

Chapter 23 Suites récurrentes

Exercice 23.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
$$x \mapsto x - x^2$$
2. Étudier la suite (u_n) dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Étudier la convergence de (u_n) dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
Dans chacun des cas, si (u_n) admet une limite, on la précisera.

Solution 23.1

1. Étude facile.
2. Si $a = 0$, (u_n) est la suite nulle.
Si $a = 1$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, donc (u_n) est décroissante.
4. Si (u_n) est convergente vers ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - u_n^2 = \ell - \ell^2.$$

Or la suite (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n) , elle converge donc également vers ℓ .

Par unicité de la limite de (u_{n+1}) , on a $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

- Si $a < 0$, (u_n) étant décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = a < 0$. Si (u_n) était convergente, sa limite ℓ vérifierait $\ell \leq u_0 < 0$, d'où la contradiction avec $\ell = 0$. La suite (u_n) étant décroissante et divergente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $a > 1$, $u_1 = u_0(1 - u_0) < 0$ et pour $n \geq 1$, $u_n \leq u_1 < 0$. Un raisonnement analogue au précédent montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $a \in]0, 1[$, sachant que $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$, puisque $u_0 \in]0, 1[$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$. La suite (u_n) est ainsi décroissante, minorée (par 0) donc convergente et sa limite est $\ell = 0$.

Exercice 23.2

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par :
$$\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \frac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}.$$

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n) .

Solution 23.2

1. La fonction f est une fonction polynômiale de degré 2, de coefficient dominant $1 > 0$. Elle est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Notons également que f atteint son minimum en 0 et que $f(0) = \frac{3}{16} > 0$.

2. Supposons que la suite (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, la suite extraite (x_{n+1}) converge également vers ℓ . Or

$$x_{n+1} = \frac{3}{16} + x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{16} + \ell^2.$$

Par unicité de la limite de la suite (x_{n+1}) , on a $\ell = \frac{3}{16} + \ell^2$, c'est-à-dire

$$\ell = \frac{1}{4} \text{ ou } \ell = \frac{3}{4}.$$

3. Puisque f est minorée par $\frac{3}{16}$, on a clairement

$$\forall n \geq 1, x_n \geq \frac{3}{16}.$$

Cette minoration s'étend également au cas $n = 0$.

Montrons par récurrence sur n que $0 < x_{n+1} \leq x_n$.

Pour $n = 0$, nous avons $0 < x_1 = \frac{7}{16} < \frac{1}{2} = x_0$.

De plus, puisque f est croissante sur \mathbb{R}_+ , on a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \implies f(0) \leq f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \implies 0 \leq \frac{3}{16} \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}.$$

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq x_n,$$

la suite (x_n) est décroissante et donc majorée par $x_0 = \frac{1}{2}$.

4. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. On note ℓ sa limite. D'après la question (2), $\ell = \frac{1}{4}$ ou $\ell = \frac{3}{4}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}.$$

Par compatibilité de la limite avec la relation d'ordre \leq , on a $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion

La suite (x_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 23.3

On considère la suite u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0 . En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
3. Étudier la monotonie de u .
4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 23.4

On se propose de définir une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ln u_n.$$

1. Montrer que l'équation $2 + \ln x = x$ admet deux solutions a et b telles que $0 < a < 1 < b$.
2. Démontrer les résultats suivants
 - (a) Si $0 < u_0 < a$, alors on ne peut définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Si $u_0 > a$, alors (u_n) est monotone et converge vers b .

Exercice 23.5

Voici quelques exemples supplémentaires pour s'entraîner

- | | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = \sin^2 x$, | 3. $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $u_0 = 2$, |
| 2. $f(x) = \ln(1+2x)$, | 4. $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$. |

Attention, pour certaines fonctions f , le problème peut être très difficile, la suite (u_n) pouvant avoir un comportement chaotique. C'est le cas par exemple de la suite de Feigenbaum définie par la relation $u_{n+1} = \mu(u_n - u_n^2)$. Le comportement de cette suite est très sensible aux variations u_0 et du paramètre $\mu \in [0, 4]$.

Solution 23.5

Exercice 23.6

On donne la suite (u_n) définie par

$$u_1 = \sqrt{2} \text{ et } u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 23.7

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7}{9}|u_n - \ell|$.
4. Conclure.

Solution 23.7

1. On peut introduire la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$$
montrer que

$$f([0, 4/3]) = [20/27, 4/3] \subset [0, 4/3].$$

Puisque $u_0 \in [0, 4/3]$, la suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et à valeurs dans $[0, 4/3]$.

Variante. On peut également faire une démonstration par récurrence.

2. Supposons (u_n) convergente de limite ℓ , alors nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(4 - u_n^2) = \frac{1}{3}(4 - \ell^2).$$

De plus, la suite (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite (u_n) , elle converge donc également vers ℓ . Par unicité de la limite de la suite (u_{n+1}) , on a

$$\frac{1}{3}(4 - \ell^2) = \ell \quad \text{qui équivaut à} \quad \ell^2 + 3\ell - 4 = 0.$$

On a donc nécessairement $\ell = 1$ ou $\ell = -4$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{4}{3}$. Par compatibilité de la relation \leq avec la limite, on a également $0 \leq \ell \leq 4/3$.

Conclusion

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est nécessairement $\ell = 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - 1| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_n^2 \right| = \frac{1}{3}|u_n^2 - 1| = \frac{1}{3}|u_n + 1||u_n - 1| \leq \frac{1}{3} \frac{7}{3}|u_n - 1| \quad (1)$$

4. Une récurrence classique permet de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{7}{9}\right)^n |u_0 - 1|.$$

Puisque $0 < 7/9 < 1$, le terme de droite a pour limite 0. D'après le théorème d'existence de limite par domination, la suite (u_n) est convergente et a pour limite $\ell = 1$.

Exercice 23.8

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
3. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} |u_{2n} - u_{2n-1}| \text{ et } |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$

5. Que dire des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ? Conclure que (u_n) est convergente.

Solution 23.8

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$, f est décroissante sur $]-\infty, 12]$, $u_0 = 0$ et $f([0, 12]) \subset [0, 12]$, donc (u_n) est bien définie, f étant décroissante sur $[0, 12]$, (u_n) n'est pas monotone (en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de signe opposés).

2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

avec $f \circ f$ croissante sur $[0, 12]$ (car f est décroissante sur $[0, 12]$ et $f([0, 12]) \subset [0, 12]$), ce qui prouve par une récurrence immédiate que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Plus précisément,

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n}$ a le signe de $u_2 - u_0 = u_2 \geq 0$, d'où (u_{2n}) est croissante.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ a le signe de $u_3 - u_1 = \sqrt{12 - u_2} - \sqrt{12} \leq 0$, d'où (u_{2n+1}) est croissante.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} - u_{2n}$ a le signe de $-(u_{2n} - u_{2n-1})$, c'est le signe de $(-1)^{2n} (u_1 - u_0)$, d'où $u_{2n+1} - u_{2n} \geq 0$.

De plus, (u_{2n+1}) est décroissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \sqrt{12 - u_n} - \sqrt{12 - u_{2n-1}} = \frac{u_{2n-1} - u_{2n}}{\sqrt{12 - u_{2n}} + \sqrt{12 - u_{2n-1}}}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_1 \leq 4$, d'où

$$\sqrt{12 - u_n} + \sqrt{12 - u_{2n-1}} \geq 4\sqrt{2} \text{ et } |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} |u_{2n} - u_{2n-1}|.$$

Par un récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} |u_1 - u_0| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n}.$$

5. D'après le théorème d'existence de limite par domination, le résultat précédent prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$ (en effet, $\frac{1}{4\sqrt{2}} \in]0, 1[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} = 0$).

Ainsi (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$, ceci prouve que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites adjacentes. Elles sont donc convergentes de même limite ℓ .

De plus, (u_{2n+1}) et (u_{2n}) étant convergentes de même limite ℓ , on en déduit que (u_n) est convergente de limite ℓ (pourquoi? Justifiez!).

De plus, l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$ donne par passage à la limite (unicité de la limite pour la suite extraite (u_{n+1}))

$$\ell = \sqrt{12 - \ell}$$

On a donc $\ell = 3$.

Finalement, (u_n) est convergente de limite 3.

Exercice 23.9

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq |v_n - 2| \text{ et } |v_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

3. Dédire

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Solution 23.9

C'est un bon problème à travailler!

Exercice 23.10

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u .
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
4. *Première méthode.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.
 - (a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.
 - (b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α .
 - (c) Conclure sur la convergence de la suite u .
 - (d) Écrire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.
5. *Seconde méthode.*
 - (a) Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$
Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α .
 - (b) En déduire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Solution 23.10