Chapter 6 Fonctions circulaires

6.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 6.1 (*)
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

6.2 Formulaire de Trigonométrie

Exercice 6.4 (***)
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicaux}}.$$

Exercice 6.5 (*)
Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sachant que $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Exercice 6.6 (**)
Vérifiez les identités suivantes.

1. $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$.
2. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.
3. $(\sin a + \cos a + 1)(\sin a + \cos a - 1) = \sin 2a$.

Exercice 6.7 (*)
Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.
Exercice 6.8 (**)
Soit α un angle du troisième quadrant tel que $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ et β un angle du premier quadrant tel que $\cos\beta = \frac{15}{17}$.
Calculer de trois manières différentes $\tan(2\alpha+\beta)$.
Exercice 6.9 (*)
Simplifiez les fractions suivantes.

1. $\dfrac{\cos a - \cos 3a}{\sin 3a - \sin a}$.
2. $\dfrac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$.

Exercice 6.12 (**)
Simplifier, suivant la valeur de $x \in [-\pi, \pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos x} + \left|\sin \frac{x}{2}\right|$.

6.3 Équations trigonométriques

Exercice 6.14 (*)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,	**4.** $\cos x = 1$,	**7.** $\tan x = 0$,
2. $\sin x = 1$,	**5.** $\cos x = -1$,	
3. $\sin x = -1$,	**6.** $\cos x = 0$,	**8.** $\tan x = 1$.

Exercice 6.15 (*)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,	**3.** $\tan x = -1$,	**5.** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,	**4.** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,	**6.** $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6.16 (**)
Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.
Exercice 6.17 (**)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0. \tag{1}$$

Exercice 6.18 (**)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

Exercice 6.19 (***)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos 2x < \sin x.$$

Exercice 6.20 (***)
Résoudre l'inéquation

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0. \tag{1}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.
Exercice 6.24 (***)
Résoudre l'équation suivante d'inconnue angulaire α

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 0. \tag{E}$$

Exercice 6.26 (**)
Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.

2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.

3. La résoudre pour $m = 1$.

Exercice 6.27 (***)

Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = 1 \\ \cos(x + y) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 6.35 (***)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin a \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos a. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos x \cos y = a + b \\ \sin x \sin y = a - b. \end{cases}$

Exercice 6.39 (**)

Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$, A, B et φ étant des constantes réelles.

Exercice 6.40 (***)

Rechercher les valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ telles que

$$\sin(3x) - \sin(2x) + \sin(x) > 0.$$

6.4 Étude des fonctions trigonométriques

6.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Exercice 6.41 (**)

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1 - 2x)$.

2. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$.

3. $f(x) = \arccos \sqrt{x(4 - x)}$.

Exercice 6.42 (*)

Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos \frac{89\pi}{3}\right).$$

Exercice 6.44 (***)

Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 6.45 (***)

Calculer $2 \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{7}{25}$.

Exercice 6.46 (***)

Démontrer

$$\forall x \in [-1, 1], 2|\arcsin x| = \arccos\left(1 - 2x^2\right).$$

Exercice 6.48 (***)

Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.

3. Soit $x \in \left[0, \pi/2\right]$, que vaut $f(x)$?

4. Soit $x \in \left[\pi/2, \pi\right]$, que vaut $f(x)$?

5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

6. Résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \pi$.

7. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in I_k$.

Exercice 6.49 (***)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice 6.48.
Exercice 6.50 (*)
Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice 6.48.
Exercice 6.51 (**)
Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

1. En calculant le sinus d'un angle bien choisi.

2. En étudiant la fonction définie par le premier membre.

Exercice 6.52 (**)
Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 6.53 (***) *Mines-Ponts PSI 2023*
Soient $x \in]0, 4[$ et $\omega = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $\cos(\omega) = 1 - \frac{x}{2}$.

2. Montrer que $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ sont positifs.

3. Montrer que

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{4 - x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

4. Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4 - x}}\right).$$

Exercice 6.54 (***)

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

(c) En déduire une expression simple de f.

2. Pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $x = \tan\varphi$, on a donc $\varphi = \arctan x$. Calculer $f(x) = f(\tan\varphi)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.

3. Construire le graphe de f.

Exercice 6.55 (****)

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par
$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\varphi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.

2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.

(a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.

(b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.

4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.

5. Tracer le graphe de f.

6. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable. Calculer sa dérivée et confronter votre résultat à celui de la question **4.**.

Exercice 6.58 (***) *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :

(a) $\arctan(\tan(x)) = x$;

(b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,
$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

ue Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Exercice 6.61 (****)
On définit la fonction f par $f(x) = \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \arctan\left(\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. A-t-elle une parité, une périodicité ?
3. Simplifier son expression si $x \in]0, \pi[$.
4. La représenter graphiquement entre -2π et 2π.

Exercice 6.63 (**)
Établir

$$\arctan\left(\frac{1}{2025}\right) + \arctan\left(\frac{2024}{2026}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6.66 (****)
Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\arctan x - \arctan \frac{x}{3} = \arccos \frac{x}{2}. \tag{1}$$

Exercice 6.67 (***)
S'inspirer de l'exercice **??** pour étudier les fonctions données par

1. $x \mapsto \arccos\left(1 - 2x^2\right)$.
2. $x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$.
3. $x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$.
4. $x \mapsto \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
5. $x \mapsto \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Exercice 6.68 (***)
Établir les formules suivantes

1. $2\arctan \dfrac{1}{2} = \arctan \dfrac{4}{3}$.
2. $2\arccos \dfrac{3}{4} = \arccos \dfrac{1}{8}$.
3. $\arccos \dfrac{5}{13} = 2\arctan \dfrac{2}{3}$.
4. $\arcsin \dfrac{5}{13} + \arcsin \dfrac{3}{5} = \arcsin \dfrac{56}{65}$.

Exercice 6.69 (***)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

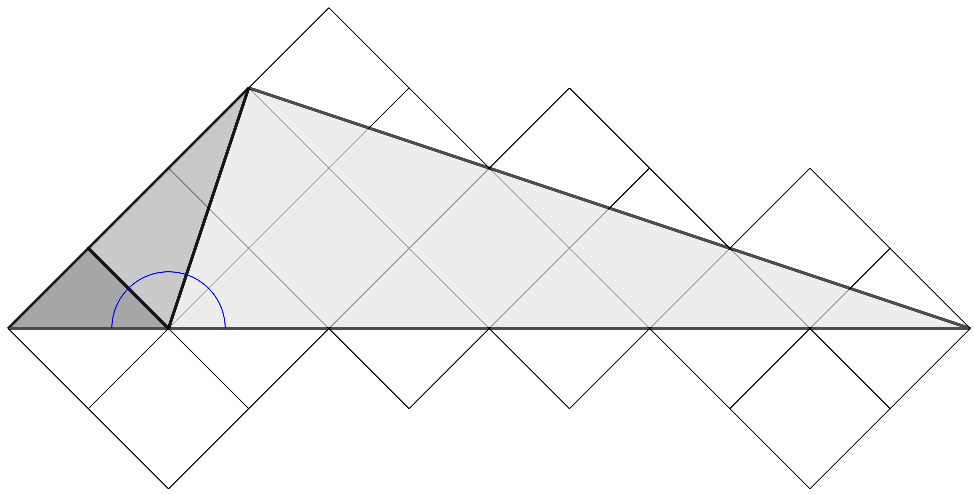
1. $\arctan x = 4\arctan(\frac{1}{3}) - \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4}$.
3. $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$.
4. $\arccos \dfrac{2x}{1 + x^2} = \arctan x$.
5. $\arccos x = \arcsin 2x$.
6. $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6.70 (**)

Deviner une expression de

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$$

à l'aide du dessin suivant puis démontrer cette conjecture.



Exercice 6.72 (**)

Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x+1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 6.73 (*****)

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. On étudie la fonction f de la variable réelle x déterminée par

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{2 \sin \theta (x - \cos \theta)}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} \right).$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ excepté en deux points x_1 et x_2 que l'on précisera. Simplifier l'expression de $f'(x)$ pour $x \notin \{ x_1, x_2 \}$.
3. Justifier que la représentation de f présente un centre de symétrie.
4. En admettant que les pentes des demi-tangentes à la courbe représentative ed f en x_1 et x_2 sont déterminées par les limites de f' à droite et à gauche de ces points, donner l'allure de la courbe représentative de f.