Relations de comparaisons sur les suites

Aperçu

1. Les relations de comparaisons
2. Calculs avec les relations de comparaisons
3. Cours sous forme d'exercices
4. Un peu d'informatique

D 1 Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites numériques.

- On dit que la suite (u_n) est **dominé** par la suite (v_n) lorsqu'il existe un entier n_0 et un réel k tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq k|v_n|.$$
On écrit $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, qui se lit «u_n est un grand O de v_n».
- On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (v_n) lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n\right| \leq \varepsilon\left|v_n\right|.$$
On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit «u_n est un petit O de v_n».
- On dit que la suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - v_n\right| \leq \varepsilon\left|v_n\right|.$$
On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit «u_n est équivalente à v_n».

♥2 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont* ***équivalentes*** *si, et seulement si*

$$u_n - v_n = o(v_n).$$

On peut aussi écrire $u_n = v_n + o(v_n)$.

N On note $\mathcal{O}(v)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ l'ensemble des suites dominées par la suite (v_n). Cette notation est celle de Landau. Pour exprimer cette relation, on devrait écrire $u \in \mathcal{O}(v)$. En fait, l'usage est d'écrire abusivement $u = \mathcal{O}(v)$ ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. On doit lire « u_n est grand $\mathcal{O}$ de v_n » et non « u_n égale grand $\mathcal{O}$ de v_n ».
Ces notations traduisent une *appartenance* et non une égalité. Par exemple $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$ et $n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$ mais $n^2 \neq n^2 + 1$.

N On note $o(v)$ ou $o(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant la suite (v_n). Cette notation est encore une notation de Landau. Là encore, au lieu d'écrire $u \in o(v)$, on écrit abusivement $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$. On doit lire « u_n est petit o de v_n ».

E 3

1. La suite $(2n^2 - 3n + 4)$ est dominée par la suite (n^2) car pour $n \geq 1$,

$$\left|2n^2 - 3n + 4\right| \leq 2\left|n^2\right| + 3|n| + 4 \leq 9n^2.$$

2. Si à partir d'un certain rang on a $\left|u_n\right| \leq |v_n|$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
   ⚠ La réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent.
3. La relation $u_n = \mathcal{O}(\mathbf{1})$ signifie que la suite (u_n) est bornée.
   Plus généralement, si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) est bornée.
4. Pour toute suite (u_n) et tout scalaire $\lambda \neq 0$, on a $u_n = \mathcal{O}(\lambda u_n)$.
5. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

E 4

1. La relation $u_n = o(\mathbf{1})$ signifie que (u_n) tend vers 0.
   Plus généralement, si $u_n = o(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.
2. Si (ω_n) est une suite qui tend vers 0, alors $\left(\omega_n u_n\right) = o\left(u_n\right)$.
3. Pour toutes suites $(u_n), (v_n)$ et tout scalaire $\lambda \neq 0$, la relation $u_n = o(\lambda v_n)$ est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

R On notera que la relation $u_n \sim v_n$ ne signifie nullement que la différence $u_n - v_n$ tende vers 0 ; cette différence peut même être non bornée, comme le montre l'exemple $n^2 + n \sim n^2$.

P 5 **Caractérisation de la relation $\mathcal{O}$**

On a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \qquad \text{et} \qquad (\mu_n) \text{ est bornée.}$$

P 6 **Caractérisation de la relation o**

On a $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0.$$

P 7 **Caractérisation de la relation $\sim$**

On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_n \mu_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \mu_n = 1.$$

Lorsque (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n.

T 8 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.*

1. *On a $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) est bornée.*
2. *On a $u_n = o\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 0.*
3. *On a $u_n \sim v_n$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 1.*

P 9 *Si la suite* (v_n) *tend vers* $\pm\infty$ *et si la suite* (u_n) *est bornée, alors* $u_n = o(v_n)$.

P 10 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned}
a^n = o\left(b^n\right) &\iff |a| < |b| \text{ ou } a = b = 0;\\
n^a = o\left(n^b\right) &\iff a < b;\\
(\ln n)^a = o\left((\ln n)^b\right) &\iff a < b.
\end{aligned}$$

P 11 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$.*

1. $(\ln n)^{\alpha} = o(n^{\beta})$.
2. $n^{\beta} = o(a^n)$. *En particulier* $n^{\beta} = o(\mathrm{e}^{\alpha n})$.
3. $a^n = o(n!)$.
4. $n! = o(n^n)$.

D 12 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

E 13 Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

car $u_n - v_n = n = \mathcal{O}(n^2)$.

D 14 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + o(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = o(w_n)$.

E 15 Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + o(n^2),$$

car $u_n - v_n = n = o(n^2)$.

P 16

1. *La relation $\mathcal{O}$ est réflexive.*

$$u_n = \mathcal{O}\left(u_n\right).$$

2. *La relation $\mathcal{O}$ est transitive.*

$$\left.\begin{array}{r} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ v_n = \mathcal{O}(w_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n = \mathcal{O}(w_n).$$

P 17 *Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) quatre suites.*

1. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.*
2. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = \mathcal{O}(a_n b_n)$.*
3. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$.*

R On peut résumer les résultats sous la forme

$$\mathcal{O}(a_n) + \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n), \qquad \mathcal{O}(a_n)\mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(a_n b_n), \qquad \lambda\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n).$$

P 18 *Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) quatre suites.*

1. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.*
2. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.*
3. *Si $u_n = o(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = o(a_n)$.*

On peut résumer les résultats sous la forme

$$o(a_n) + o(a_n) = o(a_n), \qquad o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n), \qquad \lambda o(a_n) = o(a_n).$$

19 Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ des réels tels que $a_k \neq 0$.Alors

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k.$$

En effet,

$$1 = o(n^k), \qquad n = o(n^k), \qquad \ldots \qquad n^{k-1} = o(n^k)$$

donc $a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} = o(a_k n^k)$.
Par exemple $2n + 1 \sim 2n$ ou $8n^3 - 200n^2 + 9n - 3 \sim 8n^3$.

20 Soient $b_1, b_2, \dots, b_k$ des réels tels que $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k$. Alors

$$b_1^n + b_2^n + \cdots + b_k^n \sim b_k^n.$$

En effet,

$$b_1^n = o(b_k^n), \qquad b_2^n = o(b_k^n), \qquad \dots \qquad b_{k-1}^n = o(b_k^n)$$

donc $b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{k-1}^n = o(b_k^n)$.
Par exemple $2^n + 5^n \sim 5^n$.

E 21 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des réels tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$. Alors

$$\frac{1}{n^{\alpha_1}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} \sim \frac{1}{n^{\alpha_1}}.$$

En effet, pour tout $\alpha > \alpha_1$, $\dfrac{1}{n^{\alpha}} = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$, donc $\dfrac{1}{n^{\alpha_2}} + \cdots + \dfrac{1}{n^{\alpha_k}} = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$.
Par exemple $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^{25}} \sim \dfrac{1}{n}$.

E 22 Si $u_n \to +\infty$ et si (v_n) est bornée, alors $u_n + v_n \sim u_n$.

P 23 *Soient (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n) des suites.*

1. *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.*
2. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
3. *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
4. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
   Autrement dit, la relation o est transitive.
5. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.*
6. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

   Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(\lambda a_n)$ et $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$.

   Si $u_n = o(a_n)$ alors $u_n = o(\lambda a_n)$ et $\lambda u_n = o(a_n)$.

T 24 *Dans l'ensemble des suites réelles, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

1. *La relation $\sim$ est réflexive*

$$u_n \sim u_n.$$

2. *La relation $\sim$ est symétrique*

$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n.$$

3. *La relation $\sim$ est transitive*

$$u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \implies u_n \sim w_n.$$

T 25 *Soient* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *trois suites.*

1. *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ *alors* $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.
3. *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
4. *Si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.
5. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = o(w_n)$.

T 26 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang, c'est-à-dire*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \mathrm{sgn}(u_n) = \mathrm{sgn}(v_n).$$

T 27 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, et que (v_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$, alors (u_n) tend aussi vers ℓ.*

La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n^3$.

T 27 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, et que (v_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors (u_n) tend aussi vers ℓ.*

La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple $\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n^3$.

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$. Alors

$$u_n \sim \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Ce résultat bien sûr totalement est faux avec $\ell = 0$. En effet, $u_n \sim 0$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

T 28 **Règles de calcul**

Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ *quatre suites réelles. On suppose* $u_n \sim v_n$ *et* $a_n \sim b_n$*, alors*

1. $u_n a_n \sim v_n b_n$,
2. *Si* (b_n) *est non nulle à partir d'un certain rang, alors* (a_n) *également et*

$$\frac{u_n}{a_n} \sim \frac{v_n}{b_n}.$$

3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Si* (u_n) *est à valeurs* > 0 *à partir d'un certain rang, alors* (v_n) *également et*

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Par contre les relations $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ n'entraînent pas $u_n + a_n \sim v_n + b_n$ comme le montre l'exemple,

$$u_n = 1 \qquad v_n = 1 \qquad a_n = -1 + \frac{1}{n} \qquad b_n = -1 + \frac{1}{n^2} \qquad \frac{1}{n} \nsim \frac{1}{n^2}.$$

La propriété

$$u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Revient à composer (à gauche) chaque membre par l'application $x \mapsto x^\alpha$.
Ce résultat a un caractère exceptionnel car la relation d'équivalence n'est en général pas compatible avec la composition. Par exemple, on a

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} \sim 2n\pi$$

mais les suites de termes généraux

$$\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad et \quad \sin(2n\pi) = 0$$

ne sont pas équivalentes.

P 29 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.*

1. *Si $u_n \sim v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*
2. *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} = \mathcal{O}\left(v_{\varphi(n)}\right)$.*
3. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} = o\left(v_{\varphi(n)}\right)$.*

En particulier, si $u_n \sim v_n$, alors $u_{n+1} \sim v_{n+1}$.

P 30 **Équivalence par encadrement**

Soient (a_n), (b_n), (u_n) trois suites à valeurs réelles. On suppose que $a_n \sim b_n$ et qu'à partir d'un certain rang

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Alors ces trois suites sont équivalentes:

$$u_n \sim a_n \quad \text{et} \quad u_n \sim b_n.$$

P 31 *Soit (u_n) une suite de limite nulle. Alors* [a]

1. $\sin(u_n) \sim u_n$,
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$,
3. $\tan(u_n) \sim u_n$,
4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
5. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$,
6. $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$.

---

[a] ⚠ Ces équivalents sont généralement faux sans l'hypothèse $u_n \to 0$.

P 32 **Formule de Stirling**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

E 33 Étudier la limite de

$$a_n = \frac{(n^3+9)\sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n}-5n^2+\cos\left(\frac{n}{3}\pi\right)}.$$

E 34 Trouver un équivalent simple de

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln(1+1/n^2)}{\sqrt{\sin(1/n)}}(n+42).$$

1. Les relations de comparaisons
2. Calculs avec les relations de comparaisons
3. Cours sous forme d'exercices
4. Un peu d'informatique

T 35 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.*

1. *On a $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) est bornée.*
2. *On a $u_n = o\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 0.*
3. *On a $u_n \sim v_n$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 1.*

1. Montrer que $3n^2 - 5n + 6 = o\left(5n^3\right)$.
2. Montrer que $2n^2 - 3n + 4 = O\left(n^2\right)$.
3. Montrer que $4n^3 - 5n^2 + 8n - 9 \sim 4n^3 + n^2 - 2$.
4. Montrer que $3^n + n^2 2^n \sim 3^n$.
5. Montrer

$$\sqrt{4n^2+1} = \mathcal{O}(n), \qquad \sqrt{4n^2+1} = o\left(n^2\right), \qquad \sqrt{4n^2+1} \sim 2n.$$

6. La relation $\mathcal{O}$ est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
7. La relation o est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
8. La relation $\sim$ est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
9. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
10. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
11. Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
12. Montrer que si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.
13. Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o\left(a_n b_n\right)$.
14. Classer les suites suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$\frac{1}{n^2} \quad n^n \quad \sqrt{n} \quad n! \quad 0.5^n \quad 8n^2 \quad 23n\ln(n)$$

$$\frac{1}{n} \quad 2e^n \quad 9n^5 \quad 4321\ln(n) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 42n \quad 10^n \quad \ln(n)^3$$

Les relations Ω et Θ ne sont pas au programme de mathématiques.
Elle sont toutefois utilisées en informatique. Dans ce cas, on utilise plutôt la notation fonctionnelle pour les suites ($U(n)$ au lieu de u_n) et les suites sont le plus souvent à valeurs strictement positives.

D 36 Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

signifie qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

On dit que $g(n)$ est une **borne asymptotiquement approchée** de $f(n)$ ou que $g(n)$ et $f(n)$ sont semblables.

Cette relation est parfois notée $f(n) \asymp g(n)$.

E 37

1. $4n^3 - 2n^2 + 3 = \Theta(n^3)$.
2. $3n^2 - 2n \ln n = \Theta(n^2)$.
3. $\frac{1}{8} n \ln n + 4n = \Theta(n \ln n)$.

P 38 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $f(n) = \Theta(g(n))$.
2. $g(n) = \Theta(f(n))$.
3. $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ *et* $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

D 39 Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

signifie qu'il existe une constante $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq cg(n) \leq f(n).$$

On dit que $g(n)$ est un **minorant asymptotique** de $f(n)$.

Cela revient à dire que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.