Chapitre 17

Systèmes d'équations linéaires

17.1 Systèmes d'équations linéaires

§1 Définitions

Définition 1 Un **système d'équations linéaires**, ou plus simplement, un **système linéaire** de m équations à n **inconnues** $x1, \dots, x_n$ est la donnée simultanée de m équations linéaires à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\cdots & +a_{m,n}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{E}$$

Les **coefficients** sont les scalaires $a_{i,j}$.

Exemple 2 Le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

est un système de trois équations à trois inconnues x_1, x_2, x_3.

Les coefficients sont notés avec un double indice,

- le premier indice i indique la ligne c'est-à-dire l'équation,

- le second indice j indique la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle se trouve ce coefficient.

Par exemple $a_{2,3}$ est le coefficient de x_3 dans la deuxième équation.

Définition 3

Une **solution** de (E) est un vecteur $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que *chacune* des n équations est vraie lorsque

$$x_1 = s_1 \qquad x_2 = s_2 \qquad \dots \qquad x_n = s_n.$$

Exemple 4

Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 5 \\ x_1 & & & +x_4 & +x_5 & = 4 \end{cases}$$

est un exemple de système de quatre équations à cinq inconnues, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Une solution de ce système est

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 3, \qquad x_5 = 2,$$

comme on peut le vérifier en substituant ces valeurs dans chacune des équations. Chacune des équations est vérifiée par ces valeurs x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Néanmoins, ce n'est pas la seule solution de ce système ; il y en a beaucoup plus.
Si l'on s'intéresse maintenant au système

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 5 \\ x_1 & & & +x_4 & +x_5 & = 6 \end{cases}$$

Aucune valeur de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ne vérifient les quatre équations simultanément ; ce système n'a pas de solution. Reste à savoir pourquoi !

Introduisons tout d'abord une simplification d'écriture.

Définition 5

La matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$, dont le coefficient d'indice (i, j) est le coefficient $a_{i,j}$ du système d'équations linéaires est appelée la **matrice des coefficients du système** (E), ou plus simplement **matrice du système** (E).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ le **vecteur des inconnues**. Alors, le produit Ax de la matrice A de type (m, n) et du vecteur x de type $(n, 1)$ est une matrice de type $(m, 1)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,n}x_n \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\cdots & +a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

- Si nous définissons le vecteur colonne $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ dont les coefficients sont les seconds membres b_i du système (E), alors le système est équivalent à l'équation matricielle d'inconnue x

$$Ax = b.$$

  On dit que b est le **vecteur des second membres**.

Exemple 6

On considère le système de trois équations à trois inconnues x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5. \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la matrice A sont les coefficients des x_i. Si nous effectuons la multiplication matricielle Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

Si $Ax = b$, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

et ces deux matrices (3, 1) sont égales si, et seulement si leurs coefficients sont égaux. Nous retrouvons alors exactement les trois équations linéaires.

§2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Exemple 7

Résolvons le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{cases}$$

Définition 8

Nous appelons **opération élémentaire sur les lignes** d'un système d'équations les opérations suivantes :

1. la multiplication d'une ligne par un scalaire *non nul* ;

2. l'échange de deux lignes ;

3. la modification d'une ligne en lui additionnant un multiple d'une *autre* ligne.

Définition 9

Deux systèmes d'équations linéaires (E) et (E') ayant mêmes inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$, sont dits **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

Théorème 10

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Notation

On peut alors noter

$$(\mathrm{E}) \iff (E').$$

Pour simplifier les résolutions, on utilise le codage suivant pour les opérations élémentaires.

Les équations, ou les lignes sont notées $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Les opérations élémentaires sont codées ainsi :

Opération élémentaire	Codage	
multiplication par un scalaire *non nul*	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	où $\alpha \in \mathbb{K}^\star$;
échange de deux lignes	$L_i \leftrightarrow L_j$	où $i \neq j$;
addition d'un multiple d'une *autre* ligne	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	où $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

§3 Matrice augmentée d'un système

Nous constatons que les opérations élémentaires influencent uniquement les coefficients du système et le second membre.

Considérons le système précédent écrit sous forme matricielle $Ax = b$, alors la matrice

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right),$$

où l'on a rassemblé la matrice des coefficients et des seconds membres, contient toutes les informations nécessaires pour effectuer les opérations élémentaires, et plutôt que de manipuler les équations, nous manipulerons les lignes de cette matrice.

Définition 11

Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

est appelée la **matrice augmentée** du système $Ax = b$.

Définition 12

Nous appelons **opération élémentaire sur les lignes** d'une matrice les opérations suivantes :

1. la multiplication d'une ligne par un scalaire *non nul* ;
2. l'échange de deux lignes ;
3. la modification d'une ligne en lui additionnant un multiple d'une *autre* ligne.

Théorème 13

Si l'on passe d'un système (E) *à un autre système* (E′) *par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de* (E′) *s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de* (E).

§4 Matrice équivalentes par lignes

Définition 14

Deux matrices sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce cas, on note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

Théorème 15

La relation $\underset{L}{\sim}$ *est une relation d'équivalence.*

- *réflexive :* $A \underset{L}{\sim} A$.
- *symétrique :* $A \underset{L}{\sim} B \implies B \underset{L}{\sim} A$.
- *transitive :* $A \underset{L}{\sim} B$ *et* $B \underset{L}{\sim} C \implies A \underset{L}{\sim} C$

où $A, B, C \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Test 16

Montrer le!

17.2 Procédé d'élimination de Gauss-Jordan

§1 Présentation de l'algorithme; forme échelonnée réduite

Exemple 17 Nous allons illustrer l'algorithme sur deux exemples, la matrice augmentée $(A|b)$ de l'exemple dans la section précédente et la matrice augmentée $(B|b)$ d'un second système.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right), \qquad (B|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

1. On détermine la première colonne non nulle C_j. Si A est nulle, il est inutile de poursuivre.

$$Ax = b \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{array}\right. \qquad Bx = b \iff \left\{\begin{array}{rrl} & 2x_3 & = 3 \\ 2x_2 & +3x_3 & = 4 \\ & x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

Nous considérons alors la colonne 1 de $(A|b)$ et la colonne 2 de $(B|b)$.

2. Dans cette colonne, on détermine un coefficient non nul. Le coefficient ainsi trouvé s'appelle un **pivot**. Si le pivot n'est pas sur la première ligne, on échange celle-ci avec la ligne contenant le pivot.

3. On **normalise** le pivot: on multiplie la première ligne par un scalaire convenable.

La matrice à gauche a déjà une valeur non nulle sur la première ligne. Pour la matrice de droite, on échange la ligne L_1 et la ligne L_2.

$$Ax = b \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{array}\right. \qquad Bx = b \iff \left\{\begin{array}{rrl} 2x_2 & +3x_3 & = 4 \\ & 2x_3 & = 3 \\ & x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

La matrice de gauche possède déjà un pivot unitaire. Pour le seconde matrice, on multiplie la ligne 1 par $\frac{1}{2}$.

$$Ax = b \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{array}\right. \qquad Bx = b \iff \left\{\begin{array}{rrl} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & 2x_3 & = 3 \\ & x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

4. On soustrait un multiple approprié de la première ligne aux suivantes de manière à obtenir des zéros en dessous du pivot («élimination»). Pour le système de gauche, on ajoute -2 fois L_1 à L_2, puis on ajoute -1 fois L_1 à L_3. Le système de droite possède déjà uniquement des zéros sous le pivot:

$$Ax = b \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{array}\right. \qquad Bx = b \iff \left\{\begin{array}{rrl} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & 2x_3 & = 3 \\ & x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

5. On recommence les étapes **1.** à **4.** avec le sous-système situé en dessous du pivot.

Nous continuons ici uniquement le premier exemple,

$$Ax = b \iff \begin{cases} \mathbf{x_1} & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

Nous ignorons la première ligne. Alors, la première colonne non nulle est la colonne 2. Celle-ci à déjà une valeur non nulle en haut que nous normalisons en multipliant L_2 par -1:

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & \mathbf{x_2} & +x_3 & = 2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

Nous utilisons alors le pivot pour obtenir des zéros en dessous; nous ajoutons $2L_2$ à L_3:

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & & \mathbf{3x_3} & = 6 \end{cases}$$

Nous ignorons alors les deux premières lignes et recommençons les étapes **1.** à **4.**.

La première colonne non nulle est la colonne 3. Nous multiplions L_3 par $\frac{1}{3}$ pour obtenir un pivot unitaire:

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & & \mathbf{+x_3} & = 2 \end{cases}$$

Ce dernier système est dit **échelonnée en ligne** ou simplement **échelonnée**.

En écrivant la matrice augmentée de ce système, on trouve

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Il est *très important* de comprendre qu'après avoir effectué une suite d'opérations élémentaires sur une matrice, la matrice nouvellement obtenue *n'est pas* égale à la matrice originale. C'est pourquoi nous utilisons ici le symbole d'équivalence par ligne $\underset{L}{\sim}$ et non des signes d'égalité $=$.

Définition 18 Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

(ii) Si une ligne est non nulle, le premier coefficient non nul est appelé **pivot**. Les positions successives des pivots (leur indice de colonne) forme une suite strictement croissante.

Exemple 19 Les matrices suivantes sont respectivement 4-échelonnées, 5-échelonnées et 3-échelonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque Si l'on arrête l'algorithme à l'étape **5.**, on parle alors de l'algorithme de Gauß.

Nous pourrions alors résoudre le système par **substitution**. La dernière équation nous donne $x_3 = 2$, valeur que nous pouvons substituer dans la seconde équation pour obtenir x_2. Nous utilisons alors ces deux valeurs pour obtenir x_1.

6. Pour chaque ligne, à partir de la dernière ligne, on ajoute un multiple convenable aux lignes précédentes afin d'obtenir des zéros au dessus de chaque pivot.

À partir de la forme échelonnée, nous utilisons la ligne 3. On remplace L_2 par $L_2 - L_3$, puis nous remplaçons L_1 par $L_1 - L_3$:

$$Ax = b \iff \left\{ \begin{array}{cccl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & & \boldsymbol{x_3} & = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{cccl} x_1 & +x_2 & & = 1 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \boldsymbol{x_3} & = 2 \end{array} \right.$$

Nous avons alors uniquement des zéros au dessus du pivot de la troisième colonne. Il ne reste plus qu'une étape: obtenir des zéros au dessus du pivot de la deuxième colonne. La dernière étape est de remplacer L_1 par $L_1 - L_2$:

$$Ax = b \iff \left\{ \begin{array}{cccl} x_1 & & & = 1 \\ & \boldsymbol{x_2} & & = 0 \\ & & x_3 & = 2 \end{array} \right.$$

Ce système est alors **échelonné réduit en ligne**.

Définition 20 Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Explicitement, une matrice échelonnée réduite vérifie les propriétés suivantes:

(i) Chaque ligne non nulle commence avec un pivot unitaire.

(ii) Un pivot dans une ligne inférieure est plus à droite.

(iii) Les lignes nulles sont les dernières de la matrice.

(iv) Chaque colonne avec un pivot a des zéros ailleurs.

Théorème 21 *Toute matrice est équivalente par lignes à une et une seule matrice échelonné réduite par lignes.*

Démonstration. L'algorithme de Gauß-Jordan prouve l'existence. L'unicité est admise en début d'année. ∎

Nous pouvons alors lire les solutions depuis la matrice. Le système original est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & & & = 1 \\ & \boldsymbol{x_2} & & = 0 \\ & & x_3 & = 2 \end{cases}$$

ce qui donne la solution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce système possède une *unique* solution.

Nous pouvons vérifier que cette solution est correcte en la substituant dans les équations originales, ou, de manière équivalente, en effectuant la multiplication Ax pour montrer que $Ax = b$.

Test 22

Faites le! Vérifiez que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exemple $(B|b)$. À la suite des étapes **1.** à **4.**, nous effectuons l'étape **5.**. Nous ignorons la première ligne et appliquons de nouveau les étapes **1.** à **4.**. Nous souhaitons obtenir un pivot unitaire sur la seconde ligne, nous allons donc échanger la ligne 2 et la ligne 3:

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & 2x_3 & = 3 \\ & x_3 & = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & x_3 & = 5 \\ & 2x_3 & = 3 \end{cases}$$

Nous obtenons alors un zéro sous le pivot en remplaçant la ligne 3 avec la ligne 3 plus (-2) fois la ligne 2:

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & x_3 & = 5 \\ & 0 & = -7 \end{cases}$$

Finalement, on multiplie la dernière ligne par $-\frac{1}{7}$:

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & x_3 & = 5 \\ & 0 & = 1 \end{cases}$$

Ce système est alors échelonné par lignes, mais nous avons aucun intérêt à continuer jusqu'à la forme échelonnée réduite. En effet, la dernière ligne est $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, c'est-à-dire $0 = 1$, ce qui est impossible! Ce système n'a pas de solution.

Remarque Il se peut que l'une des équations soit de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_p = b,$$

dite **condition de compatibilité**. Deux cas peuvent se produire

- $b \neq 0$. Le système est incompatible : ils n'a pas de solution.
- $b = 0$, l'équation est de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_p = 0$, on peut la supprimer.

Remarque L'algorithme présenté est souvent le plus efficace pour résoudre un système d'équations. Dans une variante (usuelle) de l'algorithme de Gauß-Jordan, on combine les étapes **4.** et **6.** en une seule étape **4.'** où l'on utilise le pivot pour obtenir des zéros au dessous (comme dans l'algorithme) mais également au-dessus.

§2 Systèmes compatibles et incompatibles

Définition 23 Un système d'équations linéaires est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Lorsque le système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**.

Proposition 24 *Si la matrice augmentée $(A|b)$ d'un système est équivalente à une matrice qui contient une ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$, alors le système est incompatible.*

Considérons les systèmes représentés par les matrices augmentées

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right), \qquad (B|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Il s'écrivent

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3 &= 3 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_3 &= 5. \end{cases}$$

Le second système est incompatible. En effet, on voit immédiatement que les deux premières équations ne peuvent pas être vraie en même temps que la troisième.

- Le premier représente trois plans qui s'intersectent au point $(1, 0, 2)$.
- Le second représente trois plans, dont deux sont parallèles (ceux d'équations $2x_3 = 3$ et $x_3 = 5$).

Exemple 25 Effectuer la réduction de la matrice $(A|b)$ en afin d'illustrer la résolution du système précédent

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 5 \end{cases}$$

Test 26

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan afin de résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 6 \end{cases}$$

§3 Variables libres

Exemple 27

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan afin de résoudre le système[a]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 & = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & = 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 & = 4 \end{cases}$$

[a] Écrit de manière peu pratique, attention aux zéros dans la matrices!

Définition 28

Les inconnues correspondant aux colonnes contenant un pivot sont appelées **variables principales** ou **variables liées**. Les autres inconnues sont appelées **variables libres** ou **paramètres**.

Test 29

Poser $s = 0$ et $t = 0$ et montrer (par substitution ou en calculant Ax_0) que $u = (1, -1, 0, 3, 0)^T$ est une solution de $Ax = b$.
Poser $s = 1$ et $t = 2$, et montrer que le nouveau vecteur obtenu v est également solution.

Test 30

Écrire le système de trois équations à trois inconnues représenté par l'équation matricielle $Av = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan pour résoudre ce système. Exprimer les solutions sous forme vectorielle. En interprétant chaque équation comme l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$, donner une description de l'intersection de ces trois plans.

§4 Quelques successions d'opérations élémentaires classiques

Remarque Il est important de se restreindre à des opérations qui peuvent être décomposées en une succession d'opérations élémentaires. Sinon, rien n'assure que l'on conserve le même ensemble de solutions.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ n'est pas équivalent à } \begin{cases} 2x - 2y = 3 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x - 2y = 3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

Remarque **Quelques opérations parfois utiles**

Les opérations suivantes peuvent être décomposées en une succession d'opérations élémentaires. Elles permettent donc de passer d'un système à un système équivalents.

1. Modification de l'ordre des lignes de (E).
2. Addition à une ligne L_i, i fixé, d'une combinaison linéaire des *autres* lignes de (E).
3. Remplacer une ligne L_i, i fixé, par une combinaison linéaire des lignes dont le coefficient devant L_i est non nul.
4. Ajout d'un multiple d'une ligne L_i, i fixé, aux *autres* lignes de (E).

Remarque **Somme et différence de deux lignes**

Si L et L' désignent deux lignes d'un système, on a l'équivalence

$$\begin{cases} L \\ L' \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{cases} L + L' \\ L - L' \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Ces opérations permettent donc de passer d'un système à un système équivalent, ou d'un matrice à une matrice équivalente en ligne. Elles permettent parfois d'aller un peu plus vite mais elles sont à utiliser avec prudence.
Remarquez qu'elle ne sont pas employées dans l'algorithme de Gauß. Leur utilisation est donc uniquement basée sur la définition 9 et le théorème 10.

17.3 Noyau et image d'une matrice

Proposition 31 *Un système d'équations linéaire admet aucune, exactement une, ou une infinité de solution.*

§1 Systèmes homogènes

Définition 32 Un système de la forme $Ax = \mathbf{0}$ est dit **homogène**.

Un résultat facile, mais très important:

Proposition 33

1. *Un système homogène $Ax = \mathbf{0}$ est toujours compatible.*
2. *Si $Ax = 0$ a une* unique *solution, alors c'est la solutions triviale $x = \mathbf{0}$*

Remarque Si nous formons la matrice augmentée $(A|\mathbf{0})$ d'un système homogène, alors la dernière colonne est composée entièrement de zéros. De plus, cette colonne restera une colonne nulle quelle que soient l'opération élémentaire réalisé. Il est donc inutile d'écrire la dernière colonne. À la place, nous effectuons le procédé d'élimination de Gauß-Jordan sur la matrice A des coefficients, en se *souvenant* que nous résolvons $Ax = \mathbf{0}$.

Exemple 34 Résoudre le système linéaire homogène

$$\begin{cases} x \; +y \; +3z \; +w = 0 \\ x \; -y \; +z \; +w = 0 \\ \quad\; y \; +2z \; +2w = 0. \end{cases}$$

Test. Expliciter quelles opérations élémentaires sont effectuée à chaque étape pour obtenir un système échelonné réduit par l'algorithme de Gauß-Jordan. Par exemple, la première opération est $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.
Les solutions s'écrivent

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

qui est une droite passant par l'origine, $v = t\vec{a}$ avec $\vec{a} = (3, 2, -2, 1)^T$. Le système possède donc une infinité de solutions, une pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}$.

§2 Noyau d'une matrice

Définition 35 Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle **noyau** de A, le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$\ker A = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \mathbf{0} \}$$

où $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$ est le vecteur nul de $\mathbb{K}^m$.

Théorème 36 *Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.*
Autrement dit, si deux matrices A et B sont équivalentes par lignes, alors $\ker(A) = \ker(B)$.

Démonstration. Si $A \underset{L}{\sim} B$, alors $Ax = 0 \iff Bx = 0$, donc $\ker A = \ker B$. ∎

Théorème 37 *Si A est une matrice de type (m, n) avec $m < n$, alors* $\ker A$ *est un ensemble infini. Autrement dit, le système homogène $Ax = 0$ possède une infinité de solutions.*

Démonstration. Compter le nombre maximum de pivots. En déduire le nombre de variables libres. ∎

Remarque Qu'en est-il d'un système $Ax = b$? Si A est de type (m, n) avec $m < n$, le système $Ax = b$ a-t-il une infinité de solutions?

- Pas nécessairement. Le système
$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$$
est incompatible. Ces équations représentent deux plans parallèles dans $\mathbb{R}^3$.
- Par contre, si le système est compatible, la réponse est oui!

§3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 38 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose le système $Ax = b$ compatible et que p est* une *solution. Alors l'ensemble des solutions de $Ax = b$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $p + z$ où $z \in \ker A$; c'est-à-dire*
$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \} = \{ p + z \mid z \in \ker A \} = p + \ker A.$$

Définition 39 Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires. Le système linéaire $Ax = 0$ est appelé **système homogène associé** au système $Ax = b$.

Le théorème précédent se généralise à d'autres équations «linéaires». On l'exprime généralement en disant que la solution générale d'un système linéaire compatible $Ax = b$ est la somme d'*une* solution particulière p (où $Ap = b$) et de la solution générale du système homogène associé.
$$\{ \text{ solutions de } Ax = b \} = p + \{ \text{ solutions de } Ax = \mathbf{0} \} .$$

Exemple 40 On considère le système
$$\begin{cases} x & +y & +3z & +w & = 2 \\ x & -y & +z & +w & = 4 \\ & y & +2z & +2w & = 0. \end{cases}$$
Remarquer que la matrice des coefficients de ce système est la même matrice A que celle de l'exemple 34.
La matrice augmentée du système est
$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
On montre (faites le!) que la forme échelonnée réduite de cette matrice est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
La solution générale de ce système s'écrit
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une droite *ne passant pas par l'origine*. Elle est parallèle à la droite solution du système homogène $AX = 0$, et passe par le point de vecteur position p. Il est clair que p est une solution particulière du système (prendre $t = 0$).

Remarque

Il est utile de comparer les résolutions des exemples 34 et 40.

On peut en effet comparer les on a les réductions suivantes

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on trouve pour solutions

$$AX = 0 \iff \exists t \in \mathbb{R}, X = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = b \iff \exists t \in \mathbb{R}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que la forme réduite de la matrice augmentée d'un système $AX = b$ contient toujours toutes les informations pour résoudre $AX = 0$.

Test 41

Reprenons la forme échelonnée réduite de la matrice A de l'exemple 34:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi pour tout $b \in \mathbb{R}^3$, le système $Ax = b$ est compatible et a une infinité de solutions.

Test 42

Résoudre le système $Ax = b$ donnée par

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2. \end{cases}$$

Déterminer également les solutions du système homogène associé $Ax = \mathbf{0}$. Pour chacun des deux système, décrire géométriquement l'intersection des trois plans.

Test 43

Reprendre l'exemple 27, page 11

.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 &= 4 \end{cases}$$

Montrer que la solution trouvée alors est de la forme

$$x = p + sv + tw, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

où p est une solution particulière de $Ax = b$ et $sv + tw$ est la solution générale du système homogène associé $Ax = \mathbf{0}$.

Résumé

- Si $Ax = b$ est compatible, les solutions sont de la forme $x = p + z$ où p est une des solutions particulières et $z \in \ker A$, le noyau de A.
  - Si $Ax = b$ a une unique solution, alors $Ax = \mathbf{0}$ a pour seule solution la solution triviale.
  - Si $Ax = b$ a une infinité de solutions, alors $Ax = 0$ également.
- Le système $Ax = b$ peut être incompatible, mais le système $Ax = \mathbf{0}$ est *toujours* compatible.

§4 Image d'une matrice

Définition 44 Soit A une matrice (m, n). L'image de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est la partie de $\mathbb{K}^m$ définie par

$$\mathrm{Im}(A) = \{\, Ax \mid x \in \mathbb{K}^n \,\} = \{\, y \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n, Ax = y \,\}\,.$$

Autrement dit, l'image de A est l'ensemble des vecteurs $b \in \mathbb{K}^m$ pour lesquels le système $Ax = b$ est compatible.

Exemple 45 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Im}(A)$.

Test 46 Notons $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les colonnes de A, ainsi $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$. Si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$, nous avons vu que Ax s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes de A, explicitement

$$Ax = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n.$$

C'est une bonne occasion de le démontrer à nouveau. Expliciter chaque côté de l'égalité en utilisant $c_i = \left(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{mi}\right)^T$.

À partir de maintenant, nous utiliserons fréquemment ce résultat.

Proposition 47 *Soit A une matrice (m, n). L'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.*

Si $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ où c_i est la i-ème colonne de A, alors

$$\mathrm{Im}(A) = \{\, \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \,\}.$$

Proposition 48 *Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si b est combinaison linéaire des colonnes de A.*

Exemple 49 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, pour $x = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \middle| \, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\},$$

ou encore

$$\mathrm{Im}(A) = \{\, \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \,\} \quad \text{où l'on a} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17.4 Rang

§1 Rang d'une matrice

Définition 50 Soit A une matrice (m, n). Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le nombre de ligne non nulles dans une matrice échelonnée équivalente à A.
De manière équivalente, le **rang** de A est aussi le nombre de pivots dans la forme échelonnée réduite de A.

L'unicité de la forme échelonnée réduite de A assure que cette définition est correcte.

Proposition 51 *Soit A, B deux matrice (m, n). Si $A \underset{L}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.*

Proposition 52 *Si A est une matrice de type (m, n), alors*

$$\mathrm{rg}(A) \leq \min \{\, m, n \,\}.$$

Exemple 53 Considérons la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$
On a
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La dernière matrice est échelonnée et a deux lignes non nulles. Ainsi $\mathrm{rg}(M) = 2$.

Test 54 Montrer que la matrice B est de rang 3 où
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

§2 Rang et solutions d'un système linéaire

Définition 55 Le rang d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ est le rang de A.

Proposition 56 *Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si* $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A)$.

Exemple 57 On considère le système
$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 4. \end{cases}$$
La matrice augmentée du système est la matrice B du test 54.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, le système (S) est équivalent au système
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = -2. \end{cases}$$
Ce système est incompatible car aucune valeurs de x_1, x_2, x_3 ne vérifie la dernière équation $0 = 2$.

Poursuivons la réduction de la matrice des coefficients A et de la matrice augmentée $(A|b)$.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice des coefficients est $\mathrm{rg}(A) = 2$, mais celui de la matrice augmentée $(A|b)$ est 3.

Exemple 58 Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 6. \end{cases} \tag{17.1}$$

Ce système a la même matrice des coefficients A que le système de le système précédent et $\mathrm{rg}(A) = 2$. La matrice augmentée du système est la matrice M de l'exemple 53 qui est aussi de rang 2, ce système est donc compatible.

Test 59 Résoudre le système précédent. Remarquer que puisque A est de rang 2 et a 3 colonnes, il y a une variable libre, et donc une infinité de solutions.

Proposition 60 *Si A est une matrice de type (m, n) et $\mathrm{rg}(A) = m$ alors pour tout vecteur b, $Ax = b$ est compatible.*

Remarquons que si $\mathrm{rg}(A) = m$, on a nécessairement $n \geq m$.

Exemple 61 Supposons que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

est la matrice des coefficients d'un système de trois équations à quatre inconnues, $Bx = d$, avec $d \in \mathbb{R}^3$. Nous avons déjà effectuer la réduction de B dans l'exemple 57 (où elle était vue comme la matrice augmentée du système (S)).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est de type $(3, 4)$ et est de rang 3, le système $Bx = d$ est donc *toujours* compatible.
Regardons plus précisément ses solutions. Toute matrice augmentée $(B|d)$ est équivalente par ligne a une matrice échelonnée réduite dont les quatre première colonnes sont les même que la forme échelonnée réduite de B, c'est-à-dire

$$(B|d) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Ce système possède une infinité de solutions pour chaque choix de $d \in \mathbb{R}^3$. Il y a une colonne sans pivot, et donc une variable libre.

Test 62

Si $p_1 = 1, p_2 = -2$ et $p_3 = 0$ et $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, déterminer les solutions du système $Bx = d$ sous forme vectorielle. En déduire le vecteur d.

Si le rang r d'un système est strictement inférieur au nombre d'inconnues n, alors le système, s'il est compatible, possède une infinité de solutions. Précisons.

Exemple 63

Considérons un système dont la matrice augmentée est équivalente par ligne à la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, le rang de cette matrice est $r = 3$, qui est strictement inférieur au nombre d'inconnues, $n = 5$.
La forme échelonnée réduite de cette matrice est (**Vérifiez le !**)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notre système est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 & = -28 \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 & = -14 \\ \qquad\qquad\quad x_5 & = 5. \end{cases}$$

Les inconnues x_1, x_3 et x_5 correspondent aux colonnes contenant les pivots, ce sont les variables principales. Les deux autres inconnues, x_2 et x_4 sont les variables libres. La forme échelonnée de l'équation nous permet d'affirmer que l'on peut attribuer des valeur arbitraires, s et t, à x_2 et x_4 ; et alors une solution est donnée par

$$x_1 = -28 - 3s - 4t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -14 - 2t, \qquad x_4 = t, \qquad x_5 = 5.$$

Il y a une infinité de solutions puisque les «variables libres» x_2 et x_4 peuvent prendre des valeurs $s, t \in \mathbb{R}$ quelconques.

Théorème 64

On considère un système de m équations à n inconnue, noté $Ax = b$, où la matrice des coefficient A est une matrice (m, n) de rang r.

- *Si la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée $(A|b)$ contient une ligne de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors le système $Ax = b$ est incompatible; il n'a aucune solution. Dans ce cas*
$$\mathrm{rg}(A) = r < m \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg}(A|b) = r + 1.$$

- *Si la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée $(A|b)$ ne contient de ligne de la forme précédente, le système est compatible, et la solution générale s'exprime avec $n - r$ variables libres.*

  Lorsque $r < n$, il y a donc une infinité de solutions, mais lorsque $r = n$, il n'y a pas de variable libre et le système admet une unique solution.

Le théorème s'applique également à un système homogène, celui-ci étant toujours compatible.

Théorème 65 *La solution générale d'un système homogène s'exprime avec $n-r$ variables libres, où r est le rang du système et n le nombre d'inconnues.*
Lorsque $r < n$, celui-ci a une infinité de solutions, mais lorsque $r = n$, il y a une unique solution, la ***solution triviale***, $x = 0$.

17.5 Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^n$

§1 Notation vectorielle

Reprenons l'exemple 63. La solution générale du système s'exprime avec deux variables libres, ou **paramètres**, s et t. On peut écrire les solutions, x, sous forme de vecteur colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 - 3s - 4t \\ s \\ -14 - 2t \\ t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ 0 \\ -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on peut écrire les solutions sous la forme

$$x = p + sv_1 + tv_2, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$p = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, les solutions d'un système compatible $Ax = b$ de rang r avec n inconnues sont de la forme

$$x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-r} v_{n-r}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

où $p, v_1, \ldots, v_{n-r}$ sont tels que $Ap = b$ et $Av_i = 0$.

§2 Droites de $\mathbb{R}^2$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose a ou b non nul. L'équation d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

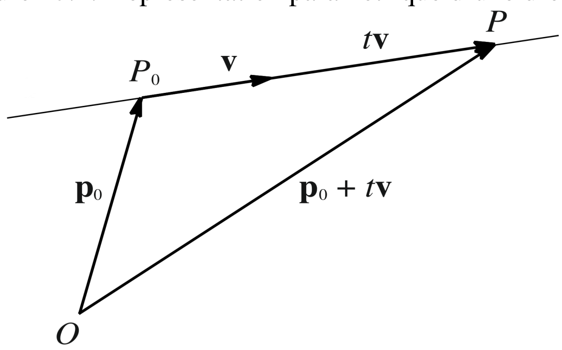
$$ax + by = c$$

est un «système» de rang 1 à deux inconnues. Il est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est une droite passant par le point $P_0 = (x_0, y_0)^T$ et dirigée par le vecteur $v = (\alpha, \beta)^T$.

Figure 17.1: Représentation paramétrique d'une droite



§3 Droites et plans de $\mathbb{R}^3$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On suppose a, b, c non tous nuls. Le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$ax + by + cz = d$$

est un «système» de rang 1 à trois inconnues. Il est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = P_0 + su + tv \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + cz = d$ est un plan passant par le point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ et dirigée par les vecteurs $u = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ et $v = (\alpha', \beta', \gamma')^T$. On peut montrer que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.

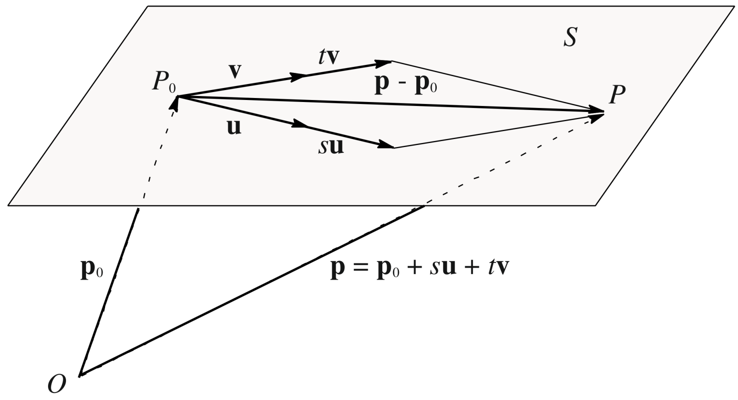
Considérons maintenant le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{cases}$$

Supposons ce système de rang 2, ce qui revient à dire que les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires. Géométriquement, cela signifie que les plans (ce sont bien des plans)

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = d \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Q} : a'x + b'y + c'z = d'$$

Figure 17.2: Représentation paramétrique d'un plan



ne sont pas parallèles. Ce système est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P_0 + tv \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble de ses solutions du système, c'est-à-dire $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, est une droite passant par le point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ et dirigée par le vecteur $v = (\alpha, \beta, \gamma)^T$.

Supposons ce système de rang 1, ce qui revient à dire que les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont colinéaires Géométriquement, cela signifie que les plans (pour avoir des plans, il faut supposer de plus les triplet (a, b, c) et (a', b', c') non nuls) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèle. On distingue alors deux possibilités:

- Le système est incompatible (les deux plans sont distincts),
- ou le système est compatible (les deux équations sont proportionnelle) et leur intersection est donc le plan $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.