Lycée Colbert — 2023/2024
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 21 octobre 2023, 8:00-12:00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

On considère l'équation

$$29x - 11y = 1 \tag{1}$$

dans laquelle les inconnues x et y appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. En déduire une solution particulière de l'équation (1). Donner la solution générale de cette équation.

2. On considère maintenant l'équation

$$29x - 11y = 5. \tag{2}$$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 2

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{ 2 \} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-1}{4-2z} \end{array}.$$

1. f est-elle injective?

2. Déterminer $f(\mathbb{C} \setminus \{ 2 \})$.

3. Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

4. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

(a) Montrer que $f\left(e^{i\theta}\right)$ n'est pas un réel négatif ou nul.

(b) D'après la question précédente, il existe un unique $\alpha \in]-\pi, \pi[$ tel que

$$\arg\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

Montrer que

$$e^{i\alpha} = \frac{2e^{i\theta} - 1}{2 - e^{i\theta}}.$$

(c) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. Exprimer $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ à l'aide de e^{ix} uniquement.

(d) En déduire que $\tan\frac{\alpha}{2} = 3\tan\frac{\theta}{2}$.

(e) Exprimer α en fonction de θ.

(f) Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction de $]-\pi, \pi[$ dans $]-\pi, \pi[$ qui à θ associe la valeur α comme définie ci-dessus.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - (3-2i)z + (2-2i) = 0. \tag{3}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. En déduire les solutions de l'équation suivante, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

$$Z^6 - (3-2i)Z^3 + (2-2i) = 0. \tag{4}$$

On donnera une forme trigonométrique des solutions.

Exercice 4 *Propriétés cyclotomiques*

On considère $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $\omega = \exp\left(2i\frac{\pi}{n}\right)$. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Partie A Calculs préliminaires

Pour $r \in \mathbb{Z}$, on pose

$$S_r = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^k\right)^r.$$

A1. Exprimer, pour m, k, p entiers naturels la partie réelle de $\left(1+\omega^k\right)^m \omega^{-kp}$ à l'aide de la fonction cosinus et des paramètres m, k, p.

A2. Résoudre l'équation d'inconnue $p \in \mathbb{Z}$, $\omega^p = 1$.

A3. En déduire le calcul de S_r en fonction de $r \in \mathbb{Z}$.

Partie B Une première inégalité

Soient a et b deux nombres complexes.

B1. Calculer, en fonction de a, b et n uniquement, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right).$$

B2. Montrer que

$$n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

B3. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right| = \sum_{h=0}^{n-1} \left|b + \omega^h a\right|.$$

B4. En déduire que

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

Partie C Calculs de sommes trigonométriques

C1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\omega^k + z\right)^n = n\,(z^n + 1)\,.$$

C2. En appliquant la formule ci-dessus pour les valeurs $z = 1$ et $z = -1$, donner des expressions simples de

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Partie D Transformation de Fourier

On considère une suite finie $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$. On lui associe la suite $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall r \in [\![0, n-1]\!], b_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{rk}.$$

D1. (a) Calculer $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1$.

(b) Calculer $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = 1$ et $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

(c) Calculer $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_k = \omega^k$.

D2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-kh}.$$

Partie E Applications de la transformation de Fourier

E1. *Première application.*

Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Pour tout couple d'entiers $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < n$, on définit

$$S_{p,n} = \sum_{\substack{k \in [\![0,m]\!] \\ k \equiv p \pmod n}} \binom{m}{k}$$

(a) Exprimer $(1+1)^m$ et $(1-1)^m$ à l'aide de $S_{0,2}$ et $S_{1,2}$. En déduire les valeurs de $S_{0,2}$ et de $S_{1,2}$.

(b) Pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, on note

$$T_{r,n} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{k,n} \omega^{rk}.$$

Montrer que

$$T_{r,n} = (1 + \omega^r)^m\,.$$

(c) En déduire

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], S_{p,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \omega^k\right)^m \omega^{-kp}.$$

(d) À l'aide de la question **A1**, donner une expression de $S_{p,n}$ comme une somme de nombres réels.

E2. *Seconde application.* Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{U}, |f(z)| \leq M.$$

En exploitant la famille des nombres $b_r = f(\omega^r)$, montrer que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], |a_k| \leq M.$$

Exercice 5

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1) \end{array}.$$

1. Montrer, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, 2^p(2q+1).$$

Que peut-on en déduire pour f ?

2. Prouver que f est une bijection.

3. Construire, à l'aide de f, une application bijective $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

4. On dispose maintenant d'une bijection g de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$. On définit alors l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{N} \\ (a,b,c) & \mapsto & g(g(a,b),c) \end{array}.$$

(a) Montrer que h est bijective.

(b) Déterminer $h^{-1}(2023)$.

5. Construire une application bijective $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$.