

Chapter 17 Matrices inversibles

Exercice 17.1

Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} & G &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solution 17.1

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} & D^{-1} &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans la réduction, on obtient

$$(E|I_3) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & * & * & * \\ 0 & 2 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

Donc E n'est pas inversible.

$$\begin{aligned} F^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & -2/3 & 1/6 \\ -3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} & G^{-1} &= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 17.2

En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si possible l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions du système $Ax = b$. Déterminer les solutions du système $Bx = b$.

Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ soit incompatible ? Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Bx = d$ soit incompatible ? Dans chaque cas, justifier votre réponse et déterminer un tel vecteur d si il existe.

Solution 17.2

A n'est pas inversible. B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque B est inversible, l'unique solution de $Bx = b$ est

$$x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

De même, puisque B est inversible, le système $Bx = d$ est compatible pour tout $d \in \mathbb{R}^3$ (et a pour unique solution $x = B^{-1}d$).

Pour résoudre $Ax = b$, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauß. On a

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le système $Ax = b$ est compatible et admet une infinité de solutions, paramétrées par

$$x = \begin{pmatrix} -1 + 5t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus, il existe des vecteurs d tel que le système $Ax = d$ soit incompatible. Par exemple, en changeant la troisième composante de b afin de ne pas avoir à refaire trop de calcul pour la réduction, on peut choisir $d = (1, 1, 0)^T$. On a alors,

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.3

À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer, si possible, les inverses des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice C est-elle une matrice élémentaire? Si «oui», quelle est l'opération élémentaire correspondante? Si «non», l'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

Solution 17.3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \quad B \text{ n'est pas inversible} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour C on peut également remarquer qu'elle s'obtient à partir de la matrice I_4 par les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$ puis $L_3 \leftrightarrow L_4$ (ou $L_3 \leftrightarrow L_4$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4$), d'où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aurait pu également se servir de cette décomposition pour déterminer C^{-1} .

Exercice 17.4

En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

est équivalente par lignes à la matrice unité I_3 . Écrire A comme un produit de matrices élémentaires.

Solution 17.4

$$A \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

On peut alors renverser les opérations afin d'obtenir A à partir de I_3

$$I_3 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} A$$

Or, effectuer une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice élémentaire.

On en déduit donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.5

Étant donné un système d'équations $Ax = b$ avec différentes valeurs de b , il est souvent plus rapide de déterminer A^{-1} , si elle existe, afin de déterminer les solutions avec la relation $x = A^{-1}b$.

Utiliser cette méthode pour résoudre $Ax = b_r$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et chacun des vecteurs b_r , $r = 1, 2, 3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier vos solutions.

Solution 17.5

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Puisque A est inversible, on a

$$Ax = b_1 \iff x = A^{-1}b_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b_2 \iff x = A^{-1}b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b_3 \iff x = A^{-1}b_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie les solutions en calculant $\frac{1}{4}A \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, etc...

Exercice 17.6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de calculer A^n .

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} , puis PAP^{-1} .

2. En déduire A^n .

Solution 17.6

1. On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Notons $D = PAP^{-1} = \text{diag}(1, 2, -1, 3)$. Commençons par remarquer que

$$A = P^{-1}PAP^{-1}P = P^{-1}DP.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n) : \ll A^n = P^{-1}D^nP \gg$.

On a $P^{-1}D^0P = P^{-1}I_4P = P^{-1}P = I_4 = A^0$, d'où $R(0)$.

Précédemment, nous avons montré $A = P^{-1}DP$, c'est-à-dire $R(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $R(n)$. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (P^{-1}D^nP)(P^{-1}DP) && \because R(n) \text{ et } R(1) \\ &= P^{-1}D^n(PP^{-1})DP \\ &= P^{-1}D^nDP \\ &= P^{-1}D^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P^{-1}D^nP.$$

Remarquons enfin que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^n = P^{-1}DP = \begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{(-1)^n - 3^n}{3^n + 2^n} & \frac{(-1)^n - 3^n}{3^n - 2^n} & 1 - (-1)^n \\ 0 & \frac{3^n + 2^n}{2} & \frac{3^n - 2^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3^n - 2^n}{2} & \frac{3^n + 2^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Solution 17.7

On peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $(A|I_n)$. Il est ici plus rapide d'utiliser un autre enchaînement d'opérations élémentaires. La succession d'opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ permet d'écrire

$$(A|I_n) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & \dots & \dots & 1 & & -1 & 1 & \\ & & & \ddots & & 1 & & & \ddots & \\ & (0) & & & 1 & 1 & (0) & & -1 & 1 \\ & & & & & 1 & & & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (0)$$

On effectue ensuite l'enchaînement d'opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots$ puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$, et on obtient

$$(A|I_n) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 2 & -1 & & \\ & 1 & & (0) & -1 & 2 & -1 & (0) \\ & & 1 & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{array} \right) = (I_n|B)$$

La matrice A est donc inversible et son inverse est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17.8

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel t les matrices suivantes sont inversibles. Calculer leur inverse lorsqu'elle existe.

1. $\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$

Solution 17.8

Exercice 17.9

Inverser les matrices suivantes.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \quad \quad & \mathbf{2.} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \mathbf{3.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Exercice 17.10

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, quand cet inverse existe.

Solution 17.10

Exercice 17.11

Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n .

Montrer que si B se déduit de A par échange des i -ème et j -ème lignes ($1 \leq i < j \leq n$), alors B^{-1} se déduit de A^{-1} par échange des i -ème et j -ème colonnes.

Solution 17.11

Exercice 17.12

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker(A)$, le noyau de A , et $\text{Im}(A)$, l'image de A (donner une équation).

Solution 17.12

En appliquant l'algorithme de Gauß jusqu'à obtenir une forme échelonnée, on obtient

$$A \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est échelonnée et a trois lignes non nulles, ainsi $\text{rg}(A) = 3$.

Le noyau de A est l'ensemble des solutions de $Ax = 0$. En continuant la réduction de A , on obtient

$$A \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deux matrices équivalentes par lignes ont même noyau, on a ici

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff \begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Les variables principales sont x_1, x_2 et x_3 . En paramétrant les solutions de $Ax = 0$ avec $x_4 = s$ et $x_5 = t$, on obtient la forme des solutions de $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + t \\ -2t \\ s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\ker(A) = \left\{ s(-1, 0, 1, 1, 0)^T + t(1, -2, -3, 0, 1)^T \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A

$$\text{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4 + \alpha_5 c_5 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

où

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'image de A est également l'ensemble des vecteurs $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ tel que le système $Ax = b$ est compatible. Or

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5b_1 - 3b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_3 + b_4 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est donc compatible si, et seulement si $b_1 - b_3 + b_4 = 0$. On a donc

$$\text{Im}(A) = \left\{ (b_1, b_2, b_3, b_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid b_1 - b_3 + b_4 = 0 \right\}.$$

Exercice 17.13

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients du vecteur $b = (u, v, w)^T$ pour que le système $Ax = b$ soit compatible. En déduire que $\text{Im}(A)$ est un plan de \mathbb{R}^3 et en donner une équation cartésienne.

Montrer que $d = (1, 5, 6)^T$ appartient à $\text{Im}(A)$. Exprimer d comme une combinaison linéaire des colonnes de A . Est-il possible de le faire de deux manières différentes? Si «oui», faites le! Si «non», justifier pourquoi.

Solution 17.13

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 2 & 3 & 0 & v \\ 3 & 5 & 1 & w \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 0 & -1 & -2 & v-2u \\ 0 & -1 & -2 & w-3u \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 0 & -1 & -2 & v-2u \\ 0 & 0 & 0 & w-u-v \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est donc compatible si, et seulement si $w - u - v = 0$.

On a donc

$$\text{Im}(A) = \{ (u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u + v - w = 0 \} = \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'un plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine.

Le vecteur $d = (1, 5, 6)^T$ appartient à $\text{Im}(A)$ puisque $1 + 5 - 6 = 0$. D'après le calcul ci dessus, on a d'ailleurs

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$Ax = d \iff \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 7 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 7 + 3x_3 \\ x_2 = -3 - 2x_3 \end{cases}$$

Les solutions du système $Ax = d$ sont donc paramétrée par

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Chacune des solutions du système $Ax = d$ permet d'écrire d comme combinaison linéaire des colonnes de A . Par exemple, avec $t = 0$ et $t = -1$, on a

$$d = 7c_1 - 3c_2 \text{ et } d = 4c_1 - c_2 - c_3.$$

Exercice 17.14

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & -6 \\ -2 & 9 & -1 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A et le noyau de A .

Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de A , ou justifier pourquoi c'est impossible.

Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \text{Im}(A)$. Écrire la solution générale du système $Ax = b$.

2. Déterminer le rang de B . Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de B , ou justifier pourquoi c'est impossible.

Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \text{Im}(B)$.

Solution 17.14

Réponses non rédigées!

1. On trouve que A est de rang 2. Les solutions de $Ax = 0$ sont de la forme

$$x = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui permet d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire des colonnes de A .

$$-3c_1 + 2c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si $a = 5$ et $b = 10$. Dans ce cas, les solutions de $Ax = b$ sont de la forme

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Le rang de B est 4. Les différents critères d'inversibilité d'une matrice nous permettent d'affirmer que l'équation $Bx = 0$ a donc pour unique solution le vecteur nul. Ainsi, il est impossible d'écrire le vecteur nul comme une combinaison linéaire non triviale des colonnes de A .

Également, le système $Bx = b$ a une unique solution pour tout $b \in \mathbb{R}^4$, ainsi $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 17.15

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible.

La matrice A est-elle inversible?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

5. Exprimer A^{-1} , puis A^{-n} pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P , P^{-1} et D^{-1} .

Écrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Solution 17.15

Voilà un bon exercice d'entraînement à rendre de devoirs maison.

Exercice 17.16

Soit A et B deux matrices (n, n) .

Montrer que si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Solution 17.16

La matrice B est carrée, elle est donc inversible si, et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, Bx = 0 \implies x = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Bx = 0$. Alors

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0.$$

Or la matrice AB est inversible, donc $x = 0$. Ce qui prouve que la matrice B est inversible. Puisque AB et B^{-1} sont inversibles, la matrice $(AB)(B^{-1}) = A$ est également inversible en tant que produit de matrices inversibles.

Variante Avec le déterminant, on obtient rapidement le résultat. Si AB est inversible, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$, ce qui montre que A et B sont inversibles.

Exercice 17.17 (*)**

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple, calculer $X^T A X$.
2. En déduire que la matrice A est inversible.

Solution 17.17

1. Considérons la matrice diagonale $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et la matrice $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A = D + J$. Or

$$DX = \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad JX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X^T DX = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 \quad \text{et} \quad X^T JX = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Finalement

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T (D + J) X = X^T DX + X^T JX \\ &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2. \end{aligned}$$

2. La matrice A est une matrice carrée. Pour montrer que A est inversible, nous allons montrer

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \mathbf{0} \implies X = \mathbf{0}.$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \mathbf{0}$. Alors, $X^T A X = X^T \mathbf{0} = 0$, et d'après le calcul précédent

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = 0.$$

Or, les a_i et x_i^2 sont des réels positifs. Une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si chaque terme est nul, on a donc

$$a_1 x_1^2 = 0 \quad a_2 x_2^2 = 0 \quad \cdots \quad a_n x_n^2 = 0.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i \neq 0$, donc

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

c'est-à-dire $X = \mathbf{0}$.

Conclusion

La matrice A est inversible.

Exercice 17.18 *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Solution 17.18 *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*

Pour établir que A est inversible, nous allons vérifier

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, Ax = 0 \implies x = 0.$$

Raisonnons par l'absurde: supposons donc qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = 0$, c'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0.$$

Soit alors i un indice quelconque tel que $x_i \neq 0$, nous pouvons pour cette valeur de l'indice écrire

$$a_{ii} = -\frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(-\frac{x_j}{x_i}\right) a_{ij}.$$

puis

$$|a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(-\frac{x_j}{x_i}\right) a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|x_j|}{|x_i|} |a_{ij}|.$$

Considérons alors que l'indice i choisi jusqu'ici tel que $x_i \neq 0$ est plus précisément celui vérifiant

$$|x_i| = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}.$$

Nous avons alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq 1$$

puis

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

ce qui contredit l'hypothèse.