

Chapter 40 Applications linéaires et dimension

Révisions

Exercice 40.2

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espaces vectoriels F . Montrer que pour toute partie A de E ,

$$f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A)).$$

Exercice 40.4

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
2. L'image d'une famille liée par toute application linéaire est liée.

Exercice 40.6

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . À tout scalaire λ , on associe le sous-ensemble V_λ de E défini par

$$V_\lambda = \{ x \in E \mid f(x) = \lambda x \}.$$

1. Que peut on dire de V_0 ?
2. Démontrer que, pour tout scalaire λ , V_λ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Démontrer que, pour tous scalaires λ, μ ,

$$\lambda \neq \mu \implies V_\lambda \cap V_\mu = \{ 0_E \}.$$

4. Étant données λ et μ deux scalaires distincts, on suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v appartenant respectivement à V_λ et à V_μ . Démontrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.
5. Plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant n scalaires deux à deux distincts, on suppose qu'il existe n vecteurs non nuls u_1, u_2, \dots, u_n appartenant respectivement à V_1, V_2, \dots, V_n . Démontrer par récurrence que les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_n sont linéairement indépendants.

Exercice 40.7

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 40.10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x - y + 2z$

1. Montrer que f est linéaire de deux manières différentes.
2. Déterminer $\ker f$ puis donner une base de $\ker f$.
3. Déterminer $\text{Im } f$.

Exercice 40.11

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x, y, z) \mapsto (x - y + 2z, 2x - z)$

1. Justifier que g est linéaire.
2. Déterminer $\text{Im } g$.
3. Déterminer $\ker g$ puis donner une base de $\ker g$.

40.1 Application linéaire en dimension finie

40.1.1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Exercice 40.13

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.
On suppose que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.
2. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E .
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(E)$ de base (Id_E, f, f^2) .

Indication :

1. Que signifie $f^2 = 0$. D'ailleurs, qui est 0 ici ?
2. Montrer que la famille est libre, avec le bon nombre de vecteurs.
3. Faire un raisonnement par double inclusion.

Exercice 40.16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . On note $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E , appelé **espace dual** de E . Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la forme linéaire e_j^* sur E par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_j^*(e_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$x = e_1^*(x)e_1 + e_2^*(x)e_2 + \dots + e_n^*(x)e_n.$$

2. Montrer que pour tout $f \in E^*$,

$$f = f(e_1)e_1^* + f(e_2)e_2^* + \dots + f(e_n)e_n^*.$$

3. Montrer que la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* .

La base $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est appelée **base de duale** de (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Exercice 40.17

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n + 1$ formes linéaires

$$\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0), \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Montrer que la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 40.18

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, -2), u_3 = (2, 1, 0)$ de E .

1. Démontrer que la famille $\mathfrak{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .
2. Justifier l'existence d'un unique endomorphisme f de E vérifiant

$$f(u_1) = u_1 - u_2, \quad f(u_2) = u_3, \quad f(u_3) = u_2 + u_3.$$

3. Déterminer l'image par f du vecteur $v = (1, -3, 5)$.

Exercice 40.19

On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Déterminer les coordonnées de u relativement à la base \mathcal{B} et en déduire une expression de u comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 .
2. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie les conditions suivantes

$$f(v_1) = e_1 \quad f(v_2) = e_2 \quad f(v_3) = e_3,$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer $f(u)$.

3. Déterminer, si possible, le noyau de f et l'image de f .
4. Donner l'expression analytique de f (c'est-à-dire l'expression de $f(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Exercice 40.20

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= (1, -1, 0); & f(0, 1, 0, 0) &= (-1, 0, 1); \\ f(0, 0, 1, 0) &= (1, -1, 2); & f(0, 0, 0, 1) &= (0, -2, 3). \end{aligned}$$

1. Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent f .
2. Déterminer $\ker f$. L'application f est-elle injective?
3. Déterminer $\text{Im } f$. L'application f est-elle surjective? bijective?

Exercice 40.25 *Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \mathbf{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$\begin{aligned} \Psi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ M &\mapsto \text{Tr}(AM) \end{aligned}.$$

1. Montrer que Ψ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A &\mapsto \Psi_A \end{aligned}.$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

40.1.2 Caractérisation des isomorphismes par les bases**40.1.3** Caractérisation des isomorphismes en dimension finie**Exercice 40.26**

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (z, x - y, y + z)$ est un automorphisme.

Exercice 40.27

On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\mapsto (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(0) = 1, \quad P'(1) = 2, \quad P''(1) = -1, \quad \text{et} \quad P''(2) = 1.$$

Exercice 40.28

Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{aligned}.$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 40.30

On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n + 1$ réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ et } P'(\alpha_i) = f'(\alpha_i).$$

40.2 Rang d'une application linéaire

40.2.1 Applications linéaires de rang fini

Exercice 40.31

Soit l'application $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 $(x, y, z) \mapsto (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y - 7z)$

1. Déterminer $\ker h$ puis donner une base de $\ker h$.
2. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$; en déduire une base de $\operatorname{Im} h$.

40.2.2 Rang d'une composée

40.2.3 Théorème du rang pour les application linéaires

Exercice 40.37

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $n \in \mathbb{N}$, u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \text{ et } E = \ker u + \ker v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 40.39

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathbf{L}(E, F)$.

1. Montrer que

$$\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2. En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v)$.

3. On suppose que $E = F$, que $u \circ v = 0_{\mathbf{L}(E)}$ et que $(u + v) \in \mathbf{GL}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{rg}(u + v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Exercice 40.42 Un théorème de factorisation, Banque PT 2010

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(E, G)$.

Le but de cette partie est de montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists w \in \mathbf{L}(F, G), v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v)$.

2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \ker(u) = n - p$ et $\dim F = r$.

- (a) Justifier pourquoi on peut choisir (e_1, e_2, \dots, e_n) base de E de sorte que (e_{p+1}, \dots, e_n) soit une base de $\ker(u)$.

Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Im}(u)$?

- (b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

- (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F .
On définit alors $w \in \mathbf{L}(F, G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\ker(u) \subset \ker(v)$, alors $v = w \circ u$.

Exercice 40.43

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme a de E et un projecteur p , tel que $u = a \circ p$.

En prenant l'exemple de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque E n'est pas de dimension finie.

Exercice 40.44

Déterminer une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Vérifier la cohérence avec le théorème du rang. L'application T est-elle bijective ?

Exercice 40.45

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. On suppose que le noyau de g est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 = x_2 = x_3$ et que l'image de g est \mathbb{R}^2 . Cela contredit-il le théorème du rang ?
2. On suppose de plus que $g(e_1) = \varepsilon_1$, $g(e_2) = \varepsilon_2$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Déterminer une matrice A telle que l'application g définie par $g(x) = Ax$ vérifie les conditions précédentes. Donner l'expression analytique de g (c'est-à-dire l'expression de $g(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Exercice 40.46

Soit $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et soit v_1, v_2, v_3, x les vecteurs de \mathbb{R}^3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

où x_1, x_2, x_3 sont fixés dans la suite. Soit T l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(e_1) = v_1, \quad T(e_2) = v_2, \quad T(e_3) = v_3, \quad T(e_4) = x.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation

$$\text{rg}(T) = \dim \ker(T).$$

Dans ce cas, donner une base de $\text{Im}(T)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation

$$\dim \ker(T) = 1.$$

Dans ce cas, donner une base de $\ker(T)$.

Exercice 40.47

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice fixée. Calculer, en fonction du rang de A , la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ formé des matrices M telles que $MA = 0$ (donner deux solutions).

Même question si M est fixée et A varie.

Exercice 40.49

Soient $n \geq 2$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto XP(1) + (X^2 - 4)P(0) \end{aligned}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

Exercice 40.50

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\mapsto P(X) - P(X+1) \end{aligned}.$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.
3. Déterminer $\ker(\varphi - 2 \operatorname{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$ et $\operatorname{Im}(\varphi - 2 \operatorname{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$

Exercice 40.52

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit f l'application définie sur E par

$$f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E .
2. Calculer $f(X^p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et le rang de f .
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$; montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que

$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0.$$

Exercice 40.55

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soient $H_i = \ker \varphi_i$, $1 \leq i \leq 3$, trois hyperplans de E , discuter selon le rang de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Interpréter géométriquement ce résultat en dimension 3.
2. Si H_1, \dots, H_p sont p hyperplans de E , montrer que

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p.$$

40.3 Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre deux

40.4 Exercices mélangés

Exercice 40.58 Centrale MP 2015

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Pour $a \in E$, on note \mathcal{F}_a l'ensemble des endomorphisme f de E tels que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x), a)$ soit liée.

1. Déterminer \mathcal{F}_a lorsque $a = 0$ puis lorsque $n = 2$.
2. Montrer que \mathcal{F}_a est un espace vectoriel pour tout $a \in E$.
3. Soit H un espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes v de H tels que pour tout $h \in H$, $(h, v(h))$ soit liée.
4. Déterminer la dimension de \mathcal{F}_a .