Chapter 16 Calcul matriciel élémentaire

16.1 Matrices

16.2 Addition et multiplication par un scalaire

16.3 Multiplication matricielle

Solution 16.1

Voir `http://youtu.be/XwtvirsK2HUh`

Solution 16.2

1. $Ad = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. AB est une matrice $(3, 2)$, C est une matrice $(2, 3)$.

3. $A + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $C^T C = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$.

5. $BC = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $d^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. C est une matrice $(3, 2)$ et d est une matrice $(3, 1)$ et $2 \neq 3$.

8. $d^T d = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$.

9. $dd^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 16.4

La matrice A est nécessairement une matrice $(2, 2)$. On note

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 7c & b + 7d \\ 5a & 5b \\ 9a + 3c & 9b + 3d \end{pmatrix}.$$

Or deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont même type et mêmes coefficients, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a + 7c & b + 7d \\ 5a & 5b \\ 9a + 3c & 9b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, on trouve

$$\begin{cases} a+7c &= -4 \\ b+7d &= 14 \\ 5a &= 15 \\ 5b &= 0 \\ 9a+3c &= 24 \\ 9b+3d &= x \end{cases} \iff \begin{cases} a+7c &= -4 \\ 7d &= 14 \\ a &= 3 \\ b &= 0 \\ 9a+3c &= 24 \\ 3d &= x \end{cases} \iff \begin{cases} 7c &= -7 \\ d &= 2 \\ a &= 3 \\ b &= 0 \\ 3c &= -3 \\ 3d &= x \end{cases}$$

Ce système admet une solutions si, et seulement si $x = 6$ et dans ce cas, on a

$$a = 3 \qquad b = 0 \qquad c = -1 \qquad d = 2.$$

c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution 16.5

Solution 16.6

Solution 16.7

Solution 16.8

16.4 Algèbre des matrices

Solution 16.9

Supposons que la matrice A commute avec tous les éléments de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. En particulier,

- avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  d'où $b = c = 0$.

- avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  d'où $a = d$.

Finalement A est nécessairement de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2.$$

Réciproquement, les matrices de la forme aI_2, avec $a \in \mathbb{K}$, commutent avec tout autre matrice de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$:

$$\forall B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K}), (aI_2)B = a(I_2B) = aB = a(BI_2) = B(aI_2).$$

Solution 16.10

1. La trace de A est la somme de ses termes diagonaux, ici Tr $A = -3 + 1 + 4 = 2$.

2. On note $A = \left(A_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$. On utilise la définition de la somme de matrice ainsi que la linéarité de $\sum$

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B).$$

De manière similaire,

$$\operatorname{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

3. La matrice AB est une matrice (n,n) donc

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le p}} a_{ik} b_{ki}.$$

De même

$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p} (BA)[k,k] = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$

Or b_{ki} et a_{ik} sont des scalaires, ainsi $b_{ki}a_{ik} = a_{ik}b_{ki}$, d'où

$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le p}} a_{ik} b_{ki} = \operatorname{Tr}(AB).$$

4. Si deux telles matrices A, B existent, alors

$$\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(I_n) = n.$$

Or la trace et linéaire et $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$, donc

$$\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0.$$

5. Si de telles matrices existent, alors A et B ne commutent pas. D'ailleurs, avec les résultats précédents, on montre que $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BCA) = \operatorname{Tr}(CAB)$ et donc A, B, C ne commutent pas deux à deux. On peut essayer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\operatorname{Tr}(ABC) = 1$ et $\operatorname{Tr}(BAC) = 0$.

Solution 16.11
Solution 16.12

Nécessairement, X et Y sont des matrices de type $(2,2)$.

Supposons vérifié

$$\begin{cases} AX & +BY & = C \\ DX & +BY & = A \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équation, on obtient

$$AX - DX = C - A$$

c'est-à-dire $(A - D)X = C - A$. Or

$$A - D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$(A - D)^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$X = (A - D)^{-1}(C - A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En substituant dans la première équation du système, nous obtenons

$$BY = (C - AX),$$

et puisque B est inversible,

$$Y = B^{-1}(C - AX) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ 11/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ 11/2 & -3/2 \end{pmatrix},$$

on vérifie que X et Y sont solution du système.

Solution 16.13

16.5 Matrices inversibles

Solution 16.14

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $A^2 = A + 2I_3$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(A^2 - A\right) = I_3$, d'où

$$A\left(\frac{1}{2}\left(A - I_3\right)\right) = I_3 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{2}\left(A - I_3\right)\right)A = I_3;$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A - I_3\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 16.15

Voir `http://youtu.be/XwtvirsK2HU` jusqu'à 9:00.

Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I_3$ et $\frac{1}{4}(A^2 - I) \times A = I_3$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 16.16

Posons $M = B^{-1}A^{-1}$, alors

$$(AB)\,M = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et

$$M\,(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

On a donc $(AB)M = M(AB) = I_n$, c'est-à-dire AB est inversible et $(AB)^{-1} = M$.

Solution 16.17

Solution 16.18

1. Un calcul explicite donne

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7z & 3y + 7w \\ -z & -w \end{pmatrix},$$

L'équation matricielle $BC = I_2$ est donc équivalente à

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +7z & = 1 \\ 3y & +7w & = 0 \\ & -z & = 0 \\ & -w & = 1 \end{array}\right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{array}{ll} z & = 0 \\ w & = -1 \\ x & = 1/3 \\ y & = 7/3 \end{array}\right.$$

ou encore

$$BC = I_2 \iff C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Avec $C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on sait déjà que $BC = I_2$. De plus,

$$CB = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 & 7/3 - 7/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

La matrice B est donc inversible et $B^{-1} = C = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Le déterminant de B est $\det B = -3$. La matrice B est donc inversible et

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 16.19

Nous pouvons multiplier la relation (**??**) à droite par AB ;

$$(\mathbf{??}) \implies (AB)^{-1}(AB) = 2A^{-1}AB. \implies I_n = 2I_nB \implies I_n = 2B.$$

Réciproquement, si $B = \frac{1}{2}I_n$, alors

$$(AB)^{-1} = \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2A^{-1}.$$

Conclusion

On a $B = \frac{1}{2}I_n$.

Solution 16.20
Solution 16.21
Solution 16.22
Solution 16.23

Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne peut avoir pour inverse que $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à l'ensemble. Notons $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,:\, \det M = 1\}$ et montrons que G est un sous-groupe de $Gl(2, \mathbb{R})$.

- la matrice identité appartient à G.
- si $A, B \in G$ alors $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, et donc $AB \in G$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ appartient à G et est l'inverse de A.

Solution 16.24

Notons

$$G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \left]-1, 1\right[\right\}$$

On va montrer que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle. Ainsi, G sera un groupe pour cette même loi (ou plus précisement pour la loi induite sur G).

Soit $A = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \in G$ et $B = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{pmatrix} \in G$ avec $x, y \in]-1, 1[$.

- On a $\det(A) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} = 1 \neq 0$ donc A est inversible. On a bien $G \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.
- L'élément neutre de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient clairement à G (c'est le cas $x = 0$).
- Un calcul direct donne

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix} 1+xy & x+y \\ x+y & 1+xy \end{pmatrix} = \frac{1+xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{1+xy} \\ \frac{x+y}{1+xy} & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $z = \frac{x+y}{1+xy}$, alors

$$1 - z^2 = 1 - \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{1 + 2xy + x^2y^2} = \frac{1 + 2xy + x^2y^2 - x^2 - y^2 - 2xy}{1 + 2xy + x^2y^2}$$
$$= \frac{1 + x^2y^2 - x^2 - y^2}{1 + 2xy + x^2y^2} = \frac{(1 - x^2)(1 - y^2)}{(1 + xy)^2}.$$

Cela montre que $1 - z^2 > 0$ car $1 - x^2 > 0$ et $1 - y^2 > 0$, d'où $z \in]-1, 1[$. Deplus, comme $1 + xy > 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1 + xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}}$$

et par conséquent $AB = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} \in G$.

Ainsi, G est stable par multiplication.

- L'inverse de A est la matrice

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (-x)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

avec $-x \in]-1, 1[$. Ainsi $A^{-1} \in G$.

Conclusion

G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et donc un groupe (pour la multiplication matricielle).

Solution 16.25

1. Pour montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication des matrices carrées, il suffit de montrer que c'est un sous-groupe de $\big(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \times\big)$.

- Pour $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

ce qui montre que $M_{a,b}$ est inversible. On a donc bien $\mathcal{G} \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.
- On a $I_2 = M_{1,0} \in \mathcal{G}$.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$.

$$M_{a,b}M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} = M_{u,v}.$$

avec $u = ac - bd$ et $v = bc + ad$. Remarquons que $M_{u,v}$ est le produit de deux matrices inversibles, donc elle est aussi inversible et nécessairement $(u, v) \neq (0, 0)$.
- L'inverse de la matrice $M_{a,b}$ est

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = M_{a',b'}$$

avec $a' = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $b' = \frac{-b}{a^2+b^2}$ et $(a', b') \neq (0, 0)$ donc $M_{a,b}^{-1} \in \mathcal{G}$.

Conclusion

$\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et donc un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication des matrice carrées.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$. On note $(u,v) = (ac - bd, bc + ad)$, de sorte que $M_{a,b}M_{c,d} = M_{u,v}$. On a

$$\begin{aligned} f\left(M_{a,b}\right) f\left(M_{c,d}\right) &= \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2 \\ \text{et } f\left(M_{a,b}M_{c,d}\right) &= \left(u^2+v^2\right) = (ac)^2 - \cancel{2acbd} + (bd)^2 + (bc)^2 + \cancel{2bcad} + (ad)^2 \end{aligned}$$

et donc $f\left(M_{a,b}M_{c,d}\right) = f\left(M_{a,b}\right) f\left(M_{c,d}\right)$

Conclusion

L'application f est un morphisme du groupe $(\mathcal{G}, \times)$ dans le groupe $\left(\mathbb{R}^\star, \times\right)$.

Solution 16.26

16.6 Puissances d'une matrice

Solution 16.27

$$M^0 = I_4 \qquad M^1 = M$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par un récurrence immédiate, pour $k \geq 4$, $M^k = \mathbf{0}_4$.

Solution 16.28

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et B commutent car $BI_3 = B$ et $I_3B = B$. Nous allons donc chercher à appliquer la formule du binôme de Newton. Or, on a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate, si $k \geq 3$, $B^k = \mathbf{0}_3$. Donc, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3 B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cancel{B^k} \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 \\
&= I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solution 16.29

Puisque $B^4 = 0$ et A et B commutent, on peut écrire

$$A^4 = A^4 - B^4 = (A - B)\left(A^3 + A^2 B + A B^2 + B^3\right).$$

Or A est inversible, donc A^4 également ; on peut multiplier la relation précédente à droite par A^{-4} :

$$I_n = (A - B)\left(A^3 + A^2 B + A B^2 + B^3\right) A^{-4}.$$

De plus, A et B commutent, donc toute puissance de A commute avec toute puissance de B et

$$I_n = (A - B)\left(A^{-1} + A^{-2} B + A^{-3} B^2 + A^{-4} B^3\right)$$

Enfin, puisque A et B commutent, les deux termes précédents également et

$$I_n = \left(A^{-1} + A^{-2} B + A^{-3} B^2 + A^{-4} B^3\right)(A - B).$$

La matrice $A - B$ est donc inversible et

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-2} B + A^{-3} B^2 + A^{-4} B^3.$$

Solution 16.30

Solution 16.31

1. On a déjà $A^0 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_p$, $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_p$ et, d'après l'énoncé, $A^2 = aA + bI_p$. Ensuite, on a $A^3 = A^2 \cdot A = aA^2 + bA = a(aA + bI_p) = a^2 A + abI_p$. On voit ainsi que les coefficients de chaque puissance de A peuvent se déduire de ceux de la puissance précédente, d'où une démonstration par récurrence.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n: «il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_p$».

   Pour $n = 0$, on peut prendre $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, d'où H_0.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie; on a alors

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= A \times \left(a_n A + b_n I_p\right) && \text{d'après } H_n \\
&= a_n A^2 + b_n A \\
&= a_n(aA + bI_p) + ba_n I_p \\
&= (aa_n + b_n)A + ba_n I_p.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = aa_n + b_n$ et $b_{n+1} = ba_n$, on obtient $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_p$. Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n.

Nous avons même fait mieux que de démontrer l'existence de ces suites : nous avons obtenu une relation de récurrence sur leurs termes, qui permettra de les déterminer.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + b_n \\ ba_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3. On a $\det(P) = -r_1 + r_2 \neq 0$, donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1 & -1 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que les relation coefficients-racines donnent $a = r_1 + r_2$ et $b = -r_1 r_2$. Ainsi,

$$BP = \begin{pmatrix} a - r_2 & a - r_1 \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_1 r_2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix},$$

puis

$$P^{-1}BP = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1^2 + r_1 r_2 & -r_1 r_2 + r_1 r_2 \\ r_1 r_2 - r_1 r_2 & r_2^2 - r_1 r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

4.

- En notant $D = \operatorname{diag}(r_1, r_2)$, on a $B = PD\,P^{-1}$.
- On montre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = PD^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- On montre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = B^n X_0$, ainsi

$$X_n = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2^n - r_1^n \\ r_2 r_1^n - r_1 r_2^n \end{pmatrix},$$

ce qui donne finalement,

$$\begin{cases} a_n &= \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1} \\ b_n &= \frac{r_2 r_1^n - r_1 r_2^n}{r_2 - r_1}. \end{cases}$$

Solution 16.32

$$U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad AU = -\frac{1}{2}U \qquad AV = V.$$

Solution 16.33
Solution 16.34
Solution 16.35
Solution 16.36 *Mines MP*

Écrire $B_k = A^k + A^{-k}$ et obtenir $B_k = B_{k+1} + B_{k-1}$. Par récurrence $B_k = \lambda_k I_n$ avec (λ_k) suite récurrente linéaire...

16.7 Transposée

Solution 16.37

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est 1. Elle est donc inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, la transposée est linéaire et $\left(A^T\right)^T = A$, donc

$$\begin{aligned}
(\textbf{??}) &\iff 5A + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 3A + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Solution 16.38

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1, elle est donc inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalement

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1} = B \iff A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution 16.39

Remarquons que $A^T A$ est une matrice de type (n, n). De plus, on a $\left(B^{-1}A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \left(B^{-1}\right)^T = A\left(B^T\right)^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1}A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1} &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(A\left(B^T\right)^{-1}\right) B^T \left(B^2 B^{-1}\right) \\
&= \left(A^T A\right)^{-1} \left(A^T A\right) \left(B^T\right)^{-1} B^T B^1 \\
&= I_n I_n B \\
&= B.
\end{aligned}$$

Solution 16.40

1. Par linéarité de la transposée,

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A$$
$$\text{et } \left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right).$$

La matrice $A + A^T$ est donc symétrique, la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.

2. En additionnant les matrices précédentes, on obtient $\left(A + A^T\right) + \left(A - A^T\right) = 2A$, c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right);$$

et la matrice $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ est symétrique, la matrice $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ est antisymétrique.

Solution 16.42
Solution 16.43
Puisque B est de type (m, k), B^T est de type (k, m) donc $B^T B$ est de type (k, k). De plus

$$\left(B^T B\right)^T = B^T \left(B^T\right)^T = B^T B;$$

la matrice $B^T B$ est donc symétrique.

16.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$