Chapter 35 Espaces vectoriels

35.1 Structure d'espace vectoriel

35.1.1 Les axiomes d'espace vectoriel

35.1.2 Exemples

35.1.3 Combinaisons linéaires

Exercice 35.1

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $x = (7, \alpha, -6) \in \mathbb{R}^3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $a = (2, -1, 3)$ et $b = (1, 3, 7)$.

Exercice 35.2

Montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, défini par $Q(X) = 7X^3 - 5X^2 + 11$ est combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 définis par

$$P_1(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \qquad P_2(X) = X^2 + X + 1 \qquad P_3(X) = X + 1 \qquad P_4(X) = 1$$

Exercice 35.3

On considère dans $\mathbb{K}^3$ les vecteurs

$$u = (1, 0, 0); \qquad v = (1, 1, 0); \qquad w = (1, 1, 1); \qquad g = (\alpha, \beta, \gamma).$$

où α, β, γ sont des scalaires quelconques.

1. g est-il combinaison linéaire de u, v, w ?
2. g est-il combinaison linéaire de v et de w ?

35.2 Sous-espaces vectoriels

35.2.1 Définition

35.2.2 Caractérisation

Exercice 35.4

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = y = 3x \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z + y = 3x \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; zy = 3x \right\}, \qquad S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}.$$

Donner une démonstration ou un contre-exemple pour justifier votre réponse.
Indication : S_1 et S_2 sont des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$. S_3 et S_4 ne sont pas des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 35.7

Soit A une matrice (n, n) et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire fixé. Montrer que l'ensemble

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 35.8

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice $(2, 2)$ à coefficients réels.

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 35.9

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
2. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 35.10

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

1. $A = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P(1) \}$.
2. $B = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, (X^2 + 1) \text{ divise } P \right\}$.
3. $C = \left\{ a(X^3 - 3) + b(X^2 - 2) \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

Exercice 35.12

Soit $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication externe usuelle (point par point).

1. Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des sous-espace vectoriel de F?

$$S_1 = \{ f \in F \mid f(0) = 1 \}, \qquad S_2 = \{ f \in F \mid f(1) = 0 \}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$S_3 = \left\{ f \in F \,\middle|\, f \text{ est dérivable} \quad \text{et} \quad f' - f = 0 \right\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F.

Indication : S_2 est un sous-espace vectoriel de F, mais S_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 35.13

Montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x + \varphi) \right\}.$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 35.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset F_{n+1}.$$

Montrer que $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

35.2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Exercice 35.17

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x + y = z + t + w \right\} \\ \text{et } G &= \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x = y \text{ et } z = t = w \right\}. \end{aligned}$$

Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis déterminer $F \cap G$.

Exercice 35.18

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ (x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0 \}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 35.19

Soit U et V deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

3. Donner un exemple de sous-espace U et V de $\mathbb{R}^3$ qui illustre le fait que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel, mais que $U \cup V$ ne l'est pas.

35.2.4 Droites et plans vectoriels

Exercice 35.20

On considère

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Parmi les vecteurs suivants,

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

déterminer ceux qui appartiennent à $\mathrm{Vect}\,\{\, u, v \,\}$. Lorsque c'est le cas, les exprimer comme combinaison linéaire de u et v.

Exercice 35.21

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercice 35.23

1. Écrire, si possible, le vecteur $v = (1, 1, -3) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$u_1 = (-3, 1, 2), \quad u_2 = (4, -2, 1), \quad u_3 = (-5, 1, 7).$$

2. Montrer que $\mathrm{Vect}\left\{\, u_3 \,\right\} \subset \mathrm{Vect}\left\{\, u_1, u_2 \,\right\}$ mais que ces deux sous-espaces vectoriels ne sont pas égaux.

Exercice 35.24

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (2, -1, 1), \qquad a = (1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad b = (0, 1, 1).$$

Démontrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(a, b)$.
Indication : Il suffit de montrer que $\{\, u, v \,\} \subset \mathrm{Vect}(a, b)$ et $\{\, a, b \,\} \subset \mathrm{Vect}(u, v)$.

35.2.5 Noyau et image d'une matrice

Exercice 35.28

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- en utilisant la définition (ou caractérisation) d'un sous-espace vectoriel ;
- en les décrivant comme le noyau d'une matrice ou comme l'image d'une matrice.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}.$

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} \middle| \, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$.

4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x - y - 2z = 0 \right\} \bigcap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 3x - y - z = 0 \right\}$.

5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$.