Lycée Colbert — 2023/2024
Devoir de contrôle de mathématiques
Samedi 2 décembre 2023, 8:00-12:00

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.
En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*.
Les résultats non *encadrés* ne seront pas pris en compte.
L'utilisation de tout *document*, de toute *calculatrice* et de tout *matériel électronique* est *interdite*.

Exercice 1

Le code secret d'un coffre-fort est composé de six chiffres. Tous les chiffres de 0 à 9 sont possibles. Les répétitions sont autorisées. De plus, le coffre tient compte de l'ordre. Par exemple, 111222 et 222111 sont deux codes possibles distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes dont tous les chiffres sont différents ?

3. Combien y a-t-il de codes n'ayant que deux chiffres qui apparaissent trois fois chacun (comme 112122 par exemple) ?

4. Combien y a-t-il de codes n'ayant que trois chiffres qui apparaissent deux fois chacun (comme 123312 par exemple) ?

5. Combien y a-t-il de codes ayant deux chiffres identiques et les quatre autres différents (comme 231541 par exemple) ?

Remarque. L'utilisation d'un vocabulaire approximatif se fait à vos risques et périls.

Exercice 2 *Jeu de taquin*

Le taquin est un jeu solitaire composé de 15 petits carreaux numérotés de 1 à 15 qui glissent dans un cadre carré prévu pour 16. Il consiste à remettre dans l'ordre les 15 carreaux à partir d'une configuration initiale. Dans cet exercice, nous considérons la configuration initiale suivante (où 16 représente l'emplacement vide).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

Configuration initiale

Les mouvements autorisés consistent à échanger la case 16 avec l'une de ses voisines (horizontalement ou verticalement). Le but du jeu est d'obtenir, après une succession de mouvements autorisés, la configuration finale suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Configuration finale

On définit une permutation de S_{16} pour cahque configuration S en associant à la case i dans la configuration finale le numéro l'occupant dans la configuration S. Ainsi, la configuration finale est associée à l'identité, la configuration initiale à la transposition $(14, 15)$.

1. Déterminer la permutation associée à la configuration

2	5	3	8
9	6	7	4
15	10	11	12
16	14	1	13

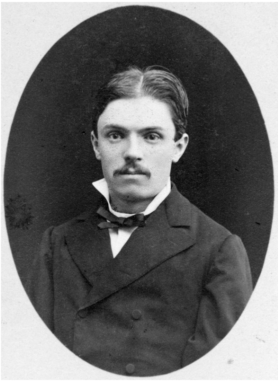
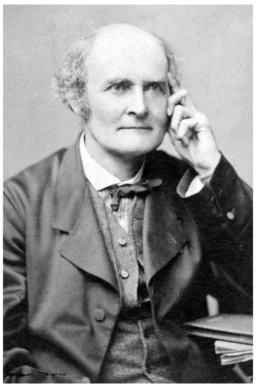
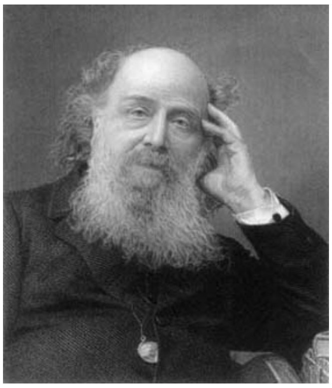
2. Montrer qu'une solution comporte un nombre impair de mouvements.

3. Relier la somme des indices d'abscisse et d'ordonnée de la case 16 avec le nombre de mouvements dans une solution.

4. Conclure.

Exercice 3

Qui sont ces quatre personnes ?

Exercice 4

Résoudre le système suivant. On donnera les solutions sous forme vectorielle.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ -4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & =-2 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & =5 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 5

Soient a et b deux réels. Résoudre en fonction de a et b le système $(S_{a,b})\ :\ \left\{\begin{array}{ll} x+y+az & =0 \\ x+ay+z & =0 \\ ax+y+z & =b \end{array}\right.$

Exercice 6

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker(M)$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(M)$.
3. Justifier que $\mathrm{Im}(M) \subset \ker(M)$.

Exercice 7 *Triplets Pythagoriciens*

- On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
- On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- On considère également les ensembles

$$\mathcal{G} = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^T L M = L \right\}$$

ainsi que

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z}) \;\middle|\; M^T L M = L \right\}.$$

$\mathcal{H}$ est donc l'ensemble des matrices de $\mathcal{G}$ dont tous les coefficients sont entiers.

- On appelle *triplet pythagoricien* tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Si de plus x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble, ont dit qu'un tel triplet est *primitf*. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des triplets pythagoricien primitifs

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } \mathrm{pgcd}(x, y, z) = 1 \right\}.$$

.

Partie A

A1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

A2. On note $D = P^{-1}AP$. Vérifier que D est une matrice diagonale que l'on précisera.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

A3. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

A4. Calculer PD^n puis donner l'écriture de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B

B1. Montrer que A est inversible et calculer l'inverse de la matrice A.

B2. En remarquant que B et C se déduisent de A en multipliant une colonne par -1, déterminer les inverses de B et C.

B3. Soit $M \in \mathcal{G}$. En remarquant que $L^2 = I$, montrer que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M et L.

B4. Prouver que $\mathcal{G}$ est un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication des matrices.

B5. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

B6. Vérifier que les six matrices A, B, C, J, K, L sont éléments de $\mathcal{H}$.

Partie C

C1. Déterminer les matrices Q de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2.$$

On notera en particulier que L est la seule de ces matrices qui soit symétrique.

C2. Soit $M \in \mathcal{H}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On note

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \times X.$$

(a) Montrer que

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2.$$

(b) Montrer l'équivalence

$$\big(|x'|, |y'|, |z'|\big) \in \mathcal{T} \iff (|x|, |y|, |z|) \in \mathcal{T}.$$

C3. On se donne (x, y, z) dans $\mathcal{T}$, tel que $z > 1$, et on définit comme précédemment $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que $x > 0$, $y > 0$ et que $2z < 2x + 2y < 3z$.

(b) En déduire que $0 < z' < z$.

(c) Montrer que l'on ne peut avoir à la fois $x' < 0$ et $y' < 0$.

(d) En déduire que un des triplets (x', y', z'), $(-x', y', z')$ ou $(x', -y', z')$ est dans $\mathcal{T}$.

C4. (a) Montrer que l'on peut, au moyen de produits par A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, transformer en un nombre fini d'étapes un triplet pythagoricien (x_0, y_0, z_0) quelconque en $(0, 1, 1)$.

(b) Appliquer cette méthode au triplet $(35, 12, 37)$.

En déduire explicitement une matrice Q de $\mathcal{H}$ telle que $Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \\ 37 \end{pmatrix}$.

C5. (a) Soit (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathcal{T}$.

Montrer qu'il existe au moins une matrice M de $\mathcal{H}$ telle que $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.