Chapter 32 Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

32.1 Construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment

32.2 Propriétés élémentaires des intégrales

Exercice 32.1

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 32.3

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 32.4

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 32.5

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32.7

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^n}{1+x} \end{array}.$$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
2. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

Exercice 32.9 (**)

Soit f une fonction continue sur $I = [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $f_n(t) = t^n$ et on pose

$$J_n = \int_I f_n \cdot f = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que si f est positive sur I, la suite (J_n) est décroissante.
2. En utilisant que $\int_I f_n = \frac{1}{n+1}$, montre que (J_n) est de limite nulle.

Exercice 32.11 *Une intégrale à paramètre*

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Étudier les variations de f.

5. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 32.12 (**)

Pour $p, n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_p(n) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 32.13

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer

$$H_n \underset{n \to \infty}{\sim} \ln n.$$

32.3 Deux normes sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$

32.4 Sommes de Riemann

Exercice 32.16 (**)

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}$.
2. $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$.
4. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2n}^{3n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$.
5. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$.
6. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k \cos \frac{k\pi}{n}$.

32.5 Intégration des fonctions continues

Exercice 32.18

Déterminer les ensembles de définition et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. $g(x) = \int_x^{x^2+x} e^{1/t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 32.19

f est définie par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \, \mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calculer $f'(x)$ de deux façons.

Exercice 32.20

On considère l'application f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la parité de f.

3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

4. En déduire les variations de f.

5. À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

32.6 Intégration par parties

Exercice 32.26 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n (on pourra intégrer par parties).

4. En déduire une expression factorisée de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. On écrira le résultat avec des factorielles.

5. Montrer que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)$ est constante.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

Exercice 32.39

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 32.41

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

2. Déduire I_n en fonction de n.

Exercice 32.43

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2.$$

Exercice 32.44

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$\left| u_n(x) - \cos(x) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout réel x,

$$\cos x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

32.7 La formule du changement de variable

Exercice 32.48

À l'aide du changement de variable indiqué, calculer l'intégrale I dans les cas suivants

1. $I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\arccos x} \, \mathrm{d}x, \quad u = \arccos x.$

2. $I = \int_{0}^{\ln 2} \dfrac{2 \, \mathrm{d}x}{5 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x}, \quad t = \mathrm{e}^x.$

3. $I = \int_0^1 \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \, \mathrm{d}x, \quad t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

4. $I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln t)^3}, \quad x = \ln t.$

32.8 Rappel des primitives usuelles

32.9 À la recherche de primitives

Exercice 32.50

On cherche à calculer $I = \int_1^2 \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} \, \mathrm{d}x$.

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5} + \frac{dx+e}{\left(x^2+2x+5\right)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 32.51

1. Trouver les coefficients a, b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1, 2 \}, \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$
et en déduire
$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \,\mathrm{d}x.$$
2. Trouver les coefficients a, b, c, d tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}, \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$
et en déduire
$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} \,\mathrm{d}x.$$
3. Trouver les coefficients a, b, c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}, \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$
et en déduire
$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 32.53

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 32.54

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 32.55

Utiliser la règle de Bioche pour calculer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x} \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x(1+3\cos x)} \,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x$

32.10 Calcul approché d'intégrales

32.11 Intégration et relations de comparaison

Calcul intégral

Exercice 32.83

Vérifier les relations suivantes

1. $\displaystyle\int -\frac{6}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^3} + C.$
2. $\displaystyle\int 8x^3 + \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C.$
3. $\displaystyle\int (x-4)(x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}} = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C.$

Exercice 32.84

Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int x\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 32.86

Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0.$
2. $y = x^3 + x,\ x = 2,\ y = 0.$
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}, x = 0, x = 8, y = 0.$
4. $y = (3-x)\sqrt{x}, y = 0.$
5. $y = -x^2 + 4x, y = 0.$
6. $y = 1 - x^4, y = 0.$
7. $y = \dfrac{4}{x}, x = 1, x = e, y = 0.$
8. $y = e^x, x = 0, x = 2, y = 0.$

Exercice 32.87 (***)

Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.

6. $f(x) = -\dfrac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.

8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.

9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.

10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.

12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.

13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.

14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.

18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 32.88 (***)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1+t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 32.89

Utiliser une intégration par parties pour déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (4x+7)e^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x\cos 4x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 32.90

Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x \, \mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int_0^{1} x \arcsin x^2 \, \mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int_0^{1} e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$

8. $\displaystyle\int_0^{2} e^{-x} \cos x \, \mathrm{d}x.$

9. $\displaystyle\int_1^{2} \sqrt{x} \ln x \, \mathrm{d}x.$

10. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\left(4 + x^2\right) \, \mathrm{d}x.$