Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le lundi 8 janvier 2024

Exercice 1

À tout réel α, on associe la suite $\big(S_n(\alpha)\big)_{n\geq 1}$ de terme général

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que $\big(S_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Dans cette question, $\alpha = 1$ et on pose pour simplifier $S_n = S_n(1)$.
   (a) En minorant $S_{2n} - S_n$, montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.
   (b) Montrer que, pour $x \geq 0$,
   $$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
   (c) On pose pour $n \geq 1$,
   $$a_n = S_n - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad b_n = S_n - \ln(n+1).$$
   Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   (d) La limite commune de (a_n) et (b_n) est notée γ et s'appelle la constante d'Euler. Justifier que $\gamma > 0$, puis donner une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.
   (e) En déduire
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$
3. Dans cette question, $\alpha = 2$ et on pose pour simplifier $S_n = S_n(2)$. On définit pour $n \geq 1$, $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Déterminer la nature de $\big(S_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha \geq 2$.

Exercice 2 *EML 1995*

Soit

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in\,]0,+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Étudier les variations de f', puis celle de f.
   (c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,+\infty[$.
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in\,]e-1,+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in\,]0, e-1[$.
   - Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.