Chapter 20 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

20.1 Topologie de la droite réelle

Exercice 20.1

Déterminer, pour tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, si, et seulement si ce sont des ouverts, des fermés, les deux, ou ni l'un ni l'autre. Donner également leurs intérieurs, adhérences et frontières.

1. $\{ x \}$ où $x \in \mathbb{R}$.
2. $]0, 1]$.
3. $]0, 1] \cup \{ 2 \}$.
4. $]0, 1] \cup]3, 7]$.
5. $]0, +\infty[$.
6. $\mathbb{Q}$.

Exercice 20.2

On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que chaque singleton $\{ n \}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un fermé.
3. Montrer que $A =]-\infty, 0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $\mathbb{Z} \cup]0, 1[$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$?

   Donner son intérieur et son adhérence.
6. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$?

   Donner son intérieur et son adhérence.

Exercice 20.3

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overline{A}$.
3. Comparer $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ et $\overset{\circ}{A}$.
4. Comparer $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.
5. Comparer $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

6. Comparer $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.

7. Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Exercice 20.4 *Points isolés*

Soit S une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $p \in S$ est un *point isolé* de S si

$$\exists r > 0,]p - r, p + r[\cap S = \{ p \} .$$

On note $\mathrm{Isol}(S)$ l'ensemble des points isolées de S. On dit que $p \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation* de S si

$$\forall r > 0, (]p - r, p[\cup]p, p + r[) \cap S \neq \emptyset.$$

On note $\mathrm{Acc}(S)$ l'ensemble des points d'accumulation de S.

1. Donner un exemple d'ensemble S avec un point isolé, un point d'accumulation qui appartient à S, et un point d'accumulation qui n'appartient pas à S.

2. Montrer
$$\mathrm{Isol}(S) \cup \mathrm{Acc}(S) = \overline{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{Isol}(S) \cap \mathrm{Acc}(S) = \emptyset.$$

3. Montrer que $\mathrm{Acc}(S)$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donner un exemple où $\mathrm{Isol}(S)$ n'est pas fermé.

4. Montrer
$$\mathrm{Isol}\left(\overline{S}\right) \subset S.$$

5. Montrer que si A est fermé et x est isolé dans A, alors $A \setminus \{ x \}$ est fermé.

20.2 Théorème de la borne supérieure

Exercice 20.5

Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0, 1[$,
2. $[0, 1[$,
3. $]1, +\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,
7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Exercice 20.6

On considère
$$E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{p} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$
L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure ? Si oui, les déterminer.

Exercice 20.7

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 20.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup (f(A)) \leq f (\sup A)$.

2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 20.9

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \} .$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter : $x \in A + B \iff \cdots$.

2. Montrer que $A + B$ est non vide est majorée.

3. Déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 20.10 *Un théorème de point fixe*

Soit une application croissante $f : [0, 1] \to [0, 1]$. On se propose de montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in [0, 1], f(\alpha) = \alpha.$$

On considère l'ensemble

$$A = \{ x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x \} .$$

1. Montrer que l'ensemble A est non vide et qu'il admet une borne inférieure $\alpha \in [0, 1]$.

2. Démontrer que si $x \in [0, 1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

En déduire que $f(\alpha) \leq \alpha$.

3. Démontrer que si $x \in [0, 1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

En déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.

4. Conclure.

20.3 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

Exercice 20.11

Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

20.4 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$