CHAPITRE 1

NOTATIONS

RAISONNEMENT ET SYMBOLISME MATHÉMATIQUES

Le monde mathématique est constitué d'*objets mathématiques* : ce sont, par exemple, les nombres, les ensembles, les figures géométriques. Ce ne sont pas véritablement des objets physiques «tirés de la nature», mais ils sont censés les représenter et en être le modèle abstrait. On adopte pour désigner ces objets des représentations diverses (en général lettre ou nombre). Ainsi, dans le cadre de l'étude du déplacement d'un corps sur un axe, on définira des nombres réels : m, V, x_0,..., représentant respectivement sa masse, son volume, son abscisse à l'instant 0, etc...Ces notations abrégées seront censées contenir en elles-même la définition de l'objet mathématique : ainsi un ensemble représenté par la lettre E sera identifié au symbole «E».

On retrouvera souvent (et ce n'est pas un hasard) l'analogie entre le langage mathématique et le langage courant : il ne faut pas oublier qu'en dernier ressort le résultat scientifique doit être transmis et donc transcrit dans un langage compréhensible. Ainsi, les lettres ou nombres représentant les objets, de même que les symboles, seront les «mots» du langage mathématique. En les assemblant on produit des «énoncés» et on désignera par le terme **propositions** les énoncés portant sur les objets mathématiques (ils correspondent aux phrases). De même que les objets mathématiques apparaissent comme le modèle abstrait d'objets physiques, de la même façon les propositions seront à l'image des propriétés physiques qu'on prête à ces derniers. L'activité mathématique se développe suivant trois axes :

- *la construction d'objets mathématiques* : nombres ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \dots$), fonctions, figures géométriques,structures algébriques...
- *l'énoncé de propositions portant sur ces objets* : ce sont des conjectures, construites par exemple à partir de cas particuliers,

- *la démonstration de certaines propositions* : les assertions démontrées sont appelées, suivant leur importance, **proposition**, **théorème** (résultat fondamental), **lemme** (résultat préalable utile dans une démonstration plus conséquente) ou **corollaire** (une assertion vraie qui découle immédiatement d'une démonstration précédente).

À la base de toute théorie mathématique se trouve cependant un certain nombre d'objets non définissables et de propositions supposées vraies. Ces propositions privilégiées au départ comme étant vraies sont appelées **axiomes** et chaque théorie comporte son **système d'axiomes**. On trouvera en particulier dans le système d'axiomes une «grammaire»: elle régit l'usage des propositions et permettent de construire de nouvelles propositions à partir des précédentes. Elles constituent les règles de la **logique formelle**. Formuler explicitement et avec précision le système d'axiome usuel a été l'affaire de grands mathématiciens du XX-ème siècle : on se placera donc à leur suite dans le cadre unique de la théorie des ensembles.

Exemple 1

Les Éléments d'Euclide

Les Éléments sont le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie et son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit probablement du recueil qui a rencontré le plus de succès au cours de l'Histoire : les Éléments furent l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482) et n'est précédé que par la Bible pour le nombre d'éditions publiées (largement plus de 1 000). Le succès des Éléments est dû principalement à la présentation logique.
Les Éléments d'Euclide forment un ouvrage où l'articulation des propositions exposées est purement déductive. Euclide y distingue deux types de propositions : les principes posés comme hypothèses ce sont les définitions, les postulats et les «notions ordinaires» (ces deux termes seraient de nos jours appelés des axiomes) et les propositions démontrées à l'aide de ces principes (ce sont les théorèmes).

Postulats du livre I :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Notions ordinaires du livre I :

1. Des choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Si des choses égales sont ajoutées à d'autres choses égales, leurs sommes sont égales.
3. Si des choses égales sont soustraites à d'autres choses égales, les restes sont égaux.
4. Des choses qui coïncident avec une autre sont égales entre elles.

5. Le tout est plus grand que la partie.

Sur les cinq postulats proposés par Euclide, le cinquième est le plus célèbre. Il revient à dire que :

«par tout point du plan ne passe qu'une droite parallèle à une droite donnée».

Plusieurs mathématiciens soupçonnèrent qu'il pouvait être démontré à partir des autres postulats, mais toutes les tentatives pour ce faire échouèrent. Ce postulat, nommé encore postulat d'Euclide, caractérise la géométrie dite euclidienne, par opposition aux autres géométries, dites non-euclidiennes, développées au XIX-ème siècle et où cet axiome sera remplacé par un autre (aucune parallèle, ou plusieurs parallèles), l'ensemble formant un système d'axiomes tout aussi cohérent.

Ptolémée, Proclus, Géminius, Aganis... proposent successivement des démonstrations du postulat d'Euclide (qui sont bien évidemment toutes fausses, car elles utilisent – le plus souvent implicitement – des propriétés équivalentes de ce postulat).

Après cet exemple, on comprendra peut-être mieux pourquoi les mathématiciens du XIX-ième siècle et encore plus du XX-ième, fatigués des démonstrations fausses, par de grands mathématiciens, de théorèmes généralement justes (il y a sûrement aussi d'innombrables théorèmes faux produits par de moindres seigneurs, mais ils ne passent pas à la postérité), ont fini par poser, au moins implicitement, les principes de base suivants :

- toute assertion qui n'est pas intégralement démontrée est potentiellement fausse et n'est, au mieux, qu'une conjecture intéressante,
- utiliser une assertion non complètement démontrée pour en prouver d'autres augmente exponentiellement les risques d'erreur,
- c'est à l'auteur d'une assertion qu'incombe la charge de la démontrer.

L'observation de ces principes a conduit à la formidable discipline intellectuelle que les mathématiciens se sont imposé depuis un siècle. Elle ne se rencontre à peu près nulle part ailleurs à ce degré ; les vrais historiens tentent de l'appliquer, mais les inévitables lacunes de leur information, la nécessité de contrôler des documents parfois truqués et de les «interpréter» objectivement, rendent la chose difficile. En Physique, les théoriciens prennent fréquemment de grandes libertés avec les mathématiques, les intuitions géniales suffisant ; les expérimentaux, eux, travaillent parfois sur des hypothèses pouvant se révéler fausses. Et imaginez la carrière d'un homme politique qui appliquerait les règles ci-dessus…

1.1 Un tout petit peu de logique

Nous referons le point sur la logique d'ici quelques semaines. En attendant, voici néanmoins quelques éléments de vocabulaire utile pour les premiers chapitres.

Le langage logique est utile pour écrire des énoncés mathématiques avec la plus grande précision possible.

Assertions

Une **assertion** est une affirmation, qui peut être vraie ou fausse. À toute assertion A, on associe sa **négation**, notée non A, qui est vraie si A est fausse, fausse si A est vraie. Par exemple «la suite (u_n) tend vers 0» est une assertion et «la suite (u_n) ne tend pas vers 0» est sa négation.

A	non A
V	F
F	V

Une assertion vraie est un **énoncé**. Un **axiome** est un énoncé qu'on ne cherche pas à démontrer: les axiomes servent à fonder des théories mathématiques. Si un énoncé contient un mot nouveau, il sert de définition à ce mot. Les autres énoncés doivent être démontrés: ce sont les **théorèmes**.

Ensembles

Pour écrire la plupart des énoncés mathématiques, on a besoin d'introduire des **ensembles**. Nous ne chercherons pas à définir précisément ce qu'est un ensemble: on considère en général que c'est une notion «intuitive».

Un ensemble est une «collection» d'objets; ces objets sont appelés les **éléments** de E. L'assertion «x est un élément de E» est notée «$x \in E$», et peut être lue «x appartient à E». La négation de «$x \in E$» est notée «$x \notin E$». Lorsque E possède un nombre fini d'éléments a, b,…,s, on peut le décrire complètement en donnant la liste de ses éléments: il est alors noté $\{ a, b, \dots, s \}$; mais s'il est infini, on ne peut pas donner la liste complète de ses éléments:il en est ainsi pour les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,etc…

Prenons un ensemble F; lorsque tous les éléments d'un certain ensemble E sont aussi éléments de F, on dit que E est une partie de F, ou que E est **inclus** dans F; cette assertion est notée «$E \subset F$».

Deux ensembles E et F sont dits égaux ($E = F$) quand ils ont les mêmes éléments.

Prenons une assertion $A(x)$ où figure la **variable** x. Les éléments x de E tels que $A(x)$ est vraie forment une partie de E. Cette partie est notée

$$\{ x \in E \mid A(x) \} .$$

Par exemple, l'ensemble des nombres naturels paires est

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe un entier } k \text{ vérifiant } x = 2k \} .$$

Enfin, on définit l'ensemble vide, qui n'a pas d'éléments. Il est noté $\{ \}$, ou, plus souvent $\emptyset$.

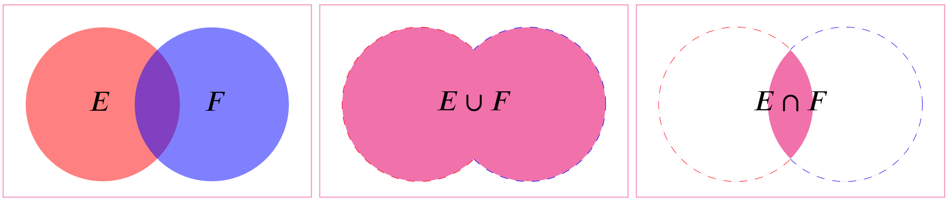
Réunion, intersection, complémentaire

À partir de deux assertions A et B, on définit les assertions «A et B» et «A ou B». Démontrer l'énoncé «A et B» revient à démontrer les énoncés A et B. Démontrer l'énoncé «A ou B» revient à démontrer que l'un des deux au moins est vrai (mais les deux peuvent êtres vrais:on dit que le « ou » de la logique est inclusif).

Par exemple, prenons deux ensembles E et F. L'assertion «$E = F$» n'est autre que l'assertion «$(E \subset F)$ et $(F \subset E)$». D'ailleurs, pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on procède souvent ainsi: on montre que tous les éléments de E sont éléments de F, et que tous les éléments de F sont éléments de E. On dit qu'on a procédé par **double inclusion**.

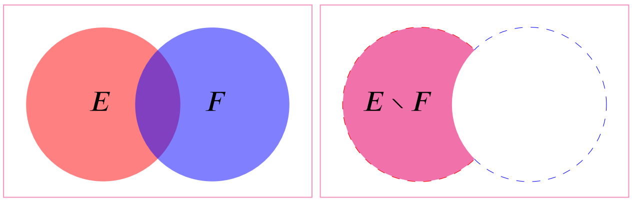
Simultanément, si E et F sont des ensembles, on introduit deux nouveaux ensembles, **réunion** de E et F ($E \cup F$ qui se lit «E union F»), et **intersection** de E et F ($E \cap F$ qui se lit «E inter F»):

- $E \cup F$ est constitué des objets x vérifiant «$(x \in E)$ ou $(x \in F)$»,
- et $E \cap F$ est constitué des objets x vérifiant «$(x \in E)$ et $(x \in F)$»,



De même, on introduit l'ensemble $E \setminus F$, qui se lit «E privé de F» ou «E moins F», qui est la partie de E définie par

$$E \setminus F = \{ x \in E \mid x \notin F \}$$



Si $F \subset E$ on définit le **complémentaire** de F dans E (noté $\complement_E F$) qui n'est autre que l'ensemble $E \setminus F$.

On dit que deux ensembles sont **disjoints** lorsque $E \cap F$ est vide.

Remarquons que lorsque $F = \{ x \in E \mid A(x) \}$ et $G = \{ x \in E \mid B(x) \}$, alors, d'après ce qui précède, $F \cap G = \{ x \in E \mid A(x) \text{ et } B(x) \}$, $F \cup G = \{ x \in E \mid A(x) \text{ ou } B(x) \}$, et $F \setminus G = \{ x \in F \mid \text{non } B(x) \}$. On voit ainsi le lien étroit entre les connecteurs et , ou , non et les opération ensemblistes $\cap$, $\cup$, $\setminus$.

Quantificateurs

On introduit aussi les **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$, qui permettent de construire d'autres énoncés. L'énoncé «$\forall x \in E, A(x)$» veut dire que l'assertion $A(x)$ est vraie pour tous les éléments de E ($\forall$ se lit «quel que soit»). L'énoncé «$\exists x \in E, A(x)$» veut dire qu'il y a au moins un élément de E pour lequel $A(x)$ est vraie ($\exists$ se lit «il existe»).

D'après la définitions des quantificateurs $\exists$ et $\forall$, les énoncés «non ($\exists x \in E, A(x)$)» et «$\forall x \in E$, (non $A(x)$)» veulent dire la même chose, ainsi que les énoncés «non ($\forall x \in E, A(x)$)» et «$\exists x \in E$, (non $A(x)$)».

On utilise également le quantificateur $\exists!$ (qui se lit «il existe un et un seul»). «$\exists! x \in E, A(x)$» veut dire qu'il y a un, et un seul, élément de E pour lequel $A(x)$ est vraie. L'ensemble $\{ x \in E \mid A(x) \}$ a exactement un élément (on dit que c'est un **singleton**).

Test 2 Écrire en langage logique «$E \subset F$», «non($E \subset F$)», «$E \neq F$».

Implication, équivalence

De même qu'à partir de A et B on peut définir les assertions «A et B» et «A ou B», on peut aussi définir les assertions «$A \implies B$» et «$A \iff B$».

- L'énoncé «$A \implies B$» (A **implique** B) veut dire que si l'assertion A est vraie, alors B est vraie aussi.

  En fait, «A implique B» est une autre façon d'écrire l'énoncé «(non A) ou B». Pour démontrer cet énoncé, on écarte donc le cas où A est faux, puis on traite le cas restant: on commence donc la preuve par «Supposons que A soit vraie», et il s'agit alors d'établir sous cette hypothèse l'énoncé B.

- L'énoncé «$A \iff B$» (A équivalente à B) veut dire que A et B sont vraies simultanément. Cet énoncé dit la même chose que «($A \implies B$) et ($B \implies A$)».

  Souvent, pour démontrer un tel énoncé, on démontre séparément les deux implication «$A \implies B$» et «$B \implies A$». En français, ce symbole est souvent traduit par si, et seulement si (et parfois abrégé en **ssi**).

Lorsque $F = \{ x \in E \mid A(x) \}$ et $G = \{ x \in E \mid B(x) \}$:

- l'assertion «$F \subset G$» se traduit par $\forall x \in E A(x) \implies B(x)$,
- et l'assertion «$F = G$» se traduit par $\forall x \in E A(x) \iff B(x)$.

On voit ainsi le lien entre les connecteurs logique $\implies$, $\iff$, et les relations ensemblistes $\subset$ et $=$.

A	B	A ou B	A et B	$A \implies B$	$A \iff B$
F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F
V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V

Ensemble des parties

Soit E un ensemble. Nous admettons l'existence d'un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$(X \in \mathcal{P}(E)) \iff (X \subset E) .$$

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est appelé l'ensemble des partie de E.

Exemple 3

Si $E = \{ a, b, c \}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a, b \} , \{ a, c \} , \{ b, c \} , \{ a, b, c \} \right\} .$$

Synonymies

Certains énoncés logiques veulent dire rigoureusement la même chose : on dit qu'ils sont synonymes. Voici quelques synonymies d'usage courant:

Proposition 4

Une implication

$$A \implies B$$

et sa contraposée

$$(\text{non } B) \implies (\text{non } A)$$

sont synonymes.

Proposition 5

Loi de De Morgan
Soient A, B des assertions.

1. non(A <u>ou</u> B) *est tautologiquement équivalente à* (non A) <u>et</u> (non B).
2. non(A <u>et</u> B) *est tautologiquement équivalente à* (non A) <u>ou</u> (non B).

CHAPITRE A

LA LOGIQUE DES LOGICIENS

A.1 RAISONNEMENT LOGIQUE

§1 Assertions

Définition 1

Une **assertion** est une affirmation grammaticalement correcte dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse. On attribue donc à une assertion une valeur booléenne:

$$\begin{cases} V \text{ ou } 1 & \text{si elle est vraie,} \\ F \text{ ou } 0 & \text{si elle est fausse.} \end{cases}$$

Une assertion vraie est un **énoncé**.

Exemples 2

1. «Tous les hommes sont mortels.» est une assertion vraie.
2. «Quelle heure est-il ?» n'est pas une assertion.
3. «Le nombre 3 est plus grand que le nombre 2» est une assertion vraie.
4. «235 est un nombre pair» est une assertion fausse.
5. «2+3+5» n'est pas une assertion.

Un **axiome** est un énoncé qu'on ne cherche pas à démontrer : les axiomes servent à fonder des théories mathématiques. Les autres énoncés doivent être démontrés : ce sont les **proposition**, **théorème**, **lemme**,... On appelle **démonstration** un ensemble de propositions reliées entre elles conformément aux règles de la logique formelle : c'est donc un «texte» conforme à la grammaire. Une proposition sera dite **vraie** si elle peut figurer dans une démonstration.

§2 Une simplification d'écriture

Remarque Soit P une assertion. On peut considérer l'énoncé : «P est vraie», comme une nouvelle assertion, qui est d'ailleurs tautologiquement équivalente à P (il en est de même de l'assertion « (P est vraie) est vraie »).

Dans la pratique, nous ne considérerons pas «P est vraie» comme une assertion, mais comme l'affirmation que l'assertion P possède la valeur logique V ; nous nous contenterons même d'écrire, dans ce sens « on a P » et même « P ». Plus précisément, nous adopterons

Convention. Celui qui formule une assertion affirme qu'elle est vraie, à moins que le contexte n'indique le contraire.

Dans un texte mathématique, toute assertion est considérée vraie, sauf mention explicite du contraire.

C'est ainsi que quand on écrit «$2+2=4$», on entend : « $2+2=4$ est une assertion qui possède la valeur logique V ».

§3 Opérations logiques élémentaires

Dans ce chapitre, on soulignera exceptionnellement $\underline{\text{ou}}$, $\underline{\text{et}}$.

À partir d'un certain nombre d'assertions, P et Q par exemple, on peut en fabriquer de nouvelles à l'aide d'opérations. Il suffit pour cela d'indiquer quand ces nouvelles assertions sont vraies ou fausses en fonction de la valeur logique des assertions P, Q,...

Définition 3 On note **non P** la **négation** de l'assertion P, c'est-à-dire l'assertion qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	non P
V	F
F	V

Définition 4 On note **(P $\underline{\text{ou}}$ Q)** la **disjonction** des assertions P et Q, c'est-à-dire l'assertion qui est vraie si au moins une des assertions P ou Q est vraie. ((P $\underline{\text{ou}}$ Q) est fausse lorsque P est fausse et Q est fausse et seulement dans ce cas).

On note **(P $\underline{\text{et}}$ Q)** la **conjonction** des assertions P et Q, c'est-à-dire l'assertion qui est vraie lorsque P est vraie et Q est vraie et seulement dans ce cas. ((P $\underline{\text{et}}$ Q) est fausse dès que l'une des assertions est fausse).

P	Q	P $\underline{\text{ou}}$ Q	P $\underline{\text{et}}$ Q
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	V	V

Exemples 5

1. $3 < 4$ <u>et</u> $2 < 4$ est vraie.
2. $3 < 4$ <u>et</u> $4 < 2$ est fausse.
3. $3 < 4$ <u>ou</u> $2 < 4$ est vraie.
4. $3 < 4$ <u>ou</u> $4 < 2$ est vraie.

Étant données des assertions $A,B,C,\dots$ les connecteurs logiques permettent de construire de nouvelles assertions dites **composées** et notées $P(A,B,C,\dots)$ dont on connaît, grâce à des tables de vérité, la valeur logique dès qu'on connaît les valeurs logiques des assertions $A,B,C\dots$

Définition 6

Soient $P(A,B,C,\dots)$, $Q(A,B,C,\dots)$ des assertions dont les tables de vérité coïncident. Nous dirons que ces assertions sont **tautologiquement équivalentes**, ou, plus simplement, équivalentes ou encore **synonymes**. Nous écrirons

$$P(A,B,C,\dots) \equiv Q(A,B,C,\dots).$$

Autrement dit, ces énoncés logiques veulent dire rigoureusement la même chose quelles que soient les valeurs logiques de $A,B,C,\dots$

Théorème 7

Loi de De Morgan
Soient P,Q des assertions.

1. non(P <u>ou</u> Q) *est tautologiquement équivalente à* (non P) <u>et</u> (non Q).
2. non(P <u>et</u> Q) *est tautologiquement équivalente à* (non P) <u>ou</u> (non Q).

Test 8

Soit x un nombre réel. Donner la négation de $0 < x < 1$.

Proposition 9

Soient A,B,C des assertions.

1. non(non A) $\equiv A$;
2. A <u>ou</u> $A \equiv A$.
3. A <u>et</u> $A \equiv A$.
4. A <u>et</u> $B \equiv B$ <u>et</u> A.
5. A <u>ou</u> $B \equiv B$ <u>ou</u> A.
6. (A <u>et</u> B) <u>et</u> $C \equiv A$ <u>et</u> (B <u>et</u> C).
7. (A <u>ou</u> B) <u>ou</u> $C \equiv A$ <u>ou</u> (B <u>ou</u> C).
8. (A <u>ou</u> B) <u>et</u> $C \equiv$ (A <u>et</u> C) <u>ou</u> (B <u>et</u> C).
9. (A <u>et</u> B) <u>ou</u> $C \equiv$ (A <u>ou</u> C) <u>et</u> (B <u>ou</u> C).

On peut donc écrire (A et B et C) sans ambiguïtés. De même pour (A ou B ou C).

Test 10

Démontrer ces résultats.

Test 11

x et y étant des nombres réels, résoudre le système

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0, \\ (x-2)(y-3) = 0. \end{cases}$$

§4 Implication logique

Définition 12

L'assertion (non P) ou Q est appelée l'**implication** de Q par P et se note

$$P \implies Q.$$

C'est l'assertion qui est vraie si P est fausse ou si P et Q sont vraies.

P	Q	$P \implies Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

On exprime la situation «$P \implies Q$ vraie» en disant indifféremment :

- **Si** P **alors** Q.
- Pour que P, il **faut** que Q.
- Q est une **condition nécessaire** de P.
- P **seulement si** Q.
- Pour que Q, il **suffit** que P.
- P est une **condition suffisante** de Q.
- Q **si** P.
- La proposition P **implique** la proposition Q.

Exemple 13

Pour réussir le concours d'entrée à Polytechnique, par exemple, il est certainement *nécessaire* de savoir lire, il *faut* savoir lire. Mais cette condition est sans doute loin d'être *suffisante*. Les deux adjectifs soulignés — nécessaire, suffisant — ont un rapport avec le connecteur logique d'implication. Il importe de bien connaître ce rapport, vu l'usage constant de ces mots dans le langage mathématique.
Nous partirons de cet exemple, mais au lieu de la forme impersonnelle, nous écrirons, à propos d'une personne X :

> Pour que X puisse réussir le concours, *il faut que* X sache lire.
>
> Une *condition nécessaire* pour que X puisse réussir le concours est que X sache lire.
>
> X peut réussir le concours *seulement si* X sait lire.
>
> *Si* X peut réussir le concours, alors X sait lire.

Exemple 14

- Des jaunes d'œufs et de l'huile sont des ingrédients nécessaires pour faire un mayonnaise.
- Des jaunes d'œufs, de l'huile, des clous, de la moutarde, du vinaigre, du sel, une corne de dragon et du poivre sont des ingrédients suffisants pour faire un mayonnaise.

Remarque

1. Si P est fausse, alors $P \implies Q$ est vraie.
   - $(1 = 0 \implies$ «Nous sommes dimanche») est une assertion vraie.
   - $(0 \neq 0 \implies 0 = 0)$ est une assertion vraie.
2. $(P \implies Q)$ vraie ne signifie pas que P ou Q soient vraies.

Définition 15

Étant données deux relations P et Q, l'**implication contraposée** de $P \implies Q$ est la relation

$$\text{non}\, Q \implies \text{non}\, P.$$

Proposition 16

Une implication

$$P \implies Q$$

et sa contraposée

$$\text{non}\, Q \implies \text{non}\, P$$

sont tautologiquement équivalentes.

Exemple 17

On peut aussi exprimer notre exemple par :

> Si X ne sait pas lire, alors X ne peut pas réussir le concours.

Remarque $P \implies Q$ étant la proposition directe, non $P \implies$ non Q se nomme la **proposition contraire**

Proposition 18

La négation de $(P \implies Q)$ *est*

$$P \ \underline{et}\ (\text{non}\, Q).$$

Exemple 19

La négation de l'assertion (vraie)

> Pour que X puisse réussir le concours, *il faut que* X sache lire.

est l'assertion (fausse)

> X peut réussir le concours et X ne sait pas lire.

Remarque **Sémantique de l'implication**

Une erreur d'interprétation possible serait de voir toujours dans l'implication l'expression d'une causalité. On rencontre dans certains ouvrages de logique des exemples qui pourraient facilement susciter cette interprétation, comme

> S'il pleut, alors les routes sont mouillées.

Dans cet exemple, il se trouve que le fait «il pleut», s'il se produit, est bien la *cause* physique du fait que les routes soient mouillées, lequel se produit alors inévitablement. Mais du point de vue de la logique, ce n'est pas cette causalité qu'expriment les mots «si...alors...». C'est uniquement la concomitance des deux faits, à savoir que l'on n'observe jamais le premier sans le second. D'ailleurs, une proposition de la forme $P \implies Q$ est équivalente à la proposition non $\big(A \ \underline{\text{et}}\ \text{non } B\big)$.

Comme exemple d'implication, dans la langue naturelle, qui ne suggère pas l'idée de causalité, nous pouvons imaginer à la situation d'une personne qui ne voit pas venir son ami Arthur au rendez-vous qu'ils se sont fixé et qui déclare :

> Si Arthur n'a pas oublié notre rendez-vous, alors il a eu un accident.

Dans l'esprit de celui qui s'exprime ainsi, il n'y a pas de rapport de cause à effet.

Proposition 20 **Règle du modus ponens et Règle du modus tollens**

1. *Si P est vraie et $(P \implies Q)$ est vraie alors Q est vraie.*
2. *Si Q est fausse et $(P \implies Q)$ est vraie alors P est fausse.*

§5 L'équivalence

Définition 21 On note $\boldsymbol{P \iff Q}$ l'assertion qui est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité et qui est fausse sinon.
On exprime la situation «$P \iff Q$ vraie» en disant indifféremment

- P et Q sont **équivalentes**,
- P **si et seulement si** Q,
- P est une **condition nécessaire et suffisante** de Q.

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque

1. $(P \iff Q)$ est tautologiquement équivalente à $(Q \iff P)$.
2. $(P \iff Q)$ est tautologiquement équivalente à (non $P \iff$ non Q).
3. $(P \iff Q)$ vraie ne signifie pas que P ou Q soit vraie.
4. $(P \iff Q)$ peut-être vraie alors que P et Q n'ont aucun rapport entre elles :

$$0 = 0 \iff \cos \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Ici, $(P \iff 0 = 0)$ est une façon d'écrire que P est vraie.

Proposition 22 *Étant données deux relations P et Q, la relation $(P \iff Q)$ est tautologiquement équivalente à la relation*

$$(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P).$$

Définition 23 Étant données deux relations P et Q. L'**implication réciproque** de $P \implies Q$ est la relation

$$Q \implies P.$$

Si l'implication $(P \implies Q)$ est vraie, cela ne donne *aucune* indication sur la véracité de $(Q \implies P)$.

§6 Axiomes logiques et tautologie

Les énoncés suivants pourront sembler triviaux au débutant ; mais il n'en est que plus remarquable qu'on puisse en tirer des conséquences substantielles. En fait, il faut considérer ces résultats comme les règles d'emploi mécanique des signes non, ou, et, $\implies$, et non pas comme des découvertes métaphysiques profondes.

Proposition 24

1. *Si P est une relation, la relation*

$$(P \text{ ou } P) \implies P$$

est vraie.

2. *Si P et Q sont deux relations, la relation*

$$P \implies (P \text{ ou } Q)$$

est vraie.

3. *Si P et Q sont deux relations, la relation*

$$(P \text{ ou } Q) \implies (Q \text{ ou } P)$$

est vraie.

4. *Si P et Q sont deux relations, la relation*

$$(P \text{ et } Q) \implies P$$

est vraie.

5. *Si P, Q et R sont des relations, la relation*

$$(P \implies Q) \implies \big((P \text{ ou } R) \implies (Q \text{ ou } R)\big)$$

est vraie.

On s'aperçoit que ces énoncés sembles évidents : en fait, ils définissent les règles d'emploi des mots ou et et.

A.2 Ensembles et quantificateurs

§1 Spécialisation et quantification

Définition 25 Les énoncés que nous rencontrerons le plus souvent sont d'une nature plus générale : ils contiennent des lettres, dites **variables libres**, ils seront vrais pour certaines valeurs attribuées aux variables, faux pour toutes les autres valeurs. Un tel énoncé s'appelle une **proposition**, un **prédicat**, ou encore **relation**.

Les énoncés qui contiennent des variables libres n'admettent pas de valeur de vérité : une réponse sensée à la question de la vérité de l'énoncé « x est un entier impair », est que cela dépend de la valeur de x.

Définition 26 Soient R une relation et a un objet mathématique, et x une lettre. On appelle **spécialisation de R pour la valeur a de x**, que l'on désigne par $R[x \leftarrow a]$, la relation obtenue en substituant a à x dans R

Pour indiquer qu'une lettre x figure dans une relation R, on écrit fréquemment celle-ci sous la forme $R(x)$ et on écrit alors fréquemment $R(a)$ au lieu de $R[x \leftarrow a]$.

Exemple 27 À tout réel x, nous pouvons associer l'assertion «x est un entier impair», que nous notons $P(x)$; c'est ainsi que $P(-3)$ est une assertion vraie et que $P(\pi)$ est une assertion fausse.

Définition 28 Soit $P(x)$ une relation à une variable x appartenant à un ensemble A. La proposition «$\boldsymbol{\forall x \in A, P(x)}$» se lit «Pour tout x appartenant à A, $P(x)$». Cette proposition est vraie si la substitution à x dans la proposition par n'importe quel élément a de A fournit une proposition $P(a)$ vraie.

Il s'agit en quelque sorte d'une conjonction généralisée. (Par exemple si $A = \{a, b, c\}$ la proposition «$\forall x \in A, P(x)$» équivaut à «$P(a)$ $\underline{\text{et}}$ $P(b)$ $\underline{\text{et}}$ $P(c)$».)

Définition 29 La proposition «$\boldsymbol{\exists x \in A, P(x)}$»se lit «Il existe x appartenant à A tel que $P(x)$». Cette proposition est vraie si l'ensemble A contient au moins un élément, disons a, dont la substitution à x dans la proposition fournit une proposition $P(a)$ vraie.

Il s'agit en quelque sorte d'une disjonction généralisée. (Par exemple si $A = \{a, b, c\}$ la proposition «$\exists x \in A, P(x)$»équivaut à «$P(a)$ $\underline{\text{ou}}$ $P(b)$ $\underline{\text{ou}}$ $P(c)$».

Exemples 30

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0$ est une assertion fausse.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0$.

5. Dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

6. Tout nombre réel positif ou nul peut s'écrire comme le carré d'un nombre réel s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2.$$

On peut choisir, par exemple $y = \sqrt{x}$. Remarquez que le y recherché dépend (à priori) du x. Nous verrons plus tard que l'on ne peut pas inverser «$\forall x \in \mathbb{R}_+$» et «$\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$».

Remarque

- une variable qui a été quantifiée devient «muette» : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf ceux figurant ailleurs dans l'énoncé).
- L'utilisation des quantificateurs suppose que vous utilisiez les quantificateurs sur toute la proposition considérée : pas de mélange !
- L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclus.

Exemple 31

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n > 2 \implies n \geq 3)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2 \implies x \geq 3)$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 2 \implies x^2 - 3x + 2 = 0)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 2)$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2)$.

Les deux premiers exemples nous montrent quelque chose d'important : il faut *toujours* introduire les objet mathématiques dont on parle.

§2 Permutation des quantificateurs

Exemple 32

Énoncer par des phrases correctes les assertions

$$A : \forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2.$$
$$B : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, x = y^2.$$

Ces deux propositions ont-elles le même sens ?

Proposition 33

Admis
Considérons deux ensembles X et Y et une relation $P(x, y)$ dépendant des variables $x \in X$ et $y \in Y$.

1. *Les assertions suivantes sont tautologiquement équivalentes.*

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x, y) \tag{A.1}$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X, P(x, y) \tag{A.2}$$
$$\forall (x, y) \in X \times Y, P(x, y) \tag{A.3}$$

2. *Les assertions suivantes sont tautologiquement équivalentes.*

$$\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x, y) \tag{A.4}$$
$$\exists y \in Y, \exists x \in X, P(x, y) \tag{A.5}$$
$$\exists (x, y) \in X \times Y, P(x, y) \tag{A.6}$$

3. *On a l'implication*

$$(\exists x \in X, \forall y \in Y, P(x, y)) \implies (\forall y \in Y, \exists x \in X, P(x, y)) \tag{A.7}$$

Quand une proposition «$\forall x \in X, \exists y \in Y, P(x, y)$» est vraie, alors la proposition «$\exists y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$ » *peut* être fausse.

§3 Négation d'une proposition quantifiée

Exemples 34

- Quelle est la négation de «Tous les triangles sont isocèles» ?
- Quelle est la négation de «Tous les élèves de la classe sont des garçons» ?

Proposition 35

- *La négation de «$\forall x \in A, P(x)$» est*

$$\exists x \in A, \text{non } P(x).$$

- *La négation de «$\exists x \in A, P(x)$» est*

$$\forall x \in A, \text{non } P(x).$$

Exemple 36

Pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, voici la définition de «f est continue au point a».

$$\forall \epsilon \in]0, +\infty[, \exists \delta \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Sa négation, en l'occurence la non-continuité de f au point a est

$$\exists \epsilon \in]0, +\infty[, \forall \delta \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \epsilon.$$

Remarque Pour alléger cette écriture, on écrit, entre autre, $\forall \epsilon > 0$ au lieu de $\forall \epsilon \in]0, +\infty[$.

§4 Existence et unicité

Soit $P(x)$ une relation à une variable x appartenant à un ensemble A.

Définition 37

La proposition «$\boldsymbol{\exists! x \in A, P(x)}$» se lit «Il existe un unique x appartenant à A tel que $P(x)$». Cette proposition signifie qu'il y a un, et un seul, élément de A pour lequel $P(x)$ est vraie.

Exemple 38

Il est vrai que

$$\exists! n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq n < \frac{3}{2}.$$

L'entier n en question est tout simplement 1.

A.3 ENSEMBLES

§1 Éléments d'un ensemble

Nous ne chercherons pas à définir précisément ce qu'est un ensemble : considérons cette notion intuitive. On parle parfois de «définition naïve des ensembles».

Définition 39

- Un **ensemble** E est une «collection» d'objets ; ces objets sont appelés **éléments** de E.
- L'assertion notée «$\boldsymbol{x \in E}$» signifie que «x est un élément de E», également lue «x appartient à E», «E contient x»[a].
- La négation de $x \in E$ est noté «$\boldsymbol{x \notin E}$» et signifie que «E ne contient pas l'élément x», également lue «x n'appartient pas à E».

[a] Notons cependant que cette dernière formulation est ambiguë, à cause de l'inclusion

Exemple 40

Ensembles célèbres

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : $0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : c'est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels : c'est l'ensemble des quotients $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs avec $q \neq 0$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

L'axiome fondamental est l'**axiome d'extensionalité** pour les ensembles, qui dit qu'un ensemble est totalement caractérisé par ses éléments.

Axiome 41

Axiome d'extensionalité

$$(\forall x, x \in E \iff x \in F) \implies E = F. \tag{A.8}$$

Lire : «deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux».

Remarque

- Dans la phrase entre guillemets, l'usage de l'article défini «les» (mêmes éléments) dit qu'il s'agit de *tous* les éléments : c'est pourquoi la formule (A.8) comporte un quantificateur $\forall x$, qu'il faut lire «quel que soit x», ou encore «pour tout x».
- Remarquons que l'implication réciproque va de soi, pour des raisons de logique pure. L'usage mathématique veut en effet que, si l'on a une égalité $E = F$, alors toute propriété vérifiée par E est vérifiée par F.

La plupart des *axiomes* qui vont apparaître mettront en jeu une certaine propriété $P(x)$ d'un élément indéterminé x (P s'appelle un **prédicat**) ; un axiome dira alors que les éléments x tels que $P(x)$ est vrai forment un ensemble, autrement dit, qu'il existe un ensemble E tel que $\forall x, x \in E \iff P(x)$. Cela se lit : «quel que soit x, $x \in E$ si, et seulement si, $P(x)$». L'axiome d'extensionalité permettra alors de déduire que E est unique.

Axiome 42

Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément.

$$\exists E, \forall x, x \notin E. \tag{A.9}$$

On le note $\emptyset$ et on l'appelle **ensemble vide**.

L'existence d'un (sous-entendu : «au moins») ensemble qui n'a aucun élément («un», article indéfini, exprime l'existence, quantificateur $\exists$) est le contenu de cet axiome. Mais, d'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble qui n'a aucun élément est unique. C'est pourquoi, dans la deuxième partie de la phrase, on dit *le*, qui sous-entend l'unicité. La formule A.9 peut donc être renforcée ainsi

$$\exists! E, \forall x, x \notin E.$$

Le symbole $\exists!$ signifie «il existe un unique».

Axiome 43

Axiome du singleton
Soit a un objet mathématique. L'**axiome du singleton** dit qu'il existe un ensemble dont le seul élément est a. On le note $\{ a \}$, lire «singleton a».

On a donc

$$\forall x, x \in \{ a \} \iff x = a.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, un tel ensemble est unique.

Axiome 44

Axiome de la paire
Soient a, b deux éléments (non nécessairement distincts). L'**axiome de la paire** dit qu'il existe un ensemble dont les seuls éléments sont a et b.
On le note $\{ a, b \}$. Si $a \neq b$, on l'appelle **paire** formée de a et b.

D'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble $\{ a, b \}$ est unique. L'axiome de la paire implique d'ailleurs celui du singleton : lorsque $a = b$, on trouve $\{ a, a \} = \{ a \}$. On démontre de même que $\{ a, b \} = \{ b, a \}$ par de la logique pure ! Pour tout x :

$$x \in \{ a, b \} \iff (x = a \text{ ou } x = b) \iff (x = b \text{ ou } x = a) \iff x \in \{ b, a \}.$$

Chaque fois que l'on se donne des objets $a_1, \dots, a_n$, on dispose d'une version plus générale des axiomes précédents.

Axiome 45 Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments. Il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $a_1, \dots, a_n$[a]. Cet ensemble est noté $\left\{ a_1, \dots, a_n \right\}$. On dit que l'on a défini cet ensemble «en extension», c'est-à-dire énumérant ses éléments.

[a]d'après l'axiome d'extensionalité, il est unique

Pour $n = 1, 2$, on retrouve les axiomes précédents. Au delà, on trouve les ensembles $\{ a, b, c \}$, $\{ a, b, c, d \}$, etc. La notation générale $a_1, \dots, a_n$ est légèrement abusive car elle sous-entend que l'on sait interpréter les $\dots$ intermédiaires. Dans la pratique, on s'autorise des «définitions en extension incomplètes» comme $\{ 0, 2, \dots, 56 \}$ parce que l'on devine la *loi de formation* des éléments énumérés : ici, les entiers de la forme $2k$ ou k varie de 0 à 28. On note

$$\{ 0, 2, \dots, 56 \} = \{ 2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq 28 \}.$$

Par abus de notation, la même notation s'emploie pour énumérer des ensembles infinis, comme $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ ou l'ensemble $2\mathbb{N} = \{ 0, 2, 4, \dots \}$ des entiers naturels pairs. Cela peut être dangereux (ambiguïté sur la loi de formation) et cela cache en réalité des axiomes plus puissants. En fait, pour anticiper, on a une suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'ensemble $\left\{ u_0, u_1, \dots \right\}$ est l'ensemble image de cette suite, c'est-à-dire l'ensemble $\left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

§2 Ensemble défini par une relation

Dans la pratique, un ensemble est le plus souvent défini par une propriété caractéristique de ses éléments : «l'ensemble des entiers compris entre 2 et 25», «l'ensemble des points distants de 15km d'un point donné O», «l'ensemble des nombres rationnels $< \pi$», «l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$»,etc. Un énoncé général en apparence évident, dû à Frege est que pour toute proposition ou relation $P(x)$ dans laquelle intervient une variable x symbolisant un objet totalement indéterminé, on peut parler de l'*ensemble des x tels que* $P(x)$; il est unique en raison de l'axiome d'extension. Si vous choisissez la relation $x = x$, vous obtenez ainsi l'ensemble de *tous* les objets mathématiques, créature qui inspirait à juste titre la plus grande méfiance à Cantor ; il en parlait comme d'une «classe» d'ensembles, notion que les logiciens ont utilisée et développée par la suite.

En 1903, alors que Frege était sur le point de publier le second volume de ses *Grundgesetze der Arithmetik*, Bertrand Russell démolit tout l'édifice de Frege, vingt ans au moins de travail, et une partie du sien propre en choisissant pour $P(x)$ la relation $x \notin x$. Supposons en effet qu'il existe un A tel que

$$\forall x, x \in A \iff x \notin x;$$

et appliquer cette assertion à $x = A$...

L'axiome de séparation (Ernest Zermelo, 1908) élimine le «paradoxe de Russell» : si $P(x)$ est une proposition et si X est un ensemble, on a le droit de parler de l'ensemble A des *x appartenant à X* qui vérifient $P(x)$

Axiome 46

Axiome de séparation
Soient X un ensemble et $P(x)$ une propriété des éléments de X. Alors il existe un ensemble A vérifiant

$$\forall x, x \in A \iff (P(x) \text{ et } x \in X)$$

On note cet ensemble $\{ x \in X \mid P(x) \}$, ce qui se lit «l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$».

Exemple 47

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair} \}, \qquad \left\{ x \in \mathbb{Q}_+ \,\middle|\, x^2 > 2 \right\}.$$

Remarque Un même ensemble peut être défini de plusieurs manières différentes.

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 2 \right\} = \left\{ -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\} = \left\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \right\} = \left\{ \epsilon\sqrt{2} \,\middle|\, \epsilon = 1 \underline{\text{ ou }} \epsilon = -1 \right\}$$

$$\{ -1, 1 \} = \{ 1, -1 \} = \{ 1, 1, 1, 1, -1 \} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 1 \right\}$$

§3 Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

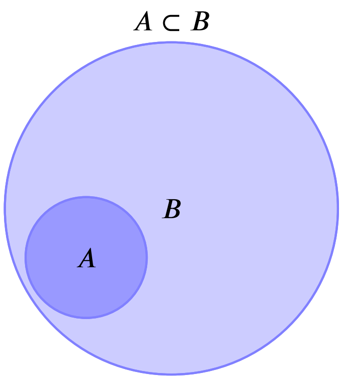
Définition 48

Soit A et B deux ensembles. On écrit que $A \subset B$ et dit que A est une **partie** de B, ou que A est un **sous-ensemble** de B, ou encore que A est **inclu** dans B pour signifier que tous les éléments de A sont contenus dans B.

$$A \subset B \iff (\forall x, x \in A \implies x \in B)$$

Ou abbréviativement,

$$A \subset B \iff (\forall x \in A, x \in B).$$



Exemple 49

L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble. Tout ensemble est sous-ensemble de lui même. L'ensemble $\{ x \in X \mid P(x) \}$ est un sous-ensemble de X.

En anticipant un peu sur les définitions ultérieures, on voit que la relation d'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique : l'inclusion est donc une relation d'ordre.

Proposition 50

1. *L'inclusion est réflexive, c'est-à-dire, quel que soit l'ensemble A,*

$$A \subset A.$$

2. *L'inclusion est transitive, c'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B et C,*

$$(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ B \subset C) \implies A \subset C.$$

3. *L'inclusion est antisymétrique, c'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B,*

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \implies A = B. \qquad \text{(Règle de la double inclusion)}$$

Axiome 51

Soit E un ensemble. La relation $x \subset E$ est collectivisante et définit l'**ensemble des parties de E**, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$\forall x, (x \in \mathcal{P}(E) \iff x \subset E).$$

Ou encore,

$$\mathcal{P}(E) = \{ x \mid x \subset E \}.$$

Exemple 52

- On a toujours $\emptyset \subset E$.
- Si $E = \{ 0, 1 \}$, alors $\mathcal{P}(E) = \big\{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \big\}$.
- Si $E = \{ a, b, c \}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \big\{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \big\}.$$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$.
- $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right) = \big\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \big\}$.

A.4 Constructeurs

§1 Intersection et réunion

Axiome 53

Soit A et B deux ensembles. Il existe alors un ensemble noté $A \cup B$, appelé **réunion** ou **union** de A et B, tel que

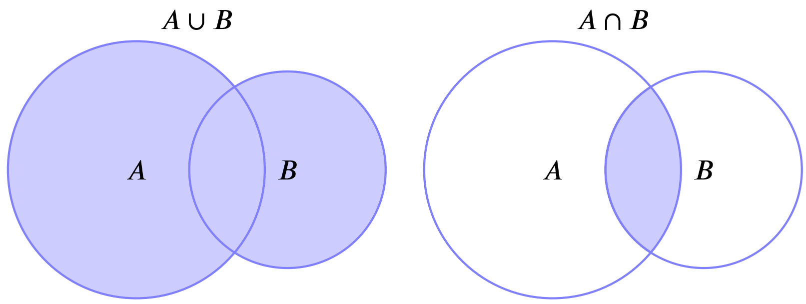
$$\forall x, (x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)).$$

Rappelons qu'en mathématiques, la conjonction « ou » n'est pas disjonctive : l'affirmation $x \in A$ ou $x \in B$ n'exclut nullement que l'on ait $x \in A$ et $x \in B$. Ainsi, $A \cup B$ contient en particulier les éléments communs à A et B.

Axiome 54 Soit A et B deux ensembles. Il existe alors un ensemble noté $A \cap B$, appelé **intersection** de A et B, tel que

$$\forall x, (x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)).$$

On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$.



Proposition 55

1. *L'intersection et la réunion sont commutatives, c'est-à-dire : quels que soient les ensembles A et B,*

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A.$$

2. *L'intersection et la réunion sont associatives, c'est-à-dire : quels que soient les ensembles A, B et C,*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

3. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion et la réunion est distributive par rapport à l'intersection, c'est-à-dire : quels que soient les ensembles A, B et C,*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. *Enfin, quel que soit A*

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Démonstration. Démontrons

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Pour x quelconque,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \ \underline{\text{et}}\ (x \in B \cup C) \\ &\iff (x \in A) \ \underline{\text{et}}\ (x \in B \ \underline{\text{ou}}\ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \underline{\text{et}}\ x \in B) \ \underline{\text{ou}}\ (x \in A \ \underline{\text{et}}\ x \in C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \ \underline{\text{ou}}\ (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

∎

Exemple 56

Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

$$(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies A \cup C \subset B \cup D$$

Démonstration. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$. Montrons que $A \cup C \subset B \cup D$.
Soit $x \in A \cup C$, alors $x \in A$ ou $x \in C$. On a donc deux cas (pas nécessairement disjoints).

- Si $x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subset B$, donc

  $$x \in B \ \underline{\text{ou}}\ x \in D,$$

  c'est-à-dire $x \in B \cup D$.

- Si $x \in C$, alors $x \in D$ car $C \subset D$, donc

  $$x \in B \ \underline{\text{ou}}\ x \in D,$$

  c'est-à-dire $x \in B \cup D$.

  Dans tous les cas, on a $x \in B \cup D$. Finalement, on a montré que si $x \in A \cup C$ alors $x \in B \cup D$, c'est-à-dire $A \cup C \subset B \cup D$.

∎

§2 Différence et complémentaire

Définition 57

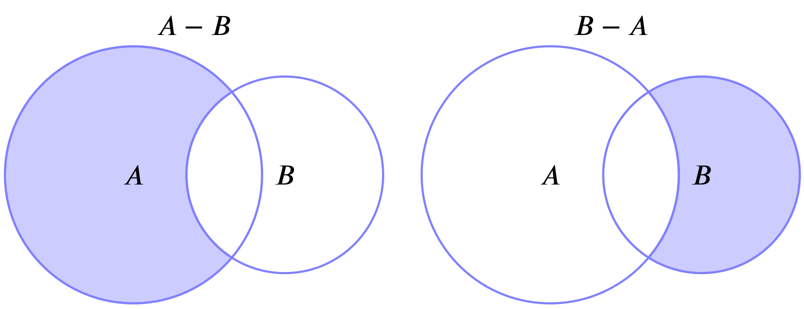
Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **différence** de A et B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On le note $A \setminus B$, qui se lit «A privé de B» ou «A moins B».

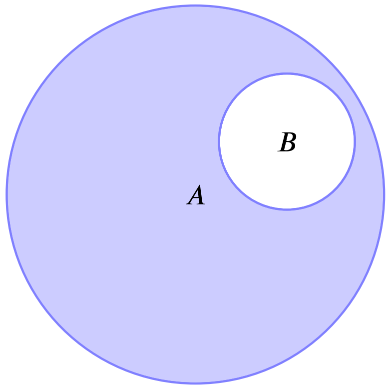
  $$\forall x, (x \in A \setminus B \iff (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B)).$$

  Ainsi $A \setminus B = \{ \, x \mid x \in A \ \text{ et } \ x \notin B \, \}$.

- Si $B \subset A$, on définit le **complémentaire** de B dans A l'ensemble $A \setminus B$. On le note $\complement_A B$.



$\complement_A B = A - B$



Proposition 58 *Soit E, A, B trois ensembles. On a alors*

1. $E \setminus (E \setminus A) = E \cap A$.
2. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.
3. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

Proposition 59 *Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. On a alors*

1. $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$.
2. $\complement_E (A \cap B) = \left(\complement_E A\right) \cup \left(\complement_E B\right)$.
3. $\complement_E (A \cup B) = \left(\complement_E A\right) \cap \left(\complement_E B\right)$.

Ces deux dernières propriétés sont parfois appelée loi de De Morgan pour les ensembles.

§3 Produits cartésiens

Si a et b sont des objets mathématiques, on a $\{ a, b \} = \{ b, a \}$. Si par contre, vous associez à tout point d'un plan muni d'axes de coordonnées ses coordonnées x et y et désignez le point correspondant par la notation classique (x, y), il est clair qu'en général on a $(x, y) \neq (y, x)$. On est ainsi amené à associer à deux objets x et y écrits dans un ordre déterminé un nouvel objet (x, y), un **couple**.

Axiome 60 On suppose que l'on sait former à partir de deux objets a et b un **couple** (a, b) de manière à satisfaire la règle suivante :

$$\forall a, \forall b, \forall c, \forall d, (a, b) = (c, d) \iff (a = c \text{ et } b = d).$$

Les éléments a et b sont respectivement appelés **première** et **seconde composante** (ou encore **coordonnée**) du couple (a, b).

Si $x = (a, b)$, on écrit parfois $a = p_1(x)$ et $b = p_2(x)$.

Axiome 61

Soit A et B deux ensembles. Le **produit cartésien** de A par B est l'ensemble $A \times B$ des **couples** (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. On a

$$A \times B = \{\ x \mid \exists a \in A \text{ et } \exists b \in B, x = (a, b)\ \}$$

ou de manière équivalente

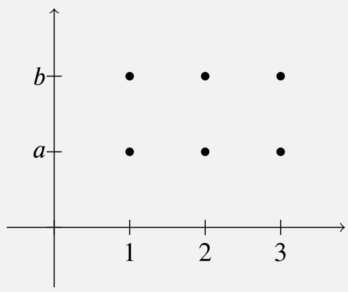
$$A \times B = \{\ (a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\ \}.$$

Exemple 62

L'ensemble $\{\ 1, 2, 3\ \} \times \{\ a, b\ \}$ est l'ensemble de couples

$$\{\ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\ \}$$

Une représentation cartésienne est donnée par



On définit de même des triplets (a, b, c), des quadruplets (a, b, c, d) et plus généralement, à partir de n éléments $a_1, \dots, a_n$, on peut former le ***n*-uplet** $x = (a_1, \dots, a_n)$. On a la règle

$$\forall a_1, \dots, \forall a_n, \forall b_1, \dots, \forall b_n, \left(a_1, \dots, a_n\right) = \left(b_1, \dots, b_n\right) \iff \left(a_1 = b_1 \text{ et } \dots \text{ et } a_n = b_n\right).$$

Les n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in A_1, \dots a_n \in A_n$ forment un ensemble, le **produit cartésien** $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Notation

Si $A = B$, on note simplement $A^2 = A \times A$. Plus généralement, on définit

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} = \left\{\ (x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; x_1 \in A, \dots, x_n \in A\ \right\}.$$

Exemple 63

$(1, \sqrt{2}, \pi, -8.23)$ est un élément de R^4.

CHAPITRE B

EXEMPLES DE RAISONNEMENTS ET DE RÉDACTION

La première règle de rédaction, c'est que *tout objet dont on parle doit être introduit*.

§1 Le vocabulaire du raisonnement mathématique

On a sert à affirmer que quelque chose est vrai.

Exemple 1

On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Donc, d'où, on en déduit, ainsi, par conséquent,... s'intercale entre une affirmation et sa conséquence.

Exemple 2

La fonction f est impaire donc $f(0) = 0$.

§2 Quantificateur universel

Pour tout… Quel que soit… «Pour tout $x \in A$, on a $P(x)$» signifie que tous les x de A vérifient P. À la fin de la phrase, on ne sait plus ce que désigne x.

Exemple 3

- Exemple incorrect. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Donc $x^2 + 1 \geq 1$.
- Exemple correct. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1$.

Soit $x \in A$. On se donne x dans l'ensemble E (n'importe quel x). À partir de maintenant, x désigne cet élément. On ne peut plus écrire dans une même démonstration «$\forall x \in A\ \dots$» ou «$\exists x \in A\ \dots$».

Pour démontrer un énoncé de la forme

$$\forall x \in A, P(x),$$

le réflexe est une rédaction du type.

- Soit $x \in A$
- …(Maintenant, vous avez un x fixé entre les mains et vous pouvez commencer à le disséquer et tenter de montrer que x a la propriété P. Si vous y parvenez, c'est terminé)……
- donc $P(x)$ est vraie.
- *Conclusion :* $\forall x \in A, P(x)$.

En effet, travailler avec un $x \in A$ fixé mais quelconque revient à travailler avec tous les éléments de A.

Exemple 4

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
On sait que $(a - b)^2 \geq 0$, c'est-à-dire, $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$ et enfin

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Conclusion : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. ∎

§3 Définir un objet, Quantificateur existentiel

On pose $x = ...$ **Soit** $x = ...$ sert à définir un nouvel objet (nombre, ensemble...) à partir d'objets déjà connus.

Attention à ne pas confondre «Soit $x = \dots$» avec «Soit $x \in \dots$».

Exemple 5

1. On considère des réels a, b, c. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. On considère des réels a, b, c. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il existe. «Il existe $x \in A$ tel que $P(x)$» signifie qu'il y a au moins un x dans A tel que la propriété $P(x)$ est vraie. On peut l'employer même si on ne sait pas quels x de A vérifient P.

Exemple 6

Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^7 + x + 1 = 0$.

Pour démontrer un énoncé de la forme

$$\exists x \in A, P(x),$$

il faut exhiber un élément x de A qui vérifie la propriété P. Le réflexe est une rédaction du type.

- Posons $x = \dots$.
- On vérifie $x \in A$ et $P(x)$.
- *Conclusion :* $\exists x \in A, P(x)$.

Exemple 7

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x + y$.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. [a]
Posons $z = x + y + 1$. On a bien $z \in \mathbb{R}$ et puisque $1 > 0$, on a $z = x + y + 1 > x + y$.
Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x + y$. ∎

[a] Ici, n'importe quel réel strictement plus grand que $x + y$ convient. Néanmoins, il faut en expliciter un.

Il est parfois difficile de trouver un x convenable. On a alors souvent recourt à un raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante (aussi appelé «analyse / synthèse»). Voir la section §10.

§4 La déduction directe

Si …, alors … Si l'on fait une supposition qui ne dure que le temps d'une phrase.

Exemple 8

Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$.

Un théorème se présente souvent sous la forme $P \implies Q$, où P sont les hypothèses et Q la conclusion. Lorsque l'on «applique» un théorème, on utilise la règle si dessous :

Méthode

Règle du modus ponens
Étant données des relations P et Q, si la relation $(P \implies Q)$ est vraie, et si la relation P est vraie, alors la relation Q est vraie.

Exemple 9

- La lampe est allumée, (P),
- or, si la lampe est allumée, alors l'interrupteur est fermé, $(P \implies Q)$,
- donc l'interrupteur est fermé. (Q).

Supposons P vraie. Sert à faire une hypothèse. Cette supposition (P vraie) est valable dans la suite de la démonstration jusqu'au terme (conclusion, nouveau tiret,…).

Pour démontrer

$$P \implies Q$$

on commence par *supposer* (ce n'est qu'une hypothèse) que P est vraie (c'est le seul cas que nous devons considérer car si P est faux, alors $P \implies Q$ est automatiquement vraie), puis on démontre d'une manière ou d'une autre que Q est vraie.

Exemple 10

$\forall x > 0, \forall y > 0, x < y \implies x^2 < y^2$.

Démonstration. Soit deux réels strictement positifs x et y, montrons [a]

$$x < y \implies x^2 < y^2.$$

- Supposons que $x < y$.
- On a donc $x^2 < xy$ car $x > 0$. On a également $xy < y^2$ car $y > 0$.
- Par conséquent, on a $x^2 < xy < y^2$. D'où $x^2 < y^2$.

∎

[a] Ici $P : x < y$ et $Q : x^2 < y^2$.

Dans une démonstration, on utilise souvent la **transitivité** de l'implication :

Proposition 11

Si P, Q, R sont des relations, si $(P \implies Q)$ et $(Q \implies R)$ sont vraies, alors $P \implies R$ est vraie.

On note cette situation $P \implies Q \implies R$.

§5 La disjonction de cas

Une autre méthode de démonstration fréquemment utilisée dans la pratique est celle de la **disjonction de cas** ; elle repose sur l'énoncé suivant :

Proposition 12 *Soient P, Q, R trois relations ; si les trois relations*

$$P \underline{\text{ ou }} Q, \quad P \Longrightarrow R, \quad Q \Longrightarrow R$$

sont vraies, alors R est vraie.

Dans la pratique, on utilise surtout l'énoncé précédent en prenant pour Q la négation de P.

Exemple 13 $\forall x \in \mathbb{R}, \max(-x, x) = |x|$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On suppose $x > 0$. Alors $x > -x$. Donc $\max(-x, x) = x = |x|$.
- On suppose $x \leq 0$. Alors $-x \geq x$. Donc $\max(-x, x) = -x = |x|$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \max(-x, x) = |x|$. ∎

§6 La contraposition

L'assertion $(P \Longrightarrow Q)$ et l'assertion (non $Q \Longrightarrow$ non P) sont tautologiquement équivalentes. Autrement dit, il revient au même de démontrer une implication ou de démontrer sa contraposée.

Exemple 14 $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})$.

Démonstration. Raisonnons par contraposition. Il s'agit d'établir que pour tout entier n, $(n \text{ pair}) \Longrightarrow (n^2 \text{ pair})$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Supposons n pair. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Ainsi $n^2 = 4m^2 = 2 \times 2m^2$ et n^2 est donc pair.
Ici, la contraposée est plus facile à prouver. L'hypothèse «non Q» portant sur n, il suffit d'élever au carré pour obtenir un renseignement su n^2. ∎

Exemple 15 Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair}) \Longrightarrow (n \text{ pair}).$$

Proposition 16 **Règle du modus tollens**
Étant données des relations P et Q, si la relation $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie, et si la relation Q est fausse, alors la relation P est fausse.

Exemple 17

- Si la lampe est allumée, alors l'interrupteur est fermé, $(P \Longrightarrow Q)$,
- or l'interrupteur n'est pas fermé. (non Q),

- donc la lampe n'est pas allumée. (non P).

§7 L'équivalence

Proposition 18 *Étant données deux relations P et Q, la relation $(P \iff Q)$ est tautologiquement équivalente à la relation*

$$(P \implies Q) \ \underline{\text{et}}\ (Q \implies P).$$

Proposition 19 *Étant données des relations P, Q et R, si les relations $P \iff Q$ et $Q \iff R$ sont vraies, alors la relation*

$$P \iff R$$

est vraie.

Pour montrer

$$P \iff Q,$$

on peut procéder de plusieurs manières :

1. Montrer que $(P \implies Q)$ est vraie, puis montrer que sa réciproque $(Q \implies P)$ est vraie. En fait, dès que vous écrivez une équivalence, vous devez être capable de montrer ces deux implications. Par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 2 \\ x & -y & = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 2 \\ 2x & & = 5 \end{array} \right.$$

est vraie car on conserve la première ligne et on modifie la seconde :

- pour passer de gauche à droite ($\implies$), on additionne les deux équations.
- pour passer de droite à gauche ($\impliedby$), on soustrait la première à la seconde.

2. Aller de P à Q par une succession d'équivalences :

$$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff P_n \iff Q$$

C'est souvent le cas dans des phases calculatoires, par exemple, la résolution d'un système d'équations. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 2 \\ x & -y & = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 2 \\ 2x & & = 5 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} y & = 2 - \frac{5}{2} \\ x & = \frac{5}{2} \end{array} \right. \iff (x = \frac{5}{2} \ \underline{\text{et}}\ y = -\frac{1}{2}).$$

3. Montrer que $(P \implies Q)$ est vraie, puis montrer que (non $P \implies$ non Q) est vraie. Par exemple, nous avons déjà montré que pour tout entier n, (n^2 pair) $\implies$ (n pair) et (n^2 impair) $\implies$ (n impair). Nous avons donc montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair}) \iff (n \text{ pair})$$

§8 Unicité d'un objet

Pour montrer l'unicité d'un élément de A vérifiant la propriété P, on montre

$$\forall x \in A, \forall x' \in A, \big(P(x) \ \underline{\text{et}}\ P(x')\big) \implies x = x'.$$

Cela montre qu'il ne peut y avoir deux objets distincts possédant la propriété P.

L'unicité d'un élément ne prouve pas son existence, on montre qu'*il existe au plus* un $x \in A$ tel que P. «**Au plus un**» signifiant zéro ou un.

Pour démontrer la proposition «$\exists! x \in A, P(x)$», on le fait en deux étapes

- pour l'existence, on fait comme si on travaillait avec la proposition «$\exists x \in A, P(x)$»,
- pour l'unicité, on montre qu'il existe *au plus* un $x \in A$ tel que P. On suppose donc que deux éléments x et x' de A ont la propriété P et on montre alors que $x = x'$.

On peut également utiliser un raisonnement par « condition nécessaire» et « condition suffisante» (appelé également raisonnement par « Analyse» et « Synthèse»).

§9 La déduction par exclusion logique

Proposition 20 *Soit P une assertion. Supposons que*

$$\text{non } P \implies Q$$

où Q est une assertion fausse. Alors P est vraie.

Démonstration. Si non $P \implies Faux$ par contraposée, $vrai \implies P$, c'est-à-dire P vraie.

Ou formellement,

$$\big((\text{non } P \implies Q)\ \underline{\text{et}}\ (\text{non } Q)\big) \implies P$$

∎

Exemple 21 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair}) \implies (n \text{ pair})$
On suppose $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Alors, il existe deux entiers p et q, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
On a donc $p^2 = 2q^2$, d'où p^2 est pair. Par conséquent p est aussi pair. Il existe donc un entier p' tel que $p = 2p'$.
De $4p'^2 = p^2 = 2q^2$, on déduit que $q^2 = 2p'^2$ est pair. Ainsi q est aussi pair.
Les entiers p et q étant tous les deux pairs, ils ne sont pas premiers entre eux. D'où la contradiction.
Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ∎

§10 Raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante

Le raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante (ou analyse-synthèse) est souvent employé pour prouver une existence-unicité.

Exemple 22 Déterminer l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 4 - 2x - 4y.$$

Démonstration. (CN) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 4 - 2x - 4y.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f((x + f(0)) - f(0)) = 4 - 2(x + f(0)) - 0 = 4 - 2f(0) - 2x.$$

L'application f est donc de la forme $f : x \mapsto \lambda - 2x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
(CS) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \lambda - x$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = f(x - (\lambda - 2y)) = f(x + 2y - \lambda) = \lambda - 2(x + 2y - \lambda) = 3\lambda - 2x - 4y.$$

Ce calcul prouve que la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait la condition donnée est $\lambda = \frac{4}{3}$.
Conclusion : La fonction $f : x \mapsto \frac{4}{3} - 2x - 4y$ est l'unique fonction pour laquelle,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 4 - 2x - 4y.$$

∎