Chapter 17 Matrices inversibles

17.1 Matrices inversibles et opérations élémentaires

Exercice 17.1

Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17.2

En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si possible l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions du système $Ax = b$. Déterminer les solutions du système $Bx = b$.

Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ soit incompatible ? Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Bx = d$ soit incompatible ? Dans chaque cas, justifier votre réponse et déterminer un tel vecteur d si il existe.

Exercice 17.3

À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer, si possible, les inverses des matrice suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice C est-elle une matrice élémentaire? Si «oui», quelle est l'opération élémentaire correspondante? Si «non», l'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 17.4

En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

est équivalente par lignes à la matrice unité I_3. Écrire A comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 17.5

Étant donné un système d'équations $Ax = b$ avec différente valeurs de b, il est souvent plus rapide de déterminer A^{-1}, si elle existe, afin de déterminer les solutions avec la relation $x = A^{-1}b$.

Utiliser cette méthode pour résoudre $Ax = b_r$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et chacun de vecteurs b_r, $r = 1, 2, 3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier vos solutions.

Exercice 17.6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de calculer A^n.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis PAP^{-1}.

2. En déduire A^n.

Exercice 17.7

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A = (\min(i, j))_{1 \le i, j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 17.8

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel t les matrices suivantes sont inversibles. Calculer leur inverse lorsqu'elle existe.

1. $\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17.9

Inverser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17.10

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, quand cet inverse existe.

Exercice 17.11

Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n.

Montrer que si B se déduit de A par échange des i-ème et j-ème lignes ($1 \leq i < j \leq n$), alors B^{-1} se déduit de A^{-1} par échange des i-ème et j-ème colonnes.

17.2 Image d'une matrice

Exercice 17.12

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker(A)$, le noyau de A, et $\operatorname{Im}(A)$, l'image de A (donner une équation).

Exercice 17.13

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients du vecteur $b = (u, v, w)^T$ pour que le système $Ax = b$ soit compatible. En déduire que $\operatorname{Im}(A)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation cartésienne.

Montrer que $d = (1, 5, 6)^T$ appartient à $\operatorname{Im}(A)$. Exprimer d comme une combinaison linéaire des colonnes de A. Est-il possible de le faire de deux manières différentes? Si «oui», faites le! Si «non», justifier pourquoi.

Exercice 17.14

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & -6 \\ -2 & 9 & -1 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A et le noyau de A.

   Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de A, ou justifier pourquoi c'est impossible.

   Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \operatorname{Im}(A)$. Écrire la solution générale du système $Ax = b$.

2. Déterminer le rang de B. Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de B, ou justifier pourquoi c'est impossible.

   Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \operatorname{Im}(B)$.

17.3 Critères d'inversibilité d'une matrice

Exercice 17.15

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible.

   La matrice A est-elle inversible?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

   Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

5. Exprimer A^{-1}, puis A^{-n} pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P, P^{-1} et D^{-1}.

   Écrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Exercice 17.16 (**)

Soit A et B deux matrices (n, n).

Montrer que si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Exercice 17.17 (***)

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple, calculer $X^T AX$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 17.18 *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{ 1, 2, \dots, n \}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.