Chapter 16 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 16.1

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 16.2

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 16.3

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 16.4

Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 16.5

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 16.6

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Exercice 16.7

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 16.8

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

Exercice 16.9

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 9 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & 16 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 16.10

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Exercice 16.11

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 16.12

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Exercice 16.13

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß pour résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 16.14

Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 2×2. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Solution 16.14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.15

Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 3×3. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Solution 16.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.16

Écrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants. Puis résoudre le système en réduisant chacune des matrices sous forme échelonnée réduite.

1. $\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =-3 \\ -3x & +4y & -z & =2 \\ x & -3y & -2z & =7 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +3z & =4 \\ x & +y & -z & =1 \\ 5x & +2y & & =7. \end{array}\right.$

Interpréter géométriquement chacune des solutions précédente comme l'intersection de plans.

Solution 16.16

En notant $(A|b)$ la matrice augmentée du système...

1. $(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ Le système a une unique solution $(2, 1, -4)^T$.

2. $(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Le système admet une droite de solutions paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.17

Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $$\left\{\begin{array}{cccl} -x & +y & -3z & =0 \\ 3x & -2y & +10z & =0 \\ -2x & +3y & -5z & =0 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{cccl} -x & +y & -3z & =6 \\ 3x & -2y & +10z & =-10 \\ -2x & +3y & -5z & =9. \end{array}\right.$$

Solution 16.17

Le système d'équation de la question 1 est le système homogène associé au système de la question 2. On peut donc effectuer la réduction sur la matrice augmentée $(A|b)$ du second système pour en déduire les solutions de chacun des système.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 10 & -10 \\ -2 & 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On observe immédiatement que ce système est incompatible car les deux dernières lignes représentent les équations $y+z=8$ et $y+z=-3$. On peut néanmoins poursuivre la réduction pour A.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions sont

1. $x = t\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

2. Pas de solutions.

Exercice 16.18

Déterminer une représentation paramétrique de droite intersection des plan d'équation cartésienne

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{et} \qquad x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Quelle est l'intersection de ces deux plan et du plan d'équation cartésienne

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \text{ ?}$$

Solution 16.18

Les deux premières équations ont pour solution une droite paramétrée par $x = p + sw$, $s \in \mathbb{R}$, où $p = (1, 0, 0)^T$ et $w = (0, -1, 1)^T$.

Le troisième plan intersecte les deux premiers selon cette droite. Pour le vérifier, on peut résoudre le système de trois équation correspondant. On peut également rechercher l'intersection de la droite et du plan En effet, si $x(x_1, x_2, x_3)^T = p + sw = (1, -s, s)^T$,

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \iff (1) + 2(-s) + 2(s) = 1 \iff 1 = 1.$$

Autrement dit, tous les points de la droite sont dans le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$.

Exercice 16.19

1. Résoudre le système d'équations $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

en utilisant le procédé d'élimination de Gauß-Jordan.

2. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + tv$, où $t \in \mathbb{R}$.

3. Vérifier votre solution en calculant Ap et Av.

4. Déterminer une matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à A. En utilisant cette forme réduite, répondre aux questions suivantes.

(a) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ est incompatible?

(b) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ a une unique solution?

Solution 16.19

1. On trouve

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. et la solution générale

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2t \\ 4 + t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Pour vérifier notre solution, nous devons trouver $Ap = b$ et $Av = 0$.

$$Ap = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. La forme réduite de A est constitué des quatre première colonne de la forme réduite de $(A|b)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Un tel vecteur d n'existe pas puisque la matrice précédente a un pivot sur chaque ligne. Plus précisement, on aurait

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & * \\ 0 & 1 & -1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

où les $*$ sont des réels quelconques : il n'y a aucune condition de compatibilité.

(b) Il n'existe pas de vecteur d tel que le système ait une solution unique. En effet, le système $Ax = d$ a une infinité de solutions pour tout vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ car il y a toujours une variable libre (il n'y a pas de pivot dans la troisième colonne).

Exercice 16.20

Déterminer la forme échelonnée réduite par ligne de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si C est la *matrice augmentée* d'un système d'équations $Ax = b$, $C = (A|b)$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

2. Si C est la *matrice des coefficients* d'un système homogène d'équations, $Cx = 0$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

3. Soit $w = (1, 0, 1, 1, 1)^T$. Déterminer d tel que $Cw = d$. En déduire les solutions du système $Cx = d$.

Solution 16.20

1. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. Les solutions sont dans $\mathbb{R}^4$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions sont dans $\mathbb{R}^5$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-4t \\ -s+t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4. Pour déterminer d, on effectue un calcul direct

$$d = Cw = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les solutions de $Cx = d$, il est inutile de recommencer l'algorithme de Gaß. Nous savons déjà que $Cw = d$ et nous connaissons les solutions du système homogène associé. La solutions générale de $Cx = d$ est donc de la forme

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.21

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Déterminer les solutions du système d'équations $Ax = b$.

Solution 16.21

Le déterminant de A est

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{vmatrix} = -1 - i(1+i) = -1 - i^2 - i = -i.$$

On peut résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauß-Jordan à la matrice $(A|b)$, ou en déterminant A^{-1}. On trouve

$$A^{-1} = -\frac{1}{i}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution du système $Ax = b$ est

$$x = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.22 *Vrai ou Faux?*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si celle-ci est vraie ou fausse. Justifier votre choix.

1. Tout système linéaire admet au moins une solution.
2. Certains systèmes linéaire ont exactement deux solutions.
3. Si une matrice A peut être transformée en une matrice B par une opération élémentaire sur les lignes, alors B peut être transformée en la matrice A par une opération élémentaire sur les lignes..
4. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient une ligne nulle, alors le système est compatible.
5. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient une ligne dont l'unique coefficient non nul est dans la dernière colonne, alors le système est incompatible.
6. Un système linéaire est dit compatible s'il possède (au moins) une solution.
7. Si A est la matrice des coefficients d'un système de m équations et n inconnues, alors A est une matrice à m lignes et n colonnes.
8. La matrice augmentée d'un système contient une colonne de plus que la matrice des coefficients.
9. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient k lignes non nulles, alors les solutions du système sont décrites par k paramètres.

Solution 16.22 *Vrai ou Faux?*

1. Faux. Certains systèmes sont incompatibles comme…
2. Faux. Un système linéaire a zéro, exactement une, ou une infinité de solutions (c'est du cours).
3. Vrai. Chaque opération élémentaire possède une opération «inverse».
4. Faux. Par exemple si
$$(A|b) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
5. Vrai. Cette ligne représente une équation $0 = a$ avec $a \neq 0$.
6. Vrai.
7. Vrai.
8. Vrai.
9. Faux.

Exercice 16.23

Déterminer le noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de B. Calculer $d = c_1 + 2c_2 - c_3$. En déduire les solutions du système $Bx = d$.

Solution 16.23

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'unique solution de $Bx = 0$ est $x = 0$. Ainsi $\ker B = \{ 0 \} \subset \mathbb{R}^3$. On a de plus

$$d = c_1 + 2c_2 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

On a $d = c_1 + 2c_2 - c_3$, c'est-à-dire

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = d.$$

Ainsi, $(1, 2, -1)^T$ est solution du système $Bx = d$ et c'est l'unique solution puisque $\ker B = \{ 0 \}$.

Exercice 16.24

Déterminer la forme générale des solutions du système suivant en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan.

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 1\\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 &= 6\\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 &= 5. \end{aligned}\right.$$

Écrire les solutions sous forme vectorielle.

Solution 16.24

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 6 & 3 & 9 & 6\\ 2 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.25 (***)

Exprimer ce système sous forme matricielle

$$\begin{cases} -5x & +y & -3z & -8w & = 3 \\ 3x & +2y & +2z & +5w & = 3 \\ x & & +z & +2w & = -1. \end{cases}$$

Montrer que ce système est compatible et déterminer ses solutions.

En déduire les solutions du système homogène associé.

Solution 16.25

La matrice augmentée du système est

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & -8 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -3 & -8 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

On peut donc déjà dire que le système est compatible, de plus

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système sont donc paramétrées par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit les solutions du système homogène associé qui sont paramétrées par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.26

Sachant que la matrice ci-dessous est échelonnée réduite en ligne, déterminer les coefficients manquants (notés $*$). Remplacer chaque $*$ devant être nul par 0, chaque $*$ devant être 1 par 1. Remplacer tous les $*$ qui ne doivent pas être 0 ou 1 par un 2.

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, déterminer les solutions de ce système sous forme vectorielle.
- Si C est équivalente par ligne une matrice B, déterminer les solutions du système $Bx = 0$.

Solution 16.26

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, alors les solutions (dans $\mathbb{R}^4$) sont une droite paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si C est équivalente par ligne une matrice B, les solutions du système $Bx = 0$ (dans $\mathbb{R}^5$) sont un plan paramétré par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.27

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Résoudre chacun des système $Ax = b$ et $Bx = b$ par l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan, et écrire les solutions sous forme vectorielle.

Solution 16.27

On a

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ admet donc pour unique solution $x = (2, 0, -5)^T$.

On a

$$(B|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $Bx = b$ admet donc un plan de solutions paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.28

Donner la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le système homogène $Bx = 0$. Quel est son nombre d'équations et son nombre d'inconnues? Admet-t-il une solution non triviale? Dans ce cas, résoudre $Bx = 0$.

2. Existe-t-il un vecteur $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible? Déterminer un tel vecteur b si il existe et vérifier que le système $Bx = b$ est incompatible.

3. Déterminer un vecteur *non nul* $d \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = d$ soit compatible. Puis déterminer la solution générale du système $Bx = d$.

Solution 16.28

On a

$$B \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le système $Bx = 0$ est un système à 4 équations et 4 inconnues.

   Ce système étant homogène, il est toujours compatible. De plus, il y a toujours une variable libre (il n'y a pas de pivot sur la troisième colonne) ; ce système admet donc une infinité de solutions.

   Les solutions de $Bx = 0$ sont une droite paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Il existe un $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible. En effet, en remontant les opérations élémentaires sur les lignes, nous pouvons déterminer un vecteur B tel que

$$(B|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   qui représente un système incompatible.

   Puisque nous n'avons effectué aucun échange de ligne dans la réduction, il suffit de choisir $b = (0, 0, 0, 1)^T$. On peut vérifier

$$(B|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La dernière ligne représentant l'équation $0 = 1$.

3. On pourrait choisir $d = (0,0,0,0)^T$ et l'on se trouve alors dans le cas de la première question... On peut plutôt choisir n'importe quel vecteur $p \in \mathbb{R}^4$, par exemple $p = (1,1,1,1)^T$ et calculer

$$d = Bp = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur p est donc une solution particulière de l'équation $Bx = d$. Connaissant les solution du système $Bx = 0$, on en déduit que les solutions du système $Bx = d$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.29 (**)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Écrire le système d'équations linéaires $Ax = 6x$ et déterminer ses solutions.

Solution 16.29

On a

$$Ax = 6x \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 4x_1 & -x_2 & +x_3 & = 6x_1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & = 6x_2 \\ x_1 & -x_2 & +4x_3 & = 6x_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & = 0 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce que l'on aurait pu trouver plus rapidement en remarquant

$$Ax = 6x \iff Ax = 6I_3x \iff Ax - 6I_3x = 0 \iff \left(A - 6I_3\right)x = 0.$$

Les solutions de $Ax = 6x$ sont donc les éléments du noyau de $B = A - 6I_3$. Or

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$Ax = 6x \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions de l'équation $Ax = 6x$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.30 (***)

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation que les coefficients a, b, c, d du vecteur v doivent vérifier afin que le système d'équation $Bx = v$ soit compatible.

Si $Bx = v$ est compatible, y a-t-il unicité de la solution?

Solution 16.30

La matrice augmentée du système $Bx = v$ est

$$(B|v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 3 & c \\ 3 & 1 & 2 & d \end{pmatrix}$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 3 & c \\ 3 & 1 & 2 & d \end{pmatrix} &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 4 & a+c \\ 0 & 1 & -1 & -3a+d \end{pmatrix} && \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 4 & a+c \\ 0 & 0 & -2 & -3a+-b+d \end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}c \\ 0 & 0 & -2 & -3a+-b+d \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}a-b+\frac{1}{2}c+d \end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3
\end{aligned}$$

Inutile de poursuivre jusqu'à la forme échelonnée réduite, nous savons alors que le système $Bx = v$ est compatible si, et seulement si $-\frac{5}{2}a - b + \frac{1}{2}c + d = 0$, c'est-à-dire

$$5a + 2b - c - 2d = 0.$$

Exercice 16.31 (****)

Un **portefeuille** est un vecteur ligne

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}$$

dans lequel y_i représente le nombre d'actifs de type «i» détenus par un investisseur. Après un an (par exemple), la valeur d'un actif évolue (en augmentant ou en diminuant) d'un certain pourcentage. On peut prévoir plusieurs scénarios d'évolution selon *l'état* de l'économie. Nous notons notre prédiction sous forme d'une matrice de retour sur investissement $R = (r_{ij})$, où r_{ij} est le facteur d'évolution de l'actif i dans l'état j de l'économie.

Supposons qu'un investisseur ait un portefeuille réparti en trois catégories: foncier (y_1), bons du trésor (y_2) et actions (y_3), et que la matrice de retour est

$$R = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.95 & 1.0 \\ 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 1.20 & 1.26 & 1.23 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs *totales* du portefeuille après un an d'évolution sont donné par YR, où $(YR)[j]$ est la valeur total du portefeuille dans le scénario j.

1. Déterminer la valeur totale du portefeuille $W = \begin{pmatrix} 5000 & 2000 & 0 \end{pmatrix}$ après un an pour chacun des scénarios possibles.

2. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 600 & 8000 & 1000 \end{pmatrix}$ est un portefeuille *sans risque*; c'est-à-dire que l'on obtient un résultat identique dans chaque scénario.

3. Un **arbitrage** est un portefeuille $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}$ qui a un coût total nul ($y_1 + \cdots + y_m = 0$), sans perte ($(YR)[j] \geq 0$ pour tout j), et qui aboutit à un profit dans au moins un des états ($(YR)[j] > 0$ pour au moins un j).

   Montrer que $Z = \begin{pmatrix} 1000 & -2000 & 1000 \end{pmatrix}$ est un arbitrage (la valeur -2000 représente un emprunt).

   Pouvez-vous trouver un vecteur arbitrage plus performant que celui-ci?

Solution 16.31

Exercice 16.32

Déterminer les vecteurs colonnes b de manière à ce que le système $Ax = b$ soit compatible où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution 16.32

Posons $b = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$. Le système $Ax = b$ a pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ -2 & 3 & -1 & \beta \\ 3 & -3 & 0 & \gamma \\ 2 & 0 & -2 & \delta \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 3 & -3 & \beta + 2\alpha \\ 0 & -3 & 3 & \gamma - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \delta - 2\alpha \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 3 & -3 & \beta + 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 0 & \delta - 2\alpha \end{array}\right)$$

Ainsi, le système

$$Ax = b \iff \begin{cases} x - z & = \alpha \\ 3y - 3z & = \beta + 2\alpha \\ 0 & = -\alpha + \beta + \gamma \\ 0 & = -2\alpha + \delta \end{cases}$$

est compatible si, et seulement si

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ -2\alpha + \delta & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha & = \frac{1}{2}\delta \\ \beta & = -\gamma + \frac{1}{2}\delta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si b est combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.33

Résoudre le système

$$(B) : \begin{cases} x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 0 \end{cases}$$

par l'algorithme de Gauß.

Exercice 16.34

Résoudre le système

$$(C) : \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & +x_2 & -x_3 & -6x_4 & & = 2 \\ \frac{1}{6}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & -3x_4 & +x_5 & = -1 \\ \frac{1}{3}x_1 & & -2x_3 & & -4x_5 & = 8 \end{cases}.$$

Vérifier votre résultat en expliquant votre démarche.

Exercice 16.35

Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel k, on désigne par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial «k parmi n» et on rappelle que, par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.

On cherche à calculer les trois sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p\leq n}} \binom{n}{3p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+1\leq n}} \binom{n}{3p+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+2\leq n}} \binom{n}{3p+2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$$

Notons que, compte tenu de la convention rappelée ci-dessus, ces trois sommes sont bien finies.

1. On suppose, *dans cette question uniquement*, que $n = 7$. Calculer alors S_1, S_2 et S_3.
2. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$ en fonction de n.
3. On rappelle que l'on note $j = e^{2i\pi/3}$.
   (a) Rappeler, en les justifiant, les expressions de $1 + j + j^2$ et $1 + j^2 + j^4$.
   (b) Déterminer les formes trigonométriques de $j + 1$, de $\bar{j} + 1$, de $j - 1$ et de $\bar{j} - 1$.
   (c) En utilisant la formule du binôme, exprimer $(1 + j)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.
   (d) Exprimer $\left(1 + \bar{j}\right)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.
4. En déduire trois complexes α, β, γ dépendant de n tels que

$$\begin{cases} S_1 & + & S_2 & + & S_3 & = & \alpha \\ S_1 & + & jS_2 & + & j^2S_3 & = & \beta \\ S_1 & + & j^2S_2 & + & jS_3 & = & \gamma. \end{cases}$$

5. Déterminer les expressions de S_1, S_2 et S_3 en fonction de n (simplifier les résultats obtenus).

Solution 16.35

Chouette, un problème pour réviser les nombres complexes et les racines de l'unité.

Celui-ci peut être rendu en travail de rédaction en temps libre.

Exercice 16.36

On considère le système suivant, exprimant y_1, y_2 et y_3 en fonctions de x_1, x_2 et x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = y_3. \end{cases}$$

Rechercher le système qui exprime x_1, x_2 et x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3.

Solution 16.36

Exercice 16.37

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}$.

3. $\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}$.

Exercice 16.38 (***)

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}$.

Solution 16.38

Exercice 16.39

Discuter le nombre de solutions du système suivant en fonction des valeurs des paramètres a et b et le résoudre lorsque c'est possible

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =1 \\ x & +ay & +z & =1 \\ ax & +y & +az & =b \\ ax & +ay & +az & =b. \end{array}\right.$$

Solution 16.39

Exercice 16.40

Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant suivant les valeurs du paramètre m.

$$(S) : \begin{cases} 2mx & +y & +z & = 2 \\ x & +2my & +z & = 4m \\ x & +y & +2mz & = 2m^2. \end{cases} \tag{1}$$

Solution 16.40

Si $m = \frac{1}{2}$, alors le système (S) n'a pas de solutions.
Si $m = -1$, le système (S) a une infinité de solutions, de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $m \notin \left\{ \frac{1}{2}, -1 \right\}$, alors le système (S) a une unique solution,

$$x = \frac{m-1}{1-2m} \qquad y = \frac{1-3m}{1-2m} \qquad z = \frac{(1+2m)(1-m)}{1-2m}.$$

Exercice 16.41

Trouver les valeurs du réel a tel que le système

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & -z & =1 \\ 2x & +3y & +az & =3 \\ x & +ay & +3z & =2 \end{array}\right. \tag{1}$$

ait

1. aucune solution ;
2. une solution unique ;
3. plusieurs solutions.

Solution 16.41

Si $a=3$, le système n'a pas de solutions.
Si $a=2$, il y a une infinité de solutions: les triplets $(5t, 1-4t, t)$ où t parcourt $\mathbb{R}$.
Si $a \neq 2$ et $a \neq 3$, alors il y a une unique solution: le triplet $\left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)$.

Exercice 16.42

Résoudre

$$\begin{cases} x & +ay & +a^2z & = 1 \\ x & +ay & +abz & = a \\ bx & +a^2y & +a^2bz & = a^2b \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} ax & +by & +2z & = 1 \\ ax & +(2b-1)y & +3z & = a \\ ax & +by & +(b+3)z & = 2b-1 \end{cases} \tag{2}$$

a, b étant des paramètres réels.

Solution 16.42

Exercice 16.43

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.44

Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & b \\ 5 & 4 & a & 3 \\ a & -2 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution 16.44

Exercice 16.45

Résoudre le système d'équation $Ax = b$ suivant en effectuant la réduction de sa matrice augmentée.

$$(E) : \left\{ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +7x_4 & +x_5 & = 2 \\ 2x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +8x_4 & +5x_5 & = -5 \\ x_1 & +5x_2 & +x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = -4. \end{array} \right.$$

On note $r = \mathrm{rg}(A)$ et n le nombre de colonne de A. Montrer que les solutions de (E) peuvent s'écrire

$$x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-r} v_{n-r} \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Montrer également que $Ap = b$ et que $Av_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n-r$.

Exprimer le vecteur b comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A. Faire de même pour le vecteur $\mathbf{0}$.

Solution 16.45

On a

$$\begin{aligned}
(A|b) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 8 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3} L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2
\end{aligned}$$

Le rang de A est donc $r = \mathrm{rg}(A) = 2$. De plus,

$$(E) \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +5x_2 & & +x_4 & +4x_5 & = -7 \\ & & x_3 & +2x_4 & -x_5 & = 3 \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc paramétrer les solutions de (E) à partir des variables libres, disons $x_2 = s$, $x_4 = t$ et $x_5 = u$. Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 - 5s - t - 4u \\ s \\ 3 - 2t + u \\ t \\ u \end{pmatrix}, \quad s, t, u \in \mathbb{R}.$$

Solution que l'on peut écrire sous forme vectorielle

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= p + sv_1 + tv_2 + uv_3. \end{aligned}$$

Ce qui est bien de la forme demandée avec $n = 5$, le nombre d'inconnue et donc $n - r = 5 - 2 = 3$ vecteurs v_i.

Un calcul direct montre

$$A\begin{pmatrix}-7\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

En notant $c_1, c_2, \dots, c_5$ les colonnes de A, on peut réécrire les relation $Ap = b$ et $Av_1 = 0$ ainsi

$$-7c_1 + 3c_3 = b \text{ et } -5c_1 + c_2 = 0.$$

Il y a bien d'autre combinaisons possibles!

Exercice 16.46

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour quelle valeurs de λ et μ

- le système a une unique solution,
- le système est incompatible,
- le système a une infinité de solutions.

Lorsqu'elle existe, donner les solutions du système $Ax = b$.

Solution 16.46

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & \lambda & 7 \\ 1 & -1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & \lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1 & \mu - 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \mu - 2 \\ 0 & -9 & \lambda & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 3 - 3\mu \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- Le système a une unique solution si, et seulement si $\lambda \neq 3$ (et on a bien $\mathrm{rg}(A) = 3$). Dans ce cas, on obtient par substitution

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 2 \\ -3x_2 + x_3 & = \mu - 2 \\ (\lambda - 3)x_3 & = 3 - 3\mu \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = \frac{4\lambda + \lambda\mu - 15}{3(\lambda - 3)} \\ x_2 & = \frac{2\lambda - \lambda\mu - 3}{3(\lambda - 3)} \\ x_3 & = \frac{3 - 3\mu}{\lambda - 3} \end{cases}$$

- Le système est incompatible si, et seulement si $\lambda = 3$ et $\mu \neq 1$. Le système est alors de rang 2.
- Le système admet une infinité de solution si, et seulement si $\lambda = 3$ et $\mu = 1$. Le système est alors de rang 2. On a alors

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système $Ax = b$ sont alors paramètrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16.47

Le système $Bx = d$ admet pour solution générale

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est la première colonne de B et $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice B.

Solution 16.47

Puisque les solutions sont des élément de $\mathbb{R}^4$, la matrice B a quatre colonnes que l'on note c_1, c_2, c_3, c_4.

Le vecteur $(1, 0, 2, 0)^T$ est une solution de $Bx = d$, donc

$$c_1 + 2c_3 = d$$

d'où $c_3 = \frac{1}{2}(d - c_1) = (1, 2, -2)^T$. Deplus, $(-3, 1, 0, 0)^T$ et $(1, 0, -1, 1)^T$ sont solutions du système homogène $Bx = 0$, c'est-à-dire

$$-3c_1 + c_2 = 0 \text{ et } c_1 - c_3 + c_4 = 0$$

d'où $c_2 = 3c_1 = (3, 3, 6)^T$ et $c_4 = c_3 - c_1 = (0, 1, -4)^T$. Finalement,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.48

Un système linéaires $Ax = d$ a pour solutions les vecteurs de la forme

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

On suppose que A est une matrice de type (m, n). On note $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les colonnes de A.

Répondre à chacune des questions ci dessous *ou* dire si il n'y a pas assez d'informations pour y répondre.

1. Que vaut n?

2. Que vaut m?

3. Quel est le rang de A?

4. Décrire le noyau de A.

5. Écrire le vecteur d comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

6. Écrire une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes c_i qui est égale au vecteur nul 0.

Solution 16.48

Exercice 16.49

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant le procédé d'élimination de Gauß. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, et vérifier que $k = n - r$ où r est le rang de A. Que vaut n?

2. Si possible, exprimer de deux manières différente le vecteur b comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

Solution 16.49

Exercice 16.50

Résoudre les système suivants et déterminer leur rang. Interpréter géométriquement le résultat.

1. $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ x \quad + z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + 3z &= -2 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 4y - z &= 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x & +y & = 1 \\ x & +2y & = 1 \\ 2x & -y & = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x & +y & = 1 \\ x & +2y & = 1 \\ 2x & -y & = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ 2x & +2y & +2z & = -1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ 2x & +2y & +2z & = 2 \end{cases}$

Solution 16.50

$$(1)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ x \qquad + z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ \boldsymbol{y} - 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ y - 2z = 2 & \\ 6z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases} \qquad \text{(1) compatible de rang 3}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (1) est $S_1 = \{ (1, 0, -1) \}$.

$$(2)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ \boldsymbol{5y} - 4z = 5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ 5y - 4z = 5 & \\ 0z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système est de rang 2 mais est incompatible ; l'ensemble de ses solutions est $S_2 = \emptyset$.

$$
(3)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}
\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ \boldsymbol{5y} - 4z = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 & \\ 5y - 4z = 4 & \\ 0z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \qquad \text{(3) compatible de rang 2}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = -\dfrac{11z + 6}{5} \\ y = \dfrac{4z + 4}{5} \end{cases}
$$

Le système est de rang 2 et l'ensemble de ses solutions est $S_3 = \left\{ \left(-\frac{11z+6}{5}, \frac{4z+4}{5}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$.