Chapter 5 Fonctions circulaires

Exercice 5.1

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

Solution 5.1

Solutions à justifier!

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$.
3. $\operatorname{Dom} f = \dots \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \dots$.

Exercice 5.2

Cours Soit a et b deux nombres réels. Rappeler (sans démonstration) les expressions de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$.

1. En déduire une expression du produit $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$.

2. En déduire que, pour tous nombres réels p et q, on a

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Solution 5.2

Exercice 5.3

Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sachant que $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Solution 5.3

On a $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$, d'où $\cos^2\alpha = \frac{25}{41}$. Or α est un angle du troisème quadrant, donc $\cos\alpha < 0$, d'où $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

De plus, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{16}{41}$ et $\sin\alpha < 0$, donc $\sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$.

Exercice 5.4

Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Solution 5.4

Il y a de très nombreuses façons de procéder. Par exemple, on a

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

d'où $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$. Puisque α est un angle du premier quadrant, $\sin\alpha > 0$ donc $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Finalement,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\times 12\times 5}{169} = \frac{120}{169} \qquad \text{et} \qquad \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

Exercice 5.5

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel x on a

$$\frac{x-1}{2x} \in [0, 1[\,.$$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonctions de $\tan^2(\theta)$.

4. Supposons maintenant que $\theta \in [0, \pi[$ et que x est un réel tel que

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}.$$

Calculer $\tan(\theta)$ en fonction de x.

Solution 5.5

Exercice 5.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Solution 5.6

1. $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, \pi, 2\pi \}$.
2. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{2}$.
3. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \frac{3\pi}{2}$.
4. $x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, 2\pi \}$.
5. $x = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \pi$.
6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \}$.
7. $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, \pi, 2\pi \}$.
8. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \}$. Si celui-là est trop difficile graphiquement, écrire $\tan x = 1 \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution 5.7

1. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \iff \left(x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}\right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin x = \sin -\frac{\pi}{4} \iff \left(x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}\right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan x = -1 \iff \tan x = \tan\frac{-\pi}{4} \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \tan x = \cos\frac{\pi}{6} \iff \left(x \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}\right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \tan x = \cos\frac{3\pi}{4} \iff \left(x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}\right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 5.8

Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{5.1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

Solution 5.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences successives suivantes

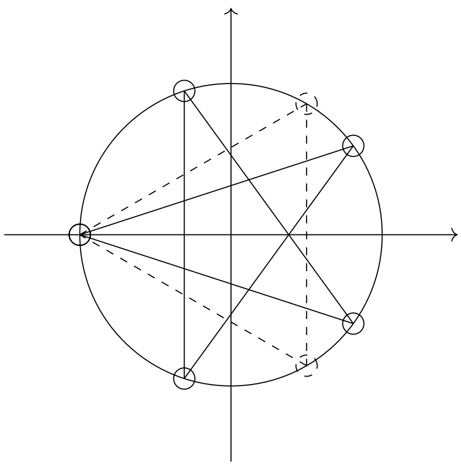
$$\begin{aligned}
\sin 2x = \cos \frac{x}{2} &\iff \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \\
&\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \pmod{2\pi} \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

L'équation $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$ donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du pentagone régulier étoilé $M_0M_1M_2M_3M_4$ dont le premier sommet M_0 est l'image du nombre $\frac{\pi}{5}$.

ue Toute solution de l'équation $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$ a pour image l'un des sommets du pentagone précédent, mais réciproquement, tout nombre ayant pour image l'un des sommets de ce pentagone n'est pas nécessairement solution de l'équation ; par exemple, le nombre $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ dont l'image est M_3 n'est pas solution.

L'équation $x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}$ donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du triangle équilatéral $N_0N_1N_2$, le sommet N_0 étant l'image de la solution $\frac{\pi}{3}$.

ue Ici encore, il importe d'observer que tout nombre ayant pour image l'un des points N_0, N_1 ou N_2 n'est pas nécessairement solution de l'équation. Par exemple, le nombre π dont l'image est N_2 n'est pas solution.



Exercice 5.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0. \tag{5.2}$$

Solution 5.9

Le polynôme $2X^2 - 5X + 2$ a deux racines : 2 et $1/2$. D'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0 &\iff \underbrace{\sin^2 x = 2}_{\text{Impossible}} \text{ ou } \sin^2 x = \frac{1}{2} \\
&\iff \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \dfrac{5\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \dfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que l'on peut réduire l'écriture :

$$\boxed{2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}.}$$

Exercice 5.10

Résoudre l'inéquation

$$\frac{1-2\sin^2 x}{1+2\cos x} \geq 0. \tag{5.3}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Solution 5.10

Soit $x \in [0, 2\pi]$.

$$1-2\sin^2 x \geq 0 \iff \sin^2 x \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].$$

[1] Également, $1-2\sin^2 x = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$. De plus,

$$1+2\cos x \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right];$$

avec égalité si, et seulement si $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$1-2\sin^2 x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1+2\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-2\sin^2 x}{1+2\cos x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Finalement,

$$\boxed{\frac{1-2\sin^2 x}{1+2\cos x} \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$$

[1] sin n'est pas monotone, même sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 5.11

Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.
2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.
3. La résoudre pour $m = 1$.

Solution 5.11

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2} \iff \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = m\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour que les deux équations de l'énoncé soient équivalente, on peut donc choisir par exemple, $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

2. On a donc

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{m}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Cette équation admets des solution si, et seulement si $\frac{m}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$, c'est-à-dire $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \left(x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\right) \\
&\iff \left(x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.12

Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$, A, B et φ étant des constantes réelles.

Solution 5.12

Exercice 5.13

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1 - 2x)$.
2. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \arccos \sqrt{x(4 - x)}$.

Solution 5.13

Solutions à justifier!

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Dom} f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
3. $\operatorname{Dom} f = \left[0, 2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[2 + \sqrt{3}, 4\right]$.

Exercice 5.14

Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos\frac{89\pi}{3}\right).$$

Solution 5.14

- On a $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\boxed{A = \frac{\pi}{3}}$.
- $\boxed{B = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ (on a toujours, pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$). [2]
- On a $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\boxed{C = \frac{\pi}{4}}$.
- On a $\cos\left(\frac{89\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{89\pi}{3} - 30\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ d'où $\boxed{D = \frac{\pi}{3}}$.

[2] On peut également calculer directement ! $\tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 5.15

Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Solution 5.15

Posons $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{3}$. On a alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1.$$

On ne peut pas déduire immédiatement que $a + b = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ car on ignore si $a + b \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Or $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. La fonction arctan étant strictement croissante, on a

$$0 < a = \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad 0 < b = \arctan \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi $0 \leq a + b < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(a+b) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$. Or la fonction tangente est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où

$$a + b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 5.16

Calculer $2\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{7}{25}$.

Solution 5.16

Posons $a=\arcsin\frac{3}{5}$ et $b=\arcsin\frac{7}{25}$. L'abus de formules trigonométriques permet d'obtenir $\sin(2a+b)=1$. De plus, les encadrements

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } 0<\frac{7}{25}<\frac{1}{2}$$

permettent d'écrire (arcsin étant croissante)

$$\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{4} \text{ et } 0<b<\frac{\pi}{6}.$$

On a donc $\frac{\pi}{3}<2a+b<\frac{2\pi}{3}$ et $\sin(2a+b)=1$, d'où

$$2\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{7}{25}=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.17

Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.

3. Soit $x \in \left[0, \pi/2\right]$, que vaut $f(x)$?

4. Soit $x \in \left[\pi/2, \pi\right]$, que vaut $f(x)$?

5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

6. Résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \pi$.

7. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in I_k$.

Solution 5.17

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car le sinus est défini sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$, ensemble de définition de l'arcsinus.

2. La fonction f est impaire. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = \arcsin\left(\sin(-x)\right) = \arcsin\left(-\sin(x)\right) = -\arcsin\left(\sin(x)\right) = -f(x).$$

   De plus, f est 2π-périodique, car pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \pm 2\pi \in \mathbb{R} \text{ et } f(x + 2\pi) = \arcsin\left(\sin(x + 2\pi) = \arcsin\left(\sin(x)\right) = f(x).$$

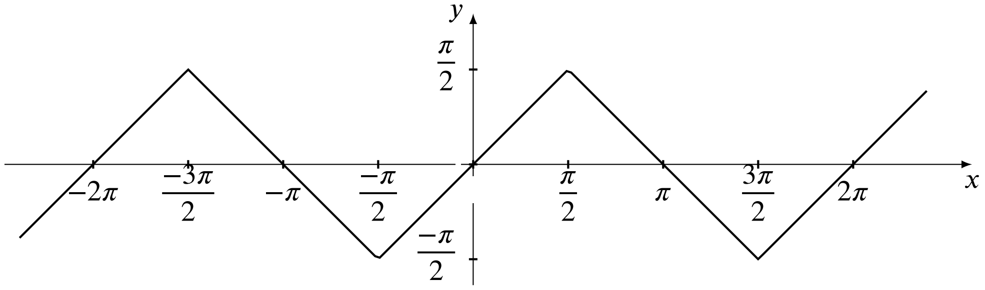
3. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $f(x) = \arcsin(\sin x) = x$.

4. Pour $x \in [\pi/2, \pi]$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \text{ et } \pi - x \in [0, \pi/2],$$

   donc $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. On en déduit la courbe de f.

5. Il suffit de tracer la courbe de f sur l'intervalle $[0, \pi]$. Ensuite, on obtient alors la totalité de la courbe en effectuant une symétrie de centre O et des translations de vecteur $2k\pi\vec{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$.



6. • $f(x) = 0$ équivaut à $\arcsin(\sin x) = 0$ ou encore à $\sin(x) = 0$. Ainsi, l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$ est-il égal à $\pi\mathbb{Z}$.

- $f(x) = \frac{\pi}{3}$ équivaut à $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{3}$ ou encore à $\sin(x) = \sin(\pi/3)$. Ainsi, l'ensemble des x tels que $f(x) = \frac{\pi}{3}$ est-il égal à la réunion de $\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$ et de $\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$.
- $f(x) = \pi$ n'admet aucune solution puisque $\pi \notin [-\pi/2, \pi/2]$.

7. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_k$. Distinguons deux cas.

- Supposons k impair. On a alors $\sin(k\pi - x) = \sin(x)$ et puisque $k\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$f(x) = \arcsin(\sin(k\pi - x)) = k\pi - x.$$

- Supposons k pair. On a alors $\sin(x - k\pi) = \sin(x)$ et puisque $x - k\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$f(x) = \arcsin(\sin(x - k\pi)) = x - k\pi.$$

Exercice 5.18

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

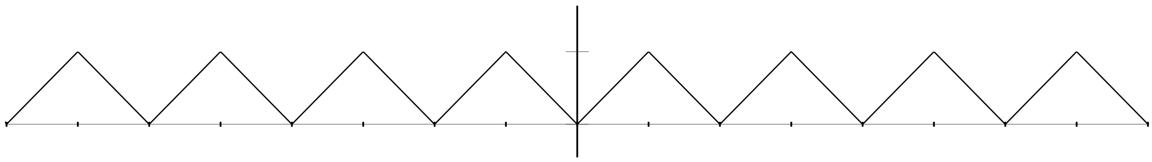
$$f(x) = \arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice .

Solution 5.18

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$. On complétera le tracé à l'aide d'une symétrie d'axe (Oy) et par des translations de vecteurs $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Or pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \arccos(\cos x) = x$.



Exercice 5.19

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice **??**.

Solution 5.19

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, π-périodique et impaire. De plus,

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], f(x) = x$$

Il ne reste plus qu'à tracer !

Exercice 5.20

Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 5.20

Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

De plus, $\arccos(x) \in [0, \pi]$, on a donc

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arcsin(x).$$

Solution 5.20

Variation. Pour $x \in [-1,1]$, posons $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.

La fonction f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction f étant continue sur l'*intervalle* $[-1,1]$, elle est donc constante. D'où

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat.

Exercice 5.21

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution 5.21

Soit $x > 0$. On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{\cos\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1/x} = x.$$

De plus, $\frac{1}{x} > 0$, donc $0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$, d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2},$$

et finalement

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \arctan x.$$

Lorsque $x < 0$, on utilise l'imparité de l'arctangente:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\arctan -x - \arctan\frac{1}{-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Solution 5.21

Variation. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur *chacun* des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Puisque l'on a $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$ et $f(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$, on en déduit que pour tout réel x non nul,

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.22

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire une expression simple de f.
2. Pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $x = \tan\varphi$, on a donc $\varphi = \arctan x$. Calculer $f(x) = f(\tan\varphi)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.
3. Construire le graphe de f.

Solution 5.22

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$ et

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \iff |x| \leq \sqrt{x^2+1} \iff x^2 \leq x^2+1.$$

Cette dernière assertion étant toujours vrai, on a toujours $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1,1]$.
La fonction arcsin étant définie sur $[-1,1]$, la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$. La fonction $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$$

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in]-1,1[$ puisque

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \iff |x| < \sqrt{x^2+1} \iff x^2 < x^2+1. \iff 0 < 1.$$

La fonction $f = \arcsin \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1-x^2}}\frac{1}{\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan'(x)$. Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x) + k.$$

Puisque $f(0) = 0$ et $\arctan(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x).$$

2. Avec $x = \tan\varphi$ où $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\cos\varphi > 0$ et donc

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \tan\varphi\sqrt{\cos^2 x}^2 = \tan\varphi\cos\varphi = \sin\varphi.$$

Or $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$f(x) = \arcsin(\sin\varphi) = \varphi = \arctan x.$$

3. C'est la courbe de l'arctangente…

Exercice 5.23

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\varphi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.

2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.

   (a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.

   (b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.

4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.

5. Tracer le graphe de f.

6. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable. Calculer sa dérivée et confronter votre résultat à celui de la question **4.**.

Solution 5.23

1. La fonction arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi(x) \in [-1, 1]$.

   Méthode 1. Or

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 \leq 1 &\iff 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0 \\ &\iff (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

   [3] De plus,

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 \geq -1 &\iff 4x^3 - 3x - 1 \geq 0 \\ &\iff (x-1)(4x^2 + 4x + 1) \geq 0 \\ &\iff (x-1)(2x+1)^2 \geq 0 \\ &\iff x \leq 1 \end{aligned}$$

   [4] Finalement : $-1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$. Donc f est définie sur $[-1, 1]$.

   Méthode 2. Une étude rapide de φ donne le tableau de variations

[3] On a remarqué que -1 est une racine du polynôme $4X^3 - 3X + 1$; on peut donc mettre $(X + 1)$ en facteur.
[4] Idem avec $+1$ et le polynôme $4X^3 - 3X - 1$.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$1/2$		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	

On constate que $\varphi(x) \in [-1, 1]$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$, d'où le résultat.

2. (a) Pour $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\sin(-\pi - u) = \sin(u) \text{ et } -\pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où $\boxed{\arcsin(\sin u) = -\pi - u}$.

(b) Pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\boxed{\arcsin(\sin u) = u}$.

(c) Pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, on a

$$\sin(\pi - u) = \sin(u) \text{ et } \pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où $\boxed{\arcsin(\sin u) = \pi - u}$.

3. [5]

Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a par la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \end{aligned}$$

Par identification des parties imaginaires, on obtient

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

4. Soit $x \in E$ et $\theta = \arcsin x$. On a donc $x = \sin\theta$ et d'après la question précédente, $\sin 3\theta = 3x - 4x^3$, d'où $f(x) = \arcsin(\sin 3\theta)$. Remarquons également que $3\theta \in \left[-\frac{3}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi\right]$. Utilisons maintenant les résultats de la question **2.**.

- Si $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{6}$, [6] alors $-\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta \leq -\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3\arcsin x}.$$

[5]On peut également utiliser la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} (\sin\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)\right) \end{aligned}$$

[6]Rappelons que arcsin est croissante.

- Si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq 3\theta \leq \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = 3\theta = \boxed{3 \arcsin x}.$$

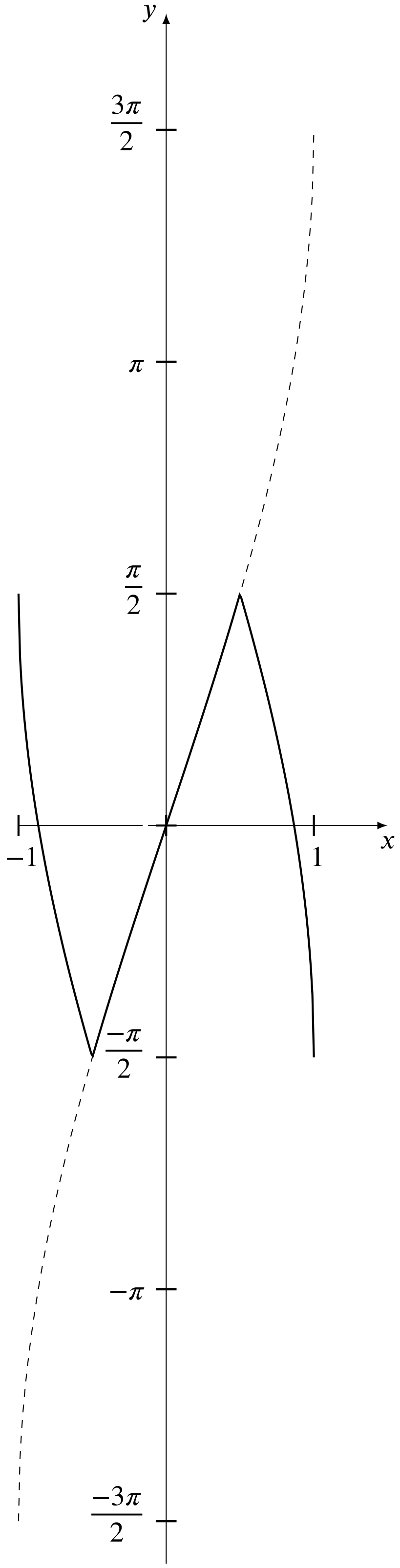
- [7] Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta \leq -\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3 \arcsin x}.$$

5. Figure **??**.

[7]Pour ce dernier cas, on peut également utiliser le fait que f est impaire avec le résultat du premier cas : $f(x) = -f(-x) = -(-\pi - 3\arcsin(-x)) = \pi - 3\arcsin(x)$.

Figure 5.1: $y = \arcsin(3x - 4x^3)$. En pointillés : $y = 3\arcsin x$.



Exercice 5.24 *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :

   (a) $\arctan(\tan(x)) = x$;

   (b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

   On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

ue

Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Solution 5.24 *Formule de Machin*

1. (a) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.

2. En notant $a = \arctan \frac{1}{5}$, on a successivement,

$$\tan 2a = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4a = \frac{2\tan 2a}{1 - \tan^2 2a} = \frac{5/6}{1 - 25/144} = \frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{120/119 - 1}{1 + 1 \times 120/119} = \frac{1}{239}.$$

3. Puisque la fonction arctan est strictement croissante et $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$0 < a < \frac{\pi}{6}$$

   et par conséquent

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 4a - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$$

   On en déduit donc que

$$4a - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

   c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$