Chapitre 27

Convexité

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

27.1 Parties convexes

§1 Parties convexe de $\mathbb{R}$

Lemme 1 *Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Alors $[a, b] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \}$ est l'ensemble des barycentre de a et b à coefficients positifs*

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{\ \lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0, 1]\ \} \\
&= \left\{\ \lambda_1 a + \lambda_2 b \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \ \text{ et } \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\ \right\} \\
&= \left\{\ \frac{\alpha_1 a + \alpha_2 b}{\alpha_1 + \alpha_2} \ \middle|\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+ \ \text{ et } \ \alpha_1 + \alpha_2 > 0\ \right\}.
\end{aligned}$$

Définition 2 Une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de A est inclus dans A, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2,\ \left[x_1, x_2\right] \subset A.$$

Exemple 3

- $\mathbb{R}_+$ est convexe,
- $\mathbb{R}^\star$ n'est pas convexe,
- $\mathbb{Q}$ n'est pas convexe.

Théorème 4 *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

§2 Parties convexe de $\mathbb{R}^2$

Définition 5 Soit $M_1 \in \mathbb{R}^2$ et $M_2' \in \mathbb{R}^2$. Le segment $[M_1, M_2]$ est l'ensemble des barycentres de M et de M_2 à coefficients positifs.
Si $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$, on a

$$[M_1, M_2] = \left\{ \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right) \,\middle|\, \lambda \in [0,1] \right\}.$$

Définition 6 Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de A est inclus dans A, c'est-à-dire

$$\forall (M_1, M_2) \in A^2, \left[M_1, M_2\right] \subset A.$$

Exemple 7

- $\mathbb{R}^2$ est convexe.
- $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, est convexe.
- Les disques, les droites sont des convexes de $\mathbb{R}^2$.

27.2 Fonctions convexes

§1 Définition

Définition 8 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **convexe** sur I si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Si cette inégalité est stricte dès que $x_1 \neq x_2$ et $\lambda \in]0,1[$, f est dite **strictement** convexe.

Définition 9 On dit que la fonction f est **concave** si $-f$ est convexe, ceci équivaut à

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Remarque **Interprétation graphique**

- Une fonction f est convexe si, et seulement si pour tout couple de points (M_1, M_2) d'abscisses x_1, x_2 de la courbe de f, tout point M de la courbe de f d'abscisse $x \in [x_1, x_2]$ est au-dessous du segment $[M_1, M_2]$.

- Une fonction f est convexe, si, et seulement si l'ensemble A des points du plan situés au-dessus de la courbe de f est convexe.
- Une fonction f est concave, si, et seulement si l'ensemble A des points du plan situés au-dessous de la courbe de f est *convexe*.

Exemple 10

- $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right)^2 = \lambda(1-\lambda)\left(x_1 - x_2\right)^2 \leq 0.$$

- $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \ln x$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0, +\infty[$.
- $x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $[0, \pi]$.

§2 Deux caractérisations

Lemme 11 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est convexe si, et seulement si*

$$\forall (a, b, c) \in I^3, a < c < b \implies \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Démonstration. En posant $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, avec $\lambda = \frac{b-c}{b-a} \in]0, 1[$, la propriété

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

équivaut à

$$\frac{f(c) - f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(c)}{\lambda(b-a)},$$

ou encore

$$f(c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Elle équivaut donc à la propriété caractérisant la convexité (les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ dans la définition étant triviaux). ∎

Remarque Avec $a < c < b$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} &\iff (b-c)(f(c) - f(a)) \leq (c-a)(f(b) - f(c)) \\
&\iff (b-a)f(c) \leq (b-c)f(a) + (c-a)f(b) \\
\text{et } \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} &\iff (b-c)(f(c) - f(a)) \leq (c-a)(f(b) - f(c)) \\
&\iff (b-a)f(c) \leq (b-c)f(a) + (c-a)f(b) \\
\text{et } \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} &\iff (b-c)(f(c) - f(a)) \leq (c-a)(f(b) - f(c)) \\
&\iff (b-a)f(c) \leq (b-c)f(a) + (c-a)f(b)
\end{aligned}$$

Chacune des assertions de gauche sont donc équivalente entre elle et à la relation caractérisant la convexité de f :

$$c = \underbrace{\frac{b-c}{b-a}}_{\lambda} a + \underbrace{\frac{c-a}{b-a}}_{1-\lambda} b \quad \text{et} \quad f(c) \leq \underbrace{\frac{b-c}{b-a}}_{\lambda} f(a) + \underbrace{\frac{c-a}{b-a}}_{1-\lambda} f(b)$$

Théorème 12 **Inégalités des pentes**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) *La fonction f est convexe,*

(ii) $\forall (a,b,c) \in I^3, a < c < b \implies \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$.

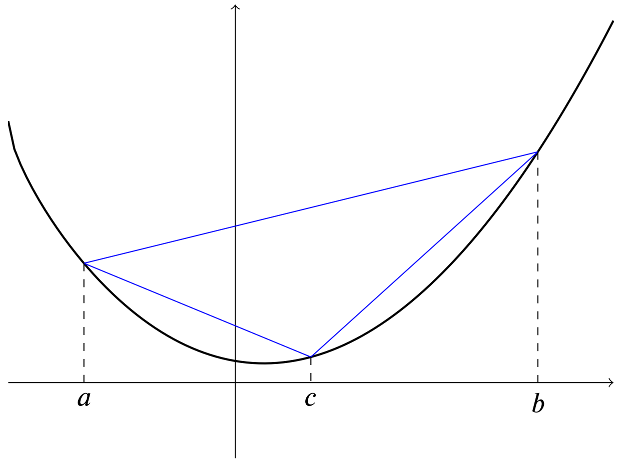
(iii) $\forall (a,b,c) \in I^3, a < c < b \implies \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(iv) $\forall (a,b,c) \in I^3, a < c < b \implies \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$.

Corollaire 13 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors*

$$\forall (a,b,c) \in I^3, a < c < b \implies \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Ce qui se retient bien plus facilement avec un dessin.



Théorème 14 **Théorème des pentes croissantes**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Pour $c \in I$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \tau_c : & I \setminus \{c\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \end{array}$$

Alors la fonction f est convexe si, et seulement si pour tout $c \in I$, la fonction τ_c est croissante.

Exemples 15

1. La fonction exponentielle étant convexe, la fonction $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^\star$.

2. La fonction sinus étant concave sur $[0, \pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.

§3 Régularité des fonctions convexes

Quelques résultats (hors programme) sur la régularité des fonctions convexes.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est un intervalle d'extrémités a et b.

- La fonction f est continue sur $]a, b[$. Il est possible que f ne soit pas continue aux bornes de I.
- Si $c \in]a, b[$, alors f admet une dérivée à gauche et à droite en c, et on a $f'_g(c) \leq f'_d(c)$. Il est possible que f ne soit pas dérivable en c.

27.3 Convexité et dérivabilité

§1 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Théorème 16 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors la fonction f est convexe si, et seulement si la fonction f' est croissante.*

Démonstration. Supposons d'abord f convexe. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Pour tout $x \in]a, b[$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Puisque f est dérivable au point a (et donc continue au point a), en faisant tendre x vers a dans l'inégalité précédente, on obtient

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De manière analogue, en faisant tendre x vers b, on obtient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

et donc

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Réciproquement, supposons f' croissante et prenons $a, b, c \in I$ tels que $a < c < b$. La fonction f est continue sur $[a, c]$ et dérivable sur $]a, c[$. D'après l'égalité des accroissement finis, il existe $\alpha \in]a, c[$ tel que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\alpha).$$

De même, il existe $\beta \in]c, b[$ tel que

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\beta).$$

Or $\alpha < \beta$ et f' est croissante donc $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, c'est-à-dire

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

ce qui permet de conclure que f est convexe. ∎

Théorème 17 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors la fonction f est convexe si, et seulement si la fonction f'' est positive sur I.*

Démonstration. Corolaire immédiat du théorème précédent. ∎

§2 Position du graphe par rapport à ses tangentes

Théorème 18 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe. Alors le graphe de f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire*

$$\forall (c, x) \in I^2, f(x) \geq f(c) + (x - c) f'(c).$$

Démonstration. On a montré plus haut que si $a < b$, alors

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

ce qui prouve

$$f(b) \geq f(a) + (b - a) f'(a) \qquad \text{et} \qquad f(a) \geq f(b) + (a - b) f'(b).$$

Ceci permet de conclure dans les deux cas $x < c$ et $x > c$. Le cas $x = c$ est immédiat. ∎

Exemple 19 La fonction ln est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc

$$\forall u \in \left]-1, +\infty\right[, \ln(1 + u) \leq u,$$

ou encore

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \ln(x) \leq x - 1.$$

Exemple 20 La fonction exp est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u.$$

Exemple 21 La fonction sin est concave sur $\left[0, \pi/2\right]$, donc

$$\forall t \in \left[0, \pi/2\right], \frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t.$$

§3 Changement de concavité

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et si on peut diviser I en un nombre fini d'intervalles dans lesquels f'' est de signe constant (ce qui sera souvent le cas), alors on peut déterminer si f est convexe ou concave sur chacun de ces intervalles, ce qui est utile pour le tracé du graphe.

Les points où f'' s'annule en changeant de signe sont des points de changement de concavité : la tangente à la courbe en un tel point est au dessus du graphe d'un côté, en dessous de l'autre côté, elle traverse le graphe. Un tel point est appelé **point d'inflexion** du graphe.

27.4 Inégalités de convexités

§1 Inégalité de Jensen

Théorème 22 **Inégalité de Jensen**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. Par récurrence sur n. ∎

Corollaire 23 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, alors*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Méthode Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^n$ non tous nuls. Alors

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

§2 Exemples d'applications

Proposition 24 **Inégalité arithmético-géométrique**

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Pour tous réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1, on a

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

*En particulier, on a l'**inégalité arithmético-géométrique** suivante:*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Proposition 25 **Inégalité de Hölder**

*Soient p, q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, on a l'**inégalité de Hölder** suivante:*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_j \right|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| b_j \right|^q \right)^{1/q}.$$

Proposition 26 **Inégalité de Minkowski**

*Soit un réel $p \geq 1$. Pour tous vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, on a l'**inégalité de Minkowski** suivante:*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \right)^{1/p}.$$