Chapitre 18

Déterminant d'une matrice carrée

Le **déterminant** d'une matrice carrée A est un scalaire, noté $\det A$. Ce scalaire permet de déterminer rapidement si une matrice est inversible. Par exemple, si A est une matrice $(2, 2)$, et que l'on souhaite déterminer A^{-1} en utilisant des opération élémentaire sur les lignes. On forme la matrice $(A|I)$ et on cherche sa forme échelonnée réduite. Supposons $a \neq 0$, quitte à permuter les deux lignes.

$$\begin{aligned}
(A|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) && L_1 \leftarrow (1/a)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - cb/a & -c/a & 1 \end{array}\right) && L_2 \leftarrow L_2 - cL_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right). && L_2 \leftarrow aL_2
\end{aligned}$$

et donc A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.

18.1 DÉFINITION

§1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** A le scalaire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}.$$

Proposition 2

Étant donnée une matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Remarquez l'utilisation de barres verticales pour le déterminant.

§2 Propriétés élémentaires

Théorème 4

Pour toute matrice carrée A, on a $\det(A^T) = \det(A)$.

On peut donc également écrire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Proposition 5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si chaque coefficient de la ligne i s'écrit comme somme de deux scalaire $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ pour $1 \leq j \leq n$, alors

$$\det A = \det B + \det C,$$

où B se déduit de la matrice A en substituant la ligne i par $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$, et C se déduit de la matrice A en substituant la ligne i par $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$.

Exemple 6

Illustrons le résultat pour une matrice $(3,3)$. La proposition affirme que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+p & e+q & f+r \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det(B) + \det(C).$$

Proposition 7

Si une ligne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

Proposition 8

Si A contient deux lignes égales, alors $\det(A) = 0$.

Puisque $\det(A) = \det(A^T)$,

Proposition 9

Les résultats précédents restent valables lorsque l'on remplace le mot «ligne» par «colonne».

§3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Lemme 10

Si A est une matrice carrée de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = \lambda \det(A')$.

Définition 11

- On dit que $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \implies a_{ij} = 0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- On dit que $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \implies a_{ij} = 0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposition 12

Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures, alors AB est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de AB s'obtiennent en multipliant les coefficients diagonaux correspondants de A et de B.

On a un résultat analogue avec les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 13

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, ou diagonale, alors

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

§4 Opérations sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant

Une matrice carrée échelonnée par ligne est triangulaire supérieure. Si nous savons comment le déterminant est affecté par les opérations élémentaires, nous obtenons un moyen simple de calculer les déterminants.

Théorème 14

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si B se déduit de A en multipliant une ligne par un scalaire α, alors*

$$\det B = \alpha \det A.$$

2. *Si B se déduit de A en permutant deux lignes, alors*

$$\det B = -\det A.$$

3. *Si B se déduit de A en ajoutant à une ligne un multiple d'une* autre *ligne, alors*

$$\det B = \det A.$$

Ces résultats restent valables en substituant le mot «colonne» au mot «ligne».

Remarque

On dit que $\det(A)$ dépend linéairement de de la ligne L_i (resp. colone C_j) lorsque les autres lignes (resp. colonnes) sont fixées.

Exemple 15

À l'aide d'opération élémentaire sur les lignes, calculer

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

§5 Déterminant et cofacteurs

Proposition 16

Étant donnée une matrice carrée d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$
$$= g\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}.$$

Remarque

Si C_1, C_2 et C_3 désigne les colonnes de A, on a $\det A = \left(C_1 \wedge C_2\right) \cdot C_3$, les produits scalaires et vectoriels étant donnés par les formules usuelles...

Définition 17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. Le **mineur** d'indice (i, j) de A, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice $(n-1, n-1)$ extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
2. Le **cofacteur** d'indice (i, j) de la matrice A est

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ainsi le cofacteur est égale au mineur si $i + j$ est pair, et son opposé si $i + j$ est impair. On peut retrouver rapidement ce signe en suivant le schéma

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 18

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le mineur M_{23} et le cofacteur C_{23} sont

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -5.$$

Test 19

Déterminer le cofacteur C_{13} pour la matrice précédente.

§6 Développement selon une ligne ou une colonne

Théorème 20

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$. On désigne par C_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de A.

1. *Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

(Développement par rapport à la i-ème ligne).

2. *Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, on a*

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

(Développement par rapport à la j-ème colonne).

Démonstration. Plus tard! ∎

Remarquer que le développement selon la ligne i de $\det\left(A^T\right)$ est le même que le développement selon la colonne i de $\det(A)$.

Exemple 21

On reprend l'exemple 18, où l'on développe le déterminant par rapport à la première ligne.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(1) + 3(13) = 34.$$

Test 22

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 23

On reprend l'exemple 18, mais en effectuant un développement selon la troisième ligne ou troisième colonne. Ceci réduit le nombre de calculs puisque $a_{33} = 0$. Par exemple, en développant le déterminant selon la troisième colonne,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 3 \cdot 13 - 5 = 34.$$

Test 24

Vérifier le déterminant obtenu pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

en utilisant un développement selon une autre ligne ou colonne. Choisir celle avec le moins de calculs à effectuer.

Pour de grandes matrices, développer brutalement avec les cofacteurs est peu pratique. Par exemple,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -10 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 1C_{11} + (-4)C_{12} + 3C_{13} + 2C_{14}$$

nécessite le calcul de quatre déterminants 3×3.

Test 25

On peut raccourcir la rédaction précédente en développant le déterminant aussitôt que l'on a obtenue des zéros sous un pivot. On est alors ramener au calcul d'un déterminant $(3, 3)$. Utiliser cette stratégie pour calculer à nouveau

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

18.2 Propriétés des déterminants

§1 Déterminant d'un produit

Théorème 26

Soit A et B deux matrices (n, n), alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Test 27

Vérifier le théorème sur un exemple. Montrer que si E_2 est une matrice élémentaire qui permute deux lignes, alors $\det(E_2 B) = \det(E_2)\det(B)$. Faire de même avec une matrice élémentaire E_3 qui ajoute un multiple d'une ligne à une autre ligne.

§2 Matrice inversible et déterminant

Théorème 28

Soit A une matrice (n, n), alors A est inversible si, et seulement si $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas, on a*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

L'application det induit donc un morphisme de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^\star$.

Corollaire 29

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si ses coefficient diagonaux sont tous non nuls.

Exemple 30 Soit $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ et
$$V=\begin{pmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{pmatrix}.$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice V soit inversible.

§3 Déterminant de Vandermonde

Étant donnée des scalaires $x_1,x_2,\dots,x_n$, on cherche à calculer le déterminant de Vandermonde
$$V_n=V(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, effectuons l'opération $C_k\leftarrow C_k-C_1$, puis nous effectuons un développement suivant la première ligne
$$V_n=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0\\x_1&x_2-x_1&\dots&x_n-x_1\\x_1^2&x_2^2-x_1^2&\dots&x_n^2-x_1^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}-x_1^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&\dots&x_n-x_1\\x_2^2-x_1^2&\dots&x_n^2-x_1^2\\\vdots&&\vdots\\x_2^{n-1}-x_1^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}$$
Ensuite, mettons en facteur x_j-x_1 sur chaque colonne ($j\in[\![1,n]\!]$)
$$V_n=\prod_{2\le j\le n}\left(x_j-x_1\right)\times\begin{vmatrix}1&\dots&1\\x_2+x_1&\dots&x_n+x_1\\x_2^2+x_2x_1+x_1^2&\dots&x_n^2+x_nx_1+x_1^2\\\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}+x_2^{n-3}x_1+\dots+x_1^{n-2}&\dots&x_n^{n-2}+x_{n-3}x_1+\dots+x_1^{n-2}\end{vmatrix}$$
On effectue alors successivement les opérations ($i\in[\![2,n-1]\!]$)
$$\begin{aligned}L_2&\leftarrow L_2-x_1L_1\\L_3&\leftarrow L_3-x_1L_2-x_1^2L_1\\&\vdots\;\vdots\\L_i&\leftarrow L_i-\sum_{k=1}^{i-1}x_1^{i-1-k}L_1\end{aligned}$$
On obtient alors
$$V_n=\prod_{2\le j\le n}\left(x_j-x_1\right)\times\begin{vmatrix}1&\dots&1\\x_2&\dots&x_n\\x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&\dots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{2\le j\le n}\left(x_j-x_1\right)\times V(x_2,\dots,x_n).$$

Une récurrence simple permet de conclure

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} \left(x_j - x_i\right).$$

§4 Comatrice

Définition 31 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A.

Proposition 32 *La combinaison linéaire formé des cofacteur d'une ligne avec les coefficient d'une autre ligne est nulle. Plus précisément, si $i \neq j$, alors*

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \cdots + a_{jn}C_{in} = 0.$$

Théorème 33 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. On a*

$$A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T.$$

18.3 Compléments HP

§1 Formules de Cramer

Lorsque la matrice d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ est inversible, on dit que c'est un **système de Cramer**.

Théorème 34 *Soient $n \geq 2$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'unique solution du système de Cramer $Ax = b$, alors*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne de A par le vecteur colonne b.

Exemple 35

Pour $n = 2$, le système

$$\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$$

est un système de Cramer si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans ce cas, la solution du système est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$