

## Relations de comparaisons sur les suites

# Aperçu

1. Les relations de comparaisons
2. Calculs avec les relations de comparaisons
3. Cours sous forme d'exercices
4. Un peu d'informatique

## **1. Les relations de comparaisons**

1.1 Définitions

1.2 Caractérisations des relations de comparaisons

1.3 Comparaison des suites de référence

1.4 Calculs avec la notation de Landau

## **2. Calculs avec les relations de comparaisons**

## **3. Cours sous forme d'exercices**

## **4. Un peu d'informatique**

## 1. Les relations de comparaisons

### 1.1 Définitions

1.2 Caractérisations des relations de comparaisons

1.3 Comparaison des suites de référence

1.4 Calculs avec la notation de Landau

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

## 3. Cours sous forme d'exercices

## 4. Un peu d'informatique

## D 1

Soient  $u = (u_n)$  et  $v = (v_n)$  deux suites numériques.

- ▶ On dit que la suite  $(u_n)$  est **dominé** par la suite  $(v_n)$  lorsqu'il existe un entier  $n_0$  et un réel  $k$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq k|v_n|.$$

On écrit  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ , qui se lit « $u_n$  est un grand O de  $v_n$ ».

- ▶ On dit que la suite  $(u_n)$  est **négligeable** devant la suite  $(v_n)$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On écrit  $u_n = o(v_n)$ , qui se lit « $u_n$  est un petit O de  $v_n$ ».

- ▶ On dit que la suite  $(u_n)$  est **équivalente** à la suite  $(v_n)$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On écrit  $u_n \sim v_n$ , qui se lit « $u_n$  est équivalente à  $v_n$ ».

2

*Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes si, et seulement si*

$$u_n - v_n = o(v_n).$$

On peut aussi écrire  $u_n = v_n + o(v_n)$ .

N

On note  $\mathcal{O}(v)$  ou  $\mathcal{O}(v_n)$  l'ensemble des suites dominées par la suite  $(v_n)$ . Cette notation est celle de Landau. Pour exprimer cette relation, on devrait écrire  $u \in \mathcal{O}(v)$ . En fait, l'usage est d'écrire abusivement  $u = \mathcal{O}(v)$  ou  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ . On doit lire «  $u_n$  est grand  $\mathcal{O}$  de  $v_n$  » et non «  $u_n$  égale grand  $\mathcal{O}$  de  $v_n$  ». Ces notations traduisent une *appartenance* et non une égalité. Par exemple  $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$  et  $n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$  mais  $n^2 \neq n^2 + 1$ .

N

On note  $o(v)$  ou  $o(v_n)$  l'ensemble des suites négligeables devant la suite  $(v_n)$ . Cette notation est encore une notation de Landau. Là encore, au lieu d'écrire  $u \in o(v)$ , on écrit abusivement  $u = o(v)$  ou  $u_n = o(v_n)$ . On doit lire «  $u_n$  est petit  $o$  de  $v_n$  ».

**E 3**

1. La suite  $(2n^2 - 3n + 4)$  est dominée par la suite  $(n^2)$  car pour  $n \geq 1$ ,

$$|2n^2 - 3n + 4| \leq 2|n^2| + 3|n| + 4 \leq 9n^2.$$

2. Si à partir d'un certain rang on a  $|u_n| \leq |v_n|$ , alors  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

⚠ La réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent.

3. La relation  $u_n = \mathcal{O}(1)$  signifie que la suite  $(u_n)$  est bornée.

Plus généralement, si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  et si la suite  $(v_n)$  est bornée, alors  $(u_n)$  est bornée.

4. Pour toute suite  $(u_n)$  et tout scalaire  $\lambda \neq 0$ , on a  $u_n = \mathcal{O}(\lambda u_n)$ .

5. Si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  et  $(v_n)$  converge vers 0, alors  $(u_n)$  converge vers 0.

**E 4**

1. La relation  $u_n = o(1)$  signifie que  $(u_n)$  tend vers 0.

Plus généralement, si  $u_n = o(v_n)$  et si la suite  $(v_n)$  est bornée, alors  $(u_n)$  converge vers 0.

2. Si  $(\omega_n)$  est une suite qui tend vers 0, alors  $(\omega_n u_n) = o(u_n)$ .
3. Pour toutes suites  $(u_n), (v_n)$  et tout scalaire  $\lambda \neq 0$ , la relation  $u_n = o(\lambda v_n)$  est équivalente à  $u_n = o(v_n)$ .

**R**

On notera que la relation  $u_n \sim v_n$  ne signifie nullement que la différence  $u_n - v_n$  tende vers 0 ; cette différence peut même être non bornée, comme le montre l'exemple  $n^2 + n \sim n^2$ .

## 1. Les relations de comparaisons

1.1 Définitions

1.2 Caractérisations des relations de comparaisons

1.3 Comparaison des suites de référence

1.4 Calculs avec la notation de Landau

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

## 3. Cours sous forme d'exercices

## 4. Un peu d'informatique

P 5

## Caractérisation de la relation $\mathcal{O}$

On a  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  si et seulement si il existe une suite  $(\mu_n)$  et un rang  $n_0$  tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \quad \text{et} \quad (\mu_n) \text{ est bornée.}$$

## P 6 Caractérisation de la relation $o$

On a  $u_n = o(v_n)$  si, et seulement si il existe une suite  $(\mu_n)$  et un rang  $n_0$  tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0.$$

## Caractérisation de la relation $\sim$

On a  $u_n \sim v_n$  si et seulement si il existe une suite  $(\mu_n)$  et un rang  $n_0$  tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_n \mu_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 1.$$

---

**E 8**

1.  $n = o(n^2)$  car  $n = \frac{1}{n}n^2$  et  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

On a donc également  $n^2 + n \sim n^2$  car  $n^2 + n - n^2 = n = o(n^2)$ .

2.  $e^n = o(e^{3n})$  car  $e^n = e^{-2n}e^{3n}$  et  $e^{-2n} \rightarrow 0$ .

3. On a  $3n^2 + 3n - 4 = o(n^3)$  car  $3n^2 + 3n - 4 = n^3 \left( \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} \right)$  et  $\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} \rightarrow 0$ .

4.  $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

5.  $\frac{1}{(n+1)!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$ .

---

Lorsque  $(v_n)$  ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), la comparaison se lit sur le rapport  $u_n/v_n$ .

T 9

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.

1. On a  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  est bornée.
2. On a  $u_n = o(v_n)$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  tend vers 0.
3. On a  $u_n \sim v_n$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  tend vers 1.

## 1. Les relations de comparaisons

1.1 Définitions

1.2 Caractérisations des relations de comparaisons

### 1.3 Comparaison des suites de référence

1.4 Calculs avec la notation de Landau

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

## 3. Cours sous forme d'exercices

## 4. Un peu d'informatique

**P 10** Si la suite  $(v_n)$  tend vers  $\pm\infty$  et si la suite  $(u_n)$  est bornée, alors  $u_n = o(v_n)$ .

**P 11** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors

$$a^n = o(b^n) \iff |a| < |b| \text{ ou } a = b = 0;$$

$$n^a = o(n^b) \iff a < b;$$

$$(\ln n)^a = o((\ln n)^b) \iff a < b.$$

**P 12** Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $a > 1$ .

1.  $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ .
2.  $n^\beta = o(a^n)$ . En particulier  $n^\beta = o(e^{\alpha n})$ .
3.  $a^n = o(n!)$ .
4.  $n! = o(n^n)$ .

## 1. Les relations de comparaisons

1.1 Définitions

1.2 Caractérisations des relations de comparaisons

1.3 Comparaison des suites de référence

**1.4 Calculs avec la notation de Landau**

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

## 3. Cours sous forme d'exercices

## 4. Un peu d'informatique

**D 13** Soit  $(u_n), (v_n), (w_n)$  trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$$

signifie  $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$ .

**E 14** Avec  $u_n = n^3 + n$  et  $v_n = n^3$ , on obtient

$$n^3 + n = n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

car  $u_n - v_n = n = \mathcal{O}(n^2)$ .

**D 15** Soit  $(u_n), (v_n), (w_n)$  trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + o(w_n)$$

signifie  $u_n - v_n = o(w_n)$ .

**E 16** Avec  $u_n = n^3 + n$  et  $v_n = n^3$ , on obtient

$$n^3 + n = n^3 + o(n^2),$$

car  $u_n - v_n = n = o(n^2)$ .

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

- 2.1 Propriétés des relations de comparaisons
- 2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence
- 2.3 Opérations sur les équivalents
- 2.4 Suites extraites et relations de comparaisons
- 2.5 Équivalence par encadrement
- 2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

2.1 Propriétés des relations de comparaisons

2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

2.3 Opérations sur les équivalents

2.4 Suites extraites et relations de comparaisons

2.5 Équivalence par encadrement

2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

P 17

1. La relation  $\mathcal{O}$  est réflexive.

$$u_n = \mathcal{O}(u_n).$$

2. La relation  $\mathcal{O}$  est transitive.

$$\left. \begin{array}{l} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ v_n = \mathcal{O}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = \mathcal{O}(w_n).$$

P 18

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  quatre suites.

1. Si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  et  $v_n = \mathcal{O}(a_n)$  alors  $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$ .
2. Si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  et  $v_n = \mathcal{O}(b_n)$  alors  $u_n v_n = \mathcal{O}(a_n b_n)$ .
3. Si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$ .

R

On peut résumer les résultats sous la forme

$$\mathcal{O}(a_n) + \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n), \quad \mathcal{O}(a_n) \mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(a_n b_n), \quad \lambda \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n).$$

**P 19** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  quatre suites.

1. Si  $u_n = o(a_n)$  et  $v_n = o(a_n)$  alors  $u_n + v_n = o(a_n)$ .
2. Si  $u_n = o(a_n)$  et  $v_n = o(b_n)$  alors  $u_n v_n = o(a_n b_n)$ .
3. Si  $u_n = o(a_n)$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u_n = o(a_n)$ .

On peut résumer les résultats sous la forme

$$o(a_n) + o(a_n) = o(a_n), \quad o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n), \quad \lambda o(a_n) = o(a_n).$$

20

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$  des réels tels que  $a_k \neq 0$ . Alors

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k.$$

En effet,

$$1 = o(n^k), \quad n = o(n^k), \quad \dots \quad n^{k-1} = o(n^k)$$

$$\text{donc } a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} = o(a_k n^k).$$

$$\text{Par exemple } 2n + 1 \sim 2n \text{ ou } 8n^3 - 200n^2 + 9n - 3 \sim 8n^3.$$

21

Soient  $b_1, b_2, \dots, b_k$  des réels tels que  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$ . Alors

$$b_1^n + b_2^n + \dots + b_k^n \sim b_k^n.$$

En effet,

$$b_1^n = o(b_k^n), \quad b_2^n = o(b_k^n), \quad \dots \quad b_{k-1}^n = o(b_k^n)$$

donc  $b_1^n + b_2^n + \dots + b_{k-1}^n = o(b_k^n)$ .

Par exemple  $2^n + 5^n \sim 5^n$ .

22

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  des réels tels que  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ . Alors

$$\frac{1}{n^{\alpha_1}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} \sim \frac{1}{n^{\alpha_1}}.$$

En effet, pour tout  $\alpha > \alpha_1$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$ , donc  $\frac{1}{n^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$ .

Par exemple  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{25}} \sim \frac{1}{n}$ .

23

Si  $u_n \rightarrow +\infty$  et si  $(v_n)$  est bornée, alors  $u_n + v_n \sim u_n$ .

**P 24** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$ ,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  des suites.

1. Si  $u_n = o(v_n)$  alors  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .
2. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = \mathcal{O}(w_n)$  alors  $u_n = o(w_n)$ .
3. Si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$  alors  $u_n = o(w_n)$ .
4. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$  alors  $u_n = o(w_n)$ .

Autrement dit, la relation  $o$  est transitive.

5. Si  $u_n = o(a_n)$  et  $v_n = \mathcal{O}(b_n)$  alors  $u_n v_n = o(a_n b_n)$ .
6. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  alors  $u_n = \mathcal{O}(\lambda a_n)$  et  $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$ .

Si  $u_n = o(a_n)$  alors  $u_n = o(\lambda a_n)$  et  $\lambda u_n = o(a_n)$ .

T 25

*Dans l'ensemble des suites réelles, la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.*

1. *La relation  $\sim$  est réflexive*

$$u_n \sim u_n.$$

2. *La relation  $\sim$  est symétrique*

$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n.$$

3. *La relation  $\sim$  est transitive*

$$u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \implies u_n \sim w_n.$$

T 26

Soient  $(u_n), (v_n), (w_n)$  trois suites.

1. Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .
2. Si  $u_n \sim v_n$  et  $v_n = \mathcal{O}(w_n)$  alors  $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ .
3. Si  $u_n \sim v_n$  et  $v_n = o(w_n)$  alors  $u_n = o(w_n)$ .
4. Si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  et  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ .
5. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n = o(w_n)$ .

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

2.1 Propriétés des relations de comparaisons

2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

2.3 Opérations sur les équivalents

2.4 Suites extraites et relations de comparaisons

2.5 Équivalence par encadrement

2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

T 27

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles. On suppose que  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(v_n).$$

T 28 Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose que  $u_n \sim v_n$ , et que  $(v_n)$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors  $(u_n)$  tend aussi vers  $\ell$ .

La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3$ .

**T 28** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose que  $u_n \sim v_n$ , et que  $(v_n)$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors  $(u_n)$  tend aussi vers  $\ell$ .

La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3$ .

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\ell \neq 0$ . Alors

$$u_n \sim \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Ce résultat bien sûr totalement est faux avec  $\ell = 0$ . En effet,  $u_n \sim 0$  signifie que la suite  $(u_n)$  est nulle à partir d'un certain rang.

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

2.1 Propriétés des relations de comparaisons

2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

### 2.3 Opérations sur les équivalents

2.4 Suites extraites et relations de comparaisons

2.5 Équivalence par encadrement

2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

T 29

## Règles de calcul

Soient  $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$  quatre suites réelles. On suppose  $u_n \sim v_n$  et  $a_n \sim b_n$ , alors

1.  $u_n a_n \sim v_n b_n$ ,
2. Si  $(b_n)$  est non nulle à partir d'un certain rang, alors  $(a_n)$  également et

$$\frac{u_n}{a_n} \sim \frac{v_n}{b_n}.$$

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $(u_n)$  est à valeurs  $> 0$  à partir d'un certain rang, alors  $(v_n)$  également et

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Par contre les relations  $u_n \sim v_n$  et  $a_n \sim b_n$  n'entraînent pas  $u_n + a_n \sim v_n + b_n$  comme le montre l'exemple,

$$u_n = 1 \quad v_n = 1 \quad a_n = -1 + \frac{1}{n} \quad b_n = -1 + \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}.$$

La propriété

$$u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Revient à composer (à gauche) chaque membre par l'application  $x \mapsto x^\alpha$ .

Ce résultat a un caractère exceptionnel car la relation d'équivalence n'est en général pas compatible avec la composition. Par exemple, on a

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} \sim 2n\pi$$

mais les suites de termes généraux

$$\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sin(2n\pi) = 0$$

ne sont pas équivalentes.

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

2.1 Propriétés des relations de comparaisons

2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

2.3 Opérations sur les équivalents

### 2.4 Suites extraites et relations de comparaisons

2.5 Équivalence par encadrement

2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

**P 30** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante.

1. Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$ .
2. Si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ , alors  $u_{\varphi(n)} = \mathcal{O}(v_{\varphi(n)})$ .
3. Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$ .

En particulier, si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_{n+1} \sim v_{n+1}$ .

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

2.1 Propriétés des relations de comparaisons

2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

2.3 Opérations sur les équivalents

2.4 Suites extraites et relations de comparaisons

### 2.5 Équivalence par encadrement

2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

P 31

## Équivalence par encadrement

Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(u_n)$  trois suites à valeurs réelles. On suppose que  $a_n \sim b_n$  et qu'à partir d'un certain rang

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Alors ces trois suites sont équivalentes:

$$u_n \sim a_n \quad \text{et} \quad u_n \sim b_n.$$

1. Les relations de comparaisons

## 2. Calculs avec les relations de comparaisons

- 2.1 Propriétés des relations de comparaisons
- 2.2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence
- 2.3 Opérations sur les équivalents
- 2.4 Suites extraites et relations de comparaisons
- 2.5 Équivalence par encadrement
- 2.6 Quelques équivalents classiques

3. Cours sous forme d'exercices

4. Un peu d'informatique

P 32 Soit  $(u_n)$  une suite réelle de limite nulle. Alors <sup>a</sup>

1.  $\sin(u_n) \sim u_n,$
2.  $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2},$
3.  $\tan(u_n) \sim u_n,$
4.  $\ln(1 + u_n) \sim u_n,$
5.  $e^{u_n} - 1 \sim u_n,$
6.  $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2}u_n.$



<sup>a</sup> Ces équivalents sont généralement faux sans l'hypothèse  $u_n \rightarrow 0.$

P 33 Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

E 34 Étudier la limite de

$$a_n = \frac{(n^3 + 9) \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n} - 5n^2 + \cos\left(\frac{n}{3}\pi\right)}.$$

E 35 Trouver un équivalent simple de

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln(1 + 1/n^2)}{\sqrt{\sin(1/n)}} (n + 42).$$

1. Les relations de comparaisons
2. Calculs avec les relations de comparaisons
3. Cours sous forme d'exercices
4. Un peu d'informatique

**T 36** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.

1. On a  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  est bornée.
2. On a  $u_n = o(v_n)$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  tend vers 0.
3. On a  $u_n \sim v_n$  si, et seulement si la suite  $(u_n/v_n)$  tend vers 1.

1. Montrer que  $3n^2 - 5n + 6 = o(5n^3)$ .
2. Montrer que  $2n^2 - 3n + 4 = O(n^2)$ .
3. Montrer que  $4n^3 - 5n^2 + 8n - 9 \sim 4n^3 + n^2 - 2$ .
4. Montrer que  $3^n + n^2 2^n \sim 3^n$ .
5. Montrer

$$\sqrt{4n^2 + 1} = \mathcal{O}(n), \quad \sqrt{4n^2 + 1} = o(n^2), \quad \sqrt{4n^2 + 1} \sim 2n.$$

6. La relation  $\mathcal{O}$  est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
7. La relation  $o$  est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
8. La relation  $\sim$  est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
9. Montrer que si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = O(v_n)$ . La réciproque est-elle vraie?
10. Montrer que si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n = O(v_n)$ . La réciproque est-elle vraie?
11. Montrer que si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  et  $v_n = \mathcal{O}(a_n)$  alors  $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$ .
12. Montrer que si  $u_n = o(a_n)$  et  $v_n = o(a_n)$  alors  $u_n + v_n = o(a_n)$ .
13. Montrer que si  $u_n = \mathcal{O}(a_n)$  et  $v_n = o(b_n)$  alors  $u_n v_n = o(a_n b_n)$ .

14. Classer les suites suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{n^2} & n^n & \sqrt{n} & n! & 0.5^n & 8n^2 & 23n \ln(n) \\ \frac{1}{n} & 2e^n & 9n^5 & 4321 \ln(n) & \frac{1}{\sqrt{n}} & 42n & 10^n & \ln(n)^3 \end{array}$$



15. Montrer que si  $v_n = o(u_n)$ , alors  $u_n + v_n \sim u_n$ .

16. Utiliser la propriété précédente pour montrer que

$$8n^5 - n^2 + 1000n \sim 8n^5$$

$$0.5^n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{5}{n} - \frac{18}{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$n! - n^5 + 10^n \sim n!$$

17. On suppose que  $u_n \sim v_n$  et que  $(v_n)$  admet une limite  $\ell$  (finie ou infinie). Montrer que  $(u_n)$  tend aussi vers  $\ell$ .
18. On suppose que  $a_n \sim b_n$  et que  $u_n \sim v_n$ . Montrer

$$a_n u_n \sim b_n v_n \quad \frac{a_n}{u_n} \sim \frac{b_n}{v_n}.$$

19. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $u_n \sim v_n$  et que ces deux suites sont à valeurs réelles strictement positives. Montrer que

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

20. Montrer sur un contre exemple que  $a_n \sim b_n$  et  $u_n \sim v_n$  n'entraîne pas  $a_n + u_n \sim b_n + v_n$  en général.
21. Déterminer un «équivalent simple» des suites suivantes:

$$u_n = \frac{3n^3 - e^n + 28n \ln(n)}{n! - 10^n + n^{34}} \quad v_n = (3n^2 - 2n + 5) \frac{2^n - 3^n + 5^n}{5n^2 + n \sin(n) - 23}.$$

1. Les relations de comparaisons
  2. Calculs avec les relations de comparaisons
  3. Cours sous forme d'exercices
- 4. Un peu d'informatique**
- 4.1 Les relations  $\Omega$  et  $\Theta$

1. Les relations de comparaisons
  2. Calculs avec les relations de comparaisons
  3. Cours sous forme d'exercices
- 4. Un peu d'informatique**
- 4.1 Les relations  $\Omega$  et  $\Theta$

Les relations  $\Omega$  et  $\Theta$  ne sont pas au programme de mathématiques.

Elle sont toutefois utilisées en informatique. Dans ce cas, on utilise plutôt la notation fonctionnelle pour les suites ( $U(n)$  au lieu de  $u_n$ ) et les suites sont le plus souvent à valeurs strictement positives.

D 38 Étant données deux fonctions  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow ]0, +\infty[$ , la relation

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

signifie qu'il existe deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

On dit que  $g(n)$  est une **borne asymptotiquement approchée** de  $f(n)$  ou que  $g(n)$  et  $f(n)$  sont semblables.

Cette relation est parfois notée  $f(n) \asymp g(n)$ .

E 39

1.  $4n^3 - 2n^2 + 3 = \Theta(n^3)$ .
2.  $3n^2 - 2n \ln n = \Theta(n^2)$ .
3.  $\frac{1}{8}n \ln n + 4n = \Theta(n \ln n)$ .

**P 40** *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1.  $f(n) = \Theta(g(n))$ .
2.  $g(n) = \Theta(f(n))$ .
3.  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  et  $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ .

D 41 Étant données deux fonctions  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow ]0, +\infty[$ , la relation

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

signifie qu'il existe une constante  $c > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq cg(n) \leq f(n).$$

On dit que  $g(n)$  est un **minorant asymptotique** de  $f(n)$ .

Cela revient à dire que  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ .