Chapter 30 Développements limités

Exercice 30.1

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \mathrm{sh}(x) - 2\sqrt{1+x}$.

Solution 30.1

Exercice 30.2

Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction arctan.

Solution 30.2

Exercice 30.3

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \sin(x)$.

Solution 30.3

Exercice 30.4

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Solution 30.4

Exercice 30.5

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

Solution 30.5

Exercice 30.6

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $\tanh$.

Solution 30.6

Exercice 30.7 (***)

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.

2. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p+2q = k$.

Solution 30.7

1. Quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right) + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n).$$

2. On a aussi,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2q}\right) + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k} 1\right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).

Exercice 30.8 (*)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $x = 0$ de

$$f(x) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(2x).$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de $x = 0$ de

$$f(x) = e^{\sin(2x)}.$$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $x = 0$ de

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh} x).$$

Solution 30.8

1. Lorsque $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(2x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\ &= \boxed{x + \frac{13}{6}x^3 + o\left(x^4\right)}. \end{aligned}$$

2. Lorsque $x \to 0$,

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o\left(x^5\right) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Avec $u = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o\left(x^5\right) \to 0$, $u^2 = 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o\left(x^5\right)$, $u^3 = 8x^3 - 16x^5 + o\left(x^5\right)$, $u^4 = 16x^4 + o\left(x^5\right)$, $u^5 = 32x^5 + o\left(x^5\right)$. On obtient

$$\begin{aligned} e^{\sin(2x)} = e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + o\left(u^5\right) \\ &= \boxed{1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - \frac{32}{15}x^5 + o\left(x^5\right)}. \end{aligned}$$

3. Lorsque $x \to 0$, $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$ et lorsque $u \to 0$, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$. D'où avec $u = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \to 0$, $u^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)$, $u^3 = x^3 + o\left(x^4\right)$, $u^4 = x^4 + o\left(x^4\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right) \\ &= \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 30.9 (**)

Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \exp \sqrt{1+x}$.
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln (2 + \sin x)$.

Solution 30.9

Exercice 30.13

Donner les développements limités suivants.

1. $DL3$ en 0 de $f(x) = (\cos x)\sqrt{1+x}$;
2. $DL4$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1+x}$;
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3}}{1-x}$;
4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^{\cos x}$;
5. $DL3$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$;
6. $DL4$ en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Solution 30.13

Dans chaque question, $x \to 0$.

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3)$.
2. $f(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.
3. $f(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{9}x^2 + \frac{104}{81}x^3 + o(x^3)$.
4. $f(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$.
5. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$.
6. $f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 30.17

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués.

1. $\dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0).
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0).
3. $\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0).
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\dfrac{\pi}{4}$).
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0).
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0).
7. $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1).
8. $\operatorname{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0).
9. $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0).
10. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0).
11. $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$ (ordre 10 en 0).
12. $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0).
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π).

Solution 30.17

Exercice 30.18

Écrire le développement limité à l'ordre 4 en zéro de

$$f : x \mapsto \arctan \frac{\sqrt{3} + x}{1 + x\sqrt{3}}.$$

Solution 30.18

développement limité de f'.

Exercice 30.19

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = 1$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Exercice 30.20

Donner les développements limités suivants.

1. $DL4$ en $\pi/3$ de $f(x) = \cos x$;
2. $DL4$ en 1 de $f(x) = e^x$;
3. $DL4$ en 2 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
4. $DL3$ en $\pi/4$ de $f(x) = \tan x$;
5. $DL4$ en e de $f(x) = \ln x$;
6. $DL4$ en 1 de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Solution 30.20

1. Lorsque $x \to \pi/3$, $h = x - \pi/3 \to 0$, et

$$\begin{aligned}
f(x) = f(\pi/3 + h) = \cos(\pi/3 + h) &= \frac{1}{2}\cos h + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \frac{1}{48}h^4 + o(h^4) \\
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 &- \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right).
\end{aligned}$$

2. Lorsque $x \to 1$, $h = x - 1 \to 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x = e^{1+h} = e \cdot e^h \\
&= e\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)\right) \\
f(x) &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right).
\end{aligned}$$

3. Lorsque $x \to 2$, $h = x - 2 \to 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{h}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{16} + o(h^4)\right) \\
f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right).
\end{aligned}$$

4. Lorsque $x \to \pi/4$, $h = x - \pi/4 \to 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\pi/4 + h) = \tan(\pi/4 + h) = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h} \\
&= \frac{1 + h + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)}{1 - h - \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)} \\
&= 1 + 2h + 2h^2 - \frac{8}{3}h^3 + o(h^3) \\
f(x) &= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).
\end{aligned}$$

5. Lorsque $x \to e$, $h = x - e \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(e+h) = \ln(e+h) = \ln\left(e(1+h/e)\right) = \ln(e) + \ln(1+h/e) \\ &= 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} - \frac{h^4}{4e^4} + o(h^4). \\ f(x) &= 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + \frac{(x-e)^3}{3e^3} - \frac{(x-e)^4}{4e^4} + o\left((x-e)^4\right). \end{aligned}$$

6. Lorsque $x \to 1$, $h = x - 1 \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{1+h} \\ &= h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 - \frac{25}{12}h^4 + o\left(h^4\right) \\ f(x) &= (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 - \frac{25}{12}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right). \end{aligned}$$

Exercice 30.21

Déterminer un équivalent simple, au voisinage de $x = e$ de $e^x - x^e$.

Solution 30.21

Exercice 30.23

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{1 - e^{2x}}$;
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$;
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$;
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \arcsin(x)}{x^3}$.

Solution 30.23

Exercice 30.24

Déterminer la limite de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ quand x tend vers 0.

Solution 30.24

Exercice 30.25

Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x+2x^2)}{\ln(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)}.$$

Solution 30.25

Exercice 30.26 (**)
Déterminer a, b et c tels que la limite en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{a(1-\cos x) + b\sin x + c\tan x + \ln(1+x)}{x^4}$$

soit finie. Quelle est alors cette limite ? Avec les valeurs trouvées, prolonger f par continuité en 0 et examiner si ce prolongement est de classe C^1 en 0.

Solution 30.26

Exercice 30.27 (**)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le développement limité demandé. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ainsi que les positions relatives.

1. $DL2$ en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\sqrt{1+x}$.
2. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1+x) + \mathrm{e}^x$.
3. $DL3$ en 0 de $f(x) = \ln(1-x) - \cos x$.
4. $DL4$ en 0 de $f(x) = e^x \cos(x) + \dfrac{x^3}{3} - x$.

Solution 30.27

1. Lorsque que $x \to 0$,
$$f(x) = -1 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2),$$
donc
$$f(x) - (-1) \sim \frac{3}{4}x^2.$$
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessus de la tangente. La tangente étant horizontale, le point 0 est un minimum local pour f.

2. Lorsque que $x \to 0$,
$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3),$$
donc
$$f(x) - (2x - 1) \sim \frac{1}{2}x^3.$$
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = 2x - 1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessous de la tangente à gauche, au dessus à droite. Le point d'abscisse 0 est donc un point d'inflexion.

3. Lorsque que $x \to 0$,
$$f(x) = -1 - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$
donc
$$f(x) - (-x - 1) \sim -\frac{1}{3}x^3.$$
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -x - 1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessus de la tangente à gauche, au dessous à droite. Le point d'abscisse 0 est donc un point d'inflexion.

4. Lorsque que $x \to 0$,
$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$
donc
$$f(x) - 1 \sim -\frac{1}{6}x^4.$$
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = 1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessous de la tangente. La tangente étant horizontale, le point 0 est un maximum local pour f.

Exercice 30.28

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, on pose
$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de $f(x)$.
2. En déduire le prolongement par continuité de f en zéro. On note encore f ce prolongement.
3. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en zéro.
4. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse zéro, au voisinage de ce point.

Solution 30.28

Exercice 30.29 (**)

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ puis la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Solution 30.29

Exercice 30.30 (***)

Pour les fonctions suivantes au voisinage du point a indiqué, étudier la possibilité de prolonger par continuité, puis, dans l'affirmative, la dérivabilité et l'existence d'une tangente à la courbe ; enfin préciser le placement local de la courbe par rapport à sa tangente.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x \ln x}{x-1}$ au point $a = 1$.

2. $g : x \mapsto \ln(\tan x)$ au point $a = \pi/4$.

3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x}$ au point $a = 0$.

Exercice 30.31

Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.

2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Solution 30.31

1. La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x) = 0$ ou $x = 0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2. On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite. Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

Pour x au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4),$$

d'où par intégration, le développement limité en 0 à l'ordre 5 de

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

Or

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)\right).$$

Posons $u = \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. On a alors $u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$ et $u^3 = o(x^4)$, d'où

$$\frac{1}{(1-u)^3} = (1-u)^{-3} = 1 + 3u + 6u^2 + 10u^3 + 15u^4 + o(u^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{5!}x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x}{(\sin x)^3} &= \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{40}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{6}$. La fonction obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y = \frac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

Exercice 30.35

1. Montrer que, pour $\lambda > e$, l'équation $e^x = \lambda x$ a deux solutions dans $]0, +\infty[$. On notera $x(\lambda)$ la plus petite.
2. Se convaincre sur un dessin que $\lim_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.
3. Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} x(\lambda) = 0$.
4. Établir successivement les résultats suivants lorsque λ tend vers $+\infty$:
   (a) $x(\lambda) \sim \dfrac{1}{\lambda}$.
   (b) $e^{x(\lambda)} = 1 + \dfrac{1}{\lambda} + o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.
   (c) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$.
   (d) $x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{3}{2\lambda^3} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^3}\right)$.

On a ainsi obtenu un développement asymptotique de $x(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.
Solution 30.35

Exercice 30.37 *Applications des développements limités à l'étude de suites*

Déterminer un équivalent des suites dont le terme général est donné.

1. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.
2. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

Solution 30.37 *Applications des développements limités à l'étude de suites*

Exercice 30.42

Étudier avec soin les branches infinies et leur placement local par rapport aux éventuelles asymptotes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sqrt{x^2+1} \end{array}.$$

Solution 30.42

Lorsque $x \to +\infty$, $h = 1/x \to 0$ et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \sqrt{1+h^2} = 2 + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) = 2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et finalement,

$$f(x) - 2x \sim \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0+.$$

La courbe de f admet donc une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = 2x$. De plus, au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est au dessus de l'asymptote.

Lorsque $x \to -\infty$, $h = 1/x \to 0$ et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + |x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - \sqrt{1+h^2} = -\frac{1}{2}h^2 + o(h^2) = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et finalement,

$$f(x) \sim -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0+.$$

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$, d'équation $y = 0$ (axe des abscisses). De plus, au voisinage de $-\infty$, la courbe de f est au dessous de l'asymptote.

Exercice 30.46

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Étudier les branches infinies (pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$) de la courbe de f.

Solution 30.46

Exercice 30.48

Étudier la fonction d'une variable réelle définie par la relation

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

en portant une attention particulière aux asymptotes et demi-tangentes.

Solution 30.48

La fonction f est définie en x si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$ donc sur l'ensemble

$$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Par suite, la fonction f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de D, différent de 1 et de -1, nous avons

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- Si $x > 1$, alors clairement $f'(x) > 0$.
- Si $x < -1$, on a

  $$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} + x \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} \geq -x \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq x^2,$$

  qui est donc toujours faux. Donc $f'(x) < 0$.

Étudions f au voisinage de $\pm\infty$

- Pour $x > 1$, nous avons

  $$f(x) = x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

  d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. De plus,

  $$f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0- .$$

  Le graphe de f admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote et se trouve au dessous de cette droite.

- Pour $x < -1$, nous avons

  $$f(x) = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0- .$$

  Le graphe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote et se trouve au dessous de cette droite.

Déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à droite du point d'abscisse 1 ; nous avons

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 + \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} = +\infty.$$

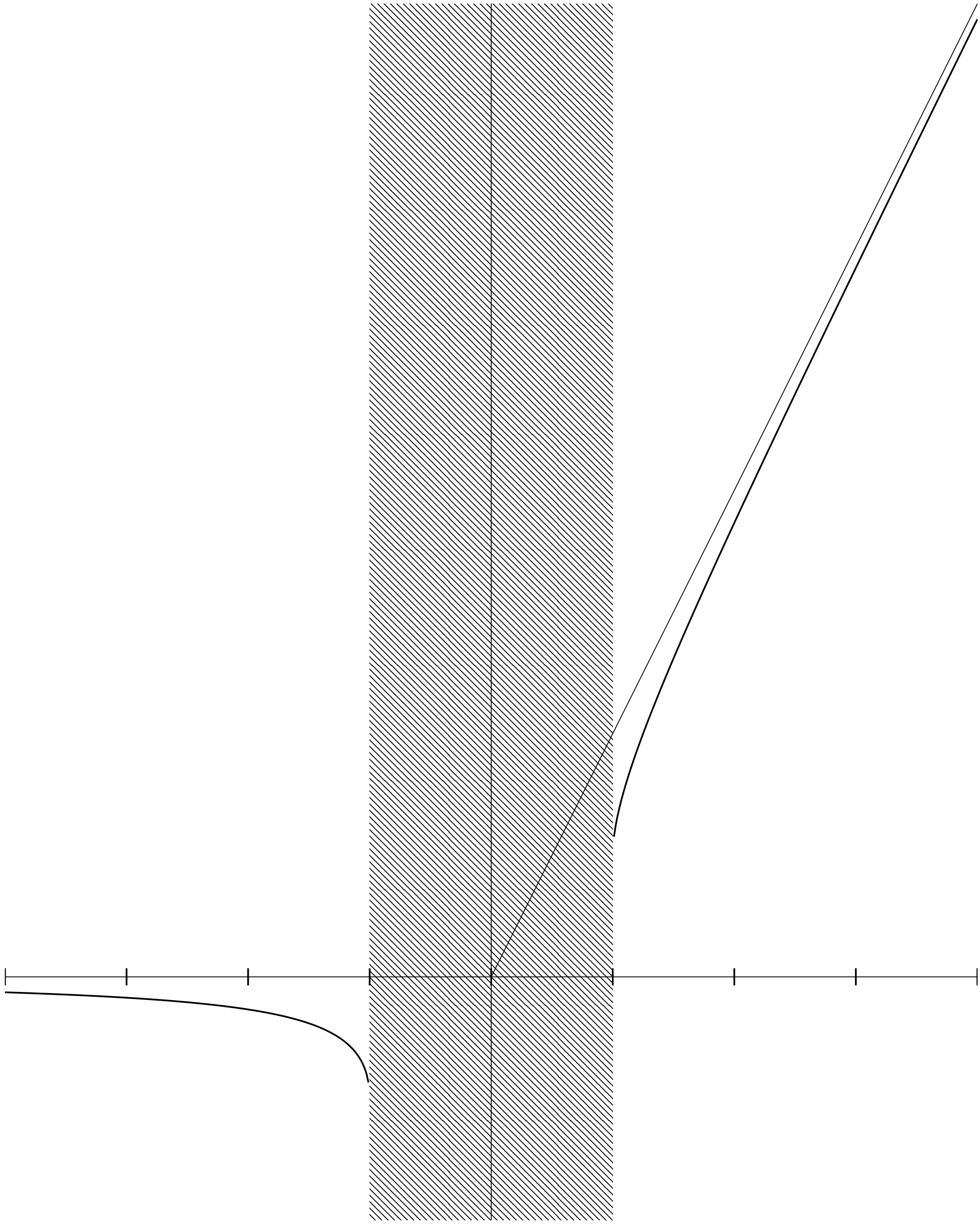
De la même manière, déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à droite du point d'abscisse -1 ; nous avons

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} 1 - \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} = -\infty.$$

Nous avons donc des demi-tangentes verticales au points d'abscisses 1 et -1.

Nous avons le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 30.50

Réaliser l'étude complète des fonctions suivantes et les tracer. Étudier avec soin les branches infinies et leur placement local par rapport aux éventuelles asymptotes.

$$f\,:\,x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}, \qquad \text{et} \qquad g\,:\,x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Solution 30.50

Indications:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f(x) \underset{x\to-\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 30.51

Soit λ un réel strictement positif, différent de $\sqrt{2}$, et (f_λ) la famille de fonctions définie par

$$f_\lambda(x) = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda/x}.$$

On note C_λ sa courbe représentative.

1. *Étude de* f_1.

   (a) Étudier les variations de la fonction f_1.

   (b) À l'aide d'un développement limité — on dit aussi développement asymptotique —, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que sa courbe admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

   (c) Calculer les limites à gauche et à droite de f_1 en 0. La fonction f_1 admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Si oui, ce prolongement est-il dérivable ? Que peut-on en déduire pour la courbe C_1 ?

   (d) Représenter graphiquement C_1 et son asymptote oblique.

2. Dans cette question, on étudie f_2. À l'aide d'un développement limité, déterminer sa limite en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que la courbe C_2 admet une asymptote oblique que l'on précisera et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

3. À l'aide d'un développement limité, étudier les branches infinies de C_λ.

Solution 30.51

Exercice 30.53

Tracer la courbe représentative de la fonction suivante

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Exercice 30.106

Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1+\cos 4x}$.

2.

Solution 30.106