

REPRÉSENTATION MATRICIELLE EN ALGÈBRE LINÉAIRE

41.1 FAMILLE DE VECTEURS

§1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

Définition 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E . Soit $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E . On appelle **matrice des coordonnées de la famille S relativement à la base \mathcal{B}** la matrice de type (n, p) dont la j -ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur w_j relativement à la base \mathcal{B} . On note cette matrice

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p) = (\text{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1) \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2) \quad \dots \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}}(w_p))$$

Chaque vecteur de la famille S se décompose dans la base \mathcal{B} sous la forme

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$w_p = a_{1p}v_1 + a_{2p}v_2 + \dots + a_{np}v_n$$

Alors, la matrice $M_B(w_1, w_2, \dots, w_p)$ s'écrit

$$M_B(w_1, w_2, \dots, w_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Test 2

On reprend les bases de \mathbb{R}^2 , $B = (e_1, e_2)$ et $S = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P = \text{Coord}_B(S)$, la matrice des coordonnées de la famille S relativement à la base B . Déterminer $Q = \text{Coord}_S(B)$, la matrice des coordonnées de la famille B relativement à la base S .

Calculer les produits PQ et QP .

Théorème 3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E . Alors

$$\begin{aligned} \text{rg}(S) &= \text{rg}(\text{Coord}_B(w_1), \text{Coord}_B(w_2), \dots, \text{Coord}_B(w_p)) \\ &= \text{rg}(\text{Coord}_B(w_1, w_2, \dots, w_p)). \end{aligned}$$

§2 Matrice de passage

Définition 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et deux bases de E

$$B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad B' = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

On appelle **matrice de passage** de la base B à la base B' la matrice dont la j -ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur v_j relativement à la base B . C'est une matrice carrée d'ordre n , qui sera notée $\text{Pass}(B, B')$.

$$\text{Pass}(B, B') = (\text{Coord}_B(v_1) \quad \text{Coord}_B(v_2) \quad \dots \quad \text{Coord}_B(v_n)).$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est donc la matrice de la famille $B' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans la base B . Aucune nouveauté ici! Mais le terme «matrice de passage» rappelle que les deux familles B et B' sont des bases d'un même espace vectoriel.

Théorème 5

Soit v un vecteur de E . Alors

$$\text{Coord}_B(v) = \text{Pass}(B, B') \times \text{Coord}_{B'}(v).$$

En général, on note X et X' les coordonnées du vecteurs x relativement aux bases B et B' , et P la matrice de passage de B «l'ancienne base» à B' la nouvelle base. On a alors

$$X = PX'.$$



La matrice P donne \mathcal{B}' en fonction de \mathcal{B} , mais la formule $X = PX'$ donne les coordonnées dans \mathcal{B} en fonction des coordonnées dans \mathcal{B}' .

Exemple 6

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 tels que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 , nous écrivons d'abord la matrice des coordonnées de \mathcal{B} relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 ,

$$P = \text{Coord}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3, en effet

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 . La matrice P est donc la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{B} .

Connaissant les coordonnées d'un vecteur v relativement à la base \mathcal{B} , par exemple

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

on peut déterminer les coefficients de v qui sont ses coordonnées dans la base canonique de deux manières, directement en utilisant la définition des coordonnées,

$$v = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

ou avec la matrice de passage

$$\text{Coord}_{\mathcal{C}}(v) = P \times \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

qui donne évidemment le même résultat.

Pour déterminer les coordonnées relativement à la base \mathcal{B} d'un vecteur x , par exemple $x = (5, 7, -3)^T$, nous devons trouver les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut pour cela résoudre le système $Pa = x$ avec $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, ou en utilisant la matrice inverse de P , pour trouver finalement

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(x) = P^{-1} \times \text{Coord}_{\mathcal{C}}(x) = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier ce résultat avec le calcul suivant

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = x.$$

Test 7

Vérifier les calculs précédents. Déterminer P^{-1} et en déduire $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$.

Test 8

En reprenant les mêmes notations. Quelles sont les coordonnées relativement à la base \mathcal{B} des vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Exemple 9

On considère l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 d'équation cartésienne

$$\mathcal{E} : 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 2.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base obtenue à partir de la base canonique de \mathbb{R}^2 après une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{E} dans la base \mathcal{B} .

Théorème 10

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est inversible, et son inverse est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .

41.2 REPRÉSENTATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE PAR UNE MATRICE

§1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Définition 11

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E , $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de F .

On appelle **matrice de f relative aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C}** la matrice dont la j -ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(v_j)$ relativement à la base \mathcal{C} . C'est une matrice de

type (m, n) que l'on note $\text{Mat}_{B,C}(f)$.

$$\text{Mat}_{B,C}(f) = \left(\text{Coord}_C(f(v_1)) \quad \text{Coord}_C(f(v_2)) \quad \dots \quad \text{Coord}_C(f(v_n)) \right)$$

La matrice $\text{Mat}_{B,C}(f)$ est donc la matrice des coordonnées de la famille $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ dans la base C .

Les coefficients de la matrice $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{B,C}(f)$ sont donc caractérisés par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(v_j) = a_{1,j}w_1 + a_{2,j}w_2 + \dots + a_{m,j}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i,j}w_i.$$



Notation Il n'y a pas de notation fixée par le programme. Je note parfois $M_{B,C}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{B,C}(f)$ dans le poly d'exercices.

Théorème 12

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E, F)$, B une base de E et C une base de F . Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a

$$\text{Coord}_C(f(x)) = \text{Mat}_{B,C}(f) \times \text{Coord}_B(x).$$

Autrement dit, en notant X les coordonnées de x dans la base B , Y les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base C et $A = \text{Mat}_{B,C}(f)$, on a

$$Y = AX.$$

Exemple 13

Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x + y \\ 3x + y \\ x \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $B = (e_1, e_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 et $C = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2f_1 + f_2 \quad u(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f . On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\text{Mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Test 14	Matrice de $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et \mathbb{R}^3 . $P \mapsto (P(2), P'(1) - P(0), P''(1))$
Test 15	Matrice de $D : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$. $P \mapsto P'$
Test 16	Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $C = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice de u relativement aux bases B et C . $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y \\ 3y \\ x - 2y \end{pmatrix}$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= u((1, 0)) = (-1, 0, 1) = -f_1 + f_3 \\ u(e_2) &= u((0, 1)) = (1, 3, -2) = f_1 + 3f_2 - 2f_3 \end{aligned}$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f . On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\text{Mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

On retrouve donc la matrice canoniquement associée à $u \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. ■

§2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice



Dans la suite, On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n .

Proposition 17

Soit A une matrice de type (m, n) . Alors l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Définition 18

L'application linéaire T est appelée l'**application linéaire canoniquement associée** à la matrice A .

Théorème 19

Soit $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n et soit A la matrice dont les colonnes sont $T(e_1), \dots, T(e_n)$, c'est-à-dire

$$A = (T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n)).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax$.

Définition 20

La matrice A est appelée la **matrice canoniquement associée** à l'application linéaire $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Autrement dit, A est la matrice associée à T relativement aux bases canoniques de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m .

Exemple 21

Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'image du vecteur $u = (1, 2, 3)^T$ par l'application T , il suffit de substituer $(1, 2, 3)$ dans l'expression de T . On obtient $T(u) = (6, -1, -4)^T$.

Pour trouver la matrice A , telle que $T(x) = Ax$, on détermine les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Et l'on pose donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarquez bien que les coefficients de A sont exactement les coefficients de x, y, z dans la définition de T .

Test 22

Calculer Au avec $u = (1, 2, 3)^T$ et vérifier que l'on obtient bien $T(u)$.

§3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Théorème 23

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies n et m munis de bases B et C . L'application

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{B,C} : \mathbf{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{B,C}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour tout $f \in \mathbf{L}(E, F)$,

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{B,C}(f)).$$

Corollaire 24

En particulier, pour tous $f, g \in \mathbf{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\text{Mat}_{B,C}(f + g) = \text{Mat}_{B,C}(f) + \text{Mat}_{B,C}(g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{B,C}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{B,C}(f),$$

et on a l'équivalence

$$f = g \iff \text{Mat}_{B,C}(f) = \text{Mat}_{B,C}(g).$$

De plus, $\mathbf{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathbf{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

Théorème 25

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, B une base de E , C une base de F et D une base de G . Pour toutes applications linéaire $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$, on a

$$\text{Mat}_{B,D}(g \circ f) = \text{Mat}_{C,D}(g) \times \text{Mat}_{B,C}(f).$$

Ainsi la composition des applications linéaires se traduit par la multiplication matricielle. Bien noter l'ordre dans lequel est fait le produit matriciel.

Une démonstration. Soient $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $m = \dim(G)$. Posons $B = \text{Mat}_{B,C}(f)$, $A = \text{Mat}_{C,D}(g)$ et $R = \text{Mat}_{B,D}(g \circ f)$ de sorte que B, A, R sont des matrices de type (n, p) , (m, n) et (m, p) . Il s'agit de montrer que $R = AB$.

On note $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$. La matrice B est la matrice dont les colonnes sont

$$(\text{Coord}_C(f(v_1)) \quad \text{Coord}_C(f(v_2)) \quad \dots \quad \text{Coord}_C(f(v_p)))$$

La matrice AB est donc la matrice dont les colonnes sont

$$(A \times \text{Coord}_C(f(v_1)) \quad A \times \text{Coord}_C(f(v_2)) \quad \dots \quad A \times \text{Coord}_C(f(v_p)))$$

c'est-à-dire la matrice

$$(\text{Coord}_D(g \circ f(v_1)) \quad \text{Coord}_D(g \circ f(v_2)) \quad \dots \quad \text{Coord}_D(g \circ f(v_p)))$$

qui n'est autre que la matrice R . ■

Les applications linéaires *bijectives* se reconnaissent à leurs matrices.

Théorème 26

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie $n \geq 1$, B une base de E , C une base de F , $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases B et C . Alors f est un isomorphisme si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases C et B :

$$\text{Mat}_{C,B}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{B,C}(f))^{-1}.$$

§4 Changement de bases

Lemme 27 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, B et B' deux bases de E , alors

$$\text{Pass}(B, B') = \text{Mat}_{B', B}(\text{Id}_E).$$

Théorème 28

Formule de changement de bases

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$. Considérons B, B' deux bases de E et C, C' deux bases de F . Alors

$$\text{Mat}_{B', C'}(f) = \text{Pass}(C', C) \times \text{Mat}_{B, C}(f) \times \text{Pass}(B, B').$$

En notant

$$A = \text{Mat}_{B, C}(f) \quad A' = \text{Mat}_{B', C'}(f) \quad P = \text{Pass}(B, B') \quad Q = \text{Pass}(C, C')$$

on a la relation

$$A' = Q^{-1}AP.$$



§5 Matrices équivalentes et rang

Théorème 29

Une application linéaire $f \in \mathbf{L}(E, F)$ est de rang r si, et seulement si, il existe un couple de bases dans lequel f a pour matrice

$$J_r = (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 30

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** lorsque

$$\exists Q \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), A' = QAP.$$

Une matrice A' est équivalente à la matrice A représentant une application linéaire $u \in \mathbf{L}(E, F)$ dans les bases B et C de E et F si, et seulement si, elle représente u dans des bases B' et C' de E et F . Par conséquent, deux matrices équivalentes ont même rang.

Théorème 31

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice

$$J_r = (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 32

Deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si elles ont même rang.

Corollaire 33

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.

Rappel

- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.
- Les opérations élémentaires conservent le rang.

§6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Définition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** de A , toute matrice B obtenue en ne conservant que certaines lignes et colonnes de A .

Plus précisément, en notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et

$$1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n,$$

la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & \dots & a_{i_1, j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p, j_1} & \dots & a_{i_p, j_q} \end{pmatrix}$$

est une matrice extraite de A de type (p, q) .

Théorème 35

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. Pour toute matrice extraite B de A , on a $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$.
2. Le rang de A est l'ordre maximal des matrices inversibles que l'on peut extraire de A .

41.3 CAS DES ENDOMORPHISMES

§1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base

Définition 36

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathbf{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E . On appelle **matrice de f dans la base \mathcal{B}** la matrice de l'application linéaire f dans les bases \mathcal{B} au départ et \mathcal{B} à l'arrivée. Cette matrice, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f).$$

Nous dirons aussi que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice représentant f dans la base \mathcal{B} . Notant $a_{i,j}$ les coefficients de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a donc

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(v_j) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \dots + a_{n,j}v_n = \sum_{i=1}^n a_{i,j}v_i.$$

Théorème 37

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E)$, \mathcal{B} une base de E . Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

§2 Isomorphisme de $L(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème 38

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E . L'application

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}} : L(E) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.

Proposition 39

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E . Pour tous $f, g \in L(E)$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Proposition 40

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E , f un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Alors f est un automorphisme de E (i.e. f est bijectif) si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} :

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

§3 Changement de base

Théorème 41

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Considérons $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \qquad P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

on a la relation

$$A' = P^{-1}AP.$$



Exemple 42

On considère l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + 5y \end{pmatrix}.$$

On cherche à décrire géométriquement cet endomorphisme. À priori, on ne peut pas en dire grand chose...

Supposons donc que l'on nous propose d'effectuer un changement de base. On considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note M la matrice de T relativement à la base \mathcal{B} . Nous avons $M = P^{-1}AP$, où A est la matrice de T relativement à \mathcal{C} , la base canonique de \mathbb{R}^2 et P est la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$M = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Test 43

Vérifier ces calculs.

Par définition de M , on a

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$T(v_1) = 4v_1 \quad \text{et} \quad T(v_2) = 2v_2.$$

Ainsi, l'application T s'apparente à une «dilatation» d'un facteur 4 dans la direction v_1 et d'un facteur 2 dans la direction v_2 .

Remarquons que l'effet de T est le même quelque soit la base où on exprime sa matrice. Ainsi, on doit également avoir

$$Av_1 = 4v_1 \quad \text{et} \quad Av_2 = 2v_2.$$

Test 44

Vérifier que $Av_1 = 4v_1$ et $Av_2 = 2v_2$.

§4 Matrice semblables et trace

Définition 45

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), A' = PAP^{-1}.$$

Remarques

- Deux matrices semblables sont équivalentes.
- Une matrice A' est semblable à la matrice A représentant un endomorphisme $f \in \text{L}(E)$ dans la base \mathcal{B} de E si, et seulement si, elle représente f dans une base \mathcal{B}' de E .
- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 46

On appelle **trace** d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Proposition 47 *L'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 48 *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on a*

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

Théorème 49 **et définition**

Il existe une unique forme linéaire $\text{Tr} : \mathbf{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour toute base \mathcal{B} de E , on ait

$$\forall f \in \mathbf{L}(E), \text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f).$$

*On appelle alors **trace** d'un endomorphisme f de E le scalaire $\text{Tr}(f)$.*

Proposition 50 *Pour tous $u, v \in \mathbf{L}(E)$, on a $\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u)$.*

Proposition 51 *Soit p un projecteur de E , alors $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.*