l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' \end{array}$, qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de $M' = F(M)$.

Exemple 93

1. La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe $(O\vec{e_1})$ est
$$z' = \overline{z}$$
2. La représentation complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est
$$z' = z + b$$
3. La représentation complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est
$$z' - \omega = \lambda(z - \omega) \text{ soit } z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega.$$
4. La représentation complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \text{ soit } z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

§3 Similitude directe

Définition 94 On appelle **similitude directe** toute application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui admet une représentation complexe de la forme
$$z \mapsto az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

Proposition 95 *Soit s la similitude directe de représentation complexe*
$$z \mapsto az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

1. *Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe b.*
2. *Si $a \neq 1$, alors s possède un unique point fixe Ω[a]. Alors s est la composé de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$. On dit que s est la similitude directe de **centre** Ω, de **rapport** λ et d'**angle** θ.*

[a] Si ω désigne l'affixe de Ω, on a $\omega = a\omega + b$.

Remarque Cette similitude directe conserve les angles orientés et multiplie les distances par $|a|$.

Remarque Une **similitude indirecte** est une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui admet une représentation complexe de la forme
$$z \mapsto a\overline{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$