Chapter 27 Limite, continuité

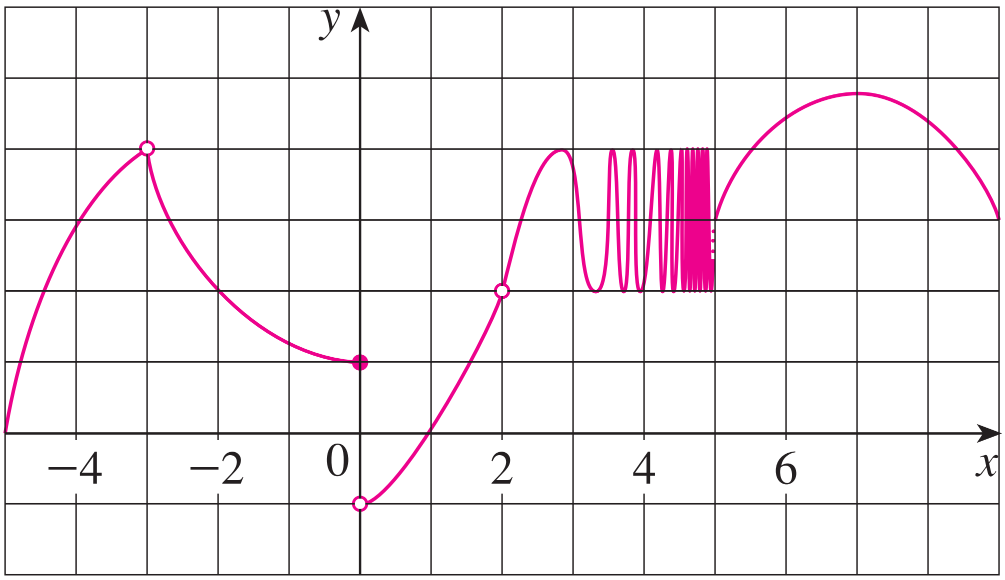
27.1 Caractère local d'un problème

27.2 Limites

Exercice 27.1

Pour la fonction h dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} h(x)$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} h(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$.
4. $h(-3)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x)$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.
8. $h(0)$.
9. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.
10. $h(2)$.
11. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} h(x)$.
12. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} h(x)$.



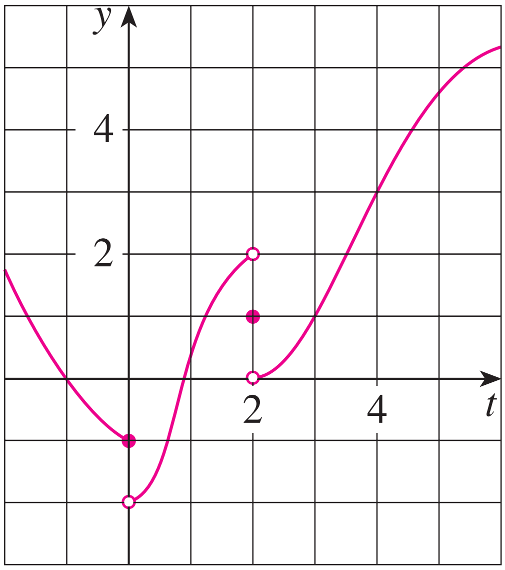
Solution 27.1

1. 4.
2. 4.
3. 4.
4. h n'est pas définie en -3.
5. 1.
6. -1.
7. h n'a pas de limite en 0.
8. 1.
9. 2.
10. h n'est pas définie en 2.
11. h n'a pas de limite en 5 par valeurs inférieures.
12. 3

Exercice 27.2

Pour la fonction g dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ <}} g(t)$.
2. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} g(t)$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ <}} g(t)$.
5. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ >}} g(t)$.
6. $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$.
7. $g(2)$.
8. $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$.



Solution 27.2

1. -1
2. -2
3. g n'a pas de limite en 0. Par exemple car la limite à droite et à gauche diffèrent.
4. 2
5. 0
6. g n'a pas de limite en 2.
7. 1
8. 3

Exercice 27.3

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

Solution 27.3

x	-1.00000	-0.50000	-0.10000	-0.05000	-0.01000
y	0.36788	0.42612	0.48374	0.49177	0.49834
x	1.00000	0.50000	0.10000	0.05000	0.01000
y	0.71828	0.59489	0.51709	0.50844	0.50167

On peut deviner $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 27.4

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln\left(x+x^2\right) \qquad \text{avec} \qquad x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001.$$

Solution 27.4

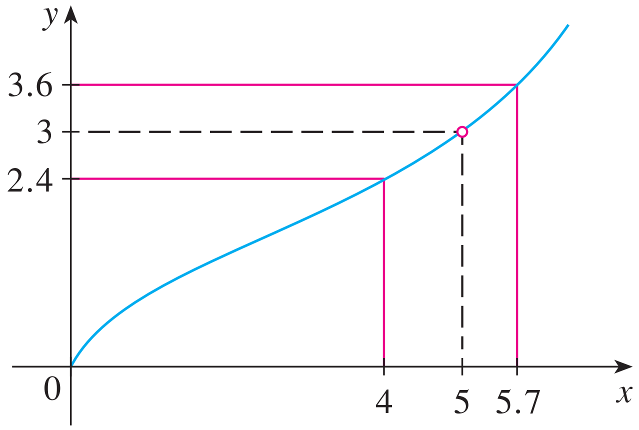
x	1.00000	0.50000	0.10000	0.05000	0.01000	0.00500	0.00100
y	0.69315	−0.14384	−0.22073	−0.14735	−0.04595	−0.02647	−0.00691

Cela manque un peu de précision, mais on peut deviner $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln\left(x+x^2\right) = 0-$.

Exercice 27.5

À l'aide de la courbe représentative de f, déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } |x-5| \leq \delta \text{ alors } |f(x)-3| \leq 0.6.$$



Solution 27.5

Écrire $|f(x)-3| \leq 0.6$ est équivalent à

$$2.4 \leq f(x) \leq 3.6.$$

On peut choisir $\delta = 0.7$ (ou une valeur inférieure). En effet, Soit $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $|x-5| \leq \delta$, on a

$$4.3 \leq x \leq 5.7$$

Sur le tracé, f semble croissante, $f(4) = 2.4$ et $f(5.7) = 3.6$, d'où

$$2.4 \leq f(4.3) \leq f(x) \leq 3.6.$$

Exercice 27.6

Illustrer la définition de la limite

$$\lim_{x\to 1}\left(4+x-3x^3\right) = 2$$

en déterminant une valeur de δ correspondante à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0.1$.

Solution 27.6

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\left(4+x-3x^3\right)-2\right| = \left|2+x-3x^3\right| = |x-1|\left|3x^2+3x+2\right|$$

Supposons de plus $|x-1| \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 2$, on a $\left|3x^2+3x+2\right| \leq 20$. On obtient alors la majoration

$$\left|\left(4+x-3x^3\right)-2\right| \leq 20|x-1|$$

Posons $\delta = \frac{1}{20}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x-1| \leq \delta$, on a simultanément

$$|x-1| \leq \frac{1}{20} \qquad \text{et} \qquad \left|3x^2+3x+2\right| \leq 20$$

d'où

$$\left|\left(4+x-3x^3\right)-2\right| \leq 20\delta = 20\frac{1}{20} = 1 = \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 0.1$, on peut prendre $\delta = \frac{0.1}{20}$.

Exercice 27.7

Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition (en ε, δ) de la limite.

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$.
2. $\lim\limits_{x\to -3}(1-4x) = 13$.
3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x+3\right) = 2$.
4. $\lim\limits_{x\to 4}(7-3x) = -5$.

Solution 27.7

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|(2x+3)-5| = |2x-2| = 2|x-1|$. Posons $\delta = \varepsilon/2$. Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x-1| \leq \delta$, alors
$$|(2x+3)-5| = 2|x-1| \leq 2\delta = \varepsilon.$$
On a montré que $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$.
2. On peut choisir $\delta = \varepsilon/4$.
3. On peut choisir $\delta = 2\varepsilon$.
4. On peut choisir $\delta = \varepsilon/3$.

Exercice 27.8

1. Montrer, en revenant à la définition de la limite, que
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1} = 1.$$
2. Montrer de même que
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Solution 27.8

1. Pour $x \geq -1$,
$$\sqrt{x+1}-1 = \frac{x}{\sqrt{x}+1}.$$
d'où
$$\left|\sqrt{x+1}-1\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x+1}+1} \leq |x|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \varepsilon$, alors si $|x - 0| \leq \delta$, on a

$$\left|\sqrt{x+1} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Conclusion

On a bien montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [-1, +\infty[, |x| \leq \delta \implies \left|\sqrt{x+1} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \geq A \implies \left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Or, pour tout $x \neq 2$,

$$\left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| = \frac{3}{|x-2|},$$

et donc

$$\left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| \leq \varepsilon \iff \frac{3}{|x-2|} \leq \varepsilon \iff |x-2| \geq \frac{3}{\varepsilon}.$$

Posons $A = 2 + \frac{3}{\varepsilon}$. Si $x \geq A$, alors $x \geq 2$ et $|x-2| = x - 2 \geq \frac{3}{\varepsilon}$, on a donc d'après l'équivalence précédente

$$\left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Conclusion

On a bien montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \geq A \implies \left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 27.9

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer

1. $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = 3.$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1.$

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1.$

Solution 27.9

1. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, |x-4| \leq \delta \implies \left|\sqrt{2x+1} + 3\right| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in \left[-1/2, +\infty\right[$,

$$\sqrt{2x+1} - 3 = \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

avec $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$, d'où

$$\left|\sqrt{2x+1}-3\right| \leq \frac{2}{3}|x-4|.$$

Pour réaliser, $\left|\sqrt{2x+1}-3\right| \leq \varepsilon$, il *suffit* de réaliser $\frac{2}{3}|x-4| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $|x-4| \leq \frac{3}{2}\varepsilon$. En choisissant par exemple $\delta = \frac{3}{2}\varepsilon$, on obtient

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, |x-4| \leq \delta \implies \left|\sqrt{2x+1}+3\right| \leq \frac{2}{3}|x-4| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, x \geq \alpha \implies \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in]-3, +\infty[$,

$$\frac{1-x}{x+3}+1 = \frac{4}{x+3} \text{ et } \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| = \frac{4}{x+3}.$$

Or $\frac{4}{x+3} \leq \varepsilon \iff x \geq \frac{4}{\varepsilon} - 3$. Choisissons par exemple $\alpha = \frac{4}{\varepsilon} - 3 \geq -3$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, x \geq \alpha \implies \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} - 1 = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

De plus, si $x \leq -1$, on a $0 \leq 1-x \leq -2x$ et $x^2+1 \geq x^2 \geq 0$, ainsi

$$\frac{1-x}{x^2+1} \leq \frac{-2x}{x^2} \leq -\frac{2}{x}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on détermine α et que

$$\forall x \in]-\infty, -1[, x \leq \alpha \implies \left|\frac{x^2+x}{x^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Il suffit de choisir α tel que : $x \leq \alpha \implies -\frac{2}{x} \leq \varepsilon$.

Or avec $x < 0$, $-\frac{2}{x} \leq \varepsilon \iff x \leq -\frac{2}{\varepsilon}$. Posons $\alpha = \min\left(-\frac{2}{\varepsilon}, -1\right)$, on obtient

$$\forall x \in]-\infty, -1[, x \leq \alpha \implies \left|\frac{x^2+x}{x^2+1} - 1\right| \leq -\frac{2}{x} \leq \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$.

Exercice 27.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
On suppose que f a une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.

Solution 27.10

Plusieurs solutions peuvent être envisagées. La plus élégante semble être d'utiliser le caractère séquentiel de la limite.

On note ℓ la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $f(x) = f(x + nT)$, de plus

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x + nT) = \ell.$$

Par unicité de la limite de la suite $(f(x + nT))_{n\in\mathbb{N}}$, on a $f(x) = \ell$.

La fonction f est donc constante.

27.3 Limite et relation d'ordre

Exercice 27.11

1. Démontrer à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. Calculer, si possible

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$.

Solution 27.11

1. On cherche une limite lorsque $x \to +\infty$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x > 0$. On a alors

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x \quad \text{d'où} \quad \frac{x-1}{2x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} \leq \frac{1}{2}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - 1/x2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $\frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$ admet une limite lorsque $x \to +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. (a) On cherche une limite lorsque $x \underset{>}{\to} 0$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x \in]0, 1/2[$. On a alors, pour $x \in]0, 1/2[$,

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = 0 \xrightarrow[\substack{x\to0\\>}]{} 0.$$

(b) On cherche une limite lorsque $x \underset{<}{\to} 0$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x \in]-5/7, 0[$. On a alors, pour $x \in]-5/7, 0[$,

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{-1}{2x} \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 0]{} +\infty.$$

(c) On a

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 2} \lfloor x \rfloor = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{>}{\to} 2} 2x = 4,$$

d'où $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{1}{2}$.

(d) On a

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 2} \lfloor x \rfloor = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{<}{\to} 2} 2x = 4,$$

d'où $\lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{1}{4}$.

Exercice 27.12

On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^k}.$$

1. Préciser la valeur $f(x)$ pour $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que f est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
4. En appliquant la définition, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Solution 27.12

Exercice 27.13

Montrer

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 27.13

Nous avons admis ce résultat dans un chapitre précédent. *C'est donc une question de cours!*

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies \left| \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction arctan étant majorée par $\pi/2$, la dernière inégalité revient à écrire

$$\arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Exploitons maintenant la croissance de l'arctangente. Posons $b = \max\left\{ \frac{\pi}{2} - \varepsilon, 0 \right\}$ et $a = \tan(b)$; ainsi $b \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et $\arctan(a) = b$. Finalement, pour $x \geq a$,

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq b = \arctan(a) \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

On a bien montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies \left|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Variante. Si l'on ne veut pas utiliser d'ε, on peut contourner le problème avec l'unicité de la limite et le théorème de la limite monotone (remarquer de nombreux points communs entre la solution précédente et la démonstration du dit théorème).

La fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$; elle admet donc une limite $\ell \leq \frac{\pi}{2}$.

Or

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \tan x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \ell;$$

par compositon de limite, on a

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \arctan(\tan x) = \ell.$$

Or pour x au voisinage à gauche de $\pi/2$, disons $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$\arctan(\tan x) = x \xrightarrow[\substack{x \to \pi/2 \\ <}]{} \frac{\pi}{2}.$$

Par unicité de cette limite, on a donc bien $\ell = \frac{\pi}{2}$.

27.4 Opérations sur les limites

Exercice 27.14

Trouver

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

Solution 27.14

Notons

$$f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$x^x = e^{x \ln x}$ est défini pour $x > 0$, de même pour les autres puissances. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$f(x) = \frac{x^{2x}}{x^{(x^x)}} = x^{2x - x^x} = e^{(2x - x^x)\ln x}.$$

Or

$$2x - x^x = x(2 - x^{x-1}) = x\left(2 - e^{(x-1)\ln x}\right).$$

On a alors

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x-1)\ln x = +\infty$$

$$\text{or} \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - x^x = -\infty.$$

De plus $\lim_{y \to -\infty} e^y = 0$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \lim_{x \to +\infty} e^{(2x - x^x)\ln x} = 0.$$

27.5 Limites usuelles

Rechercher les asymptotes du graphe de chacune des fonctions f suivantes. Esquisser l'allure du graphe au voisinage des asymptotes.

Exercice 27.15

$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

Solution 27.15

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+.$$

La courbe de f admet donc une asympote horizontale $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses). De plus, $f(x) > 0$ pour x au voisinage de $\pm\infty$ (en fait, pour tout $x \neq 2$). La courbe de f est donc au dessus de $\mathcal{A}_1$ au voisinage de $\pm\infty$.

Également,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet donc une asympote verticale d'équation $x = 2$.

Exercice 27.16

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$;

Solution 27.16

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1, 3 \}$. On note C_f sa courbe représentative.

Pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

Or $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$, d'où

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0- \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+.$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est donc asympte à C_f. De plus, *au voisinage* de $-\infty$, C_f est au dessous de $\mathcal{A}_1$; *au voisinage* de $+\infty$, C_f est au dessus de $\mathcal{A}_1$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1, 3 \}$, on a

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x-1)}.$$

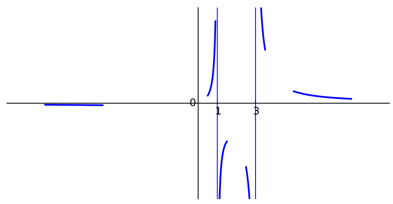
On en déduit les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet deux asymptôtes verticales

$$\mathcal{A}_2 : x = 1 \qquad \mathcal{A}_3 : x = 3.$$



Exercice 27.17

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$;

Solution 27.17

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$. Notons C_f sa courbe représentative.

Pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2} \frac{2}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{2}{1 - \frac{9}{x^2}}.$$

D'où

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale à C_f. De plus, pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) - 2 = \frac{18}{x^2 - 9} > 0.$$

La courbe de f est donc au dessus de $\mathcal{A}_1$ *au voisinage de* $\pm\infty$.

De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$,

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

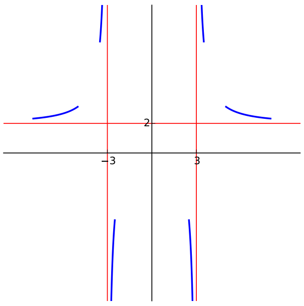
On en déduit les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x\to -3\\ <}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to -3\\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet deux asymptôtes verticales

$$\mathcal{A}_2 : x = -3 \qquad \mathcal{A}_3 : x = 3.$$



Exercice 27.18

$f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$;

Solution 27.18

f est définie sur $\mathbb{R}$.

Deux asymptotes horizontales $y = -1$ et $y = 1$.

Exercice 27.19

$f(x) = \tan x + x$;

Solution 27.19

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Une infinité d'asymptotes verticales : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 27.20

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

Solution 27.20

f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

Une asymptote horizontale : $y = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptot verticale.

Exercice 27.21

$f(x) = |x| \sin \dfrac{1}{x}$;

Solution 27.21

f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

Une asymptote horizontale : $y = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

Exercice 27.22

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x^4}}{x}$;

Solution 27.22

f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptot verticale.

Les limites en $-infty$ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale.

Exercice 27.23

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solution 27.23

f est définie sur $]-1, 1[$.

Deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 27.24

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x) \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Solution 27.24

Exercice 27.25

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x}.$$

Solution 27.25

Ensemble de déf : $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$.

Exercice 27.26

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}{3 + \cos(x)}.$$

Solution 27.26

27.6 Continuité

Exercice 27.27

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant le point a, continue en a avec $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, on ait $f(x) > 0$.

Solution 27.27

On note $I =]\alpha, \beta[$. Dire que f est continue au point a signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Un petit dessin au voisinage de a nous suggère d'appliquer la définition avec $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], |f(x) - f(a)| \leq \frac{f(a)}{2}.$$

Donc, en particulier

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Reste à trouver $\eta > 0$ de manière à avoir $]a-\eta, a+\eta[\subset I \cap [a-\delta, a+\delta]$. On pose $\eta = \min\{\ a-\alpha, \beta-a, \delta\ \}$, on a alors

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, x \in I \text{ et } f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Exercice 27.28

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et $L(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

1. L'ensemble $L(I)$ est-il stable pour l'addition ? pour la multiplication ?

2. Vrai ou Faux ? Si f est un élément de $L(I)$ et si f ne s'annule pas, alors $1/f$ est également dans $L(I)$.

Exercice 27.29

Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue en tout $a \in I$.

Solution 27.29

Exercice 27.30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \\ \mathrm{e}^x & : x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

2. Dans sa copie, Bob affirme

« La fonction $x \mapsto 1$ est continue en 0, donc f est continue en 0. »

Expliquer l'erreur de raisonnement de Bob.

Solution 27.30

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue au point a.

- Premier cas : $a > 0$. Soit x au voisinage de a, par exemple $x \in \left]\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right[$. On peut donc supposer $x > 0$ et on a alors

$$f(x) = x + 1 \xrightarrow[x \to a]{} a + 1 = f(a).$$

Donc f est continue en a.

- Deuxième cas : $a < 0$. Soit x au voisinage de a, par exemple $x \in]-\infty, 0[$. On peut donc supposer $x < 0$ et on a alors

$$f(x) = e^x \xrightarrow[x \to a]{} e^a = f(a).$$

Donc f est continue en a.

- Troisième cas : $a = 0$. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^x = 1 \tag{1}$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x + 1 = 1 \tag{2}$$

On a donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1 = f(0)$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

L'application f est donc également continue en 0.

Conclusion

L'application f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. La fonction f coïncide avec la fonction $\tilde{1} : x \mapsto 1$ au point 0. Mais f et $\tilde{1}$ ne coïncide pas *au voisinage* de 0. La limite (ou la continuité) étant une notion *locale*, on ne peut affirmer avec l'argument de Bob que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \tilde{1} = 1$.

Exercice 27.31

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur continuité.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Solution 27.31

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \lfloor x \rfloor$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$; étudions la continuité de f au point a.

   Premier cas : $a \notin \mathbb{Z}$. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sont continue en a. L'application $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est donc continue au point a en tant que somme de fonction continues en a. De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc continue en $a - \lfloor a \rfloor$. Par composition, f est continue en a

   Deuxième cas : $a \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a \qquad \text{et} \qquad f(a) = 0.$$

   D'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \sqrt{a - a + 1} = 1 \neq f(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = \sqrt{a - a} = 0 = f(a).$$

   L'application f est continue à droite en a mais n'est pas continue à gauche : elle n'est donc pas continue au point a.

Conclusion

L'application f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. L'application g est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$; étudions la continuité de g au point a.

Premier cas : $a \notin \mathbb{Z}$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ étant continue au point a, l'application

$$g : x \mapsto x^2 - \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor^2$$

est continue au point a en tant que combinaison linéaire et produit de fonctions continue au point a.

Deuxième cas : $a \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a \qquad \text{et} \qquad g(a) = a.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) = a - 1 + (a - a + 1)^2 = a = g(a) \qquad \text{et} \ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor \qquad = a + (a - a)^2 = a = g(a).$$

On a donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$: l'application g est continue au point a.

Conclusion

L'application g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.32

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & x > 4 \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. f est elle continue ?

3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 27.33

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est croissante,
- la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Solution 27.33

Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrons que f est continue au point a, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On sait que f est croissante et a est un point intérieur à $]0, +\infty[$, donc f admet des limites à gauche et à droite en a. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x). \tag{1}$$

De même, g est décroissante, donc elle admet des limites à gauche et à droite en a et on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) \geq g(a) \geq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} g(x). \tag{2}$$

Or f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} x = a$, d'où

$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} g(x) = \frac{1}{a} \lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x).$$

De manière analogue,

$$\lim_{\substack{x\to a\\>}} g(x) = \frac{1}{a} \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x).$$

Puisque $a > 0$ et $g(a) = \frac{f(a)}{a}$, la relation (2) implique

$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x). \tag{3}$$

Finalement, d'après (3) et (1), on a

$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = f(a) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x). \tag{4}$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x = -1$.

Exercice 27.34

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

Solution 27.34

Pour $x \neq -1$, on a

$$f(x) = x + 1 \xrightarrow[x\to -1]{} 0.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en posant $f(-1) = 0$.

Exercice 27.35

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

Solution 27.35

Pour $x \neq -1$, on a

$$\lim_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\>}} f(x) = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1.

Exercice 27.36

$f(x) = \dfrac{e^{2(x+1)} - 1}{e^{x+1} - 1}$

Solution 27.36

Pour $x \neq -1$, on a

$$\lim_{x\to -1} e^{x+1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 2.$$

Donc par composition de limite

$$f(x) = \frac{\left(e^{x+1}\right)^2 - 1}{e^{x+1} - 1} = 2.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 2$.

Exercice 27.37

$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$

Solution 27.37

Pour $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-7)}{x+1} = x - 7 \xrightarrow[x\to -1]{} -8.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = -8$.

Exercice 27.38

$f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x + 1}$

Solution 27.38

On a

$$\lim_{x\to -1} x + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Par composition de limite

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 1$.

Exercice 27.39

$f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$

Solution 27.39

Puisque ln est une fonction continue en 2, on a

$$\lim_{x\to -1} \ln(x^2 + 1) = \ln 2 \quad \text{de plus} \quad \lim_{x\to -1} x + 1 = 0.$$

La fonction f n'a donc pas de limite finie au point -1 : elle n'est pas prolongeable par continuité en -1.

Exercice 27.40 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Solution 27.40

Exercice 27.41 (***)

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et en 1 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right),$$

alors f est constante.

Solution 27.41

On peut remarquer tout d'abord que f est paire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f(x).$$

Pour montrer que f est constante (sur $\mathbb{R}$), il suffit de le montrer sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f\left(x^2\right) = f\left(x^4\right) = f\left(x^8\right) = \dots$. Une récurrence immédiate donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x^{2^n}\right).$$

Soit $x \in]-1, 1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0,$$

et puisque f est continue en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{2n}\right) = f(0).$$

La première limite étant trivialement égale à $f(x)$, on obtient finalement

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = f(0).$$

Soit maintenant $x \geq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(x^{1/2^n}\right) = f\left(\left(x^{1/2^n}\right)^{2^n}\right) = f(x).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{1/2^n} = 1$ et f est continue en 1. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la reltaion précédente, on obtient

$$\forall x > 1, f(1) = f(x).$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(0) = f(0)$$

et puisque f est continue en 1, on obtient $f(0) = f(1)$.

Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et paire ; elle est donc constante sur $\mathbb{R}$.

.

27.7 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Exercice 27.42

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$p \cdot f(a) + q \cdot f(b) = (p + q) f(c).$$

Solution 27.42

$y = \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 27.43

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Solution 27.43

Étudions rapidement le cas $n = 2$. On a $f(x_1) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \leq f(x_2)$ et le théorème des valeurs intermédiaire permet de conclure.

Revenons au cas général. Notons $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et notons p et q les indices tels que

$$f(x_p) = \min \left\{ f(x_i) \mid i \in [\![1, n]\!] \right\} \qquad \text{et} \qquad f(x_q) = \max \left\{ f(x_i) \mid i \in [\![1, n]\!] \right\}$$

Alors, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(x_p) \leq f(x_k) \leq f(x_q)$.

$$f(x_p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_p) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_q) = f(x_q)$$

Ainsi λ est compris entre $f(x_p)$ et $f(x_q)$. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et $x_p, x_q \in [0, 1]$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires:

$$\exists c \in [0, 1], f(c) = \lambda.$$

Exercice 27.44

Quel est l'intervalle image par f de I avec $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x \cos x$?

Solution 27.44

Nous allons montrer que $f(I) = \mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$f(2k\pi) = 2k\pi \qquad \text{et} \qquad f((2k + 1)\pi) = -(2k + 1)\pi$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$-2k\pi \leq y \leq 2k\pi.$$

On peut choisir par exemple $k = \lfloor |y|/2\pi \rfloor + 1$. Alors

$$f((2k + 1)\pi) \leq y \leq f(2k\pi),$$

et puisque f est continue sur l'intervalle I, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Conclusion

On a montré

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y,$$

c'est-à-dire $f(I) = \mathbb{R}$.

Exercice 27.45

Montrer qu'une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Solution 27.45

Remarquons que

$$f(c) = c \iff f(c) - c = 0.$$

Définissons la fonction auxiliaire $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Puisque f est à image dans $[0,1]$, on a

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 \leq 0.$$

Donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$ ($g(1) \leq 0 \leq g(0)$). De plus g est continue sur *l'intervalle* $[0,1]$ en tant que différence de deux fonction continue sur $[0,1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in [0,1], g(c) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\exists c \in [0,1], f(c) = c.$$

Exercice 27.46

Soit f et g deux applications continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f(b) = g(a).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution 27.46

Remarquons

$$f(c) = g(c) \iff f(c) - g(c) = 0.$$

Défínnissons alors la fonction auxiliaire

$$h : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array}.$$

Alors h est continue en tant que combinaison linéaire de deux fonctions continue. De plus,

$$h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - f(a) = -h(a).$$

Donc $h(a)$ et $h(b)$ sont de signe opposés et h est continue sur l'*intervalle* $[a,b]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f(c) = g(c).$$

Exercice 27.47

Un randonneur parcourt 10 km en 2 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

On pourra introduire la fonction $d : [1,2] \to \mathbb{R}$ qui au temps t associe le nombre de kilomètres parcourus depuis 1 heure.

Exercice 27.48

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

2. Montrer que f est strictement monotone.

On pourra supposer $f(0) < f(1)$. Le cas $f(0) > f(1)$ est analogue.

Solution 27.48

On effectue la démonstration dans le cas où $f(0) < f(1)$. Le cas $f(0) > f(1)$ est analogue (il suffit de remplacer f par $-f$). Le cas $f(0) = f(1)$ est impossible par injectivité de f.

1. Supposons qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) > f(1)$. On a donc $f(0) < f(1) < f(x)$. Puisque f est continue sur $[0,x]$, le théorème des valeurs intermédiaire assure l'existence d'un $y \in [0,x]$ tel que $f(y) = f(1)$. L'injectivité de f impose alors $y = 1$ ce qui est contradictoire avec $0 < y \leq x < 1$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(1)$.

   De manière analogue, on prouve que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0)$. Finalement,
   $$\forall x \in [0,1], f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

2. On sait que $f(0) < f(1)$. Soit $x, y \in [0,1]$ avec $x < y$. Supposons que $f(x) \geq f(y)$; on a donc $f(0) \leq f(y) \leq f(x) \leq f(1)$.

   Puisque f est continue sur $[0,x]$, il existe $c \in [0,x]$ tel que $f(c) = f(y)$. L'injectivité de f assure que $c = y > x$ ce qui est contradictoire avec $c \in [0,x]$.

   On a donc $f(x) < f(y)$.

Conclusion

L'application f est strictement croissante sur $[0,1]$.

Exercice 27.49

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. L'objectif est d'établir que f est strictement monotone. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas strictement monotone.

1. Justifier qu'il existe $a, b, x, y \in I$ tels que
   $$a < b, \quad f(a) < f(b), \quad x < y, \quad f(x) > f(y).$$

2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
   $$g(t) = f(tx + (1-t)a) - f(ty + (1-t)b)$$
   s'annule.

3. Conclure.

Solution 27.49

Exercice 27.50

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Solution 27.50

La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$; elle y est donc bornée est atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in [0,T]$ tels que $f([0,T]) = [f(a), f(b)]$, en particulier
$$f(a) = \min_{[0,T]} f \qquad \text{et} \qquad f(b) = \max_{[0,T]} f.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - kT \in [0,T]$. En effet,
$$0 \leq x - kT \leq T \iff x - T \leq kT \leq x \iff \frac{x}{T} - 1 \leq k \leq \frac{x}{T};$$

on peut donc choisir $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$. On a alors

$$f(a) \leq f(x) = f(x - kT) \leq f(b).$$

Ce qui montre que f est majorée (sur $\mathbb{R}$) par $f(b)$, minorée (sur $\mathbb{R}$) par $f(a)$ et que ces bornes sont atteintes.

Exercice 27.51

Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles. On suppose

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + m.$$

Solution 27.51

Nous allons introduire une fonction auxiliaire. Pour $x \in [a, b]$, posons $h(x) = f(x) - g(x)$. La fonction h est continue $[a, b]$ en tant que combinaison linéaire de deux fonctions continues. L'image de segment $[a, b]$ par l'application continue h est donc un segment ; en particulier, h atteint son minimum sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$h(c) = \min_{[a,b]} h.$$

Or $f(c) > g(c)$ donc $h(c) > 0$. Posons $m = \frac{f(c)}{2}$, alors

$$\forall x \in [a, b], f(x) - g(x) = h(x) \geq \min_{[a,b]} h = h(c) > m$$

d'où

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + m.$$

Exercice 27.52

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée.

Solution 27.52

Exploitons la définition de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, +\infty[, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Avec $\varepsilon = 1$, nous obtenons un réel A, que nous pouvons supposer positif, tel que

$$\forall x \geq A, \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1.$$

De plus, la fonction f est continue sur le segment $[0, A]$; elle est donc bornée sur $[0, A]$, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [0, A], |f(x)| \leq \mu.$$

Posons $m = \min(-\mu, \ell - 1)$ et $M = max(\mu, \ell + 1)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in [0, A]$ ou $x \in [A, +\infty]$, et dans chaque cas

$$m \leq f(x) \leq M.$$

La fonction f est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

marque Rien ne prouve que f atteind ses bornes, pensez par exemple à la fonction arctan.

Exercice 27.53

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \sup_{t \in [x, x+1]} f(t).$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 27.53

27.8 Continuité uniforme