

# Chapter 44 Couple de variables aléatoires réelles

## Exercice 44.1

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant:

$(x, y)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$P(X = x \text{ et } Y = y)$	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$	$b$	$\frac{1}{6} - 2a$

## Exercice 44.2

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que  $Y = X^2$  et que la loi de  $X$  soit donnée par le tableau

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $cov(X, Y)$ . Conclusion ?

## Exercice 44.3

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. En déduire les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ . Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$ .
3. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? Calculer  $Cov(X, Y)$ .
4. On pose  $Z = Y - X$ . Calculer  $E(Z)$  et  $V(Z)$ . Déterminer ensuite la loi de  $Z$ .

## Exercice 44.4

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On définit, pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , les réels  $p_{i,j}$  par  $p_{i,j} = a \cdot i \cdot j$ .

1. Déterminer  $a$  pour que la loi du couple  $(X, Y)$  soit donnée par la distribution de probabilité  $(p_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ .
2. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?
3. En déduire  $E(XY)$  et  $Cov(X, Y)$ .
4. On pose  $Z = X + Y$ . Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .

### Exercice 44.5

On a  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$ . La boîte  $k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit  $X$  le numéro de la boîte et  $Y$  le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer  $P(X = Y)$ .
3. Déterminer la loi de  $Y$  et  $E(Y)$ .

### Exercice 44.6

On lance un dé cubique honnête, soit  $X$  le résultat obtenu. Si  $X$  est divisible par 3, on extrait en une fois 3 boules d'une urne  $U_1$  contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. Sinon, on extrait en une fois  $X$  boules d'une urne  $U_2$  contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

Soit  $Y$  le nombre aléatoire de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

### Exercice 44.7

On admet la convention  $\binom{n}{j} = 0$  si  $j \notin \llbracket 0, n \rrbracket$ .

1. Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels, et  $f$  la fonction polynôme définie pour tout réel  $x$  par

$$f(x) = (1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

- (a) Développer  $f(x)$  deux deux façons différentes, en utilisant la formule du binôme.
- (b) En déduire que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n+m \rrbracket, \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Vandermonde*.

2. Démontrer le théorème de stabilité de la somme de deux lois binomiales indépendantes, c'est-à-dire que, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables *indépendantes* suivant respectivement une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, p)$  et  $\mathcal{B}(n, p)$ , alors

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m, p).$$

### Exercice 44.8

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout  $n \geq 2$ , on définit la variable aléatoire  $X_n$  égale au gain total à l'issue des  $n$  premiers lancers.

1. Déterminer les lois de  $X_2$  et de  $X_3$ , puis calculer leurs espérances.
2. Soit  $n \geq 2$ . Justifier que  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, n-1\}$ . Calculer  $P(X_n = 0)$  et  $P(X_n = n-1)$ .
3. Pour tout  $n \geq 2$  et tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , montrer

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$

4. On note, pour tout  $n \geq 2$ ,  $Q_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k.$$

- (a) Soit  $n \geq 2$ . Calculer  $Q_n(1)$  et montrer que  $Q'_n(1) = E(X_n)$ . Exprimer  $V(X_n)$  à l'aide de la fonction  $Q_n$ .
- (b) Montrer, pour tout  $n \geq 2$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s).$$

- (c) En déduire une expression de  $Q_n(s)$  en fonction de  $n$  et de  $s$ .

5. Calculer alors, pour tout  $n \geq 2$ , l'espérance et la variance de  $X_n$ .

#### Exercice 44.9 Nombre de sommets isolés dans un graphe aléatoire (X-ENS)

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on se donne un réel  $p_n \in ]0, 1[$ . On considère le graphe aléatoire non orienté  $\Gamma_n$ , de sommets  $1, \dots, n$ , tel que, si pour tout  $(i, j)$  tel que  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $X_{i,j}$  est la variable indicatrice de l'événement « $\{i, j\}$  est une arête de  $\Gamma_n$ », alors les  $X_{i,j}$  sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ .

On note alors  $Y_n$  la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

1. Soit  $X$  une variable aléatoire finie à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que  $P(X > 0) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$ .
2. On suppose que  $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$ . Montrer que  $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
3. On suppose que  $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ . Montrer que  $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .