Chapter 42 Espace probabilisé fini

42.1 Le langage de l'aléatoire

Exercice 42.1

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω. Écrire les ensembles suivants à l'aide d'unions et/ou d'intersections.

1. A : «il y a une infinité d'événements parmi les événements A_n qui sont réalisés».
2. B : «à partir d'un certain rang, tous les événements A_n sont réalisés».
3. C : «il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés».

42.2 Espace probabilisé fini

Exercice 42.2

On considère 3 évènements A, B et C.

1. À l'aide d'un dessin des ensembles A, B et C, conjecturer une formule permettant de calculer $P(A \cup B \cup C)$ si l'en connaît les probabilités de chacun de ces événements et les probabilités des intersections de ces événements.
2. Démontrer cette formule à partir des axiomes de la théorie des probabilités.

Exercice 42.3

Soient A et B deux événements quelconques d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4},$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 42.4

Pour chacune des expériences qui suit, proposer un espace probabilisé (Ω, P) permettant de l'étudier.

1. On tire successivement et sans remise six boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 49.
2. On lance deux dés équilibrés.
3. Dix individus prennent place sur dix chaises réparties autour d'une table.
4. On lance une pièce équilibrée. Si celle-ci tombe du côté pile, on tire une boule dans une urne contenant une boule blanche et deux boules rouges. Sinon, on tire une boule dans une urne contant trois boules blanches et une boule rouge.

Exercice 42.5

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ k \}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 42.6

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ 1, 2, \dots, k \}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 42.7

Une urne contient une boule bleue, une boule blanche, une boule rouge et deux boules vertes. Quelles est la probabilité d'obtenir en tirant successivement trois boules de l'urne:

1. Les boules bleue, blanche et rouge dans cet ordre?

2. Les boules bleue, blanche et rouge dans un ordre quelconque?

Exercice 42.8

Dans un sac, on a placé trois pièces de 1 euro et quatre pièces de 2 euros. Une personne extrait de ce sac trois pièces simultanément. En admettant que chaque sous-ensemble de trois pièces à même probabilité d'être extrait, calculer les probabilités des événements suivants:

1. Les trois pièces sont des pièces de 2 euros.

2. Il y a au moins une pièce de 2 euros parmi les trois pièces extraites.

Exercice 42.9

Soit le système d'équations numériques réelles, d'inconnue $(x; y)$, dans lequel a, b, c désignent trois paramètres réels.

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c. \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6: le premier numéro sorti donne a, le second b et le troisième c.

1. Quelles sont les probabilités p_0, p_1 et p_2 pour que le système ainsi obtenu ait respectivement: une infinité de solutions; aucune solution; une solution unique $(x_0; y_0)$?

2. Quelle est la probabilité p_3 pour que le système admette la solution unique $(3; 0)$?

Exercice 42.10

Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 avariés. Les acheteurs prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée.

Voulez-vous être le 1er, 2-ième,..., le 150-ième acheteur ?

Exercice 42.11

Un joueur de poker reçoit une «main» de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker).

Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. une seule paire ?

2. deux paires ?

3. un brelan ?

4. un carrée ?

5. un full ?

Exercice 42.15

Quatre hommes déposent leur chapeau au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux.

1. Calculer la probabilités qu'aucun des 4 hommes ne prenne son propre chapeau.
2. Calculer la probabilités qu'exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau.

Exercice 42.16

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point. Quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque un.

Pour qui parieriez-vous?

Exercice 42.18

Deux joueurs jouent indépendamment n parties de «pile ou face». Quelle est la probabilité que sur ces n parties, il obtiennent tous deux le même nombre de fois «face»?

42.3 Conditionnement

Exercice 42.20

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 42.21

Vl'a ti pâs qu'en pâssant par l'plant[1] du Pé Mathieu eun vôleu i a chapardeu trois pommes de saignette qu'i mit dans sa pouchette, é pi quatre coquerelles et côr sept ambrettes. En r'venant il a croiseu su son ch'min la fille de son vésin et i y'offrit trois pommes au hasard.

1. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu eune pomme de châque sorte.
2. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu trois pommes pareuilles.
3. Et au cas où les trois pommes é seraieunt de la même sorte, calculeu la probabiliteu pour qu'e seient des pommes de saignette.

Exercice 42.22

Une urne contient cinq boules rouges et une boule noire. Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement trois boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

[1] l'vergeu

Exercice 42.24

Every afternoon at five o'clock, Charles is having tea at his mother's. In order to start the conversation, he keeps saying either "I think it's raining" or "I think it isn't raining". He is mistaken once out of three when it is raining, and once out of two when it is not raining. And it is raining nine times out of ten. This afternoon, just after Big Ben rang five, he said: "I think it's raining."

Calculate the probability it is actually raining.

Indication : VF. Chaque après-midi, à cinq heures, Charles prend le thé chez sa mère. Pour engager la conversation, il annonce soit «je crois qu'il pleut», soit «je crois qu'il ne pleut pas». Il se trompe une fois sur trois quand il pleut et une fois sur deux quand il ne pleut pas. Il pleut neuf fois sur dix. Tantôt, après que Big Ben eut sonné cinq heures, il annonce: «je crois qu'il pleut».

Calculer la probabilité pour qu'il pleuve effectivement.

Exercice 42.25

Jack possède une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Dans le premier tiroir, il y a 30 chaussettes roses et 20 chaussettes vertes. Les deux autres tiroirs contiennent, l'un quatre chaussettes roses (il ne sait pas lequel), l'autre quatre chaussettes vertes (il ignore évidemment de quel tiroir il s'agit). Dans l'obscurité, il prend, au hasard, une chaussette du premier tiroir, puis la place dans un des deux autres tiroirs. Il prend ensuite dans celui-ci une chaussette au hasard et allume la lumière. Elle est rose.

Calculer la probabilité pour que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses.

Exercice 42.27

On considère trois urnes :

- U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.
- U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.
- U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 42.28

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de cartes de poker (52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi?

Exercice 42.29

Le sultan dit à Ali Baba: «Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche.»

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 boules noires dans la deuxième?
2. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place dans chaque urne 2 boules blanches et 2 boules noires?
3. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 3 boules blanches dans la première urne et les autres boules dans la deuxième?
4. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances?

Exercice 42.30 *La chaîne des menteurs*

On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne M_1, M_2, M_3,... de messagers menteurs, qui transmettent correctement le message avec une probabilité p, mais qui changent sa valeur avec la probabilité $1 - p$.

Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$), déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, puis une expression explicite de a_n en fonction de n, ainsi que la valeur limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

Le résultat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Exercice 42.31

Le gène de l'hémophilie est porté par le chromosome X, les hommes le révèlent systématiquement s'ils le portent, et les femmes ne le révèlent pas (nous considérons ici qu'il n'y a pas d'exception à cette règle). Ce gène est transmis aux enfants avec une probabilité $1/2$ par la mère. Une femme a un cousin germain hémophile (le fils de la sœur de sa mère), ni son grand-père, ni son père ni son beau-frère ne sont hémophiles.

1. Quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?
2. Si on sait de plus qu'elle a deux fils non hémophiles, quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?
3. Si on sait de plus qu'elle a un frère non-hémophile, quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?

Exercice 42.32

Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. On tire une boule, si elle est blanche, on gagne, si elle est noire, on perd, si elle est rouge, on fait deuxième tirage sans remettre la boule rouge,etc...

On note G_r l'événement «on gagne en partant d'une urne contenant r boules rouges».

1. Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.
2. Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.
3. Calculer $P(G_r)$.

42.4 Indépendance stochastique

Exercice 42.33

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

- A : «on obtient le tirage 2, 4, ou 6»,
- B : «on obtient le tirage 3 ou 6».

Exercice 42.34

Soit A et B deux événements indépendants pour une probabilité P.

1. Vérifier que les événements A et B^c, puis A^c et B, enfin A^c et B^c sont indépendants.
2. Donner une exemple où A et B sont indépendants pour une probabilité P et ne le sont pas pour une probabilité Q.

Exercice 42.35

Les jours de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants, quel que soit le temps. En mai, il pleut en moyenne deux jours sur cinq. Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie huit fois sur dix et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur vingt-cinq. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps neuf fois sur dix. Le 13 mai, jour de grève, elle annoncent toutes les deux qu'il va faire beau.

Calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

Exercice 42.36

Em ersten Tag des Oktoberfestes hat der Franzl - wie es sich schickt - seine Lederhose an. Diese wird vorsichtshalber durch Gürtel und Hosenträger befestigt. Bei jedem Band des Hosenträgers stehen die Chancen, daß es zerreißen könnte, eins zu fünf, beim Gürtel eins zu fünfzehn.

1. Berechnen Sie die Whscheinlichkeit, daß an diesem Tage seine Lederhose hinunterfällt.
2. Man geht davon aus, daß er seine Hose anbehalten hat. Berechnen Sie also die Wahrscheinlichkeit, daß der Gürtel hätte platzen können.

(Die Haltbarkeit jedes Bandes und die Haltbrkeit des Gürtels sind nicht verbunden.)
Indication : VF. Le premier jour de la fête de la bière, Franz a, comme il se doit, sa culotte de peau. Celle-ci est maintenue par une ceinture et une paire de bretelles. Chaque bretelle a une chance sur cinq de lâcher dans la journée et la ceinture une chance sur quinze.

1. Calculer la probabilité pour qu'il perde sa culotte ce jour-là.
2. Sachant qu'il a gardé sa culotte, calculer la probailité pour que la ceinture ait lâché.

(La résistance de la ceinture et la résistance de chaque brettelle sont indépendantes.)

Exercice 42.38 *Tirages dans des urnes de façon aléatoire*

On considère deux urnes A et B dont chacune contient des boules noires et des boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne A et a (avec $0 < a < 1$) et la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne B et b (avec $0 < b < 1$).

On effectue N tirage successifs, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient, et ceci de la façon suivante.

- Pour le premier tirage, on choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire une boule de cette urne.
- Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne; et si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- On continue suivant la même règle jusqu'au N-ième tirage.

Pour tout entier n de $[\![1, n]\!]$, on définit

- A_n : «le n-ième tirage est effectué dans l'urne A» et $q_n = P(A_n)$.
- B_n : «la n-ième boule tirée est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer q_1, p_1, q_2, p_2.
2. Pour tout n de $[\![2, N]\!]$, déterminer une relation entre q_n et q_{n-1}. En déduire une expression de q_n en fonction de a, b et n.
3. Pour tout n de $[\![1, N]\!]$, déterminer une relation entre p_n et q_n. En déduire une expression de p_n en fonction de a, b et n.

Exercice 42.39

Chou le chaton a trois passions dans la vie : manger, dormir et jouer. On peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5 minutes.

- Après 5 minutes de repas, il continue de manger les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sinon il se met à jouer.
- Après 5 minutes de sieste, il continue de dormir les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{3}{4}$ et sinon il a faim au réveil et va manger.
- Après 5 minutes de jeu, soit il est en appétit et mange les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{4}$, soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note m_n la probabilité qu'il mange entre les minutes $5n$ et $5n+5$, d_n la probabilité qu'il dorme et j_n la probabilité qu'il joue. Enfin, on pose $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $C_{n+1} = MC_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $4M^3 - 5M^2$, puis en déduire un polynôme annulateur P de M.
3. En déduire les puissance de M.
4. En déduire les limites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que dire de la journée de Chou?

Exercice 42.40 *Trois face d'affilée*

On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur pile est p et la probabilité qu'elle tombe sur face est $q = 1 - p$. On considère une succession de lancers de cette pièce. Pour tout entier $n \geq 1$, on nomme B_n l'événement «aucune séquence de face de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers» et on note b_n la probabilité de B_n.

Calculer b_1, b_2, b_3. Montrer

$$\forall n \geq 4, b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}.$$