Chapter 22 Relations de comparaisons sur les suites

Exercice 22.1

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = \ln n, \qquad b_n = e^n, \qquad c_n = (\ln n)^{2023}, \qquad d_n = n^{0.1}, \qquad e_n = 5^n,$$
$$f_n = 2^n, \qquad g_n = n^{10}, \qquad h_n = \sqrt{\ln n}, \qquad i_n = n!.$$

Solution 22.1

C'est du cours!

$$\sqrt{\ln n} = o(\ln n) \qquad \ln n = o\left((\ln n)^{2023}\right) \qquad (\ln n)^{2023} = o\left(n^{0.1}\right) \qquad n^{0.1} = o\left(n^{10}\right)$$
$$n^{10} = o\left(2^n\right) \qquad 2^n = o\left(e^n\right) \qquad e^n = o\left(5^n\right) \qquad 5^n = o\left(n!\right).$$

Exercice 22.2

Vrai ou Faux ?

1. $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{n+1}$.
2. $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Solution 22.2

1. Faux. On a
$$\frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e}$$
qui ne tend pas vers 1 lorsque $n \to +\infty$.
2. Vrai.
$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} e^{u_n - v_n} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0.$$
3. Faux. Par exemple, $n \sim n + 1$ mais e^n et e^{n+1} ne sont pas équivalentes.
4. Faux. Trouver un contre exemple non trivial est un peu plus dur. Par exemple,
$$1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$$
Or $\ln 1 + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ et $\ln 1 + \frac{1}{n}^2 \sim \frac{1}{n^2}$; et puisque $1/n$ et $1/n^2$ ne sont pas équivalents,
$$\ln 1 + \frac{1}{n} \nsim \ln 1 + \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 22.3

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Solution 22.3

Nous émettons une conjecture:

$$b_n = o(a_n) \qquad a_n = o(d_n) \qquad d_n = o(c_n).$$

Pour la démontrer, on peut réécrire les termes généraux sous forme exponentielle:

$$a_n = n^n = e^{n \ln n}, \qquad b_n = n^{\ln(n)} = e^{(\ln n)^2}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n} = e^{n \ln(n) \ln(\ln n)}.$$

On a

$$\frac{b_n}{a_n} = e^{(\ln n)^2 - n \ln n} = e^{\ln n(\ln n - n)} \to 0$$

puisque $\ln n - n \sim -n \to -\infty$. On a donc $b_n = o(a_n)$.

De plus,

$$\frac{a_n}{d_n} = e^{n \ln n - n \ln n \ln \ln n} = e^{n \ln n(1 - \ln \ln n)} \to 0$$

puisque $\ln \ln n \to +\infty$. Donc $a_n = o(d_n)$.

Enfin,

$$\frac{d_n}{c_n} = e^{n \ln n \ln \ln n - n^2} = e^{n\left(\ln n \ln \ln n - n^2\right)}.$$

Or

$$\ln n \ln \ln n - n^2 = n^2 \left(\frac{\ln n}{n} \frac{\ln \ln n}{n} - 1 \right) \to -\infty$$

donc $\frac{d_n}{c_n} \to 0$, ainsi $d_n = o(c_n)$.

On peut résumer ces résultats:

$$n^{\ln n} = o\left(n^n\right) \qquad n^n = o\left((\ln n)^{n \ln n}\right) \qquad (\ln n)^{n \ln n} = o\left(e^{n^2}\right).$$

Exercice 22.4

Pour chaque paire de suites (u_n) et (v_n) ci-dessous, A-t-on $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$ ou $u_n \sim v_n$?

1. $u_n = (n^2 - n)/2$ et $v_n = 6n$.
2. $u_n = n + 2\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = n \ln n$ et $v_n = n\sqrt{n}/2$.
4. $u_n = n + \ln n$ et $v_n = \sqrt{n}$.
5. $u_n = 2(\ln n)^2$ et $v_n = \ln(n) + 1$.
6. $u_n = 4n \ln n + n$ et $v_n = \left(n^2 - n\right)/2$.

Solution 22.4

1. $v_n = o(u_n)$ donc $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
2. $u_n = o(v_n)$ donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
3. $\ln n = o(\sqrt{n})$ donc $u_n = o(v_n)$ d'où $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
4. $v_n = o(u_n)$ donc $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
5. $v_n = o(u_n)$ donc $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
6. $u_n = o(v_n)$ donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exercice 22.5

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = (1000)2^n + 4^n$.

2. $u_n = n + n \ln n + \sqrt{n}$.

3. $u_n = \ln\left(n^{20}\right) + (\ln n)^{10}$.

4. $u_n = (0.99)^n + n^{100}$.

Solution 22.5

1. Par croissance comparée, $2^n = o(4^n)$ donc

$$u_n = (1000)2^n + 4^n \sim 4^n.$$

2. On a $1 = o(\ln n)$ (et $n = \mathcal{O}(n)$) donc $n = o(n \ln n)$. De plus, $\sqrt{n} = o(n)$ donc $\sqrt{n} = o(n \ln n)$. Finalement,

$$u_n = n + n \ln n + \sqrt{n} \sim n \ln n \quad [n \to +\infty].$$

3. On a $\ln\left(n^{20}\right) = 20 \ln n = o\left((\ln n)^{10}\right)$, d'où

$$u_n = \ln\left(n^{20}\right) + (\ln n)^{10} \sim (\ln n)^{10} \quad [n \to +\infty].$$

4. On a $\lim\limits_{n\to\infty} (0.99)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^{100} = +\infty$ donc $(0.99)^n = o\left(n^{100}\right)$, d'où

$$u_n = (0.99)^n + n^{100} \sim n^{100} \quad [n \to +\infty].$$

Exercice 22.6

Déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{2^n}$;
2. $b_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{10^{32}}{n^2}$;
3. $c_n = n^{-1/2} + 1$;
4. $d_n = \ln n - \sqrt{n} + (-1)^n$;
5. $e_n = 10^n + n!$;
6. $f_n = \dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{n!}$;
7. $g_n = n! + n^{\sqrt{n}} + n^n$;
8. $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^k}$;
9. $i_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
10. $j_n = \ln(n+32)$.

Solution 22.6

Réponses à détailler.

1. $a_n \sim -\dfrac{1}{2^n}$;
2. $b_n \sim \dfrac{1}{n}$;
3. $c_n \sim 1$;
4. $d_n \sim -\sqrt{n}$;
5. $e_n \sim n!$;
6. $f_n \sim \dfrac{1}{10^n}$;
7. $g_n \sim n^n$;
8. $h_n \sim 2e^{-n}$;
9. $i_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$;
10. $j_n \sim \ln(n)$.

Exercice 22.7

Déterminer un équivalent simple de

1. $u_n = \dfrac{100^n + 3(n!)}{2(n!) + 1000^n}$,
2. $v_n = \dfrac{n! + 2^n}{3^n + n^{30}}$,
3. $w_n = \dfrac{n^3 + n! + 10^n}{(n+2)! + 100^n}$,
4. $t_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n+3} + 1000^n}$,

et en déduire leurs limites.

Solution 22.7

Réponses à détailler.

1. $u_n \sim \dfrac{3}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$,
2. $v_n \sim \dfrac{n!}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
3. $w_n \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
4. $t_n \sim \dfrac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 22.8

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = n^{1/n} - 1$;
2. $u_n = \dfrac{1+\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n^2}}$;
3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$;
4. $u_n = (n + 3\ln n)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$;
5. $u_n = \dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$;
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Solution 22.8

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n = 0$$

et donc

$$u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

2. Lorque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^2} \to 0$ donc

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \tan\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

On a donc $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} = o(1)$ d'où $1 + \sin\frac{1}{n} \sim 1$. Finalement,

$$u_n = \frac{1+\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{\frac{1}{n^2}} \sim n^2.$$

3. Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) = \ln\left(n(1 + \sqrt{1+1/n^2}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \sqrt{1+1/n^2}\right).$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \ln 2$$

On a donc $\ln\left(1+\sqrt{1+1/n^2}\right) = o(\ln n)$ d'où

$$u_n \sim \ln n.$$

4. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\ln n = o(n)$, donc $n + 3\ln n \sim n$. Finalement

$$u_n \sim ne^{-(n+1)} = \frac{ne^{-n}}{e}.$$

5. Lorsque $n \to +\infty$,

$$e^n = o(n!) \text{ et } 2^n = o(3^n)$$

On a donc $n! + e^n \sim n!$ et $2^n + 3^n \sim 3^n$, d'où

$$u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \sim \frac{n!}{3^n}.$$

6. On a $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$: aucun des terme n'est négligeable devant l'autre (et on ne peut pas additionner les équivalents!).

Pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2-1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}.$$

Or, lorsque $n \to +\infty$, $n^2 - 1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2-1} \sim n$.

De plus, $n+1 \sim n$ et $n-1 \sim n$, on a alors $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ et $\sqrt{n-1} \sim n$, et on peut écrire

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

Ce qui revient à $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \sim 2\sqrt{n}$.

Finalement,

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n^2-1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} \sim \frac{2}{n \times 2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

marque Si l'on veut se passer de «petit-o», on peut faire le calcul «à la main»:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}\right) \text{ et } \sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n} \to 2$$

donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 22.9

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites à valeurs réelles. On suppose que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et qu'à partir d'un certain rang

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Montrer qu'alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \quad \text{et} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Solution 22.9

À partir d'un certain rang k, on a

$$0 \leq u_n - a_n \leq b_n - a_n,$$

d'où $u_n - a_n = \mathcal{O}(b_n - a_n)$. De plus, $a_n \sim b_n$ donc $b_n - a_n = o(a_n)$. Finalement, on a $u_n - a_n = o(a_n)$ c'est-à-dire,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n,$$

et puisque $a_n \sim b_n$, on a par transitivité $u_n \sim b_n$.

marque **Variante dans un cas particulier**

Dans le cas où $a_n > 0$, on obtient une démonstration rapide à partir du quotient. C'est un cas fréquent en pratique.

À partir d'un certain rang

$$1 \leq \frac{u_n}{a_n} \leq \frac{b_n}{a_n}.$$

Or $a_n \sim b_n$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$. D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{a_n} = 1,$$

d'où $u_n \sim a_n \sim b_n$.

Lorsque le signe des suites n'est pas constant, on peut faire un raisonnement analogue, mais il faut alors faire très attention avec les inégalités précédentes.

Exercice 22.10

Soient u et v deux suites de réels strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.

Solution 22.10

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq \alpha$,

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On a alors

$$\prod_{k=\alpha}^{n-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{k=\alpha}^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

c'est-à-dire, par télescopage

$$\frac{u_n}{u_\alpha} \leq \frac{v_n}{v_\alpha}.$$

Finalement, si $n \geq \alpha$, on a

$$0 < u_n \leq \frac{u_\alpha}{v_\alpha} v_n;$$

d'où $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.

Seconde méthode, utilisant la monotonie du quotient.

Puisque les suites sont à valeurs > 0, il existe un rang $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \alpha, \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

Autrement dit, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq \alpha}$ est décroissante. On a donc

$$\forall n \geq \alpha, \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_\alpha}{v_\alpha}.$$

En notant $k = u_\alpha / v_\alpha$, on a donc

$$\forall n \geq \alpha, 0 \leq u_n \leq k v_n;$$

et par conséquent $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exercice 22.11

Déterminer un équivalent simple de (u_n) dans les cas suivants.

1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$, où $a \in \mathbb{R}^\star$.
2. $u_n = \left(1 + \sqrt{n^2+1}\right)^{1/2}$.
3. $u_n = \ln\left(n^2 + n + 1\right)$.

Solution 22.11

1. $u_n \sim \frac{a}{n}$.
2. $u_n \sim \sqrt{n}$.
3. $u_n \sim 2\ln n$.

Exercice 22.12

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par

$$u_0 > 0$$
$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

1. Prouver que $\left(u_n\right)$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $w_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n-1}^2}$. Déterminer w_n, calculer de deux façons différentes $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} w_k$, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^2$, puis un équivalent de u_n.

Solution 22.12

1. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\sqrt{1+u_n^2} > u_n$, d'où $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est donc décroissante. Étant décroissnate et minorée (par 0), elle est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = \left(\frac{\sqrt{1+u_{n-1}^2}}{u_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{u_{n-1}^2} = 1$, d'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = 1.$$

D'autre part, on a par télescopage,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Ainsi, $\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2} = n$, d'où $\dfrac{1}{nu_n^2} = 1 + \dfrac{1}{nu_0^2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nu_0^2} = 0$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^2 = 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 1$ (car $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 22.13 (****)

Soit $T : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \mathcal{O}(n) \quad [n \to +\infty].$$

Montrer que $T(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$.

Solution 22.13

L'hypothèse sur $T(n)$ peut se réécrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + g(n)$$

où $g(n) = \mathcal{O}(n)$, c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0, g(n) \leq kn.$$

On a donc

$$\forall n \geq n_0, T(n) \leq 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + kn.$$

Quitte à changer, n_0, on peut supposer $n_0 \geq 2$. On peut alors choisir $c \geq 1$ (en fait $c \geq k+1$) tel que

$$\forall n \in [\![n_0, 2n_0]\!], T(n) \leq cn \lg n$$

Remarque Par exemple

$$c = \max\left\{ k+1, \frac{T(n_0)}{n_0 \lg n_0}, \frac{T(n_0+1)}{(n_0+1)\lg(n_0+1)}, \dots, \frac{T(2n_0)}{2n_0 \lg(2n_0)} \right\}.$$

où lg désigne le logarithme de base 2.

Pour $n \geq n_0$, définissons le prédicat $R(n)$ par «$T(n) \leq cn \lg n$» de sorte que $R(n_0)$, $R(n_0+1)$,…, $R(2n_0)$ sont vrais par définition de c.

Soit $n \geq 2n_0$ tel que $R(n_0)$, $R(n_0+1)$, …, $R(n)$, alors

$$n_0 \leq \left\lfloor \frac{2n_0+1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n+1}{2} \leq n$$

En particulier, $R\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$ est vraie et donc

$$\begin{aligned}
T(n+1) &= 2T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + g(n+1) \\
&\leq 2c\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \lg\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + k(n+1) && \because R\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) \\
&\leq 2c\frac{n+1}{2} \lg \frac{n+1}{2} + k(n+1) \\
&= (n+1)\left(c\lg(n+1) - c\lg 2 + k\right) \\
&= (n+1)\left(c\lg(n+1) + 1 - c + k\right) \\
&\leq c(n+1)\lg(n+1) && \text{en choisissant } c \geq k+1 \text{ au départ.}
\end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence, on a pour $n \geq n_0$, $T(n) \leq cn \lg n$, d'où

$$T(n) = \mathcal{O}(n \lg n).$$

Remarque Cette récurrence arrive naturellement (presque) sous cette forme lorsque l'on étudie la complexité en temps de l'algorithme de tri par fusion. En seconde année, vous montrerez d'ailleurs que $T(n) = \Theta(n \lg n)$.