Sujet d'étude

Exercice 1 *Construction de $\mathbb{R}$ par les sections commençantes*

On appelle section commençante ouverte s, toute partie de $\mathbb{Q}$ possédant les propriétés suivantes

- La partie s est une partie **propre** de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire $s \neq \emptyset$ et $s \neq \mathbb{Q}$.
- Si $x \in s$ et $y \in \mathbb{Q}$ est tel que $y \leq x$, alors $y \in s$:
$$\forall x \in s, \forall y \in \mathbb{Q}, y \leq x \implies y \in s.$$
- La partie s n'a pas de plus grand élément.

On désigne par S l'ensemble des sections commençantes ouvertes.

1. On note $i(a)$ l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à un rationnel a:
$$i(a) = \{ \ x \in \mathbb{Q} \mid x < a \ \} .$$
Montrer que $i(a)$ est une section commençante ouverte.

Partie A Un ordre sur S

A1. Démontrer que la relation $\leq$ définie par
$$s_1 \leq s_2 \iff s_1 \subset s_2$$
est une relation d'ordre totale sur S.

A2. Soit $(s_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de S majorés par s_0. Démontrer que
$$s = \bigcup_{i\in I} s_i$$
est une section commençante ouverte et que cette section est la plus petite contenant chaque s_i. En déduire que dans l'ensemble S totalement ordonné par $\leq$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

A3. Démontrer qu'étant donné $s_1, s_2 \in S$, $s_1 < s_2$, il existe un rationnel x tel que
$$s_1 < i(x) < s_2.$$

Partie B L'addition sur S

Soit s_1 et s_2 deux éléments de S. On note $s_1 + s_2$ la partie de $\mathbb{Q}$ définie par
$$s_1 + s_2 = \left\{ \ x_1 + x_2 \ \middle| \ x_1 \in S_1 \ \text{ et } \ x_2 \in S_2 \ \right\} .$$

B1. Montrer que l'addition ainsi définie sur S est commutative et associative.

B2. Montrer que pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, on a $i(x_1) + i(x_2) = i(x_1 + x_2)$.

B3. Montrer que $i(0)$ est l'élément neutre de cette addition.

B4. Étant donné $s \in S$, démontrer que l'ensemble

$$s' = \{ x \in \mathbb{Q} \mid s < i(-x) \}$$

est une section commençante ouverte vérifiant $s + s' = i(0)$.

B5. Soit s, s_1, s_2 trois éléments de S. Montrer que si $s_1 \leq s_2$, alors $s_1 + s \leq s_2 + s$.

Partie C Plongement de $\mathbb{Q}$ dans S

C1. Montrer que l'application $i : \mathbb{Q} \to S$ définie par $i : x \mapsto i(x)$ est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe additif $(S, +)$.

C2. Montrer que i est strictement croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2, x_1 < x_2 \implies i(x_1) < i(x_2).$$

Ce morphisme permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à une partie de S, que l'on notera encore $\mathbb{Q}$.

Partie D Les nombres réels

Dans la suite, on appellera nombres réels les éléments de S, et l'on désignera par $\mathbb{R}$ (et non plus S) l'ensemble des nombres réels. Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s'appelleront irrationnels.

D1. Démontrer que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$na > b;$$

la notation na désignant comme d'habitude $a + a + \ldots a$ avec n termes. On dit que l'ordre défini sur $\mathbb{R}$ est archimédien.

D2. Montrer qu'entre deux réels quelconques, il existe un rationnel.

D3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, l'ensemble

$$s_n = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x \leq 0 \text{ ou } (nx)^2 < 2 \right\}$$

définit un réel irrationnel.
On désigne par $\sqrt{2}/n$ ce réel.

D4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < \sqrt{2}/n < 2/n$.

D5. En déduire qu'entre deux rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.

Partie E La multiplication sur $\mathbb{R}$

Soit s un réel strictement positif ($0 \leq s$ et $s \neq 0$). On pose

$$s_+ = s \cap \mathbb{Q}_+^\star$$

qui n'est plus une section commençante.

E1. Soit s_1 et s_2 deux réels strictement positifs. On définit l'ensemble $s_1 \times s_2$ de la manière suivante

$$s_1 \times s_2 = \left\{ x_1 \times x_2 \mid x_1 \in s_{1+} \text{ et } x_2 \in s_{2+} \right\} \cup Q_-.$$

Montrer que $s_1 \times s_2$ est un réel strictement positif.

Dans la suite, on notera simplement $s_1 s_2$ le réel $s_1 \times s_2$.

E2. Montrer que la multiplication ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

E3. Vérifier que si x_1 et x_2 sont des rationnels strictement positifs

$$i(x_1) \times i(x_2) = i\left(x_1 x_2\right).$$

E4. Démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^\star$, $s \times i(1) = s$.

E5. Démontrer que la réunion de $\mathbb{Q}_-$ et du complémentaire dans $\mathbb{Q}_+^\star$ de

$$\left\{ x^{-1} \,\middle|\, x \in s \cap \mathbb{Q}_+^\star \right\}$$

est une section commençante ouverte s'' vérifiant $s \times s'' = i(1)$.

Dans la suite, on désignera s'' par s^{-1}.

E6. Étendre à $\mathbb{R}$ la multiplication définie sur $\mathbb{R}_+^\star$, en lui imposant la condition d'être distributive par rapport à l'addition.

Prouver la règle des signes et démontrer que pour tout réel s, on a $s \times i(0) = i(0)$.

E7. En déduire que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien dans lequel toute partie non vide majorée possède une borne supérieure.

Partie F $\mathbb{R}$ est complet

Nous montrons dans cette partie que $\mathbb{R}$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente. Pour cela, on commence par munir $\mathbb{R}$ de la valeur absolue $|*|$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de réels, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \left(p \geq N \text{ et } q \geq N \implies |r_q - r_p| \leq \varepsilon\right).$$

F1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

F2. Pour tout n, on pose

$$v_n = \inf\left\{ u_m \mid m \geq n \right\} \quad \text{et} \quad w_n = \sup\left\{ u_m \mid m \geq n \right\}.$$

Justifier l'existence des réels v_n et w_n.

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement croissante et décroissante.

Prouver que ces suites convergent (dans $\mathbb{R}$).

F3. En utilisant la définition d'une suite de Cauchy, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, |w_n - v_n| \leq \varepsilon.$$

En déduire que les suites (v_n) et (w_n) ont la même limite.

F4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et conclure.