Chapter 19 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Exercice 19.1

Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) - 2y(t) = \operatorname{ch}(2t). \tag{E}$$

Solution 19.1

L'équation s'écrit également

$$y'(t) - 2y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'(t) - 2y(t) = 0. \tag{1}$$

Son polynôme caractéristique est $P = X - 2$. La solution générale de l'équation homogène associée est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque 2 est racine de P, on cherche une solution particulière de

$$y'(t) - 2y(t) = e^{2t} \tag{E_1}$$

sous la forme $f(t) = ate^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Or $f'(t) - 2f(t) = (a + 2at - 2at)e^{2t} = ae^{2t}$. On choisit donc par exemple $a = 1$, c'est-à-dire $f(t) = te^{2t}$.

Puisque -2 n'est pas racine de P, on cherche une solution particulière de

$$y'(t) - 2y(t) = e^{-2t} \tag{E_2}$$

sous la forme $f(t) = ae^{-2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Or $f'(t) - 2f(t) = (-2a + -2a)e^{-2t} = -4ae^{2t}$. On choisit donc par exemple $a = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire $f(t) = -\frac{1}{4}te^{-2t}$.

L'équation (E) étant linéaire, la solution générale de (E) s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(\frac{t}{2} + \lambda\right) e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19.2

Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = 8\sin(2x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Solution 19.2

L'équation homogène associée à l'équation (E) est $y' - 2y = 0$ et a pour solutions les applications de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière pour l'équation (E). Celle-ci est à coefficients réels et on a $8\sin(2x) = 8\,\mathfrak{Im}\left(e^{2ix}\right)$, on considère alors l'équation

$$y' - 2y = e^{2ix}. \tag{E_C}$$

Puisque $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X - 2$, on cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto ae^{2ix}$ où $a \in \mathbb{C}$. On a

$$f'(x) - 2f(x) = a2ie^{2ix} - 2ae^{2ix} = 2a(-1+i)e^{2ix}.$$

On choisit donc a tel que $2a(-1+i) = 1$, c'est-à-dire

$$a = \frac{1}{2(-1+i)} = \frac{-1-i}{4}.$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{-1-i}{4}(\cos 2x + i\sin 2x)$ est donc solution de l'équation (E_C).

Puisque (E) est à coefficients réels, un solution particulière de cette équation est $8\,\mathfrak{Im}(f)$, définie par

$$8\,\mathfrak{Im}(f)(x) = 8\left(-\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right) = -2\sin 2x - 2\cos 2x.$$

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions maximales sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\sin 2x - 2\cos 2x + \lambda e^{2x} \end{array}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19.3

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = 4$.
2. $y'(t) + y(t) = 2t + 3$.
3. $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t)$.
4. $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$.
5. $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t)$.

Solution 19.3

1. Les solutions maximales de l'équation $y'(t) - 2y(t) = 4$ sont les applications de la forme $t \mapsto 4 + \lambda e^{2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Les solutions maximales de l'équation $y'(t) + y(t) = 2t + 3$ sont les applications de la forme $t \mapsto 2t + 1 + \lambda e^{-t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = -3\cos 2t - \sin 2t. \tag{E}$$

Son polynôme caractèristique est $X - 1$ qui admet pour racine 1. L'équation homogène associée $y'(t) - y(t) = 0$ a donc pour solutions les applications de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque que $-3\cos 2t = -3\,\mathfrak{Re}\left(e^{2it}\right)$ et $-\sin(2t) = -\,\mathfrak{Im}\left(e^{2it}\right)$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t)$, on considère donc l'équation

$$y'(t) - y(t) = e^{2it} \tag{E_C}$$

On cherche une solution particulière de l'équation (E_C) sous la forme $f : t \mapsto ae^{2it}$ où $a \in \mathbb{C}$. On a

$$f'(t) - f(t) = a(2i - 1)e^{2it}.$$

On choisit donc a tel que $a(2i - 1) = 1$, c'est-à-dire

$$a = \frac{1}{2i - 1} = \frac{-1 - 2i}{5}.$$

L'application $f : t \mapsto \frac{-1-2i}{5}(\cos 2t + i\sin 2t)$ est donc solution de (E_C). On en déduit une solution de (E)

$$-3\,\mathfrak{Re}\, f - \mathfrak{Im}\, f : x \mapsto \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\sin 2T + \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t = \cos 2t - \sin 2t.$$

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions maximales sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos 2t - \sin 2t + \lambda e^t \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Les solutions maximales de l'équation $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$ sont les applications de la forme $t \mapsto \frac{1}{2}\sin 2t + \lambda e^{2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Les solutions maximales de l'équation $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t)$ sont les applications de la forme $t \mapsto \left(\frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right)e^t + \lambda e^{-t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.4

Soit f une fonction non nulle et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, f(t+u) = f(t)f(u). \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f : t \mapsto e^{at}$.

arque L'équation (1) est une **équation fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'inconnue est une fonction.

Solution 19.4

Supposons que f soit une solution non nulle de (1). Puisque f est non nulle, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. On a alors $f(t_0) = f(t_0 + 0) = f(t_0)f(0) \neq 0$, d'où $f(0) = 1$.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t+u) = f(t)f(u).$$

On dérive la fonction $u \mapsto f(t+u)$ (c'est-à-dire on dérive par rapport à u avec t constant), on obtient alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f'(t+u) = f(t)f'(u).$$

En spécialisant en $u = 0$, on en déduit que f vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f'(0)f(t),$$

on constate que f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ en posant $a = f'(0)$; comme $f(0) = 1$, on en déduit, grâce au corollaire précédent

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{at}.$$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $f : t \mapsto e^{at}$ est une solution non nulle de (1).

Exercice 19.5 *Équations différentielles avec second membre polynôme-exponetielle*

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}(t^2 + 2t + 1)$.
2. $y'(t) - 2y(t) = -e^{-t}(3t^2 + t + 2)$.
3. $y'(t) - y(t) = e^{2t}(3t + 2)$.
4. $y'(t) - y(t) = 2e^{-t}(-t^2 + t + 2)$.
5. $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}(2t + 1)$.

Exercice 19.6

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

Solution 19.6

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2-3r+2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

2. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = -1+i$ et $r = -1-i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$.

Exercice 19.7

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Solution 19.7

Exercice 19.8

Résoudre le problème de Cauchy, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(x) \qquad (E)$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0.$$

Solution 19.8

L'équation (E) a pour polynôme caractéristique est X^2+2X+5. Celui-ci a pour racines $-1+2i$ et $-1-2i$. Les solutions maximales de l'équation hommogène associée à (E)

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0 \qquad (H)$$

sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)\, e^{-x} \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puisque (E) est une équation à coefficients réels et que $\cos x = \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\right)$, on considère l'équation

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{ix} \qquad (E_C)$$

dont on cherche une solution sous la forme $f(x) = ae^{ix}$ avec $a \in \mathbb{C}$. On a alors,

$$f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = a(-1 + 2i + 5)e^{ix} = a(4 + 2i)e^{ix}.$$

On choisit donc a tel que $a(4 + 2i) = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{4+2i} = \frac{2-i}{10}$. L'application f, définie par

$$f(x) = \frac{2-i}{10}(\cos x + i \sin x)$$

est donc solution de (E_C). On en déduit une solution de (E) sous la forme

$$\mathfrak{Re}(f) : x \mapsto \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

Finalement, l'équation (E) étant linéaire, ses solutions sont les applications de la forme

$$f_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)\, e^{-x} \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$f_{\lambda,\mu}(0) = \frac{1}{5} + \lambda \qquad \text{et} \qquad f'_{\lambda,\mu}(0) = \frac{1}{10} + 2\mu - \lambda.$$

On a donc

$$f_{\lambda,\mu}(0) = 1 \text{ et } f'_{\lambda,\mu}(0) = 0 \iff \lambda = \frac{4}{5} \text{ et } \mu = \frac{7}{20}.$$

La solution du problème de Cauchy est donc l'application

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + \left(\frac{4}{5}\cos 2x + \frac{7}{20}\sin 2x\right) e^{-x} \end{array}.}$$

Exercice 19.9

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Solution 19.9

Exercice 19.10

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t + \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Déterminer sous la forme $y_1 : t \mapsto (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, une solution particulière réelle de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t \tag{E_1}$$

3. Déterminer une solution particulière complexe y_2 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{it} \tag{E_2}$$

4. En déduire une solution particulière réelle y_3 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E_3}$$

5. Utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution particulière réelle y_0 de (E).

6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution 19.10

1. Les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions de la forme
$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Puisque 1 est racine simple du polynôme $X^2 - 3X + 2$, nous cherchons une solution de (E_3) sous la forme $y_1 : t \mapsto (a + bt)te^t = (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}
y_1(t) &= (at + bt^2)e^t \\
y_1'(t) &= \left(a + (a + 2b)t + bt^2\right) e^t \\
y_1''(t) &= (2a + 2b + (a + 4b)t + bt^2)e^t \\
y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) &= (-a + 2b - 2bt)\, e^t.
\end{aligned}$$
On choisit a et b tels que $-a + 2b = 0$ et $-2b = 1$, c'est-à-dire $b = -1/2$ et $a = -1$. Une solution particulière de (E_1) est donc
$$y_1 : t \mapsto -(t + t^2/2)e^t.$$

3. Puisque i n'est pas racine du polynôme $X^2 - 3X + 2$, nous cherchons une solution de (E_2) sous la forme $y_2 : t \mapsto ae^{it}$, $a \in \mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$$y_2''(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = (-a - 3ia + 2a)e^{it} = a(1 - 3i)e^{it}.$$
On choisit $a = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10}$. Une solution particulière de (E_2) est donc
$$y_2 : t \mapsto \frac{1 + 3i}{10}e^{it} = \frac{\cos t - 3\sin t}{10} + i\frac{\sin t + 3\cos t}{10}.$$

4. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) - 2\cos(t) = \mathfrak{Im}\left(e^{it}\right) - 2\,\mathfrak{Re}\left(e^{it}\right).$$

L'équation (E_3) étant linéaire et à coefficients réels, une solution particulière de (E_3) est

$$y_3 = \mathfrak{Im}(y_2) - 2\,\mathfrak{Re}(y_2) \,:\, t \mapsto \frac{1}{10}(\cos t + 7\sin t)$$

5. Puisque (E) est linéaire, $y_0 = y_1 + y_3$ est solution de (E) :

$$y_0 \,:\, t \mapsto -\left(\frac{t^2}{2} + t\right)e^t + \frac{\cos t + 7\sin t}{10}.$$

C'est le «principe de superposition des solutions».

6. Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation différentielle homogène associée. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\left(\lambda + t\frac{t^2}{2}\right)e^t + \frac{\cos t+7\sin t}{10} + \mu e^{2t} \end{array} \middle| \, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 19.11

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes

1. $y''(t) - y(t) = t^3 + t^2$.

2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$.

3. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(mt)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.12

Résoudre les équations différentielles

1. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t)$;

2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(2t)$.

3. $y''(t) + y(t) = \cos^3(t)$;

Solution 19.12

1. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t). \tag{E}$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 5$. Celui-ci a pour racines $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Les solutions maximales de l'équation hommogène associée à (E)

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \tag{H}$$

sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda \cos 2t + \mu \sin 2t)\, e^{-t} \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

L'équation (E) s'écrit également $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$. Pour déterminer une solution particulière, on considère les deux équations

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^t \tag{E_1}$$

$$\text{et } y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \tag{E_2}$$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $f_1 : t \mapsto ae^t$. On a

$$f_1''(t) + 2f_1'(t) + 5f_1(t) = 8ae^t;$$

on choisit donc a de telle sorte que $8a = 1$, c'est-à-dire $f_1 : t \mapsto \frac{1}{8}e^t$.

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $f_2 : t \mapsto ae^{-t}$. On a

$$f_2''(t) + 2f_2'(t) + 5f_2(t) = 4ae^t;$$

on choisit donc a de telle sorte que $4a = 1$, c'est-à-dire $f_2 : t \mapsto \frac{1}{4}e^{-t}$.

D'après le principe de superposition des solutions, l'application

$$\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 : t \mapsto \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}$$

est une solution de l'équation (E).

Finalement, l'équation (E) étant linéaire, ses solutions sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(\frac{1}{16}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}\lambda \cos 2t + \mu \sin 2t\right) e^{-t} \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. (esquisse) On cherche une solution particulière lorsque le second membre est e^{2it} sous la forme ae^{2it} ; on trouve

$$a = \frac{1}{-3-4i} = \frac{-3+4i}{25}.$$

La partie réelle de cette solution est solution particulière de l'équation qui nous intéresse ; en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée, on trouve donc les solutions

$$\boxed{t \mapsto -\frac{1}{25}(3\cos 2t + 4\sin 2t) + (\lambda t + \mu)\,e^{t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

3. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + y(t) = \cos^3(t). \tag{E}$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$. Celui-ci a pour racines i et $-i$. Les solutions maximales de l'équation hommogène associée à (E)

$$y''(t) + y(t) = 0 \tag{H}$$

sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos t + \mu \sin t \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche à determiner une solution particulière de (E). Pour cela, on remarque que

$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\right) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

et on considère les deux équations

$$y''(t) + y(t) = e^{3it} \tag{E_1}$$

$$y''(t) + y(t) = e^{it} \tag{E_2}$$

Puisque $3i$ n'est pas racine du polynôme $X^2 + 1$, on cherche une solution de (E_1) sous la forme $f_1 : t \mapsto ae^{3it}$. On a alors

$$f_1''(t) + f_1(t) = -8ae^{3it}.$$

On choisit donc a tel que $-8a = 1$, c'est-à-dire $f_1(t) = -\frac{1}{8}e^{3it}$.

De plus, i est racine simple du polynôme $X^2 + 1$, on cherche donc une solution de (E_2) sous la forme $f_2 : t \mapsto ate^{it}$. On a alors

$$f_2''(t) + f_2(t) = 2aie^{it} - ate^{it} + ate^{it} = 2aie^{it}.$$

On choisit donc a tel que $2ai = 1$, c'est-à-dire $f_2(t) = -\frac{i}{2}te^{it}$.

L'équation (E) étant linéaire et à coefficient réels, une solution est donnée par

$$\frac{1}{4}\,\mathfrak{Re}\, f_1 + \frac{3}{4}\,\mathfrak{Re}\, f_2 : t \mapsto -\frac{1}{32}\cos 3t + \frac{3}{8}t\sin t.$$

Finalement, les solutions maximales de l'équation (E) sont les application de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{1}{32}\cos 3t + \frac{3}{8}t\sin t + \lambda\cos t + \mu\sin t \end{array}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 19.13

Résoudre l'équation

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Solution 19.13

Exercice 19.14

Déterminer les solutions réelles du système

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}.$$

Solution 19.14

On considère $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et on note pour $t \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad \text{avec} \quad x(t) \in \mathbb{R} \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}.$$

On peut alors écrire pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x''(t) &= 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) &= 3y(t) + 4x'(t) \end{cases} &\iff x''(t) + iy''(t) = 3x(t) + 3iy(t) - 4y'(t) + 4ix'(t) \\ &\iff z''(t) = 4iz'(t) + 3z(t) \\ &\iff z''(t) - 4iz'(t) - 3z(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette dernière équation différentielle est $r^2 - 4ir - 3 = 0$, qui a pour solutions i et $3i$.

Les solutions (complexes) de l'équation différentielles $z''(t) - 4iz'(t) - 3z(t) = 0$ sont de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\alpha + i\beta)\, e^{3it} + (\gamma + i\delta)\, e^{it} \end{array}, \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Les solutions (réelles) du système proposé sont donc les couples (x, y) de la forme

$$\begin{array}{rrcl} x : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \alpha \cos 3t - \beta \sin 3t + \gamma \cos t - \delta \sin t \\ y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \alpha \sin 3t + \beta \cos 3t + \gamma \sin t + \delta \cos t \end{array}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 19.15

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{E}$$

1. On pose $z(t) = y(t)^2$. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle simple (E').

2. Résoudre l'équation (E).

Solution 19.15

Exercice pouvant être rendu en TIRTL.