Chapter 53 Topologie sur les espaces vectoriels normés

53.1 Normes et espaces vectoriels normés

Exercice 53.1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{x + ty}{1 + t^2}\right|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la boule unité fermée.

Exercice 53.2

Soit $p \geq 1$ un réel. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient des réels positifs $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. On a vu l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}.$$

On pose, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que pour $a \geq 0$, $1 + a^p \leq (1 + a)^p$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p$.
4. Étudier les variations de $\|X\|_p$ en fonction de p.
5. Étudier $\lim_{p\to\infty}\|X\|_p$.

Exercice 53.3

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Soient des scalaires distincts $a_0, \dots, a_n$. Montrer que

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{n}\left|P^{(k)}(0)\right|$$

est une norme.

Exercice 53.4

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_A = \sup_{x\in A}|P(x)|$. Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne ainsi une norme $\|*\|_A$ sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 53.5

Pour $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Exercice 53.6

Soit E l'algèbre des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. On pose, pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que cette norme d'espace vectoriel n'est pas une norme d'algèbre.

Exercice 53.7

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On veut prouver qu'elle est euclidienne dès que l'égalité du parallélogramme est vérifiée, c'est-à-dire

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \qquad \text{(Égalité du parallélogramme)}$$

En vertu de la méthode de polarisation, on pose

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et on cherche à prouver que φ est un produit scalaire sur E.

1. Montrer l'identité $\varphi(x, y+z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$.

2. Montrer l'identité pour tout λ réel : $\varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y)$.

3. Montrer que φ est un produit scalaire tel que $\|\cdot\|$ est sa norme associée.

Exercice 53.8

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Montrer les inégalités

$$\begin{array}{ccccc} \|X\|_\infty & \leq & \|X\|_1 & \leq & n\|X\|_\infty. \\ \|X\|_\infty & \leq & \|X\|_2 & \leq & \sqrt{n}\|X\|_\infty. \\ \|X\|_2 & \leq & \|X\|_1 & \leq & \sqrt{n}\|X\|_2. \end{array}$$

Prouver que les six constantes obtenues sont les meilleures, en exhibant chaque fois un vecteur $X \neq 0$ réalisant l'égalité.

Exercice 53.9

Soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer l'inégalité $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

2. Montrer l'inégalité $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

3. Montrer l'inégalité $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.

4. Montrer que, pour $f \neq 0$, les quotients suivants ne sont pas majorés

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1}, \quad \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}, \quad \frac{\|f\|_2}{\|f\|_1}.$$

Exercice 53.10

Soit $E = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2.

2. Montrer que les applications

$$a + b\sqrt{2} \mapsto |a| + |b| \qquad \text{et} \qquad a + b\sqrt{2} \mapsto \left|a + b\sqrt{2}\right|$$

définissent deux normes sur E.

3. À l'aide de $u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$, montrer qu'elle ne sont pas équivalentes.

Exercice 53.11

On note $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et pour $\varphi \in E$, $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall f \in E, N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty.$$

1. Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si $\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right)^\circ = \emptyset$.

2. Montrer que N_φ et $\|*\|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes si, et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Exercice 53.12 *Oral Mines-Pont PSI 2023*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).

2. On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si, et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

3. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$, et

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 \left|P'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Montrer que si $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.

5. En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

53.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 53.13

Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Q pour cette norme.

53.3 Topologie d'un espace normé

Exercice 53.14

Si deux boules fermées $B_f(a, r)$ et $B_f(a', r')$ d'un espace vectoriel normé $E \neq \{0\}$ sont égales, montrer que $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 53.15

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A un ouvert de $E \times F$, B un ouvert de $F \times G$. On définit

$$B \circ A = \{ (x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F, (x, y) \in A \text{ et } (y, z) \in B \}.$$

Montrer que $B \circ A$ est un ouvert de $E \times G$.

Exercice 53.16

Soient $U_1, \dots, U_p$ des parties ouvertes d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $U = U_1 \cap \cdots \cap U_p$ est une partie ouverte.

2. Que dire de la réunion d'un nombre fini de parties fermées?

Exercice 53.17

Montrer que les points intérieurs à une boule fermée sont ceux de la boule ouverte de même rayon (donc aucune boule fermée n'est ouverte).

Exercice 53.18

Soit A, B deux partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donner un exemple dans lequel $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 53.19

Soit U, V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E. Montrer que les intérieurs de $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont disjoints.

Exercice 53.20

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ et $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $A \overset{\circ}{\cup} B \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

5. $(A \overset{\circ}{\setminus} B) = \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}$.

6. $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

Exercice 53.21

Soit E l'espace des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit des normes

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \qquad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad N_d(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

1. Comparer ces trois normes.

2. Étudier pour chacune si

$$\Omega = \{\, f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(t) > 0 \,\}$$

est une partie ouverte.

Exercice 53.22

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, alors son adhérence $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 53.23

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)u + \lambda v \in A.$$

1. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

2. La partie $\overset{\circ}{A}$ est-elle convexe?

Exercice 53.24

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont

$$|\xi| \leq \max \{ 1, |a| + |b| + |c| \} .$$

2. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$.

53.4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Exercice 53.25

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont

$$|\xi| \leq \max \{ 1, |a| + |b| + |c| \} .$$

2. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$.