Chapter 10 Vocabulaire relatif aux applications

10.1 Définition ensembliste d'une application

10.2 Image directe et image réciproque

Exercice 10.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \}$ comme une image réciproque.

Exercice 10.2

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer

1. $f(2)$,
2. $f(\{ 2 \})$,
3. $f(\{ -1, 0, 1, 2 \})$,
4. $f^{-1}(4)$,
5. $f^{-1}(\{ 4 \})$,
6. $f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})$,
7. $f\left(f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})\right)$,
8. $f^{-1}(f(\{ -1, 0, 1, 2 \}))$,
9. $f([1, 2])$,
10. $f([-1, 4[)$,
11. $f^{-1}(]1, 2])$,
12. $f^{-1}([-1, 4])$,
13. $f(\mathbb{R})$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R})$,
15. $\operatorname{Im} f$.

Exercice 10.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f (sur $\mathbb{R}$).
2. Déterminer (graphiquement) $f([0, 2])$ et $f^{-1}([0, 2])$.

Exercice 10.4

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $\varphi(\mathbb{R})$.

Exercice 10.5

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \left(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3\right) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{ (0, 0, 0) \})$.
2. Soit $P = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + 3c = 0 \right\}$. Déterminer $f^{-1}(P)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $\Delta = \{ (t, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Déterminer $f(\Delta)$.
5. Soit $Q = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 2b + c = 0 \right\}$. Déterminer $f(Q)$.

Exercice 10.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble

$$J = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 \right\}.$$

2. Que valent $f(J)$ et $f^{-1}(f(J))$?

Exercice 10.7

Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 10.8

Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 10.9

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. On considère une partie A de E et une partie B de F. Démontrer l'égalité

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 10.10

Étant donné une application f de E dans F, on désigne pas $\mathcal{S}$ la famille des parties X de E telle que

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

1. A étant une partie quelconque de E, démontrer que $f^{-1}(f(A))$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.
2. Démontrer que toute intersection et toute réunion d'ensembles de $\mathcal{S}$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.
3. X étant un ensemble de $\mathcal{S}$ et A une partie de E telle que X et A soient disjoints, démontrer que X et $f^{-1}(f(A))$ sont disjoints.
4. X_1 et X_2 étant deux ensembles de $\mathcal{S}$ tels que $X_1 \subset X_2$, démontrer que $X_2 \setminus X_1$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.

Exercice 10.11

On définit la somme de deux parties E et F de $\mathbb{R}$ par

$$E + F = \{ x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F \}.$$

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. Vrai ou Faux?

1. $(f+g)(A) \subset f(A)+g(A)$.
2. $f(A)+g(A) \subset (f+g)(A)$.
3. $(f+g)^{-1}(A) \subset f^{-1}(A)+g^{-1}(A)$.
4. $f^{-1}(A)+g^{-1}(A) \subset (f+g)^{-1}(A)$.

10.3 Opérations sur les applications

10.4 Injection, surjection, bijection

Exercice 10.12

Donner, pour chacun des énoncés suivants, une formulation du type «l'application de … vers … qui à tout … associe … est (n'est pas) injective (surjective)».

1. Dans mon quartier, il y a deux personnes qui ont le même modèle de voiture.
2. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
3. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
4. Toute ville de France possède au moins une église.
5. Il y a des villes de France qui ont plusieurs églises.
6. Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée réelle.
7. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
8. On peut avoir $a+b=c+d$ sans que $a=c$ et $b=d$.

Exercice 10.13

On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0, & n=0 \\ n-1, & n>0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer $g \circ f$.
2. Les applications f et g sont-elles bijectives ? Que dire de $f \circ g$?

Exercice 10.14

1. Une application admet un point fixe s'il existe x tel que $f(x)=x$. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.
2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.
3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 10.15

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-3\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 10.16

1. Démontrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{ -i \}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{ 1 \}$ et que la bijection réciproque est l'application $w \mapsto i\dfrac{1+w}{1-w}$.

2. On note $\mathcal{D}$ le disque unité ouvert et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré:

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \} \qquad\qquad \mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z > 0 \}.$$

Démontrer *géométriquement* que $z \in \mathcal{H}$ si, et seulement si $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$. En déduire une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 10.17

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{ iy \mid y \in \mathbb{R} \}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

1. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer, selon la valeur du complexe Z le nombre d'antécédents de Z par f.
L'application f est-elle injective ?
L'application f est-elle surjective ?
Lorsque Z possède deux antécédents, que valent leur somme et leur produit ?

4. On note

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| = 1 \right\}, \qquad V_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| < 1 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \mid |z| > 1 \right\}.$$

(a) Que représentent géométriquement les ensemble $\mathbb{U}$, V_1, V_2 ?

(b) Montrer que $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{U}$.

(c) Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer

$$z_1 z_2 = 1 \implies (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2 \text{ ou } (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2 \text{ ou } (z_1, z_2) \in V_2 \times V_1.$$

(d) Démontrer que f réalise une bijection de V_1 sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.
On notera $g : \begin{array}{ccc} V_1 & \to & \mathbb{C} \setminus [-1,1] \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$.

Exercice 10.18

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$.

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2-y^2) \end{array}$.

4. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^3) \end{array}$.

5. $\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y^2) \end{array}$.

Exercice 10.19

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. On considère un élément $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{(u,v)\})$. (Les notations sont-elles correctes ?)

2. f est-elle injective ? surjective ?

3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \right\}$ et φ la restriction de f à D. L'application φ est-elle injective ?

Exercice 10.20

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $q \in \mathbb{Z}$, on considère l'application

$$\varphi_q : \begin{array}{rcl} \mathbb{U}_n & \to & \mathbb{U}_n \\ z & \mapsto & z^q \end{array}.$$

1. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer $\varphi_p \circ \varphi_q$.

2. On suppose que n et q sont premiers entre eux. Vérifier que l'application φ_q est bijective.

3. Réciproquement, on suppose l'application φ_q bijective. Montrer que n et q sont premiers entre eux.

Exercice 10.21

Soient trois ensembles A,B,C et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que g ne l'est pas nécessairement.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que f ne l'est pas nécessairement.

3. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective sans que ni g ni f ne le soit.

Exercice 10.22

Soit f une application de E dans E telle que

$$f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 10.23

Soient E et F deux ensembles non vides, on considère une application $f : E \to F$.

1. (a) Soit A une partie de E, montrer l'inclusion

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

   (b) Montrer que si A est une partie de E et f est injective, alors

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

   (c) Réciproquement, on suppose

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)).$$

   Montrer que l'application f est alors injective.

2. (a) Soit B une partie de F, montrer l'inclusion

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$

(b) Montrer que si B est une partie de E et f est surjective, alors

$$f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

(c) Réciproquement, on suppose

$$\forall B \in \mathcal{P}(E), f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

Montrer que l'application f est alors surjective.

Exercice 10.24

Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 10.25

Soit f une application de E dans F et soit $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ définie par

$$\forall Y \in \mathcal{P}(F), g(Y) = f^{-1}(Y).$$

1. Montrer que g est injective si, et seulement si f est surjective.

2. Montrer que g est surjective si, et seulement si f est injective.

10.5 Familles

Exercice 10.26

Donner une écriture simple les ensembles suivants.

1. $I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$.

2. $I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$.

3. $I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$.

4. $I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$.