♫ 14 Suites de nombres réels et complexes

14.1 L'ensemble des suites

Solution 14.1

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < 0.$$

14.2 Limite d'une suite

Solution 14.2

Il y a énormément de solutions possibles...

1.

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \geq k, u_n = \lambda$$

ou également

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, u_{n+1} = u_n.$$

2.

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, u_{n+1} \geq u_n.$$

3.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } \left|u_n\right| > \varepsilon.$$

4.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k, u_{n+1} < u_n.$$

Solution 14.3

Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, nous avons [1]

$$\frac{1}{4n+6} \leq \varepsilon \qquad \Longleftarrow \qquad n \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, nous savons qu'il existe un entier n_0 tel que

$$n_0 \geq \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{2},$$

(On peut aussi poser explicitement $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{4\varepsilon} \right\rfloor + 235$ par exemple). Donc si $n \geq n_0$, nous aurons $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$.

Par suite, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ nous ayons $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite $\left(u_n\right)$ admet la limite $\frac{1}{2}$.

Solution 14.4

[1]Noter bien le sens de l'implication ici. Sur cet exemple, nous pouvions mettre une équivalence $\iff$, mais ce n'est pas toujours possible. Heureusement, la définition de limite ne demande qu'une implication!

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \geq 3n - 1 \leq 3n$ et $2n + 3 \geq 2n$, donc

$$u_n \leq \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}.$$

Cette majoration restant valable pour $n = 0$, la suite (u_n) est majorée par $\frac{3}{2}$.

2. Pour $n \geq 1$, on a

$$\left|u_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n - 2 - 6n - 9}{4n + 6}\right| = \frac{11}{4n + 6} \leq \frac{11}{4n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $n_0 = \left\lceil \frac{4}{11}\varepsilon \right\rceil$, alors...

Solution 14.5

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-5}{4n^2 + 6}\right| = \frac{5}{4n^2 + 6}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon \iff 5 \leq 4n^2\varepsilon + 6\varepsilon \iff \frac{5 - 6\varepsilon}{4\varepsilon} \leq n^2. \iff \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} \leq n^2.$$

Posons $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq n_0$, alors

$$n^2 \geq \frac{5}{4\varepsilon} \geq \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$$

et alors

$$\left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Conclusion

$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Solution 14.7

Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A$. Or

$$u_n \geq A \iff 3n - 17 \geq A \iff n \geq \frac{A + 17}{3}.$$

Posons $n_0 = \max(0, \lfloor A \rfloor + 7)$, alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a

$$n \geq \lfloor A \rfloor + 7 \geq A + 6 \geq \frac{A + 17}{3}$$

et donc $u_n \geq A$.

Conclusion

On a montré

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution 14.8

Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A$.

$$u_n \geq A \iff 3n^2 - 9n + 7 \geq A \iff 3n(n-3) \geq A - 7.$$

Posons $n_0 = \max\left(4, \left\lfloor \frac{A}{3} \right\rfloor\right)$, alors si $n \geq n_0$, on a simultanément

$$3n \geq A \geq A - 7 \text{ et } 3n \geq 0 \text{ et } n - 3 \geq 1$$

et donc

$$3n(n-3) \geq A - 7. \text{ et donc } u_n \geq A.$$

Conclusion

On a montré

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Solution 14.10

Solution 14.12

Solution 14.13

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, u_n \in \left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right].$$

Or le segment $\left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right]$, de longueur $\frac{1}{2}$ contient au plus un entier. Or il contient l'entier u_{n_0}, et (u_n) est à valeurs entières, on a donc

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}.$$

La suite (u_n) est donc stationnaire.

2. *Variante, en utilisant la suite* (u_{n+1}). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

La suite (u_{n+1}), extraite de (u_n) converge également vers ℓ d'où $\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Appliquons ce qui précède avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$: il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}.$$

Considérons un $n \geq n_0$. La suite (u_n) étant à valeurs entières (il serait temps de s'en servir !), on a $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$. Puisque $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}$, on a nécessairement $u_{n+1} - u_n = 0$.

Conclusion : Nous avons déterminé un entier n_0 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_{n+1} = u_n;$$

c'est-à-dire, la suite (u_n) est stationnaire.

Solution 14.14

14.3 Suite et relations d'ordres

Solution 14.15
Solution 14.16

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots n$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$
c'est-à-dire
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
Or
$$\frac{n^2}{n^2+n} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ et } \frac{n^2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, la suite (a_n) est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

2. Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$,
$$\frac{n}{n^2+2n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots 2n$, on obtient (il y a $2n$ termes)
$$\frac{2n^2}{n^2+2n} \leq b_n \leq \frac{2n^2}{n^2+1}.$$
Or $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$. D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, la suite (b_n) est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 2.$$
Enfin, pour $k \in [\![1, n^2]\!]$,
$$\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n^2} \leq \frac{n}{n^2+k}$$
En sommant ces inégalité pour $k = 1 \dots n^2$, on obtient
$$\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2n} \leq c_n.$$
Or $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$. D'après le théorème d'existence de limite par minoration, la suite (c_n) est divergente et
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty.$$

Solution 14.18

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{k} \geq 0$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \geq \sqrt{n}$. Or $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc par comparaison
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

On peut aussi remarquer que $\sqrt{k} \geq 1$ et donc $u_n \geq n$.

Solution 14.19

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leq u_n.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a par comparaison

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

Solution 14.20

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx.$$

En sommant ces inégalités, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n}(kx) \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n(n+1)}{2}x \tag{2}$$

d'où

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{n}{n^2} \leq \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x. \tag{3}$$

Or

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{n}{n^2} = \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x = \frac{x}{2}.$$

D'après le théorème d'existence de limite par comparaison, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}.$$

Solution 14.22

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

De plus

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$\text{et } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1}$$

Remarque Il est intéressant de remarquer que chaque terme de la somme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Néanmoins, cela ne met pas en défaut le résultat du cours sur les sommes de limites. En effet, ici le nombre de termes dans la somme tend également vers l'infini avec n.

Solution 14.23

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq k^n u_0$. En effet, par récurrence:

- $u_0 \geq k^0 u_0$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq k^n u_0 \implies u_{n+1} \geq k u_n \geq k^{n+1} u_0$.

Or $k > 1$ et $u_0 > 0$, donc

$$\lim_{n\to\infty} k^n u_0 = +\infty.$$

Par comparaison, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

Solution 14.24

Par récurrence sur $n \in [\![\alpha, +\infty[\![$, on obtient

$$\forall n \geq \alpha, |u_n| \leq k^{n-\alpha}|u_\alpha| = k^n \frac{|u_\alpha|}{k^\alpha}.$$

Or $0 < k < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ puis

$$\lim_{n\to\infty} k^n \frac{|u_\alpha|}{k^\alpha} = 0.$$

D'après le théorème d'existence de limite par domination, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Solution 14.25

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\ell| \text{ et } |\ell| < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|\ell| < k < 1$ (par exemple $k = (|\ell|+1)/2$). On a $k - |\ell| > 0$ et $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \ell$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq k - |\ell|.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on peut affirmer pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \cancel{|\ell|} \leq k - \cancel{|\ell|}.$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+1}| \leq k|u_n|.$$

Par une récurrence immédiate, on a pour $n \geq n_0$,

$$|u_n| \leq k^{n-n_0}\left|u_{n_0}\right|.$$

Et puisque $k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a par le théorème d'existence de limite par domination

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Solution 14.27

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [0,1]$ donc

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \leq v_n \leq 1$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = 1$, donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1. \text{ et } \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Solution 14.29

$i \implies ii$. On suppose que M est la borne supérieure de A ; c'est-à-dire le plus petit des majorants de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $M - \frac{1}{n+1} < M$, donc $M - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A. Il existe donc un élément $a_n \in A$ tel que

$$a_n > M - \frac{1}{n+1}.$$

De plus, M est un majorant, on a

$$a_n \leq M.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} M - 1/n + 1 = M$ et

$$M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant vers M.

$ii \implies iii$. Soit $\left(a_n\right)$ une suite d'éléments de A convergeant vers M.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \max\left\{ a_0, a_1, \dots, a_n \right\}$. Or

$$\left\{ a_0, a_1, \dots, a_n \right\} \subset \left\{ a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \right\} \subset A$$

et donc

$$b_n \leq b_{n+1} \leq M.$$

puisque M est un majorant de A.

Enfin, par construction de b_n, on a $b_n \geq a_n$. Puisque $\left(a_n\right)$ converge vers M, l'encadrement

$$a_n \leq b_n \leq M$$

montre que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

$iii \implies i.$

Supposons qu'il existe une suite croissante d'éléments de A, notée (b_n), convergente vers M. Puisque M est un majorant de A, il reste à montrer que c'est le plus petit.

Soit M' un autre majorant de A, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq M'$$

Puisque la suite (b_n) est convergente de limite M, on a donc

$$M \leq M'.$$

M est donc le plus petit des majorant de A, c'est-à-dire $M = \sup A$.

14.4 Opérations algébriques

Solution 14.30

Le numérateur et dénominateur sont les sommes de n termes consécutifs de suites arithmétiques:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n \times 2n}{2} \text{ et } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

On a donc pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2n^2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1 + 1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Solution 14.31

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'existence de limite par domination, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n = \frac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n = \frac{n^2}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + (0.7)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + (0.7)^n.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} 0.7^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + (0.7)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} (0.7)^n = 1.$$

3. On pour $n \geq 1$,

$$u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1 = n^3 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 3^n - n^2 2^n = 3^n \left(1 + n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$
On $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ et par croissance comparée $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(3/2)^n} = 0$. On a donc
$$\lim_{n\to\infty} 3^n - n^2 2^n = +\infty.$$

5. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite (cf. le cours).

6. Pour $n \geq 1$,
$$u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = \frac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1/n}\right)} = \frac{n}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1/n}}.$$
Or
$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1/n} = 0.$$
On a donc
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = +\infty.$$

Solution 14.32

On note q la raison de la suite (u_n). Nécessairement, $q \neq 1$, sinon (u_n) est constante et $\lim_{n\to\infty} u_0 + \dots u_n = +\infty$.

On a alors dans ce cas
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{90}{1-q} + \frac{90}{1-q} q^{n+1}.$$
Cette suite admet une limite finie si, et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ et donc
$$\lim_{n\to\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{90}{1-q}.$$
On en déduit que $\frac{90}{1-q} = 150$, d'où $q = \frac{2}{5}$.

Solution 14.33

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln u_{n+1}^2 - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2u_n - \ln 2 \\ = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln u_n\right) - \ln 2 = \frac{1}{2}\left(\ln u_n - \ln 2\right) = \frac{1}{2} v_n. \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \frac{1}{2^n} = \frac{-\ln 2}{2^n}$, d'où $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ De plus $\ln u_n = v_n + \ln 2$, donc
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n + \ln 2} = \lim_{n\to\infty} 2e^{v_n} = 2.$$

Solution 14.35
Solution 14.36
Solution 14.40 *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*

C'est un problème classique. Cette version détaillée est extrait d'un sujet de la Banque PT.

Solution 14.41 *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*
Solution 14.42

1. Césaro.

2. (a) ln

(b) $u_n = a$ si n pair, $u_n = b$ si n impair.

14.5 Comparaison des suites de référence

14.6 Suite extraites

Solution 14.43
Solution 14.44

1. Si $0 < x < y$, on a clairement $x = \sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\frac{x+y}{2} < y$. De plus,

$$\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \iff 4xy < x^2 + 2xy + y^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 > 0 \iff (x-y)^2 > 0;$$

cette dernière assertion étant vraie puisque $x \neq y$. On a donc bien le résultat demandé.

2. Montrons par récurrence que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante, la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante, avec pour tout n, $u_n < v_n$.

On a $u_0 = a$, $v_0 = b$ et comme $0 < a < b$, on a bien $u_0 < v_0$.

Supposons la suite u croissante jusqu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, la suite v décroissante jusqu'à ce même rang, avec $u_n < v_n$.

Le résultat de la question 1, avec $x = u_n$ et $y = v_n$ donne alors (puisque $u_n > 0$ car plus grand que u_0):

$$u_n < \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1} < v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n.$$

On a donc tous les résultats voulus au rang $n+1$, on conclut par le principe de récurrence.

Conclusion

u est croissante, v est décroissante et pour tout n, $u_n < v_n$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 < u_n < v_n < v_0$. La suite u est donc croissante et majorée par v_0 et la suite v est décroissante et minorée par u_0 ; elles sont donc convergentes.

4. Notons ℓ_u et ℓ_v les limites de u et v. La suite (v_{n+1}) étant extraite de la suite v, on a

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \ell_v \qquad \text{mais aussi} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}.$$

Par unicité de la limite, on a $\ell_v = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$, c'est-à-dire $\ell_u = \ell_v$.

Solution 14.45
Solution 14.46

Supposons la suite $(\tan(n))$ convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)},$$

c'est-à-dire

$$\tan(n+1)(1 - \tan(n)\tan(1)) = \tan(n) + \tan(1).$$

Or la suite $(\tan(n+1))$ est extraite de la suite $(\tan(n))$ et donc converge également vers ℓ. Les théorèmes opératoires sur les limites montrent alors que

$$\lim_{n\to\infty} \tan(n+1)(1 - \tan(n)\tan(1)) = \ell\,(1 - \ell\tan(1)) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \tan(n) + \tan(1) = \ell + \tan(1).$$

D'où, par unicité de la limite

$$\ell\,(1 - \ell\tan(1)) = \ell - \tan(1).$$

soit encore, $\ell - \ell^2\tan(1) = \ell + \tan(1)$ et puisque $\tan(1) \neq 0$,

$$\ell^2 = -1;$$

ce qui est absurde.

Conclusion : La suite $(\tan(n))$ n'est pas convergente.

Solution 14.47

1. Soit $n \geq 1$, on a
$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Or pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, d'où
$$v_{2n} - v_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. La suite (v_n) est croissante puisque $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} > 0$, elle admet donc une limite ℓ. Puisque la suite (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), elle tend également vers ℓ. Dès lors, si $\ell \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} v_{2n} - v_n = \ell - \ell = 0.$$
Donc d'après la question précédente, on a $0 \geq \frac{1}{2}$. Cette contradiction montre que $\ell \notin \mathbb{R}$, on a donc
$$\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty.$$

Solution 14.48 *Des (contre-)exemples utiles*
Solution 14.50 $\limsup$ *et* $\liminf$
Solution 14.51 *Un intervalle de valeurs d'adhérence*
Solution 14.53
Solution 14.54

14.7 Suites monotones

Solution 14.55

On a $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$: la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas décroissante. On peut même montrer qu'elle n'est pas décroissante à partir d'un certain rang: pour $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_{2k-1} = 0 < u_{2k} = \frac{1}{k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq 1 + (-1)^n \leq 2$ et donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, le théorème d'existence de limite par encadrement donne

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Solution 14.57

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)}$$

   Puisque la suite (u_n) est croissante, on a

   $$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1}$$

   et donc

   $$u_1 + u_2 + \ldots u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = nu_{n+1}.$$

   On a donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est croissante.

2. La suite $\left(u_n\right)$ est croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$, on a donc

   $$\ell = \sup \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

   En particulier, (u_n) est majorée par ℓ:

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell.$$

   Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell \leq \frac{1}{n} n\ell = \ell.$$

   La suite $\left(v_n\right)$ est donc majorée par ℓ et croissante, elle est donc convergente et sa limite $L = \sup \left\{ v_n \mid n \in \mathbb{N}^\star \right\}$ vérifie donc $L \leq \ell$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

   $$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$

   Or la suite $\left(u_n\right)$ est croissante, donc si $k \geq n+1$, on a $u_k \geq u_n$. On en déduit l'inégalité

   $$\sum_{k=1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_n = nv_n + nu_n.$$

En divisant cette relation par $2n$, on obtient

$$v_{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{2n} u_k}{2n} \geq \frac{v_n + u_n}{2}.$$

4. Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes de limite respective ℓ et L. De plus, (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), elle converge donc également vers L. Enfin, on a la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Par compatibilité de la relation d'ordre avec le passage à la limite, on a

$$L = \lim_{n\to\infty} v_{2n} \geq \frac{\ell + L}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Autrement dit, $L \geq \ell$.

Solution 14.62

Solution 14.63

Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0 \\ v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \left(u_n + \frac{1}{3n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2 - 2n}{3n^2(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

Solution 14.64

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)!} > 0. \\ v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} = \frac{1 - n}{(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suite (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

On peut alors montrer directement que (w_n) est convergente et a même limite que (u_n) puisque $\frac{1}{n \cdot n!} \to 0$. On peut également montrer que ces deux suites sont adjacentes. En effet,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n \cdot n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc décroissante. De plus, la suite (u_n) est croissante et

$$w_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les suite (u_n) et (w_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

Solution 14.65

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3}.$$

La suite $(b_n - a_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{3^n}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. De plus,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3}.$$

Ces deux quantité sont donc de signe opposé ; ainsi parmi les suites (a_n) et (b_n), l'une est croissante et l'autre décroissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

2. On a

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} = b_n + a_n.$$

Ainsi, la suite $(a_n + b_n)$ est constante, d'où

$$a_n + b_n = a_0 + b_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 + b_0.$$

De plus, les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes, elles sont convergentes est ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc également $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 2\ell$. Par unicité de la limite de la suite $(a_n + b_n)$, on a $a_0 + b_0 = 2\ell$.

Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent donc vers $\ell = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Solution 14.66

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(v_n + u_n)}.$$

Or, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Le calcul précédent justifie alors que $v_n > u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le résultat restant vrai pour $n = 0$ par hypothèse sur $u_0 = a$ et $v_0 = b$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n > u_n > 0$ donc $v_n - u_n > 0$ et $0 < \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} < 1$, d'où

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$

et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n - u_n^2 - u_nv_n}{u_n + v_n} = u_n\frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} > 0$$

La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante et la suite (u_n) est (strictement) croissante.

Par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|v_0 - u_0|$. En effet, on a immédiatement $|v_0 - u_0| \leq 1.|v_0 - u_0|$ et pour $n \in \mathbb{N}$, si $|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|v_0 - u_0|$, alors

$$|v_{n+1} - u_{n+1}| < \frac{1}{2}|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|v_0 - u_0| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|v_0 - u_0|.$$

D'après le théorème d'existence de limite par domination, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$. La suite (u_nv_n) est donc constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0 = ab.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \ell^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \lim_{n\to+\infty} ab = ab.$$

Par unicité de la limite de la suite (u_nv_n), on a donc $\ell^2 = ab$.

Finalement, la relation $u_n > 0$ impose $\ell \geq 0$ d'où $\ell = \sqrt{ab}$.

Solution 14.68 *Suites de Cauchy*
Solution 14.69

Exemples de suites complexes