

## 36.1 APPLICATIONS LINÉAIRES

## §1 Définition

**Définition 1**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ . On appelle **application linéaire** de  $E$  dans  $F$  toute application  $f : E \rightarrow F$  telle que pour tous  $u, v \in E$ , et tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

Si l'on veut préciser le corps de base, on pourra dire que  $f$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire.

**Proposition 2**

*Soit  $f$  une application de l'espace vectoriel  $E$  dans l'espace vectoriel  $F$ . Alors  $f$  est linéaire si, et seulement si*

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

**Test 3**

Montrer le!

**Test 4**

Plus généralement, montrer que les applications linéaires préservent les combinaisons linéaires, autrement dit, pour tous  $v_1, v_2, \dots, v_p \in E$ , et tous  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ ,

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_p f(v_p).$$

c'est-à-dire

$$f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(v_i).$$

### Proposition 5

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire, alors

$$f(0_E) = 0_F.$$

### Test 6

Montrer le! En remarquant par exemple que  $0_E + 0_E = 0_E$ .

### Définition 7

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Si  $f : E \rightarrow E$  est une application linéaire, on dit que  $f$  est un **endomorphisme** de l'espace vectoriel  $E$ .

L'ensemble  $\mathbf{L}(E, E)$  se note plus simplement  $\mathbf{L}(E)$ .

- Si  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  est une application linéaire, on dit que  $f$  est une **forme linéaire** sur  $E$ .

L'ensemble  $\mathbf{L}(E, \mathbb{K})$  se note également  $E^*$ .

## §2 Exemples

### Exemple 8

Soit  $p \in \mathbb{R}$ ,  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto px$ . Alors  $f_1$  est linéaire car pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$f_1(\alpha x + \beta y) = p(\alpha x + \beta y) = \alpha(px) + \beta(py) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y).$$

### Test 9

Soit  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto px + q$  (avec  $p, q \in \mathbb{R}$  et  $q \neq 0$ ) et  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

Montrer que ni  $f_2$ , ni  $f_3$ , ne sont des applications linéaires puisqu'elles ne vérifient pas l'assertion

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

### Test 10

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $f$  est linéaire, c'est-à-dire

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x)$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

### Exemple 11

On note  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables une infinité de fois.

L'application

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f'' - f \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**Test 12**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$S : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$$

Montrer que  $S$  est une application linéaire.

**Exemple 13**

Soit  $V = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On définit l'application  $T : V \rightarrow F$  par

$$T(u) = T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = p_{u_1, u_2, \dots, u_n} = p_u$$

où  $p_u$  est la fonction polynômiale définie par

$$p_u(x) = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots + u_n x^n.$$

Alors  $T$  est une application linéaire.

En effet, soit  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$T(u+v) = p_{u+v} \quad T(u) = p_u \quad T(v) = p_v.$$

Montrons que  $T(u+v) = T(u) + T(v)$  c'est-à-dire  $p_{u+v} = p_u + p_v$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} p_{u+v}(x) &= p_{u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n}(x) \\ &= (u_1 + v_1)x + \dots + (u_n + v_n)x^n \\ &= (u_1x + \dots + u_nx^n) + (v_1x + \dots + v_nx^n) \\ &= p_u(x) + p_v(x) \\ &= (p_u + p_v)(x). \end{aligned}$$

Ainsi les fonction  $p_{u+v}$  et  $p_u + p_v$  sont égales. La preuve que  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$  est analogue.

**Test 14**

Montrer que  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ .

L'application  $T$  est donc linéaire.

**§3 Quelques applications particulières****Exemple 15**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . L'application

$$h_\lambda : E \rightarrow E \\ v \mapsto \lambda v$$

est un endomorphisme de  $E$  appelé **homothétie de rapport  $\lambda$** .

**Exemple 16**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'application identique de  $E$ ,  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  est linéaire.

$$x \mapsto x$$
**Exemple 17**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. L'application nulle

$$\begin{aligned} \tilde{0} : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto 0_F \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**Proposition 18**

Soit  $A$  une matrice de type  $(m, n)$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

est une application linéaire.

L'application  $T$  est la **multiplication à gauche par  $A$** .

*Démonstration.* C'est une conséquence de la «bilinearité» du produit matriciel. Pour  $(u, v) \in \mathbb{K}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= A(u + v) = Au + Av = T(u) + T(v) \\ \text{et } T(\alpha u) &= A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha T(u). \end{aligned}$$

■

**Test 19**

L'application  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vu précédemment est la multiplication à gauche par une matrice  $A$ . Déterminer  $A$ .

$$(x, y)^T \mapsto (2x + y, x)^T$$
**§4 Composition et combinaison linéaire d'applications linéaires****Proposition 20**

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $S$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . Alors l'application composée  $S \circ T$  est linéaire.

**Test 21**

Montrer le!

**Test 22**

Lorsque

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \text{ et } S : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^p, \\ x &\mapsto Bx \qquad \qquad x \mapsto Ax \end{aligned}$$

de quels types sont les matrices  $A$  et  $B$ ? Pour quelle matrice  $C$  a-t-on

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, (S \circ T)(x) = Cx \quad ?$$

**Proposition 23**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathbf{L}(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

En particulier si  $S, T : E \rightarrow F$  sont des applications linéaires, alors  $S+T$  et  $\alpha S$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , sont linéaires.

**Proposition 24**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $T, T_1, T_2 \in \mathbf{L}(E, F)$  et  $S, S_1, S_2 \in \mathbf{L}(F, G)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\begin{aligned} S \circ (T_1 + T_2) &= S \circ T_1 + S \circ T_2 \\ (S_1 + S_2) \circ T &= S_1 \circ T + S_2 \circ T \\ (\alpha S) \circ T &= S \circ (\alpha T) = \alpha(S \circ T) \end{aligned}$$

**Théorème 25**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Muni de l'addition et de la composition, l'ensemble  $(\mathbf{L}(E), +, \circ)$  est un anneau.

**Remarque**

Le programme suggère la notation  $vu$  pour la composée  $v \circ u$  et  $u^k$  pour  $u \in \mathbf{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

## §5 Isomorphismes

**Proposition 26**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire bijective. Alors  $T^{-1} : F \rightarrow E$  est linéaire.

**Définition 27**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire bijective, on dit que  $f$  est un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de  $E$  dans  $F$ .  
L'ensemble des isomorphismes de  $E$  dans  $F$  peut se noter  $\mathbf{Isom}(E, F)$ .
- On dit que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre  $E$  et  $F$ .

**Proposition 28**

Soit  $T : E \rightarrow F$  et  $S : F \rightarrow G$  deux isomorphismes. Alors  $S \circ T : E \rightarrow G$  est un isomorphisme et

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

**Exemple 29**

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  avec  $a \neq 0$ . Notons  $S$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des solutions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y(0), y'(0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Définition 30**

Si  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme bijectif de  $E$ , on dit que  $f$  est un **automorphisme** de  $E$ .  
L'ensemble des automorphismes de  $E$  est le **groupe linéaire** de  $E$  et se note  $\mathbf{GL}(E)$  : c'est le groupe des inversibles de l'anneau  $\mathbf{L}(E)$ .

**Exemple 31**

Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

L'application  $T$  est-elle bijective? Si oui, déterminer sa réciproque.

**Test 32**

Soit  $u = (1, 2, 3)^T$ . Vérifier que  $T^{-1}(w) = u$  lorsque  $w = T(u) = (6, -1, -4)^T$ .  
Vérifier plus généralement que  $T^{-1} \circ T = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

## 36.2 ANATOMIE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

### §1 Noyau et images

**Définition 33**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ .

- On appelle **noyau** de  $f$ , noté  $\ker f$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  dont l'image par  $f$  est  $0_F$ , c'est-à-dire

$$\ker f = \{ x \in E \mid f(x) = 0_F \}.$$

- On appelle **image** de  $f$ , noté  $\text{Im } f$ , l'ensemble  $f(E)$ , c'est-à-dire

$$\text{Im } f = \{ f(x) \mid x \in E \} = \{ y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y \}.$$

**Test 34**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ . Alors le noyau  $\ker f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Test 35**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ . Alors l'image  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Exemple 36**

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ x - y \\ y \end{pmatrix}.$$

**Test 37**

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix}.$$

**Exemple 38**

L'endomorphisme  $D : f \mapsto f'$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admet pour noyau le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Celui-ci est engendré par la fonction constante  $\tilde{1} : x \mapsto 1$ , c'est donc une droite vectorielle.

**Test 39**

Déterminer le noyau de l'application linéaire  $\sigma : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par

$$\sigma(f) = f'' - 4f.$$

**Théorème 40**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ .

1.  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant avec  $\ker f = f^{-1}(\{0_F\})$  et  $\text{Im } f = f(E)$ .

**Théorème 41**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ .

1. Si  $W$  un sous-espace vectoriel de  $F$ , alors  $f^{-1}(W)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Si  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $f(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

## §2 Injectivité, surjectivité

**Théorème 42**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ .

Alors l'application  $f$  est injective si, et seulement si  $\ker(f) = \{0_E\}$ .

L'inclusion,  $\{0_E\} \subset \ker(f)$  étant triviale, montrer  $\ker(f) = \{0_E\}$  revient à montrer

$$\forall x \in E, f(x) = 0_F \implies x = 0_E.$$

**Exemple 43**

L'endomorphisme  $M$  qui, à la fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  associe la fonction  $x \mapsto xf(x)$ , est injectif. Soit en effet un élément  $f$  du noyau; on a alors  $xf(x) = 0$  pour tout réel  $x$ , donc  $f(x) = 0$  pour tout réel non nul  $x$ . Par continuité,  $f$  est l'application constante nulle:  $f = \tilde{0}$ . Le noyau de l'endomorphisme  $M$  est donc  $\{\tilde{0}\}$  et  $M$  est injectif.

**Théorème 44**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ .  
Alors l'application  $f$  est surjective si, et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

L'inclusion,  $\text{Im}(f) \subset F$  étant triviale, montrer  $\text{Im}(f) = F$  revient à montrer

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Ce qui est bien sûr la définition d'une fonction surjective, la linéarité ne joue aucun rôle ici.

### §3 Équations linéaires

**Définition 45**

Une **équation linéaire** est une équation de la forme  $u(x) = b$  où

- $u \in \mathbf{L}(E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,
- $b \in F$  est fixé,
- l'inconnue est  $x \in E$ .

**Théorème 46**

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions d'une équation linéaire  $u(x) = b$ .

- Si  $b \notin \text{Im } u$ , alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ .
- Si  $b \in \text{Im } u$ , c'est-à-dire si il existe  $x_0 \in E$  tel que  $u(x_0) = b$ , alors

$$\mathcal{S} = x_0 + \ker u = \{ x_0 + y \mid u(y) = 0_F \}.$$

**Définition 47**

On dit que  $x_0$  est une **solution particulière**, et  $y$  est une **solution générale** de l'équation homogène associée (c'est-à-dire l'équation  $u(x) = 0_F$ ).

**Exemple 48**

Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $y''(t) - 4y(t) = \cos(t)$ .

### §4 Notion de sous-espace affine

**Définition 49**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel,  $x_0$  un point de  $E$ , et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $x_0 + W$ , et on appelle **sous-espace affine** passant par  $x_0$  et dirigé par  $W$  l'ensemble

$$\mathcal{W} = x_0 + W = \{ x_0 + w \mid w \in W \}.$$

L'espace  $W$  est appelé la **direction** du sous-espace affine  $\mathcal{W}$ .

Si  $W$  est une droite vectorielle,  $x_0 + W$  est appelé **droite affine**.