Chapitre 31

Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont, sauf mention expresse du contraire, à valeurs réelles et définies sur une partie $X \subset \mathbb{R}$, non vide.

31.1 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

§1 Convergence simple

Définition 1

Une suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X vers $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$.

Définition 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur X, lorsque pour tout $x \in X$, la suite de nombres réels $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

On dit aussi que f est **limite simple** de la suite (f_n).

Exemple 3

Prenons $X = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = x^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La suite réelle $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si $x \in]-1, 1]$:

- Si $|x| < 1$, la suite (x^n) converge vers 0,

- Si $x = 1$, la suite (x^n) converge vers 1.

Nous dirons donc que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Exemple 4

Définissons une suite de fonctions $\left(f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\right)$ par $f_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right).$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

§2 Convergence uniforme

Définition 5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur X, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq n_0 \implies \forall x \in X, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon\right).$$

Proposition 6

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Notation

Pour toute application bornée $f : X \to \mathbb{R}$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

On peut également convenir que cette borne supérieure est $+\infty$ lorsque f n'est pas bornée.

Notation

On note $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7

Norme de la convergence uniforme
Soit $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.

1. *L'égalité $\|f\|_\infty = 0$ implique $f = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.*
3. *On a l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

On dit que l'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array}$ *est une norme sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.*

Théorème 8

La suite $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : X \to \mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

En particulier, si (f_n) converge uniformément vers f, les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang.

Exemple 9

Reprenons l'exemple $X =]-1,1]$ et $f_n : x \mapsto x^n$. La suite converge simplement vers $f :]-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1,1[, f(x) = 0.$$

La convergence de (f_n) vers f *n'est pas uniforme* car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} |x^n| = 1.$$

Considérons un réel $a \in [0,1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in[-a,a]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = a^n.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$, ce qui montre que la convergence de (f_n) vers f (c'est-à-dire vers 0) est uniforme sur $[-a,a]$.

Méthode

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.

1. Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il suffit qu'il existe une suite $\left(\varepsilon_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs, telle que

$$\forall x \in X, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

2. Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X, il suffit qu'il existe une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X telle que la suite

$$\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne tende pas vers zéro.

§3 Convergence uniforme et continuité

Théorème 10

Soit $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications convergeant uniformément vers $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.
Si chaque f_n est continue au point a, alors f est continue au point a.

Théorème 11

Toute limite uniforme d'applications continues est continue.

Exemple 12 On retrouve que la convergence de la suite définie par $f_n : x \mapsto x^n$ ne peut pas être uniforme sur $]-1, 1]$ car la limite simple de (f_n) n'est pas continue au point 1.

31.2 Fonctions continue par morceaux

§1 Fonctions continues par morceaux

Définition 13 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

- Une **subdivision de $[a, b]$** est une famille $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de réels telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- On dit que la subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est **plus fine** que la subdivision $\sigma' = (b_i)_{i \in [\![0,p]\!]}$ si σ contient tous les points de σ'.
- Le **pas** de la subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est $\sup\limits_{i \in [\![0,n-1]\!]} (x_{i+1} - x_i)$.

Exemple 14 **Subdivision régulière**
La subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ définie par

$$\forall x \in [\![0, n]\!], x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

est appelée **subdivision régulière**.

Lemme 15 *Étant donnée deux subdivisions σ' et σ'' de $[a, b]$, il existe une subdivision σ plus fine que σ' et σ''.*

En particulier, étant données deux fonctions en escalier $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a, b])$, il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ adaptée à la fois à φ et à ψ.

Définition 16

- On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ admet un prolongement continu à $[x_i, x_{i+1}]$.
  Dans ce cas, une telle subdivision est dite **adaptée** à f.
- Une fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle I si elle continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Remarque Dire que f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ revient à dire qu'il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,

- f a une limite finie à gauche en x_{i+1},
- f a une limite finie à droite en x_i.

Notation On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Proposition 17 *L'ensemble $\mathscr{C}_m([a,b])$ des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ est stable par combinaisons linéaires, par produits et par prise de la valeur absolue.*

Corollaire 18 *L'ensemble $\mathscr{C}_m([a,b])$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ de toutes les applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 19 *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée.*

§2 Fonctions dérivables par morceaux

Définition 20

- On dit qu'une fonction f est **dérivable par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ admet un prolongement dérivable à $[x_i,x_{i+1}]$.
- Une fonction f est dérivable par morceaux sur l'intervalle I si elle dérivable par morceaux sur tout segment inclus dans I.

De manière analogue, on peut définir la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux.

§3 Fonctions en escalier

Définition 21 Une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **étagée** ou **en escalier** s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur $]x_{i-1},x_i[$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Dans ce cas, une telle subdivision est dite **adaptée** à φ.

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est noté $\mathscr{E}([a,b])$.

Proposition 22 *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ des fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$ est stable par combinaisons linéaires, par produits et par prise de la valeur absolue.*

§4 Approximation uniforme par les fonctions en escalier

Lemme 23 *Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe des applications en escalier $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a, b])^2$ telles que*

$$\forall x \in [a, b], \ \ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$

Théorème 24 *Soit f une application continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe des applications en escalier $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a, b])^2$ telles que*

$$\forall x \in [a, b], \ \ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$

Théorème 25 *Soit f une application continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Il existe alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*