Chapter 3 Notions sur les fonctions en analyse

3.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Exercice 3.1

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

Exercice 3.2

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)(x-7)}$.

Exercice 3.3

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1+2x^2-x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

3.2 Courbe représentative d'une fonction

Exercice 3.4

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

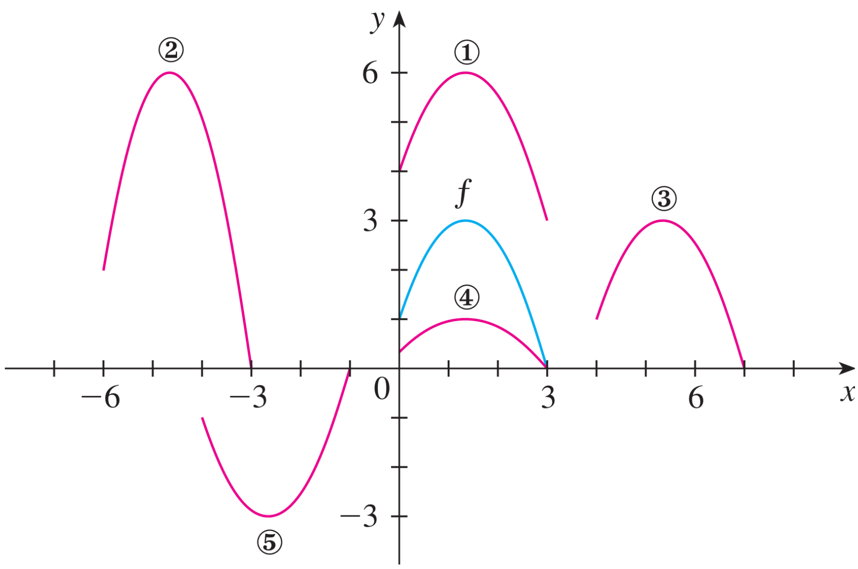
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2} f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x) + 3$

(e) $y = -f(x+4)$



Exercice 3.5

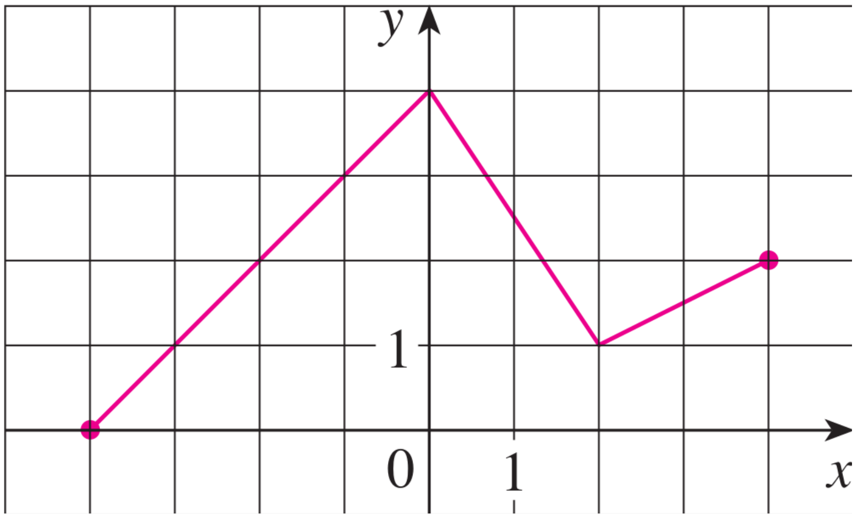
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

(b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 4$



Exercice 3.6

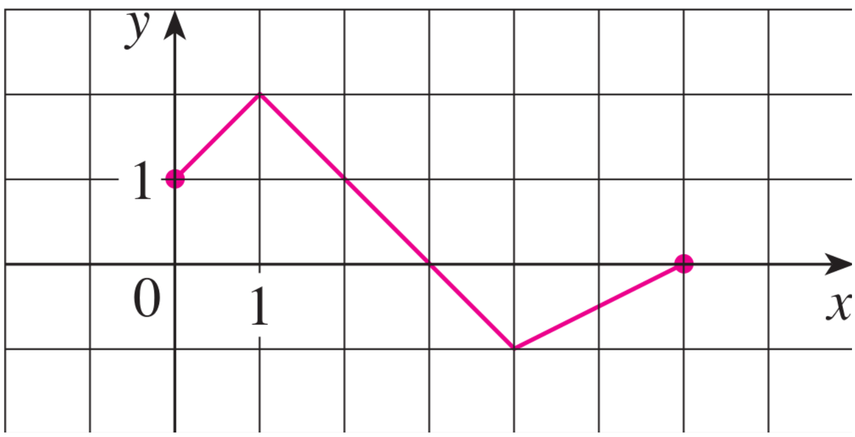
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

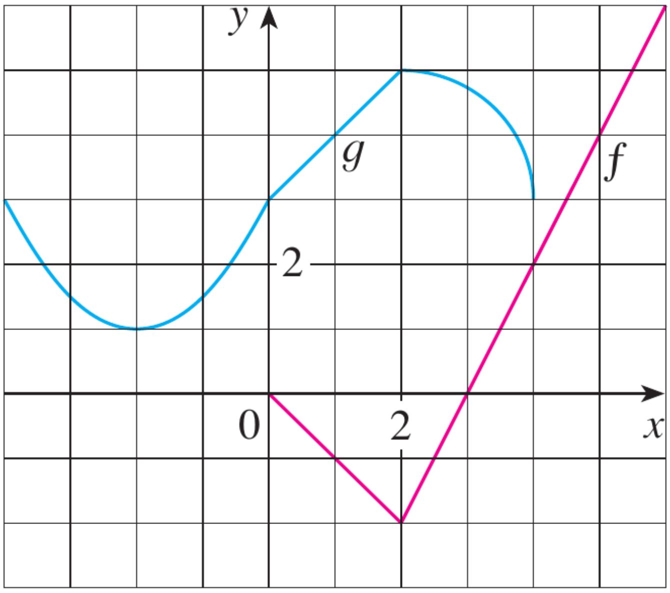
(d) $y = -f(-x)$



Exercice 3.7

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

1. $f(g(2))$.
2. $(g \circ f)(6)$.
3. $g(f(0))$.
4. $(g \circ g)(-2)$.
5. $(f \circ g)(0)$.
6. $(f \circ f)(4)$.



Exercice 3.8

1. $f\left(\frac{1}{2}(x+|x|)\right)$;
2. $f\left(\frac{1}{2}(x-|x|)\right)$;
3. $\frac{1}{2}xf(x)$;
4. …

3.3 Symétries du graphe

Exercice 3.9

Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Exercice 3.10

Parmi les fonction suivantes, déterminer celles qui sont elles paires ou impaires. Justifiez.

1. $f : x \mapsto 2x^5 - 3x^2 + 2$.
2. $f : x \mapsto x^3 - x^7$.
3. $f : x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$.
4. $f : x \mapsto 1 + \sin x$.

Exercice 3.11
Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?
Exercice 3.12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(6-x) = 4 - f(x)$. Trouver une symétrie de C_f.
Exercice 3.13
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$. Trouver un axe de symétrie de C_f.

3.4 Injections, surjections, bijections

Exercice 3.14
Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \to &]-\infty,-2[\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{3-x} \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.
Exercice 3.15
Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.
Montrer que f est bijective et expliciter sa fonction réciproque.
Exercice 3.16
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

2. On note $g : \mathbb{R} \to]-1,1[, x \mapsto f(x)$. Donner une expression de g^{-1}.

Exercice 3.17
Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leurs fonctions réciproques.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+1$.

2. $f : [0,2] \to [0,2], x \mapsto \sqrt{4-x^2}$.

3. $f : [-4,0] \to [0,4], x \mapsto \sqrt{16-x^2}$.

4. $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[, x \mapsto \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

À l'aide d'une calculatrice (ou autre), tracer dans la même fenêtre la courbe de f et f^{-1}. Décrire la relation entre les deux courbes.
Exercice 3.18
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

1. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

2. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

3. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{ a \}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{ b \}$ à l'arrivée:

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{ a \} & \to & \mathbb{R} \setminus \{ b \} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Montrer que g est bijective et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

Exercice 3.19
Soit $f : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x+8} \end{array}$.

1. Prouver que f réalise une bijection de $I = [2, +\infty[$ sur son image que l'on précisera.

2. Prouver que la bijection réciproque de f est continue.

3. Déterminer cette bijection réciproque.

Exercice 3.20

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

2. Expliciter l'application réciproque de f.

3.5 Notions liées à l'ordre

Exercice 3.21

La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?

2. Croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?

3. Croissante ?

4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?

5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?

6. Strictement croissante ?

Exercice 3.22

Vrai ou Faux ?

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.

2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.

3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.

4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.

5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.

6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.

7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.

8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Exercice 3.23

Soient A,B,C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g \circ f$ croissante	$g \circ f$ décroissante
g décroissante	$g \circ f$ décroissante	$g \circ f$ croissante

Calculus

3.6 Tangente et dérivées

Exercice 3.24

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1, 4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2, 2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2, 8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1, 2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1, 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5, 2)$.
7. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ au point $A(4, 5)$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ au point $A(0, 1)$.

Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Exercice 3.25

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(0, 2)$.

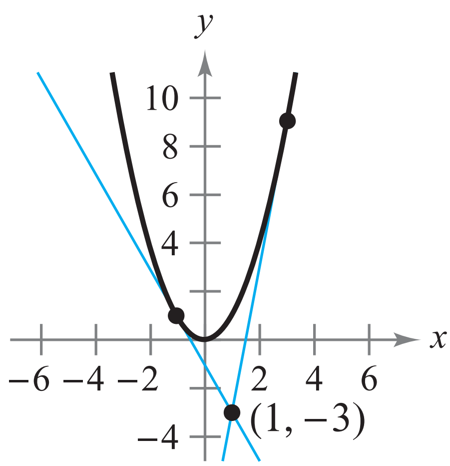
$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

Exercice 3.26

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 3.27

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$
2. $x^{-1/\sqrt{2}}$
3. $(x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1+x}{1-x}$
5. $\dfrac{7x-3}{x+2}$
6. $\log x$
7. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 1}{2x^2 + x - 3}$

Exercice 3.28

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\ln(\sin x)$
2. $\arctan(\ln x)$
3. $e^{\cos x}$
4. $\tan^3 x$
5. $\arcsin\left(e^x\right)$
6. $\sin(\ln x)$
7. $\sin(\sin x)$
8. $\arctan(\tan x)$
9. e^{e^x}
10. $\arcsin(\cos x)$

Exercice 3.29

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\sin(\sin(\sin x))$
2. $\ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $e^{e^{e^{e^{e^x}}}}$.

Exercice 3.30

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $f\left(x^2\right)$
2. $f(\sin x)$
3. $f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$
4. $\sin\left(f(x)\right)$
5. $\dfrac{1}{f(x)^{3/2}}$
6. $\ln\left(f\left(e^x\right)\right)$.

Exercice 3.31

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1+x^2\right)$.
3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 3.32

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.
2. On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.
3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1-e)$.

Exercice 3.33

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est bijective. On note alors g son application réciproque.
2. Sans calculer g, justifier que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

3.7 Convexité

3.8 Branches infinies

3.9 Étude pratique des fonctions

Exercice 3.34

Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$;

2. $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;

3. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Exercice 3.35

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.

3. Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

4. En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Exercice 3.36

Tracer la courbe d'équation $y = 2x^3 - 6x - 4$.

Exercice 3.37

Tracer la courbe d'équation $y = -2x^4 + x^2 + 3$.

Exercice 3.38

Tracer la courbe d'équation $y = x + 1 - \dfrac{2}{x}$.

Exercice 3.39

Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Exercice 3.40

Étudier les fonctions f définies ci-dessous

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ sur $D = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$ sur $D =]0, 4[$.

4. $f(x) = x^2 \ln x$ sur $D =]0, +\infty[$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^x$ sur $D = \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ sur $D = \mathbb{R}^\star$.

Exercice 3.41

Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^\star, ab \leq b \ln b + e^{a-1}.$$

À quelle condition a-t-on l'égalité ?

Exercice 3.42

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.

2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$

suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 3.43

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Exercice 3.44

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.

Exercice 3.45

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 3.46 *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

1. Justifier que l'équation $\cos(x) = x \sin(x)$ équivaut à l'équation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ sur un certain ensemble D à préciser.

2. Pressentir graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos(x) = x \sin(x)$ sur $[0, +\infty[$.

3. Prouver qu'en tout point M_0 d'intersection des deux courbes d'équation $y = \cos(x)$ et $y = x \sin(x)$, les tangentes en M_0 à ces deux courbes sont perpendiculaires.

Rappel. Les deux droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et $y = \alpha x + \beta$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\alpha a = -1$.

Exercice 3.47

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 3.48

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 3.49

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Exercice 3.50

Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x+1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 3.51

Tracer la courbe représentative de la fonction suivante

$$f(x) = e^{\sin x}.$$