Chapter 9 Corps des nombres complexes

Exercice 9.1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1 - 2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2 + i)^3$.
6. $z_6 = (1 + i)^2 - (2 - i)^2$.

Solution 9.1

1. $z_1 = \frac{1}{6}(7 - 5i)$
2. $z_2 = -3 - 4i$
3. $z_3 = \frac{1}{10}(1 - 3i)$
4. $z_4 = \frac{1}{2}(1 - 3i)$
5. $z_5 = 2 + 11i$
6. $z_6 = -3 + 6i$.

Exercice 9.2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3+i)(2-3i)(4+5i)$.
2. $z_2 = (1+i)^{10}$.
3. $z_3 = (2-i)^4$.

Solution 9.2

1. $z_1 = 71 + 17i$
2. $(1+i)^2 = 2i$ donc $z_2 = (2i)^5 = 32i$.
3. $z_3 = -7 - 24i$

Exercice 9.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1+4i)z + (1-2i) = iz + 3$

2. $\dfrac{1+3iz}{1+3z} = i\dfrac{z+2}{z-5}$

Solution 9.3

1. En isolant la variable z dans le membre de gauche, on otient

$$(-1+4i)z + (1-2i) = iz + 3 \iff (-1+3i)z = 2+2i \iff z = \frac{2+2i}{-1+3i} \iff z = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

2. L'éqution est définie si $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 5 \right\}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\frac{1+3iz}{1+3z} = i\frac{z+2}{z-5} &\iff (1+3iz)(z-5) = (1+3z)(iz+2i) \\
&\iff z + \cancel{3iz^2} - 5 - 15iz = iz + \cancel{3iz^2} + 2i + 6iz \\
&\iff (1-22i)z = 5+2i \iff z = \frac{5+2i}{1-22i} = -\frac{39}{485} + \frac{112}{485}i.
\end{aligned}$$

Exercice 9.4

Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Solution 9.4

Cette assertion est fausse. Par exemple $\mathfrak{Re}(i^2) = -1 \neq \mathfrak{Re}(i)^2 = 0$.

Exercice 9.5

À tout nombre complexe z différent de 0 et -1, on associe

$$u = \frac{z^2}{z+1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{z(z+1)}.$$

1. Déterminer z pour que u et v soient tous deux réels.
2. Calculer les valeurs correspondantes de u et v.

Exercice 9.6 (***)

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1+i$;
2. $1-i\sqrt{3}$;
3. i ;
4. $-2\sqrt{3}+2i$;
5. $2+i$;
6. 17 ;
7. $-3i$;
8. $-\pi$;
9. $-12-5i$;
10. $-5+4i$.

Solution 9.6

1. $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) \equiv \pi/4 \pmod{2\pi}$.
2. $\left|1-i\sqrt{3}\right| = 2$, $\arg(1-i\sqrt{3}) \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$.
3. $|i| = 1$, $\arg(i) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$.
4. $\left|-2\sqrt{3}+2i\right| = 4$, $\arg(-2\sqrt{3}+2i) \equiv 5\pi/6 \pmod{2\pi}$.
5. $|2+i| = \sqrt{5}$, et $2+i = \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Les arguments de $2+i$ sont donc dans le premier cadrant. On peut par exemple choisir $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan\dfrac{1}{2}$.
6. $|17| = 17$, $\arg(17) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
7. $|-3i| = 3$, $\arg() \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$.
8. $|-\pi| = \pi$, $\arg(-\pi) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
9. $|-12-5i| = 13$ et $-12-5i = 13\left(-\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}i\right)$. Les arguments de $-12-5i$ sont donc dans le troisième quadrant. On peut par exemple choisir $-\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)$, ou $\pi + \arcsin\dfrac{5}{13}$ ou $\pi + \arctan\dfrac{5}{12}$.
10. $|-5+4i| = \sqrt{41}$, $\arg(-5+4i) \equiv \pi - \arctan\dfrac{4}{5} \pmod{2\pi}$.

Exercice 9.7

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Solution 9.7

1. On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i1\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

De plus $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Enfin $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

2. On a

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 9.8

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Solution 9.8

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/6} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

d'où

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{5i\pi/12}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20} e^{20\times 5i\pi/12} = 2^{10}e^{i\pi/3}$$

Donc $|z| = 1024$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Exercice 9.9

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Solution 9.9

Soit $z \in \mathbb{C}$. Par unicité de l'écriture sous forme algébrique, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z)$ et, sous cette hypothèse, $|z| = |\mathfrak{Re}(z)|$. Ainsi, $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 9.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Solution 9.10

Écrivons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à

$$12x^2 + 4y^2 + 8ixy = 3,$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} 12x^2 + 4y^2 = 3 \\ 8xy = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 9.11

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z-2| = 3$.

2. $|2z-1+i| = 4$.

3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Solution 9.11

1. Soit A le point d'affixe 2 et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|z-2| = 3 \iff AM = 3.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 3.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|2z-1+i| = 4 \iff \left|z - \frac{1-i}{2}\right| = 2 \iff AM = 2.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-i$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq -i$. Alors

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \iff \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \iff |z-i| = |z+i| \iff AM = BM.$$

Remarquons que $-i$ n'est pas solution de $|z-i| = |z+i|$. L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment $[A, B]$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

4. On remarque que

$$\left|\frac{iz-2}{z+3}\right| = 1 \iff \left|i\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1 \iff \left|\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1.$$

Comme précédemment, on trouve que l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[A, B]$ où $A(-2i)$ et $B(-3)$.

Exercice 9.12 *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Solution 9.12 *Identité du parallélogramme*

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + \cancel{w\bar{z}} + \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} + z\bar{z} - \cancel{w\bar{z}} - \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} \\
&= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 9.13

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\varrho e^{i\theta}$ où ϱ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

2. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

3. $1 + i\tan\alpha$.

4. $\cos\alpha + i(1 + \sin\alpha)$.

5. $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

6. $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\beta + i\sin\beta}$.

7. $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$.

8. $e^{i\beta} + e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Solution 9.13

Exercice 9.14

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

2. En déduire α et β.

3. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.

4. Déterminer $\sin \frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

Solution 9.14

Exercice 9.15

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0 \implies |z| \leq 1.$$

Solution 9.15

Exercice 9.16

Soit z un nombre complexe différent de -1 et M le point du plan d'affixe z. On pose $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. z' soit réel ;

2. z' soit imaginaire pur ;

3. z' soit de module 2.

Solution 9.16

Exercice 9.17

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Solution 9.17

1. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.
2. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$.
3. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}-e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}(2i\sin 5x - 2i\sin 3x - 4i\sin x) \\
&= \frac{-1}{16}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x).
\end{aligned}$$

5. $\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$.

Exercice 9.18

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Solution 9.18

1. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
2. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.
3. $\sin 4x = 4\cos x\sin x - 8\cos x\sin^3 x$.
4. $\cos 8x = 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1$.

Exercice 9.19

Linéariser les expressions suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2 x \sin x$.
2. $\sin^3 x \cos^3 x$.
3. $\sin^4 x \cos^2 x$.
4. $\cos^3 x \sin^2 x$.

Solution 9.19

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x+8\cos 2x+6\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{-1}{32}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\\ &= \frac{-1}{32}\left(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}-2e^{3ix}-6e^{ix}-6e^{-ix}-2e^{-3ix}+e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{-1}{32}\left(2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\cos^3(x)\sin^2(x) = -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right).}$$

Exercice 9.20 *BanqueCCINP 2023 Exercice 94 algèbre*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On note A le point d'affixe i.
À tout point M du plan distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{iz}{z-i}.$$

1. Déterminer les coordonnées des points M tels que l'on ait $M = M'$.

2. Déterminer les coordonnées du point B' associé au point B d'affixe 1.
Déterminer les coordonnées du point C tel que le point C' associé ait pour affixe 2.

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

4. Placer A, B, B', C, C' et Γ sur une même figure.

5. Soit z un nombre complexe différent de i.

(a) Montrer que l'on a $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$.

(b) On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à $\mathcal{C}$.

Solution 9.20 *BanqueCCINP 2023 Exercice 94 algèbre*

1. L'affixe du point M est noté z et l'affixe du point M' est notée z'. Rappelons que $z \in \mathbb{C} \setminus \{ i \}$. Nous avons donc les équivalences

$$\begin{aligned} M = M' \iff z = z' \iff & \ z = \frac{iz}{z-i} \\ \iff & \ z^2 - iz = iz \\ \iff & \ z^2 = 2iz \\ \iff & \ z = 0 \ \text{ ou } \ z = 2i. \end{aligned}$$

Conclusion : il existe deux points tels que l'on ait $M = M'$. Ils ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(0,2)$.

2. Si $z = 1$ on a $z' = \frac{i\times 1}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}$. Le point B' a donc pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De plus,

$$\begin{aligned} z' = 2 \iff & \ \frac{iz}{z-i} = 2 \\ \iff & \ 2z - 2i = iz \\ \iff & \ (2-i)z = 2i \\ \iff & \ z = \frac{2i}{2-i} \\ \iff & \ z = \frac{2i(2+i)}{5} = \frac{4i-2}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion : le point C' ayant pour affixe 2, le point C a pour affixe $-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ et pour coordonnées $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

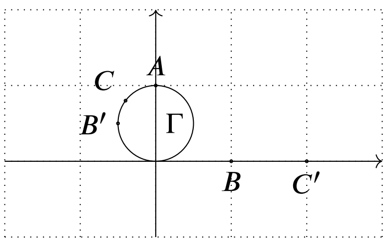
3. Rappelons que $z \in \mathbb{C} \setminus \{ i \}$.

$$\begin{aligned}
z' \in \mathbb{R} &\iff z' = \bar{z'} \\
&\iff \frac{\cancel{i} z}{z-i} = \frac{-\cancel{i}\bar{z}}{\bar{z}+i} \\
&\iff z(\bar{z}+i) = \bar{z}(z-i) && \because z \neq i \\
&\iff z\bar{z} + iz = -z\bar{z} + i\bar{z} \\
&\iff 2z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0 \\
&\iff 2\left|z - \frac{i}{2}\right|^2 - \frac{1}{2} = 0 && \because \left|z - \frac{i}{2}\right|^2 = z\bar{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} \\
&\iff |z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion : Γ est donc le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point A.

$$\Gamma = \mathcal{C}\left(\Omega, \frac{1}{2}\right) \setminus A.$$

4.



5. (a)

$$z' - i = \frac{iz}{z-i} - i = \frac{iz - iz - 1}{z-i} = \frac{-1}{z-i}.$$

(b) Supposons que $M \in \mathcal{C}$, alors $|z - i| = 1$. On a alors

$$|z' - i| = \left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|z-i|} = 1,$$

c'est-à-dire $z \in \mathcal{C}$.

Exercice 9.21
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin(k\theta).$$

Solution 9.21
En cours!

Exercice 9.22 *IMT PSI 2022*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Solution 9.22 *IMT PSI 2022*

Exercice 9.23

Calculer le module et un argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\le 2p\le n}} (-1)^p \binom{n}{2p} = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\le 2p+1\le n}} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$$

Solution 9.23

On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, d'où

$$(1+i)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}.$$

Mais la formule du binome de Newton donne également

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k.$$

Or

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{si } k \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{si } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

On a donc

$$(1+i)^n = 1 + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} - i\binom{n}{7} + \cdots = S_1 + iS_2.$$

En identifiant parties réelles et imaginaire, on obtient

$$S_1 = 2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad S_2 = 2^{n/2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 9.24 *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Solution 9.24 *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

1. On pose $Z = z^k - 1$.
   $$Z = e^{\mathrm{i}\dfrac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{k\pi}{n}} 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
   c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2})}$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) > 0$.

   Donc le module de Z est $2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = 0$.

   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   S est donc la partie imaginaire de $T = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\dfrac{k\pi}{n}}$.

   Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}$.

   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit que $T = \dfrac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}$.

   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ ($n \geqslant 2$), on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9.25

Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.

Solution 9.25

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5 + 8i$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(x + iy)^2 = -15 + 8i &\iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \\ x^2 - y^2 & = -15 \\ \quad 2xy & = 8 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 & = 1 \\ y^2 & = 16 \\ xy & = 4 \end{array}\right. \iff (x, y) = (1, 4) \text{ ou } (x, y) = (-1, -4) \\
&\iff x + iy = \pm(1 + 4i).
\end{aligned}$$

Une racine carrée de $5 + 8i$ est $1 + 4i$, les solutions de l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$ sont donc

$$\frac{3 + 2i - 1 - 4i}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad \frac{3 + 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + 3i.$$

Exercice 9.26

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2\,(1+i)\,z - 5\,(1+2i) = 0. \tag{9.1}$$

Solution 9.26

Exercice 9.27

Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Solution 9.27

Le polynôme $Z^2 - 30Z + 289$ a pour discriminant $-256 = (16i)^2$ et pour racines $15 - 8i$ et $15 + 8i$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z^2 = 15 - 8i \text{ ou } z^2 = 15 + 8i.$$

Or, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + iy)^2 = 15 - 8i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

Les racines carrées de $15 - 8i$ sont donc $4 - i$ et $-4 + i$.

De même les racines carrées de $15 + 8i = \overline{15 - 8i}$ sont $4 + i$ et $-4 - i$.

Finalement,

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z \in \{ 4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i \}.$$

Exercice 9.28

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Solution 9.28

1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $-4 = (2i)^2$ et ses solutions sont donc $1 + i$ et $1 - i$.

Les solutions du système $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$ sont donc les couples

$$(x, y) = (1 + i, 1 - i) \quad \text{et} \quad (x, y) = (1 - i, 1 + i)$$

2. Le polynôme $z^2 - (1 + i)z + 13i$ a pour discriminant $-50i = 25 \times (-2i) = (5 - 5i)^2$ et pour racines $3 - 2i$ et $-2 + 3i$. Les solutions du système $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$ sont donc les couples

$$(x, y) = (3 - 2i, -2 + 3i) \quad \text{et} \quad (x, y) = (-2 + 3i, 3 - 2i)$$

Exercice 9.29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \tag{9.2}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Solution 9.29

Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$iz^3-(1+i)z^2+(1-2i)z+6+8i = 0 \iff -z^2+z+6+i(z^3-z^2-2z+8) = 0 \iff \begin{cases} z^2 - z - 6 = 0 \\ z^3 - z^2 - 2z + 8 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de la première équation sont -2 et 3 et l'on vérifie que -2 est solution de la seconde équation (et 3 ne l'est pas) donc $z = -2$ est solution de l'équation (9.2).

Nous pouvons dès lors écrire pour $z \in \mathbb{C}$,

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = (z+2)(az^2 + bz + c).$$

Par identification des coefficient, on trouve $a = i$, $c = 3 + 4i$ et $2a + b = -(1+i)$ d'où $b = -(1+3i)$.

Finalement, l'équation du second degré $iz^2-(1+3i)z+3+4i = 0$ a pour discriminant $8-6i = (\pm(3-i))^2$ et pour racine $1 - 2i$ et $2 + i$.

Finalement

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0 \iff z \in \{ -2, 1-2i, 2+i \}.$$

Exercice 9.30

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Solution 9.30

1. L'équation est $r^2 - 5r + 3 = 0$ a pour racines $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme
$$u_n = \alpha\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ nous donne
$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha\frac{5-\sqrt{13}}{2} + \beta\frac{5+\sqrt{13}}{2} & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta & = -\alpha \\ -\alpha\sqrt{13} & = 1 \end{cases} \iff \alpha = -1/\sqrt{13} \text{ et } \beta = 1/\sqrt{13}.$$
Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

2. L'équation est $2r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ où $\theta = \arctan\sqrt{7}$. La suite (u_n) est donc de la forme
$$u_n = \frac{1}{2^{n/2}}\left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right)$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ nous donne
$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta\right) & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta\sin\theta & = -\sqrt{2} \end{cases}$$
Or $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{4}{\sqrt{7}}$. Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{4\sin\left(n\arctan\sqrt{7}\right)}{2^{n/2}\sqrt{7}}.$$

3. L'équation $4r^2 - 12r + 9r = 0$ a une racine double, $\frac{3}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme
$$u_n = (\alpha n + \beta)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = -3$, $u_1 = 4$ nous donne
$$\begin{cases} \beta & = -3 \\ \frac{3}{2}(\alpha + \beta) & = 4 \end{cases} \iff \alpha = \frac{17}{3} \text{ et } \beta = -3.$$
Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{17n}{3} - 3\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4. Une récurrence immédiate montre que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. D'où

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5} \iff \ln\left(u_{n+2}\right) = 6\ln\left(u_{n+1}\right) - 5\ln\left(u_n\right).$$

On pose $v_n = \ln\left(u_n\right)$ et on a donc

$$v_0 = 0, \quad v_1 = \ln 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n.$$

L'équation $r^2 - 6r + 5 = 0$ a pour racines 1 et 5, ainsi

$$u_n = \alpha + \beta 5^n$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. Puisque $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln 2$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta &= \ln 2 \end{cases} \iff \alpha = -\frac{1}{4}\ln 2 \text{ et } \beta = \frac{1}{4}\ln 2.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln 2}{4}\left(5^n - 1\right)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{v_n} = 2^{1/4}\exp\left(5^n - 1\right).$$

Exercice 9.31

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0.$ **2.** $z^2 + 5z + 7 - i = 0.$ **3.** $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0.$

Exercice 9.32

Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}.$ **2.** $z^8 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}.$

Solution 9.32

1. On a

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{2i\pi/3} = \left(e^{i\pi/9}\right)^6.$$

Les racine sixième de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sont obtenue en multipliant un racine sixième particulière par les racines sixième de l'unité. Elle sont donc de la forme

$$e^{i\frac{\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{i\frac{3k+1}{9}\pi}, \quad k \in [\![0, 5]\!].$$

c'est-à-dire

$$e^{i\pi/9}, e^{4i\pi/9}, e^{7i\pi/9}, e^{10i\pi/9}, e^{13i\pi/9}, e^{16i\pi/9}.$$

2. On a

$$\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5i\pi/12} = \left(\frac{1}{2^{1/16}}e^{5i\pi/96}\right)^8.$$

D'où

$$z^8 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} \iff \exists k \in [\![0, 7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}}e^{\frac{5i\pi}{96}} e^{\frac{2ik\pi}{8}} \iff \exists k \in [\![0, 7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}}e^{\frac{(24k+5)i\pi}{96}}.$$

Les racines 8-ème de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ sont donc

$$\frac{1}{2^{1/16}}e^{5i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{29i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{53i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{77i\pi/96}$$
$$\frac{1}{2^{1/16}}e^{101i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{125i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{149i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{173i\pi/96}.$$

Exercice 9.33

On considère le polynôme $P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

1. (Cours) Donner la définition et les expressions des racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
2. À l'aide de ces racines cinquièmes de l'unité, déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
3. Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec a, b, c des réels que l'on calculera.

   Déterminer alors une autre écriture des racines de P.
4. Comparer les résultats obtenus et en déduire une expression algébrique de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Solution 9.33

1. Une racine cinquième de l'unité dans $\mathbb{C}$ est une nombre complexe z tel que $z^5 = 1$. Il y a cinq racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$,

$$\boxed{1},\ \boxed{e^{2i\pi/5}},\ \boxed{e^{4i\pi/5}},\ e^{6i\pi/5} = \boxed{e^{-4i\pi/5}} \text{ et } e^{8i\pi/5} = \boxed{e^{-2i\pi/5}}.$$

2. Clairement, i n'est pas une racine de P ; donc pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = 0 \iff (z+i)^5 = (z-i)^5 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1.$$

   z est donc racine de P si et seulement si $\frac{z-i}{z+i}$ est une racine cinquième de l'unité, c'est-à-dire, si et seulement si il existe $k \in \{\,-2, -1, 0, 1, 2\,\}$ tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/5}.$$

   Le cas $k = 0$ est à exclure car sinon on aurait $z + i = z - i$. Enfin, pour $k \in \{\,-2, -1, 1, 2\,\}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} &\iff z + i = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z-i) \\
&\iff i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1\right) z \\
&\iff z = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1} && \because e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq 1 \\
&\iff z = i\frac{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} + e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)} \\
&\iff z = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{5}}{2i\sin\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

   Conclusion : Les racines de P sont

$$\boxed{-\frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}}, -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}, \frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}, \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}}}.$$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(z+i)^5 = z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10iz^2 + 5z + i$$
$$\text{et } (z+i)^5 = z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5z - i.$$

D'où

$$P(z) = \frac{1}{2i}\left(10iz^4 - 20iz^2 + 2i\right) = 5z^4 - 10z^2 + 1 .$$

Or le polynôme $5X^2 - 10X + 1$ a pour discriminant $100 - 20 = 80$; ses racines sont donc $\frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{10}$, c'est-à-dire

$$1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La première est clairement positive et leur produit est $\frac{1}{5} > 0$; on a donc également $1 - \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$. Finalement,

$$P(z) = 0 \iff z^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ou } z^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Les racines de P sont donc

$$-\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

4. Les racines obtenues aux questions **2.** et **3.** sont les mêmes. Or

$$0 < \frac{1}{\tan \frac{2\pi}{5}} < \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5}}$$

car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et que tan est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$0 < \tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{2\pi}{5}.$$

De plus, $0 < \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} < \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$. On a donc

$$\tan \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}} \qquad \text{et} \qquad \tan \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}}$$

Exercice 9.34

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{9.3}$$

1. Résoudre (9.3) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (9.3) sous forme trigonométrique.
2. On va maintenant résoudre (9.3) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{9.4}$$
3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,
$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z+\frac{1}{z}\right) + c. \tag{9.5}$$
4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,
$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{9.6}$$
5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$
7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Solution 9.34

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, (9.3) $\iff$ $z^5 = 1$. Les solutions de (9.3) sont donc les cinq racines 5-ième de l'unité. L'ensemble des solutions de (9.3) est
$$\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\}.$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^5 - 1 = (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)$. On peut choisir
$$Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,
$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{z^2} &= z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\\ &= z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 + z + \frac{1}{z}\\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 + 1 + \left(z+\frac{1}{z}\right)\\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1.\end{aligned}$$

   Il suffit donc de choisir $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

4. Le discriminant de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$ est 5 ; ses solutions sont donc

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

5. Commençons par remarquer que $Q(0) = 1$, donc 0 n'est pas solution de l'équation $Q(z) = 0$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{aligned}
Q(z) = 0 &\iff \frac{Q(z)}{z^2} = 0 \\
&\iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 && \because \text{d'après (9.5)} \\
&\iff z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\
&\iff z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 && \because z \neq 0.
\end{aligned}$$

L'équation $z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

L'équation $z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de $Q(z) = 0$ est

$$\boxed{\{\, z_1, z_2, z_3, z_4 \,\}}.$$

6. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^5 - 1 = 0 \iff (z-1)Q(z) = 0.$$

Donc l'équation (9.3) a pour ensemble de solutions

$$\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\} = \{\, 1, z_1, z_2, z_3, z_4 \,\}.$$

On remarque

$$\mathfrak{Re}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \cos(2\pi/5) > 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \sin(2\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_1) < 0$, $\mathfrak{Re}(z_2) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z_3) < 0$. On a nécessairement $e^{2i\pi/5} = z_4$ d'où

$$\boxed{\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

De même,

$$\mathfrak{Re}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \cos(4\pi/5) < 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \sin(4\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_3) > 0$, $\mathfrak{Re}(z_4) > 0$ et $\mathfrak{Im}(z_1) < 0$. On a nécessairement $e^{4i\pi/5} = z_2$ d'où

$$\boxed{\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}} \text{ et } \boxed{\sin(4\pi/5) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

7. On a $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5}$, d'où

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

[1]

[1]On peut également remarquer que $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et utiliser la formule de Carnot

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Exercice 9.35

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.
2. $(z^2 - 2z)\cos^2\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.
3. $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.36

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
2. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.
3. $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

Solution 9.36

Exercice 9.37

Soit n un entier naturel impair fixé.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(z^2+1\right)^n-(z-i)^{2n}=0. \tag{E}$$

Solution 9.37

Exercice 9.38

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - (3-2i)z + (2-2i) = 0. \tag{9.7}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. En déduire les solutions de l'équation suivante, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

$$Z^6 - (3-2i)Z^3 + (2-2i) = 0. \tag{9.8}$$

On donnera une forme trigonométrique des solutions.

Solution 9.38

1. Le discriminant de l'équation (9.7) est $(3-2i)^2 - 4(2-2i) = -3-4i$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+ib)^2 = -3-4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 1 \\ b = 2 \text{ ou } b = -2 \\ ab = -2 < 0 \end{cases}.$$

Une racine carrée de $-3-4i$ est donc $1-2i$.

Conclusion : les solutions complexes de l'équation (9.7) sont

$$\frac{3-2i-(1-2i)}{2} = 1 \text{ et } \frac{3-2i+(1-2i)}{2} = 2-2i.$$

2. Soit $Z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente

$$Z^6 - (3-2i)Z^3 + (2-2i) = 0 \iff Z^3 = 1 \text{ ou } Z^3 = 2-2i.$$

Or les racines cubiques de l'unité sont

$$1, j = e^{2i\pi/3} \text{ et } j^2 = e^{4i\pi/3}.$$

De plus $2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Les racines cubiques de $2-2i = (\sqrt{2})^3 e^{-i\pi/4}$ sont donc

$$\sqrt{2}e^{-i\pi/12}, \sqrt{2}e^{-i\pi/12+2i\pi/3} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12} \text{ et } \sqrt{2}e^{-i\pi/12+4i\pi/3} = \sqrt{2}e^{15i\pi/12}.$$

Conclusion : les solution de l'équation (9.8) sont

$$1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}, \sqrt{2}e^{-i\pi/12}, \sqrt{2}e^{7i\pi/12} \text{ et } \sqrt{2}e^{15i\pi/12}.$$

Exercice 9.39 *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Solution 9.39 *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \mod 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$.
Or $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}$ est injective.
Donc, $\left\{ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$.
Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$,

$$\begin{aligned} (z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n &\iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

En remarquant que $z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que:

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \exists\, k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1}$$

En écrivant $\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1} = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}} = \mathrm{i}\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.
On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ alors $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ et donc

le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-$i, c'est-à-dire à la droite des réels.

Exercice 9.40

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

Solution 9.40

On a $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i \iff e^{2x-1}e^{2iy} = 2\sqrt{3}e^{-\pi/3} &\iff \begin{cases} e^{2x-1} = 2\sqrt{3} \\ 2y \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 1 = \ln\left(2\sqrt{3}\right) \\ y \equiv -\pi/6 \pmod{\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = (1 + \ln\left(2\sqrt{3}\right))/2 \\ y \equiv -\pi/6 \pmod{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$ sont donc les nombres complexes de la forme

$$z = \frac{1 + \ln 2\sqrt{3}}{2} + i\left(k - \frac{1}{6}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 9.41

1. Quels sont les complexes z non nuls tels que $z + \frac{1}{z}$ est réel ?
2. Quels sont les complexes z tels que les points d'affixes 1, z, z^3 sont alignés.

Solution 9.41

Exercice 9.42

Dans le plan complexe, soit I le point d'affixe i. À tout point M d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe iz.

1. On suppose que $z \neq 0$. Calculer la partie imaginaire de $\frac{z-i}{z-iz}$ en fonction de x et y.
2. On suppose toujours que $z \neq 0$. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\frac{z-i}{z-iz}$ pour que les trois points I, M et M' soient alignés. Exprimer cette condition en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Solution 9.42

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{z-i}{z-iz} = \frac{z-i}{z(1-i)} &= \frac{(z-i)\bar{z}(1+i)}{2|1-i|^2 z\bar{z}}\\ &= \frac{z\bar{z}+iz\bar{z}-i\bar{z}+\bar{z}}{2z\bar{z}}\\ &= \frac{|z|^2+i|z|^2+(1-i)\bar{z}}{2|z|^2}\\ &= \frac{x^2+y^2+x+y}{2(x^2+y^2)}+i\frac{x^2+y^2-x-y}{2(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{z-i}{z-iz}\right) = \frac{x^2+y^2-x-y}{2\left(x^2+y^2\right)}.$$

2. Puisque $z \neq 0$, on a $z \neq iz$ d'où $M \neq M'$. On donc les équivalences

$$\begin{aligned} I, M, M' \text{ sont alignés } &\iff \left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MI}\right) \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } I = M \text{ ou } I = M'\\ &\iff \frac{z-i}{z-iz} \in \mathbb{R}^\star \text{ ou } z = i \text{ ou } z = 1\\ &\iff \frac{z-i}{z-iz} \in \mathbb{R}\\ &\iff \mathfrak{Im}\left(\frac{z-i}{z-iz}\right) = 0\\ &\iff x^2+y^2-x-y=0.\end{aligned}$$

3. Remarquons que si $z = 0$, alors $M = M'$, donc I, M, M' sont alignés. De plus, dans ce cas, on a bien $x^2+y^2-x-y=0$.

   On a donc les équivalences suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} I, M, M' \text{ sont alignés } &\iff x^2+y^2-x-y=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}^2\right)-\frac{1}{4}=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}^2\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$