Chapter 2 Corps des nombres réels

2.1 Structures

Exercice 2.1

Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.

3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.

4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

5. $5 + (-5) = 0$.

6. $18 \cdot 1 = 18$.

7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.

8. $23 + 6 = 6 + 23$.

9. $3 + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 2.2

Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.

2. $5 + 0 = 5$.

3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.

4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

5. $8\,(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

2.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 2.3

Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Exercice 2.4

Encadrer $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

Exercice 2.5

Comparer $\dfrac{a+n}{b+n}$ et $\dfrac{a}{b}$, où a, b, n sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 2.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-1| < |x-2|$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 2.7

Résoudre l'inéquation

$$3|x-2| - 2|x-1| \geq |x-4| - \frac{1}{4}(2x-11). \tag{E}$$

Exercice 2.8

Résoudre les équations

1. $|x+1| = 3$;
2. $|x+5| = |x+7|$;
3. $|x+3| = x-1$;
4. $|x| = x-1$;
5. $x+4 = 3|x|$;
6. $|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10|$;
7. $|1-x| = x-1$.

Exercice 2.9

Trouver n, entier naturel, pour que $\dfrac{n}{13} < \dfrac{110}{17} < \dfrac{n+1}{13}$.

Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\dfrac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Exercice 2.10

Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π.

On rappelle que $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971\ldots$.

Exercice 2.11

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$.
3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 2.12

Soit $k \in]0,+\infty[$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \tag{2.1}$$

Exercice 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.14

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.15

Il paraît peu vraisemblable que $\mathbb{N}$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que $\mathbb{N}$ est majoré.

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n + 1$ majore n ; puisque chaque élément de $\mathbb{N}$ est majoré, nous pouvons conclure que $\mathbb{N}$ est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Exercice 2.16

Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

1. $]-4, 6]$.
2. $[-1, 0[$.
3. $[3, +\infty[$.
4. $\mathbb{R}^\star$.
5. $\mathbb{Z}$.
6. $\mathbb{N}$.
7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\}$.
8. $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$.
9. $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$.

2.3 Petits systèmes

Exercice 2.17

Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$
2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}.$
3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}.$
4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}.$

Exercice 2.18

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$
2. $\begin{cases} 2x + (m - 5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$
3. $\begin{cases} (m - 1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$
4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$

Exercice 2.19

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2 y = m \end{cases}$.

2.4 Puissances, racines

Exercice 2.20

Écrire chacun des produits suivants en utilisant des puissances.

1. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.
2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.
3. $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$.
4. $7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$.
5. $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$.
6. $3 \cdot w \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.
7. $8 \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.
8. $\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t$.

Exercice 2.21

Développer chaque expression afin de supprimer les puissances.

1. x^3.
2. y^4.
3. $(2b)^3$.
4. $(8c)^2$.
5. $10y^5$.
6. x^2y^3.
7. $2wz^2$.
8. $3a^3b$.

Exercice 2.22

Simplifier les expressions suivantes.

1. 5^2.
2. 4^3.
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^2$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
5. $(0.25)^3$.
6. $(0.8)^2$.
7. 2^6.
8. 13^2.

Exercice 2.23

Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{81}$.
2. $\sqrt{64}$.
3. $\sqrt{4}$.
4. $\sqrt{9}$.
5. $\sqrt{100}$.
6. $\sqrt{49}$.
7. $\sqrt{16}$.
8. $\sqrt{36}$.
9. $\sqrt{\frac{1}{9}}$.
10. $\sqrt{\frac{1}{64}}$.
11. $\sqrt{\frac{25}{81}}$.

12. $\sqrt{\dfrac{49}{100}}$.

Exercice 2.24

Déterminer m paramètre réel pour que l'équation suivante ait deux racines inférieures ou égales à 1 :

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0.$$

Exercice 2.25

Effectuer les calculs indiqués.

1. $(-7)^2$.

2. $(9)^2$.

3. $(-10)^3$.

4. $(+8)^3$.

5. $(-11)^2$.

6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$.

10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.

11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.

13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$.

14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.

15. $\dfrac{(-3)^4}{(-3)^6}$.

16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1}$.

17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$.

Exercice 2.26

Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.

2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.

3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.

4. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.

5. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.

6. $\dfrac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Exercice 2.27

Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.

3. $2^x + 4^x = 20$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2$.

Exercice 2.28

On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Exercice 2.29

Simplifier les expression suivantes.

1. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{10}\times\sqrt{12}$.

2. $\sqrt{\frac{7}{5}}-\sqrt{\frac{125}{49}}+\sqrt{\frac{25}{7}}$.

3. $\sqrt{4(1-x)^2}$.

4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}$.

5. $\sqrt{32(x+4)^2}$.

6. $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})}$.

7. $\sqrt{1-2\sqrt{x}+x}$.

Exercice 2.30

Après avoir simplifié chaque radical, calculer les sommes.

1. $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{27}$.

2. $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$.

3. $2\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{18}$.

4. $2\sqrt{8}+3\sqrt{32}+2\sqrt{98}$.

Exercice 2.31

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Exercice 2.32

Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2.$$

Exercice 2.33

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $x^2-2x-3=0$;

2. $2x^2+8x+8=0$;

3. $(x-1)^2=\frac{1}{4}$;

4. $x^2+x+1=0$;

5. $(x+1)^2=(2x-1)^2$.

Exercice 2.34 *Équation bicarrée*

Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^4-3x^2+1=0$.

2. $x^4+2x^2-3=0$.

3. $3x^4+5x^2+2=0$.

4. $3x^4-x^2+5=0$.

Exercice 2.35

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $3x^2 - 12x + 9 < 0$.
2. $x^2 - 7x + 6 \leq 0$.
3. $\left(x - \frac{3}{2}\right)(6 - 4x) \geq 0$.
4. $(x-3)(5-2x) > 0$.
5. $(x^2 - 3x - 9)(x^2 - 1) > 0$.
6. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \leq 0$.
7. $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.
8. $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2} > 1$.
9. $\dfrac{(x-1)(2x^2 + x + 1)}{x^2 + x - 6} \leq 0$.

Exercice 2.36

Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?

Exercice 2.37

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Exercice 2.38

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.39

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4 - x| = x$.
2. $|x^2 + x - 3| = |x|$.
3. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$.
4. $\sqrt{1 - 2x} = |x - 7|$.
5. $x|x| = 3x + 2$.
6. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

Exercice 2.40

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 2.41

Dans cet exercice, on n'utilisera pas la calculatrice et on supposera qu'on ne connaît de $\sqrt{2}$ que sa définition, *i.e.* que $\sqrt{2}$ est l'unique réel strictement positif dont le carré est égal à 2.

1. Montre que 1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $1/2$.
2. Soit $(p, q) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^2$ et $\epsilon > 0$. On pose $r_1 = \frac{p}{q}$ et $r_2 = \frac{p+2q}{p+q}$.
   (a) Exprimer $r_2 - \sqrt{2}$ en fonction de $r_1 - \sqrt{2}$.
   (b) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision ϵ. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $\epsilon/5$.
   (c) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision ϵ. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision $\epsilon/2$.
3. En déduire une fraction qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2 que $\sqrt{2}$.