

Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le lundi 27 novembre 2023

Exercice 1

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A

Étude de la matrice A

A1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à préciser.

A2. (a) Calculer $A - I_3$, $A - 3I_3$ puis $(A - 3I_3)^2$. Vérifier que $(A - I_3)(A - 3I_3)^2 = \mathbf{0}_3$.

(b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{9}A^2 + xA + yI_3$ avec (x, y) réels à préciser.

A3. On note $T = P^{-1}AP$ et on admet que $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose également $J = T - D$.

(a) La matrice J est-elle inversible ?

(b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $J^k = \mathbf{0}_3$.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer

$$\forall n \geq 2, T^n = D^n + nJD^{n-1}.$$

En déduire l'écriture de T^n pour $n \geq 2$.

(d) Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PT^nP^{-1}.$$

(e) Calculer PT^n puis donner l'écriture de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie B

Étude d'une famille de suites On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$(u_0, v_0, w_0) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$

B1. Déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = BX_n.$$

B2. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = B^n X_0.$$

B3. À l'aide de ce qui précède, déterminer u_n , v_n et w_n en fonction de α , β , γ et n .

Partie C

Commutant de la matrice A

- On utilise dans cette partie la matrice T définie à la partie **A3** par $T = P^{-1}AP$; on a donc $PTP^{-1} = A$.
- On note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$C(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

De même, on pose

$$C(T) = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid TM = MT \}.$$

C1. Montrer

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xI_3 + yT + zT^2 \in C(T).$$

C2. Réciproquement, soit $M \in C(T)$ avec $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

(a) Calculer TM et MT .

(b) En déduire que M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = xI_3 + yT + zT^2.$$

C3. Justifier l'égalité

$$C(T) = \{ xI_3 + yT + zT^2 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

C4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Démontrer que $M \in C(A)$ si, et seulement si $N \in C(T)$.

C5. Dédurre de tout ce qui précède que

$$C(A) = \{ \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \}.$$