Chapter 4 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 4.1

Résoudre

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Solution 4.1

Cette équation est définie pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{ -1, -1/2 \}$.

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\iff \ln|x+1| \leq \ln|2x+1| + \ln 2 \\
&\iff \ln|x+1| \leq \ln(2|2x+1|) \\
&\iff |x+1| \leq 2|2x+1| && \text{car ln est strictement croissante} \\
&\iff (x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2 \\
&\iff 15x^2 + 14x + 3 \geq 0 && \text{en développant.}
\end{aligned}$$

Le polynôme $15X^2 + 14X + 3$ a pour discriminant 16 et pour racines $-3/5$ et $-1/3$. Son coefficient dominant étant positif, il est à valeurs positive «à l'exterieur des racines».

Conclusion

En prenant en considération l'ensemble de définition D, l'inéquation

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

a pour ensemble de solutions

$$S =]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

Exercice 4.2

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Solution 4.2

Exercice 4.3

Déterminer le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation

$$x \ln(x) = 1.$$

Solution 4.3

Exercice 4.4

Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1| - 3\ln(x^2+1)}$.

Solution 4.4

1. $e^{3\ln 5} = 5^3 = 125$.
2. $e^{-2\ln 3} = 3^{-2} = 1/9$.
3. Pour $x > 0$, $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)} = 2\dfrac{x}{2} - 2\dfrac{x}{2} = 0$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x > 0$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Pour $x \neq 1$, $e^{2\ln|x-1| - 3\ln(x^2+1)} = \dfrac{(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^3}$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x \neq 1$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.5

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Solution 4.5

Exercice 4.6

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation

$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{4.1}$$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.

Solution 4.6

Compte tenu du fait que l'on a $e^{2x} = (e^x)^2$ et que e^x est positif quel que soit x, il apparait que l'équation proposée admet autant de solutions que le système suivant:

$$\begin{cases} e^x = u \\ f(u) = u^2 - 4mu + 2m + 2 = 0 \\ u > 0. \end{cases}$$

Pour que l'équation $f(u) = 0$ ait des racines, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} \Delta &= 16m^2 - 8m - 2 = 8(2m^2 - m - 1) \\ &= 8(m-1)(2m+1) \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$m \leq -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m \geq 1.$$

Comme, d'autre part, le produit et la somme des racines, u_1 et u_2, de cette équation (en supposant la condition précédente remplie) ont respectivement pour valeur $P = 2(m+1)$ et $S = 4m$, on voit immédiatement apparaître les conclusions suivantes, relatives à l'équation proposée:

- Pour $m < -1$, on a $u_1 < 0 < u_2$ (quitte à échanger u_1 et u_2) ; seule u_2 est acceptable et donne $e^x = u_2$, d'où $x = \ln u_2$.
- Pour $-1 \leq m < 1$, l'équation $f(u) = 0$ a deux racines négatives (si $-1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$) ou n'en a aucune (si $-\frac{1}{2} < m < 1$); dans les deux cas, l'équation proposée n'a pas de solution.
- Pour $m > 1$, on a $0 < u_1 < u_2$; donc deux valeurs pour x sont solutions de l'équation proposée, à savoir $x_1 = \ln u_1$ et $x_2 = \ln u_2$.
- Lorsque $m = 1$, on a $u_1 = u_2 = 2$ et l'équation proposée admet une seule soltion : $x = \ln 2$.

Exercice 4.7

Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Solution 4.7

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \iff \left(x^2 - x\right) \ln a \leq x - 1 \iff (\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1 \leq 0.$$

- Si $a = 1$, $(E) \iff x \geq 1$. L'ensemble solution de (E) est alors $\mathscr{S} = [1, +\infty[$.
- Si $a \neq 1$, le trinôme du second degré $(\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1$ a pour discriminant $(\ln a)^2 + 2\ln a + 1 - 4\ln a = (\ln a)^2 - 2\ln a + 1 = (\ln a - 1)^2$; ses racines sont donc

$$\frac{\ln a + 1 - \ln a + 1}{2\ln a} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln a + 1 + \ln a - 1}{2\ln a} = 1.$$

  - Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S} =]-\infty, 1/\ln a] \cup [1, +\infty[$.
  - Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S} = [1, 1/\ln a]$ si $1 < a < e$ et $\mathscr{S} = [1/\ln a, 1]$ si $a > e$.

Exercice 4.8

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\varphi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution 4.8

1. En fait, c'est une question de cours!!!
   Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\varphi_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est dérivable et on a

$$\varphi_a'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

qui est du signe de $\ln a$. Nous distinguons alors trois cas.

- Si $a = 1$, φ_a est constante égale à 1.
- Si $a > 1$, φ_a est strictement croissante et

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi_a'(x)$		$+$	$\ln a$	$+$	
$\varphi_a(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$, φ_a est strictement décroissante et

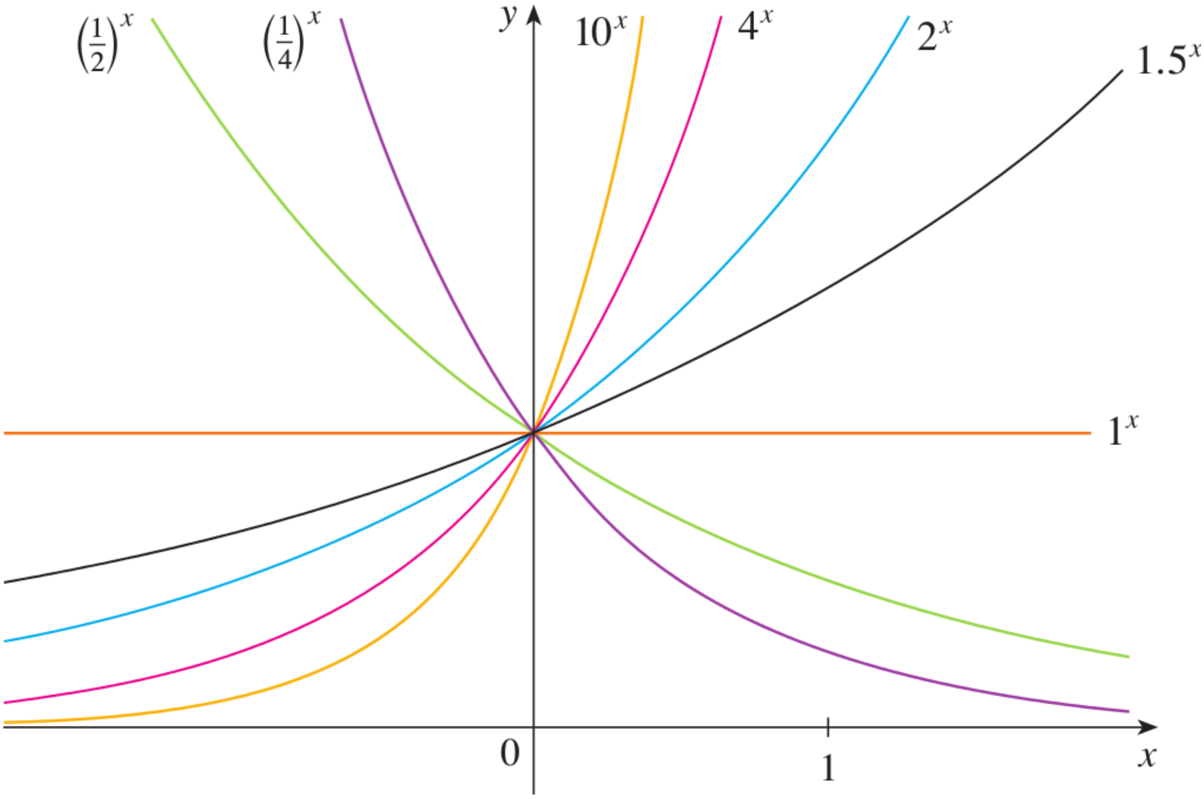
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0.$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi_a'(x)$		$-$	$\ln a$	$-$	
$\varphi_a(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0



2. L'étude précédente montre que l'application $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; l'application f est donc injective. Or $f(1) = 2^1 + 3^1 = 5$, donc

$$2^x + 3^x = 5 \iff f(x) = 5 \iff f(x) = f(1) \iff x = 1.$$

Conclusion

L'équation $2^x + 3^x = 1$ admet pour ensemble solution $\mathscr{S} = \{ 1 \}$.

Exercice 4.9

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Solution 4.9

1. f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

   variations:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$-\infty$

2. Puisque ln est injective,

$$a^b = b^a \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \iff f(a) = f(b).$$

   D'après le tableau de variation, f ne peut prendre qu'au plus deux fois la même valeur et, si c'est le cas, une fois sur $]1, e[$ et l'autre fois sur $]e, +\infty[$.

   Nécessairement $1 < a < e < b$ et comme a est entiers, il ne peut valoir que 2.

   Reste à trouver b tel que $f(b) = \ln(2)/2$: on trouve facilement $b = 4$.

Exercice 4.10

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \leq 2^x$.

2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.

3. $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$.

Solution 4.10

1. L'inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Puisque ln est strictement croissante

$$3^x \leq 2^x \iff x \ln 3 \leq x \ln 2 \iff x(\ln 3 - \ln 2) \leq 0 \iff x \leq 0.$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]-\infty, 0]$.

2. L'inéquation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on a $2^x + 1 \geq 1$). L'application $x \mapsto 2^x = e^{x \ln 2}$ est strictement croissante car $\ln 2 > 0$. D'où

$$\begin{aligned} \log_2(2^x + 1) < x + 1 \iff 2^x + 1 < 2^{x+1} \iff 1 < 2 \times 2^x - 2^x \\ \iff 1 < 2^x \iff 0 < x \ln 2 \iff 0 < x. \end{aligned}$$

L'inéquation $\log_2(2^x + 1) < x + 1$ a pour ensemble solution $\mathcal{S} =]0, +\infty[$.

3. L'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est définie pour $x > 0$ ($x^{(x^2)} = \exp(x^2 \ln x)$). On a alors,

$$\begin{aligned} x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x &\iff x^2 \ln x \leq x \ln x^2 && \because \text{ln est strictement croissante} \\ &\iff x^2 \ln x \leq 2x \ln x \\ &\iff x \ln x \leq 2 \ln x && \because x > 0 \\ &\iff (x-2) \ln x \leq 0. \end{aligned}$$

Résumons à l'aide d'un tableau de signes :

x	0		1		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\ln x$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est donc $\mathcal{S} = [1, 2]$.

Exercice 4.11

Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.
2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

Solution 4.11

1. On a $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, $7^6 = 117649$, $7^7 = 823543$,...

   Ainsi,
   $$50^0 < 7^p < 50^1 \iff 1 < 7^p < 50 \iff p \in \{ 0, 1, 2 \}$$
   d'où $I_0 = 3$.

   De même,
   $$50^1 < 7^p < 50^2 \iff 50 < 7^p < 2500 \iff p \in \{ 3, 4 \}$$
   d'où $I_1 = 2$.

   Enfin,
   $$50^2 < 7^p < 50^3 \iff 2500 < 7^p < 125000 \iff p \in \{ 5, 6 \}$$
   d'où $I_2 = 2$.

2. Supposons $50^n < 7^p < 50^{n+1}$. La fonction ln est strictement croissante, on a donc
   $$n \ln 50 < p \ln 7 < (n+1) \ln 50$$
   d'où
   $$n\frac{\ln 50}{\ln 7} < p < (n+1)\frac{\ln 50}{\ln 7}$$
   Or l'intervalle $\left[n\frac{\ln 50}{\ln 7}, (n+1)\frac{\ln 50}{\ln 7}\right]$ a pour longueur $\frac{\ln 50}{\ln 7}$ et $2 < \frac{\ln 50}{\ln 7} < 3$; il contient donc 2 ou 3 entiers.
   C'est-à-dire $I_n = 2$ ou $I_n = 3$.

Exercice 4.12

Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Solution 4.12

Cette équation est définie pour $x \in]0, +\infty[$.

On peut penser à passer sous forme exponentielle, mais cela ne simplifie par grand chose. Ou alors faire un changement d'inconnue ($X = x^{1/12}$ par exemple) mais on ne sait par résoudre l'équation $X^3 + 2X^{20} - 3 = 0$.

Néanmoins, ce permet de remarquer que $x = 1$ est une solution apparente de l'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} = 3$. Nous allons montrer que c'est la seule solution.

Pour $x > 0$, posons $f(x) = x^{1/4} + 2x^{5/3}$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions (usuelles) strictement croissantes (on peut également dériver f et trouver $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} + \frac{10}{3}x^{2/3} > 0$).

La fonction f est donc injective : l'équation $f(x) = 3$ a donc zéro ou une solution. Puisque $f(1) = 3$, on en déduit.

Conclusion

L'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0$ a pour unique solution $x = 1$.

Exercice 4.13

Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x .$$

Solution 4.13

Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
x^{(x^x)} = (x^x)^x &\iff x^x \ln(x) = x\ln\left(x^x\right) && \because \text{ln est injective}\\
&\iff x^x \ln(x) = x^2 \ln(x)\\
&\iff x^x = x^2 \ \text{ ou } \ \ln(x) = 0\\
&\iff x\ln(x) = 2\ln(x) \ \text{ ou } \ x = 1 && \because \text{ln est injective}\\
&\iff x = 2 \ \text{ ou } \ x = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ dans $]0,+\infty[$ sont est

$$\mathcal{S} = \{\ 1, 2\ \}.$$

Exercice 4.14

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^x$.

2. En déduire que

$$\forall x > -1, (1+x)^x \geq 1.$$

Solution 4.14

Exercice 4.15

Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Solution 4.15

Mettre le membre de droite sous forme exponentielle et développer brutalement...

Exercice 4.16

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?
2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Solution 4.16

- Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{sh} x = m \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x - e^{-x} = 2m \iff e^x - 2m - e^{-x} = 0$$
Or $e^x \neq 0$, d'où, en multipliant par e^x la dernière égalité,
$$\operatorname{sh} x = m \iff e^{2x} - 2me^x - 1 = 0.$$
Or le polynôme $X^2 - 2mX - 1$ a pour discriminant $4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1) > 0$ et pour racine
$$m - \sqrt{m^2+1} < 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2+1} > 0.$$
On a donc
$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x = m &\iff e^x = \underbrace{m - \sqrt{m^2+1}}_{<0} \text{ ou } e^x = m + \sqrt{m^2+1} \\ &\iff x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right). \end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $\operatorname{sh} x = m$ admet pour unique solution $x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$. L'application sh est donc bijective et
$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sh}^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = m &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = m \iff e^x + e^{-x} = 2m \\ &\iff e^x - 2m + e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 2me^x + 1 = 0. \end{aligned}$$
Or le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour discriminant $4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$.
  - Si $m < 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = m$ n'a pas de solution (on le savait).
  - Si $m = 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = 1$ a une seule solution $x = 0$ (on le savait aussi).
  - Si $m > 1$, alors le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour racine
  $$m - \sqrt{m^2-1} > 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2-1} > 0.$$
  On a donc
  $$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = m &\iff e^x = m - \sqrt{m^2-1} \text{ ou } e^x = m + \sqrt{m^2-1} \\ &\iff x = \ln\left(m - \sqrt{m^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(m + \sqrt{m^2-1}\right). \end{aligned}$$
  L'équation $\operatorname{ch} x = m$ admet deux solutions si $m > 1$, qui sont $x = \ln\left(m \pm \sqrt{m^2-1}\right)$.

Conclusion

L'application ch n'est donc pas bijective.

Exercice 4.17

Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{25}{12} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \operatorname{ch} b \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = a \operatorname{sh} b \end{cases}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.