

RELATIONS BINAIRES SUR UN ENSEMBLE

Nous allons considérer des propriétés $\mathcal{R}(x, y)$ mettant en jeu *deux* objets inconnus x et y , par exemple $x < y$, $x \in y$, $x \subset y$, $x \equiv y \pmod{11}$, $y = f(x)$... Nous appellerons ces propriétés des **relations binaires**.

11.1 PROPRIÉTÉS D'UNE RELATION

Les relations binaires les plus utiles en mathématiques portent sur des éléments x, y d'un même ensemble E . On parle alors de **relation binaire sur E** . Pour une relation binaire $\mathcal{R}(x, y)$ sur un ensemble E , l'usage veut que l'on emploie très souvent la notation infixe $x\mathcal{R}y$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$, ce que nous ferons désormais.

Définition 1

Soit E un ensemble. Définir une **relation binaire** \mathcal{R} dans E , c'est se donner une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$. On écrit alors $x\mathcal{R}y$ pour exprimer que $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Dans ce cas, on dit que x **est en relation avec** y . L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est appelé le **graphe** de la relation \mathcal{R} .

Une relation binaire est donc une application $E \times E \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$. Dans la

$$(x, y) \mapsto x\mathcal{R}y$$

suite, on parlera simplement de **relation** dans un ensemble E .

Définition 2

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que

- \mathcal{R} est **réflexive** si

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$

- \mathcal{R} est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x;$$

- \mathcal{R} est **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y;$$

- \mathcal{R} est **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemples 3

1. La relation \leq sur \mathbb{R} est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. La relation \subset sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
3. Dans l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, la relation en x et y

$$x\mathcal{R}y \iff y - x \in 5\mathbb{Z}$$

est la relation de congruence modulo 5. Cette relation est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.

4. Dans l'ensemble des parties de \mathbb{N} à trois éléments, la relation \mathcal{R} définie par

$$A\mathcal{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$$

est réflexive et symétrique, non antisymétrique, non transitive.

5. Sur tout ensemble E , la relation d'égalité $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On peut d'ailleurs vérifier que c'est la seule.
6. Soient \mathcal{R} une relation sur un ensemble E et A une partie de E . En convenant que $x\mathcal{R}_A y$ signifie $x\mathcal{R}y$, nous définissons une relation \mathcal{R}_A sur A qui est dite **induite** par \mathcal{R} . Nous constatons que si \mathcal{R} est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), il en est de même pour \mathcal{R}_A . La réciproque n'est pas vraie.

11.2 RELATION D'ORDRE

§1 Définitions

Définition 4

- Une relation binaire \leq sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- On dit que (E, \leq) est un **ensemble ordonné**.
- Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** si

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

- On dit que \leq est un **ordre total** sur E si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

- Si \leq n'est pas total, c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables, on dit que \leq est un **ordre partiel** sur E .

\leq se lit « précède » ou « inférieur ou égal à ».

Exemple 5

Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ l'ordre usuel, \leq , est un ordre total.

Exemple 6

Soit \mathcal{E} un ensemble d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans \mathcal{E} . En effet, elle est réflexive (pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $A \subset A$) anti-symétrique (c'est le principe de double inclusion) et transitive ($A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$). C'est pour cette raison qu'on écrit, de façon abrégée,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

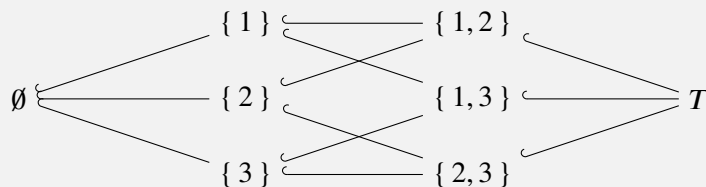
au lieu d'écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ et } \dots$$

Par exemple, notons T l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On pourra représenter l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(T)$, c'est-à-dire sur l'ensemble d'ensembles

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, T\},$$

par le diagramme suivant.



On peut y lire que $\{2\} \subset \{2, 3\}$ car un trait va de gauche à droite, de $\{2\}$ vers $\{2, 3\}$; de même, $\{2, 3\} \subset T$. On y lit aussi aisément que $\{2\} \subset T$, car une succession de traits permet de joindre $\{2\}$ à T en allant constamment de la gauche vers la droite. Pour la raison inverse, on peut y lire que $\{1\} \not\subset \{2, 3\}$ et $\{2, 3\} \not\subset \{1\}$: l'ordre n'est donc pas total.

Exemple 7

Soit $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < a \leq b \leq c\}$. On définit une relation d'ordre sur E par

$$(a, b, c) \leq (a', b', c') \iff a \leq a' \text{ et } b \leq b' \text{ et } c \leq c'.$$

Autrement dit, E est un ensemble de boîtes et on écrit $(a, b, c) \leq (a', b', c')$ si la boîte (a', b', c') peut contenir la boîte (a, b, c) . La relation \leq est réflexive car pour tout $(a, b, c) \in E$,

$$a \leq a \text{ et } b \leq b \text{ et } c \leq c,$$

c'est-à-dire $(a, b, c) \leq (a, b, c)$. La relation \leq est antisymétrique car pour tout $(a, b, c), (a', b', c') \in E$, si $(a, b, c) \leq (a', b', c')$ et $(a', b', c') \leq (a, b, c)$, alors

$$\begin{array}{ccc} a \leq a' & b \leq b' & c \leq c' \\ a' \leq a & b' \leq b & c' \leq c \end{array}$$

On a donc $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, c'est-à-dire $(a, b, c) = (a', b', c')$. Enfin, la relation \leq est transitive car pour tout $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') \in E$, si $(a, b, c) \leq (a', b', c')$ et $(a', b', c') \leq (a'', b'', c'')$, alors

$$\begin{array}{l} a \leq a' \text{ et } a' \leq a'' \text{ d'où } a \leq a'', \\ b \leq b' \text{ et } b' \leq b'' \text{ d'où } b \leq b'', \\ c \leq c' \text{ et } c' \leq c'' \text{ d'où } c \leq c'', \end{array}$$

c'est-à-dire $(a, b, c) \leq (a'', b'', c'')$.

La relation \leq est donc une relation d'ordre sur E . Cette relation est une relation d'ordre partielle car $(2, 2, 2)$ et $(1, 2, 3)$ ne sont pas comparables :

$$\text{non } ((2, 2, 2) \leq (1, 2, 3)) \text{ car } 2 \leq 1 \text{ est faux}$$

et

$$\text{non } ((1, 2, 3) \leq (2, 2, 2)) \text{ car } 3 \leq 2 \text{ est faux.}$$

Définition 8

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit

- La relation \geq par :

$$x \geq y \iff y \leq x.$$

La relation \geq est une relation d'ordre sur E appelée **relation d'ordre opposée** à \leq .

- La relation $<$ par :

$$x < y \iff (x \leq y \text{ et } x \neq y).$$

Exemples 9

1. Dans \mathbb{R} , on note $x < y$ la relation $x \leq y$ et $x \neq y$.
2. Pour les ensembles, on note $A \subsetneq B$ la relation $A \subset B$ et $A \neq B$.



La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur E . En effet, elle est antisymétrique et transitive mais n'est pas réflexive. On l'appelle parfois « ordre strict » !



En général, la négation de $x \leq y$ n'est pas $y < x$. Par exemple, dans $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, on a ni $\{1, 3\} \subset \{1, 2\}$ ni $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 3\}$. Néanmoins, si l'ordre \leq est total, alors la négation de $x \leq y$ est bien $y < x$.

Proposition 10

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et x, y, z des éléments de E .

1. $x \leq y \iff (x < y \text{ ou } x = y)$.
2. $(x \leq y \text{ et } y < z) \implies x < z$.

3. $(x < y \text{ et } y \leq z) \implies x < z.$

§2 Majorants, plus grand élément

Définition 11

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si M , élément de E , est tel que $x \leq M$, on dit que M est un **majorant** de x , ou encore qu'il **major**e x .
- Soit A un sous-ensemble de E . On dit que M , élément de E , est un **majorant** de A si M est un majorant de chaque élément de A , c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des majorants est non vide est dite **majorée**.
- Lorsque M majore A , tout élément $M' \in E$ tel que $M \leq M'$ majore aussi A .
- Un majorant de A est aussi majorant de toute partie de A donc, lorsque A est majorée, toute partie de A est majorée.

Définition 12

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . On dit que a est le **plus grand élément** de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq a.$$

Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément. Néanmoins, si il existe, c'est le **seul** élément de A ayant cette propriété ; car si on a aussi $x \leq b$ pour tout $x \in A$, alors $a \leq b$ et $b \leq a$, d'où $b = a$.

§3 Minorants, plus petit élément

Définition 13

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si m , élément de E , est tel que $m \leq x$, on dit que m est un **minorant** de x , ou encore qu'il **minore** x .
- Soit A un sous-ensemble de E . On dit que m , élément de E , est un **minorant** de A si m est un minorant de chaque élément de A , c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des minorants est non vide est dite **minorée**.

Définition 14

Une partie de E à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

- Lorsque m minore A , tout élément $m' \in E$ tel que $m' \leq m$ minore aussi A .
- Un minorant de A est aussi minorant de toute partie de A donc, lorsque A est minorée, toute partie de A est minorée.

Définition 15

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . On dit que a est le **plus petit élément** de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, a \leq x.$$

Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

§4 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 16

Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

- On dit qu'un élément de E est la **borne inférieure** de A dans E si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E . Lorsque cette borne existe, on la note $\inf A$.
- On dit qu'un élément de E est la **borne supérieure** de A dans E si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E . Lorsque cette borne existe, on la note $\sup A$.



Contrairement au plus grand élément, la borne supérieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

Notation

La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ se note (lorsqu'elle existe) $\sup(x, y)$ (resp. $\inf(x, y)$) ; notations analogues pour les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble à trois éléments, etc.

Méthode

Pour prouver que M est la borne supérieure de A , on procède en deux étapes :

1. on vérifie que M est un majorant de A (pour tout $x \in A$, $x \leq M$);
2. pour tout majorant M' de A , on vérifie que $M \leq M'$.

§5 Exemples

Exemples 17

1. Dans (\mathbb{R}, \leq) , l'intervalle $[0, 1]$
 - a pour minorant tout élément de $] -\infty, 0]$,
 - a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
 - a pour plus petit élément 0,
 - a pour plus grand élément 1,
 - a pour borne inférieure 0,
 - a pour borne supérieure 1.
2. Dans (\mathbb{R}, \leq) , l'intervalle $[0, 1[$

- a pour minorant tout élément de $] - \infty, 0]$,
- a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
- a pour plus petit élément 0,
- ne possède pas de plus grand élément,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure 1.

Exemple 18

Dans $E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre d'ordre «divise» :

$$a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{N}, aq = b.$$

L'ensemble $A = \{ 15, 21 \}$

- a pour minorant les entiers 1 et 3,
- a pour majorant 0, 105, 210 et les autres multiples de 105,
- n'a pas de plus petit élément,
- n'a pas de plus grand élément,
- a pour borne inférieure 3,
- a pour borne supérieure 105.

Exemple 19

Soit E un ensemble ayant plus de deux éléments. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, l'ensemble des parties non vides de E , $\mathcal{P}(E) \setminus \{ \emptyset \}$

- a pour minorant \emptyset ,
- a pour majorant E ,
- ne possède pas de plus petit élément dès lors que E possède au moins deux éléments,
- a pour plus grand élément E ,
- a pour borne inférieure \emptyset ,
- a pour borne supérieure E .

§6 Quelques propriétés de la borne supérieure

Proposition 20

1. Si une partie A de E admet un plus grand élément a , a est borne supérieure de A dans E .
2. Si une partie A de E admet une borne supérieure et si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le plus grand élément de A .

Démonstration. Laissez en exercice! ■

Proposition 21

Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E , non vide, admettant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure dans E . Alors $\inf(A) \leq \sup(A)$.

Démonstration. Laissez en exercice! ■

Proposition 22

Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, A et B deux parties de E , admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E ; si $A \subset B$, on a $\sup(A) \leq \sup(B)$ (resp. $\inf(B) \leq \inf(A)$).

Démonstration. Laissez en exercice! ■

11.3 RELATION D'ÉQUIVALENCE

Définition 23

Une relation sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit dans \mathbb{R} la relation de congruence modulo α pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
 x et y sont congrus modulo α si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha$.
 On note $x \equiv y[\alpha]$. Cette relation est une relation d'équivalence.

Définition 25

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur l'ensemble E . On appelle **classe d'équivalence** de $x \in E$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \}.$$

- Il n'y a pas de notation au programme, on notera ici \bar{x} ou $\text{Classe}(x)$ la classe de x .
- La notation usuelle, mais hors programme, pour l'ensemble des classes d'équivalences est E/\mathcal{R} .

Théorème 26

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur l'ensemble E .

1. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$(x\mathcal{R}y) \iff y \in \text{Classe}(x) \iff x \in \text{Classe}(y) \iff \text{Classe}(x) = \text{Classe}(y).$$

2. Deux classes d'équivalence sont ou bien égales, ou bien d'intersection vide.
3. L'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{R} forment une partition de E .

Exemple 27

Sur \mathbb{Z} , on considère la relation «être congru modulo 5». Il y a cinq classes d'équivalence qui forment une partition de \mathbb{Z} :

$$\bar{0} = \text{Classe}(0) = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots \}$$

$$\bar{1} = \text{Classe}(1) = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \}$$

$$\bar{2} = \text{Classe}(2) = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots \}$$

$$\bar{3} = \text{Classe}(3) = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \}$$

$$\bar{4} = \text{Classe}(4) = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \}.$$

On a par exemple $\text{Classe}(11) = \text{Classe}(6) = \text{Classe}(1)$.

On note l'ensemble des classe d'équivalence modulo 5

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ \text{Classe}(0), \text{Classe}(1), \text{Classe}(2), \text{Classe}(3), \text{Classe}(4) \}$$

Réciproquement, la donnée d'une partition de E permet de définir une relation d'équivalence

Proposition 28

Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E .

1. La relation binaire \mathcal{R} définie par

$$(x\mathcal{R}y) \iff (\exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$$

est une relation d'équivalence.

2. Les classe d'équivalence pour cette relation sont les ensembles $(A_i)_{i \in I}$.