Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le vendredi 24 novembre 2023

## Exercice 1

On pose

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

## Partie A

Étude de la matrice $A$

**A1.** Montrer que $P$ est inversible et que $P^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha&-\alpha&0\\\alpha&\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ à préciser.

**A2.** (a) Calculer $A-I_3$, $A-3I_3$ puis $\left(A-3I_3\right)^2$. Vérifier que $\left(A-I_3\right)\left(A-3I_3\right)^2=\mathbf{0}_3$.

(b) En déduire que $A$ est inversible et que $A^{-1}=\frac{1}{9}A^2+xA+yI_3$ avec $(x,y)$ réels à préciser.

**A3.** On note $T=P^{-1}AP$ et on admet que $T=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$. On pose également $J=T-D$.

(a) La matrice $J$ est-elle inversible ?

(b) Montrer que pour tout $k\geq 2$, $J^k=\mathbf{0}_3$.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer

$$\forall n\geq 2, T^n=D^n+n\,J\,D^{n-1}.$$

En déduire l'écriture de $T^n$ pour $n\geq 2$.

(d) Montrer par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star, A^n=P\,T^n\,P^{-1}.$$

(e) Calculer $PT^n$ puis donner l'écriture de $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}^\star$.

## Partie B

Étude d'une famille de suites On considère les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(v_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(w_n\right)_{n\geq 0}$ définies par

$$\left(u_0,v_0,w_0\right)=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^\star,\begin{cases}u_{n+1}&=&2u_n&+v_n&+w_n\\v_{n+1}&=&u_n&+2v_n&+w_n\\w_{n+1}&=&&&3w_n\end{cases}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$.

**B1.** Déterminer $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = BX_n.$$

**B2.** Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = B^n X_0.$$

**B3.** À l'aide de ce qui précède, déterminer $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $n$.

## Partie C

Commutant de la matrice $A$

- On utilise dans cette partie la matrice $T$ définie à la partie **A3** par $T = P^{-1}AP$ ; on a donc $PTP^{-1} = A$.
- On note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ :
$$C(A) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \right\}.$$
De même, on pose
$$C(T) = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TM = MT \right\}.$$

**C1.** Montrer
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xI_3 + yT + zT^2 \in C(T).$$

**C2.** Réciproquement, soit $M \in C(T)$ avec $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $TM$ et $MT$.

(b) En déduire que $M$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$M = xI_3 + yT + zT^2.$$

**C3.** Justifier l'égalité
$$C(T) = \left\{ xI_3 + yT + zT^2 \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

**C4.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Démontrer que $M \in C(A)$ si, et seulement si $N \in C(T)$.

**C5.** Déduire de tout ce qui précède que
$$C(A) = \left\{ \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \;\middle|\; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$