

Chapter 3 Borne supérieure dans \mathbb{R}

3.1 Majorant, minorant

3.1.1 Partie bornée

Exercice 3.1

Il paraît peu vraisemblable que \mathbb{N} , sous-ensemble de \mathbb{R} , soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que \mathbb{N} est majoré.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n + 1$ majore n ; puisque chaque élément de \mathbb{N} est majoré, nous pouvons conclure que \mathbb{N} est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

3.1.2 Plus grand élément, plus petit élément

Exercice 3.2

Les parties suivantes de \mathbb{R} sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

- | | |
|---------------------|---|
| 1. $] - 4, 6]$. | 6. \mathbb{N} . |
| 2. $[-1, 0[$. | 7. $\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \}$. |
| 3. $[3, +\infty[$. | 8. $[0, \pi] \cap \mathbb{Q}$. |
| 4. \mathbb{R}^* . | 9. $]0, \pi[\cap \mathbb{Q}$. |
| 5. \mathbb{Z} . | |

Exercice 3.3

Soit

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |3|x| - 6| > 2|x| - x \right\}.$$

Déterminer l'ensemble A^\uparrow de ses majorant et l'ensemble A^\downarrow de ses minorants.

3.2 Théorème de la borne supérieure

Exercice 3.4

Déterminer si les parties suivantes de \mathbb{R} sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

- | | |
|---------------------|---|
| 1. $]0, 1[$, | 5. $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, |
| 2. $[0, 1[$, | 6. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \}$, |
| 3. $]1, +\infty[$, | 7. $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \}$. |
| 4. \mathbb{N} , | |

Exercice 3.5

On considère

$$E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{p} \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure ? Si oui, les déterminer.

Exercice 3.6

Soit $x > 0$ un réel, écrit en décimal sous la forme $n_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$. Notons x_k sa troncature à la k -ème décimale, c'est-à-dire le nombre décimal

$$x_k \stackrel{\text{def}}{=} n_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$$

et X l'ensemble de toutes ces troncatures, sous-ensemble de l'ensemble des décimaux. Montrer que x est la borne supérieure de X . Dans quels cas est-il le maximum?

Que peut-on dire dans le cas où $x < 0$?

Exercice 3.7

Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 3.8

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R} .

1. Montrer que $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

Exercice 3.9

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de \mathbb{R} ; on définit

$$C = A + B = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y \};$$

Prouver que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercice 3.11

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de \mathbb{R}_+ ; on définit

$$D = AB = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = xy \};$$

Déterminer $\sup(D)$.

Exercice 3.12

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b.$$

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 3.13

Soit A une partie bornée non-vide de \mathbb{R} . Montrer

$$\sup_{(x,y) \in A \times A} |x - y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 3.14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 3.15

Soient f une fonction majorée et g une fonction bornée définies sur une partie X de \mathbb{R} et à valeurs réelles. Montrer

$$\sup_X f + \inf_X g \leq \sup_X (f + g). \quad (1)$$

Exercice 3.17 *Un théorème de point fixe*

Soit une application croissante $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, c'est-à-dire

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, u \leq v \implies f(u) \leq f(v).$$

On se propose de montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in [0, 1], f(\alpha) = \alpha.$$

On considère l'ensemble

$$A = \{ x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x \}.$$

1. Montrer que l'ensemble A est non vide et qu'il admet une borne inférieure $\alpha \in [0, 1]$.
2. Démontrer que si $x \in [0, 1]$ est un minorant de A , alors $f(x)$ est aussi un minorant de A .
En déduire que $f(\alpha) \leq \alpha$.
3. Démontrer que si $x \in [0, 1]$ est un élément de A , alors $f(x)$ est aussi un élément de A .
En déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.
4. Conclure.

3.3 Les dix types d'intervalles de \mathbb{R}

Exercice 3.18

Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).

Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

3.4 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$