Chapter 23 Suites récurrentes

Exercice 23.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.

2. Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.

3. Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

4. Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Exercice 23.2

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.

2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?

3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?

4. Discuter de la convergence de (x_n).

Exercice 23.3

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0. En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

3. Étudier la monotonie de u.

4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 23.4

On se propose de définir une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ln u_n.$$

1. Montrer que l'équation $2 + \ln x = x$ admet deux solutions a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

2. Démontrer les résultats suivants

(a) Si $0 < u_0 < a$, alors on ne peut définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $u_0 > a$, alors (u_n) est monotone et converge vers b.

Exercice 23.5

Voici quelques exemples supplémentaires pour s'entrainer

1. $f(x) = \sin^2 x$,

2. $f(x) = \ln(1+2x)$,

3. $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $u_0 = 2$,

4. $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

Attention, pour certaines fonctions f, le problème peut être très difficile, la suite (u_n) pouvant avoir un comportement chaotique. C'est le cas par exemple de la suite de Feigenbaum définie par la relation $u_{n+1} = \mu(u_n - u_n^2)$. Le comportement de cette suite est très sensible aux variations u_0 et du paramètre $\mu \in [0, 4]$.

Exercice 23.6

On donne la suite (u_n) définie par

$$u_1 = \sqrt{2} \text{ et } u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 23.7

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7}{9}|u_n - \ell|$.

4. Conclure.

Exercice 23.8

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?

2. Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

3. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_{2n} - u_{2n-1}| \text{ et } |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$

5. Que dire des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})? Conclure que (u_n) est convergente.

Exercice 23.9

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - 1\right| \leq \left|v_n - 2\right| \text{ et } \left|v_{n+1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

3. Déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 23.10

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.

(c) Conclure sur la convergence de la suite u.

(d) Écrire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode.*

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α.

(b) En déduire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.