♫ 15 Relations de comparaisons sur les suites

Exercice 15.1 (*)

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = \ln n, \quad b_n = e^n, \quad c_n = (\ln n)^{2025}, \quad d_n = n^{0.1}, \quad e_n = 5^n,$$
$$f_n = 2^n, \quad g_n = n^{10}, \quad h_n = \sqrt{\ln n}, \quad i_n = n!.$$

Exercice 15.2 (***)

Vrai ou Faux ?

1. $e^n \sim e^{n+1}$.

2. $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

3. Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

4. ☕ Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 15.5 (***)

Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = n^n, \quad b_n = n^{\ln(n)}, \quad c_n = e^{n^2}, \quad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Exercice 15.6 (**)

Pour chaque paire de suites (u_n) et (v_n) ci-dessous, A-t-on $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$ ou $u_n \sim v_n$?

1. $u_n = (n^2 - n)/2$ et $v_n = 6n$.

2. $u_n = n + 2\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.

3. $u_n = n \ln n$ et $v_n = n\sqrt{n}/2$.

4. $u_n = n + \ln n$ et $v_n = \sqrt{n}$.

5. $u_n = 2(\ln n)^2$ et $v_n = \ln(n) + 1$.

6. $u_n = 4n \ln n + n$ et $v_n = \left(n^2 - n\right)/2$.

Exercice 15.7 (**)

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = (1000)2^n + 4^n$.

2. $u_n = n + n \ln n + \sqrt{n}$.

3. $u_n = \ln\left(n^{20}\right) + (\ln n)^{10}$.

4. $u_n = (0.99)^n + n^{100}$.

Exercice 15.8 (**)

Déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{2^n}$;

2. $b_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{10^{32}}{n^2}$;

3. $c_n = n^{-1/2} + 1$;

4. $d_n = \ln n - \sqrt{n} + (-1)^n$;

5. $e_n = 10^n + n!$;

6. $f_n = \dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{n!}$;

7. $g_n = n! + n^{\sqrt{n}} + n^n$;

8. $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^k}$;

9. $i_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

10. $j_n = \ln(n+32)$.

Exercice 15.10 (**)

Déterminer un équivalent simple de

1. $u_n = \dfrac{100^n + 3(n!)}{2(n!) + 1000^n}$,

2. $v_n = \dfrac{n! + 2^n}{3^n + n^{30}}$,

3. $w_n = \dfrac{n^3 + n! + 10^n}{(n+2)! + 100^n}$,

4. $t_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n+3} + 1000^n}$,

et en déduire leurs limites.

Exercice 15.11 (***)

Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = n^{1/n} - 1$;

2. $u_n = \dfrac{1 + \sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$;

3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$;

4. $u_n = (n + 3\ln n)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$;

5. $u_n = \dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$;

6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 15.12 (***)

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.

2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\tan \frac{1}{n}}$.

4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$.

5. $u_n = n \sin \dfrac{1}{n^2}$.

6. $u_n = \dfrac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\sin \frac{1}{n}} - 1}{\left(\tan \frac{1}{n}\right)^{\tan \frac{1}{n}} - 1}$.

Exercice 15.13 (***)

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{5^n - n^4}{n!}$;

2. $u_n = n \sin \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

3. $u_n = \left(\mathrm{e}^{1/n}\right)^{n \ln(\cos(1/n))}$;

4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$;

5. $u_n = n\left(\sqrt{1 + \sin(1/n)} - \cos(1/n)\right)$;

6. $u_n = n^{2^{\frac{\sin n}{n}}}$.

Exercice 15.18 (****)

Soient u et v deux suites de réels strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.

Exercice 15.20 (****)

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. Déduire un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 15.21 (***)

Montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

Exercice 15.22 (****)

Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \mathrm{e}^{-n} \operatorname{ch}^4\left(\sqrt[4]{n^4+1}\right)$.

Exercice 15.23 (*****)

Soit $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$. Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 15.24 (*****)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par

$$u_0 > 0$$
$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

1. Prouver que $\left(u_n\right)$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Déterminer w_n, calculer de deux façons différentes $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$, déduire $\lim_{n\to+\infty} nu_n^2$, puis un équivalent de u_n.

Exercice 15.25 (*****)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

1. Étudier la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $u_n = o(n)$.

4. Donner un équivalent simple de (u_n).

5. Étudier $\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 15.29 (****)

Soit $T : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \mathcal{O}(n) \quad [n \to +\infty].$$

Montrer que $T(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$.