

Chapter 6 Nombres entiers, itérations

Exercice 6.1

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives et $a > 0$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq au_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq a^n u_0.$$

Solution 6.1

Exercice 6.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite est majorée par 4.

Solution 6.2

Exercice 6.3

Montrer : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nu)| \leq n |\sin(u)|$.

Solution 6.3

Exercice 6.4

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n}{3^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2 + 1}.$$

Solution 6.4

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n)$ la relation

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

L'assertion $R(0)$ est vérifiée puisque

$$(1+a)^0 = 1 = 1 + 0a + 0a^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$, alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a) \times (1+a)^n \\ &\geq (1+a)\left(1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right) \\ &\geq 1 + a + na + na^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^3 \\ &\geq 1 + (n+1)a + \frac{n^2 - n + 2n}{2}a^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}a^2,\end{aligned}$$

d'où $R(n+1)$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant le résultat précédent avec $a = 2$.

$$(1+2)^n = 3^n \geq 1 + 2n + 2n(n-1) = 1 + 2n^2.$$

Et donc $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2n^2+1}$. En multipliant cette relation par $3n$ (positif), on obtient alors l'inégalité demandée

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2 + 1}.$$

Exercice 6.5

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n , $9^n - 1$ est multiple de 8.

Solution 6.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(n)$: « $9^n - 1$ est multiple de 8».

- On a $9^1 - 1 = 8$ qui est un multiple de 8 d'où $R(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie, c'est-à-dire $9^n - 1$ est multiple de 8. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $9^n - 1 = 8k$, ou encore $9^n = 8k + 1$. D'où

$$9^{n+1} = 9 \times 9^n = 9 \times (8k + 1) = 8 \times 9k + 9.$$

Finalement,

$$9^{n+1} - 1 = 8 \times (9k + 1)$$

est un multiple de 8.

- *Conclusion* : par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Exercice 6.6

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Solution 6.6

On souhaite essayer de démontrer ce résultat par récurrence. Commençons par établir un lien entre $\alpha^n + 1/\alpha^n$ et $\alpha^{n+1} + 1/\alpha^{n+1}$. On a

$$\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

Ce qui fait également apparaître α^{n-1} . On a alors

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Ce qui suggère d'utiliser plutôt une récurrence à deux pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n)$ l'assertion « $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}$ ».

L'assertion $R(0)$, c'est-à-dire $1 + 1 \in \mathbb{Q}$, est vraie. L'assertion $R(1)$ est également vraie par hypothèse sur α .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $R(n)$ et $R(n-1)$. Puisque $R(1)$ est également vraie, on peut écrire

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}.$$

Or, on a vu que

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \underbrace{\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{\left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)}_{\in \mathbb{Q}}.$$

Puisque le produit de deux rationnel est un rationnel, et que la somme de deux rationnels est un rationnel, on en déduit que $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $R(n+1)$.

Ainsi, on a montré que si $R(n)$ et $R(n-1)$ sont vraies, alors $R(n+1)$ est vraie. De plus, $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Conclusion

D'après le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 6.7

Un tournoi de badminton aquatique regroupe n équipes. Chacune des n équipes rencontre une fois les $n - 1$ autres. Il n'y a pas de match nul. Montrer que l'on peut classer les n équipes de telle sorte que l'équipe 1 ait battu l'équipe 2, l'équipe 2 est battu l'équipe 3, ..., l'équipe $n - 1$ ait battu l'équipe n .

Solution 6.7

Exercice 6.8

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Solution 6.8

Exercice 6.9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 7, u_1 = -\frac{1}{10}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n.$$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solution 6.9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion $|u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a bien $|u_0| = 7 \leq 7 \cdot \frac{1}{2^0}$ et $|u_1| = \frac{1}{10} \leq \frac{7}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2^1}$. Donc $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ et $R(n+1)$ soient vraies. Nous allons montrer $R(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n \right| \\ &\leq \frac{1}{10}|u_{n+1}| + \frac{1}{5}|u_n| && \because \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1}{10} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^n} && \because R(n) \text{ et } R(n+1) \\ &= \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{28}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\ &= 7 \cdot \frac{1}{2^{n+2}}; \end{aligned}$$

D'où $R(n+2)$.

Conclusion

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$.

Exercice 6.10

On définit une suite (F_n) par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Calculer F_n pour $1 \leq n \leq 10$.
2. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$a^{n-3} < F_n < a^{n-2}.$$

Solution 6.10

Exercice 6.11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n.$$

Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2.$$

Solution 6.11

Récurrence double.

Exercice 6.12

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p (2q + 1)$.

Solution 6.12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(n)$: «il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p (2q + 1)$ ».

On a $1 = 2^0 (0 + 1)$, d'où $R(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $R(1), R(2), \dots, R(n)$. Montrons $R(n + 1)$.

- Si $n + 1$ est impair, alors n est pair. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$ et on a donc $n + 1 = 2^0(2q + 1)$, d'où $R(n + 1)$.
- Si $n + 1$ est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2m$. Or $m < n + 1$, donc $R(m)$ est vraie : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^p(2q + 1)$. On a donc $n + 1 = 2 \times 2^p(2q + 1) = 2^{p+1}(2q + 1)$, d'où $R(n + 1)$.

Dans chaque cas, $R(n + 1)$ est vraie. Par récurrence forte, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R(n + 1).$$

Exercice 6.13

Soit une suite géométrique (u_n) . Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison q) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_6 = 96$ et $q = 2$;

2. $u_1 = 72$ et $u_4 = -8/3$;

3. $u_3 = 40$ et $u_7 = 640$.

Solution 6.13

1. On a $u_6 = q^6 u_0 = 2^6 u_0 = 64 u_0$, d'où $u_0 = 96/64 = 3/2$.

2. On a $u_1 = q u_0$ et $u_4 = q^4 u_0$, d'où

$$\frac{u_4}{u_1} = q^3 = \frac{-8}{3 \times 72} = -\frac{1}{27}.$$

On a donc $q = -1/3$ et $u_0 = -216$.

3. On a $u_7 = u_0 q^7$ et $u_3 = u_0 q^3$, d'où

$$\frac{u_7}{u_3} = q^4 = 16 = 2^4,$$

d'où $q = \pm 2$ puis $u_0 = u_3/q^3 = \pm 5$ (du même signe que q).

Exercice 6.14

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$$

est une suite géométrique.

2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n .

Solution 6.14

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3a_n + 2}{a_n + 4} - 1}{\frac{3a_n + 2}{a_n + 4} + 2} = \frac{2a_n - 2}{5a_n + 10} = \frac{2}{5} \frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \frac{2}{5} b_n.$$

Conclusion

La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

2. On a $b_0 = \frac{a_0 - 1}{a_0 + 2} = \frac{1}{2}$, d'où

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2} &\implies b_n(a_n + 2) = a_n - 1 \\ &\implies 1 + 2b_n = a_n(1 - b_n) \\ &\implies a_n = \frac{1 + 2b_n}{1 - b_n} \\ &\implies a_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2 \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^{n-1}}.$$

Exercice 6.15

Définissons une suite par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, u_n est positif. En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $u_n \geq n - 2$. En déduire la limite de la suite.
2. Définissons maintenant la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Remarquer que u_n est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de l'entier n .

Solution 6.15

Exercice 6.16

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n .

Solution 6.16

On trouve $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 6.17

Soit $p_0 = 10000$ une population initiale de lapins. On suppose que le taux de reproduction annuel est de 3 par couple (tous les individus se reproduisent et font partie d'un unique couple). De plus, à la fin de chaque année, la population est diminuée par la vente d'une quantité fixe de 1000 individus. Déterminer la population au bout de 50 ans.

Solution 6.17

On a une suite arithmético-géométrique: $p_{n+1} = \frac{3}{2}p_n - 1000$. On cherche r le point fixe de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{2}x - 1000$, on trouve $r = 2000$. On introduit $y_n = p_n - r$, alors

$$y_{n+1} = p_{n+1} - 2000 = \frac{3}{2}p_n - 1000 - 2000 = \frac{3}{2}(p_n - 2000) = \frac{3}{2}y_n.$$

Ainsi, la suite (y_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$, donc

$$y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n y_0 = 8000 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

En particulier, $p_{50} = 8000 \left(\frac{3}{2}\right)^{50} + 2000$, qui est de l'ordre de 5.1×10^{12} .

Exercice 6.18

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution 6.18

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(H_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition H_0 est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geq 0$, supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est alors vraie. On a alors

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3 > 0$ et H_{n+1} est vraie.

- Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n \implies H_{n+1}$$

et comme H_0 est vraie alors H_n est vraie quelque soit n . Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif. On a

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2} = \frac{x_n(x_n - 3)}{2(x_n + 2)}$$

Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$H_n : \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition H_0 est vraie.
- Soit $n \geq 0$, supposons que H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vérifiée.

D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

- Nous concluons en résumant la situation :
 H_0 est vraie, et quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $H_n \implies H_{n+1}$. Donc H_n est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.