Chapitre 32

Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

32.1 Construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment

§1 Intégrales des fonctions en escalier

Définition 1

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à φ. L'**intégrale de φ sur $[a,b]$**, notée $\int_{[a,b]} \varphi$, est définie par

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i) \left(x_{i+1} - x_i\right) \text{ où } t_i \in]x_i, x_{i+1}[. \tag{32.1}$$

La famille $\gamma = (t_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ est un **pointage** de la subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

Remarque

- Comme il y a une infinité de façons possibles de choisir une subdivision adaptée à φ – toute partition plus fine, par exemple, serait également adaptée au calcul de l'intégrale –, il faut vérifier que cette définition ne dépend ni de la subdivision adaptée à φ ni aux réels t_i que l'on a choisi.
- Si φ est une fonction constante sur $[a,b]$, ou même simplement sur $]a,b[$, et si on note λ cette constante, on a
$$\int_{[a,b]} \varphi = \lambda(b-a).$$

- Le nombre $\varphi(t_i)(x_{i+1}-x_i)$ représente l'aire signée d'un rectangle de hauteur $\varphi(t_i)$ et de base le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi, si φ est une fonction positive, $\int_{[a,b]} \varphi$ représente l'aire du domaine du plan défini par
$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq \varphi(x) \right\}$$
- On ne s'intéresse pas aux valeurs prises par la fonction en escalier aux points de la subdivision associée. Par conséquent, si ψ est une application définie sur $[a,b]$ qui ne diffère de la fonction en escalier φ qu'en un nombre fini de points, alors ψ est encore une fonction en escalier et son intégrale est la même que celle de φ sur $[a,b]$.

Proposition 2

Soit φ, ψ des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

1. *Si φ est une application à valeurs positive,* $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$.
2. *Si $c \in [a,b]$, alors*
$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi.$$
3. *L'application* $\begin{array}{rcl} \mathscr{E}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{[a,b]} \varphi \end{array}$ *est une application linéaire ;*
$$\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi \quad \textit{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi.$$

§2 Intégrale supérieure et inférieure d'une fonction bornée

Étant donnée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, on cherche à approcher l'aire «au dessous la courbe» ou «au dessus de la courbe» de f par des intégrales de fonctions en escalier, c'est-à-dire des sommes d'aires de rectangles. En «passant à la limite», avec des subdivision de plus en plus fines, on obtient la notion d'intégrale de Riemann.

Définition 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On considère

- l'intégrale inférieure de f dans $[a,b]$
$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\},$$
- et l'intégrale supérieure de f dans $[a,b]$
$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}.$$

On dit que f est **intégrable** au sens de Riemann s'il l'on a $I^-(f) = I^+(f)$, la valeur commune $\int_{[a,b]} f$ de ces deux nombre étant alors appelée l'**intégrale** de f sur $[a,b]$. On a donc
$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \left(\int_{[a,b]} \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ f \leq \psi}} \left(\int_{[a,b]} \psi \right).$$
C'est le *seul et unique* nombre vérifiant
$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leq f \leq \psi \implies \int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

Théorème 4 *On ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction en un nombre fini de points.*

§3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Rappel **Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier**

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a,b])^2$ tel que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

Théorème 5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, alors la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui minorent f

$$E^- = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\},$$

et l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent f

$$E^+ = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}.$$

L'application f est bornée car continue sur un segment. Notons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, alors

$$\int_{[a,b]} m = m(b-a) \in E^- \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} M = M(b-a) \in E^+$$

Donc E^- et E^+ sont non vides.

Si $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq M$ donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq M(b-a)$. Donc E^- est majorée par $M(b-a)$. De même E^+ est minorée par $m(b-a)$.

E^- est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure $I^-(f) = \sup(E^-)$. De même, E^+ admet une borne inférieure $I^+(f) = \inf(E^+)$.

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$[1]. Donc, en fixant ψ, on a $I^-(f) \leq \int_{[a,b]} \psi$, puis, l'inégalité valant pour toute fonction ψ en escalier qui majore f, on a $I^-(f) \leq I_+(f)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après le théorème d'approximation, il existe une application φ telle que

$$\varphi \leq f \leq \varphi + \frac{1}{n},$$

et ainsi,

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_{[a,b]} \left(\varphi + \frac{1}{n}\right) = \left(\int_{[a,b]} \varphi\right) + \frac{b-a}{n}.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, 0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq \frac{b-a}{n},$$

ce qui n'est possible que lorsque $I_-(f) = I_+(f)$. ∎

[1] ⚠ On ne peut pas encore parler de $\int_{[a,b]} f$, encore moins écrire $\int_I \varphi \leq \int_I f \leq \int_I \psi$.

Remarque

Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque f est une fonction lipschitzienne de rapport $k > 0$ (et donc continue), on peut choisir une subdivision régulière

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{telle que} \quad \frac{b-a}{n} \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

et des fonctions φ et ψ telles que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi(x_i) = \psi(x_i) = f(x_i)$$
$$\text{et } \forall x \in \left]x_i, x_{i+1}\right[, \varphi(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \text{ et } \psi(x) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f.$$

Alors

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ et } 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

Exemple 6

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la subdivision régulière de $[a, b]$ donnée par

$$\forall i \in [\![0, n]\!], x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Et définissons $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \left[x_i, x_{i+1}\right[, \varphi(x) = x_i \text{ et } \psi(x) = x_{i+1}.$$

On a clairement $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{b-a}{n}\frac{n(x_0 + x_{n-1})}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$
$$\int_{[a,b]} \psi = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \frac{b-a}{n}\frac{n(x_1 + x_n)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n} \leq \int_{[a,b]} f \leq \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Par compatibilité de la limite avec la relation d'ordre $\leq$, on obtient

$$\int_{[a,b]} f = \frac{b^2-a^2}{2},$$

ce qui est cohérent avec la formule usuelle pour l'aire d'un trapèze.

32.2 Propriétés élémentaires des intégrales

Lemme 7 *Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$ et (φ_n) un suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varepsilon_n = \|\varphi_n - f\|_\infty$. Alors

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n.$$

Les fonctions $\varphi_n \pm \varepsilon_n$ étant des fonction en escalier, on a par définition de l'intégrale de f,

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n - \varepsilon_n) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\varphi_n + \varepsilon_n)$$

c'est-à-dire

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n) - (b-a)\varepsilon_n \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\varphi_n) + (b-a)\varepsilon_n$$

On obtient donc l'inégalité

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} f \right| \leq (b-a)\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le résultat s'en suit par domination. ∎

§1 Linéarité de l'intégrale

Théorème 8 *L'application*

$$\int_{[a,b]} : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est une application linéaire sur $\mathscr{C}_m([a, b])$, c'est-à-dire que si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f \qquad \int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

Démonstration. Puisque f est continue par morceaux sur $[a, b]$, il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que

$$\varphi_n \leq f \leq \varphi_n + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \psi_n \leq g \leq \psi_n + \frac{1}{n}.$$

Alors

$$|\varphi_n + \psi_n - f - g| \leq |\varphi_n - f| + |\psi_n - g| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve que la suite de foncions $(\varphi_n + \psi_n)$ converge uniformément vers la fonction $f + g$ et donc

$$\int_{[a,b]} (f+g) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_n + \psi_n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_n) + \int_{[a,b]} (\psi_n) = \int_{[a,b]} (f) + \int_{[a,b]} (g).$$

De manière analogue,

$$|\lambda\varphi_n - \lambda f| = |\lambda||\varphi_n - f| \leq \frac{|\lambda|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc
$$\int_{[a,b]} \lambda f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \lambda\varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

∎

§2 Positivité et croissance de l'intégrale

Théorème 9 *Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$.*

1. *Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.*
2. *Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.*

Démonstration. **1.** Si $f \geq 0$, on remarque que la fonction nulle $\widetilde{0}$ est en escalier et on a donc

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} \widetilde{0} = 0.$$

2. C'est une conséquence immédiate de la linéarité et de la positivité de l'intégrale,

$$g - f \geq 0 \implies \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g - f \geq 0.$$

∎

Corollaire 10 *Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, alors*
$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $-|f| \leq f \leq |f|$. ∎

§3 Relation de Chasles

Définition 11

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Soit x et y deux points de I, alors on pose

$$\int_x^y f = \begin{cases} \int_{[x,y]} f & : x < y \\ 0 & : x = y \\ -\int_{[y,x]} f & : y < x. \end{cases}$$

L'intégrale $\int_x^y f$ peut être aussi notée $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

Le t qui figure sous le signe intégral est une variable muette, et peut-être remplacée par n'importe quelle lettre

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^y f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \dots$$

Théorème 12

Relation de Chasles

Si f est continue par morceaux sur un intervalle contenant x, y et z alors

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \tag{32.2}$$

Avec la notation $\int_a^b$, il faut être très vigilant lors de l'utilisation d'inégalités, notamment lorsque $a > b$ on a

$$\left|\int_a^b f\right| \leq -\int_a^b |f|$$

Méthode

Comparaison somme-intégrale

Soient f une fonction continue et décroissante sur un intervalle I et $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$. Si $p-1$ et $q+1$ appartiennent à I, on a

$$f(p+1) + f(p+2) + \cdots + f(q+1) \leq \int_p^{q+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q),$$

ou encore

$$\int_p^{q+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q) \leq \int_{p-1}^{q} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On a un résultat analogue lorsque f est croissante.

32.3 Deux normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

§1 Norme de la convergence uniforme

Notation

Pour toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Proposition 13

Norme de la convergence uniforme
Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. *L'égalité $\|f\|_\infty = 0$ implique $f = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.*
3. *On a l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

On dit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array}$ *est une norme sur* $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

§2 Intégrale d'une fonction continue de signe constant

Théorème 14

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une application continue et de signe constant, alors

$$\int_{[a,b]} f = 0 \iff f = 0$$

Esquisse. Par l'absurde. Si l'on a $f(x_0) = r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], |x - x_0| \leq r' \implies f(x) \geq r/2.$$

La partie du plan comprise entre $[a,b]$ et le graphe de f contient donc un rectangle d'aire > 0. ∎

Corollaire 15

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, une fonction continue et positive sur $[a,b]$. S'il existe un point x_0 de $[a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors

$$\int_{[a,b]} f > 0.$$

Ce résultat n'est plus valable pour les fonctions continues par morceaux.

§3 Norme de la convergence en moyenne

Notation

Pour toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, posons

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 16

Norme de la convergence uniforme

Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. *L'égalité $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$.*
3. *On a l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.*

On dit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_1 \end{array}$ *est une norme sur* $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

§4 Comparaison des deux normes

Théorème 17

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\|f\|_1 \leq |b-a| \cdot \|f\|_\infty.$$

Théorème 18

Soit $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues convergeant uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| \mathrm{d}x = 0,$$

en particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

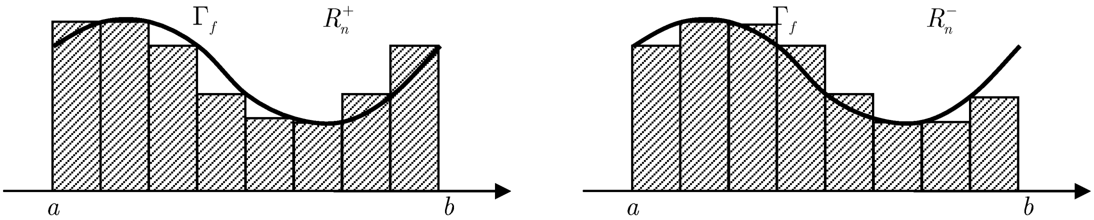
32.4 Sommes de Riemann

§1 Cas des fonctions continues

Définition 19 On appelle la **somme de Riemann régulière à gauche** associée à f, à l'ordre n, sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

La somme de Riemann régulière à droite est obtenue en sommant i de 1 à n.



Théorème 20 *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b])$, avec $a < b$, on a*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Démonstration. Admettons ce résultat pour l'instant. La démonstration n'est exigible que pour f lipschitzienne. ∎

Corollaire 21 *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b])$, avec $a \neq b$, on a*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Autrement dit, l'élément $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est limite de la **moyenne arithmétique** des valeurs de f sur une subdivision régulière de $[a, b]$.

Définition 22 Si $f \in \mathscr{C}_m([a, b])$, avec $a \neq b$, la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le réel

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f.$$

Remarque On a montré précédemment

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Exemple 23 Calculons $A = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.

Test 24 Calculer $R_n(f)$ dans le cas où $f(x) = e^x$ et en déduire

$$\int_a^b e^x \,\mathrm{d}x = e^b - e^a.$$

Test 25 Devinette : Si dans $R_n(f)$ on enlève un nombre fini fixé de termes, que se passe-t-il ? Par exemple, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n-7} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

§2 Cas des fonctions lipschitzienne

Théorème 26 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors,

$$\left| R_n(f) - \int_{[a,b]} f \right| \le k\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, on peut poser $k = \sup_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$.

32.5 Intégration des fonctions continues

§1 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Définition 27 Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si $F' = f$.

Proposition 28 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F dans I, l'ensemble des primitives de f dans I est identique à l'ensemble des fonctions $F + k$, où k est une constante. En particulier, pour $x_0 \in I$, il existe alors une unique primitive de f s'annulant en x_0 qui est $F - F(x_0)$.*

Théorème 29 **Théorème de Newton-Leibniz alias T.F.C.D.I.**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue** sur un intervalle I et $a \in I$. On définit*

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Démonstration. Fixons $x \in I$. pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$,

$$F(x+h) - F(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $g(h) = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue au point x, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $|t - x| < \delta$ implique $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, ce qui est en particulier le cas lorsque $t \in [x, x+h]$, avec $|h| < \delta$. Ainsi, lorsque $|h| < \delta$,

$$|g(h)| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|h|}|x + h - x|\varepsilon = \varepsilon.$$

La fonction g est donc de limite 0 en 0, ce qui prouve que F est dérivable en x, de dérivée $f(x)$. Comme f est continue et que $F' = f$, F est de classe $\mathscr{C}^1$. ∎

Ce résultat, pour les fonctions de l'époque, est déjà dans Newton en 1665–66 avec essentiellement la même démonstration, faite dans son langage des fluentes et fluxions : si y est la fluente qui définit la courbe ($y = f(x)$ dans le langage actuel) et si z est l'aire (*i.e.* l'intégrale) comprise entre une abscisse fixe et l'abscisse de la fluente x, l'accroissement infinitésimal $\dot{z}_0$ de z est le produit de y par l'accroissement infinitésimal $\dot{x}_0$ de x, ce qui signifie que $\dot{z}/\dot{x} = y$; si l'on suppose que $\dot{x} = 1$, autrement dit que x est le «temps» par rapport auquel il dérive ses fluentes pour calculer leurs fluxions, on a $\dot{z} = y$, ce qui, même dans sa conception des dérivées comme «vitesses de variation dans le temps», signifie bien que la dérivée de l'aire z par rapport à la variable x est l'ordonnée y du graphe au point x ; en style Leibniz $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}x = y$. Le calcul d'aire revient donc, pour eux, à celui d'une fluente z vérifiant cette relation. Newton ne justifie rien et surtout pas le fait que la relation $\dot{z} = y$ détermine z à une constante additive près, ce qui est pourtant le point crucial ; quelques lignes lui suffisent pour formuler son résultat qu'il illustre par des exemples. Chez Leibniz, c'est tout aussi simple : puisque $F(x)$ est la «somme continue» des quantités infiniment petites $f(t)\,\mathrm{d}t$ où t varie de l'origine de l'aire à x, l'accroissement infinitésimal de F lorsqu'on passe de x à $x + \mathrm{d}x$ est $f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(x) = \mathrm{d}F/\,\mathrm{d}x$. Ici encore, les justifications attendront le XIX-ième siècle, mais comme la méthode fonctionne admirablement, personne n'a plus envie pendant 150 ans de recourir aux rigoureuses démonstrations par «exhaustion»,…

Proposition 30 **Calcul des intégrales**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

1. *f admet des primitives sur I.*

2. *Si h est une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = [h(t)]_a^b.$$

3. *Il existe une et une seule primitive g de f sur I prenant la valeur y_0 au point $x_0 \in I$, elle est donnée par*

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 31 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$,*

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'.$$

Il est faux de dire que si f est dérivable alors

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

§2 Une notation affreuse mais commode

Notation Si F est la primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui s'annule en x_0, alors on écrit $\int_{x_0} f = F$.

Pour désigner une primitive de f, on utilise une autre notation toute aussi universelle et encore plus catastrophique, à savoir

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où l'on n'écrit pas de limites d'intégration. Comme la lettre x du second membre désigne une variable liée et celle du premier une variable libre, tous les tabous sont violés. On dit alors qu'il s'agit d'une intégrale indéfinie. Cette notation incite à utiliser les techniques de l'intégration dans la cuisine du calcul des primitives (I.P.P, changement de variable...), mais il faut bien préciser les hypothèses nécessaires. Elle a par contre de gros défauts :

- Il existe des fonctions non intégrables qui admettent des primitives! (eh oui, il existe des fonctions monstrueuses qui sont dérivables et dont la dérivée n'est pas intégrable).
- On a un problème avec les déterminations multiformes. Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, les primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sont les fonctions
$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x-1} + k_1, & x \in]1, +\infty[, \\ -\frac{1}{x-1} + k_2, & x \in]-\infty, 1[. \end{cases}$$
où k_1 et k_2 sont deux constantes arbitraires (et donc à priori différentes).

Pour désigner une primitive de f on pourra donc préférer la notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où l'on ne précise pas la borne inférieure, qui est donc tacitement choisie, suivant les valeurs de x pour que f soit continue sur l'intervalle considéré.

§3 Intégrale fonction des bornes

Théorème 32

Soient I et J deux intervalles, u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in I$, on définit

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Exemple 33

Étudions la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

32.6 Intégration par parties

§1 Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème 34

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{32.3}$$

Corollaire 35

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 36

Pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 37

Calculons $I = \int_0^1 x^2 e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Test 38

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Test 39

On cherche une primitive de la fonction arc-tangente sur $\mathbb{R}$. Nous savons que $t \mapsto \int_0^t \arctan x\,\mathrm{d}x$ est une telle primitive. Calculer cette intégrale.

§2 Formules de Taylor globales

Théorème 40

Formule de Taylor avec reste intégral ou Formule de Taylor-Laplace
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur un intervalle I contenant a. Alors,

$$\forall x \in I, f(x) = T_p(x) + R_p(x)$$

avec

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$$
$$R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 41

La formule précédente est appelée développement de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre p au point a. La fonction polynomiale T_p est la **partie régulière d'ordre p** et la fonction R_p est le **reste intégral d'ordre p**. On dit aussi que T_p est le **polynôme de Taylor de degré p en a**.

Théorème 42

Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur un intervalle I contenant a. Si M est tel que

$$\forall t \in I, |f^{(p+1)}(t)| \leq M,$$

alors

$$\forall x \in I, |R_p(x)| = |f(x) - T_p(x)| \leq M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Exemple 43

Soit $R > 0$ un nombre réel quelconque et considérons l'application $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur l'intervalle $[-R, R]$. On a $f^{(k)}(t) = e^t$ et donc $f^{(k)}(0) = 1$ et

$$\forall t \in [-R, R], |f^{(p+1)}(t)| = |e^t| \leq e^{|t|} \leq e^R.$$

On en déduit alors pour tout $x \in [-R, R]$,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^R \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^R \frac{R^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{R^{p+1}}{(p+1)!} = 0$. Nous avons donc démontré

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

et que la convergence de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e^x est uniforme sur tout segment $[-R, R]$.

32.7 La formule du changement de variable

§1 Substitution

Toute fonction de la forme $\left(g' \circ f\right) \times f'$ admet $g \circ f$ pour primitive. Mentionnons quelques cas très courants:

Si u est une fonction dérivable sur I,

- $u'e^u$ admet e^u pour primitive sur I.
- $u' \cos u$ admet $\sin u$ pour primitive sur I.
- $u' \sin u$ admet $-\cos u$ pour primitive sur I.
- $\dfrac{u'}{1+u^2}$ admet $\arctan u$ pour primitive sur I.
- Si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u}$ admet $\ln|u|$ pour primitive sur I.
- Si u est à images dans $\mathbb{R}_+^\star$ sur I et $\alpha \neq -1$, $u'u^\alpha$ admet $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour primitive sur I.
- etc...

Exemple 44

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{5-3\cos x}$ admet $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(5-3\cos x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2+1}$ admet $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$.

Méthode

Le programme exige que vous sachiez primitiver les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique et l'on fait apparaitre la dérivée de l'arctangente.

Exemple 45

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

§2 Changement de variable dans une intégrale

Théorème 46

Formule de changement de variable
Soit u une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ dans un segment $I = [a, b]$ et f une fonction continue dans l'intervalle $J = u(I)$. On a alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{32.4}$$

Il est impératif de noter qu'en général $u([a, b])$ est différent de $[u(a), u(b)]$.

Remarque

La formule se comprend d'elle même : on remplace y par son expression en fonction x à la fois dans $f(y)$ et dans $\mathrm{d}y$.

Exemple 47

Première utilisation
Calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}$.
On peut poser $y = \tan t = u(t)$. Il faut alors interpréter les bornes 0, 1 comme étant des nombres $u(a)$, $u(b)$. L'application $u : t \mapsto \tan t = y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$, et l'application $f : y \mapsto \frac{1}{(1+y^2)^2}$ est continue sur $u([0, \pi/4]) = [0, 1]$.
On écrit alors $y = \tan t$ et $\mathrm{d}y = (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{(1 + \tan^2 t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}.$$

Exemple 48

Deuxième utilisation
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.
On peut sentir le «bon» changement de variable $y = \sin t = u(t)$. L'application u étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on a $\mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t$ et

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right) \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 y^2(1 - y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Test 49

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

§3 Invariance par translation

Invariance par translation

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$.
Soit $\tau \in \mathbb{R}$. On appelle **translatée de f** par τ la fonction f_τ définie sur $[a+\tau, b+\tau]$ par

$$\forall x \in [a+\tau, b+\tau], f_\tau(x) = f(x-\tau).$$

L'application f est en escalier (resp. continue par morceaux) sur I si et seulement si f_τ l'est sur $[a+\tau, b+\tau]$. De plus, on a

$$\int_a^b f = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f_\tau,$$

ou encore

Proposition 50 *Soient f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application aux fonctions T-périodiques

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période T, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$. Alors, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(il s'agit de l'aire algébrique de deux domaines, le premier étant image de l'autre par une translation horizontale). En conséquence

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b+T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale de la fonction T-périodique sur un segment de longueur T ne dépend pas du segment choisi.

CHAPITRE 32

COMPLÉMENTS

32.8 RAPPEL DES PRIMITIVES USUELLES

Primitives des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Primitives à connaître ou savoir retrouver très rapidement

Pour $a > 0$.

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$.	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a}$	$]-a, a[$

Primitives à savoir retrouver

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\coth x$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \arctan(e^x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert\tanh \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$

32.9 À la recherche de primitives

§1 Fonctions rationnelles

Il arrive de loin en loin qu'on en ait besoin pour faire de vraies mathématiques ; c'est bien rare. Dans l'enseignement, on ne s'en sert que pour (i) habituer les étudiants au calcul algébrique, ce qui peut certes toujours servir ailleurs, (ii) fournir aux examinateurs un réservoir inépuisable d'exercices stockés depuis des générations et permettant, conformément au point (i), de tester la virtuosité de l'impétrant. On peut aussi en avoir besoin dans certains calculs d'électrotechnique par exemple, mais ce n'est sûrement la principale motivation du sujet, inauguré par Leibniz qui ne pensait pas aux étudiants des XX-ième et XXI-ième siècles obligés d'en subir les retombées…

Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples

Soit $f : x \mapsto P(x)/Q(x)$ une fonction rationnelle de x, où P et Q sont des polynômes.

- Si $\deg P \geq \deg Q$, calculer le quotient E et le reste R de la division euclidienne de P par Q : on obtient
$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$
- Factoriser Q en facteurs irréductibles, par exemple
$$Q(x) = \lambda(x-a)(x-b)^3(x^2+px+q)^2.$$
- Découper en petits morceaux
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}.$$

Primitives des éléments simples

1. Les fonctions polynomiales
$$\int a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + k$$

2. Les fonctions rationnelles de première espèce
$$\int \frac{1}{(x-a)}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + k$$
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + k, \quad n \geq 2.$$

3. Les fonctions rationnelles de deuxième espèce, avec $b^2 - 4ac < 0$,
$$\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^n} = A\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + B\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$$

Pour $n = 1$, on a
$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+2px+q) + k$$
$$\text{et} \int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\arctan\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + k$$

avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\left(t + \dfrac{p}{2}\right)$.

§2 Fonction polynomiale en sin et cos

Par linéarité de l'intégration, il suffit de connaître $I_{p,q} = \int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x$.

Méthode **Cas particulier**

- Pour calculer $I_{p,1} = \int \sin^p x \cos x\,\mathrm{d}x$, il semble important de remarquer «quelque chose de particulier», à savoir que la dérivée de $\sin x$ est justement $\cos x$. Nous sommes donc en présence d'une expression de la forme

$$\int u^p(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{d'où } I_{p,1} = \frac{1}{p+1}u^{p+1}(x) + k = \frac{\sin^{p+1}(x)}{p+1} + k.$$

  Le calcul de $I_{1,q}$ se traite de même, au problème de signe près.

- Pour calculer $I_{p,2q+1} = \int \sin^p x \cos^{2q+1}(x)\,\mathrm{d}x$, on remarque la même chose ! On écrit alors $I_{p,2q+1} = \int \sin^p x(1-\sin^2(x))^q \cos x\,\mathrm{d}x$. Il suffit maintenant de développer $(1-\sin^2(x))^q$ pour se ramener à une combinaison linéaire de termes qui relèvent tous du cas précédent. De même pour le calcul de $I_{2p+1,q}$.

Méthode **Cas général**
Le cas qui échappe aux considérations précédentes est celui où p et q sont simultanément pairs (la proportion de cas particuliers est donc de $\frac{3}{4}$!!). Dans ce cas on doit repenser à la linéarisation. La technique la plus agréable passe alors par l'emploi des formules d'Euler.

On peut aussi, et c'est souvent avantageux, obtenir des relations de récurrence entre les $I_{2p,2q}$ à l'aide d'une intégration par partie.

§3 Fonction rationnelle en sin et cos

Nous voulons calculer $\int F(\cos(x), \sin(x))\,\mathrm{d}x$, où F une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$. On pose $f(x) = F(\cos(x), \sin(x))$ et $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

Méthode **Règles de Bioche**

- Si $\omega(x+\pi) = \omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \tan x$.

- Si $\omega(\pi - x) = -\omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \sin x$.

- Si $\omega(-x) = -\omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \cos x$.

- Si deux des trois tests ci-dessus s'avèrent positifs (dans ce cas les trois relations sont vraies) ; on peut faire le changement de variable $u = \cos 2x$.

- Si les trois tests s'avèrent négatifs, on n'aura plus d'autre choix que de faire le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, universel mais généralement très long. On a alors

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

§4 Fonction contenant la racine carrée d'un binôme

Exemple 51

Calculer $I(x) = \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x+1}}$.

On pose $u = \sqrt{x+1}$ ou encore $x = u^2 - 1$. Par conséquent $dx = 2u\, du$. Ce changement de variable donne

$$I(x) = \int \frac{(u^2-1)^2}{u} 2u \, du = \int (u^2-1)^2 \, du$$

et le calcul s'achève sans difficultés en développant le polynôme à intégrer.

Remarquons, si l'on veut énoncer quelques principes généraux, que si la fonction à intégrer contient un seul radical de la forme $\sqrt[n]{at+b}$, celui-ci disparaîtra naturellement en effectuant le changement de variable $u = \sqrt[n]{at+b}$. Des problèmes plus ardus peuvent se poser si la fonction contient plusieurs radicaux différents de ce type. Dans ce cas, il faut trouver un changement de variable astucieux les faisant disparaître simultanément.

§5 Fonction contenant la racine carrée d'un trinôme

Nous rappelons que la «canonisation» du trinôme permet toujours de se ramener à l'un des trinômes suivants : $u^2 + a^2$, $u^2 - a^2$, $a^2 - u^2$ (la forme $-u^2 - a^2$ a été oubliée car elle ne peut survivre sous le radical). Il reste à trouver dans chaque cas, un bon changement de variable qui les transforme en carré parfait, afin d'éliminer le radical.

- Le cas $\sqrt{a^2 - u^2}$. Il est évident que u doit se trouver entre $-a$ et a. Le bon changement de variable consiste à poser $u = a \sin\varphi$ (ou $u = a\cos\varphi$) ou plutôt, pour définir correctement φ, $\varphi = \arcsin \frac{u}{a}$ (ou $\varphi = \arccos \frac{u}{a}$). Ceci évite de plus les problèmes de signe des fonctions trigonométriques.

- Le cas $\sqrt{a^2 + u^2}$. Cette expression existe pour tout u réel. Il existe dans ce cas deux changements de variable permettant de transformer l'expression :

  - on peut poser $u = a \tan\theta$ (ou plutôt $\theta = \arctan \frac{u}{a}$, pour définir correctement θ), car on a alors $a^2 + u^2 = a^2(1 + \tan^2\theta) = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$ et $\cos\theta > 0$.
  - on peut poser $u = a \operatorname{sh}\theta$, car on a alors $a^2 + u^2 = a^2(1 + \operatorname{sh}^2\theta) = a^2 \operatorname{ch}^2\theta$ et $\operatorname{ch}\theta > 0$.

- Le cas $\sqrt{u^2 - a^2}$. Cette quantité existe si $u \geq a$ ou $u \leq -a$. Il faut savoir que dans ce cas, on pose $u = a \operatorname{ch}\theta$ si $u \geq a$ ou $u = -a \operatorname{ch}\theta$ si $u \leq -a$, en choisissant $\theta \geq 0$ (de façon à pouvoir utiliser la fonction argch). On condense alors ces deux cas en écrivant $u = a\varepsilon \operatorname{ch}\theta$, avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ suivant la position de u. On en déduit $du = a\varepsilon \operatorname{sh}\theta$ et $u^2 - a^2 = a^2(\operatorname{ch}^2\theta - 1) = a^2 \operatorname{sh}^2\theta$ et comme θ a été choisi positif ou nul, on obtient $\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{sh}\theta$.

32.10 Calcul approché d'intégrales

§1 Méthode des rectangles

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, On appelle **somme de Riemann** relative la fonction f, à la subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et au pointage $\gamma = (t_0, \dots, t_{n-1})$ l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Ici, on peut autoriser $t_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$.

Lorsque $t_i = x_i$, on obtient la méthode des rectangles, point à gauche

$$R_g(f, \sigma, \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Lorsque $t_i = x_{i+1}$, on obtient la méthode des rectangles, point à gauche

$$R_d(f, \sigma, \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

En prenant une subdivision régulière de $[a, b]$, c'est-à-dire

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad \text{et} \qquad t_i = x_i,$$

on obtient la somme de Riemann régulière à gauche.

Théorème 52 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit*

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Alors,

$$\left| R_n - \int_{[a,b]} f \right| \leq k\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, on peut poser $k = \sup_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right|$.

§2 Méthode des trapèzes

Théorème 53 *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I = [a, b]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit*

$$I_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

Alors,
$$\left|I_n - \int_I f\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad \textit{avec} \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

§3 Autres méthodes

- Méthode de Simpson.
- Méthodes de Gauß à deux et trois points.

32.11 Intégration et relations de comparaison

Théorème 54 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I. On suppose que g garde un signe constant sur chacun des intervalles $I \cap]-\infty, x_0[$ et $I \cap]x_0, +\infty[$.*

1. *Si, au voisinage de $x = a$, $f(x) = o(g(x))$, alors au voisinage de $x = a$, on a*
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
2. *Si, au voisinage de $x = a$, $f(x) \sim g(x)$, alors au voisinage de $x = a$, on a*
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse que g garde un signe constant est indispensable.