Chapter 41 Représentation matricielle en algèbre linéaire

41.1 Famille de vecteurs

41.1.1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

41.1.2 Matrice de passage

Exercice 41.1

Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la famille de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f_1 = e_1 - 2e_2, \qquad f_2 = e_2 - 3e_3, \qquad f_3 = e_3 - 4e_4, \qquad f_4 = e_4.$$

1. Prouver que la famille $\boldsymbol{f}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer les matrices de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{f}$ et de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{e}$.

Exercice 41.2

1. Déterminer les valeurs du paramètre λ telles que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $b = (2, 0, 1)^T$ et $s = (2, 0, 3)^T$. Vérifier que chacune des familles

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, b) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S} = (v_1, v_2, s)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{S}$.

3. Si $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(w) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, déterminer $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w)$.

Exercice 41.4

On considère le plan W dans $\mathbb{R}^3$,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x - 2y + 3z = 0 \right\}.$$

1. Monter que chacune des familles

$$\mathcal{S} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de W.

2. Montrer que le vecteur $v = (5, 7, 3)^T$ est un vecteur de W et déterminer ses coordonnées $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v)$ relativement à la base $\mathcal{S}$.

3. Déterminer la matrice de passage M de la base $\mathcal{S}$ à la base $\mathcal{B}$; ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(x) = M \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

Utiliser la relation précédente pour déterminer $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$ pour le vecteur $v = (5, 7, 3)^T$ et vérifier votre réponse.

Exercice 41.6

Soit $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = \left(X^2 + X + 1, X^2 - 1, X^2 + X\right)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 - 6X + 5$ dans $\mathcal{B}'$.

41.2 Représentation d'une application linéaire par une matrice

41.2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Exercice 41.7

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T relativement aux bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 41.8

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P(X+1) + P(X+2) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Donner la matrice de f par rapport aux bases canoniques.

3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.

4. Soit $Q \in \mathrm{Im}\, f$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 41.9

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques puis déterminer le noyau et l'image de l'application.

1. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}_5[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$.

2. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP-(X-1)^2P' \end{array}$.

3. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (1+X^2)P''-2XP' \end{array}$.

4. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1),P(0),P(1)) \end{array}$.

41.2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice

Exercice 41.11

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques puis déterminer le noyau et l'image de l'application.

1. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y,x+y,x) \end{array}$.

2. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x,2x,x) \end{array}$.

3. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y+2z \end{array}$.

4. $u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+3y,x-z,3x) \end{array}$.

Exercice 41.13

Soit $u \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associée à $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère les quatre vecteurs

$$e_1=(1,0,0,0),\qquad e_2=(0,1,0,0),\qquad e_3=(4,1,0,-3)\qquad \text{et}\qquad e_4=(-7,0,1,5).$$

Montrer que $\boldsymbol{e}=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. On considère les trois vecteurs

$$f_1=(4,2,1),\qquad f_2=(1,1,-1)\qquad \text{et}\qquad f_3=(0,0,1).$$

Montrer que $\boldsymbol{f}=\left(f_1,f_2,f_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de u dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$.

41.2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Exercice 41.14

On considère les deux applications f et g définies par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & \left(P(0),P(1),P'(0),P'(1)\right) \end{array}$$

$$\text{et}\quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z+t,x-t) \end{array}.$$

1. Montrer que f et g sont linéaires.

2. Déterminer les matrices de f et g relativement aux bases canoniques de leurs ensembles de départ et d'arrivée.

3. En déduire la matrice de $g\circ f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

41.2.4 Changement de bases

41.2.5 Matrices équivalentes et rang

41.3 Cas des endomorphismes

41.3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base

Exercice 41.16 *CCINP MP 2022*

Le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathbf{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer que dans une certaine base de E la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 41.19

Soit $u \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A.
2. Que peut-on directement déduire de la question précédente concernant u, $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$?
3. Calculer le rang de $A - 4I_4$.
   Que peut-on en déduire sur $\ker\left(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$?
4. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\ker\left(u - 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$.
5. Montrer que la réunion des deux bases de la question **4** est une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Préciser la matrice A' de u dans cette base.

Exercice 41.22

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dans lui même définie par $f(X) = AX$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$.

Indication : Attention à la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$...

Exercice 41.25

Vérifier que $P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 41.26

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par

$$f : P(X) \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1).$$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ et montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41.27

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 41.29

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 \\ -4 & -4 & 6 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 41.31

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 41.32

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ soit

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 41.34

Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à des bases différentes.
Indication : On peut par exemple choisir l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à A et déterminer une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ telle que $M_{\mathcal{V}}(f) = B$.

41.3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 41.36

Soit $f \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.
Vérifier que f est un projecteur. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 41.37

Soit $f \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.
Vérifier que f est une symétrie. Déterminer $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f + \mathrm{Id})$.

Exercice 41.43

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$. On désigne par u et v les endomorphismes suivants

$$u \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array} \quad ; \qquad v \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array}.$$

1. Déterminer la matrice, sur la base canonique de E, de l'endomorphisme $u + \lambda v$, où λ est un réel arbitraire. On notera M_λ cette matrice.

2. Discuter suivant le réel λ, le rang de la matrice M_λ.

Exercice 41.44

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions définies par

$$x_1(t) = \cos(t)\,\mathrm{ch}(t), \qquad x_2(t) = \sin(t)\,\mathrm{ch}(t), \qquad x_3(t) = \cos(t)\,\mathrm{sh}(t), \qquad x_4(t) = \sin(t)\,\mathrm{sh}(t).$$

   appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces quatres vecteurs, et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$. Montrer que F est stable par u et déterminer la matrice M de u dans la base (x_1, x_2, x_3, x_4) de F.

3. Calculer M^2, M^3, M^4. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

41.3.3 Changement de base

Exercice 41.48

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$. Soient $f_1 = (-2, 3)$ et $f_2 = (-2, 5)$.

1. Montrer que $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D = M_{\boldsymbol{f}}(u)$.

2. Exprimer A en fonction de D.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2} x_n - \dfrac{2}{3} y_n \end{cases}. \tag{R}$$

Exercice 41.50

Soit $u \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère les trois vecteurs

$$e_1 = (1, -1, 0), \qquad e_2 = (1, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

   Montrer que $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la matrice T de u dans la base $\boldsymbol{e}$.

3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 41.52

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$b_1 = (1,1,2), \qquad b_2 = (-2,-1,3), \qquad b_3 = (0,-3,-1).$$

Notons

$$E = \mathrm{Vect}(b_1, b_2) \text{ et } F = \mathrm{Vect}(b_3).$$

1. Montrer que la famille $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces E et F ?
2. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Calculer la matrice M de p dans la base $\boldsymbol{b}$.
3. Notons $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice P de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{b}$.
4. Soit N la matrice de p dans la base $\boldsymbol{e}$. Quelle relation existe-t-il entre les matrices M, N et P ? Calculer la matrice N.

Exercice 41.53

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide de la méthode du pivot de Gauß ou du déterminant, déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
2. Pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente, déterminer le sous-espace vectoriel $\ker\left(u - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.
3. En déduire une base $\boldsymbol{e}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ dans laquelle la matrice D de u soit une matrice diagonale.
4. Exprimer A en fonction de D.
5. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 41.54

Soient (u_n) et (v_n) les suites à termes réels définies par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_{n+1} = AX_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_n en fonction des puissance de A et de X_0.
3. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. Calculer une base des espaces vectoriels $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\ker(f - 3\,\mathrm{Id})$. En déduire une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(R)$ vérifiant
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de D^n. En déduire l'expression de u_n et v_n.

Exercice 41.55 *BanquePT 2009, épreuve A, partie A*

Dans tout l'exercice, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathbf{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, I_E l'identité dans E et 0_E l'endomorphisme nul sur E.

1. Dans cette question E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang?

   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

   Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

3. Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, p désignera un projecteur de E, où E est un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E; on pourra écrire, pour $x \in E$, $x = [x - p(x)] + p(x)$.

4. Soit q l'endomorphisme défini par: $q = I_E - p$. Montrer que q est un projecteur de E. Déterminer le noyau et l'image de q. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

5. Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

   (a) Montrer que si $p_1 \circ p_2 = O_E$, alors q est un projecteur de E.

   (b) Montrer que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) \subset \ker(q)$.

   (c) Montrer[1] alors que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) = \ker(q)$.

41.3.4 Matrice semblables et trace

Exercice 41.58

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer leurs rangs et leurs traces.

2. Calculer A^3 et B^3. En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 41.59

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2. Montrer que si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle, il existe B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = BC - CB = [B, C]$ (crochet de Lie).

[1] Ça ressemble à une erreur d'énoncé, il faut continuer à supposer $p_1 \circ p_2 = 0_E$.

Exercice 41.60

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM + MA \end{array}$. Calculer $\mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 41.61 *Crochets de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit n un entier ≥ 2 et $u \in \mathbf{L}(\mathbb{K}^n)$. Montrer que si u n'est pas une homothétie, il existe e_1 et e_2 dans $\mathbb{K}^n$ tels que $u(e_1) = e_2$ et (e_1, e_2) linéairement indépendants.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\mathrm{Tr}\, A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.

   Indication : On pourra faire une récurrence sur n.

3. Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à M associe $DM - MD$. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la trace de A est nulle si et seulement si il existe deux matrices R et S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = RS - SR$.

Exercice 41.63

Soient p matrices $A_1, A_2, \dots, A_p$ de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que l'ensemble de ces p matrices soit stable par produit matriciel. Montrer que

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Exercice 41.64

L'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est identifié à $\mathbb{C}^n$ par isomorphisme canonique. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$E^G = \{\, x \in E \mid \forall g \in G, gx = x \,\}.$$

Montrer que

$$\dim E^G = \frac{1}{\mathrm{card}\, G} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g).$$