Chapter 24 Limite, continuité

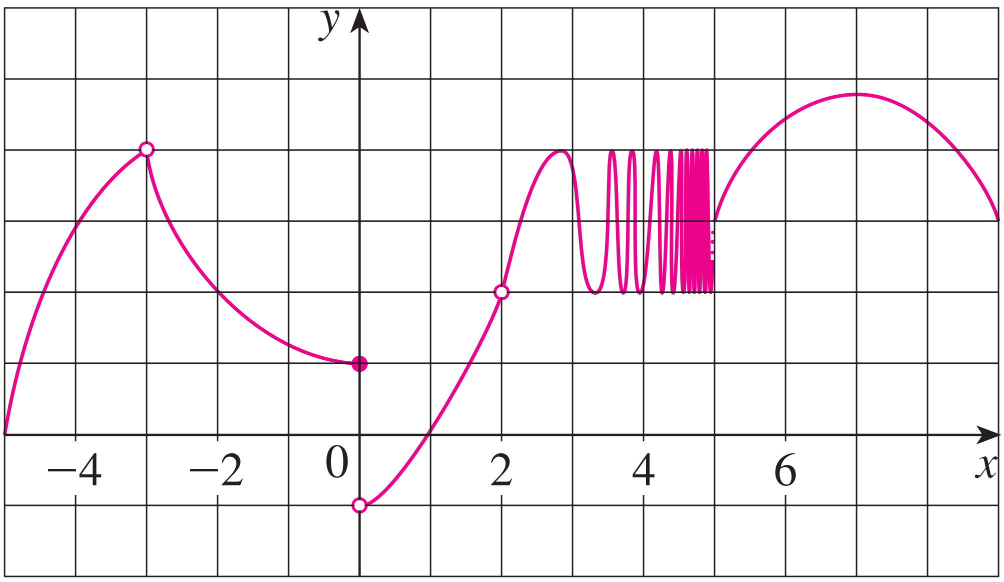
24.1 Caractère local d'un problème

24.2 Limites

Exercice 24.1

Pour la fonction h dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

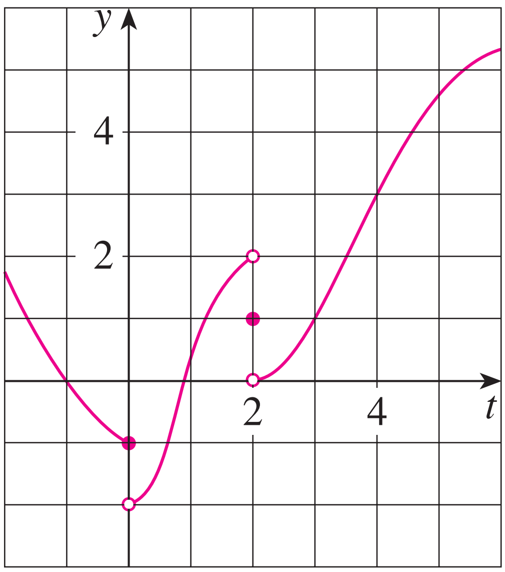
1. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} h(x)$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} h(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$.
4. $h(-3)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x)$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.
8. $h(0)$.
9. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.
10. $h(2)$.
11. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} h(x)$.
12. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} h(x)$.



Exercice 24.2

Pour la fonction g dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ <}} g(t)$.
2. $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} g(t)$.
3. $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ <}} g(t)$.
5. $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ >}} g(t)$.
6. $\lim\limits_{t \to 2} g(t)$.
7. $g(2)$.
8. $\lim\limits_{t \to 4} g(t)$.



Exercice 24.3

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

Exercice 24.4

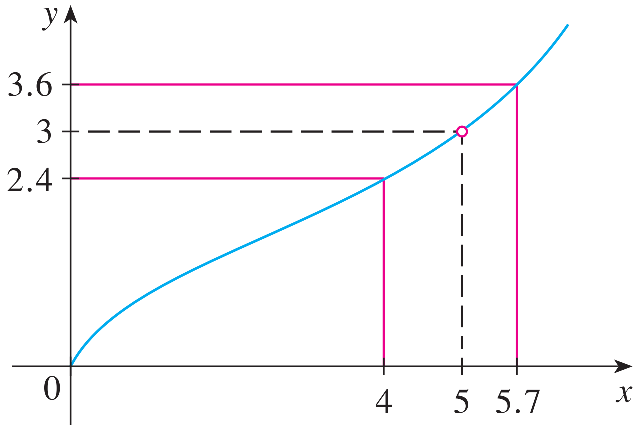
Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln\left(x + x^2\right) \qquad \text{avec} \qquad x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001.$$

Exercice 24.5

À l'aide de la courbe représentative de f, déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } |x-5| \le \delta \text{ alors } |f(x) - 3| \le 0.6.$$



Exercice 24.6

Illustrer la définition de la limite

$$\lim_{x\to 1} \left(4 + x - 3x^3\right) = 2$$

en déterminant une valeur de δ correspondante à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0.1$.

Exercice 24.7

Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition (en ε, δ) de la limite.

1. $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5.$

2. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13.$

3. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2} x + 3 \right) = 2.$

4. $\lim_{x \to 4} (7 - 3x) = -5.$

Exercice 24.8

1. Montrer, en revenant à la définition de la limite, que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 1} = 1.$$

2. Montrer de même que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x - 2} = 1.$$

Exercice 24.9 (*)

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer

1. $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x + 1} = 3.$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{x + 3} = -1.$

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 1.$

Exercice 24.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
On suppose que f a une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.

24.3 Limite et relation d'ordre

Exercice 24.11

1. Démontrer à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. Calculer, si possible

(a) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(c) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(d) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$.

Exercice 24.12 (*)

On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^k}.$$

1. Préciser la valeur $f(x)$ pour $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que f est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
4. En appliquant la définition, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 24.13

Montrer

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

24.4 Opérations sur les limites

24.5 Opérations algébriques sur les limites finies

24.6 Opérations algébriques sur les limites infinies

Exercice 24.14

Trouver

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

24.7 Limites usuelles

Rechercher les asymptotes du graphe de chacune des fonctions f suivantes. Esquisser l'allure du graphe au voisinage des asymptotes.

Exercice 24.15
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

Exercice 24.16
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$;

Exercice 24.17 (**)
$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$;

Exercice 24.18 (***)
$f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$;

Exercice 24.19
$f(x) = \tan x + x$;

Exercice 24.20
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

Exercice 24.21
$f(x) = |x| \sin \dfrac{1}{x}$;

Exercice 24.22
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x}$;

Exercice 24.23
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 24.24 *La règle de l'Hospital*

Déterminer les asymptotes à la courbe de la fonction définie par

$$h(x) = \frac{4x}{4 - x^2}.$$

Exercice 24.25

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Exercice 24.26

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x}.$$

Exercice 24.27

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}{3 + \cos(x)}.$$

24.8 Continuité

Exercice 24.28

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant le point a, continue en a avec $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on ait $f(x) > 0$.

Exercice 24.29

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \\ \mathrm{e}^x & : x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

2. Dans sa copie, Bob affirme

« La fonction $x \mapsto 1$ est continue en 0, donc f est continue en 0. »

Expliquer l'erreur de raisonnement de Bob.

Exercice 24.30

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur continuité.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 24.31

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & x > 4 \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. f est elle continue ?

3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 24.32

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est croissante,
- la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Exercice 24.33

Déterminer les valeurs de b et c de manière à ce que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c & \text{si } |x-2| \geq 1. \end{cases}$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x = -1$.

Exercice 24.34

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Exercice 24.35

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Exercice 24.36

$$f(x) = \frac{e^{2(x+1)} - 1}{e^{x+1} - 1}$$

Exercice 24.37

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$$

Exercice 24.38

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x + 1}$$

Exercice 24.39

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$$

Exercice 24.40 (***)

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et en 1 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right),$$

alors f est constante.

Exercice 24.41 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

.

24.9 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Exercice 24.42

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$p \cdot f(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$

Exercice 24.43 (*)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Exercice 24.44 (**)

Quel est l'intervalle image par f de I avec $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x\cos x$?

Exercice 24.45 (*)

Montrer qu'une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 24.46 (**)

Soit f et g deux applications continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f(b) = g(a).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 24.47 (**)

Un randonneur parcourt 10 km en 2 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

On pourra introduire la fonction $d : [1,2] \to \mathbb{R}$ qui au temps t associe le nombre de kilomètres parcourus depuis 1 heure.

Exercice 24.48 (*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que f est strictement monotone.

On pourra supposer $f(0) < f(1)$. Le cas $f(0) > f(1)$ est analogue.

Exercice 24.49

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. L'objectif est d'établir que f est strictement monotone. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas strictement monotone.

1. Justifier qu'il existe $a, b, x, y \in I$ tels que
$$a < b, \quad f(a) < f(b), \quad x < y, \quad f(x) > f(y).$$
2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(t) = f(tx + (1-t)a) - f(ty + (1-t)b)$$
s'annule.
3. Conclure.

Exercice 24.50 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 24.51 (**)

Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles. On suppose

$$\forall x \in [a,b], f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], f(x) > g(x) + m.$$

Exercice 24.52 (**)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée.

24.10 Continuité uniforme