

# Chapter 6 Nombres entiers, itérations

## 6.1 Nombres entiers

### Exercice 6.1

Soit  $(u_n)$  une suite réelle à valeurs positives et  $a > 0$ . On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq au_n.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_n \leq a^n u_0.$$

### Exercice 6.2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n$  positif,  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ . Montrer que la suite est majorée par 4.

### Exercice 6.3

Montrer :  $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nu)| \leq n |\sin(u)|$ .

### Exercice 6.4

1. Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_n = \frac{3n}{3^n}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2 + 1}.$$

### Exercice 6.5

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel  $n$ ,  $9^n - 1$  est multiple de 8.

### Exercice 6.6

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tel que  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ . Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

### Exercice 6.7

Un tournoi de badminton aquatique regroupe  $n$  équipes. Chacune des  $n$  équipes rencontre une fois les  $n-1$  autres. Il n'y a pas de match nul. Montrer que l'on peut classer les  $n$  équipes de telle sorte que l'équipe 1 ait battu l'équipe 2, l'équipe 2 est battu l'équipe 3, ..., l'équipe  $n-1$  ait battu l'équipe  $n$ .

### Exercice 6.8

Soit  $(u_n)$  la suite donnée par  $u_0 = 2, u_1 = 3$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = 2^n + 1$ .

### Exercice 6.9

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_0 = 7, u_1 = -\frac{1}{10}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n.$$

Montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

#### Exercice 6.10

On définit une suite  $(F_n)$  par  $F_0 = 0, F_1 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Calculer  $F_n$  pour  $1 \leq n \leq 10$ .
2. Montrer que l'équation  $x^2 = x + 1$  admet une unique solution positive  $a$  que l'on calculera.
3. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$a^{n-3} < F_n < a^{n-2}.$$

#### Exercice 6.11

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par  $u_0 = 1, u_1 = 1$  et pour tout  $n$  positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n.$$

Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2.$$

#### Exercice 6.12

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $n = 2^p (2q + 1)$ .

## 6.2 Suites définies par une relation de récurrence

#### Exercice 6.13

Soit une suite géométrique  $(u_n)$ . Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme  $u_0$  et raison  $q$ ) de la suite  $(u_n)$  à partir des données suivantes.

- |                                 |  |                                |
|---------------------------------|--|--------------------------------|
| 1. $u_6 = 96$ et $q = 2$ ;      |  | 3. $u_3 = 40$ et $u_7 = 640$ . |
| 2. $u_1 = 72$ et $u_4 = -8/3$ ; |  |                                |

#### Exercice 6.14

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $a_0 = 4$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$$

est une suite géométrique.

2. Calculer  $b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire une expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 6.15

Définissons une suite par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$ .

1. Démontrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n$  est positif. En déduire que pour tout  $n \geq 4$ , on a  $u_n \geq n - 2$ . En déduire la limite de la suite.
2. Définissons maintenant la suite  $v_n = 4u_n - 8n + 24$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$ . Remarquer que  $u_n$  est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité  $u_0 + u_1 + \dots + u_n$  en fonction de l'entier  $n$ .

### Exercice 6.16

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n$  positif,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 6.17

Soit  $p_0 = 10000$  une population initiale de lapins. On suppose que le taux de reproduction annuel est de 3 par couple (tous les individus se reproduisent et font partie d'un unique couple). De plus, à la fin de chaque année, la population est diminuée par la vente d'une quantité fixe de 1000 individus. Déterminer la population au bout de 50 ans.

### Exercice 6.18

Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$ .
2. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ .
3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ .
4. La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?

## 6.3 Entiers relatifs