Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

Aperçu

D

Une fonction p définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est une **fonction polynomiale** lorsqu'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, pour tout $x \in D$, on ait

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Lorsque $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé le **degré** de p.

On note souvent $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

E

1. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x + 5 \end{array}$ est polynomiale de degré 2.
2. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + 5x - 3 \end{array}$ est polynomiale de degré 3.
3. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est polynomiale de degré 1.
4. Un fonction polynomiale de degré 0 est une fonction constante *non nulle*, c'est-à-dire, il existe $a_0 \neq 0$ tel que
$$\forall x \in D, p(x) = a_0.$$
5. Par convention, l'application nulle est aussi polynomiale et on dit que son degré est $-\infty$.

D

On dit qu'une fonction polynomiale p admet a pour **racine** lorsque $p(a) = 0$.

Retenez pour l'instant qu'une fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines. La démonstration viendra plus tard dans l'année.

P *Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur $\mathbb{R}$.*

Remarquez que la dérivée d'une fonction polynomiale est polynomiale.

T **Principe d'identification**

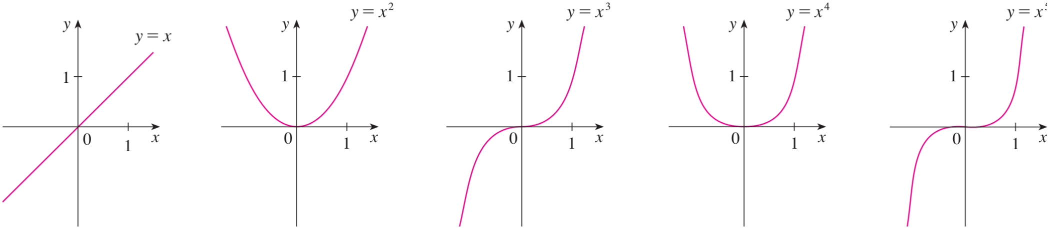
Soit I un intervalle véritable, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_p$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ tels que

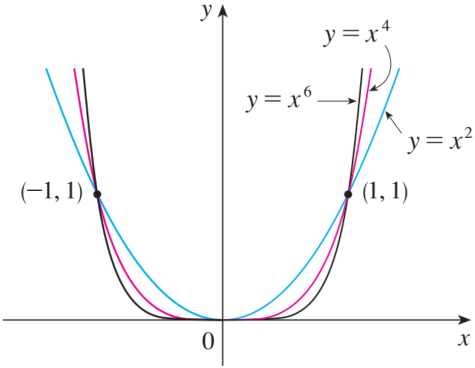
$$\forall x \in I, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p.$$

Alors $n = p$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

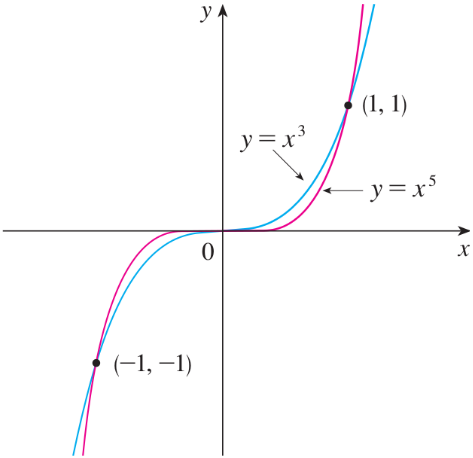
Ce théorème justifie *a posteriori* la définition de degré d'une fonction polynomiale.

Ci-dessous sont représentés les courbes de $x \mapsto x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.





y
$y = x^4$
$y = x^6$
$y = x^2$
(−1, 1)
(1, 1)
0
x



y
(1, 1)
$y = x^3$
$y = x^5$
0
x
(−1, −1)

D Une fonction **rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales.

E

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^9 - x^2}{3 + x^8} \end{array}$ est une fonctions rationnelle.
2. Toute fonction polynomiale est *a fortiori* une fonction rationnelle.

P

1. *Soit p et q deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.*
   La fonction rationnelle $f = \frac{p}{q}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des racines de q.
2. *Les fonctions rationnelles sont continues et infiniment dérivables sur leur ensemble de définition.*
3. *La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.*

E

La fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{6x^3 - x}{x^2 - 1}$$

est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$.

E

Résolution de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \,]0, +\infty[^2\,, f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

où $f\,:\,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

D

Le **logarithme népérien** (ou logarithme naturel) est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. En d'autre termes

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}.$$

P

1. *Le logarithme est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto x^{-1}$ sur $\mathbb{R}^\star$.*

C

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

P

On a pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$,

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
3. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.
4. $\ln(1/x) = -\ln x$.

Démonstration. Voici une démonstration alternative de la seconde propriété. Celle-ci requiert de savoir faire un changement de variable dans une intégrale (ici $u = xt$).

∎

P

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x).$$

P *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *et*

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

La fonction $\ln$ *étant continue, elle réalise donc une bijection de* $\mathbb{R}_+^\star$ *sur* $\mathbb{R}$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de $\ln$.

R L'injectivité du logarithme nous permet d'écrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^\star, \ln(x) = \ln(y) \iff x = y.$$

P *Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,*

$$\ln(1+x) \leq x.$$

P *La courbe représentative de $\ln$ présente une branche parabolique horizontale au voisinage de $+\infty$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

On dit que le logarithme est négligeable par rapport aux puissances au voisinage de $+\infty$.

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

C

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln(x) = 0.$$

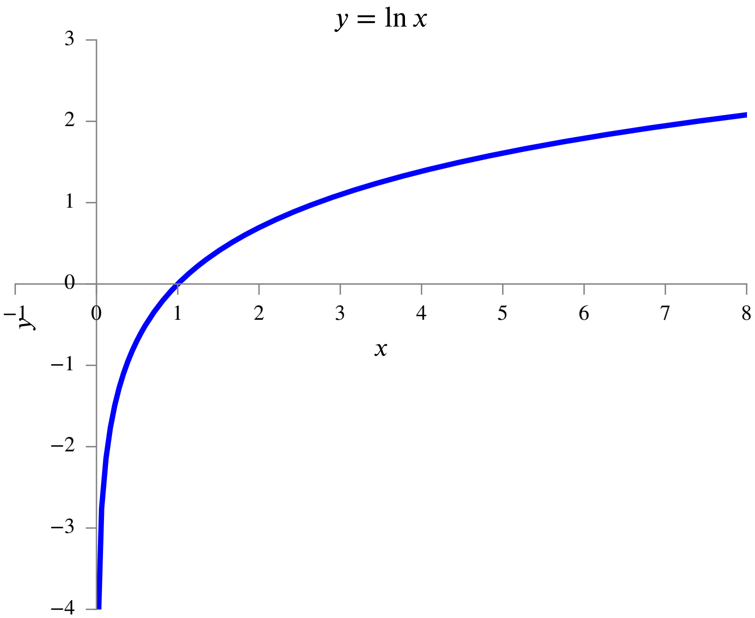


Figure: Logarithme népérien

D

et proposition

Le logarithme réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée exponentielle et notée

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$$

Ainsi

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \exp(\ln x) = x$,
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x) = \exp(y) \iff x = y$.

T

Résoudre l'équation $\exp(5-3x) = 10$.

P

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

1. $\exp(0) = 1$.
2. $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$.
3. $\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.
4. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

P

L'exponentielle est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

L'axe des abscisse est donc asymptote à la courbe représentative de $\exp$ *au voisinage de $-\infty$:*

P

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

P

La courbe représentative de $\exp$ *présente une branche parabolique verticale au voisinage de* $+\infty$*:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty.$$

On dit que les puissances sont négligeables par rapport à l'exponentielle au voisinage de $+\infty$*.*

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

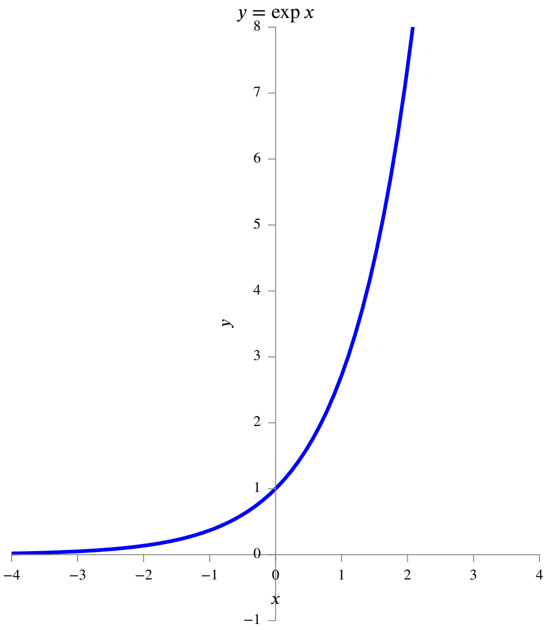


Figure: Exponentielle népériene

T

Donner l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}\exp(-x) - 1$. Tracer sa courbe et expliciter son image $\mathrm{Im}(g)$.

T

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^{2305}} =$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x =$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^3 \, x^7 e^{-10x} =$

D

Exponentielle de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \exp(x \ln a) \end{array}$$

L **À ne pas retenir**

Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ *et tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

1. $\exp_a(0) = 1$.
2. $\ln(\exp_a(x)) = x \ln a$.
3. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
4. $\exp_a(xy) = \exp_{\exp_a(x)}(y)$.
5. $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)} = \exp_{1/a}(x)$.
6. $\exp_{ab}(x) = \exp_a(x)\exp_b(x)$.
7. $\exp_{a/b}(x) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)}$.

L **À ne pas retenir**

Si $a \in \mathbb{R}_+^\star$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *on a* $\exp_a(n) = a^n$.

Ce lemme légitime la notation sous forme de puissance.

D **Extension de la notation puissance**

Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Le réel a^x se lit «a puissance x».

Le lemme montre que les règles de calcul déjà connues pour des exposants entiers (et même rationnel) s'étendent au cas d'exposants réels.

P

Pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ *et tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

1. $a^0 = 1$.
2. $\ln(a^x) = x \ln a$.
3. $a^{x+y} = a^x a^y$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.
6. $(ab)^x = a^x b^x$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

T

Résoudre l'équation

$$2^x + 6 \times 2^{-x} = 5. \tag{1}$$

P

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, *la fonction* $\exp_a : x \mapsto a^x$ *est dérivable et on a*

$$\exp_a'(x) = \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = (\ln a)a^x$$

De plus $x \mapsto a^x$ *est strictement croissante si* $a > 1$ *et strictement décroissante si* $0 < a < 1$ *et on a*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Figure: Fonctions exponentielles de base $a > 1$: $x \mapsto a^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		$+$	$\ln a$	$+$	
$\exp_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

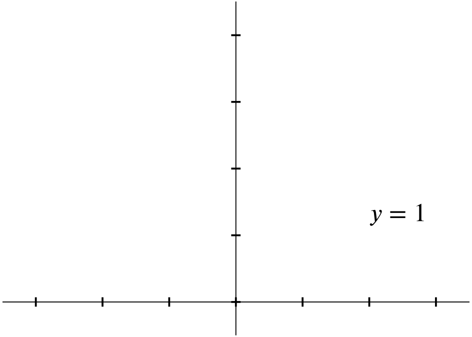
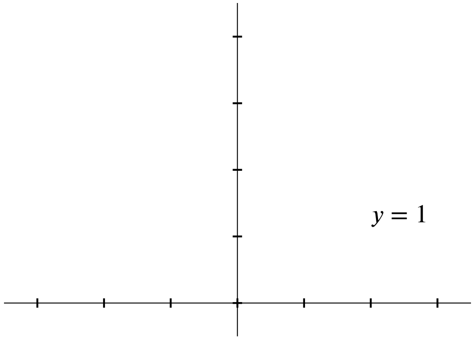
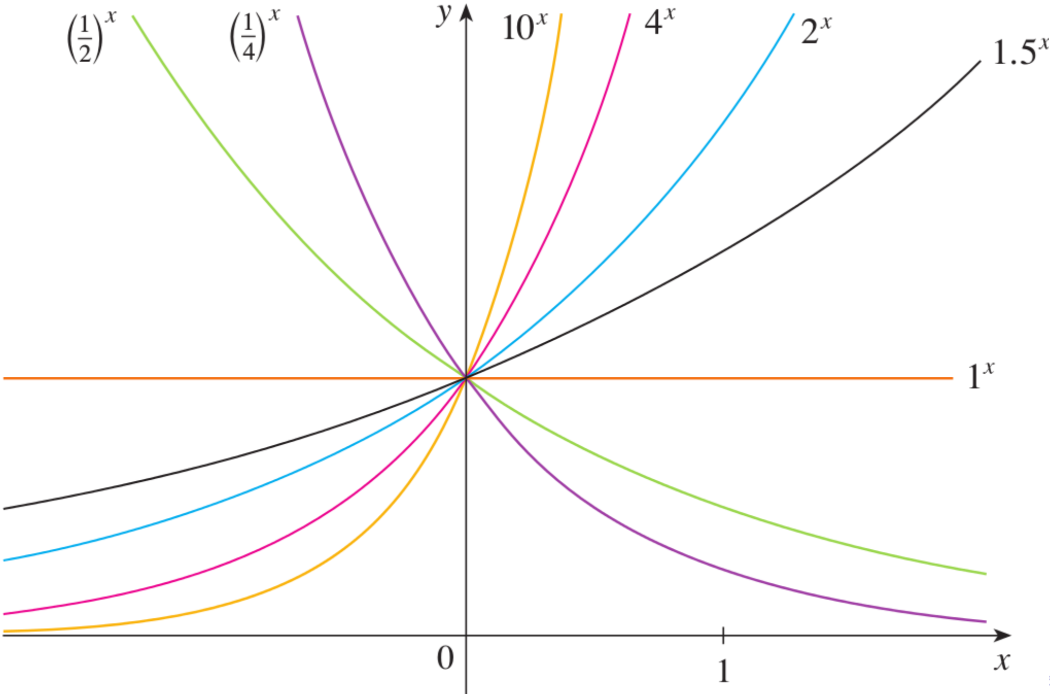


Figure: Fonctions exponentielles de base $a < 1$: $x \mapsto a^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		$-$	$\ln a$	$-$	
$\exp_a(x)$	$+\infty$		1		0





$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x$
y
10^x
4^x
2^x
1.5^x
1^x
0
1
x

D

La **constante de Néper** est le réel défini par $\mathrm{e} = \exp(1)$ ou de manière équivalente par $\ln \mathrm{e} = 1$. On dit encore que e est la base du logarithme népérien. Avec cette définition, on a donc $\exp_{\mathrm{e}} = \exp$ et on peut donc écrire

$$\exp x = \mathrm{e}^x \, .$$

D

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Pour tout $x > 0$, on note

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

L'application $\log_a$ est le **logarithme de base a**.

E

1. En particulier $\log_e = \ln$.
2. On utilise $\log_{10}$, appelé logarithme décimal et noté simplement $\log$, en physique et en chimie.
3. La fonction $\log_2$ (logarithme en base 2) est très utilisée en informatique.

D

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Pour tout $x > 0$, on note

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

L'application $\log_a$ est le **logarithme de base a**.

P

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Alors $\log_a$ est la bijection réciproque de $\exp_a$.

On a donc pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$a^y = x \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a} \iff y = \log_a(x).$$

D

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Pour tout $x > 0$, on note

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

L'application $\log_a$ est le **logarithme de base a**.

T

Combien de chiffres comporte l'écriture décimale de 4444^{4444} ?

D Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** d'exposant α l'application

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on retrouve les fonctions puissances déjà connues.

T

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^\star$. Sa dérivée est la fonction*
$$\varphi'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$
2. *Limites en 0 et $+\infty$:*
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$
3. *Si $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.*
4. *Positions relatives. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$, alors*
$$\forall x \in]0,1], x^\beta \leq x^\alpha;$$
$$\forall x \in [1,+\infty[, x^\alpha \leq x^\beta.$$

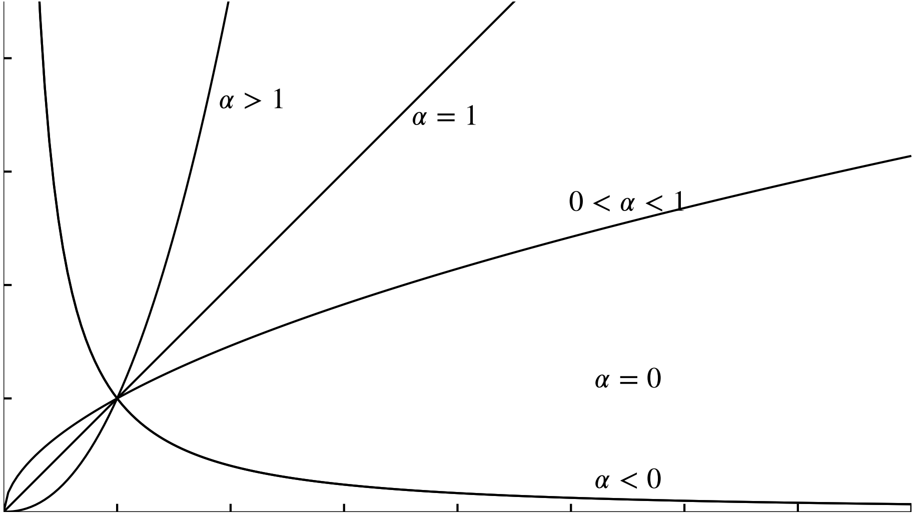


Figure: Fonctions puissances et positions relatives

D On définit les fonctions **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperbolique** par

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} \mathrm{ch} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

P

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x \geq 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x$ *et* $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\, x < \frac{e^x}{2} < \mathrm{ch}\, x.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1.$

P

1. *La fonction* sh *est impaire et la fonction* ch *est paire.*
2. *Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables (donc continues) sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$$

3.

$$\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$$
$$\lim_{-\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$$

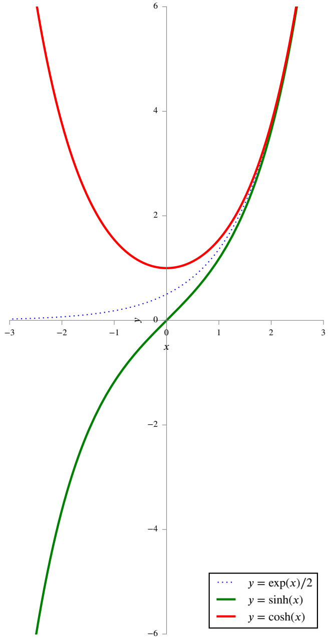


Figure: Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

D

On définit la fonction **tangente hyperbolique** par

$$\begin{array}{rccl} \tanh: & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}.$$

P

1. *La fonction* $\tanh$ *est impaire.*
2. *La fonction* $\tanh$ *est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$*, strictement croissante et on a*

$$\tanh' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \tanh^2.$$

3. $\lim\limits_{-\infty} \tanh = -1$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \tanh = +1$.

Figure: Tangente hyperbolique