Chapter 10 Vocabulaire relatif aux applications

10.1 Définition ensembliste d'une application

10.2 Opérations sur les applications

10.3 Image directe et image réciproque

Solution 10.1

1. Supposons $X_1 \subset X_2$ et montrons que $f(X_1) \subset f(X_2)$.
   Soit y un élément de $f(X_1)$.
   Par définition de $f(X_1)$, il existe un élément $x \in X_1$ tel que $y = f(x)$.
   Or $X_1 \subset X_2$ donc
   $$x \in X_2 \qquad \text{et} \qquad y = f(x);$$
   il s'en suit $y \in f(X_2)$[1].
   Nous pouvons conclure que $f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. Nous allons effectuer un raisonnement par double inclusion. Montrons d'abord que $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$.
   Soit $y \in f(X_1 \cup X_2)$.
   Il existe $x \in X_1 \cup X_2$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in X_1 \cup X_2$, nous savons que $x \in X_1$ ou $x \in X_2$.

   - Si $x \in X_1$; alors $y = f(x) \in f(X_1)$, et *a fortiori* $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.
   - Si $x \in X_2$; alors $y = f(x) \in f(X_2)$, et *a fortiori* $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

   Dans tous les cas, nous avons donc $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

   Nous avons donc montré que $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$. Montrons maintenant que $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

   Soit $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Alors $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$.

   - Supposons $y \in f(X_1)$, alors il existe $x \in X_1$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in X_1$, nous pouvons écrire
     $$x \in X_1 \cup X_2 \text{ et } y = f(x)$$
     c'est-à-dire $y \in f(X_1 \cup X_2)$.
   - Supposons $y \in f(X_2)$, le raisonnement est analogue : il existe $x \in X_2$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x \in X_1 \cup X_2$ puis $y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2)$.

   Dans tous les cas, nous avons montré que $y \in f(X_1 \cup X_2)$, donc $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

   Nous avons montré que
   $$f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2) \quad \text{et} \quad f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2);$$
   par double inclusion, nous pouvons conclure $f(X_1) \cup f(X_2) = f(X_1 \cup X_2)$.

[1] Nous avons démontré une propriété de y ($y \in f(X_2)$). Nous pouvons alors affirmer qu'elle est vérifiée par **tous** les objets qui ont les propriétés qui ont été annoncées par «Soit y…», c'est-à-dire ici tous les éléments de l'ensemble $f(X_1)$. On a donc $\forall y \in f(X_1), x \in f(X_2)$.

3. Soit $y \in f(X_1 \cap X_2)$. Il existe $x \in X_1 \cap X_2$ tel que $y = f(x)$.
   Puisque $x \in X_1 \cap X_2$, nous pouvons écrire que $x \in X_1$ et donc $y = f(x) \in f(X_1)$.
   De même, $x \in X_2$ et donc $y = f(x) \in f(X_2)$.
   Nous avons donc montré que $y \in f(X_1)$ et $y \in f(X_2)$, c'est-à-dire $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Nous pouvons conclure
   $$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2).$$

4. L'inclusion $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ est fausse en général.
   Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$:
   $$f\left(\mathbb{R}_+\right) \bigcap f\left(\mathbb{R}_-\right) = [0, +\infty[\bigcap [0, +\infty[= [0, +\infty[$$
   mais
   $$f\left(\mathbb{R}_+ \bigcap \mathbb{R}_-\right) = f(\{\, 0 \,\}) = \{\, 0 \,\}.$$

Solution 10.2

1. Supposons $Y_1 \subset Y_2$. Soit $x \in f^{-1}(Y_1)$. Nous avons donc $f(x) \in Y_1$ d'où $f(x) \in Y_2$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(Y_2)$. Nous avons donc montré que $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. Soit $x \in A$.
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &\iff f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \\ &\iff f(x) \in Y_1 \text{ ou } f(x) \in Y_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$
   Nous avons donc montré $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. Soit $x \in A$.
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &\iff f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \\ &\iff f(x) \in Y_1 \text{ et } f(x) \in Y_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \text{ et } x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$
   Nous avons donc montré $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Solution 10.3
Solution 10.4
Solution 10.5
Solution 10.6
$f^{-1}(\mathbb{R}^\star)$.
Solution 10.7
Voici les solutions. Ne reste plus qu'à les démontrer (voir le cours!).

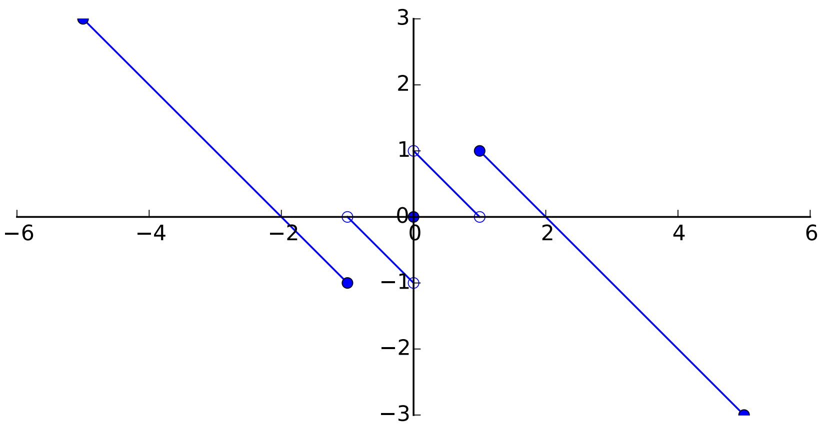
1. $f(2) = 4$,

2. $f(\{\, 2 \,\}) = \{\, 4 \,\}$,

3. $f(\{\, -1, 0, 1, 2 \,\}) = \{\, 1, 0, 1, 4 \,\} = \{\, 0, 1, 4 \,\}$,

4. $f^{-1}(4)$ n'a aucun sens car f n'est pas bijective,
5. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$,
6. $f^{-1}(-2, 0, 1, 4) = \{0, -1, 1, -2, 2\}$,
7. $f\left(f^{-1}(-2, 0, 1, 4)\right) = f(\{0, -1, 1, -2, 2\}) = \{0, 1, 4\}$,
8. $f^{-1}(f(\{-1, 0, 1, 2\})) = f^{-1}(\{0, 1, 4\}) = \{0, -1, 1, -2, 2\}$,
9. $f([1, 2]) = [1, 4]$,
10. $f(]-1, 4[) = [0, 16[$,
11. $f^{-1}(]1, 2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$,
12. $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$,
13. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
15. $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Solution 10.8

1. 

2. Une lecture graphique donne

$$f([0, 2]) = [0, 1] \quad \text{et} \quad f^{-1}([0, 2]) = [-4, -2] \cup [0, 2].$$

La démonstration est un peu pénible…

Solution 10.9

Commençons par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les encadrements

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Il s'en suit

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

Tenant compte du fait que $\varphi(x) \in \mathbb{Z}$, on a donc $\varphi(x) = 0$ ou $\varphi(x) = 1$. Ainsi

$$\varphi(\mathbb{R}) \subset \{ 0, 1 \}.$$

Réciproquement, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(0.7) = 1$, d'où $\{ 0, 1 \} \subset \varphi(\mathbb{R})$.

Conclusion

Par double inclusion,

$$\varphi(\mathbb{R}) = \{ 0, 1 \}.$$

Solution 10.11

10.4 Injection, surjection, bijection

Solution 10.12

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective. Soit $x_1, x_2 \in A$. On suppose $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ et puisque $g \circ f$ est injective $x_1 = x_2$. L'application f est donc injective.

Par contre, g n'est pas nécessairement injective. En prenant par exemple $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$, alors $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$ est injective (car strictement croissante par exemple) mais g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$.

On peut également utiliser $f : \{ 0, 1 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Ou encore, $f = \arcsin$ et $g = \sin$.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $y \in C$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x_1 \in A$ tel que $y = g \circ f(x_1)$. En posant $x = f(x_1)$, on a bien $x \in B$ et $g(x) = y$. L'application g est donc surjective.

Par contre, f n'est pas nécessairement surjective.

En prenant par exemple $f : \{ 0, 1 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4$ et $g : \mathbb{R} \to \{ 11 \}, x \mapsto 11$.

Ou encore, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$.

3. Plusieurs exemples précédents répondent au critère.

Un exemple très simple : $g : \mathbb{R} \to \{ 0 \}, x \mapsto 0$ et $f : \{ 0 \} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3$.

Solution 10.13

En posant $g = f \circ f$, on a $g \circ f = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. L'application f est donc bijective et

$$f^{-1} = f \circ f.$$

Solution 10.14

1. (a) Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, ce qui s'écrit également $x \in f^{-1}(f(A))$.

Conclusion : $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, on a donc $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. Puisque f est injective, on a $x = x'$ d'où $x \in A$.

Conclusion : on a montrer $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Le résultat demandé découle de la question précédente par double inclusion.

(c) Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors $f\left(\{x_1\}\right) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f\left(\{x_2\}\right)$ d'où

$$\{x_1\} = f^{-1}\left(f\left(\{x_1\}\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(\{x_2\}\right)\right) = \{x_2\},$$

ce qui implique $x_1 = x_2$: f est alors injective.

2. (a) Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, il existe alors $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $y = f(x) \in B$.
Conclusion : $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

(b) Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $y = f(x) \in B$, on a donc en effet

$$x \in f^{-1}(B) \qquad \text{et} \qquad y = f(x).$$

Donc $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Conclusion : on a montrer $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Le résultat demandé découle de la question précédente par double inclusion.

(c) Soit $y \in F$, on a $f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$, en particulier, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, c'est-à-dire que y possède au moins un antécédent par f : f est surjective.

Variante. Puisque $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $f^{-1}(F) = E$. On a donc $f(E) = f\left(f^{-1}(F)\right) = F$; c'est-à-dire f est surjective.

Solution 10.16
Solution 10.17

1. L'application de l'ensemble des habitants de mon quartier vers l'ensemble des modèles de voitures qui à toute personne associe son modèle de voiture n'est pas injective.

2. L'application de l'ensemble des élèves de la classe vers $\mathbb{N}$ qui à chaque personne associe son age n'est pas injective.

3. L'application de l'ensemble des élèves de la classe vers l'ensemble des jours de l'année qui à chaque personne associe son jour d'anniversaire est injective.

4. L'application de l'ensemble des églises vers l'ensemble des ville de france qui à toute église associe sa ville est surjective.

5. L'application de l'ensemble des églises vers l'ensemble des ville de france qui à toute église associe sa ville n'est pas injective.

6. L'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel associe son carré n'est pas surjective.

7. L'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ qui à un réel associe son carré est bijective.

8. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à un couple (a, b) associe sa somme $a + b$ n'est pas injective.

Solution 10.18

1. On a $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n.$$

car $n + 1 > 0$. Finalement, on a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

2. L'application f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f. L'application g n'est pas injective car $g(1) = g(0) = 0$.

   Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, on a nécessairement, $f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, car sinon f et g serait bijectives. Remarquez qu'en fait $f \circ g$ n'est ni injective car $f \circ g(1) = f \circ g(0)$, ni surjective car 0 n'a pas d'antécédent par $f \circ g$.

Solution 10.20

1. L'application f n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$. Soit $y \in]0, 1]$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire, $yx^2 + y - 1 = 0$, ou encore $x^2 = \frac{1-y}{y}$. Puisque $y \in]0, 1]$, on a $\frac{1-y}{y} \geq 0$. En posant $x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$, on a bien $f(x) = y$. Nous avons montré que f est surjective.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire $(2x + 3y, x + 2y) = (a, b)$. On a

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + 3y & = a \\ x + 2y & = b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} -y & = a - 2b \\ x + 2y & = b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -3b + 2a \\ y & = 2b - a \end{array}\right. \tag{1}$$

   L'équation $f(x, y) = (a, b)$ admet une unique solution $(x, y) = (-3b + 2a, 2b - a)$; l'application f est donc bijective. De plus, $f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (-3b + 2a, 2b - a) \end{array}$, qui s'écrit également $f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-3y + 2x, 2y - x) \end{array}$.

3. L'application f n'est pas injective car $f(0, -1) = f(0, 1) = (0, 2)$. De plus, un élément de $\mathrm{Im}(f)$ s'écrit $f(x, y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or $y^2 + 1 \geq 1$, et donc $f(x, y) = (x, y^2 + 1) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire $(x, y^2 + 1) = (a, b)$. Posons $x = a$ et $y = \sqrt{b - 1}$ (bien défini car $b \geq 1$). On a donc $f(x, y) = (x, y^2 + 1) = (a, \sqrt{b - 1}^2 + 1) = (a, b)$. Nous avons donc trouver un antécédent de (a, b) par f, on a donc $R \times [1, +\infty[\subset \mathrm{Im}(f)$. Par double inclusion, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

   Puisque $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$, f n'est pas surjective.

4. C'est du cours ! L'application f n'est pas injective car $f(0) = f(2i\pi) = 1$. L'application f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f. On a vu dans le cours sur les nombres complexes que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^\star$.

   Une petite piqure de rappel : Si $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z| \mathrm{e}^{i\theta}$. Nous avons vu que $w = \ln|z| + i\theta$ est un antécédent de z par f car, par définition de l'exponentielle complexe $f(w) = \mathrm{e}^{\ln|z|+i\theta} = \mathrm{e}^{\ln|z|} \mathrm{e}^{i\theta} = |z| \mathrm{e}^{i\theta}$.

Solution 10.21
Solution 10.22
Solution 10.23
Solution 10.24

1. La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est définie dès lors que son dénominateur ne s'annule pas. Ainsi $\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \{ 2i \}}$.

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x+iy)^2 = 8-6i \iff \begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ x^2-y^2 &= 8 \\ 2xy &= -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 &= 18 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y^2 &= 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ xy &= -6 \end{cases} \iff x = \pm 3 \text{ et } y = \pm 1 \text{ et } xy < 0.$$

Conclusion

Les racines carrées de $8-6i$ sont $3-i$ et $-3+i$.

(b) Pour $z \in D$,

$$f(z) = 1+i \iff z^2 = (1+i)(z-2i) \iff z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0.$$

Ce dernier polynôme a pour discriminant $8-6i = (3-i)^2$ et pour racines

$$\frac{1+i-3+i}{2} = -1+i \quad \text{et} \quad \frac{1+i+3-i}{2} = 2.$$

Ces deux nombres complexes appartiennent bien à D, ainsi, $1+i$ admet deux antécédents par f:

$$-1+i \quad \text{et} \quad 2.$$

3. Pour $z \in D$,

$$f(z) = h \iff z^2 = h(z-2i) \iff z^2 - hz + 2ih = 0.$$

Ce dernier polynôme a pour discriminant $\Delta = h^2 - 8ih = h(h-8i)$. On remarque également que $2i$, ne vérifie pas l'équation $z^2 - hz + 2ih = 0$.

Conclusion

- Si $h = 0$ ou $h = 8i$, h admet un unique antécédent par f.
- Sinon, h admet exactement deux antécédents par f.

4. D'après la question précédente, tout élément $h \in \mathbb{C}$ admet (au moins) un antécédent par f dans D. Donc $f(D) = \mathbb{C}$.

5. D'après la question précédente, tout élément $h \in \mathbb{C}$ admet (au moins) un antécédent par f.

Conclusion

L'application f est donc une surjection de D sur $\mathbb{C}$.

6. L'application f $\boxed{\text{n'est pas injective}}$ car $1+i$ admet deux antécédent par f.

Solution 10.25
Solution 10.26
Solution 10.27

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ f(n) = n$. On a donc $f \circ f = id_{\mathbb{N}}$: f est bijective et $f^{-1} = f$. On a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{N}$.

2. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a $f(n) = f(m) \implies 2n = 2m \implies n = m$; f est donc injective. De plus, $\text{Im}(f) = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \} = 2\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers pairs. L'application f n'est donc pas surjective, par exemple 1 n'a pas d'antécédent par f.

3. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$. L'application f est donc surjective. De plus, $f(2) = 1 = f(0)$: l'application f n'est donc pas injective.

4. Soit $y \in [0, 1]$. On pose $x = \arcsin y$. On a donc $f(x) = |\sin(\arcsin(y))| = |y| = y$. L'application f est donc surjective. De plus, $f(0) = 0 = f(\pi)$: l'application f n'est donc pas injective.

5. On a $\lim_{-\infty} f = -1$, $\lim_{+\infty} f = 1$; de plus l'application f est strictement croissante, donc injective, et continue ; on a donc $\text{Im}(f) =]-1, 1[$, f n'est pas surjective.

6. L'application f n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$. Soit $y \in]0, 1]$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire, $yx^2 + y - 1 = 0$, ou encore $x^2 = \frac{1-y}{y}$. Puisque $y \in]0, 1]$, on a $\frac{1-y}{y} \geq 0$. En posant $x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$, on a bien $f(x) = y$. Nous avons montré que f est surjective.

7. Une étude rapide montre que f est croissante sur $[-1, 1]$, continue, et que $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. On a donc $f([-1, 1]) = [-1, 1]$. Puisque f est à valeurs dans $[-1, 1]$, on en déduit $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$: l'application f est surjective. L'application f n'est pas injective ; en effet, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{2} \iff 4x = 1 + x^2 \iff x^2 - 4x - 1 = 0.$$
Le discriminant de ce dernier trinôme est $16 + 4 = 20 > 0$: l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet donc 2 solutions : f n'est pas injective.

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire $(y, x) = (a, b)$. L'unique solution est $(x, y) = (b, a)$. L'application f est donc bijective et $f^{-1}(a, b) = (b, a)$, c'est-à-dire, $f^{-1} = f$.

   Déterminons l'ensemble des points invariants par f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = (x, y)$ si et seulement si $(x, y) = (y, x)$ ou encore $x = y$. L'ensemble des points invariants de f est la droite Δ d'équation $y = x$. Géométriquement, f est la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire $(2x + 3y, x + 2y) = (a, b)$. On a
$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x + 3y & = a \\ x + 2y & = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} -y & = a - 2b \\ x + 2y & = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -3b + 2a \\ y & = 2b - a \end{array} \right. \tag{1}$$
L'équation $f(x, y) = (a, b)$ admet une unique solution $(x, y) = (-3b + 2a, 2b - a)$; l'application f est donc bijective. De plus, $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (-3b + 2a, 2b - a) \end{array}$, qui s'écrit également $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-3y + 2x, 2y - x) \end{array}$.

10. L'application f n'est pas injective car $f(0, -1) = f(0, 1) = (0, 2)$. De plus, l'application f n'est pas surjective car $(0, 0)$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = (x, y^2 + 1)$; or $y^2 + 1 \geq 1$, on ne peut donc pas avoir $f(x, y) = (0, 0)$. Cet remarque montre d'ailleurs que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire $(x, y^2 + 1) = (a, b)$. Posons $x = a$ et $y = \sqrt{b - 1}$ (bien défini car $b \geq 1$). On a donc $f(x, y) = (x, y^2 + 1) = (a, \sqrt{b - 1}^2 + 1) = (a, b)$. Nous avons donc trouver un antécédent de (a, b) par f, on a donc $R \times [1, +\infty[\subset \text{Im}(f)$. Par double inclusion, on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

11. Commençons par déterminer l'ensemble des points invariants par f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} x &= \frac{x+y}{2} \\ y &= \frac{x+y}{2} \end{cases} \iff x = y. \tag{2}$$

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite Δ d'équation $y = x$. On a bien $\Delta \subset \mathrm{Im}(f)$ car pour $(a, b) \in \Delta$, $f(a, b) = (a, b)$[2]. De plus, on a clairement $\mathrm{Im}(f) \subset \Delta$; en effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \in \Delta$. Par double inclusion, on a $\mathrm{Im}(f) = \Delta$. L'application f n'est donc pas surjective. L'application f n'est pas injective car $f(0, 0) = (0, 0) = f(-1, 1)$. Géométriquement, f est la projection orthogonale sur Δ.

12. C'est du cours ! L'application f n'est pas injective car $f(0) = f(2i\pi) = 1$. L'application f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f. On a vu dans le cours sur les nombres complexes que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^\star$.

Une petite piqure de rappel : Si $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$. Nous avons vu que $w = \ln|z| + i\theta$ est un antécédent de z par f car, par définition de l'exponentielle complexe $f(w) = e^{\ln|z|+i\theta} = e^{\ln|z|}\,e^{i\theta} = |z|\,e^{i\theta}$.

Solution 10.28
Solution 10.29

1. f n'est pas injective car les couples $(0, 0)$ et $(1, -1)$ ont l amême image par f.

f est-elle surjective? Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, existe-t-il un coupel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x + y = \alpha$?

On choisit par exemple $x = 0$ et $y = \alpha$, ansi

$$(0, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } f((0, \alpha)) = \alpha$$

donc $(0, \alpha)$ est un antécédent de α par f, et f est surjective.

Remarque. On peut remarquer que $f^{-1}(\{\ \alpha\ \}) = \{\ (t, \alpha - t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

2. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, (u, v) admet-il un antécédent par g? Un tel éventuel antécédent (x, y) vérifie $\begin{cases} x + y &= u \\ x - y &= v \end{cases}$.

Or

$$\begin{cases} x + y &= u \\ x - y &= v \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u + v) \\ y &= \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}.$$

Ainsi, (u, v) admet un antécédent par g et de plus, cet antécédent est unique, il s'agit de

$$\left(\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v)\right).$$

Ceci prouve que g est bijective.

3. h n'est pas injective car les couples $(0, 0)$ et $(1, -1)$ distincts ont la même image par h.

h n'est pas surjective car les couples $(0, a)$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$ n'ont pas d'antécédent par h. En effet, un éventuel antécédent (x, y) vérifie

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = a \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x + y &= 0 \\ 0 = x^2 - y^2 &= a \end{cases}$$

et ce système n'admet aucune solution car $a \neq 0$.

[2] De manière générale, l'ensemble des points invariants est toujours inclus dans l'image de l'application.

4. k n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(1,-1)$ distincts ont la même image par k.

k est-elle surjective?

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, (u,v) admet-il un antécédent par k? Un tel éventuel antécédent (x,y) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+y & = u \\ x+y^3 & = v \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = u-y \\ y^3-y+u-v & = 0 \end{array} \right.$$

Or l'équation d'inconnue réelle $y^3 - y = v - u$ admet au moins une solutions y_1 dans $\mathbb{R}$. En effet, l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto y^3 - y$ est continue et

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(y) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(y) = +\infty.$$

Le couple $(u-y_1, y_1)$ est ainsi un antécédent de (u,v) par k et k est surjective.

5. ℓ n'est pas injective car les couples $(0,0)$ et $(-1,1)$ distincts ont la même image par ℓ.

En s'aidant de la méthode proposée à la question précédente, il apparaît que le couple $(0,-1)$ n'admet pas d'antécédent par ℓ. En effet, un tel éventuel antécédent (x,y) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+y & = 0 \\ x+y^2 & = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = -y \\ y^2-y+1 & = 0 \end{array} \right.$$

et l'équation $y^2 - y + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

Solution 10.31
Solution 10.32
Solution 10.33
Solution 10.34