

Chapter 24 Relations de comparaisons sur les suites

Exercice 24.1

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$\begin{array}{lllll} a_n = \ln n, & b_n = e^n, & c_n = (\ln n)^{2025}, & d_n = n^{0.1}, & e_n = 5^n, \\ f_n = 2^n, & g_n = n^{10}, & h_n = \sqrt{\ln n}, & i_n = n!. \end{array}$$

Exercice 24.2

Vrai ou Faux ?

1. $e^n \sim e^{n+1}$.
2. $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
4. \Leftrightarrow Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 24.3

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = n^n, \quad b_n = n^{\ln(n)}, \quad c_n = e^{n^2}, \quad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Exercice 24.4

Pour chaque paire de suites (u_n) et (v_n) ci-dessous, A-t-on $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$ ou $u_n \sim v_n$?

1. $u_n = (n^2 - n)/2$ et $v_n = 6n$.
2. $u_n = n + 2\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = n \ln n$ et $v_n = n\sqrt{n}/2$.
4. $u_n = n + \ln n$ et $v_n = \sqrt{n}$.
5. $u_n = 2(\ln n)^2$ et $v_n = \ln(n) + 1$.
6. $u_n = 4n \ln n + n$ et $v_n = (n^2 - n)/2$.

Exercice 24.5

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = (1000)2^n + 4^n$.
2. $u_n = n + n \ln n + \sqrt{n}$.
3. $u_n = \ln(n^{20}) + (\ln n)^{10}$.
4. $u_n = (0.99)^n + n^{100}$.

Exercice 24.6

Déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de

<p>1. $a_n = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}$;</p> <p>2. $b_n = \frac{1}{n} + \frac{10^{32}}{n^2}$;</p> <p>3. $c_n = n^{-1/2} + 1$;</p>	<p>4. $d_n = \ln n - \sqrt{n} + (-1)^n$;</p> <p>5. $e_n = 10^n + n!$;</p> <p>6. $f_n = \frac{1}{10^n} + \frac{1}{n!}$;</p> <p>7. $g_n = n! + n\sqrt{n} + n^n$;</p>	<p>8. $h_n = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^k}$;</p> <p>9. $i_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;</p> <p>10. $j_n = \ln(n+32)$.</p>
---	--	--

Exercice 24.7

Déterminer un équivalent simple de

<p>1. $u_n = \frac{100^n + 3(n!)}{2(n!) + 1000^n}$,</p> <p>2. $v_n = \frac{n! + 2^n}{3^n + n^{30}}$,</p>	<p>3. $w_n = \frac{n^3 + n! + 10^n}{(n+2)! + 100^n}$,</p> <p>4. $t_n = \frac{n! + n^n}{n^{n+3} + 1000^n}$,</p>
--	--

et en déduire leurs limites.

Exercice 24.8

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

<p>1. $u_n = n^{1/n} - 1$;</p> <p>2. $u_n = \frac{1 + \sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$;</p> <p>3. $u_n = \ln \left(n + \sqrt{n^2 + 1} \right)$;</p>	<p>4. $u_n = (n + 3 \ln n) e^{-(n+1)}$;</p> <p>5. $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$;</p> <p>6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.</p>
--	---

Exercice 24.9

Soient u et v deux suites de réels strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exercice 24.10

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}.$$

1. Prouver que (u_n) est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Déterminer w_n , calculer de deux façons différentes $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k$, déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n^2$, puis un équivalent de u_n .

Exercice 24.11 (****)

Soit $T : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \mathcal{O}(n) \quad [n \rightarrow +\infty].$$

Montrer que $T(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$.