

## 38.1 SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

## §1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

## Définition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La **somme** de  $U$  et  $V$ , noté  $U + V$ , est l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$



Pour  $w \in E$ ,

$$w \in U + V \iff \exists (u, v) \in U \times V, u + v = w.$$

## Test 2

Posons  $U = \{ 0, 2, 3 \}$  et  $V = \{ 4, 8, 1 \}$ . Ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}$ . Décrire néanmoins en extension l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$

## Théorème 3

*Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $U + V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .*

## Test 4

Montrer le!

**Test 5**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u, v \in E$ . Montrer

$$\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\} = \text{Vect}\{u, v\}.$$

**Remarque**

Il faut bien différencier  $U + V$  de  $U \cup V$ . L'ensemble  $U \cup V$  n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de  $E$  (voir l'exercice ??). Le sous-espace vectoriel  $U + V$  contient  $U \cup V$ , mais il est en général beaucoup plus gros. En fait,  $U + V$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $U$  et  $V$ .

**Exemple 6**

Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$$

Montrer que  $U + V = \mathbb{R}^3$ .

**Test 7**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer les énoncés suivants.

1.  $U + V = V + U$ .
2.  $U \subset U + V$  et  $V \subset U + V$ .
3.  $U + U = U$ .
4. Si  $U \subset V$ , alors  $U + V = V$ .

## §2 Sommes directes

**Définition 8**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme  $U + V$  est dite **somme directe** si

$$\forall (u, v) \in U \times V, u + v = 0 \implies u = v = 0.$$

**Notation**

Lorsque la somme est directe, on utilise la notation spéciale  $U \oplus V$  pour désigner  $U + V$ . Au niveau ensembliste, ce sont les mêmes ensembles. Le symbole  $\oplus$  rappelant seulement que la somme est directe.

Il existe une autre façon de caractériser les sommes directes, souvent très utile.

**Théorème 9**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La somme  $U + V$  est directe.
2.  $U \cap V = \{0\}$ .

3. Tout vecteur  $z$  de la somme  $U + V$  peut s'écrire de manière unique  $z = u + v$  où  $u \in U$  et  $v \in V$ , c'est-à-dire

$$\forall (u, v) \in U \times V, \forall (u', v') \in U \times V, u + v = u' + v' \implies u = u' \text{ et } v = v'.$$

### Exemple 10

Soit  $u, v \in E$  deux vecteurs non colinéaires. Alors, la somme  $\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\}$  est directe. Autrement dit,

$$\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{v\}.$$

## §3 Sous-espaces supplémentaires

### Définition 11

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E = U \oplus V$ .
2.  $E = U + V$  et  $U \cap V = \{0\}$ .
3. Tout vecteur  $z \in E$  se décompose de manière unique dans  $U + V$ :

$$\forall z \in E, \exists!(u, v) \in U \times V, z = u + v.$$

Dans ce cas, on dit que  $U$  et  $V$  sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** dans  $E$ .



La notion de supplémentaire est souvent confondue avec la notion ensembliste de complémentaire qui est très différente. Les différences entre les deux notions sont nombreuses. Tout d'abord, il y a unicité du complémentaire, alors que pour un sous-espace donné, il existe généralement une infinité de supplémentaires différents. Ensuite l'intersection d'un sous-espace avec un supplémentaire n'est pas vide mais contient le vecteur nul (et uniquement celui-là). Par ailleurs, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel. Enfin, la réunion d'un sous-espace et d'un supplémentaire n'est pas égale à tout l'espace, plus subtilement, elle engendre cet espace. De façon intuitive, deux sous-espaces supplémentaires contiennent exactement l'information dont on a besoin pour reconstituer l'espace entier.

### Exemple 12

Soient dans  $\mathbb{R}^3$  les deux parties suivantes:

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \} \quad G = \{ (\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
3. Trouver d'autres supplémentaires pour  $F$  (resp. pour  $G$ ).

**Exemple 13**

Dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les sous-espaces vectoriels formés respectivement des fonctions constantes, et des fonctions valant 0 en 0 sont supplémentaires.

**Test 14**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $E = U \oplus V$  si, et seulement si

$$\begin{aligned} \varphi : U \times V &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Remarque**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$ .

Ce résultat reste vrai en dimension infinie en admettant l'axiome du choix.



En général, ce supplémentaire n'est pas unique.

**Définition 15**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $H$  est un **hyperplan** de  $E$  si il existe une droite vectorielle  $D = \text{Vect} \{ a \}$  telle que

$$E = H \oplus D.$$

## 38.2 PROJECTEURS

### §1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

**Définition 16**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $U$  et  $V$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Chaque vecteur  $z \in E$  peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application  $p : E \rightarrow E$  qui à  $z$  associe  $u$  est le **projecteur vectoriel sur  $U$  parallèlement à  $V$** . On dit également que  $V$  est la **direction** de ce projecteur.

L'application  $q : E \rightarrow E$  qui à  $z$  associe  $v$  est donc le projecteur vectoriel sur  $V$  parallèlement à  $U$ .



Si  $p$  est le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$ , et  $q$  le projecteur sur  $V$  parallèlement à  $U$ , alors

$$\forall z \in E, \quad z = p(z) + q(z) \text{ et } p(z) \in U \text{ et } q(z) \in V.$$

**Test 17**

Pourquoi demande-t-on que la somme  $E = U \oplus V$  soit directe?

**Théorème 18**

Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On note  $p$  le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$ . Alors,

1.  $p$  est un endomorphisme de  $E$ .
2.  $U = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid p(z) = z \}$ .
3.  $V = \ker(p) = \{ z \in E \mid p(z) = 0 \}$ .
4. L'application  $p$  est idempotente :  $p \circ p = p$ .
5.  $q = \text{Id}_E - p$  est le projecteur sur  $V$  parallèlement à  $U$ . On a  $p \circ q = 0$  et  $q \circ p = 0$ .

**Remarque**

Vous aurez peut-être reconnu le contenu du théorème de Thalès : celui-ci veut dire au fond qu'un projecteur (vectorielle) sur une droite est une application linéaire.

**Exemples****Exemple 19**

Avec  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus V$ , où  $U$  est le sous-espace vectoriel formés des fonctions constantes, et  $V$  le sous-espace vectoriel des fonctions valant 0 en 0. Les projecteurs sur  $U$  parallèlement à  $V$  et sur  $V$  parallèlement à  $U$  sont

$$\begin{array}{ccc} p : E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(0)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} q : E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) - f(0)) \end{array}$$

**Exemple 20**

Soit  $U = \text{Vect} \{ (1, 2, -1)^T, (1, 0, 1)^T \}$  et  $V = \text{Vect} \{ (1, -1, -1)^T \}$ . Soit  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ . On considère l'équation linéaire

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ 2\alpha - \gamma = y \\ -\alpha + \beta - \gamma = z \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$\alpha = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6}, \quad \beta = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, \quad \gamma = \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}.$$

Cela prouve que tout vecteur  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de  $U$  et un vecteur de  $V$ . Le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$  est défini par

$$p \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}.$$

**Test 21**

Vérifier le calcul précédent.

## §2 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

### Définition 22

Une application  $p : E \rightarrow E$  est **idempotente** si

$$p \circ p = p.$$

Si  $p$  est linéaire, cela s'écrit également  $p^2 = p$ .

### Définition 23

Une matrice carrée  $A$  est **idempotente** si  $A^2 = A$ .

### Théorème 24

#### Caractérisation des projecteurs

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $p \circ p = p$ . Alors

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$$

et  $p$  est le projecteur vectoriel sur  $\operatorname{Im} p$  parallèlement à  $\ker p$ . On a donc

$$\operatorname{Im} p = \ker(p - \operatorname{Id}_E) \quad E = \ker(p - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(p).$$

Les espaces  $\ker(p - \operatorname{Id}_E)$  et  $\ker(p)$  sont appelés les **sous-espaces propres** de  $p$ .

## 38.3 SYMÉTRIES

### §1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

### Définition 25

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $U$  et  $V$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Chaque vecteur  $z \in E$  peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application  $s : E \rightarrow E$  qui à  $z$  associe  $u - v$  est la **symétrie par rapport à  $U$  parallèlement à  $V$** .

### Proposition 26

Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On note  $s$  la symétrie sur  $U$  parallèlement à  $V$ . Alors,

1. Si  $p$  désigne le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$  et  $q$  le projecteur sur  $V$  parallèlement à  $U$ , alors

$$s = p - q = 2p - \operatorname{Id}_E = \operatorname{Id}_E - 2q;$$

on a également  $p = \frac{1}{2}(s + \operatorname{Id}_E)$ .

2.  $s$  est un automorphisme involutif de  $E$  :

$$s \circ s = \operatorname{Id}_E \quad \text{d'où} \quad s^{-1} = s.$$

On a donc  $\operatorname{Im} s = E$  et  $\ker s = \{0_E\}$ .

$$3. U = \ker(s - \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid s(z) = z \}.$$

$$4. V = \ker(s + \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid s(z) = -z \}.$$

Les espaces  $\ker(s - \text{Id}_E)$  et  $\ker(s + \text{Id}_E)$  sont appelés les **sous-espaces propres** de  $s$ .

## §2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

### Définition 27

Une application  $s : E \rightarrow E$  telle que  $s \circ s = \text{Id}_E$  est appelée **involution**.

Ce qui s'écrit également lorsque  $s$  est linéaire,  $s^2 = \text{Id}_E$ .

### Théorème 28

#### Caractérisation des symétries

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $s \circ s = \text{Id}_E$ . Alors

$$E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$$

et  $s$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $\ker(s - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\ker(s + \text{Id}_E)$ .

## 38.4 SOMMES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

### §1 Caractérisation universelle

Une application linéaire définie sur  $U \oplus V$  est entièrement déterminée par ses restrictions à  $U$  et  $V$ . Autrement dit,

### Théorème 29

#### Caractérisation universelle

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que la somme  $U + V$  est directe.

Soit  $g \in \mathcal{L}(U, F)$  et  $h \in \mathcal{L}(V, F)$ , alors, il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(U \oplus V, F)$  telle que

$$\forall x \in U, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in V, f(x) = h(x).$$

### Exemples 30

Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

1. L'endomorphisme de  $E$  définit par

$$\forall x \in U, p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in V, p(x) = 0$$

est le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$ .

2. L'endomorphisme de  $E$  définit par

$$\forall x \in U, s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in V, s(x) = -x$$

est la symétrie par rapport à  $U$  dans la direction  $V$ .

## §2 Forme géométrique du théorème du rang

### Théorème 31

#### Forme géométrique du théorème du rang

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Soit  $S$  est un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$  alors

$$\begin{aligned} g = f_S^{\text{Im } f} : S &\rightarrow \text{Im } f \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire que tout supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$  est isomorphe à  $\text{Im } f$ .

On dit que  $f$  induit un isomorphisme  $g$  de  $S$  sur  $\text{Im } f$ .



Dans le cas où  $f \in \mathcal{L}(E)$ , il n'y a aucune raison de croire que  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.



### 38.5 SOMMES ET SOMMES DIRECTES DE PLUSIEURS SOUS-ESPACES VECTORIELS

#### Définition 32

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $V_1, \dots, V_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- La **somme** des sous-espaces vectoriels  $V_1, \dots, V_p$  est le sous-espace vectoriel

$$V_1 + \dots + V_p = \{ x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in V_1 \times \dots \times V_p \}.$$

- On dit que les sous-espaces vectoriels  $V_1, \dots, V_p$  sont en **somme directe** lorsque

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in V_1 \times \dots \times V_p, x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = 0_E, \dots, x_p = 0_E.$$

- Lorsque la somme  $V = V_1 + \dots + V_p$  est directe, on écrit

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_p \quad \text{ou} \quad V = \bigoplus_{i=1}^p V_i.$$

#### Définition 33

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que  $E$  est somme directe des sous-espaces vectoriels  $V_1, \dots, V_p$ :

$$E = V_1 \oplus V_2 \oplus V_p. \quad (38.1)$$

Alors tout  $x \in E$  s'écrit de façon unique

$$x = x_1 + \dots + x_p \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_p) \in V_1 \times \dots \times V_p.$$

Nous pouvons poser, pour  $i = 1, \dots, p$

$$\pi_i(x) = x_i.$$

On définit ainsi des endomorphismes  $\pi_1, \dots, \pi_p$  de  $E$ , appelés **projecteurs de  $E$  associés à la décomposition en somme directe  $E = V_1 \oplus V_2 \oplus V_p$** .

## 38.6 AFFINITÉS VECTORIELLES

### Définition 34

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $U$  et  $V$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Chaque vecteur  $x \in E$  peut être écrit de manière unique sous la forme

$$x = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application de  $E$  dans  $E$  qui à  $x$  associe  $u + \alpha v$  est l'**affinité de base  $U$ , de direction  $V$  et de rapport  $\alpha$** .

### Exemple 35

1. L'affinité de base  $U$ , de direction  $V$  et de rapport 0 est le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$ .
2. L'affinité de base  $U$ , de direction  $V$  et de rapport  $-1$  est la symétrie par rapport à  $U$  parallèlement à  $V$ .
3. Une affinité de rapport 1 est l'identité de  $E$ .

### Proposition 36

Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On note  $f$  l'affinité de base  $U$ , de direction  $V$  et de rapport  $\alpha$ . Alors,

1. Si  $p$  désigne le projecteur sur  $U$  parallèlement à  $V$  et  $q$  le projecteur sur  $V$  parallèlement à  $U$ , alors

$$f = p + \alpha q = (1 - \alpha)p + \alpha \text{Id}_E = \text{Id}_E + (\alpha - 1)q.$$

2.  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. Si  $\alpha \neq 0$ ,  $f$  est un automorphisme de  $E$ . Sa réciproque est l'affinité de base  $U$ , de direction  $V$  et de rapport  $1/\alpha$ .
4. Si  $\alpha \neq 1$ , on a

$$U = \ker(f - \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid f(z) = z \}$$

$$\text{et } V = \ker(f - \alpha \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid f(z) = \alpha z \}.$$