CHAPITRE

29

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

29.1 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

Supposons que l'on désire étudier le comportement d'une fonction f autour de $x = 0$. Il se peut qu'il existe une constante $a \neq 0$ et un exposant s tels que $f(x) \sim ax^s$. On a alors – par définition – $f(x) = ax^s + o(x^s)$, ce qui nous incite à considérer la différence $f(x) - ax^s$. Il se peut alors qu'il existe une constante $b \neq 0$ et un exposant t tels que $f(x) - ax^s \sim bx^t$; on a nécessairement $t > s$ d'où $f(x) = ax^s + bx^t + o(x^t)$. Il peut alors arriver qu'il existe une constante $c \neq 0$ et un exposant $u > t$ tels que $f(x) - ax^s - bx^t \sim cx^u$, et ainsi de suite.

§1 Partie régulière et développement limité

Définition 1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être au point 0. On dit que la fonction f admet un **développement limité** d'ordre n au point 0 lorsqu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k + o(x^n) \text{ lorsque } x \to 0.$$

- La fonction polynômiale $P_n : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ est appelée la **partie régulière** du développement limité de f à l'ordre n au point 0.
- Les a_kx^k sont les **termes**, les a_k les **coefficients** et la fonction $r_n = f - P_n$ est le **reste** de ce développement.

Plus généralement, on peut parler développement limité de f en 0 dès lors que 0 est un point adhérent à I de sorte que les limites lorsque $x \to 0$ aient un sens.

Remarque Dire que f admet un développement limité à l'ordre n au point 0 signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que au voisinage de $x = 0$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 2 *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

S'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-1} x^{p-1} \sim a_p x^p \quad \text{lorsque } x \to 0.$$

Exemple 3 On pose $f(x) = 1 + x^2 + x^3$. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 0, 1, 2 et $n \geq 3$.

Proposition 4 *Pour $n \in \mathbb{N}$ et au voisinage de $x = 0$*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Remarque Soit f une fonction admettant un développement limité en 0.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors, lorsque $x \to 0$,

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n).$$

Caractérisation 5 Définition équivalente
L'application f admet un développement limité à l'ordre n en 0 si et seulement si il existe un polynôme P de degré au plus n tel que au voisinage de $x = 0$,

$$f(x) = P(x) + o(x^n).$$

§2 Troncature

Proposition 6 *Si f admet un développement limité d'ordre n, elle admet aussi un développement limité d'ordre p pour tout $p < n$ et il est obtenu en **tronquant** à l'ordre p la partie régulière du développement limité à l'ordre n.*

§3 Unicité d'un développement limité

Théorème 7 *Si f admet un développement limité d'ordre n au point 0, ce développement limité est unique. Cela revient à dire que si les réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ vérifient*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

alors $a_k = b_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Corollaire 8 *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0.*

1. *Si f est paire, alors la partie régulière du développement est un polynôme pair.*
2. *Si f est impaire, alors la partie régulière du développement est un polynôme impair.*

§4 Développements limités et régularité

Développements limités et continuité

Proposition 9 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Alors f admet une limite en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0.*
Dans ce cas

$$f(x) = a_0 + o(\mathbf{1}) \iff \lim_{x\to 0} f(x) = a_0.$$

Corollaire 10 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, alors f est continue en 0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 au point 0.*

Si on a un développement limité à l'ordre 0, $f(x) = a_0 + o(1)$, pour une fonction qui n'est pas définie en 0, celle-ci est alors prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$.

Dans la suite Quitte à effectuer un prolongement par continuité, on supposera les fonctions définies en 0.

Développements limités et dérivabilité

Proposition 11 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Alors f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce cas*

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x).$$

Contre-exemples importants

Il existe des fonctions f qui admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans que f soit deux fois dérivable en 0.

Prenons la fonction $f\ :\ x \mapsto 1+x+x^2+x^3 \sin \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^\star$, et qu'on peut prolonger par continuité au point 0 en posant $f(0) = 1$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, on voit que

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2);$$

la fonction f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

De plus, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, et d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = 1$ — d'ailleurs $f(x) = 1 + x + o(x)$ prouve que f est dérivable en 0 de dérivée 1.

Or, pour $x \neq 0$, le taux de variation $\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ce qui prouve que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Ainsi, pour prouver qu'une fonction f est p fois dérivable en 0, il est incorrect de donner pour argument le fait qu'elle admet un développement limité d'ordre p en ce point.

29.2 Formule de Taylor-Young

Lemme 12 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit g une fonction dérivable au voisinage de 0. Si $g'(x) = o\left(x^k\right)$ au voisinage de 0, alors*

$$g(x) - g(0) = o\left(x^{k+1}\right).$$

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire au voisinage de $h = 0$

$$g'(h) = h^k \omega(h) \qquad \text{avec} \qquad \omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Pour x au voisinage de 0, l'application g est continue sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), dérivable sur $]0, x[$ (ou $]x, 0[$). Appliquons l'égalité des accroissements finis dans l'intervalle $[0, x]$: il existe $c_x \in]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = x g'\left(c_x\right).$$

On en déduit

$$|g(x) - g(0)| = \left|x c_x^k \omega\left(c_x\right)\right| \leq \left|x^{k+1} \omega\left(c_x\right)\right|$$

Avec, $\lim\limits_{x\to 0} \omega\left(c_x\right) = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} c_x = 0$. ∎

Théorème 13 **Formule de Taylor-Young**

Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, et au voisinage de $x = 0$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \tag{29.1}$$

Démonstration. [1] Nous faisons une récurrence sur n. La formule est bien entendu vraie si $n = 0$ ou $n = 1$ d'après les résultats de la partie §4.

Supposons le résultat établit au rang n et f $n+1$ dérivable au voisinage du point 0. En l'appliquant au rang n à f' (qui est bien n fois dérivable au voisinage de 0), on peut écrire

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Appliquons le lemme avec $k = n$ et

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

on a alors $g'(x) = o\left(x^n\right)$ et comme $g(0) = 0$, le lemme conduit à $g(x) = o\left(x^{n+1}\right)$, ce qui est la formule cherchée. ∎

Corollaire 14 *Si $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors f admet un développement limité en 0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 15 *Au voisinage de $x = 0$,*

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).$
2. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
3. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
4. $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
5. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

Corollaire 16 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et au voisinage de $x = 0$,*

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

où on a noté $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. On parle de coefficient binomial généralisé.

Dans le cas où α est entier, la partie régulière reproduit le développement du binôme de Newton.

Corollaire 17 *Au voisinage de $x = 0$,*

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) & \textit{par imparité et classe } \mathscr{C}^8. \end{cases}$$

[1] L'hypothèse f est n fois dérivable suffit pour établir la formule, mais le programme impose f de classe $\mathscr{C}^n$.

Remarque

Il faut se garder de croire que le théorème de Taylor-Young soit la panacée en théorie locale (insistons d'ailleurs encore une fois sur le fait que ses hypothèses sont une condition suffisante mais nullement nécessaire d'existence d'un développement limité à l'ordre n). Celui qui a calculé les sept premières dérivées de la fonction tan est convaincu de sa lourdeur d'emploi. Il accueillera donc avec soulagement les techniques qui vont suivre qui permettent de trouver plus aisément de nouveaux développements limités.

Test 18

(Re)trouver le développement limité à l'ordre n en 0 des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

29.3 Opérations sur les développements limités

Rappel

Au voisinage de $x = 0$,

1. $q > p \implies x^q = o(x^p)$.
2. $o(x^p) = x^p \times o(1)$.
3. $x^p \times o(x^q) = o(x^{p+q})$.
4. $o(x^p) \times o(x^q) = o(x^{p+q})$.
5. Si $0 \le p \le q$, $o(x^p) + o(x^q) = o(x^p)$.

§1 Sommes et produits de développements limités

Théorème 19

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$ et λf admettent des développements limités d'ordre n au point 0 donné par

$$(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n) \qquad (\lambda f)(x) = \lambda P(x) + o(x^n).$$

Exemple 20

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sin x + \cos x$.

Remarque

Si les développements limités de f et g ne sont pas au même ordre, on fait un développement limité de $f + g$ en gardant l'ordre minimum. Par exemple, si au voisinage de $x = 0$

$$f(x) = 1 - x^2 + o(x^2) \qquad g(x) = 3 + 2x + \frac{x^2}{3} + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

alors, on ne peut donner qu'un développement limité de $f + g$ à l'ordre 2

$$(f + g)(x) = 4 + 2x - \frac{2x^2}{3} + o(x^2).$$

Théorème 21

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \qquad\qquad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n en 0 *dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le produit PQ de leurs parties régulières.*

Le produit de deux développements limités à l'ordre n n'est pas un développement limité à l'ordre $2n$! C'est un développement limité au même ordre n.

Autrement dit, on multiplie mentalement terme à terme ; on voit apparaître d'abord des termes de la forme ax^s, puis des termes de la forme $ax^s o(x^t) = o(x^{s+t})$, enfin un terme $o(x^s)o(x^t) = o(x^{s+t})$. Parmi les termes de la forme $o(x^u)$, seul celui ou ceux ayant le plus petit exposant u est à reternir puisque tous les autres sont eux mêmes des $o(x^u)$; et parmi les termes de la forme ax^s, seuls ceux d'exposants $s \leq u$ sont à retenir pour la même raison.

Exemple 22

Développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+x}$.

Dans certains cas, on peut profiter de l'absence de termes constants dans certaines parties régulières pour diminuer la difficulté des calculs :

Exemple 23

Chercher un développement limité à l'ordre 7 en 0 de $(\operatorname{sh} x)(\sin x - x)$.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction étant paire, sa partie régulière n'aura que des puissances paires. Comme $\operatorname{sh} x = x + o(x)$, et $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on voit qu'on pourra mettre x^4 en facteur dans la partie régulière du produit

$$\begin{aligned} f(x) = (\operatorname{sh} x)(\sin x - x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\ &= x^4\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^3)\right) \\ &= x^4\left(-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{36}\right)x^2 + o(x^3)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + o(x^7)$$

On voit ici que les termes en x^5 et x^7 du $DL7$ de $\operatorname{sh} x$ et le terme en x^7 du $DL7$ de $\sin x - x$ étaient inutiles. ∎

Cependant, ces améliorations de la méthode générale sont un peu délicates à manier: il convient, si on les utilise, de rester très soigneux, de peur d'oublier un terme qui ne soit pas négligeable à l'ordre où on travaille.

Méthode

De manière générale, si

$$f(x) = x^p(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)) \text{ et } g(x) = x^q(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))$$

Alors on obtient un développement limité de fg à l'ordre $p+q+n$ (on gardex^{p+q} en facteur).

§2 Composition de développements limités

Théorème 24 *Soient u et f deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point 0. On suppose que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.*

$$u(x) = P(x) + o(x^n) \qquad f(y) = Q(y) + o(y^n).$$

Alors l'application $f \circ u$ admet un développement limité à l'ordre n au point 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme composé $Q \circ P$.

Exemple 25 Déterminer en développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}}$.

§3 Développement limité d'un quotient

Théorème 26 *Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 avec $f(0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

Corollaire 27 *Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0 avec $g(0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

Démonstration & méthode. La fonction f, non nulle en 0 et continue en 0, est non nulle au voisinage de 0. Notons $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ la partie régulière du DLn de f en 0. Alors $a_0 = f(0)$ est non nul, et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}\frac{1}{1 + (a_1/a_0)x + \cdots + (a_n/a_0)x^n + o(x^n)} = \frac{1}{a_0}\frac{1}{1 + u(x)},$$

la fonction $x \mapsto u(x)$ étant nulle en 0, et admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Or $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ admet un développement limité en 0 à tout ordre, donc $1/f$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 par composition. ∎

Exemple 28 Déterminer un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $x = 0$ de $\tan x$ en utilisant le quotient

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Méthode Il peut arriver que le quotient $\frac{f}{g}$ admette un développement limité en 0 alors que $g(0) = 0$; le théorème ne s'applique pas directement. De manière générale, si

$$f(x) = x^p(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)) \text{ et } g(x) = x^q(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))$$

avec $p \geq q$ et $b_0 \neq 0$, alors on obtient un développement limité de f/g à l'ordre $p - q + n$ (on garde x^{p-q} en facteur).

Exemple 29 Montrer que $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

§4 Intégration

Théorème 30 *Soit f une application dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que sa fonction dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 et

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Corollaire 31 *Soit f une application continue sur un voisinage de 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors toute primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est obtenue par intégration de la partie régulière de celui de f. Ainsi

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Corollaire 32 *Au voisinage de $x = 0$,*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Corollaire 33 *Au voisinage de $x = 0$,*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Démonstration. On intègre le développement limité

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

∎

§5 Dérivation

L'existence d'un développement limité de f ne permet *à priori* pas de déduire l'existence d'un développement limité de f'. Revoir par exemple

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Proposition 34 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$
$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors $b_0 = a_1, b_1 = 2a_2, \ldots, b_{n-1} = na_n$.

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^n$, la formule de Taylor-Young assure l'existence du développement limité à l'ordre $n-1$ de f'. On peut donc déduire ce développement limité en dérivant terme à terme le développement limité à l'ordre n de f.

29.4 Développement limité en un point a

Définition 35 **Développement limité en un point a**
On dit qu'un fonction f définie au voisinage d'un point a admet un **développement limité** d'ordre n en ce point si la fonction

$$h \mapsto F(h) = f(a+h)$$

admet un développement limité d'ordre n au point 0. Dans ce cas, il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que au voisinage de $h = 0$,

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

ou de manière équivalente, au voisinage de $x = a$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Dans la dernière écriture, il ne sert à rien de développer la partie régulière en utilisant la formule du binôme ! En effet, c'est sous la forme écrite ci-dessus que la partie régulière donne des renseignements intéressants.

Exemple 36 Déterminer un développement limité de ln à l'ordre 3 au voisinage de 4.

Proposition 37

Soit f une fonction définie au voisinage de a.

1. *La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 au point a. Dans ce cas,* [a]

$$f(x) = f(a) + o(\mathbf{1}), \quad [x \to a];$$

2. *La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \quad [x \to a],$$

ou de manière équivalente, on peut écrire $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ quand $h \to 0$.

3. *Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. On suppose qu'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq 0$, alors au voisinage de $x = a$,*

$$f(x) - a_0 - a_1(x-a) - \cdots - a_{p-1}(x-a)^{p-1} \sim a_p(x-a)^p$$

[a] Ou seulement prolongeable par continuité si f n'est pas définie en a.

Théorème 38

Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Les opérations sur les développements limités restent valables.

Proposition 39

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a, alors

1. *$f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet un développement limité à l'ordre n en a.*
3. *fg admet un développement limité à l'ordre n en a.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*

Proposition 40

Si f admet un développement limité à l'ordre n au point a et si g admet un développement limité à l'ordre n au point $f(a)$, alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au point a.

29.5 Applications des développements limités

§1 Recherche de limites et d'équivalents

Exemple 41 Déterminer la limite au point 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}.$$

Démonstration. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

d'où

$$\begin{aligned} x(1+\cos x) - 2\tan x &= x\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \\ &= -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim -\frac{7}{6}x^3 \\ 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim -\frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Finalement $f(x) \sim \frac{-\frac{7}{6}x^3}{-\frac{1}{6}x^3} \sim 7$, d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 7$. ∎

Test 42 Soit $g(x) = \dfrac{\sin x - x}{\operatorname{sh} x - x}$. Déterminer $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Test 43 Soit $h(x) = \dfrac{\ln(1+x) - xe^{-x/2}}{(1+x^3)^\alpha - 1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim_{x\to 0} h(x)$.

§2 Application aux représentations graphiques $y = f(x)$

Proposition 44 *Soit f, une fonction définie au voisinage d'un point a. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 au point a, $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, Alors f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation*

$$\Delta \,:\, y = a_0 + a_1(x-a).$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de a et admet un développement limité de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0,$$

la représentation graphique de f admet, au point d'abscisse a, un tangente T_a d'équation

$$T_a \,:\, y = a_0 + a_1(x-a).$$

Le signe de la quantité $\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$ permet de palcer le point $M(x, f(x))$ par rapport à cette tangente : pour $\Delta(x)$ positif, M est situé «au dessus» de T_a. Comme

$$\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p,$$

on connaît le signe de cette quantité **au voisinage de a**. En particulier, si p est pair, la représentation graphique de f reste **localement** du même côté de T_a (point à concavité) ; si p est impair, la représentation graphique de f traverse donc sa tangente T_a lorsque $x - a$ change de signe (point d'inflexion).

Exemple 45 Le développement limité à l'ordre 3 au point 4 de ln nous donne

$$\ln(x) = \ln(4) + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(x-4)^3}{192} + o\left((x-4)^3\right).$$

La tangente à la courbe du logarithme au point d'abscisse 4 a donc pour équation

$$T_4 \,:\, y = \ln(4) + \frac{x-4}{4}.$$

De plus, pour x au voisinage de 4, on a $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \sim -\frac{(x-4)^2}{32}$ donc $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \leq 0$ pour x au voisinage de 4. La courbe représentative de logarithme se trouve donc **sous** sa tangente **au voisinage** de $x = 4$.

Exemple 46 Reprenons l'exemple

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

La fonction ci-dessus n'était pas définie en 0, mais elle tend vers 1 en 0, et on peut la prolonger par continuité en posant $f(0) = 1$. On en déduit que $f'(0) = \frac{1}{2}$, que la tangente à la courbe est d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$, et que la différence $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est équivalente à la fonction $-\frac{x^2}{4}$ au voisinage de 0, et est donc négative au voisinage de 0. Ainsi la courbe de la fonction est-elle **sous** sa tangente **au voisinage** du point d'abscisse 0.

§3 Extrémums

Méthode Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$ et $a_p \in \mathbb{R}^\star$. Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_p\,(x-a)^p\,.$$

- Si p est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. La fonction f admet un extrémum local en a.
- Si p est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a. La fonction f n'admet pas d'extrémum local en a.

Proposition 47 *Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$ et soit $a \in I$.*

- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.*
- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.*

Exemple 48 Soit $f : x \mapsto \operatorname{sh}(x)\sin(x)$. La fonction f admet-elle un extrémum local en 0?

29.6 Développements asymptotiques

§1 Exemples de développements asymptotiques

Lorsque l'on fait un développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point a, on compare f à une fonction polynômiale. On peut généraliser ce procédé en comparant f à un fonction rationnelle, ou encore à des fonctions comportant des logarithmes ou des racines carrées. On dit alors que l'on fait un **développement asymptotique** de f en a.

Exemple 49 Étudier la fonction $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x)$ au voisinage de $x = 0$.

Démonstration. Cette fonction n'admet pas de développement limité en 0 car elle tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x).
\end{aligned}$$

La présence du $\frac{1}{x}$ confirme que ce n'est pas un développement limité. ∎

Exemple 50 Étudier la fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\ln(1+u) \\ &= \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4)\right) \\ &= \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4)\right)+\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right). \end{aligned}$$

Ici, on doit additionner un développement limité et un développement asymptotique qui n'ont pas la même précision. On conserve la précision la plus mauvaise.

$$f(x) = \frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\frac{4u}{3}-\frac{3u^2}{4}+o(u^2) = \sqrt{x}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3\sqrt{x}}-\frac{3}{4x}+o(\frac{1}{x}), \text{ quand } x \to +\infty.$$

∎

§2 Détermination d'une asymptote

Définition 51 Soit f, une fonction définie dans un intervalle ayant pour extrémité $\omega = \pm\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** au graphe de f en ω lorsque

$$\lim_{x\to\omega} f(x) - ax - b = 0.$$

Méthode Lorsqu'on imagine que f admet une droite asymptote en $\omega = \pm\infty$, il peut être très rapide de faire un développement limité de $\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h})$ où on a posé $h = \frac{1}{x}$. Un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $h = 0$ suffit alors à avoir l'asymptote, et un développement limité à un ordre plus grand permet de comparer les positions du graphe et de l'asymptote.

Exemple 52 Étudier au voisinage de $+\infty$ la fonction

$$\begin{aligned} f : \ ]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2-x+2}{x+3}e^{-1/x} \end{aligned}$$

Démonstration. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et il y a donc un espoir d'asymptote.

Posons $h = \frac{1}{x}$ qui est voisin de 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1-h+2h^2}{1+3h}\,\mathrm{e}^{-h} \\
&= (1-h+2h^2)(1-3h+9h^2)(1-h+\frac{1}{2}h^2)+o(h^2) \\
&= (1-4h+14h^2+o(h^2))(1-h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)) \\
&= 1-5h+\frac{37}{2}h^2+o(h^2) \\
&= 1-\frac{5}{x}+\frac{37}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc $f(x) = x - 5 + \frac{37}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi la droite d'équation $y = x - 5$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, et

$$f(x) - (x-5) \sim \frac{37}{2}\frac{1}{x}$$

est positif pour x assez grand : la courbe est au dessus de son asymptote, au moins pour x assez grand. ∎

29.7 Développements limités usuels au voisinage de $x = 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$
$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) \end{cases}$$
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)\end{aligned}$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5\,x^4}{128} + \frac{7\,x^5}{256} - \frac{21\,x^6}{1024} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) \end{cases}$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

Remarque On a aussi les simplifications d'écriture

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n) &= 2^n \cdot n! \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} &= \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$