Corps des nombres réels

MP2I

Aperçu

1. Structures
2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
3. Le premier degré
4. Puissances, racines
5. Congruences dans $\mathbb{R}$

1. Structures
1.1 Le corps des nombres réels
1.2 Soustraction, division
1.3 Une propriété importante

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

1. Structures
1.1 Le corps des nombres réels
1.2 Soustraction, division
1.3 Une propriété importante

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

A

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une première loi de composition interne, l'**addition** notée « + », qui possède les propriétés suivantes:

- L'addition des nombres réels est **associative**

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z).$$

  On note cette somme $x + y + z$.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède un **élément neutre pour l'addition**. Cet élément est noté 0:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x.$$

- Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel x' tel que $x + x' = 0$ (x' est unique).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = 0.$$

  Le nombre x' est noté $-x$ et est appelé l'**opposé** de x.

- La loi de composition interne « + » est **commutative** dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x.$$

A

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une second loi de composition interne, la **multiplication**, notée ou bien «$\times$» ou bien, plus simplement par juxtaposition. À tout couple (x, y) de nombres réels, cette loi fait correspondre le nombre réel $z = x \times y = xy$.

- La multiplications des nombres réels est **associative**.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x(yz) = (xy)z = xyz.$$

- Le nombre réel 1, qui est différent de 0, est neutre pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x.$$

- Tout nombre réel *sauf* 0 admet un inverse pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, \exists x' \in \mathbb{R}, xx' = x'x = 1.$$

  x' est appelé l'**inverse** de x; on le note $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}.

- La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération **commutative**.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx.$$

A De plus, ces propriétés sont liées par la propriété de **distributivité** de la la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x.(y+z) = x.y + x.z \text{ et } (x+y).z = x.z + y.z.$$

L'ensemble de ces propriétés ce résume de la façon suivante:

T *Le triplet* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un* ***corps****.*

N On note $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des éléments qui admettent un inverse pour la multiplication. On a donc $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

1. Structures
1.1 Le corps des nombres réels
1.2 Soustraction, division
1.3 Une propriété importante

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels, l'opération «réciproque» de l'addition est définie par l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+(-b) \end{array}.$$

On note cette loi de composition interne par le signe «$-$», et on l'appelle la **soustraction**.

R

1. La loi «$+$» est associative. La loi «$-$» n'est pas associative.
2. La loi «$+$» est commutative. La loi «$-$» n'est pas commutative.
3. La loi «$+$» admet dans $\mathbb{R}$ un élément neutre. La loi «$-$» n'admet pas dans $\mathbb{R}$ d'élément neutre.

D

L'opération «réciproque» de la multiplication est la **division**, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a\times\dfrac{1}{b} \end{array}.$$

Le **quotient** x de a par b est noté $x=\frac{a}{b}=a/b$.

1. Structures
1.1 Le corps des nombres réels
1.2 Soustraction, division
1.3 Une propriété importante

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

T

La nullité du produit de deux nombres réels implique celle d'un facteur au moins:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0 \iff (x = 0 \ \textit{ou} \ y = 0)\,.$$

Plus généralement, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

Démonstration.
Supposons $x = 0$, puisque $x = 0 = 0 + 0 = x + x$,

$$xy = (x + x)y = xy + xy$$

et donc

$$xy - (xy) = 0 = xy + xy - (xy) = xy.$$

Ainsi $xy = 0$. En supposant $y = 0$, on aurait démontré de même que $xy = 0$.

T

La nullité du produit de deux nombres réels implique celle d'un facteur au moins:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0) .$$

Plus généralement, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

Réciproquement, supposons

$$x \neq 0 \text{ et } xy = 0;$$

le nombre x, n'étant pas nul, admet un inverse $\frac{1}{x}$; xy étant nul, on a

$$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \times 0 = 0;$$

le premier membre devient par associativité:

$$\left(\frac{1}{x} \times x\right) \times y = 1 \times y = y.$$

On a donc $y = 0$. En supposant $y \neq 0$ et $xy = 0$, on aurait démontré de même que $x = 0$.

E

Déterminer les réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On peut écrire

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\iff (x-2)(x-3) = 0 \\ &\iff \boxed{x - 2 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0} \end{aligned}$$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation notée $\leq$. Cette relation entre deux réel, $x \leq y$, ou $y \geq x$, se lit «x est inférieur ou égal à y», «x est au plus égal à y», «y est supérieur ou égal à x», «y est au moins égal à x».
Cette relation englobe le cas d'égalité; pour l'exclure on utilise la relation $x < y$ qui se lit «x est strictement inférieur à y», ou «y est strictement supérieur à x».

$$x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

On a donc

$$x \leq y \iff x < y \text{ ou } x = y.$$

N

$$\mathbb{R}_+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\} \qquad \mathbb{R}_- = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\} \qquad \mathbb{R}^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\}$$
$$\mathbb{R}_+^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\} \qquad \mathbb{R}_-^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \,\}$$

P

On dit que la relation $\leq$ est une ***relation d'ordre total*** *sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que*

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est* ***réflexive****:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est* ***antisymétrique****:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est* ***transitive****:*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est* ***totale****:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

T

- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle réflexive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle transitive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle totale?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle antisymétrique?

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

P

1. *Pour comparer deux nombres réels, on peut étudier le signe de leur différence.*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

2. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition.*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \iff x + z \leq y + z.$$

3. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la multiplication par les réels positifs.*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (z \geq 0 \ \text{ et } \ x \leq y) \implies xz \leq yz.$$

Nous n'insisterons jamais assez sur le piège tendu par l'assertion .3. En effet, on voit encore des gens affirmer

$$\frac{a}{b} \leq 1 \implies a \leq b,$$

sans prendre garde au signe de b.

L

Soit $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$, *alors*

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \qquad \text{et} \qquad x < y \iff x^2 < y^2.$$

En d'autre termes, on dit que la fonction $x \mapsto x^2$ *est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel

$$|x| = \max\{\, x, -x \,\} = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

P

Soient x, y des réels et $a \in \mathbb{R}_+$.

1. *On a* $|x| \geq 0$ *; de plus*
   $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$ *;*
   en particulier $|-x| = |x|$.
3. $|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$.
4. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
5. $|x| < a \iff -a < x < a$.
6. $\sqrt{x^2} = |x|$ *et* $|x|^2 = x^2$.
7. *Si* $x \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$.
8. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $|x^n| = |x|^n$.
9. $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
10. $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

P

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

De plus, $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si $xy \geq 0$.

Étant donné $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une récurrence immédiate montre que l'on a toujours l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

C *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

P

Caractère archimédien de $\mathbb{R}$

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \times a > b.$$

En particulier, pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

On l'appelle **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

R

- La double inégalité $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ s'écrit également

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

- La partie entière de x est donc le plus grand entier inférieur ou égal à x. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor).$$

E

1. $\lfloor \pi \rfloor =$
2. $\lfloor 1.345 \rfloor =$
3. $\lfloor 12 \rfloor =$
4. $\lfloor -5 \rfloor =$
5. $\lfloor -23.8 \rfloor =$
6. $\lfloor 11.8 \rfloor =$

La partie entière n'est ni «l'entier sans la virgule», ni «l'entier le plus proche».

P

1. *La partie entière d'un réel est un entier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

2. *Les nombres entiers sont les seuls égaux à leurs parties entières*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

R En informatique, on utilise fréquemment la **partie entière supérieure**, notée $\lceil x \rceil$, caractérisée par

$$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

On a donc

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & : x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & : x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

R Un nombre décimal est un nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\lfloor x \times 10^p \rfloor \leq x \times 10^p < \lfloor x \times 10^p \rfloor + 1$$

D'où, en divisant chaque membre par 10^p on trouve

$$\frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}.$$

P *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors*

1. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut.*
2. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor + 1}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.*

E Le nombre de Neper $e = 2.7182818284590\ldots$ peut être successivement encadré par

$2 \leq e < 3$	valeurs approchées à 10^0 près par défaut et par excès.
$2.7 \leq e < 2.8$	valeurs approchées à 10^{-1} près par défaut et par excès.
$2.71 \leq e < 2.72$	valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut et par excès.
$2.718 \leq e < 2.719$	valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès.
$2.7182 \leq e < 2.7183$	valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

P

- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel, et même un nombre décimal z, tel que $x < z < y$.*
- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre irrationnel, tel que $x < z < y$.*

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un réel M est un **majorant** de A si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

  On dit alors que la partie A est **majorée**.
- On dit qu'un réel m est un **minorant** de A si

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

  On dit alors que la partie A est **minorée**.
- Une partie majorée et minorée est dite **bornée**.

La valeur absolue permet de caractériser facilement les parties bornées de $\mathbb{R}$.

P

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

E

- $\mathbb{R}$ ______________________.
- $[0,1]$ ____.
- $]0,1]$ ____ ______.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Partie entière
2.6 Partie entière supérieure
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Densité
2.9 Partie bornée
2.10 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A ou le **maximum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, x \leq a \qquad .$$

Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

- On dit que a est **le plus petit élément** de A ou le **minimum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, a \leq x \qquad .$$

Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

3.1 L'équation $ax + b = 0$

3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

3.1 L'équation $ax + b = 0$

3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

On considère l'équation $ax + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solution de cette équation.

- Si $a \neq 0$, l'équation a une solution unique $-b/a$.

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

  On a $\mathscr{S} = \{ -b/a \}$.
- Si $a = 0$,
  - si $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution. On a $\mathscr{S} = \emptyset$.
  - si $b = 0$, tout nombre réel en est solution. On a $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

3.1 L'équation $ax + b = 0$

3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

Commençons par deux équations très simples,

$$2x - y = 1 \tag{1}$$
$$x + y = 5. \tag{2}$$

Nous pouvons interpréter ce système *par lignes* ou *par colonnes*.
La première approche consiste à s'intéresser séparément à chaque équation (les *lignes*).
L'équation $2x - y = 1$ est représentée par une droite dans le plan (Oxy). La seconde équation $x + y = 5$ est représentée par une seconde droite.

La seconde approche est de s'intéresser aux *vecteurs colonnes* du membre de gauche qui produisent le vecteur du membre de droite. Les deux équations s'écrivent sous forme d'un seule *équation vectorielle* :

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Le problème est alors de trouver la combinaison de vecteurs du membre de gauche qui produit le vecteur du membre de droite.
Les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 1)$ sont représentés en gras. Les inconnues sont les scalaires x et y qui multiplient les vecteurs colonne. L'idée est d'additionner 2 fois la colonne 1 et 3 fois la colonne 2. Géométriquement, on trouve un parallélogramme. De manière algébrique, cela produit le bon vecteur $(1, 5)$, second membre de notre équation. Ce qui confirme la solution $x = 2$, $y = 3$.

D

Le **déterminant du système**

$$\left\{\begin{array}{lll} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{array}\right.$$

est le réel $ad - bc$, noté $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

T

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{lll} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{array}\right.$$

1. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, *alors le système admet une et une seule solution.*
2. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, *alors*
   - *le système admet aucune solution*
   - *ou bien le système admet une infinité de solutions.*

E

Résoudre les systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 4x & -3y & = -17 \end{array}\right.$.
2. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -1 \end{array}\right.$.
3. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -18 \end{array}\right.$.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ fois}}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^\star$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

P *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $p, q \in \mathbb{N}$:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p / a^q = a^{p-q}$;
3. *Si* $a \neq 0$, $a^{-p} = 1/a^p = (1/a)^p$;
4. $(a^p)^q = a^{pq}$;
5. $a^p b^p = (ab)^p$;
6. $a^p / b^p = (a/b)^p$;
7. $a > 1$ *et* $p < q \implies a^p < a^q$;
8. $0 < a < 1$ *et* $p < q \implies a^p > a^q$;
9. $p > 0$ *et* $0 < a < b \implies a^p < b^p$;
10. $p < 0$ *et* $0 < a < b \implies a^p > b^p$.

Ceci reste valable pour $a, b \in \mathbb{R}^\star$ *et* $p, q \in \mathbb{Z}$.

P *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b| \iff (a = b \text{ ou } a = -b).$$

1. Structures

2. Relation d'ordre sur ℝ

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

5. Congruences dans ℝ

D

Étant donnée $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un réel positif unique dont le carré est égale à a. On l'appelle la **racine carrée arithmétique** de a et on la note $\sqrt{a}$.

P

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

4.1 Puissances entières

4.2 Racines

4.3 Second degrée

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

Dans les rappels ci-dessous, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$; ce nombre est appelé le **discriminant** du trinome.

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, (E) a une et une seule solution $\dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solutions.

Signe du trinome $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$:

x		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2b}$	
$ax^2 + bx + c$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

- Si $\Delta = 0$:

x		$\frac{-b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

- Si $\Delta < 0$: partout le signe de a.

Pour résumé: $ax^2 + bx + c$ a le signe de a, sauf éventuellement entre ses racines.

1. Structures

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

5. Congruences dans $\mathbb{R}$

D

Soit x, y, ω trois réels. L'écriture

$$x \equiv y \pmod{\omega}$$

signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\omega$. On dit que «x est **congru** à y **modulo** ω». Les réels x et y diffèrent donc d'un multiple entier de ω, ce que l'on peut écrire $x - y \in \omega\mathbb{Z}$.

N Pour tous nombres réels x et ω, on note $x+\omega\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $x+k\omega$, où $k\in\mathbb{Z}$. Autrement dit

$$x+\omega\mathbb{Z}=\{\,x+k\omega \mid k\in\mathbb{Z}\,\}.$$

Cet ensemble est la **classe de congruence** de x modulo ω. Il contient notamment x lui-même.

E Soit $\omega=1$. La classe de congruence de 0 modulo 1 n'est autre que $\mathbb{Z}$; celle de $\frac{1}{3}$ est l'ensemble suivant

$$\left\{\,\dots,-\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\dots\,\right\}.$$

E L'ensemble des multiples entiers de π sera donc noté $\pi\mathbb{Z}$, celui des multiples entiers de 2π est noté $2\pi\mathbb{Z}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

P

Règles de calcul sur les congruences

Soient $x, x', y, y', \omega \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Si* $x \equiv y \pmod{\omega}$ *et* $x' \equiv y' \pmod{\omega}$ *alors* $x + x' \equiv y + y' \pmod{\omega}$.
2. $x \equiv y \pmod{\omega}$ *si et seulement si* $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\omega}$.
3. *Si* $x \equiv y \pmod{n\omega}$ *alors* $x \equiv y \pmod{\omega}$

T Déterminer l'unique nombre réel α appartenant à $[0, 2\pi[$ et congru à $-\frac{7}{15}\pi$ modulo 2π.

T L'assertion suivante est-elle vraie en général ?

$$x \equiv y \pmod{\varphi} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{\varphi}.$$

T Démêler le nécessaire et le suffisant entre les trois propositions suivantes

$$x \equiv y \pmod{\pi}, \quad x \equiv y \pmod{2\pi}, \quad x \equiv y \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$