

BORNE SUPÉRIEURE DANS \mathbb{R} 

Richard Dedekind (1831-1916)

L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} sur lequel est fondé toute l'analyse est à la fois proche de notre intuition géométrique, puisqu'on se le représente comme l'ensemble des points d'une droite idéale, et dans le même temps assez difficile à appréhender. Cela est peut-être dû au fait que dans la pratique, nous ne manipulons que des nombres rationnels. Par conséquent, ces nombres irrationnels, dont le développement décimal est infini et très complexe, échappent à notre intuition. Pourtant, on ne peut s'en dispenser pour faire des mathématiques, et ce d'autant plus que la presque totalité de l'ensemble des réels est formée par les irrationnels (dans un sens qui sera précisé dans la suite du cours).

Historiquement, il semblerait que la découverte des nombres irrationnels soit le fait de Pythagore et de son école, et qu'à l'époque elle jeta un trouble certain. Par la suite, une

théorie déjà assez élaborée des nombres réels positifs fut donnée par Eudoxe de Cnide au IV-ième siècle avant JC, et présentée par Euclide dans le livre V de ses *Éléments*.

Au début du X-ième siècle, un même mot, celui de *adad* (nombre), apparaît dans les mathématiques arabes, aussi bien dans la désignation des nombres rationnels (*al-addad al-muntiqa*) que dans celle des nombres irrationnels (*al addad al-summa*), montrant ainsi que les algébristes arabes voient une unité dans ces nombres. Les mathématiciens arabes Abu Kamil, Al-Samaw'al, Al-Karagi, élargissent alors le calcul aux nombres irrationnels et tendent à s'affranchir de la vision géométrique des nombres (longueurs, aires, volumes) qui est celle des Grecs, pour aller vers une vision plus arithmétique : on passe des grandeurs incommensurables aux nombres irrationnels.

Cependant, il fallut attendre le XIX-ième siècle pour qu'on dispose de constructions formelles et rigoureuses de ces nombres, abandonnant tout recours à la géométrie. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants concernant les fonctions, une réforme de l'analyse tendant vers une plus grande rigueur s'amorce au XIX-ième siècle, sous l'impulsion de Cauchy, Bolzano et Weierstrass. Toujours est-il qu'au milieu du XIX-ième siècle, aucune théorie vraiment satisfaisante des nombres n'a encore été proposée, aucun fondement logique de «l'arithmétique» n'est disponible.

C'est en particulier pour des raisons pédagogiques (pour construire son cours de calcul différentiel à l'université de Berlin sur des bases rigoureuses) que Weierstrass décide de combler cette lacune. En 1863, il propose une construction de la droite réelle. En 1872, deux autres constructions du même type sont publiées, une première due à Cantor et Heine, et une seconde due à Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*).

Concernant la première d'entre elles, Méray a, dès 1869, fait paraître une construction des réels qui en est assez proche. Pour la seconde, Dedekind a en fait conçu cette théorie dès 1858, et, là encore, c'est par une réflexion trouvant son origine dans des questions d'enseignement qu'il y est conduit¹. La préface de *Stetigkeit und irrational Zahlen*, dont suit ici un extrait, en témoigne.

Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. [...] Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.

Ainsi de plusieurs manières équivalentes, le corps des nombres réels était construit rigoureusement à partir de celui des rationnels, eux-mêmes construits à partir des entiers. C'est donc avec l'axiomatisation des entiers naturels par Peano en 1889 que l'édification de cette «tour» de nombres, partant de \mathbb{N} et allant à \mathbb{R} , s'appuyait enfin sur des bases logiques, rigoureuses, purement arithmétiques et indépendantes de tout recours à des «évidences» géométriques.

¹Notons à ce propos que c'est aussi de la volonté d'écrire un ouvrage didactique, qui rompt avec les livres faisant autorité en analyse au début du XX-ième siècle et soit fondé sur une parfaite rigueur, qu'est né Nicolas Bourbaki.

20.1 TOPOLOGIE DE LA DROITE RÉELLE

§1 Parties ouvertes, voisinages

Lemme 1 *Pour tous réels x et a et pour tout $r > 0$,*

1. $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r \iff x \in]a - r, a + r[.$
2. $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r, a + r].$

Définition 2

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est un **ouvert** de \mathbb{R} ou une **partie ouverte** de \mathbb{R} lorsque

$$\forall x \in A, \exists r > 0,]x - r, x + r[\subset A.$$

Exemples 3

1. \emptyset et \mathbb{R} sont des ouverts de \mathbb{R} .
2. Les intervalles ouverts $]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ sont des ouverts de \mathbb{R} .

Définition 4

On appelle **voisinage** d'un élément x de \mathbb{R} toute partie V de \mathbb{R} contenant un ouvert contenant x , ou de manière équivalente lorsque

$$\exists r > 0,]x - r, x + r[\subset V.$$

L'ensemble des voisinage de x sera noté $\mathcal{V}(x)$.

Exemples 5

1. Un ouvert contenant x est un voisinage de x .
2. Une partie de \mathbb{R} est ouverte si, et seulement si elle est voisinage de tous ses points.

Remarque

Il est clair que tout voisinage V de x contient un voisinage de la forme $]x - \delta, x + \delta[$, avec $\delta > 0$. Un tel voisinage est dit centré en a et on a

$$]a - \delta, a + \delta[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta \}.$$

On peut donc se limiter à l'étude des voisinages centrés, ce qui explique que l'analyse est aussi la saga des δ et des valeurs absolues.

Proposition 6

1. L'intersection de deux ouverts de \mathbb{R} est un ouvert de \mathbb{R} .
2. L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x .

§2 Parties fermées

Définition 7

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est un **fermé** de \mathbb{R} ou une **partie fermée** de \mathbb{R} lorsque $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exemples 8

1. \emptyset et \mathbb{R} sont des fermés de \mathbb{R} .
2. Les intervalles fermés $[\alpha, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta \}$ sont des fermés de \mathbb{R} .

§3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 9

Soit A une partie de \mathbb{R} .

On dit qu'un point $x \in \mathbb{R}$ est **intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x , c'est-à-dire

$$\exists r > 0,]x - r, x + r[\subset A.$$

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'**intérieur** de A et se note $\overset{\circ}{A}$.

Définition 10

Soit A une partie de \mathbb{R} .

On dit qu'un point $x \in \mathbb{R}$ est **adhérent** à A lorsque tout voisinage de x rencontre A , c'est-à-dire

$$\forall r > 0,]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'**adhérence** de A et se note \overline{A} .

Définition 11

Une partie A de \mathbb{R} est dite **dense** dans \mathbb{R} si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Autrement dit, une partie A de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si, et seulement si tout intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} contient au moins un point de cette partie, ou encore si, et seulement si

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, u < v \implies \exists z \in A, u < z < v.$$

Exemple 12

L'ensemble \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Proposition 13

On a toujours

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

De plus

- $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
- A est ouvert si, et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.
- \overline{A} est un fermé.

- A est fermé si, et seulement si $A = \overline{A}$.

Définition 14

La **frontière** d'une partie A de \mathbb{R} est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. On la note ∂A .

§4 Voisinages à gauche et à droite**Définition 15**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Une partie de \mathbb{R} est un **voisinage à droite** de a si elle contient un intervalle semi-ouvert $[a, a + r[$, avec $r > 0$.
- Une partie de \mathbb{R} est un **voisinage à gauche** de a si elle contient un intervalle semi-ouvert $]a - r, a]$, avec $r > 0$.

Définition 16

1. Une partie de \mathbb{R} est un **voisinage** de $+\infty$ si elle contient un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$.
2. Une partie de \mathbb{R} est un **voisinage** de $-\infty$ si elle contient un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$.

20.2 THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE**§1 Borne supérieure**

C'est la propriété cruciale de \mathbb{R} .

Définition 17

Soit A une partie de \mathbb{R} . Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

Théorème 18

Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Exemples 19

1. L'ensemble \mathbb{N} n'a pas de borne supérieure dans \mathbb{R} .
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

Remarque

Il est faux que toute partie non vide majorée de \mathbb{Q} admette une «borne supérieure» dans \mathbb{Q} . Par exemple avec $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. L'ensemble des rationnels qui majore A est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$: il n'a pas de plus petit élément dans \mathbb{Q} .

Exemple 20

Soit

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Alors A n'a pas de plus grand élément et $\sup(A) = 0$.**Test 21**

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

§2 Borne inférieure**Définition 22**

Soit A une partie de \mathbb{R} . Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **la borne inférieure de A** et on la note $\inf A$.

Théorème 23

Toute partie non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Test 24

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On suppose que $A \subset B$ et que B est minorée. Alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

Test 25

Soit A une partie non vide majorée de \mathbb{R} . On pose $B = \{-x \mid x \in A\}$. Alors B est minorée et $\inf B = -\sup A$.

20.3 LES DIX TYPES D'INTERVALLES DE \mathbb{R} **§1 Parties convexes de \mathbb{R}** **Définition 26**

Une partie A de \mathbb{R} est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de A est inclus dans A , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in A.$$

§2 Caractérisation des parties convexes

La propriété de la borne supérieure ou inférieure permet de distinguer les parties convexes de \mathbb{R} en dix types distincts selon qu'il existe ou non un majorant ou un minorant, ainsi qu'un plus grand ou plus petit élément.

Théorème 27

Caractérisation des parties convexes de \mathbb{R}

Les parties convexes de \mathbb{R} sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- Les *intervalles ouverts*, de la forme

$$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$$

$$]-\infty, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$$

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

- Les *intervalles fermés*, de la forme

$$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$$

$$]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$$

$$[a, b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Les intervalles de la forme $[a, b]$ fermés et bornés sont aussi appelés *segments*.

- Les *intervalles de la forme*

$$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

$$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

Ces intervalles ne sont ni ouverts, ni fermés.

- L'ensemble vide : \emptyset .

Remarque

- Noter que si $b < a$, alors $]a, b[= [a, b] = \emptyset$. Si $a = b$, on a $[a, a] = \{ a \}$.
- Par ailleurs, \mathbb{R} et \emptyset sont des intervalles ouverts et fermés.
- En ce qui concerne la signification précise des symboles $+\infty$ et $-\infty$ utilisés ci-dessus ou ailleurs, il doit être précisé que
 1. ∞ par lui-même n'a aucune signification, bien que certaines phrases le contenant signifient quelquefois quelque chose.
 2. Chaque fois qu'une phrase ou notation contenant le symbole ∞ signifiera quelque chose, ce sera seulement parce que nous aurons antérieurement attaché une signification à cette phrase particulière au moyen d'une *définition spécifique*.

Corollaire 28

Toute intersection d'intervalles est un intervalle.

20.4 LA DROITE ACHEVÉE $\overline{\mathbb{R}}$

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ appelé droite numérique achevée.

Notation à ne pas confondre avec l'adhérence de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est \mathbb{R} !

§1 Prolongement de la relation \leq , de l'addition, de la multiplication

Définition 29

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation \leq de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty.$$

Définition 30

On prolonge l'addition de \mathbb{R} de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{et} \quad (-\infty) + (+\infty).$$

Définition 31

On prolonge la multiplication de \mathbb{R} de la façon suivante

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nous posons également

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$0 \times (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \times 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0}$$

§2 Borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Théorème 32

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement $\pm\infty$.

Exemples 33

1. Si A est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , sa borne supérieure dans \mathbb{R} et dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncide.
2. Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ est majorée par $+\infty$.
3. Si A est une partie non majorée de \mathbb{R} , elle est toutefois majorée dans $\overline{\mathbb{R}}$ par $+\infty$. On peut alors écrire

$$\sup(A) = +\infty.$$

4. L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Donc la borne supérieure de \emptyset dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $-\infty$.

Théorème 34

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement $\pm\infty$.

§3 Intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 35

Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$, on définit les **intervalles**

$$[a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b \right\}$$

$$]a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b \right\}$$

$$[a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b \right\}$$

$$]a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b \right\}$$

Définition 36

Une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ est convexe lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

Théorème 37

Les parties convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.