

Chapter 2 Corps des nombres réels

Exercice 2.1

Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.

3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.

4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

5. $5 + (-5) = 0$.

6. $18 \cdot 1 = 18$.

7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.

8. $23 + 6 = 6 + 23$.

9. $3 + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Solution 2.1

Exercice 2.2

Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.
2. $5 + 0 = 5$.
3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.
4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.
5. $8(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

Solution 2.2

Exercice 2.3

Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Solution 2.3

Exercice 2.4

Encadrer $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Solution 2.4

- En additionnant les deux inégalités : $-1 \leq x + y \leq 4$.
- On a $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En additionnant les deux inégalités, on a $5 \leq x - y \leq 10$.
- Il y a de nombreuses façons d'encadrer, mais il faut faire attention au signe de y . Par exemple, puisque $x \geq 0$, on a $-4x \leq xy \leq -2x$. Ensuite, $3 \leq x \leq 6$ d'où $-24 \leq -4x \leq -12$ et $-12 \leq -2x \leq -6$. Par transitivité, on a

$$-24 \leq xy \leq -6.$$

- On a $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4}$ et $x \geq 0$ d'où $-\frac{x}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{4}$. Ensuite $3 \leq x \leq 6$ d'où $-3 \leq -\frac{x}{2} \leq -\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} \leq -\frac{x}{4} \leq -\frac{3}{4}$. Enfin,

$$-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}.$$

Exercice 2.5

Comparer $\frac{a+n}{b+n}$ et $\frac{a}{b}$, où a, b, n sont des entiers naturels non nuls.

Solution 2.5

Puisque $n > 0, b > 0$ et donc $b+n > 0$, on peut écrire

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b} \iff b(a+n) > a(b+n) \iff ab+bn > ab+an \iff bn > an \underset{n>0}{\iff} b > a.$$

Ainsi,

- Si $a = b$, alors $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b} = 1$.
- Si $a < b$, alors $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$.
- Si $a > b$, alors $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$.

Exercice 2.6

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|x - 1| < |x - 2|$. Donner une interprétation géométrique.

Solution 2.6

Comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés.

$$|x - 1| < |x - 2| \iff (x - 1)^2 < (x - 2)^2 \iff x^2 - 2x + 1 < x^2 - 4x + 4 \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}.$$

Géométriquement, $|x - 1|$ et $|x - 2|$ représente la distance de x à 1 et 2 sur la droite réelle. Ainsi x est solution de l'inéquation si, et seulement si x est (strictement) plus proche de 1 que de 2.

Variante: On utilise une disjonction de cas.

- Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et $x - 2 < 0$, donc

$$|x - 1| < |x - 2| \iff 1 - x < 2 - x \iff 1 < 2.$$

Cette dernière relation étant toujours vraie, il en est de même de $|x - 1| < |x - 2|$ (sous la condition $x < 1$). D'où un premier ensemble solution : $]-\infty, 1[$.

- Si $1 \leq x \leq 2$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 < 0$, donc

$$|x - 1| < |x - 2| \iff x - 1 < 2 - x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}.$$

D'où un second ensemble solution $[1, 3/2[$.

- Si $2 < x$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \geq 0$, donc

$$|x - 1| < |x - 2| \iff x - 1 < x - 2 \iff -1 < -2.$$

Cette dernière relation étant toujours fausse, il n'y a pas de solution dans le cas $x > 2$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de $|x - 1| < |x - 2|$ est $]-\infty, \frac{3}{2}[$.

Exercice 2.7

Résoudre l'inéquation

$$3|x-2| - 2|x-1| \geq |x-4| - \frac{1}{4}(2x-11). \quad (E)$$

Solution 2.7

- Si $x \geq 4$,

$$(E) \iff 3(x-2) - 2(x-1) \geq (x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} \geq 0 \iff x \geq \frac{11}{2}.$$

D'où un premier ensemble de solutions : $\mathcal{S}_1 = \left[\frac{11}{2}, +\infty \right[$.

- Si $2 \leq x < 4$:

$$(E) \iff 3(x-2) - 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 10x \geq 43 \iff x \geq \frac{43}{10};$$

ce cas ne fournit donc pas de solution.

- Si $1 \leq x < 2$:

$$(E) \iff -3(x-2) - 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff -16x+16 \geq 11-2x \iff -14x \geq -5 \iff x \leq \frac{5}{14};$$

ce cas ne fournit donc pas de solution également.

- Si $x < 1$:

$$(E) \iff -3(x-2) + 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 0 \geq -\frac{1}{4}(2x-11) \iff x \geq \frac{11}{2};$$

il n'y a donc pas non plus de solution dans ce dernier cas.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est alors la réunion des différents cas

$$\mathcal{S} = \left[\frac{11}{2}; +\infty \right[.$$

Exercice 2.8

Résoudre les équations

1. $|x + 1| = 3$;

2. $|x + 5| = |x + 7|$;

3. $|x + 3| = x - 1$;

4. $|x| = x - 1$;

5. $x + 4 = 3|x|$;

6. $|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10|$;

7. $|1 - x| = x - 1$.

Solution 2.8

1. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|x + 1| = 3 \iff x + 1 = 3 \text{ ou } x + 1 = -3 \iff x \in \{2; -4\}.$$

2. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x + 5| = |x + 7| &\iff x + 5 = x + 7 \text{ ou } x + 5 = -x - 7 \\ &\iff \underbrace{0 = 2}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } 2x = -12 \iff x = -6. \end{aligned}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x + 3| = x - 1 \iff \begin{cases} x + 3 = x - 1 \text{ ou } x + 3 = -x + 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = -1 \text{ ou } 2x = -2 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

L'équation $|x + 3| = x - 1$ n'a donc pas de solution.

4. Réponse : $\mathcal{S} = \emptyset$.

5. Réponse : $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10| &\iff x^2 + x - 6 = -x^2 - 3x + 10 \text{ ou } x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 10 \\ &\iff 2x^2 + 4x - 16 = 0 \text{ ou } 2x = 4. \end{aligned}$$

L'équation $2x^2 + 4x + 4 = 0$ a pour discriminant $16 + 128 = 144$ et pour solutions $\frac{-4-12}{4} = -4$ et $\frac{-4+12}{4} = 2$. Finalement

$$|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10| \iff x = -4 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 2.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10|$ est donc $\{-4; 2\}$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |1 - x| = x - 1 &\iff \begin{cases} 1 - x = x - 1 \text{ ou } 1 - x = -x + 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 2 \text{ ou } 0 = 0 \text{ (toujours vrai)} \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 1. \end{aligned}$$

Exercice 2.9

Trouver n , entier naturel, pour que $\frac{n}{13} < \frac{110}{17} < \frac{n+1}{13}$.

Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\frac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Solution 2.9

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{13} < \frac{110}{17} < \frac{n+1}{13} \iff n < \frac{110 \times 13}{17} < n+1.$$

D'après la définition de la partie entière, il existe un unique entier n vérifiant l'inégalité $n \leq \frac{1430}{17} < n+1$, c'est $n = \left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor$. Or $1430/17 \notin \mathbb{N}$, donc $\left\lfloor \frac{1300}{17} \right\rfloor \neq \frac{1430}{17}$ et $\left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor = 84$ convient.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{84}{13} < \frac{110}{p} < \frac{85}{13} \iff 84p < 13 < 85p \iff \frac{13}{85} < p < \frac{13}{84}.$$

Or $0 < 13/85 < 13/84 < 1$ et l'intervalle $]0, 1[$ ne contient aucun entier. Il n'existe donc aucun $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\frac{84}{13} < \frac{110}{p} < \frac{85}{13}$.

Exercice 2.10

Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π .

On rappelle que $\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971 \dots$

Solution 2.10

On a $\lfloor 113 * \pi \rfloor = 354$, ainsi $355/113$ approche π à l'ordre 6.

Exercice 2.11

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$.
3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Solution 2.11

1. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

En additionnant ces deux inégalité, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Par définition de la partie entière de $x + y$, la première inégalité montre que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$$

étant donné que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$.

En tenant compte de $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$, la seconde inégalité prouve que

$$\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Ces deux quantités étant entières, cela revient à $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. On peut prendre par exemple $x = 3.1$ et $y = 5.2$.
3. On peut prendre par exemple $x = 4.7$ et $y = 2.8$.

Exercice 2.12

Soit $k \in]0, +\infty[$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \quad (2.1)$$

Solution 2.12

L'équation (2.1) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \frac{1}{k}$.

Une condition nécessaire pour que $\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2$ est $\frac{x}{1-kx} > 0$, c'est-à-dire $x \in \left] 0, \frac{1}{k} \right[$.

Soit $x \in \left] 0, \frac{1}{k} \right[$.

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2 &\iff 2 \leq \frac{x}{1-kx} < 3 \\ &\iff 2(1-kx) \leq x < 3(1-kx) && \because 1-kx > 0 \\ &\iff (1+2k)x \geq 2 \text{ et } (1+3k)x < 3 \\ &\iff \frac{2}{1+2k} \leq x < \frac{3}{1+3k}. \end{aligned}$$

On remarque enfin que $0 \leq \frac{2}{1+2k} \leq \frac{3}{1+3k} < \frac{3}{3k} = \frac{1}{k}$.

Conclusion

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \iff x \in \left[\frac{2}{1+2k}, \frac{3}{1+3k} \right[.$$

Exercice 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguerons deux cas : $\lfloor x \rfloor$ est un entier pair ou $\lfloor x \rfloor$ est un entier impair.

Premier cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p, p \in \mathbb{Z}$, alors $2p \leq x < 2p+1$, d'où

$$p \leq \frac{x}{2} < p + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < p+1,$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p = \lfloor x \rfloor.$$

Deuxième cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p+1, p \in \mathbb{Z}$, alors $2p+1 \leq x < 2p+2$, d'où

$$p + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1 \quad \text{et} \quad p+1 \leq \frac{x+1}{2} < p + \frac{3}{2},$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p+1$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p+1 = \lfloor x \rfloor.$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.14

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution 2.14

On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où

$$2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2.$$

L'entier $2\lfloor x \rfloor$ minore donc $2x$, d'où $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$. De plus $\lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et l'on obtient par transitivité,

$$2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor < 2\lfloor x \rfloor + 2,$$

c'est-à-dire

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par définition de la partie entière de $\frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$, on a donc

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.15

Il paraît peu vraisemblable que \mathbb{N} , sous-ensemble de \mathbb{R} , soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que \mathbb{N} est majoré.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n + 1$ majore n ; puisque chaque élément de \mathbb{N} est majoré, nous pouvons conclure que \mathbb{N} est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Solution 2.15

Pour que \mathbb{N} soit majoré, il faudrait qu'il existe un réel M tel que, quel que soit n naturel, $n \leq M$; il faudrait donc que ce soit *le même réel* qui majore *chaque* naturel ; or dans le texte, on a changé de majorant pour chaque naturel.

Exercice 2.16

Les parties suivantes de \mathbb{R} sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

- | | |
|---------------------|---|
| 1. $] - 4, 6]$. | 6. \mathbb{N} . |
| 2. $[-1, 0[$. | 7. $\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \}$. |
| 3. $[3, +\infty[$. | 8. $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$. |
| 4. \mathbb{R}^* . | 9. $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$. |
| 5. \mathbb{Z} . | |

Solution 2.16

- $] - 4, 6]$ est une partie bornée de \mathbb{R} . Elle est minorée par -35 , majorée par 212 . Elle a pour plus grand élément 6 mais n'a pas de plus petit élément.
- $[-1, 0[$ est une partie bornée de \mathbb{R} . Elle est minorée par -35 , majorée par 212 . Elle n'a pas de plus grand élément; son plus petit élément est -1 .
- $[3, +\infty[$ est minorée, non majorée, $\min([3, +\infty[) = 3$.
- \mathbb{R}^* n'est ni majorée, ni minorée.
- \mathbb{Z} n'est ni majorée, ni minorée.
- \mathbb{N} n'est pas majorée. Elle est minorée et a pour plus petit élément 0 .
- $\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Cette partie de \mathbb{R} est bornée, son plus grand élément est $\sqrt{2}$, son plus petit élément est $-\sqrt{2}$.
- $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$ est une partie bornée de \mathbb{R} . Elle est minorée par 0 , qui est son plus petit élément. Elle est majorée par π , mais n'a pas de plus grand élément.
- $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$ est une partie bornée de \mathbb{R} . Elle est minorée par -35 , majorée par 212 . Elle n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.

Exercice 2.17

Résoudre les systèmes suivants.

$$1. \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}.$$

Exercice 2.18

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

$$1. \begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} 2x + (m - 5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} (m - 1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$$

Exercice 2.19

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y , en fonction du paramètre réel m .

$$1. \begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}.$$

Solution 2.19

Exercice 2.20

Écrire chacun des produits suivants en utilisant des puissances.

1. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

3. $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$.

4. $7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$.

5. $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$.

6. $3 \cdot w \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.

7. $8 \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

8. $\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t$.

Solution 2.20

Exercice 2.21

Développer chaque expression afin de supprimer les puissances.

1. x^3 .

2. y^4 .

3. $(2b)^3$.

4. $(8c)^2$.

5. $10y^5$.

6. x^2y^3 .

7. $2wz^2$.

8. $3a^3b$.

Solution 2.21

Exercice 2.22

Simplifier les expressions suivantes.

1. 5^2 .

2. 4^3 .

3. $\left(\frac{1}{7}\right)^2$.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

5. $(0.25)^3$.

6. $(0.8)^2$.

7. 2^6 .

8. 13^2 .

Solution 2.22

Exercice 2.23

Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{81}$.

2. $\sqrt{64}$.

3. $\sqrt{4}$.

4. $\sqrt{9}$.

5. $\sqrt{100}$.

6. $\sqrt{49}$.

7. $\sqrt{16}$.

8. $\sqrt{36}$.

9. $\sqrt{\frac{1}{9}}$.

10. $\sqrt{\frac{1}{64}}$.

11. $\sqrt{\frac{25}{81}}$.

12. $\sqrt{\frac{49}{100}}$.

Solution 2.23

Exercice 2.24

Déterminer m paramètre réel pour que l'équation suivante ait deux racines inférieures ou égales à 1 :

$$(2m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + m + 3 = 0.$$

Solution 2.24

Exercice 2.25

Effectuer les calculs indiqués.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $(-7)^2$. | 11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$. |
| 2. $(9)^2$. | 12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$. |
| 3. $(-10)^3$. | 13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$. |
| 4. $(+8)^3$. | 14. $(-3)^4 \times (-3)^5$. |
| 5. $(-11)^2$. | 15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$. |
| 6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$. | 16. $((-3)^{-2})^{-1}$. |
| 7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. | 17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$. |
| 8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$. | 18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$. |
| 9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$. | |
| 10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$. | |
19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$.

Solution 2.25

1. $(-7)^2 = 7^2 = 49$.
2. $(9)^2 = 81$.
3. $(-10)^3 = -10^3 = -1000$.
4. $(+8)^3 = 512$.
5. $(-11)^2 = 11^2 = 121$.
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.
7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$.
9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3 = -\frac{10^3}{3^3} = -\frac{1000}{27}$.
10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$.
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2 \times 3^2}{3 \times 4^2} = \frac{2 \times 3}{4^2} = \frac{3}{8}$.

$$12. \left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2 = \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 \times 4^2} = \frac{1}{4}.$$

$$13. (-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{7^2 \times 2^2 \times 7}{8^3 \times 7^2 \times 14} = \frac{2}{8^3} = \frac{1}{256}.$$

$$14. (-3)^4 \times (-3)^5 = -3^9.$$

$$15. \frac{(-3)^4}{(-3)^6} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

$$16. ((-3)^{-2})^{-1} = (-3)^2 = 9.$$

$$17. (-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1} = (-2 \times (-3) \times (-1))^{-1} = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}.$$

$$18. \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1} = 3^2 \times (-2) = -18.$$

$$19. 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}} = -7^{-1+4+4-16+24} \times 11^{-1+2+4+3} = -7^{15} \times 11^8.$$

Exercice 2.26

Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.

2. $\frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.

3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.

4. $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.

5. $\frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.

6. $\frac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Solution 2.26

1. $2 \times 3^{n-1}$.

2. $2^2 \times 3^7$.

3. $8 \times 3^{2n} + (2^n - 2) \times 3^n - 1$.

4. $\frac{2^{n+2}}{3}$.

5. $\frac{1}{3^2 \times 2^n}$.

6. 3×2^n .

Exercice 2.27

Trouver x , entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

- | | |
|---|--|
| <p>1. $(4^x)^x = (4^8)^2$.</p> <p>2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.</p> <p>3. $2^x + 4^x = 20$.</p> | <p>4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.</p> <p>5. $(4^{(2+x)})^{3-x} = 1$.</p> <p>6. $(10^{x-1})^{x-4} = 100^2$.</p> |
|---|--|

Solution 2.27

Toutes les équations sont définies pour $x \in \mathbb{Z}$.

1. $(4^x)^x = (4^8)^2 \iff 4^{(x^2)} = 4^{16} \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4$.
2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25} \iff 10^{x+2} = 10^{50-15x} \iff x+2 = 50-15x \iff x = 3$.
3. $2^x + 4^x = 20 \iff 2^x + (2^x)^2 = 20 \iff (2^x)^2 + 2^x - 20 = 0$. Or, les racines du polynôme $X^2 + X - 20$ sont 4 et -5. Enfin
- $$2^x = 4 \iff x = 2 \quad \text{et} \quad 2^x = -5 \text{ est impossible.}$$

Finalement, l'équation $2^x + 4^x = 20$ a pour unique solution $x = 2$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \iff 9(3^x)^2 + 9(3^x) - 810 = 0 \iff (3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$. Or, le polynôme $X^2 + X - 90$ a pour discriminant $361 = 19^2$ et pour racines -10 et 9. Enfin,

$$3^x = -10 \text{ est impossible} \quad \text{et} \quad 3^x = 9 \iff x = 2.$$

Finalement, l'équation $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ a pour unique solution $x = 2$.

5. $(4^{(2+x)})^{3-x} = 1 \iff 4^{(2+x)(3-x)} = 1 \iff (2+x)(3-x) = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 3$.
6. $(10^{x-1})^{x-4} = 100^2 \iff 10^{(x-1)(x-4)} = 10^4 \iff x^2 - 5x + 4 = 4 \iff x^2 - 5x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$.

Exercice 2.28

On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Solution 2.28

Montrons

$$0 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \sqrt{b} < b < b^2 < b^3.$$

En multipliant l'inégalité $a < 1$ par a ou a^2 (qui sont > 0), on obtient $a^2 < a$ et $a^3 < a^2$.

Puisque $a < 1$, on a $\sqrt{a} < 1$ et donc $a < \sqrt{a}$.

Le raisonnement pour b est analogue...

Exercice 2.29

Simplifier les expressions suivantes.

1. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \sqrt{12}.$

2. $\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + \sqrt{\frac{25}{7}}.$

3. $\sqrt{4(1-x)^2}.$

4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}.$

5. $\sqrt{32(x+4)^2}.$

6. $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})}.$

7. $\sqrt{1-2\sqrt{x}+x}.$

Solution 2.29

1. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \sqrt{12} = \sqrt{2^7 \times 3^2 \times 5} = 2^3 \times 3 \times \sqrt{2 \times 5} = 24\sqrt{10}.$

2. $\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + \sqrt{\frac{25}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}}{7} + \frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7} - 25 + 5\sqrt{35}}{7\sqrt{5}}.$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{4(1-x)^2} = 2|1-x|.$

4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2} = 3(\sqrt{3}-1).$

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{32(x+4)^2} = 4\sqrt{2}|x+4|.$

6. Éventuellement $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$

7. Pour $x > 0$, $\sqrt{1-2\sqrt{x}+x} = \sqrt{(1-\sqrt{x})^2} = |1-\sqrt{x}|.$

Exercice 2.30

Après avoir simplifié chaque radical, calculer les sommes.

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$.

2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$.

3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$.

4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$.

Solution 2.30

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 0$.

3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$.

4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98} = 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

Exercice 2.31

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Solution 2.31

Afin de comparer des réels positifs, il suffit de comparer leur carrés. Ainsi

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff x+y \leq x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \iff 0 \leq \sqrt{xy}.$$

Cette dernière relation étant toujours vraie, la première l'est également.

Exercice 2.32

Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Solution 2.32

Multiplions chaque membre de l'inégalité par xy . Puisque $x > 0$ et $y > 0$, il vient

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff (x - y)^2 \geq 0.$$

Or la dernière assertion est toujours vraie, et elle est équivalente à l'inéquation $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Cette dernière est donc également toujours vraie (sous l'hypothèse $x > 0$ et $y > 0$).

Exercice 2.33

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x .

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$;

2. $2x^2 + 8x + 8 = 0$;

3. $(x - 1)^2 = \frac{1}{4}$;

4. $x^2 + x + 1 = 0$;

5. $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$.

Solution 2.33

1. Le discriminant de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ est $16 > 0$ et ses solutions sont donc

$$\frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } \frac{2+4}{2} = 3.$$

2. Une racine double : -2 .

3. Inutile de développer :

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{4} \iff \left(x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ou } x - 1 = -\frac{1}{2} \right) \iff \left(x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \right).$$

4. Il n'y a pas de solution réelle.

5. On trouve deux solutions 0 et 2. Encore une fois, il n'est pas utile de développer.

Exercice 2.34 *Équation bicarrée*

Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

2. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

3. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$.

4. $3x^4 - x^2 + 5 = 0$.

Solution 2.34 *Équation bicarrée*

Exercice 2.35

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes

1. $3x^2 - 12x + 9 < 0$.

2. $x^2 - 7x + 6 \leq 0$.

3. $\left(x - \frac{3}{2}\right)(6 - 4x) \geq 0$.

4. $(x - 3)(5 - 2x) > 0$.

5. $(x^2 - 3x - 9)(x^2 - 1) > 0$.

6. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \leq 0$.

7. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.

8. $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2} > 1$.

9. $\frac{(x - 1)(2x^2 + x + 1)}{x^2 + x - 6} \leq 0$.

Solution 2.35

Exercice 2.36

Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?

Solution 2.36

Le trinome $x^2 - 8x + 15$ est compris entre 0 et 3 si, et seulement si $x \in [2; 3] \cup [5; 6]$.

Exercice 2.37

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Solution 2.37

Exercice 2.38

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Solution 2.38

Si $m = 0$, $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 = -x - 1$ n'est pas de signe constant.

Si $m \neq 0$. Alors, le trinôme $mx^2 + (m - 1)x + m - 1$ est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si $m < 0$ et son discriminant $\Delta \leq 0$. Ici

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4m(m - 1) = -3m^2 + 2m + 1.$$

On retrouve un trinôme du second degré en m de discriminant $\delta = 4 + 12 = 16 \geq 0$ ayant pour racines $\frac{-2-4}{-6} = 1$ et $\frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3}$. D'où

$$\Delta \leq 0 \iff -3m^2 + 2m + 1 \leq 0 \iff \left(m \geq 1 \text{ ou } m \leq -\frac{1}{3}\right).$$

Finalement,

$$(\forall x \in \mathbb{R}, mx^2 + (m - 1)x + m - 1 \leq 0) \iff (\Delta \leq 0 \text{ et } m < 0) \iff m \leq -\frac{1}{3}.$$

Exercice 2.39

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4 - x| = x$.

2. $|x^2 + x - 3| = |x|$.

3. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$.

4. $\sqrt{1 - 2x} = |x - 7|$.

5. $x|x| = 3x + 2$.

6. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.

7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.

8. $x + |x| = \frac{2}{x}$.

Solution 2.39

1. L'équation $|4 - x| = x$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $x > 4$, alors

$$|4 - x| = x \iff x - 4 = x \iff -4 = 0.$$

Ce cas n'apporte aucune solution.

Si $x \leq 4$, alors

$$|4 - x| = x \iff 4 - x = x \iff x = 2.$$

Conclusion

L'équation $|4 - x| = x$ a pour unique solution $x = 2$.

2. L'équation $|x^2 + x - 3| = |x|$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|x^2 + x - 3| = |x| \iff x^2 + x - 3 = x \text{ ou } x^2 + x - 3 = -x. \iff x^2 - 3 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x - 3 = 0.$$

La première équation a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. La seconde a pour solutions 1 et -3 . Finalement

$$|x^2 + x - 3| = |x| \iff x \in \left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, -3 \right\}.$$

3. On fait trois cas et l'on trouve deux solutions : $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$.

4. L'équation $\sqrt{1 - 2x} = |x - 7|$ est définie pour $x \leq \frac{1}{2}$. Comparer des nombre positifs revient à comparer leurs carrés, ainsi

$$\sqrt{1 - 2x} = |x - 7| \iff 1 - 2x = x^2 - 14x + 49 \iff x^2 - 12x + 48 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

5. L'équation $x|x| = 3x + 2$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \geq 0$,

$$x|x| = 3x + 2 \iff x^2 = 3x + 2 \iff x^2 - 3x - 2 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

En tenant compte de la condition $x \geq 0$,

$$x|x| = 3x + 2 \iff x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

- Si $x < 0$,

$$x|x| = 3x + 2 \iff -x^2 = 3x + 2 \iff x^2 + 3x + 2 = 0 \iff x \in \{-2, -1\}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x|x| = 3x + 2$ est

$$\left\{ \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, -2, -1 \right\}.$$

6. L'équation $x + 5 = \sqrt{x + 11}$ est définie pour $x \geq -11$. On a

$$x + 5 = \sqrt{x + 11} \iff \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ (x + 5)^2 = x + 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2 + 10x + 25 = x + 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2 + 9x + 14 = 0 \end{cases}$$

Or le polynôme $X^2 + 9X + 14$ a pour discriminant 25 et pour racines -7 et -2 . Tenant compte de la condition $x \geq -5$ et $x \geq -11$, on a

$$x + 5 = \sqrt{x + 11} \iff x = -2.$$

7. L'équation $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Dans ce cas,

$$x = 1 + \sqrt{x^2 - 2} \iff x - 1 = \sqrt{x^2 - 2} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ -2x = -3 \end{cases} \iff x = \frac{3}{2}.$$

8. L'équation $x + |x| = \frac{2}{x}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$.

- Si $x > 0$,

$$x + |x| = \frac{2}{x} \iff 2x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 1 \underset{x>0}{\iff} x = 1.$$

- Si $x < 0$,

$$x + |x| = \frac{2}{x} \iff 0 = \frac{2}{x} \text{ (impossible).}$$

Conclusion

L'équation $x + |x| = \frac{2}{x}$ a pour unique solution $x = 1$.

Exercice 2.40

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.

Solution 2.40

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3$$

$$\iff 4 \leq x^2 + 1 < 9 \iff 3 \leq x^2 < 8 \iff \sqrt{3} \leq |x| < 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$ est $\left] -2\sqrt{2}, -\sqrt{3} \right[\cup \left] \sqrt{3}, 2\sqrt{2} \right[$.

Exercice 2.41 ☕

Dans cet exercice, on n'utilisera pas la calculatrice et on supposera qu'on ne connaît de $\sqrt{2}$ que sa définition, i.e. que $\sqrt{2}$ est l'unique réel strictement positif dont le carré est égal à 2.

1. Montre que 1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision 1/2.
2. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\epsilon > 0$. On pose $r_1 = \frac{p}{q}$ et $r_2 = \frac{p+2q}{p+q}$.
 - (a) Exprimer $r_2 - \sqrt{2}$ en fonction de $r_1 - \sqrt{2}$.
 - (b) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision ϵ . Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $\epsilon/5$.
 - (c) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision ϵ . Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision $\epsilon/2$.
3. En déduire une fraction qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2 que $\sqrt{2}$.

Solution 2.41 ☕

1. Comme $1 \leq 2 \leq 9/4$, et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, nous obtenons $1 \leq \sqrt{2} \leq 3/2$.
2. (a) On a

$$\begin{aligned} r_2 - \sqrt{2} &= \frac{p+2q}{p+q} - \sqrt{2} = \frac{p/q+2}{p/q+1} - \sqrt{2} = \frac{r_1+2}{r_1+1} - \sqrt{2} \\ &= \frac{r_1(1-\sqrt{2})+2-\sqrt{2}}{r_1+1} = \frac{(r_1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{r_1+1}. \end{aligned}$$

- (b) On suppose $\sqrt{2} \leq r_1 \leq \sqrt{2} + \epsilon$. Comme $r_1 \geq \sqrt{2} \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{5}$$

Puisque $\sqrt{2} \leq r_1 \leq \sqrt{2} + \epsilon$, nous obtenons

$$0 \leq \sqrt{2} - r_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} (r_1 - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{5}\epsilon.$$

- (c) On suppose $\sqrt{2} - \epsilon \leq r_1 \leq \sqrt{2}$. Comme $r_1 > 0$ et $\sqrt{2} \leq 3/2$, on a

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \leq \sqrt{2}-1 \leq \frac{1}{2}.$$

Et puisque $\sqrt{2} - \epsilon \leq r_1$, nous obtenons

$$0 \leq r_2 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} (\sqrt{2} - r_1) \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

3. Utilisons les résultats précédent cinq fois de suite

- $1/1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $1/2$ près;
- $3/2$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $1/4$ près;
- $7/5$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{4 \times 5}$ près;
- $17/12$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $\frac{1}{20 \times 2}$ près;
- $41/29$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{40 \times 5}$ près.

Ainsi, $41/29$ et $\sqrt{2}$ ont même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2.