Chapter 15 Groupe symétrique

Exercice 15.1 *Exemples dans $\mathcal{S}_7$*

Soient

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

deux permutations de $\{ 1, \dots, 7 \}$.

1. Déterminer σ^{-1} et $\left(\sigma'\right)^{-1}$.

2. Écrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints et écrire σ' sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma'(1) & \sigma'(2) & \sigma'(3) & \sigma'(4) & \sigma'(5) & \sigma'(6) & \sigma'(7) \end{pmatrix}.$$

3. Écrire σ et σ' comme produit de transpositions.

4. Déterminer la signature de σ, σ', $\sigma\sigma'$ et $\sigma^{-1}\sigma'\sigma$.

5. Déterminer $\sigma\sigma'$ et $\sigma'\sigma$.

Exercice 15.2

Calculer la puissance 38-ème de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 15.3

Dans $\mathcal{S}_n$, on considère une permutation σ et un cycle de longueur p

$$c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un cycle de longueur p que l'on précisera.

Exercice 15.4

Soit V_4 la partie de $\mathcal{S}_4$ donnée par

$$V_4 = \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Montrer que V_4 est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$, puis que V_4 est isomorphe au groupe produit $\{ -1, 1 \}^2$.

Exercice 15.5

Soit p et n deux entiers tels que $2 \leq p \leq n$.

Combien y-a-t-il de cycles de longueur p dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 15.6

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0, 1 \}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note

$$P(\sigma) = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

appelée *matrice de permutation* associée à σ.

1. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ P(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n \right\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot\right)$, isomorphe à $\left(\mathcal{S}_n, \circ\right)$.

2. Vérifier

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, P\left(\sigma^{-1}\right) = \left(P(\sigma)\right)^T.$$

3. Quel est le commutant de E dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? C'est-à-dire

$$C(E) = \left\{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in E, AX = XA \right\}.$$