CHAPITRE

17

MATRICES INVERSIBLES

17.1 MATRICES INVERSIBLES ET OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

§1 Matrices d'opérations élémentaires

Soit A une matrice de type (m, n) et soit A_i la i-ème ligne de A. Nous pouvons écrire A sous la forme d'une colonne de m lignes,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Cette notation permet d'illustrer facilement les opérations élémentaires sur les lignes. Par exemple, voici les matrices obtenues à partir de A par une opération élémentaire

$L_2 \leftarrow 3L_2$	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$
$\begin{pmatrix} A_1 \\ 3A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

Remarquons maintenant que le produit matriciel AB s'écrit simplement par bloc:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix}.$$

Effectuons maintenant une opération élémentaire sur les lignes du produit AB. Par exemple, ajoutons 4 fois la lignes 1 à la ligne 2:

$$\begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B + 4A_1B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B \\ (A_2 + 4A_1)B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B.$$

Plus généralement, on peut énoncer

Lemme 1

$$\begin{aligned}&(\textit{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } AB)\\ &\qquad = (\textit{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } A) \times B.\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $A = I_n$, on a

$$\begin{aligned}&(\text{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } B)\\ &\qquad = \big(\text{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } I_n\big) \times B.\end{aligned}$$

Définition 2 Une **matrice d'opération élémentaire**, E, est une matrice carrée (n, n) obtenue à partir de la matrice unité I_n en effectuant exactement *une* opération élémentaire.

Exemple 3 Les matrices suivantes sont des matrices d'opérations élémentaires:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première est obtenue à partir de I_3 en multipliant la deuxième ligne par 3. La seconde en échangeant les deux premières lignes. La troisième en ajoutant 4 fois la première ligne à la deuxième ligne.

Test 4 Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont-elles des matrices d'opérations élémentaires?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la première matrice comme produit de deux matrices d'opérations élémentaires.

Définition 5 Une matrice d'opération élémentaire est

- une **matrice de dilatation** lorsqu'elle est obtenue en multipliant une ligne par un scalaire non nul dans I_n;
- une **matrice de transposition** lorsqu'elle est obtenue en échangeant deux lignes de I_n;

- une **matrice de transvection** lorsqu'elle est obtenue en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne dans I_n.

Les matrices d'opérations élémentaires permettent de traduire les opérations élémentaires en terme de produit de matrices. En particulier, elle permettent de relier une matrice à sa forme échelonnée réduite.

Exemple 6 Supposons que l'on cherche la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme première opération élémentaire, nous choisissons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons la même opération sur la matrice unité I_3, nous obtenons une matrice d'opération élémentaire notée E_1:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1.$$

On peut alors vérifier

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 *Une matrice d'opération élémentaire est inversible, et son inverse est aussi une matrice d'opération élémentaire.*

Test 8 Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer E^{-1}. Vérifier que $EE^{-1} = I_3$ et $E^{-1}E = I_3$.

Exemple 9 Nous avons calculer précédemment

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons «annuler» cette opération élémentaire et retrouver la matrice B en multipliant à gauche par E_1^{-1}:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&6\\-1&0&1\end{pmatrix}=B.$$

Ainsi, deux matrice A et B sont équivalentes par lignes si, et seulement si il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires telle que

$$B = EA.$$

Théorème 10 **Traduction matricielle de l'algorithme de Gauß-Jordan**
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par ligne. Autrement dit, pour toute matrice A, il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires et une unique matrice R échelonnée réduite R telles que

$$EA = E_r \dots E_1 A = R.$$

§2 Critère d'inversibilité d'une matrice

Théorème 11 *Soit A une matrice carrée (n, n). Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.*
3. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.*
4. *La forme échelonnée réduite de A est I_n.*

§3 Algorithme pour le calcul de l'inverse

Si A inversible alors $A \underset{L}{\sim} I_n$. On peut donc écrire

$$I_n = E_r \dots E_1 A$$

où $E_1, \dots, E_r$ sont des matrices d'opérations élémentaires correspondants aux opérations élémentaires utilisées pour effectuer la réduction de la matrice A. En multipliant à droite par A^{-1}, on obtient

$$A^{-1} = E_r \dots E_1 = E_r \dots E_1 I_n.$$

Ainsi, si nous appliquons *les même opérations élémentaires* à la matrice I_n que pour réduire A vers I_n, nous obtenons la matrice A^{-1}.

Autrement dit

Théorème 12 *Soit A un matrice carrée (n, n).*
Si $\left(A|I_n\right) \underset{L}{\sim} \left(I_n|B\right)$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple 13 Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test 14 Vérifier que $AA^{-1} = I_3$ (on peut aussi vérifier $A^{-1}A = I_3$).

Test 15 Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 16 *Un matrice A est inversible si, et seulement si A est un produit de matrices d'opérations élémentaires.*

Proposition 17 *Étant donnée deux matrices A et B, alors $A \underset{L}{\sim} B$ si, et seulement si il existe P inversible telle que $A = PB$.*

§4 Calcul de l'inverse par résolution du système $Ax = y$

Méthode La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si pour tout $y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = y$ admet une unique solution. Alors, on peut écrire

$$Ax = y \iff x = A^{-1}y.$$

Exemple 18 Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.2 Image d'une matrice

§1 Définition

Définition 19 Soit A une matrice (m,n). L'image de A, notée $\operatorname{Im}(A)$, est la partie de $\mathbb{K}^m$ définie par

$$\operatorname{Im}(A) = \{\, Ax \mid x \in \mathbb{K}^n \,\} = \{\, y \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n, Ax = y \,\}.$$

Autrement dit, l'image de A est l'ensemble des vecteurs $b \in \mathbb{K}^m$ pour lesquels le système $Ax = b$ est compatible.

Exemple 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{Im}(A)$.

Test 21 Notons $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A, ainsi $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$. Si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$, nous avons vu que Ax s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes de A, explicitement

$$Ax = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n.$$

C'est une bonne occasion de le démontrer à nouveau. Expliciter chaque côté de l'égalité en utilisant $c_i = \left(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{mi}\right)^T$.

À partir de maintenant, nous utiliserons fréquemment ce résultat.

Proposition 22 *Soit A une matrice (m,n). L'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.*
Si $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ où c_i est la i-ème colonne de A, alors

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{\, \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \,\right\}.$$

Exemple 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, pour $x = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\},$$

ou encore

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\} \quad \text{où l'on a} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 24 *Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si b est combinaison linéaire des colonnes de A.*

§2 Matrice équivalentes par colonnes

Brève extension des définitions et résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes sont analogues à celles sur les lignes:

$$C_i \leftarrow \alpha C_i \qquad C_i \leftrightarrow C_j \qquad C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$$

- Faire des opération élémentaires sur les colonnes de A «revient à» faire des opérations élémentaires sur les lignes de A^T.
- Deux matrices A et B sont **équivalentes par colonnes** (notation $A \underset{C}{\sim} B$) si l'on peut obtenir la matrice B à partir de la matrice A en effectuant une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.
- Une opération élémentaire sur les colonnes se traduit par la multiplication à droite par une matrice d'opération élémentaires(ce sont les mêmes «par ligne» que «par colonne»).
- Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si $A \underset{C}{\sim} I_n$
- Si $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix}$ Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition 25 *Si $A \underset{C}{\sim} A'$, alors* $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A')$.

17.3 Critères d'inversibilité d'une matrice

§1 Critères d'inversibilité

Théorème 26 *Pour A une matrice carrée (n, n). Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.*
3. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.*

4. $\mathrm{rg}(A) = n$.

5. $A \underset{L}{\sim} I_n$.

6. $\ker(A) = \{\,\mathbf{0}\,\}$.

7. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une solution.*

8. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

9. $A \underset{C}{\sim} I_n$.

Ici $\mathbb{K}^n$ désigne $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 27 *Une matrice triangulaire supérieure est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.*

On a un résultat analogue pour les matrices triangulaires inférieures.

§2 Inverse à droite, inverse à gauche

Théorème 28 *Soit A et B deux matrice carrée (n, n).*
Si $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles, et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

Autrement dit,

- une matrice carrée inversible à gauche est inversible,
- une matrice carrée inversible à droite est inversible.