Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le vendredi 13 septembre 2024

Exercice 1 *Quelques propriétés de la partie entière*

On rappelle que, pour tout réel x, il existe un entier relatif unique $\lfloor x \rfloor$, appelé **partie entière** de x, tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Parmi les relations suivantes :

$$x > n, \quad \lfloor x \rfloor > n, \quad \lfloor x \rfloor \geq n, \quad x \geq n,$$

choisir tous les couples (R, R') de relations telles que l'implication $\left(R \implies R'\right)$ soit vraie. (On pourra tracer un diagramme.)

2. Même problème avec :

$$x \leq n, \quad \lfloor x \rfloor \leq n, \quad \lfloor x \rfloor < n, \quad x < n.$$

3. Même problème avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x > y, \quad \lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor, \quad \lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor, \quad x \geq y.$$

4. y étant un réel strictement positif, on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \left\lfloor \frac{1}{y} \lfloor xy \rfloor \right\rfloor$$

(a) Démontrer l'inégalité $f(x, y) \leq \lfloor x \rfloor$.

(b) Démontrer l'égalité $f(x, y) = \lfloor x \rfloor$ si y est entier.

5. y étant un réel strictement supérieur à 1, on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x, y) = \left\lfloor \frac{1}{\lfloor y \rfloor} \lfloor xy \rfloor \right\rfloor.$$

Démontrer l'inégalité $g(x, y) \geq \lfloor x \rfloor$ si x est positif.

6. Déterminer un couple (x, y) et un couple (x', y') tels que :

$$f(x, y) < \lfloor x \rfloor < g(x, y),$$
$$x' < 0, \quad f(x', y') < \lfloor x' \rfloor, \quad g(x', y') < \lfloor x' \rfloor.$$

7. Si x est réel et a, b, c trois entiers strictement positifs, démontrer l'égalité

$$\left\lfloor \frac{x}{abc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{c} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor.$$

8. Tracer le graphe des applications qui associent successivement à x les nombres

$$\delta(x) = \left\lfloor \frac{1}{x^2 + 1} \right\rfloor, \qquad \omega(x) = \left\lfloor \frac{x}{x^2 + 1} \right\rfloor.$$