Chapter 25 Relations de comparaisons sur les fonctions

25.1 Comparaison des fonctions

25.2 Calcul avec les relations de comparaisons

Exercice 25.1

1. Déterminer une fonction simple équivalente à f en $+\infty$ et en 0.

(a) $f(x) = x^2 + x$.

(b) $f(x) = x + \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = x + 1 + \ln x$.

(d) $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$.

(e) $f(x) = e^x + \sin x$.

(f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

2. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to 0$.

(a) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.

(b) $f(x) = \ln(\cos x)$.

(c) $f(x) = \dfrac{(\tan x)(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

3. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.

(a) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

(b) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$.

Exercice 25.2

Déterminer des équivalents simples lorsque $x \to 0$ de

1. $\dfrac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}$.

2. $\ln(\cos x)$.

3. $a^x - 1$ où $a \in]0, +\infty[$.

4. $x^x - 1$.

5. $(8+x)^{1/3} - 2$.

Exercice 25.3

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}}$, $x \to 0^+$.

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$, $x \to +\infty$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

4. $f(x) = \cos(\sin x)$, $x \to 0$.

5. $f(x) = x^x - 1$, $x \to 0^+$.

6. $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$, $x \to 1$.

Exercice 25.4

En se servant éventuellement d'équivalents, déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

4. $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$.

Exercice 25.5

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2-4x+3}$.

2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)}$.

3. $\lim_{x\to+\infty} (\tanh x)^{e^{2x}\ln x}$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{\operatorname{ch}(\ln x)}$.

Exercice 25.6

Déterminer les limites, lorsque x tend vers 0^+ de

$$f(x) = x^{(x^x)} - 1, \quad g(x) = x^{(x^x-1)}, \quad h(x) = x^{(x^{(x-1)})}.$$

Exercice 25.7

Déterminer les limites des quantités $f(x)$ suivantes en utilisant au besoin des équivalents

1. $\lim_{x\to 0+} (1+\sqrt{x})^{1/x}$;

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{1-\cos(2x)}$;

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+2x^2)}{x\ln(1+x)}$;

4. $\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}\right)$;

5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$;

6. $\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x-\pi/3}$.

Exemples avec les suites

Exercice 25.8

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

1. Étudier la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis que $u_n = o(n)$.

4. Donner un équivalent simple de (u_n).

5. Étudier $\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

25.3 La sympathique fonction ln