Chapter 31 Développements limités

31.1 Développement limité en 0

31.2 Formule de Taylor-Young

31.3 Opérations sur les développements limités

Solution 31.1
Solution 31.2
Solution 31.3
Solution 31.4
Solution 31.5
Solution 31.6
Solution 31.7

1. Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right) + o(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+3+(-1)^k}{4}x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

2. On a aussi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2q}\right) + o(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k} 1\right)x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k = \tfrac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).

Solution 31.8

1. Lorsque $x\to 0$,

$$\begin{aligned}f(x) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(2x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\\ &= \boxed{x + \frac{13}{6}x^3 + o\left(x^4\right)}.\end{aligned}$$

2. Lorsque $x \to 0$,

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o\left(x^5\right) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Avec $u = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o\left(x^5\right) \to 0$, $u^2 = 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o\left(x^5\right)$, $u^3 = 8x^3 - 16x^5 + o\left(x^5\right)$, $u^4 = 16x^4 + o\left(x^5\right)$, $u^5 = 32x^5 + o\left(x^5\right)$. On obtient

$$\begin{aligned} e^{\sin(2x)} = e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + o\left(u^5\right) \\ &= \boxed{1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - \frac{32}{15}x^5 + o\left(x^5\right)}. \end{aligned}$$

3. Lorsque $x \to 0$, $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$ et lorsque $u \to 0$, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$. D'où avec $u = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \to 0$, $u^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)$, $u^3 = x^3 + o\left(x^4\right)$, $u^4 = x^4 + o\left(x^4\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right) \\ &= \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}. \end{aligned}$$

Solution 31.9
Solution 31.10

Dans chaque question, $x \to 0$.

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3)$.
2. $f(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.
3. $f(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{9}x^2 + \frac{104}{81}x^3 + o(x^3)$.
4. $f(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$.
5. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$.
6. $f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$.

Solution 31.11
Solution 31.12
Solution 31.13

développement limité de f'.

31.4 Développement limité en un point a

Solution 31.14

1. Lorsque $x \to \pi/3$, $h = x - \pi/3 \to 0$, et

$$\begin{aligned} f(x) = f(\pi/3+h) = \cos(\pi/3+h) &= \frac{1}{2}\cos h + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \frac{1}{48}h^4 + o(h^4) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right).$$

2. Lorsque $x \to 1$, $h = x - 1 \to 0$ et

$$f(x) = e^x = e^{1+h} = e \cdot e^h$$

$$\begin{aligned} &= e\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)\right) \\ f(x) &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right). \end{aligned}$$

3. Lorsque $x \to 2$, $h = x - 2 \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(2+h) &= \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{16} + o(h^4)\right) \\ f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right). \end{aligned}$$

4. Lorsque $x \to \pi/4$, $h = x - \pi/4 \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(\pi/4+h) = \tan(\pi/4+h) &= \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h} \\ &= \frac{1 + h + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)}{1 - h - \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)} \\ &= 1 + 2h + 2h^2 - \frac{8}{3}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

5. Lorsque $x \to e$, $h = x - e \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(e+h) = \ln(e+h) = \ln\left(e(1+h/e)\right) = \ln(e) + \ln(1+h/e) \\ &= 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} - \frac{h^4}{4e^4} + o(h^4). \\ f(x) &= 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + \frac{(x-e)^3}{3e^3} - \frac{(x-e)^4}{4e^4} + o\left((x-e)^4\right). \end{aligned}$$

6. Lorsque $x \to 1$, $h = x - 1 \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &= \frac{\ln(1+h)}{1+h} \\ &= h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 - \frac{25}{12}h^4 + o\left(h^4\right) \\ f(x) &= (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 - \frac{25}{12}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right). \end{aligned}$$

Solution 31.15
Solution 31.16

31.5 Applications des développements limités

Solution 31.17
Solution 31.18
Solution 31.19
Solution 31.20
Solution 31.21

1. Lorsque que $x \to 0$,

$$f(x) = -1 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2),$$

donc

$$f(x) - (-1) \sim \frac{3}{4}x^2.$$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessus de la tangente. La tangente étant horizontale, le point 0 est un minimum local pour f.

2. Lorsque que $x \to 0$,

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3),$$

donc

$$f(x) - (2x - 1) \sim \frac{1}{2}x^3.$$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = 2x-1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessous de la tangente à gauche, au dessus à droite. Le point d'abscisse 0 est donc un point d'inflexion.

3. Lorsque que $x \to 0$,

$$f(x) = -1 - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

donc

$$f(x) - (-x - 1) \sim -\frac{1}{3}x^3.$$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -x - 1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessus de la tangente à gauche, au dessous à droite. Le point d'abscisse 0 est donc un point d'inflexion.

4. Lorsque que $x \to 0$,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

donc

$$f(x) - 1 \sim -\frac{1}{6}x^4.$$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = 1$. De plus, au voisinage de ce point, la courbe est au-dessous de la tangente. La tangente étant horizontale, le point 0 est un maximum local pour f.

Solution 31.22
Solution 31.23
Solution 31.25

1. La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x) = 0$ ou $x = 0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2. On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite. Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

   Pour x au voisinage de 0, on a
   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4),$$
   d'où par intégration, le développement limité en 0 à l'ordre 5 de
   $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$
   Or
   $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)\right).$$
   Posons $u = \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On a alors $u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$ et $u^3 = o(x^4)$, d'où
   $$\frac{1}{(1-u)^3} = (1-u)^{-3} = 1 + 3u + 6u^2 + 10u^3 + 15u^4 + o(u^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{5!}x^4 + o(x^4)$$
   et donc
   $$\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\frac{\arctan x}{(\sin x)^3} &= \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{5!} + o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{40}x^4 + o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$
   Finalement,
   $$f(x) = \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{6}$. La fonction obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y = \frac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

31.6 Développements asymptotiques

Solution 31.27
Solution 31.28 *Applications des développements limités à l'étude de suites*
Solution 31.29

Lorsque $x \to +\infty$, $h = 1/x \to 0$ et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \sqrt{1 + h^2} = 2 + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) = 2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et finalement,

$$f(x) - 2x \sim \frac{1}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0+.$$

La courbe de f admet donc une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = 2x$. De plus, au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est au dessus de l'asymptote.

Lorsque $x \to -\infty$, $h = 1/x \to 0$ et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + |x|\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 - \sqrt{1 + h^2} = -\frac{1}{2}h^2 + o(h^2) = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et finalement,

$$f(x) \sim -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0+.$$

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$, d'équation $y = 0$ (axe des abscisses). De plus, au voisinage de $-\infty$, la courbe de f est au dessous de l'asymptote.

Solution 31.30
Solution 31.31

La fonction f est définie en x si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$ donc sur l'ensemble

$$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Par suite, la fonction f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de D, différent de 1 et de -1, nous avons

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- Si $x > 1$, alors clairement $f'(x) > 0$.
- Si $x < -1$, on a

$$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} + x \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} \geq -x \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq x^2,$$

qui est donc toujours faux. Donc $f'(x) < 0$.

Étudions f au voisinage de $\pm\infty$

- Pour $x > 1$, nous avons

$$f(x) = x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. De plus,

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0- .$$

Le graphe de f admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote et se trouve au dessous de cette droite.

- Pour $x < -1$, nous avons

$$f(x) = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0- .$$

Le graphe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote et se trouve au dessous de cette droite.

Déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à droite du point d'abscisse 1 ; nous avons

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 1 + \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} = +\infty.$$

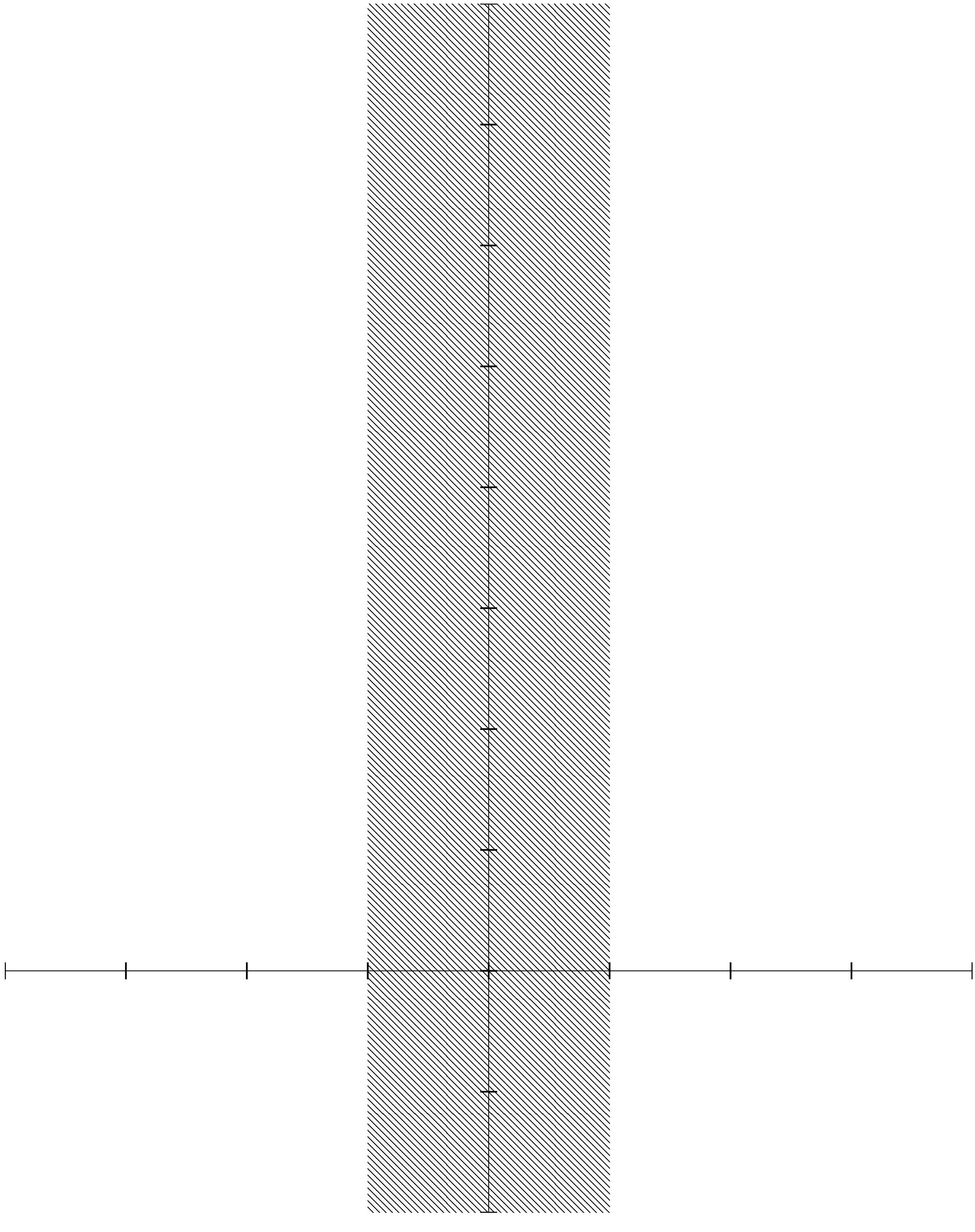
De la même manière, déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à droite du point d'abscisse -1 ; nous avons

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} 1 - \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} = -\infty.$$

Nous avons donc des demi-tangentes verticales au points d'abscisses 1 et -1.

Nous avons le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$



Solution 31.32

Indications:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f(x) \underset{x\to-\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution 31.33