Chapter 6 Nombres entiers, itérations

6.1 Nombres entiers

Exercice 6.1

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives et $a > 0$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq a u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq a^n u_0.$$

Exercice 6.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite est majorée par 4.

Exercice 6.3

Montrer : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nu)| \leq n|\sin(u)|$.

Exercice 6.4

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n}{3^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2+1}.$$

Exercice 6.5

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n, $9^n - 1$ est multiple de 8.

Exercice 6.6

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 6.7

Un tournoi de badminton aquatique regroupe n équipes. Chacune des n équipes rencontre une fois les $n-1$ autres. Il n'y a pas de match nul. Montrer que l'on peut classer les n équipes de telle sorte que l'équipe 1 ait battu l'équipe 2, l'équipe 2 est battu l'équipe 3,…, l'équipe $n-1$ ait battu l'équipe n.

Exercice 6.8

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 6.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 7, u_1 = -\frac{1}{10}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n.$$

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 6.10

On définit une suite (F_n) par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Calculer F_n pour $1 \leq n \leq 10$.
2. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$a^{n-3} < F_n < a^{n-2}.$$

Exercice 6.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n.$$

Montrer:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2.$$

Exercice 6.12

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

6.2 Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 6.13

Soit une suite géométrique (u_n). Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison q) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_6 = 96$ et $q = 2$;
2. $u_1 = 72$ et $u_4 = -8/3$;
3. $u_3 = 40$ et $u_7 = 640$.

Exercice 6.14

La suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$$
est une suite géométrique.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 6.15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 6.16

Soit $p_0 = 10000$ une population initiale de lapins. On suppose que le taux de reproduciton annuel est de 3 par couple (tous les individus se reproduisent et font partie d'un unique couple). De plus, à la fin de chaque année, la population est diminuée par la vente d'une quantité fixe de 1000 individus. Déterminer la population au bout de 50 ans.

Exercice 6.17

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

6.3 Entiers relatifs

Exercice 6.18

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

6.4 Les nombres rationnels