Chapitre 12

Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

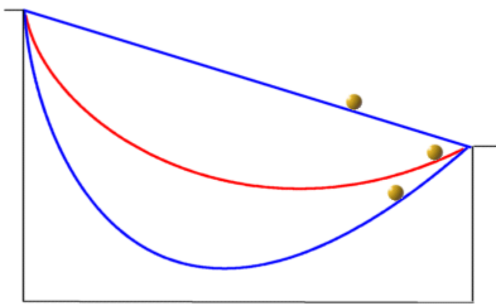
Dans tout ce chapitre On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le terme intervalle désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

En 1696, Jean Bernoulli annonce un grand concours qui occupera les plus grands esprits de son temps. Il fait insérer le problème suivant dans les actes de Leipzig :

> Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible.

Il ajoute que la solution n'est pas une droite, même si c'est le long d'une droite que le mobile parcourt une distance minimale. Il termine en promettant gloire et approbation à celui qui donnera la solution correcte de ce problème.

C'est le début d'une grande aventure qui sera à l'origine du calcul des variations, une branche des mathématiques qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation et de réécrire toute la mécanique classique. Cinq personnes présentent des solutions : Jean Bernoulli, son frère Jacques, Leibniz, le marquis de l'Hospital et une personne anonyme. Il s'avère que la solution anonyme vient de Isaac Newton, qui a résolu le problème en une seule soirée !



La solution est la cycloïde, une courbe engendrée par le déplacement d'un point sur un cercle roulant sans glisser sur un axe. C'est une surprise, car Huygens vient de prouver en 1659 que la cycloïde est isochrone, c'est-à-dire qu'un pendule qui décrit une forme de cycloïde a une période constante, quelle que soit l'amplitude de ses oscillations.Il est assez étrange que la solution de ces deux problèmes classiques soit la même.

Après le problème du brachistochrone[1], les frères Bernoulli continuent à se défier mutuellement avec divers problèmes d'optimisation similaires. Au XVIII-ième siècle, Euler décide de rassembler toutes les méthodes qu'ils ont développées pour résoudre des problèmes de maxima et de minima. Il élabore aussi l'équation d'Euler-Lagrange, une équation différentielle qui permet de résoudre de tels problèmes. C'est le début d'une nouvelle branche des mathématiques, le calcul des variations.

Encore aujourd'hui, le calcul des variations est un domaine de recherche très riche, qui trouve des applications dans des domaines de recherche aussi variés que la physique, les réseaux et l'aéronautique.

12.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

Définition 1 On appelle **équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants** une équation qui s'écrit sous la forme

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t), \tag{E}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, et $u : J \to \mathbb{K}$ une application continue.
Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que l'équation (E) est d'ordre n.
On appelle équation homogène associée à (E), l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Définition 2 Soit $I \subset J$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est solution de (E) sur I si

- l'application f est dérivable n fois sur I, et
- $\forall t \in I, a_n f^{(n)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 y(t) = u(t)$.

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle E sur I, c'est donner toutes les solutions définies sur I.
Une **courbe intégrale** de E est la courbe représentative d'une solution de E.

[1]Du grec brakhisto «le plus court» (s'écrit donc avec un i et non un y) et chronos «temps».

Notation

On note encore $\mathscr{S}_E(I)$ l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I.

Exemple 3

La fonction $f : t \mapsto e^{3t} - e^{-t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - 3y(t) = 4e^{-t}$$

mais aussi de l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0.$$

En effet, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même deux fois dérivable) et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = e^{3t} - e^{-t}, \qquad f'(t) = 3e^{3t} + e^{-t}, \qquad f''(t) = 9e^{3t} - e^{-t}.$$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & f'(t) - 3f(t) = 3e^{3t} + e^{-t} - 3e^{3t} + 3e^{-t} = 4e^{-t} \\ \text{et} \quad & f''(t) - 2f'(t) - 3f(t) = 9e^{3t} - e^{-t} - 6e^{3t} - 2e^{-t} - 3e^{3t} + 3e^{-t} = 0. \end{aligned}$$

Exemple 4

Les solutions de $y'(t) = u(t)$ sur l'intervalle I sont les primitives de la fonction u sur I.

Remarque

Il est habituel d'écrire l'équation différentielle $y'(t) - 3y(t) = 4e^{-t}$ de manière plus compacte, en supprimant la variable de la fonction inconnue,

$$y' - 3y = 4e^{-t}.$$

Dans la suite… Le programme se limite aux équations d'ordre 1 et 2. Nous nous limiterons donc aux équations de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$, le scalaire a étant éventuellement nul. Le système homogène associé devient

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{H}$$

§2 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 5

Principe de superposition des solutions

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $u_1, u_2 \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On considère les équations différentielles

$$\begin{aligned} (E_1) &: ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u_1(t) \\ \text{et } (E_2) &: ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u_2(t). \end{aligned}$$

Si f_1 et f_2 sont solutions sur I respectivement de (E_1) et (E_2), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda u_1(t) + \mu u_2(t).$$

Théorème 6

S'il existe une solution $f_0 \in \mathcal{S}_E(I)$, alors

$$\mathcal{S}_E(I) = f_0 + \mathcal{S}_H(I) = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}_H(I) \right\}.$$

Si une fonction donnée f_0 est solution d'une équation différentielle, on dit souvent que f_0 est *une* «**solution particulière**» de l'équation différentielle. En fait, *chaque solution de l'équation est une «solution particulière».*

Lorsque l'on donne la forme générale de toutes les solutions, on parle de *la*[2]«**solution générale**» de l'équation différentielle.

Le théorème affirme que la solution générale de l'équation est toujours la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

Proposition 7

Soit a, b et c trois nombres réels, *et $u : I \to \mathbb{C}$. Une application f est solution complexe de l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t) \tag{E}$$

si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont respectivement solutions de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathfrak{Re}(u)(t) \quad \text{et} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathfrak{Im}(u)(t)$$

Ce résultat est complètement faux si a, b ou c ne sont pas réels !

12.2 Résolution d'une équation d'ordre 1

§1 Solutions d'une équation homogène

Théorème 8

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$. Les solutions de l'équation homogène

$$ay'(t) + by(t) = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions f_λ où

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda \exp\left(-\frac{b}{a} t\right) \end{array}, \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

[2] !!!!!

Démonstration. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une application. Posons $r = -\frac{b}{a}$ et $z : t \mapsto y(t)e^{-rt}$. Autrement dit, nous allons chercher les solutions $y : I \to \mathbb{K}$ sous la forme

$$\forall t \in I, y(t) = z(t)e^{rt}.$$

Donc *la fonction z est dérivable si et seulement si y est dérivable*. Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} \forall t \in I, ay'(t) + by(t) &= a.z'(t).e^{rt} + a.z(t).r.e^{rt} + b.z(t)e^{rt} \\ &= a.z'(t)e^{rt} && \text{car } a.r + b = 0 \end{aligned}$$

Puisque $e^{\frac{b}{a}t}$ n'est jamais nul,

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_H(I) &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, z(t) = \lambda && \text{car } I \text{ est un intervalle.} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{rt} \end{aligned}$$

∎

Définition 9 Le polynôme $aX + b$ est appelé **polynôme caractéristique** de l'équation différentielle

$$ay'(t) + by(t) = 0.$$

En notant $r = -b/a$ la racine de ce polynôme, les solutions de l'équation différentielle sont donc les applications $t \mapsto \lambda e^{rt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque.

Exemple 10 On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(E) : 3y'(t) + 4y(t) = 8.$$

Le second membre étant constant, il est facile de trouver une *solution apparente*

$$f : t \mapsto 2.$$

De plus, l'équation homogène associée à (E)

$$(H) : 3y'(t) + 4y(t) = 0,$$

a pour polynôme caractéristique $3X + 4$ qui a pour racine $\frac{-4}{3}$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\frac{4}{3}t} \end{array}, \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les applications

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2 + \lambda e^{-\frac{4}{3}t} \end{array}, \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi dire que l'*ensemble* des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_E(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2 + \lambda e^{-\frac{4}{3}t} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

§2 Cas d'un second membre polynôme

Théorème 11

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$*,* $a \neq 0$*, et* $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ *un polynôme de degré n. Alors l'équation*

$$ay'(t) + by(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \end{array}$ *si* $b \neq 0$.
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n\right) \end{array}$ *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$.

avec $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*

§3 Cas d'un second membre exponentielle

Théorème 12

Soit $(a, b, A, m) \in \mathbb{K}^4$*,* $a \neq 0$ *et* $P = aX + b$*. Alors l'équation*

$$ay'(t) + by(t) = Ae^{mt}$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Be^{mt} \end{array}$ *si m n'est pas racine de P (i.e.* $am + b \neq 0$*).*
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Bte^{mt} \end{array}$ *si m est racine de P (i.e.* $am + b = 0$*).*

avec $B \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*

Exemple 13

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 5\ \sin(4t).$$

§4 Problème de Cauchy

Définition 14

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$.

Théorème 15

Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz
Soit $a \in \mathbb{K}$ *et* $u : I \to \mathbb{K}$ *une application continue sur un intervalle* I*,* $t_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{K}$*.*

Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t)+ay(t) & = & u(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. \tag{E}$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de E passant par le point $M_0(t_0, y_0)$.

Démonstration. ∎

Exemple 16 Soit $k \in \mathbb{K}$. La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{-kt} \end{array}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t)+ky(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Exemple 17 Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (E) : 2y'(t)-3y(t) & = & 7e^{-5t}+5e^{-7t} \\ y(1) & = & \pi. \end{array}\right.$$

12.3 Résolution d'une équation d'ordre 2

§1 Solutions complexes d'une équation homogène

Considérons tout d'abord l'équation $ay'' + by' + cy = 0$; dans un premier temps nous allons supposer que a, b, c sont complexes et chercher les solutions complexes.

En s'inspirant de ce qu'on sait sur les solutions des équations du premier ordre, on cherche tout d'abord à savoir si des fonctions exponentielles sont solutions.

Soit donc $f_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$. Alors

$$af_r''(t)+bf_r'(t)+cf_r(t) = (ar^2+br+c)\,\mathrm{e}^{rt},$$

et donc f_r sera solution de l'équation différentielle si et seulement si r est racine du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.

Définition 18 Le polynôme

$$aX^2 + bX + c$$

est appelé **polynôme caractéristique** de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

La découverte de ce polynôme caractéristique est due à Euler.

Théorème 19 *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. *On considère l'équation différentielle*

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t) = 0 \tag{H}$$

On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de P.

1. *Si $\Delta \neq 0$, alors P admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

2. *Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$ et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt} \end{array} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Démonstration. L'équation caractéristique de (H) est une équation du second degré à coefficients complexes. Elle admet donc deux racines distinctes ou égales que l'on notera r_1 et r_2. Nous savons également que la somme des racines $(r_1 + r_2)$ est le nombre complexe $-\frac{b}{a}$. On considère y une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit alors la fonction z par [3]

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{-r_1 t}\,.$$

Nous remarquons que la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{r_1 t}\,.$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \big(z'(t) + r_1 z(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_1 t} \text{ et } y''(t) = \big(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\big)\,\mathrm{e}^{r_1 t}\,.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= \Big(az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) + \cancel{(ar_1^2 + br_1 + c)z(t)}\Big)\,\mathrm{e}^{r_1 t} \\ &= a\,\mathrm{e}^{r_1 t}\left(z''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) z'(t)\right) \\ &= a\,\mathrm{e}^{r_1 t}\big(z''(t) + \big(2r_1 - (r_1 + r_2)\big)\, z'(t)\big) \\ &= a\,\mathrm{e}^{r_1 t}\big(z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{r_1 t}$ n'est jamais nul, la fonction y est solution de (H) si et seulement si la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t) = 0$$

si et seulement si z' est solution de l'équation

$$Z'(t) + (r_1 - r_2)Z(t) = 0$$

si et seulement si il existe un nombre complexe k_1 tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = k_1\,\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t}\,.$$

[3] Cette démonstration est similaire à la méthode de variation de la constante (au programme de SUP) ou d'abaissement de l'ordre (au programme de SPÉ): on connait une solution particulière de (H) (ici $f_{r_1} : t \mapsto \mathrm{e}^{+r_1 t}$) et l'on cherche les solutions sous la forme $t \mapsto z(t) f_{r_1}(t)$. C'est une méthode qui revient très souvent dans la résolution d'équations différentielles.

1. Si le polynôme caractéristique de (H) a deux racines distinctes, c'est-à-dire si $r_2 - r_1 \neq 0$, alors y est solution si et seulement si il existe deux nombres complexes k_1 et k_2 tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \frac{k_1}{r_2 - r_1} \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t} + k_2,$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(t) \mathrm{e}^{r_1 t} = k_2 \mathrm{e}^{r_1 t} + \frac{k_1}{r_2 - r_1} \mathrm{e}^{r_2 t}.$$
Lorsque (k_1, k_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, $\left(k_2, \frac{k_1}{r_2 - r_1}\right)$ parcourt $\mathbb{C}^2$. Ainsi, y est solution de (H) si et seulement si il existe deux nombres complexes λ et μ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}.$$
2. Si le polynôme caractéristique de (H) a une racine double, c'est-à-dire $r_1 = r_2 = r$, alors y est solution de (H) si et seulement si il existe deux nombres complexes k_1 et k_2 tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = k_1 t + k_2,$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(t) \mathrm{e}^{rt} = \left(k_1 t + k_2\right) \mathrm{e}^{rt}.$$

∎

§2 Solutions réelles d'une équation homogène

On cherche ici les solutions réelles de (H) où a, b et c sont des nombres réels.

Théorème 20

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H}$$
On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de P.

1. *Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et*
$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
2. *Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$ et*
$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu) \mathrm{e}^{rt} \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
3. *Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ et*
$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) \mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Démonstration. **1.** Même démonstration que le cas complexe $\Delta \neq 0$.

2. Même démonstration que le cas complexe $\Delta = 0$.

3.

(CN) Supposons que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une solution réelle de (H). Alors y est en particulier une solutions à valeurs complexes. Il existe donc deux *complexes* λ et μ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\lambda\, e^{i\omega t} + \mu\, e^{-i\omega t}\right) e^{\alpha t}.$$

Or, y étant à valeurs réelles, nous avons $y = \mathfrak{Re}(y)$. Donc, [4]

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\mathfrak{Re}(\lambda)\cos(\omega t) - \mathfrak{Im}(\lambda)\sin(\omega t) + \mathfrak{Re}(\mu)\cos(\omega t) + \mathfrak{Im}(\mu)\sin(\omega t))\, e^{\alpha t}.$$

Il existe donc deux nombres *réels* λ' et μ' tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\lambda' \cos(\omega t) + \mu' \sin(\omega t)\right) e^{\alpha t}.$$

(CS) Réciproquement, on considère les fonctions y_1 et y_2 définies par

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\omega)t} + e^{(\alpha-i\omega)t}\right) = \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\\ y_2(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}\right) = \sin(\omega t)\, e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont solutions réelles de (H) car elles sont solutions complexes de (H) et sont clairement à valeurs réelles. Le principe de superposition assure qu'il en est donc de même de toutes leurs combinaisons linéaires réelles. ∎

Remarque Dans le cas $\Delta < 0$, les solutions de (H) peuvent également être données par les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\, e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi) \end{array} \quad \text{avec } (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 21 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 + X + 1$, son discriminant est $-3 < 0$, et ses racines sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + \mu e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-t/2} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

[4] ⚠ Il ne suffit pas d'imposer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ dans les solutions complexes pour obtenir les solutions réelles.

Exemple 22 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 - 3X + 2$, son discriminant est $1 > 0$, et ses racines sont 1 et 2. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^t + \mu e^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^t + \mu e^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 23 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 - 4X + 4$, son discriminant est 0, et sa racine (double) est 2. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)e^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)e^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

§3 Cas d'un second membre polynôme

Théorème 24 *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, et $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme de degré n. Alors l'équation*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \end{array} \qquad$ *si* $c \neq 0$.

2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n\right) \end{array} \qquad$ *si* $c = 0$ *et* $b \neq 0$.

3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t^2\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n\right) \end{array} \qquad$ *si* $c = 0$ *et* $b = 0$.

avec $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ à déterminer.

§4 Cas d'un second membre exponentielle

Les équations linéaires du second ordre à coefficients constants sont très utiles dans l'étude de systèmes mécaniques ou électriques. Dans ce contexte, on utilise un vocabulaire particulier.

Soit l'équation
$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t) \tag{12.1}$$
avec α et ω_0^2 des réels positifs. Cela «oublie» quelques cas de ce cours (sûrement une histoire de frottements…).

La fonction f est appelée **signal d'entrée** et la solution y (déterminée en général par des conditions initiales en $t = 0$) le **signal de sortie**. La constante ω_0 est appelée la **pulsation propre** du système régi par l'équation (et $\omega_0/2\pi$ est sa fréquence propre).

Lorsqu'un signal (d'entrée ou de sortie) est de la forme $t \mapsto Ae^{i\omega t}$ ou $A\cos(\omega t + \varphi)$, $|A|$ est son amplitude et ω sa pulsation.

Théorème 25 *Soit $(a, b, cA, m) \in \mathbb{K}^4$, $a \neq 0$ et $P = aX^2 + bX + c$. Alors l'équation*
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = Ae^{mt}$$
admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Be^{mt} \end{array}$ *si m n'est pas racine de P.* *(i.e. $am^2 + bm + c \neq 0$).*
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Bte^{mt} \end{array}$ *si m est racine simple de P.* *(i.e. $am^2 + bm + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$).*
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Bt^2e^{mt} \end{array}$ *si m est racine double de P.* *(i.e. $am^2 + bm + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 0$).*

avec $B \in \mathbb{K}$ à déterminer.

Exemple 26 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle
$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$

Méthode Lorsque $(a, b, c, \alpha, \omega) \in \mathbb{R}^5$, $a \neq 0$, les solutions des équations différentielles
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$$
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$
sont les parties réelles et imaginaire des solutions (complexes) de l'équation différentielle
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{(\alpha + i\omega)t}.$$

Exemple 27 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle
$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{-2t}\sin(t).$$

§5 Problème de Cauchy

Définition 28 Un **problème de Cauchy du second ordre** est la donnée d'une équation différentielle du second ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

Théorème 29 **Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz**
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ *et* $u : I \to \mathbb{K}$ *une application continue sur un intervalle* I. *Pour tous* $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ *et* $y'_0 \in \mathbb{K}$. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= u(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \end{cases}$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de E passant par un point $M_0(t_0, y_0)$ déterminée du plan et admettant en ce point une tangente fixée.

Démonstration. Admise. Si l'on suppose l'existence, il est facile de montrer l'unicité. ∎

CHAPITRE 12

COMPLÉMENTS

12.4 CAS D'UN SECOND MEMBRE POLYNÔME-EXPONENTIELLE

§1 Ordre 1

Dans le cas où les coefficients de l'équation sont constants et le second membre de la forme polynôme-exponentielle, on peut trouver une solution particulière sous la forme polynôme-exponentielle.

Théorème 30

Soit $(a,b,m) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$, $P = aX + b$ et S un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors l'équation

$$ay'(t) + by(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{mt}$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & R(t)e^{mt} \end{array}$ *si m n'est pas racine de P (i.e. $am + b \neq 0$).*

2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & tR(t)e^{mt} \end{array}$ *si m est racine de P (i.e. $am + b = 0$).*

où R est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même degré que le polynôme S.

Remarque

Si le second membre est une combinaison linéaire de fonction polynôme-exponentielle, on utilise le principe de superposition des solutions.

Exemples 31

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) + 2y(t) = te^{-t}$.

2. $y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}$.

3. $y'(t) + 2y(t) = t\cos(2t)$ en utilisant $t\cos 2t = \mathfrak{Re}(te^{2it})$.

4. $y'(t) + 2y(t) = te^{-t} + e^{-2t} + 8t\cos(2t)$.

Démonstration. Toutes ces équations différentielles ont même équation homogène associée : $y'(t) + 2y(t) = 0$ dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Puisque -1 n'est pas racine du polynôme $X + 2$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = (at + b)e^{-t}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(t) + 2f(t) = (2at + 2b + a - at - b)e^{-t} = (at + a + b)e^{-t};$$

La fonction f est donc solution si et seulement si $a = 1$ et $a + b = 0$ (on utilise le principe d'identification pour les fonctions polynomiales avec l'ensemble infini $\mathbb{R}$). Ainsi $f : t \mapsto (t-1)e^{-t}$ est une solution particulière de (**1.**).

Les solutions de (**1.**) sont donc les fonctions

$$t \mapsto (t-1)e^{-t} + \lambda e^{-2t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Puisque -2 est racine du polynôme $X + 2$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = ate^{-2t}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(t) + 2f(t) = ae^{-2t};$$

La fonction f est donc solution si et seulement si $a = 1$. Ainsi $f : t \mapsto te^{-2t}$ est une solution particulière de (**2.**).

Les solutions de (**2.**) sont donc les fonctions

$$t \mapsto te^{-2t} + \lambda e^{-2t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Puisque pour $t \in \mathbb{R}$, $t\cos t = \mathfrak{Re}(te^{2it})$, on commence par déterminer une solution particulière de $y'(t) + y(t) = te^{2it}$. Comme $2i$ n'est pas racine du polynôme $X + 2$, il existe une solution particulière de la forme $f(t) = (at + b)e^{2it}$. Puisque pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = (2iat + 2ib + a)e^{2it},$$

On a

$$f'(t) + 2f(t) = (2(1+i)at + a + 2(1+i)b)\, e^{2it}$$

la fonction f est solution de $y'(t) + y(t) = te^{2it}$ si et seulement si $2(1+i)a = 1$ et $a + 2(1+i)b = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2(1+i)} = \frac{1-i}{4}$ et $b = -\frac{1-i}{8(1+i)} = \frac{i}{8}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{1-i}{4}t + \frac{i}{8}\right)e^{2it}.$$

La partie réelle de f, $t \mapsto \frac{t}{4}\cos(2t) + \frac{2t-1}{8}\sin(2t)$, est une solution particulière de l'équation initiale (**3.**).

Les solutions de (**3.**) sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{t}{4}\cos(2t) + \frac{2t-1}{8}\sin(2t) + \lambda e^{-2t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. D'après le théorème de superposition, une solution particulière de l'équation est

$$t \mapsto (t-1)e^{-t} + te^{-2t} + 2t\cos(2t) + (2t-1)\sin(2t).$$

Les solutions de (**4.**) sont donc les fonctions

$$t \mapsto (t-1)e^{-t} + te^{-2t} + 2t\cos(2t) + (2t-1)\sin(2t) + \lambda e^{-2t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

∎

§2 Ordre 2

Théorème 32 *Soit $(a, b, c, m) \in \mathbb{K}^4$, $a \neq 0$, $P = aX^2 + bX + c$ et S un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors l'équation*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{mt}$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme [a]

1. $t \mapsto R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ *si m n'est pas racine de P (i.e. $am^2 + bm + c \neq 0$).*
2. $t \mapsto tR(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ *si m est une racine simple de P (i.e. $am^2 + bm + c = 0$ et $\Delta \neq 0$).*
3. $t \mapsto t^2R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ *si m est la racine double de P (i.e. $am^2 + bm + c = 0$ et $\Delta = 0$).*

où R est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même degré que le polynôme S.

[a] 32: On peut résumer en disant que l'on peut trouver une solution particulière sous la forme $t \mapsto t^\alpha R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ où α est l'ordre de multiplicité de m par rapport à P.

Exemple 33 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = (t+2)e^{-t}.$$

12.5 Étude d'un circuit RC

§1 Décharge d'un condensateur dans une résistance

Étudions la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R; autrement dit, cherchons la variation du courant i et de la différence de potentiel v en fonction du temps t (figure 12.1).

Soient v_0 la différence de potentiel aux bornes à l'instant initial et q_0 la charge contenue dans le condensateur. Nous savons que $q_0 = Cv_0$.

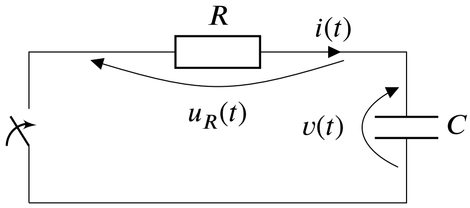


Figure 12.1:

Plaçons nous au bout du temps t après la fermeture de l'interrupteur. À ce moment, la charge qui *reste* dans le condensateur est q (le condensateur a déjà perdu une partie de sa charge), et la différence de potentiel aux bornes (qui varie de v_0 à 0) est devenue v, et

$$q = Cv.$$

On connaît la relation entre l'intensité du courant arrivant sur le condensateur et la variation de charge de l'armature positive

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

D'autre part, aux bornes de R, il y a une différence de potentiel $-v$, et la loi d'Ohm nous donne

$$i = -v/R \quad \text{d'où} \quad C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{R}.$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v = 0.$$

Cette équation différentielle a pour polynôme caractéristique $X + \frac{1}{RC}$ qui a pour racine $\frac{-1}{RC}$. Nous en déduisons

$$v(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Pour déterminer la constante λ, remarquons que si $t = 0$, alors $v(0) = v_0$. Donc $\lambda = v_0$ et

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

C'est une fonction exponentielle décroissante

Le produit RC s'appelle **constante de temps** du circuit et se note τ. Ce nombre caractérise la vitesse de la décharge. Le temps τ est celui au bout duquel la différence de potentiel v_0 est divisée par e; en effet, lorsque $t = \tau$,

$$v(\tau) = v_0 e^{-\tau/\tau} = v_0 e^{-1} = \frac{v_0}{e} \approx 0.37 v_0 \approx \frac{1}{3}v_0.$$

La dérivée est

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

Lorsque $t = 0$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -v_0/\tau$; la tangente en $t = 0$ à la courbe coupe donc l'asymptote $v = 0$ en $t = \tau$.

Soit α l'angle de la tangente au point $(0, v_0)$ avec (Ox); par définition $\tan\alpha = -v_0/\tau$, et l'on voit que

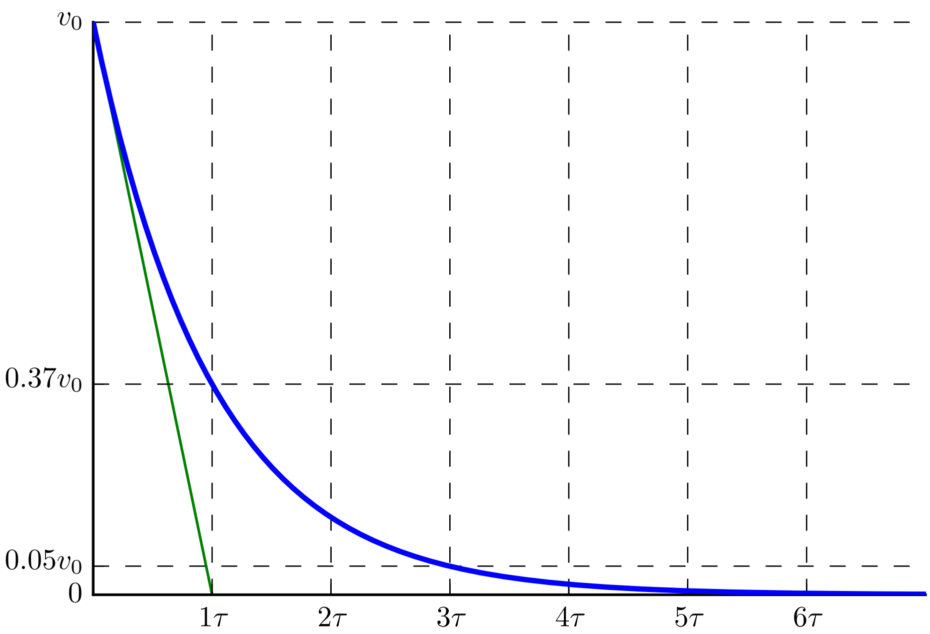


Figure 12.2:

- si τ est grand, l'angle α est petit, et v diminue lentement,
- si τ est petit, l'angle α est grand, et v diminue rapidement.

Le courant i est donnée par

$$i(t) = -\frac{v(t)}{R} = -\frac{v_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = i_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

et son graphe a la même forme que celui de v en fonction du temps t.

Nous allons chercher le temps au bout duquel le courant i et la différence de potentiel v sont égaux à 5% de leurs valeurs initiales. Ce temps t est défini par l'équation

$$v(t) = \frac{5}{100}v_0 = v_0e^{-t/\tau},$$

soit

$$e^{t/\tau} = 20,$$

ou encore

$$t = \ln(20)\tau \approx 2.99573\tau \approx 3\tau.$$

De manière analogue, le temps au bout duquel le courant i et la différence de potentiel v sont égaux au centième de leurs valeurs initiales (temps au bout duquel on considère que la décharge est pratiquement terminée) est

$$t = \ln(100)\tau \approx 4.6\tau.$$

Le temps recherché est environ 5τ.

§2 Régime sinusoïdal d'un dipôle RC

On étudie le dipôle RC en régime sinusoïdal: un générateur impose aux bornes de ce dipôle la tension

$$e(t) = E\cos(\omega t).$$

Initialement, le condensateur est chargé: $v(t=0) = V_0$.

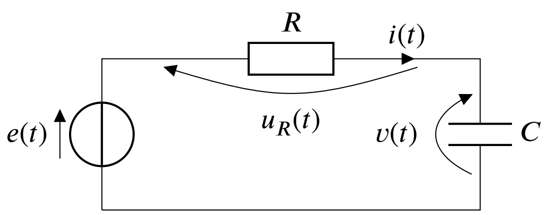


Figure 12.3:

La loi des mailles permet d'écrire

$$Ri(t) + v(t) = e(t)$$

ce qui donne, en tenant compte que $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = E\cos(\omega t) \tag{12.2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{E}{RC}\cos(\omega t) \tag{12.3}$$

Les solutions de l'équation homogène associée ont étés vues précédemment, elle sont de la forme

$$v(t) = \lambda\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation 12.3 sous forme complexe. Puisque

$$\frac{E}{RC} \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(\omega t) = \mathfrak{Re}\left(e^{j\omega t}\right),$$

(pour éviter des confusions avec l'intensité i, on note $j^2 = -1$) et que $j\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X + \frac{1}{RC}$, On cherche une solution particulière (complexe) de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{E}{RC}e^{j\omega t} \tag{12.4}$$

sous la forme $v(t) = ae^{j\omega t}$: injectons dans l'équation 12.4

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = aj\omega e^{j\omega t} + \frac{a}{RC}e^{j\omega t} = \frac{E}{RC}e^{j\omega t}$$

c'est-à-dire, puisque $e^{j\omega t}$ n'est pas nul,

$$a\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right) = \frac{E}{RC}.$$

On trouve donc $a = \frac{E}{1+jRC\omega}$ et donc une solution particulière

$$v_c(t) = \frac{E}{1+jRC\omega}e^{j\omega t} = E\frac{1-jRC\omega}{1+(RC\omega)^2}e^{j\omega t}.$$

L'équation 12.3 étant linéaire et à coefficients réels, une solution particulière est donnée par

$$v_p(t) = \mathfrak{Re}\left(v_c(t)\right) = E\left(\frac{1}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)\right).$$

Résultat assez décevant pour le physicien! Mais () nous reconnaissons une superposition de sinusoïdes : nous allons mettre $v_c(t)$ sous la forme $A\exp\left(j\left(\omega t+\varphi\right)\right)$. On a

$$A = \left|\frac{E}{1+jRC\omega}\right| = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg(E) - \arg(1+jRC\omega) = 0 - \arg(1+jRC\omega)$$

En s'assurant que $\omega > 0$, on peut choisir

$$A = \left|\frac{E}{1+jRC\omega}\right| = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = -\arctan(RC\omega).$$

Finalement, une solution particulière de l'équation 12.3 est

$$v_p(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right).$$

et la solution générale est donnée par les fonctions

$$v(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right) + \lambda\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Initialement, on a $v(t=0) = V_0$ et donc

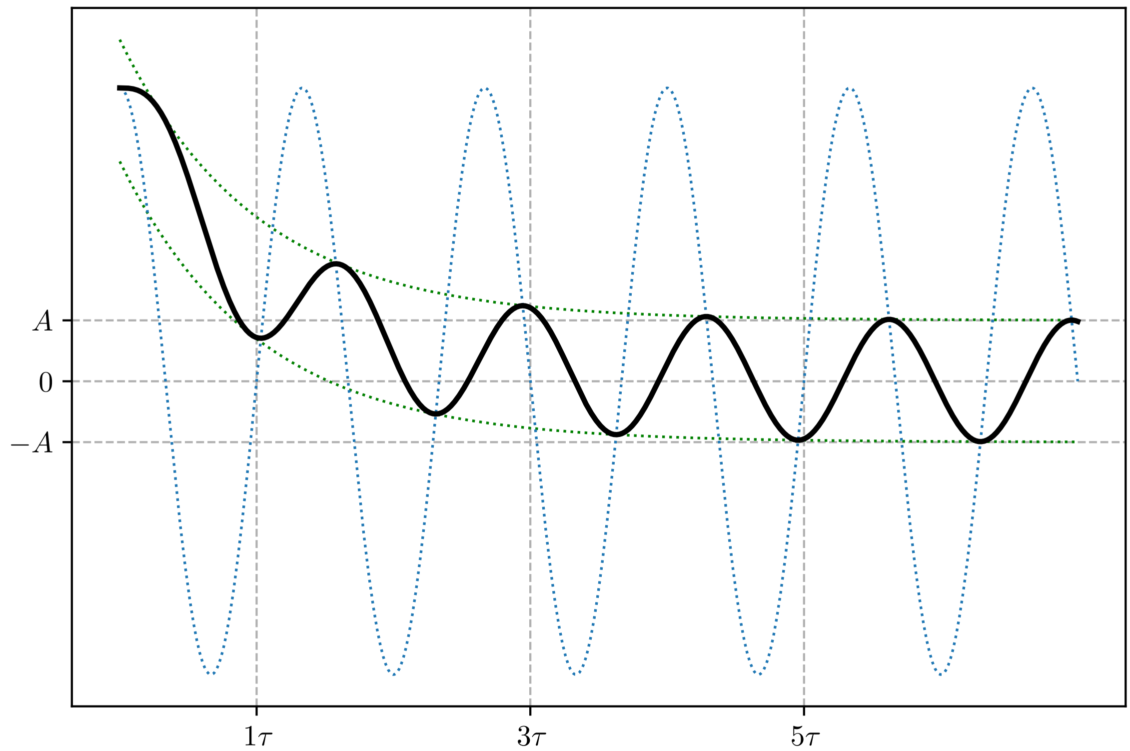
$$\frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\left(\varphi\right) + \lambda = V_0,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda = V_0 - \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\varphi = V_0 - \frac{E}{1+(RC\omega)^2}.$$

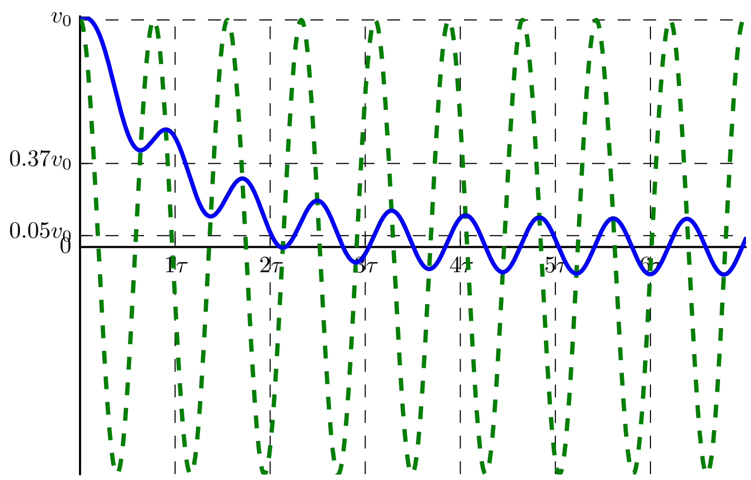
Et finalement, la solution vérifiant $v(t=0) = V_0$ est donnée par

$$v(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right) + \left(V_0 - \frac{E}{1+(RC\omega)^2}\right)\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$



Le terme $\lambda \exp(-\frac{t}{RC})$ est un terme transitoire qui est pratiquement négligeable au bout de $5\tau = 5RC$. Le terme $A\cos(\omega t - \varphi)$ est le régime permanent.

Si l'on impose $v(t=0) = v_0$, on obtient cette fois-ci:



12.6 Étude d'un circuit RLC

Si au circuit RC, on ajoute une inductance en série, la différence de potentiel aux bornes de l'inductance est
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$
À l'aide de la loi des mailles; on obtient

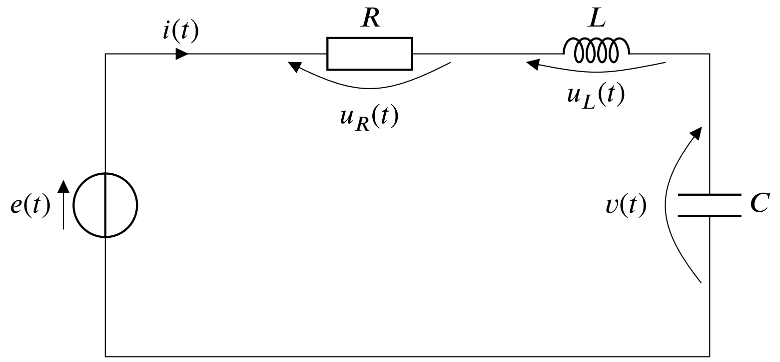


Figure 12.4:

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t)$$

et puisque $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, on obtient

$$LC\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t). \tag{12.5}$$

§1 Étude du régime libre

Nous allons nous intéresser dans un premier temps au comportement du circuit lorsque le condensateur a été préalablement chargé ($v(t=0) = v_0$) et lorsqu'il se décharge dans la bobine et la résistance.

L'équation différentielle correspondant à ce régime libre est l'équation homogène associée à (12.5)
$$LC\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = 0. \tag{12.6}$$
Posons pour simplifier l'écriture

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

nous obtenons l'équation fondamentale

$$\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v(t) = 0. \tag{12.7}$$

Son polynôme caractéristique est $P = X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2$. Nous devons distinguer trois cas, suivant que le discriminant $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2)$ est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Premier cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$. C'est-à-dire $(R/2L)^2 > 1/LC$, ou encore

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a deux racines réelles,

$$r_1 = -\alpha + \beta, \quad r_2 = -\alpha - \beta, \quad \text{où} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = Ae^{(\beta-\alpha)t} + Be^{-(\beta+\alpha)t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = C\left(A(\beta-\alpha)e^{(\beta-\alpha)t} - B(\beta+\alpha)e^{-(\beta+\alpha)t}\right).$$

Compte tenu des conditions initiales pour $t = 0$:

$$v(t=0) = v_0 \quad \text{et} \quad i(t=0) = 0,$$

Les constantes A et B sont donc données par le système

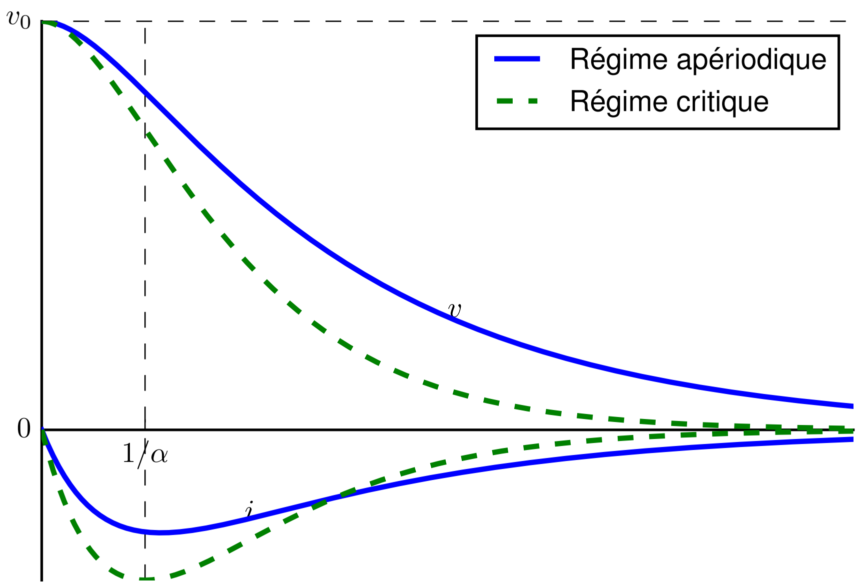
$$\begin{cases} A + B & = v_0 \\ A(\beta-\alpha) - B(\beta+\alpha) & = 0 \end{cases} \iff A = \frac{v_0(\beta+\alpha)}{2\beta} \text{ et } B = \frac{v_0(\beta-\alpha)}{2\beta}.$$

Compte-tenu du fait que $\beta^2 - \alpha^2 = -\omega_0^2$, on obtient

$$v(t) = \frac{v_0}{2\beta}\left((\beta+\alpha)e^{(\beta-\alpha)t} + (\beta-\alpha)e^{-(\beta+\alpha)t}\right)$$

$$\text{et } i(t) = -\frac{v_0 C\omega_0^2}{2\beta}\left(e^{(\beta-\alpha)t} - e^{-(\beta+\alpha)t}\right).$$

On remarquera que les coefficients $\beta - \alpha$ et $-(\beta + \alpha)$ sont tous deux strictement négatifs. La fonction v, somme de deux exponentielles décroissantes, est elle-même décroissante. On dit qu'il y a **régime apériodique amorti**.



Ainsi, chose curieuse, v décroît lentement, et cependant $|i|$ passe par un maximum, correspondant bien entendu au point d'inflexion de v, puisque v'' s'annule en même temps que i'.

Deuxième cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ C'est-à-dire $(R/2L)^2 = 1/LC$, ou encore

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a une racine double, à savoir $r = -\alpha$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = e^{-\alpha t}(A + Bt),$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer. De plus,

$$i(t) = C\,(-\alpha(A + Bt) + B)\,e^{-\alpha t}.$$

Un calcul analogue au précédent fournit aussitôt

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}(1 + \alpha t) \qquad\qquad i(t) = -CV\alpha^2 t e^{-\alpha t}.$$

Puisque $i = C\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$, on voit que v est encore décroissante. D'autre part $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = CV\alpha^2 e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$. Donc i passe par un maximum lorsque $t = 1/\alpha$, correspondant bien sûr à un point d'inflexion pour v. Les graphe ont la même allure que dans le cas précédent. On dit qu'il y a **régime critique**. C'est également un régime apériodique amorti.

Troisième cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ C'est-à-dire $(R/2L)^2 < 1/LC$, ou encore

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = -\alpha + j\beta \quad r_2 = -\alpha - j\beta \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, v(t) &= e^{-\alpha t}\,(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))\\ \text{et } i(t) &= Ce^{-\alpha t}\,((A\beta - B\alpha)\cos(\beta t) - (B\alpha + A\beta)\sin(\beta t))\,.\end{aligned}$$

Les conditions initiales conduisent cette fois à $A = v_0$ et $A\alpha - B\beta = 0$. D'où $B = A\alpha/\beta = v_0\alpha/\beta$ et

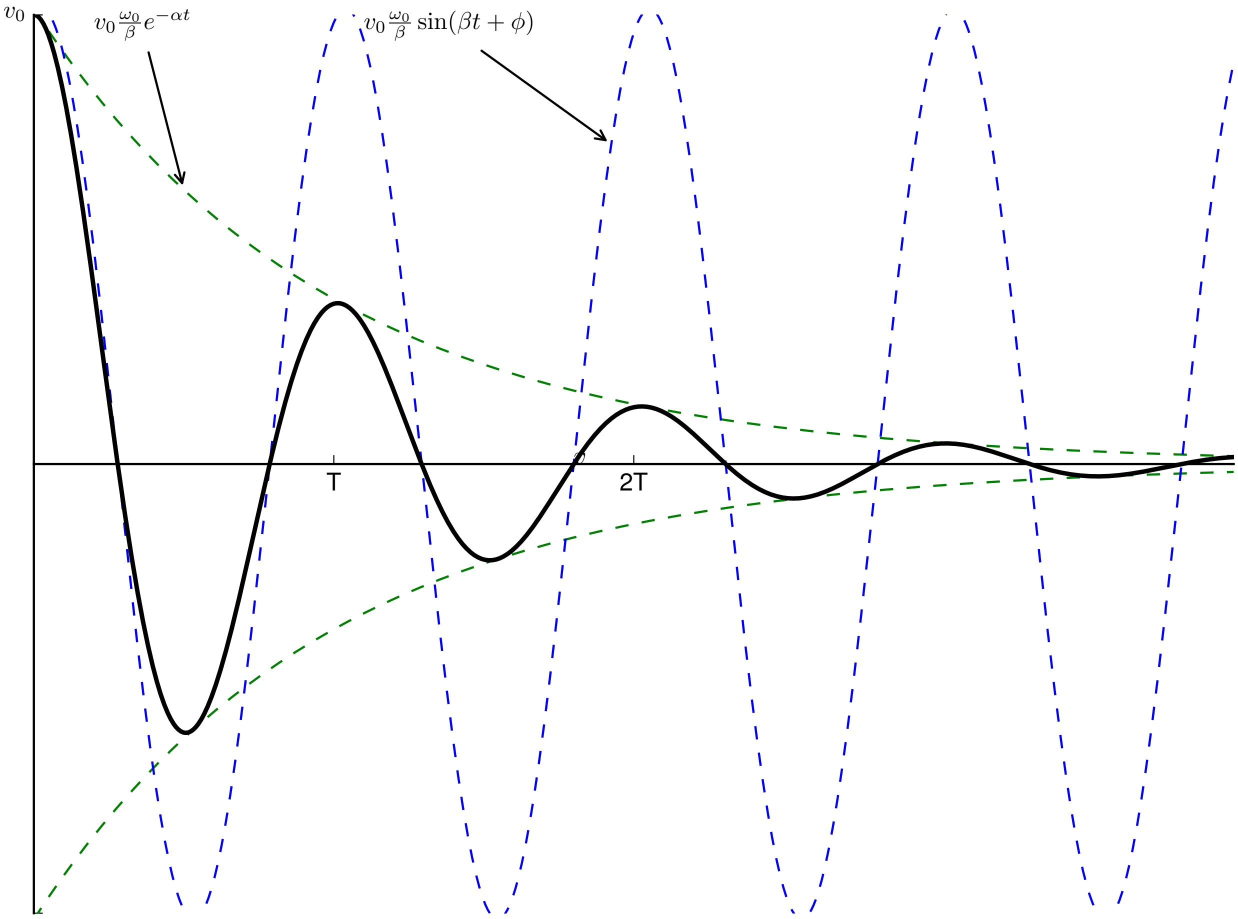
$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right).$$

Si l'on pose $\varphi = \arctan(\beta/\alpha)$, on en déduit

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\beta}{\omega_0};$$

d'où

$$v(t) = v_0\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi) \qquad\qquad i(t) = \frac{Cv_0\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t).$$



On dit qu'il y a **régime pseudo-périodique**.

§2 Oscillations forcées

Prenons $\alpha = 2$, $\omega_0 = 3$ (cas du régime pseudo-périodique). Considérons maintenant que le signal d'entrée est de la forme $A\sin(\omega t)$.

Plus précisément, nous étudions l'équation (12.5) équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = 3\sin(2t). \tag{12.8}$$

Considérons alors l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = \exp(j2t). \tag{12.9}$$

Puisque $2j$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X^2 + 4X + 9$, on peut trouver une solution particulière de (12.9) sous la forme

$$v(t) = Be^{j2t}.$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 2Bje^{j2t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} = -4Be^{j2t}$$

ce qui donne, en injectant dans (12.9)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = e^{j2t} &\iff (-4B + 8Bj + 9B)e^{j2t} = e^{j2t}\\ &\iff B\,(5+8j) = 1\\ &\iff B = \frac{1}{5+8j} = \frac{5-8j}{89}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (12.9) est donc

$$v_c(t) = \frac{5-8j}{89}\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right),$$

L'équation (12.5) étant linéaire à coefficients réels, on en déduit une solution particulière donnée par

$$v_p(t) = 3\,\mathfrak{Im}\left(v_c(t)\right) = \frac{15}{89}\sin(2t) - \frac{24}{89}\cos(2t) = \frac{3}{89}(5\sin(2t) - 8\cos(2t))$$

ou bien avec $\varphi = \arctan(8/5)$

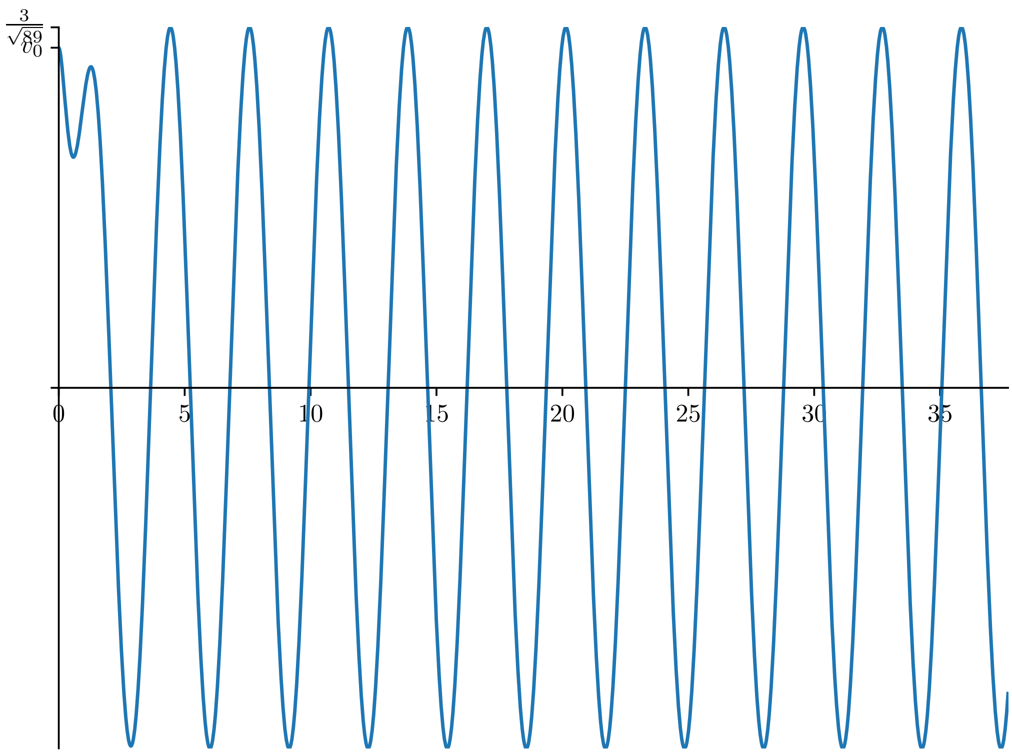
$$\begin{aligned}v_c(t) &= \frac{1}{\sqrt{89}}e^{-j\varphi}e^{2jt} = \frac{1}{\sqrt{89}}e^{j(2t-\varphi)}\\ v_p(t) &= \frac{3}{\sqrt{89}}\sin\left(2t-\varphi\right).\end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$v(t) = e^{-2t}\left(\lambda\cos\left(\sqrt{5}t\right) + \mu\sin\left(\sqrt{5}t\right)\right) + \frac{3}{\sqrt{89}}\sin\left(2t-\varphi\right).$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer en fonction des conditions initiales $v(t=0)$ et $i(t=0)$.

Remarquons qu'au bout de quelques périodes, on a $v(t) \approx \frac{3}{\sqrt{89}}\sin\left(2t-\varphi\right)$.



Voici un autre exemple, avec des calculs un peu plus pénibles, mais un résultat plus amusant…