CHAPITRE

24

LIMITE, CONTINUITÉ

24.1 CARACTÈRE LOCAL D'UN PROBLÈME

Définition 1

Soient $P(y)$ une propriété portant sur un réel y et une application $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie P **au voisinage de a** s'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap X, P(f(x)).$$

Cette condition s'écrit de manière équivalente

- Si $a \in \mathbb{R}$:
$$\exists \eta > 0, \forall x \in X \cap]a - \eta, a + \eta[, P(f(x)).$$
- Si $a = +\infty$:
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X \cap]\omega, +\infty[, P(f(x)).$$
- Si $a = -\infty$:
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X \cap] - \infty, \omega[, P(f(x)).$$

Exemple 2

«$f(x) \geq 0$ pour x au voisinage de a» signifie

- Si $a \in \mathbb{R}$,
$$\exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies f(x) \geq 0.$$
- Si $a = +\infty$,
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \omega \implies f(x) \geq 0.$$

On dira aussi dans ce cas «$f \geq 0$ au voisinage de a».

Exemple 3

Si $a \in \mathbb{R}$, «f est bornée au voisinage de a» signifie

$$\exists \eta > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq k.$$

Le point fondamental qu'il faut retenir dans ces modes d'expression est que, si l'en a des assertions $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ *en nombre fini*, et si chacune de ces assertions, prise séparément, est vraie au voisinage de a, alors il en est de même de la conjonction logique des relations données ; autrement dit, elles sont *simultanément* vraies au voisinage de a.

Définition 4

Soit une fonction f définie sur une partie X de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in X$.

1. S'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in X \cap V, f(x) \leq f(x_0),$$

on dit que la fonction f admet au point x_0 un **maximum local**.

2. S'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in X \cap V, f(x) \geq f(x_0),$$

on dit que la fonction f admet au point x_0 un **minimum local**.

3. on dit que la fonction f admet au point x_0 un **extrémum local** si f admet au point x_0 un maximum local ou un minimum local.

Remarque

La notion de minimum local d'une fonction est une notion locale! Si la restriction de f à $X \bigcap]a - \eta, a + \eta[$ admet en a un minimum local, f admet en a un minimum local.

24.2 Limites

§1 Limite d'une fonction en un point adhérent

Définition 5

Limite en un point adhérent
Soient $f : X \to \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à X et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f **admet une limite ℓ au point a** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f **a pour limite $+\infty$ au point a** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que f **a pour limite $-\infty$ au point a** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq m.$$

Noter en passant que nous ne supposons pas $a \in X$: on peut avoir $X =]0, 1[$ et $a = 0$.

Exemple 6

La fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ a pour limite 10 au point 2.

Rappel

Si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f en a.

Remarque

La définition de f admet pour limite ℓ en a, s'écrit alors de manière générale :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \exists U \in \mathscr{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies f(x) \in V.$$

ou encore,

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \exists U \in \mathscr{V}(a), f(X \cap U) \subset V.$$

Ici $\mathscr{V}(\ell)$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{R}$.

§2 Limites à l'infini

Définition 7

Limite en $+\infty$

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée, $f : X \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f **admet une limite ℓ en $+\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que f **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies f(x) \leq m.$$

Définition 8

Limite en $-\infty$

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ non minorée, $f : X \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f **admet une limite ℓ en $-\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f **a pour limite $+\infty$ en $-\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que f **a pour limite $-\infty$ en $-\infty$** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies f(x) \leq m.$$

Rappel

Si $f(x) \to q \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to \pm\infty$, alors la droite d'équation $y = q$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $\pm\infty$.

§3 Unicité de la limite

Proposition 9 **Unicité de la limite**
Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$ en a, alors celle-ci est unique.

On note alors
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = \ell$$
ou lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \qquad \lim_a f = \ell, \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell, \qquad f \xrightarrow[a]{} \ell.$$

Exemple 10

- $\lim_{x \to a} x = a$.
- $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = 10$.

Proposition 11 *Lorsque $\ell \in \mathbb{R}$,*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$
En particulier, $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.

Proposition 12 *Lorsque $a \neq \pm\infty$,*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{h \to 0} f(a + h) = \ell.$$

§4 Limites à gauche, à droite

Définition 13 Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $I \subset X$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à I. On dit que f admet une **limite ℓ au point a selon I** si la restriction de f à I admet une limite ℓ en a.

On note alors,
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \ell \qquad\qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in I}]{} \ell.$$

Notation Lorsque $I = X \cap]-\infty, a[$, on parle de **limite à gauche** et on note $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \ell$.

- Avec des quantificateurs, $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ signifie
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a - \delta \leq x < a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ signifie

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a - \delta \leq x < a \implies f(x) \geq M.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$ signifie

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a - \delta \leq x < a \implies f(x) \leq m.$$

Notation

Lorsque $I = X \cap]a, +\infty[$, on parle de **limite à droite** et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$.

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a < x \leq a + \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ signifie

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a < x \leq a + \delta \implies f(x) \geq M.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ signifie

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a < x \leq a + \delta \implies f(x) \leq m.$$

Notation

Lorsque $I = X \setminus \{ a \}$, on parle de **limite par valeurs distinctes** et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = \ell$.

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ signifie

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

- Avec des quantificateurs, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ signifie

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq m.$$

Exemple 14

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$.

Remarque

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell.$$

§5 Caractère local de la limite

Proposition 15 *Si pour un certain voisinage V de a, la restriction de f à $A = X \cap V$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors f admet pour limite ℓ en a.*

1. *Si pour un certain $\eta > 0$, la restriction de f à $A = X \cap]a-\eta, a+\eta[$ admet une limite ℓ en a, alors f admet une limite ℓ en a.*
2. *Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, la restriction de f à $A = X \cap]\alpha, +\infty[$ admet une limite ℓ en $+\infty$, alors f admet une limite ℓ en $+\infty$.*
3. *Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, la restriction de f à $A = X \cap]-\infty, \alpha[$ admet une limite ℓ en $-\infty$, alors f admet une limite ℓ en $-\infty$.*

Ce théorème signifie que pour étudier la limite en un point, il suffit de se placer sur un «petit» voisinage entourant ce point. On dit pour cela que la limite d'une fonction en un point est une **notion locale**.

Exemple 16 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

- Si $a \in \mathbb{Z}$,
$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 = \lfloor a \rfloor - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a = \lfloor a \rfloor.$$
Par conséquent, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet pas de limite au point a.
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
$$\lim_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$
Par conséquent,
$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

§6 Caractérisation séquentielle des limites d'applications

Théorème 17 **Caractérisation séquentielle des limites d'application**
Soit $f : X \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à X et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. *Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X,*
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \implies \lim_{n \to +\infty} f\left(u_n\right) = \ell.$$

Ce résultat reste valable avec X non majorée (resp. minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).

Corollaire 18 *Si a est un point adhérent à X et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est un point adhérent à $f(X)$.*

Exemple 19

La **fonction de Dirichlet** définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{Dir}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'a de limite en aucun point.

Exemple 20

Les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$$

sont les fonctions constantes.

24.3 Limite et relation d'ordre

§1 Limite et caractère localement borné

Proposition 21

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f admet une limite finie *ℓ en a, alors il existe un voisinage V de a tel que f est bornée sur $X \cap V$.*
Autrement dit, f est bornée au voisinage de a.

Remarque

Si $a \in \mathbb{R}$, cette propriété s'écrit

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq \mu.$$

Et si $a = +\infty$,

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x > \alpha \implies |f(x)| \leq \mu.$$

Proposition 22

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à X. Si f admet au point a une limite ℓ appartenant à l'intervalle ouvert $I =]m, M[$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in X, |x - a| < \delta \implies f(x) \in]m, M[.$$

Proposition 23

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X ou $a = \pm\infty$. Si f admet une limite $\ell > 0$ en a, alors au voisinage de a, f est minorée par une constante strictement positive.

Remarque

Si $a \in \mathbb{R}$, cette propriété s'écrit

$$\exists c > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies f(x) \geq c.$$

Si $a = +\infty$, cette propriété s'écrit

$$\exists c > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, x > \alpha \implies f(x) \geq c.$$

§2 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

Proposition 24 *Soient f et g deux applications de X dans $\mathbb{R}$. On suppose,*

- *pour x au voisinage de a, $f(x) \le g(x)$,*
- $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,
- $\lim_a g = m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Alors $\ell \le m$.

§3 Existence de limite par comparaison

Théorème 25 **Existence de limite par encadrement**
Soient f, u, v des applications de X dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose,

- *pour x au voisinage de a, on a $u(x) \le f(x) \le v(x)$,*
- $\lim_a u = \lim_a v = \ell$.

Alors f admet une limite finie en a et $\lim_a f = \ell$.

Remarque Ce théorème ne fait pas que donner la limite de f en a : il en assure l'existence.

Théorème 26 **Existence de limite par domination**
Soient f, g des applications de X dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose,

- *pour x au voisinage de a, on a $|f(x) - \ell| \le g(x)$,*
- $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Alors f admet une limite finie en a et $\lim_a f = \ell$.

Corollaire 27 *Si $\lim_a f = \ell$ alors $\lim_a |f| = |\ell|$.*

La réciproque est fausse en général.

Théorème 28 **Existence de limite infinie par comparaison**
Soient f, g des applications de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour x au voisinage de a, on a

$$f(x) \le g(x).$$

1. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.*
2. *Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.*

§4 Théorème de la limite monotone

Théorème 29 **de la limite monotone au bord d'un intervalle**

Soit f une application croissante définie sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. *Si f est minorée sur $]a,b[$, alors f admet une limite fine en a et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf_{x \in]a,b[} f(x).$$

Si f n'est pas minorée sur $]a,b[$, alors $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.

2. *Si f est majorée sur $]a,b[$, alors f admet une limite finie en b et*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f = \sup_{x \in]a,b[} f(x).$$

Si f n'est pas majorée sur $]a,b[$, alors $\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.

On a bien sûr un résultat analogue lorsque f est décroissante.

Théorème 30 **de la limite monotone en un point intérieur**

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone. Pour tout point a intérieur à I, f admet des limites à gauche et à droite en a. Plus précisement,

- *Si f est croissante :*

$$\sup_{\substack{x \in I \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf_{\substack{x \in I \\ x > a}} f(x).$$

- *Si f est décroissante :*

$$\inf_{\substack{x \in I \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \sup_{\substack{x \in I \\ x > a}} f(x).$$

24.4 Opérations sur les limites

§1 Limite d'une composée

Théorème 31 *Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à X. On suppose $f(X) \subset Y$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens.*

1. *Si f possède une limite b en a, alors b est un point adhérent à Y.*
2. *Si de plus g possède une limite ℓ (finie ou infinie) en b, alors $g \circ f$ admet la limite ℓ en a.*

On a un résultat analogue lorsque $a = \pm\infty$ ou $b = \pm\infty$.

En résumé,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{a} f & = & b \\ \lim\limits_{b} g & = & \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{a} g \circ f = \ell$$

§2 Opérations algébriques sur les limites finies

Théorème 32 *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X ou $a = \pm\infty$. On suppose que f et g admette une limite finie au point a. Alors $f + g$ admet une limite finie au point a et*

$$\lim_{a} (f + g) = \lim_{a} f + \lim_{a} g.$$

Lemme 33 *Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à X ou $a = \pm\infty$. Le produit d'une application $f : X \to \mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en a et d'une application $g : X \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a admet pour limite 0 en a.*

Théorème 34 *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X ou $a = \pm\infty$. On suppose que f et g admette une limite finie au point a.*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf admet une limite finie en a et*

$$\lim_{a} (\lambda f) = \lambda \lim_{a} (f).$$

2. *La fonction $f \cdot g$ admet une limite finie en a et*

$$\lim_{a} (f \cdot g) = \left(\lim_{a} f\right) \cdot \left(\lim_{a} g\right).$$

3. *Si $\lim_a g \neq 0$, alors $g(x)$ est non nul au voisinage de $x = a$ et*

$$\lim_{a} \left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{a} g} \qquad \text{et} \qquad \lim_{a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim\limits_{a} f}{\lim\limits_{a} g}.$$

Exemple 35 Déterminer

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3|x|-10}{x^2-5x+6}.$$

§3 Opérations algébriques avec des limites infinies

Lemme 36 *On suppose* $\lim_a f = +\infty$.

1. *Si g est minorée au voisinage de a, alors* $\lim_a (f+g) = +\infty$.
2. *Si g est minorée au voisinage de a par un réel* > 0*, alors* $\lim_a (f \times g) = +\infty$.

Théorème 37 *On suppose* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} m \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$*, alors*

1. *Si $\ell + m$ n'est pas une forme indéterminée, alors* $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + m$.
2. *Si ℓm n'est pas une forme indéterminée, alors* $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell m$.

Proposition 38 *Soit* $f : A \to \mathbb{R}$ *une application définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$.

1. *Si f tend vers $\pm\infty$ en a, alors au voisinage de a, l'application f ne s'annule pas et*
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
2. *Si la restriction de f à $A \setminus \{ a \}$ est strictement positive au voisinage de a et si* $\lim_a f = 0$*, alors*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Notation Si la restriction de f à $A \setminus \{ a \}$ est strictement positive au voisinage de a et si $\lim_a f = 0$, on dit que f tend vers 0 par valeurs supérieures lorsque x tend vers a. On note alors traditionnellement $\lim_a f = 0+$.

24.5 Limites usuelles

Proposition 39

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et* $a > 1$.

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\alpha} = +\infty$.
2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty$.

Proposition 40

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

24.6 Continuité

§1 Fonction continues

Définition 41

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. On dit que f est **continue en un point a** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

ou de manière équivalente $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Définition 42

Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

- Si $I \subset X$, on dit que **f est continue sur I** si f est continue en tout point de I.
- Si f est continue en tout point de X, on dit simplement que **f est continue**.

Notation

L'ensemble des fonctions continues sur I se note $\mathscr{C}(I)$,$\mathscr{C}^0(I)$ ou encore $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Exemple 43

Toute application polynômiale réelle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 44

Les fonctions cos, sin, tan, polynômes, puissances, exponentielles, logarithmes sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 45

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est ***k*-lipschitzienne** si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \left| f(x_2) - f(x_1) \right| \leq k \left| x_2 - x_1 \right|.$$

Alors f est continue sur I.
En revanche, la réciproque est fausse, par exemple $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas lipschitzienne. Si elle l'était, on aurait entre 0 et $x > 0$ l'inégalité $x^2 \leq kx$ ce qui devient contradictoire lorsque $x > k$.

Proposition 46

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

1. *Soit a un point de I. Si f est continue en a, alors la restriction de f à I est continue en a.*

2. *Si f est continue sur X, f est continue sur I.*

Remarque

La réciproque est bien entendue fausse. Néanmoins, pour que $f : I \to \mathbb{R}$ soit continue lorsque I est un *intervalle*, il suffit que f soit continue sur tout *segment* $J \subset I$.[1]

Proposition 47

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. Si pour un certain $\eta > 0$, la restriction de f à $X \cap \left]a - \eta, a + \eta\right[$ est continue en a, alors f est continue en a.

Ce théorème signifie que pour étudier la continuité en un point, il suffit de se placer sur un «petit» intervalle entourant ce point. On dit pour cela que la continuité d'une fonction en un point est une **notion locale**.

[1]Ceci n'a d'intérêt que si I n'est pas un segment !

§2 Continuité à gauche et à droite

Définition 48 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.

1. On dit que f est **continue à gauche** en a si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a - \delta \leq x < a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$
ou de manière équivalente
$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a).$$

2. On dit que f est **continue à droite** en a si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a < x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$
ou de manière équivalente
$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a).$$

Exemple 49 La fonction partie entière est continue à droite en tout point $a \in \mathbb{R}$.

La fonction partie entière est continue à gauche en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La fonction partie entière n'est pas continue à gauche au point a si $a \in \mathbb{Z}$.

Proposition 50 *Soit f une application définie au moins sur $X \setminus \{ a \}$ où a est un point* intérieur *à X. On suppose que f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à un certain ℓ.*

- *Si f n'est pas définie en a, f admet ℓ comme limite en a.*
- *Si f est définie en a, f est continue en a si et seulement si $\ell = f(a)$.*

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } a &\iff \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a) \\ &\iff f \text{ continue à gauche en } a \text{ et } f \text{ continue à droite en } a \end{aligned}$$

§3 Prolongement par continuité

Proposition 51 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application non définie en $a \in \mathbb{R}$ qui admet une limite finie en a, alors en notant ℓ cette limite, l'application*

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & X \cup \{ a \} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & x \in X \\ \ell & x = a \end{cases} \end{array}$$

*est continue en a. Cette application est appelée **prolongement par continuité** en a de l'application f.*

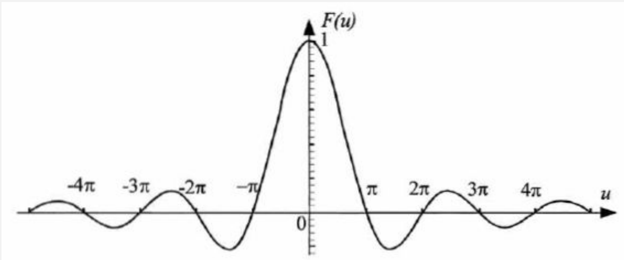
Exemple 52 L'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

admet pour limite 1 au point 0 : elle est donc prolongeable par continuité en une fonction appelée **sinus cardinal**

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sinc} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction apparait fréquemment dans des problèmes de physique ondulatoire.



Remarque Dans la pratique, il n'est pas rare de garder le nom de l'application de départ pour son prolongement : « prolongeons f par continuité en posant $f(a) = \ell$ ».

§4 Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Théorème 53 **Caractérisation séquentielle de la continuité**
L'application $f : X \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a, la suite $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exemple 54 L'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Proposition 55 *Si une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point ℓ et si f admet une limite au point ℓ, alors nécessairement*

$$\lim_{x\to\ell} f(x) = \ell.$$

En particulier, si f est continue au point $\ell \in \operatorname{Dom}(f)$, alors nécessairement ℓ vérifie l'égalité

$$\ell = f(\ell).$$

On dit que ℓ est un ***point fixe*** *de f.*

§5 Exemples d'équations fonctionnelles

Exemple 56 Les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$$

sont les fonctions constantes.

Exemple 57 **Équation de Cauchy**
Les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires.

§6 Opérations sur les fonctions continues

Composée de fonctions continues

Théorème 58 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f(X) \subset Y$ de sorte que la composée $g \circ f$ ait un sens.*
Étant donnée $a \in X$, supposons f continue au point a et g continue au point $b = f(a)$, alors la fonction composée

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est continue en a.

Théorème 59 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f(X) \subset Y$ de sorte que la composée $g \circ f$ ait un sens.*
Étant donnée $I \subset X$, on suppose que f est continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est continue sur I.

Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème 60 *Soient f et g deux fonctions continues au point a. Alors $f + g$, $f - g$, fg sont continues au point a, ainsi que f/g si $g(a) \neq 0$.*

Corollaire 61 *Les combinaisons linéaires et produits d'applications continues en a sont des applications continues en a.*

Théorème 62 **Opérations dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$**
Soit f et g des applications continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors

1. *$f + g$ est continue sur I.*

2. *Pour tout réel λ, λf est continue sur I.*

3. *fg est continue sur I.*

4. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Corollaire 63 *Soit f et g des applications continues de A dans $\mathbb{R}$. Alors les applications $|f|$, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur A.*

Remarque La plupart du temps, pour montrer la continuité d'une application sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles, on utilise les opérations sur les applications continues et le catalogue des applications continues classiques et usuelles. Mais en général, quelques points échappent à ces arguments habituels et nécessitent l'étude détaillée de l'expression $|f(x) - f(a)|$ au voisinage d'un tel point a. Par exemple : soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $|x| = 0 \iff x = 0$. De plus, l'application ln est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donc, par composition, f est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.
- Pour le point 0 qui échappe à ces considérations, il est connu que l'on a $\lim_{u \to 0+} u \ln u = 0$ et par suite
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} |x|\ln|x| = 0, \qquad \lim_{x\to 0, x\neq 0} |x\ln|x|| = 0, \qquad \lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0 = f(0)$$
Par conséquent f possède une limite en 0 qui n'est autre que $f(0)$: f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

Test 64 Devinette : soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$.

1. Que peut-on dire d'une application f continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$?
2. Que peut-on dire d'une application f continue sur $[a, b[$ et $]b, c]$?
3. Que peut-on dire d'une application f continue sur $[a, b]$ et $]b, c]$?

24.7 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

§1 Fonctions continues sur un intervalle

Lemme 65 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que la fonction f prend des valeurs < 0 et des valeurs > 0.*

Alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 66 **Bolzano 1817 : Théorème des valeurs intermédiaires**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur λ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Théorème 67 **TVI2 : Image continue d'un intervalle**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de

$\mathbb{R}$, *de bornes* $\inf_I f$ *et* $\sup_I f$ *(éventuellement infinies).*

Démonstration par dichotomie suggérée par le programme. En cours. ∎

Démonstration alternative utilisant la borne supérieure. Tout revient à établir le résultat suivant : soient u, v, w trois nombres réels tels que $u < w < v$; supposons qu'il existe un $x \in I$ tel que $u = f(x)$ et un $y \in I$ tel que $v = f(y)$, alors il existe un $z \in I$ tel que $w = f(z)$.

Quitte à remplacer f par $-f$, supposons que $x < y$ et considérons l'ensemble

$$E = \{ t \in I \mid t \leq y \text{ et } f(t) \leq w \}.$$

Cet ensemble n'est pas vide — il contient x puisque $f(x) = u < w$ — et il est majoré par y. On pose $z = \sup(E)$ et on a donc $x \leq z \leq y$ et $z \in I$ car I est un intervalle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $t_n \in E$ tel que $z - \frac{1}{n} < t_n \leq z$; on a donc

$$t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z \text{ et } f(t_n) \leq w$$

et comme f est continue, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = f(z) \leq w$.

Comme $w < v$, on a $z \neq y$ et donc $z < y$. Pour $z < t < y$, on a $t \in I$ et $t \notin E$ d'où $f(t) > w$. Puisque f est continue au point z, on a donc $\lim\limits_{\substack{t \to z \\ >}} f(t) = f(z) \geq w$.

D'où finalement, $f(z) = w$. ∎

Noter qu'il importe peu que l'intervalle I du théorème soit ouvert, fermé ou semi-ouvert. Par ailleurs $f(I)$ peut être fermé avec I ouvert, ou le contraire, et d'autres combinaisons sont possibles.

§2 Injectivité des fonctions continues

Proposition 68

Rappel

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement monotone. Alors*

1. f *est injective.*
2. *L'application induite*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & I & \to & f(I) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. Sa réciproque est aussi strictement monotone, avec le même sens de monotonie.

3. *Si* $\tilde{f}$ *est impaire, sa réciproque est également impaire.*

f monotone n'entraîne pas f continue.

Remarque

Les courbes représentatives de f et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Proposition 69

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une application continue et monotone sur un intervalle* I*. L'image par* f *du segment d'extrémités* u *et* v *est le segment d'extrémités* $f(u)$ *et* $f(v)$.

Corollaire 70 *Soit f un application continue définie sur $[a, b]$ (avec $a < b$) à valeurs réelles.*

- *Si f est strictement croissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
- *Si f est strictement décroissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*

Dans le cas des fonctions continues sur un intervalle, on a la réciproque suivante.

Théorème 71 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f est injective, alors f est strictement monotone.*

Démonstration. Non exigible. En exercice. ∎

§3 Continuité de la réciproque

Théorème 72 *Soient f une fonction définie, continue, strictement monotone sur un* intervalle *I et $J = f(I)$ l'image de I par f. Alors*

1. *J est un intervalle*
2. *l'application $g : J \to I$, réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, est continue et strictement monotone, et de même monotonie que f.*

D'après le théorème 71, on peut remplacer l'hypothèse «f strictement monotone» par «f injective».

Ce résultat est faux si l'on ne suppose pas que I est un intervalle.

Démonstration. Traitons le cas où f est croissante.

Soit $b \in J$ et $a = g(b) \in I$. On doit montrer que $\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$. Rien n'assure l'existence de cette limite, mais g étant monotone nous allons pouvoir utiliser les limites à gauche et à droite.

Supposons que $b \neq \inf J$ (éventuellement $-\infty$). Comme g est croissante, elle admet une limite à gauche en b. De plus, il existe donc $b' \in J$ tel que $\inf J < b' < b$. On a donc [2]

$$g(b') \leq \lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) \leq g(b).$$

Puisque I est un intervalle et $g(b') \in I$ et $g(b) \in I$, on s'assure donc que $\lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) \in I$. De plus, f est continue, donc

$$f\left(\lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y)\right) = \lim_{\substack{y \to b \\ <}} f(g(y)) = \lim_{\substack{y \to b \\ <}} y = b = f(a).$$

Puisque f est injective, on en déduit

$$\lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) = a = g(b).$$

[2] Dans le cas g est décroissante, il suffit de renverser ces inégalités.

De manière analogue $\lim\limits_{\substack{y \to b \\ >}} g(y) = g(b)$ (lorsque $b \neq \sup J$). Ainsi, on a montré, pour tout $b \in J$,

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b).$$

∎

Exemples 73

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue, strictement croissante et bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On retrouve ainsi la continuité de son application réciproque $\sqrt{}$.

2. Posons $f(x) = x^5 + x$ pour tout x de $[0, 1]$. Cette application est strictement croissante et continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$, l'image de $[0, 1]$ par f est le segment $[0, 2]$. Il existe donc une application continue φ de $[0, 2]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout y de $[0, 2]$,

$$\varphi^5(y) + \varphi(y) = y.$$

§4 Fonctions continues sur un segment

Théorème 74

Théorème des bornes atteintes
Soient f une fonction à valeurs réelles continue sur un segment I=[a,b]. *Alors f est bornée et on peut poser*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \textit{et} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Alors, il existe des points $u, v \in [a, b]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$. En particulier $f([a, b]) = [m, M]$.

Autrement dit, f est bornée sur $[a, b]$, elle atteint ses bornes ainsi que toute valeur comprise entre ses bornes. On a donc

$$f([a, b]) = [m, M]$$
$$\text{avec } m = \inf_I f = \min_I f = f(u)$$
$$\text{et } M = \sup_I f = \max_I f = f(v).$$

Théorème 75

Image continue d'un segment
Soient f une application à valeurs réelles continue sur un segment $I = [a, b]$. *Alors l'image $f(I)$ de I par f est un segment.*

24.8 Continuité uniforme

Définition 76 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, x_2) \in I^2, |x_1 - x_2| \leq \delta \implies \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 77 Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Proposition 78 *Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I, alors elle est continue sur I.*

Théorème 79 **Théorème de Heine**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

Démonstration. ∎