Chapter 37 Sommes et projecteurs

37.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

37.1.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Exercice 37.1

Soient E un espace vectoriel et A, B, C trois sous-espace vectoriel tels que

$$\begin{align} A \cap B &= A \cap C \tag{1} \\ A + B &= A + C \tag{2} \\ B &\subset C. \tag{3} \end{align}$$

Montrer que $B = C$.

Exercice 37.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathbb{V}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. On ordonne $\mathbb{V}(E)$ par l'inclusion.

1. Vérifier que $\mathbb{V}(E)$ a un plus petit élément et un plus grand élément que l'on précisera.

2. Soit $(A, B) \in \mathbb{V}(E)^2$. Montrer que $\{ A, B \}$ admet, dans $(\mathbb{V}(E), \subset)$, une borne inférieure et une borne supérieure, qu'on déterminera.

37.1.2 Sommes directes

37.1.3 Sous-espaces supplémentaires

Exercice 37.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-espaces vectoriels de E, C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.

Montrer $A + B = A \oplus C$.

Exercice 37.4

Soit $u, w \in \mathbb{R}^2$ les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition de somme directe, montrer que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{ u \} \oplus \operatorname{Vect}\{ w \}$.

Exercice 37.6

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - y + z = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{ (t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Exercice 37.8

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{ P \in E \mid P(0) = P(1) = 0 \} \qquad\qquad F_2 = \mathbb{R}_1[X]$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 37.12

Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $V = \{ f \in E \mid f(2) = f(3) \}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $W = \operatorname{Vect}\left\{ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \right\}$ est un supplémentaire de V dans E.

Exercice 37.15

Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est réduite à la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. En déduire $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 37.16

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles,

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0 \right\}$$
$$\text{et } G = \left\{ x \mapsto a + bx + cx^2 \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 37.17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, v_0 un vecteur de E, V un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace affine passant par v_0 de **direction** V (ou dirigé par V) l'ensemble de vecteurs de E tels que $v - v_0$ appartienne à V.

Autrement dit, $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de E si, et seulement s'il existe un vecteur v_0 appartenant à E tel que

$$\mathcal{V} = \left\{ w \in E \mid \exists v \in V, w = v_0 + v \right\}.$$

On le note $\mathcal{V} = v_0 + V$.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de E.

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ où $I =]0, +\infty[$.

$$(e^x - 1)\, y' + (e^x + 1)\, y = 3 + 2e^x. \tag{E}$$

   (a) Résoudre (E).
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E, v_0 et w_0 deux vecteurs de E. On considère les deux sous-espaces affines $\mathcal{V} = v_0 + V$ et $\mathcal{W} = w_0 + W$.

3. Prouver que si $\mathcal{V}$ est inclus dans $\mathcal{W}$, alors V est inclus dans W.

4. En déduire qu'un sous-espace affine de E n'admet qu'une seule direction.

5. Prouver que si v_1 est un vecteur de $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{V} = v_1 + V$.

6. Démontrer que $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ n'est pas vide si, et seulement si $w_0 - v_0$ appartient à $V + W$. Prouver que dans ce cas $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ est un sous-espace affine dirigé par $V \cap W$.

37.2 Projecteurs

37.2.1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

Exemples

Exercice 37.18

Soit p un projecteur de E.
Montrer que si le scalaire λ est distinct de 0 et 1, alors $p - \lambda \operatorname{Id}_E$ est un automorphisme, et expliciter son inverse.

Exercice 37.20

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(1, 2, 0)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

2. Donner l'expression de la projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement $\mathcal{D}$.

Exercice 37.22

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - z + 2t = 0 \right\} \qquad G = \operatorname{Vect}(e) \text{ où } e = (1, 1, 1, 1).$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires.
- Soit p la projection sur F parallèlement à G, déterminer $p(u)$ pour tout u de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 37.23

Soit

$$F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \} \qquad \text{et} \qquad G = \operatorname{Vect}\{ X \}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner l'image de $X^2 - 3X + 1$ par le projecteur p sur F parallèlement à G.

3. Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, donner l'image de $X^i - 1$ par le projecteur p sur F parallèlement à G.

37.2.2 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

Exercice 37.25

Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Dans ce cas, montrer

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

Exercice 37.29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$ vérifiant $(f - a\,\mathrm{Id})(f - b\,\mathrm{Id}) = 0$ où a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

1. Établir l'existence de λ et μ non nuls tels que $\lambda(f - a\,\mathrm{Id})$ et $\mu(f - b\,\mathrm{Id})$ soient des projecteurs.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f - b\,\mathrm{Id}) = \ker(f - a\,\mathrm{Id})$.
3. Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in \mathbf{GL}(E)$, et calculer f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 37.30

Soit dans $E = \mathbb{R}^3$ un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

Montrer que l'application φ qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur

$$x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$

est un projecteur.

Préciser son image et son noyau.

Exercice 37.31

Soit

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) \end{array}.$$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de p.
3. Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ suivant la direction $\ker p$.

37.3 Symétries

37.3.1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

Exercice 37.34

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \operatorname{Vect}\{\,(1,0,0), (1,1,1)\,\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \operatorname{Vect}\{\,(1,2,0)\,\}.$$

Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 37.37

Soit

$$F = \operatorname{Vect}\left\{ X^2+2, 1 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \operatorname{Vect}\left\{ (X+1)^2 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner l'image de $A(X) = 2X^2 + 3X + 1$ par le projecteur p sur F parallèlement à G.

3. Donner l'image de $A(X) = 2X^2 + 3X + 1$ par la symétrie s par rapport à F dans la direction G.

37.3.2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

Exercice 37.38

Soit $n \geq 2$ et soit $s : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P''(0)X^2 - 2P(0) \end{array}$.

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que s est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

37.4 Sommes et applications linéaires

Indication : On pourra établir que

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

Exercice 37.41

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$ et que $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.

2. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \ker v$.

3. Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u \iff \ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0 \}$.

4. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v \iff \ker v + \operatorname{Im} u = F$.

Exercice 37.43

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On pose $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = f\left(\ker f^2\right)$.

2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{ 0 \}$.

3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f + \ker f = E$.

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau et l'image de f soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 37.46

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E, P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

1. Montrer que $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

2. Montrer que si P divise Q, alors

$$\ker P(f) \subset \ker Q(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f).$$

3. Montrer que si D est le PGCD de P et Q, alors

$$\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker P(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f).$$

Exercice 37.48

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathbf{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k.$$

2. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\ker u^d = \ker u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \ker u^{k+1} = \ker u^k.$$

3. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a

$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \iff \ker u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$

4. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\operatorname{Im} u^d = \operatorname{Im} u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k.$$

5. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a

$$\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p+1} \iff E = \ker u^p + \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$

6. On suppose les deux suites $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ stationnaires. Soit p le plus petit entier strictement positif tel que $\ker u^p = \ker u^{p+1}$. Soit q le plus petit entier strictement positif tel que $\operatorname{Im} u^q = \operatorname{Im} u^{q+1}$.

Montrer que dans ces condition l'on a $p = q$ et

$$E = \ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p.$$

37.4.1 Caractérisation universelle

37.4.2 Forme géométrique du théorème du rang

Exercice 37.50

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{ f \in E \mid f(1) = f(2) = 0 \}.$$

1. Soit
$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (f(1), f(2)) \end{array}.$$
Montrer que $\varphi \in \mathbf{L}(E, \mathbb{R}^2)$. Comment interpréter F ? φ est-elle surjective ?

2. Trouver un sous-espace vectoriel G de E sur lequel φ induit un isomorphisme entre G et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 37.51 *X MP*

Soit E un espace vectoriel.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$: $E = S \oplus \operatorname{Im} u$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in S^2$ tel que $x = y + u(z)$.
   On pose $z = v(x)$ et $y = w(x)$.
   (b) Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.
   (c) Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.

2. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe v dans $\mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?

3. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ w + w \circ u = u$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?

Exercice 37.52

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F, G deux sous-espace vectoriel de E. On note

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathbf{L}(E) \mid \ker f = F \text{ et } \operatorname{Im} f = G \};$$

et on suppose $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{H}$ induit sur G un automorphisme.

2. Montrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe.

Exercice 37.53

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que

$$f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0 \qquad\qquad (\text{ici } f^2 = f \circ f).$$

Montrer

$$\ker\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right) = E.$$

Exercice 37.54

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbf{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.
2. Montrer que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.
3. En déduire que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.

Affinités vectorielles