Chapter 21 Suites de nombres réels et complexes

Exercice 21.1

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Solution 21.1

Il y a énormément de solutions possibles...

1. $$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \geq k, u_n = \lambda$$
   ou également
   $$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, u_{n+1} = u_n.$$
2. $$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, u_{n+1} \geq u_n.$$
3. $$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } \left|u_n\right| > \varepsilon.$$
4. $$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, u_{n+1} < u_n.$$

Exercice 21.2

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

Solution 21.2

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < 0.$$

Exercice 21.3

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Solution 21.3

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{4n+6} \right| = \frac{1}{4n+6}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, nous avons [1]

$$\frac{1}{4n+6} \leq \varepsilon \qquad \Longleftarrow \qquad n \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, nous savons qu'il existe un entier n_0 tel que

$$n_0 \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{2},$$

(On peut aussi poser explicitement $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{4\varepsilon} \right\rfloor + 235$ par exemple). Donc si $n \geq n_0$, nous aurons $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$.

Par suite, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ nous ayons $\left| u_n - \frac{3}{2} \right| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite (u_n) admet la limite $\frac{1}{2}$.

[1] Noter bien le sens de l'implication ici. Sur cet exemple, nous pouvions mettre une équivalence $\iff$, mais ce n'est pas toujours possible. Heureusement, la définition de limite ne demande qu'une implication!

Exercice 21.4

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Solution 21.4

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-5}{4n^2+6}\right| = \frac{5}{4n^2+6}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon \iff 5 \leq 4n^2\varepsilon + 6\varepsilon \iff \frac{5-6\varepsilon}{4\varepsilon} \leq n^2. \iff \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} \leq n^2.$$

Posons $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq n_0$, alors

$$n^2 \geq \frac{5}{4\varepsilon} \geq \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$$

et alors

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Conclusion

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 21.5

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{2n^2 - 1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ donné.

Solution 21.5

Remarquons que pour $n \geq 1$, on a $u_n \geq 0$.

- Pour $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq 10^{-4} \iff 30000n \leq 2n^2 - 1 \iff 2n^2 - 30000n - 1 \geq 0$$

  Posons $N_1 = 15001$, alors si $n \geq N_1$, on a

$$2n^2 - 30000n - 1 = 2n(n - 15000) - 1 \geq 30001 \geq 0$$

  et donc $\left|u_n\right| \leq 10^{-4}$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq 10^{-4} \iff 3n \leq 2\varepsilon n^2 - \varepsilon \iff 2\varepsilon n^2 - 3n - \varepsilon \geq 0 \iff n(2\varepsilon n - 3) \geq \varepsilon.$$

  Posons $N_2 = \left\lfloor \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$, ainsi, si $n \geq N_2$, on a $2\varepsilon n \geq 3 + \varepsilon$ et $n \geq 1$ donc

$$n(2\varepsilon n - 3) \geq \varepsilon.$$

  et donc $\left|u_n\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 21.6

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Solution 21.6

Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A$. Or

$$u_n \geq A \iff 3n - 17 \geq A \iff n \geq \frac{A+17}{3}.$$

Posons $n_0 = \max\left(0, \lfloor A \rfloor + 7\right)$, alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a

$$n \geq \lfloor A \rfloor + 7 \geq A + 6 \geq \frac{A+17}{3}$$

et donc $u_n \geq A$.

Conclusion

On a montré

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21.7

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Solution 21.7

Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A$.

$$u_n \geq A \iff 3n^2 - 9n + 7 \geq A \iff 3n(n-3) \geq A - 7.$$

Posons $n_0 = \max\left(4, \left\lfloor \frac{A}{3} \right\rfloor\right)$, alors si $n \geq n_0$, on a simultanément

$$3n \geq A \geq A - 7 \text{ et } 3n \geq 0 \text{ et } n - 3 \geq 1$$

et donc

$$3n(n-3) \geq A - 7. \text{ et donc } u_n \geq A.$$

Conclusion

On a montré

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21.8

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers ℓ.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2023\varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \varepsilon$.

4. $\forall \varepsilon \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon$.

5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}$.

Solution 21.8

Exercice 21.9

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Solution 21.9

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \left|u_n - \ell\right| \leq \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, u_n \in \left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right].$$

Or le segment $\left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right]$, de longueur $\frac{1}{2}$ contient au plus un entier. Or il contient l'entier u_{n_0}, et $\left(u_n\right)$ est à valeurs entières, on a donc

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}.$$

La suite $\left(u_n\right)$ est donc stationnaire.

2. *Variante, en utilisant la suite* $\left(u_{n+1}\right)$. Soit $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

La suite $\left(u_{n+1}\right)$, extraite de $\left(u_n\right)$ converge également vers ℓ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_{n+1} - u_n\right) = \ell - \ell = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \varepsilon.$$

Appliquons ce qui précède avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$: il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \frac{1}{4}.$$

Considérons un $n \geq n_0$. La suite (u_n) étant à valeurs entières (il serait temps de s'en servir !), on a $\left|u_{n+1} - u_n\right| \in \mathbb{N}$. Puisque $\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \frac{1}{4}$, on a nécessairement $u_{n+1} - u_n = 0$.

Conclusion : Nous avons déterminé un entier n_0 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_{n+1} = u_n;$$

c'est-à-dire, la suite $\left(u_n\right)$ est stationnaire.

Exercice 21.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Solution 21.10

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots n$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$
c'est-à-dire
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
Or
$$\frac{n^2}{n^2+n} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ et } \frac{n^2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, la suite (a_n) est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

2. Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$,
$$\frac{n}{n^2+2n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots 2n$, on obtient (il y a $2n$ termes)
$$\frac{2n^2}{n^2+2n} \leq b_n \leq \frac{2n^2}{n^2+1}.$$
Or $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$. D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, la suite (b_n) est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 2.$$
Enfin, pour $k \in [\![1, n^2]\!]$,
$$\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n^2} \leq \frac{n}{n^2+k}$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots n^2$, on obtient
$$\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2n} \leq c_n.$$
Or $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$. D'après le théorème d'existence de limite par minoration, la suite (c_n) est divergente et
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty.$$

Exercice 21.11

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Solution 21.11

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{k} \geq 0$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \geq \sqrt{n}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc par comparaison

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

ue On peut aussi remarquer que $\sqrt{k} \geq 1$ et donc $u_n \geq n$.

Exercice 21.12

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Solution 21.12

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leq u_n.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a par comparaison

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 21.13

Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Solution 21.13

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx.$$

En sommant ces inégalités, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n}(kx) \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n(n+1)}{2}x \tag{2}$$

d'où

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{n}{n^2} \leq \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x. \tag{3}$$

Or

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{n}{n^2} = \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x = \frac{x}{2}.$$

D'après le théorème d'existence de limite par comparaison, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}.$$

Exercice 21.14

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Solution 21.14

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

De plus

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$\text{et } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1}$$

marque

Il est intéressant de remarquer que chaque terme de la somme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Néanmoins, cela ne met pas en défaut le résultat du cours sur les sommes de limites. En effet, ici le nombre de termes dans la somme tend également vers l'infini avec n.

Exercice 21.15

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq k u_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Solution 21.15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq k^n u_0$. En effet, par récurrence:

- $u_0 \geq k^0 u_0$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq k^n u_0 \implies u_{n+1} \geq k u_n \geq k^{n+1} u_0$.

Or $k > 1$ et $u_0 > 0$, donc

$$\lim_{n \to \infty} k^n u_0 = +\infty.$$

Par comparaison, on a donc

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 21.16

Soit (u_n) une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 21.16

Par récurrence sur $n \in [\![\alpha, +\infty[\![$, on obtient

$$\forall n \geq \alpha, |u_n| \leq k^{n-\alpha}|u_\alpha| = k^n \frac{|u_\alpha|}{k^\alpha}.$$

Or $0 < k < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ puis

$$\lim_{n\to\infty} k^n \frac{|u_\alpha|}{k^\alpha} = 0.$$

D'après le théorème d'existence de limite par domination, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Exercice 21.17

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 21.17

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\ell| \text{ et } |\ell| < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|\ell| < k < 1$ (par exemple $k = (|\ell| + 1)/2$). On a $k - |\ell| > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \ell$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq k - |\ell|.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on peut affirmer pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \cancel{|\ell|} \leq k - \cancel{|\ell|}.$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+1}| \leq k|u_n|.$$

Par une récurrence immédiate, on a pour $n \geq n_0$,

$$|u_n| \leq k^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$

Et puisque $k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a par le théorème d'existence de limite par domination

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Exercice 21.18

Soit u et v deux suites du segment $[0,1]$ telles que

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrer

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Solution 21.18

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [0,1]$ donc

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \leq v_n \leq 1$$

Or $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$, donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1. \text{ et } \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Exercice 21.19 (****)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}.$$

Solution 21.19

Le numérateur et dénominateur sont les sommes de n termes consécutifs de suites arithmétiques:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n\times 2n}{2} \text{ et } 1+2+\cdots+n = \frac{n\times(n+1)}{2}$$

On a donc pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2n^2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Exercice 21.20

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;
5. $u_n = (-1)^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

Solution 21.20

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'existence de limite par domination, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n = \frac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n = \frac{n^2}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + (0.7)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} + (0.7)^n.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} 0.7^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} + (0.7)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} (0.7)^n = 1.$$

3. On pour $n \geq 1$,

$$u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1 = n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3^n - n^2 2^n = 3^n\left(1 + n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

On $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(3/2)^n} = 0$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} 3^n - n^2 2^n = +\infty.$$

5. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite (cf. le cours).

6. Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = \frac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1/n}\right)} = \frac{n}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1/n}}.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1/n} = 0.$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = +\infty.$$

Exercice 21.21

Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Solution 21.21

On note q la raison de la suite $\left(u_n\right)$. Nécessairement, $q \neq 1$, sinon $\left(u_n\right)$ est constante et $\lim_{n\to\infty} u_0 + \ldots u_n = +\infty$.

On a alors dans ce cas

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{90}{1-q} + \frac{90}{1-q} q^{n+1}.$$

Cette suite admet une limite finie si, et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{90}{1-q}.$$

On en déduit que $\frac{90}{1-q} = 150$, d'où $q = \dfrac{2}{5}$.

Exercice 21.22

On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Solution 21.22

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln u_{n+1}^2 - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2u_n - \ln 2 \\ = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln u_n\right) - \ln 2 = \frac{1}{2}\left(\ln u_n - \ln 2\right) = \frac{1}{2} v_n. \end{aligned}$$

La suite $\left(v_n\right)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \frac{1}{2^n} = \dfrac{-\ln 2}{2^n}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ De plus $\ln u_n = v_n + \ln 2$, donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n + \ln 2} = \lim_{n\to\infty} 2e^{v_n} = 2.$$

Exercice 21.23

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$.
2. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$.
3. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$.
4. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^\star)^2$.
5. $u_n = \dfrac{5n^2+\sin n}{3(n+2)^2\cos(\frac{n\pi}{5})}$.
6. $u_n = \sqrt{n+\cos(n)}-\sqrt{n}$.

Exercice 21.24 *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$ entraîne $|u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n>n_0$ on a
   $$|a_n-\ell| \leq \frac{|u_1-\ell|+|u_2-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n}+\frac{|u_{n_0+1}-\ell|+\cdots+|u_n-\ell|}{n}.$$
   (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1>n_0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n>n_1$ entraîne
   $$\frac{|u_1-\ell|+|u_2-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$
   (d) Conclure.
2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
   On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
   On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n=p^3 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
   (c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
   Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.

Solution 21.24 *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*

Exercice 21.25

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell$, avec $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

   (a) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ avec $\ell \in [0, +\infty]$, alors

   $$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \ell.$$

   (b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

Solution 21.25

1. Césaro.

2. (a) ln

   (b) $u_n = a$ si n pair, $u_n = b$ si n impair.

Exercice 21.26

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n) / n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Solution 21.26

On a $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$: la suite (u_n) n'est pas décroissante. On peut même montrer qu'elle n'est pas décroissante à partir d'un certain rang: pour $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_{2k-1} = 0 < u_{2k} = \frac{1}{k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq 1 + (-1)^n \leq 2$ et donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}.$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, le théorème d'existence de limite par encadrement donne

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 21.27

Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est convergente.

Solution 21.27

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

2. Pour $n \geq 2$. On peut majorer les termes du produit (à partir du second) par 2

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n \leq 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 = 2^{n-1}.$$

Le résultat restant vrai pour $n = 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2.$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

marque On peut montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = e - 1$.

Exercice 21.28

Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.
3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Solution 21.28

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)}$$
Puisque la suite (u_n) est croissante, on a
$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1}$$
et donc
$$u_1 + u_2 + \ldots u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = nu_{n+1}.$$
On a donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est croissante.

2. La suite $\left(u_n\right)$ est croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$, on a donc
$$\ell = \sup \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$
En particulier, (u_n) est majorée par ℓ:
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell.$$
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell \leq \frac{1}{n} n\ell = \ell.$$
La suite $\left(v_n\right)$ est donc majorée par ℓ et croissante, elle est donc convergente et sa limite $L = \sup \left\{ v_n \mid n \in \mathbb{N}^\star \right\}$ vérifie donc $L \leq \ell$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$
Or la suite $\left(u_n\right)$ est croissante, donc si $k \geq n+1$, on a $u_k \geq u_n$. On en déduit l'inégalité
$$\sum_{k=1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_n = nv_n + nu_n.$$
En divisant cette relation par $2n$, on obtient
$$v_{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{2n} u_k}{2n} \geq \frac{v_n + u_n}{2}.$$

4. Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes de limite respective ℓ et L. De plus, (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), elle converge donc également vers L. Enfin, on a la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Par compatibilité de la relation d'ordre avec le passage à la limite, on a

$$L = \lim_{n\to\infty} v_{2n} \geq \frac{\ell + L}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Autrement dit, $L \geq \ell$.

Exercice 21.29

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 21.30

Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Solution 21.30

Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0 \\
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \left(u_n + \frac{1}{3n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\
&= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{2 - 2n}{3n^2(n+1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

Exercice 21.31

Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Solution 21.31

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0.$$

Ainsi (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suite (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

On peut alors montrer directement que (w_n) est convergente et a même limite que (u_n) puisque $\frac{1}{n \cdot n!} \to 0$. On peut également montrer que ces deux suites sont adjacentes. En effet,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n \cdot n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc décroissante. De plus, la suite (u_n) est croissante et

$$w_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suite (u_n) et (w_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

Exercice 21.32

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Solution 21.32

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3}.$$

La suite $(b_n - a_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{3^n}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. De plus,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3}.$$

Ces deux quantité sont donc de signe opposé ; ainsi parmi les suites (a_n) et (b_n), l'une est croissante et l'autre décroissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

2. On a

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} = b_n + a_n.$$

Ainsi, la suite $(a_n + b_n)$ est constante, d'où

$$a_n + b_n = a_0 + b_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 + b_0.$$

De plus, les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes, elles sont convergentes est ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc également $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 2\ell$. Par unicité de la limite de la suite $(a_n + b_n)$, on a $a_0 + b_0 = 2\ell$.

Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent donc vers $\ell = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Exercice 21.33

Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}; \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.
4. Calculer u_nv_n. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Solution 21.33

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{(v_n-u_n)^2}{2(v_n+u_n)}.$$
Or, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Le calcul précédent justifie alors que $v_n > u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le résultat restant vrai pour $n = 0$ par hypothèse sur $u_0 = a$ et $v_0 = b$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n > u_n > 0$ donc $v_n - u_n > 0$ et $0 < \frac{v_n-u_n}{v_n+u_n} < 1$, d'où
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{v_n-u_n}{v_n+u_n} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$
et
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n - u_n^2 - u_nv_n}{u_n+v_n} = u_n\frac{v_n-u_n}{v_n+u_n} > 0$$
La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante et la suite (u_n) est (strictement) croissante.

   Par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|v_0 - u_0|$. En effet, on a immédiatement $|v_0 - u_0| \leq 1.|v_0 - u_0|$ et pour $n \in \mathbb{N}$, si $|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|v_0 - u_0|$, alors
$$|v_{n+1} - u_{n+1}| < \frac{1}{2}|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|v_0 - u_0| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|v_0 - u_0|.$$
D'après le théorème d'existence de limite par domination, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$. La suite (u_nv_n) est donc constante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0 = ab.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \ell^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \lim_{n\to+\infty} ab = ab.$$
Par unicité de la limite de la suite (u_nv_n), on a donc $\ell^2 = ab$.

   Finalement, la relation $u_n > 0$ impose $\ell \geq 0$ d'où $\ell = \sqrt{ab}$.

Exercice 21.34 *Suites de Cauchy*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \left(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \implies \left| u_n - u_p \right| \leq \varepsilon \right). \tag{1}$$

1. Montrer que la suite est bornée.

2. Montrer qu'elle est convergente.

Solution 21.34 *Suites de Cauchy*

Exercice 21.35

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{3p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution 21.35

Exercice 21.36

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

arque Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Solution 21.36

1. Si $0 < x < y$, on a clairement $x = \sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\frac{x+y}{2} < y$. De plus,

$$\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \iff 4xy < x^2 + 2xy + y^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 > 0 \iff (x-y)^2 > 0;$$

cette dernière assertion étant vraie puisque $x \neq y$. On a donc bien le résultat demandé.

2. Montrons par récurrence que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante, la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante, avec pour tout n, $u_n < v_n$.

On a $u_0 = a$, $v_0 = b$ et comme $0 < a < b$, on a bien $u_0 < v_0$.

Supposons la suite u croissante jusqu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, la suite v décroissante jusqu'à ce même rang, avec $u_n < v_n$.

Le résultat de la question 1, avec $x = u_n$ et $y = v_n$ donne alors (puisque $u_n > 0$ car plus grand que u_0):

$$u_n < \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1} < v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n.$$

On a donc tous les résultats voulus au rang $n+1$, on conclut par le principe de récurrence.

Conclusion

u est croissante, v est décroissante et pour tout n, $u_n < v_n$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 < u_n < v_n < v_0$. La suite u est donc croissante et majorée par v_0 et la suite v est décroissante et minorée par u_0 ; elles sont donc convergentes.

4. Notons ℓ_u et ℓ_v les limites de u et v. La suite (v_{n+1}) étant extraite de la suite v, on a

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \ell_v \qquad \text{mais aussi} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}.$$

Par unicité de la limite, on a $\ell_v = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$, c'est-à-dire $\ell_u = \ell_v$.

Exercice 21.37

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \sin^2\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

Solution 21.37

Exercice 21.38

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Solution 21.38

Supposons la suite $(\tan(n))$ convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)},$$
c'est-à-dire
$$\tan(n+1)(1 - \tan(n)\tan(1)) = \tan(n) + \tan(1).$$
Or la suite $(\tan(n+1))$ est extraite de la suite $(\tan(n))$ et donc converge également vers ℓ. Les théorèmes opératoires sur les limites montrent alors que
$$\lim_{n\to\infty} \tan(n+1)(1 - \tan(n)\tan(1)) = \ell(1 - \ell\tan(1)) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \tan(n) + \tan(1) = \ell + \tan(1).$$
D'où, par unicité de la limite
$$\ell(1 - \ell\tan(1)) = \ell - \tan(1).$$
soit encore, $\ell - \ell^2\tan(1) = \ell + \tan(1)$ et puisque $\tan(1) \neq 0$,
$$\ell^2 = -1;$$
ce qui est absurde.

Conclusion : La suite $(\tan(n))$ n'est pas convergente.

Exercice 21.39

Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Solution 21.39

1. Soit $n \geq 1$, on a

$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, d'où

$$v_{2n} - v_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. La suite (v_n) est croissante puisque $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} > 0$, elle admet donc une limite ℓ. Puisque la suite (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), elle tend également vers ℓ. Dès lors, si $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} v_{2n} - v_n = \ell - \ell = 0.$$

Donc d'après la question précédente, on a $0 \geq \frac{1}{2}$. Cette contradiction montre que $\ell \notin \mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty.$$

Exercice 21.40 lim sup *et* lim inf

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = \inf \left\{ u_k \mid k \geq n \right\} \qquad \text{et} \qquad b_n = \sup \left\{ u_k \mid k \geq n \right\}$$

1. Montrer que les suite (a_n) et (b_n) convergent. On note $\liminf u_n$ la limite de (a_n) et $\limsup u_n$ la limite de (b_n).

2. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n), alors

$$\liminf u_n \leq a \leq \limsup u_n.$$

3. Montrer que $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si, et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$.

4. Montrer que cette notion coïncide avec

$$\limsup u_n = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n \right\}.$$

Solution 21.40 lim sup *et* lim inf

Exercice 21.41

Soit (x_n) une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de (x_n) convergeant vers des limites distinctes.

Solution 21.41

Exercice 21.42

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Solution 21.42

$i \implies ii$. On suppose que M est la borne supérieure de A ; c'est-à-dire le plus petit des majorants de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $M - \frac{1}{n+1} < M$, donc $M - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A. Il existe donc un élément $a_n \in A$ tel que

$$a_n > M - \frac{1}{n+1}.$$

De plus, M est un majorant, on a

$$a_n \leq M.$$

Or $\lim_{n\to\infty} M - 1/n + 1 = M$ et

$$M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant vers M.

$ii \implies iii$. Soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de A convergeant vers M.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \max\left\{ a_0, a_1, \dots, a_n \right\}$. Or

$$\left\{ a_0, a_1, \dots, a_n \right\} \subset \left\{ a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \right\} \subset A$$

et donc

$$b_n \leq b_{n+1} \leq M.$$

puisque M est un majorant de A.

Enfin, par construction de b_n, on a $b_n \geq a_n$. Puisque $\left(a_n\right)$ converge vers M, l'encadrement

$$a_n \leq b_n \leq M$$

montre que $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

$iii \implies i$.

Supposons qu'il existe une suite croissante d'éléments de A, notée (b_n), convergente vers M. Puisque M est un majorant de A, il reste à montrer que c'est le plus petit.

Soit M' un autre majorant de A, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq M'$$

Puisque la suite (b_n) est convergente de limite M, on a donc

$$M \leq M'.$$

M est donc le plus petit des majorant de A, c'est-à-dire $M = \sup A$.

Exercice 21.43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence $\overline{U}$ de U.

Solution 21.43

Exercice 21.44

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence A de la suite (u_n) est fermé.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq n \}$. Montrer que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

3. Montrer que $\overline{U} = A \cup U$.

Solution 21.44