Chapter 18 Déterminant d'une matrice carrée

18.1 Définition

Exercice 18.1

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 18.2

En développant selon une ligne ou une colonne bien choisie, calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$,

2. $\begin{vmatrix} 1 & 23 & 6 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

Exercice 18.3

Soit $w \in \mathbb{R}$ et B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & w \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de w telles que $\det B = 0$.

Exercice 18.4

Évaluer le déterminant ci-dessous en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes pour simplifier vos calculs.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vérifier le résultat de votre calcul en utilisant cette fois des opérations élémentaires sur les colonnes.

Exercice 18.5

Pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible?

Exercice 18.6 *Dérivation d'un déterminant*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère un déterminant Δ d'ordre 3 dont les neuf coefficients sont des fonctions $a_{i,j}$ dérivables sur I:

$$\forall x \in I, \Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est dérivable en tout point $x \in I$ et que

$$\forall x \in I, \Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a'_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a'_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a'_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a'_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a'_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a'_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a'_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a'_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

2. Sans aucun calcul de déterminant, montrer que le déterminant suivant est indépendant de x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(x+1) & \operatorname{sh}(x+1) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+2) & \operatorname{sh}(x+2) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+3) & \operatorname{sh}(x+3) & -4 \end{vmatrix}.$$

Donner sa valeur.

Exercice 18.7

Prouver l'identité suivante

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c). \tag{1}$$

Exercice 18.8

Soit $(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les déterminants suivants en présentant, si possible, les résultats sous forme factorisée.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}.$

Exercice 18.9

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, donner une forme factorisée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 18.10

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$

Exercice 18.11

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 18.12 *Déterminant et suites récurrentes linéaire*

Soient a et b deux réels distincts et non nuls. Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

- Déterminer une relation entre Δ_n, Δ_{n+1} et Δ_{n+2}.
- Donner l'expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 18.13

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, tel que $\sin\varphi$ soit non nul. On note A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ avec $a_{i,i} = 2\cos\varphi$ pour $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leq i < n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. On pose $D_n = \det A_n$.

Établir une formule de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$. En déduire

$$\forall n \geq 1, D_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Exercice 18.14 *Matrices à petits coefficients*

Soit $n \geq 1$ et $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes:

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \in [0,1[$.
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} \leq 1$.

Démontrer que $|\det(A)| < 1$.

18.2 Propriétés des déterminants

Exercice 18.15 *Factorisation d'un déterminant circulant*

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère les deux matrices U et V de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ définies par

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit UV.

2. Calculer $\det(UV)$ en le mettant sous la forme

$$\det(UV) = P(1)P(j)P(j^2)\det(V).$$

où $P(x) = a + bx + cx^2$.

3. En déduire une factorisation complexe de $\det(U)$.

Exercice 18.16

Soit A une matrice $(3,3)$ telle que $\det A = 7$.
Déterminer $\det(2A)$, $\det(A^2)$, $\det\left(2A^{-1}\right)$ et $\det\left((2A)^{-1}\right)$.

Exercice 18.17 *Une famille de matrices inversibles*

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]-\alpha, \alpha\right[, A + xB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 18.18 *Matrices à coefficients entiers et inversibilité*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que son inverse ait tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 18.19

Soient des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $\det(A)$ et $\det(B)$ soient premiers entre eux.

Montrer l'existence de $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n.$$

18.3 Compléments HP

Exercice 18.20

Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauß puis à l'aide des formules de Cramer.

1. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x + 4y + z = 1 \end{cases}$.

Exercice 18.21

1. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer le déterminant de Vandermonde

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec a, b, c deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}. \qquad \text{(S)}$$