Sujet d'étude

Exercice 1 *Théorème de Cantor-Bernstein*

On se propose de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein

> Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications injectives. On note

- $h = g \circ f$,
- $R = E \setminus g(F)$,
- $W = \{ M \in \mathcal{P}(E) \mid R \cup h(M) \subset M \}$,
- $A = \bigcap\limits_{M \in W} M$.

1. (a) Vérifier que $E \in W$ et que $A \in W$.

(b) Montrer
$$\forall M \in W, R \cup h(M) \in W.$$

2. On note $B = \complement_E(A)$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$.

(a) Vérifier que $R \cup h(A) = A$ et $B' = \complement_F \left(A'\right)$.

(b) On considère les restriction de f et g
$$f' : A \to A' \quad \text{et} \quad g' : B' \to B.$$

Montrer que f' et g' sont bijectives, ainsi que l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in A \\ \left(g'\right)^{-1}(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{array}.$$