Chapter 8 Calculs algébriques

8.1 Le symbole somme $\sum$

Solution 8.1

En écrivant explicitement les sommes, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Solution 8.5

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2$ ou également $\displaystyle\sum_{k=10}^{10} k^2$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + 1$ ou encore 2^0 ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{5} \frac{1}{l-2}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k-4}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=-1}^{5} \frac{k+3}{2^{k+2}}$.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}$.

7. Poser $l = k - 1$. Lorsque $k \in \{ 1, 2, 3 \}$, on a $l = k - 1 \in \{ 0, 1, 2 \}$.

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{l=0}^{2} (-1)^l \frac{(l+1)^2}{(2l+2)!}.$$

Puis l'indice étant muet, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^l \frac{(k+1)^2}{(2k+2)!}.$$

8. Poser $l = k + 1$.

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{l=2}^{5} (-1)^{l-1} \frac{2l-2}{l} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{k-1} \frac{2k-2}{k}$$

Solution 8.6

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)\,:\, u_n = 2^{n-1}$.
On a $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, d'où $R(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose $R(1), \dots, R(n)$ vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} && \text{d'après } R(1), \dots, R(n) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= 1 + 2^n - 1 = 2^n \\
u_{n+1} &= 2^{n+1-1}
\end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution 8.7

Solution 8.9

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Finalement, par téléscopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Solution 8.10

Solution 8.11

Une solution directe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1} - \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=p-2}^{q} u_k - \sum_{k=p-4}^{q-2} u_k \\
&= \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k + u_{q-1} + u_q - \left(u_{p-4} + u_{p-3} + \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k \right) \\
&= u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.
\end{aligned}$$

Une solution astucieuse avec télescopage, on écrit $u_{k+1} - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \\ &= u_q - u_{p-3} + u_{q-1} - u_{p-4}.\end{aligned}$$

Solution 8.12

Pour $k \geq 2$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln(k) + \ln(k+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) \\ &= \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(1) + \ln(2) - 2\left(\cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(2) + \ln(n)\right) + \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(n) + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}.\end{aligned}$$

Solution 8.13

Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \times k! = (k+1-1) \times k! = (k+1)! - k!$. On a donc par telescopage

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1.}$$

Solution 8.15

1. Pour $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k^2}$$
car $k(k-1) = k^2 - k \leq k^2$ puisque $k \geq 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En sommant les inégalités obtenues à la questions précédente pour $k = 2 \ldots n$, on obtient
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \underset{\text{télescopage}}{=} 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Solution 8.16

Solution 8.17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, d'où

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De manière analogue, $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En sommant les inégalités précédente pour $n = 1..10000$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{100000} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{10000} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Après telescopage, on obtient

$$\sqrt{10001} - 1 < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{10000} = 100$$

Or $\sqrt{10001} - 1 > \sqrt{10000} - 1 = 99$, d'où

$$99 \leq \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < 100$$

et donc

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) \right\rfloor = 99.$$

Solution 8.18

Solution 8.21

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a $\frac{1}{k} > 0$ et $\frac{1}{k+1} > 0$. Or la fonction arctan est croissante majorée par $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$0 < \arctan\frac{1}{k} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 < \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k}\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1-k}{k(k+1)+1} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

Et puisque $\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on a bien

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. On a par telescopage,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \arctan(1) - \arctan\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \arctan x = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 8.23

8.2 Sommes usuelles

Solution 8.24

1. $n(n+1)/2$.

2. nk.

3. ni.

4. n^2.

Solution 8.25

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{k=0}^{n}(k-k) + n + 1 = n + 1.$

2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2.$

3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$

4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum k = 1^n \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

Solution 8.26

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$R(0)$ est vraie car

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $R(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \because R(n) \\
&= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}.
\end{aligned}$$

Or $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on a donc $R(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution 8.29

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}.$

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$

Solution 8.33

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k.$$

- Si $x \neq 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}}\frac{e^{-(n+1)x/2}-e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2}-e^{x/2}} = e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k = e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2}e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{nx/2}+e^{-nx/2}\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{\operatorname{ch}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}}.$$

- Si $x = 0$, on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = n+1}$.

Solution 8.37
Solution 8.39

1.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i = 3\frac{2}{9}\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$

Solution 8.40 *Écriture en base b*
Solution 8.41
Solution 8.43

1. La formule de Pascal donne pour $p, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{p+k+1}{p+1} = \binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1}.$$

D'où la relation

$$\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}.$$

2. Par télescopage, on obtient

$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\binom{p+(k+1)}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Solution 8.45

1. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.
2. $1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$.

Solution 8.46
On a

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(2x)^k\left(-\frac{1}{4x^2}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^k(2x)^{3k-24}.$$

L'exposant de x vaut 3 si, et seulement si $3k - 24 = 3$, c'est-à-dire si $k = 9$, et le terme en x^3 est donc

$$\binom{12}{9}(-1)^9(2x)^{3\cdot 9-24} = -\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}(2x)^2 = -220\cdot 8x^3 = -1760x^3.$$

Solution 8.47
De manière analogue à l'exercice **??**, on obtient

1. $-448x^5$.
2. $1001x^{20}y^8$.
3. $-5760x^6$.
4. $3003x^4$ et $0x^6$.

Solution 8.50
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}1000003^5 = \left(10^6+3\right)^5 &= 10^{30} + 5\times 3\cdot 10^{24} + 10\times 9\cdot 10^{18} + 10\times 27\cdot 10^{12} + 5\times 81\cdot 10^6 + 243\\ &= 10^{30} + 15\cdot 10^{24} + 90\cdot 10^{18} + 270\cdot 10^{12} + 405\cdot 10^6 + 243\\ &= 1\,000\,015\,090\,000\,270\,000\,405\,000\,243.\end{aligned}$$

Solution 8.51

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = -\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3\times\left(3^2\right)^k\binom{n}{k} = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(3^2\right)^k = 3\left(1+3^2\right)^n = 3\cdot 10^n.$

Solution 8.52
Solution 8.54

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, et donc

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

et en évaluant en 1,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2. Le premier terme de la somme étant nul, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}$$

Or,

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}1^{n-p}1^p = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.$$

Finalement, $A_n = n2^{n-1}$.

Solution 8.55 *Une formule d'inversion*

1. Il s'agit d'applications immédiates de la formule du binôme de Newton.

(a) $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$;

(b) $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$;

(c) $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$;

(d) $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^a)^k = (1+e^a)^n$.

2. [1] [2]On a $f_0 = g_0$, d'où $g_0 = f_0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons que la formule demandée soit vraie pour tous les entiers strictement inférieurs à n[3]. On a

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k = g_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k.$$

D'où, par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} g_n &= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k \\ &= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i \right). \\ &= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} f_i. \\ &= f_n - \sum_{0 \le i \le k \le n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} f_i. \\ &= f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \right) f_i. \end{aligned}$$

Un recours aux factorielles donne[4]

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

et donc

$$\sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k}\binom{k}{i} f_i = \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{i} \sum_{\ell=0}^{n-i-1} (-1)^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell}.$$

[1]
$$R(n) : f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k.$$

[2] $R(0)$

[3]On suppose $R(0), \dots, R(n-1)$. Une récurrence simple, où la propriété ne sera supposée vraie qu'au rang $n-1$ ne suffit pas.

[4]On peut également effectuer un raisonnement ensembliste direct.

Or lorsque $i < n$, $\sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^\ell\binom{n-i}{\ell} = (1-1)^{n-i} = 0$, et donc

$$\sum_{\ell=0}^{n-i-1}(-1)^\ell\binom{n-i}{\ell} = -(-1)^{n-i}\binom{n-i}{n-i} = -(-1)^{n-i}.$$

Finalement, le terme f_n réintégrant la cohue

$$g_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$$

ce qui est le résultat attendu au rang n et achève la preuve par récurrence[5].

8.3 Généralisation de la notation $\sum$

Solution 8.58

1. Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^i x^j = \sum_{i=0}^{n} x^i\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n} x^i\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}(i+j)^2 &= \sum_{1\le i,j\le n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2 + 2i\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1+3n+3+2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.\end{aligned}$$

Solution 8.59
Solution 8.60
Solution 8.62

Posons $P(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_ja_k}{j+k}x^{j+k}\right)$. Alors

$$xP'(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_ja_kx^{j+k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_jx^j\right)^2 \ge 0.$$

L'application P est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $P(0) = 0$ et donc $P(x) \ge 0$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier $P(1) \ge 0$, ce qui est le résultat demandé.

[5] d'où $R(n)$

L'application P est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc si $P(1)=0$, alors P est constante sur $[0,1]$ et donc $P'(x)=0$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\forall x \in [0,1] \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0,$$

ce qui n'est possible que si tous les coefficients a_i sont nuls.

Solution 8.63

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$

Solution 8.64

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(j\frac{j(j+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3+j^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{24}\left(3n(n+1)+2(2n+1)\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{24}\left(3n^2+7n+2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Solution 8.65

1. On écrit une somme double

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) &= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)j\right) = \frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2+j = \frac{3}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2}\frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

2. Nous allons écrire une somme double. Puisque l'on ne sait pas calculer une somme du type $\displaystyle\sum_j \frac{1}{j}$, nous allons plutôt commencer par sommer sur l'indice i.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j+1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\frac{j(j+1)}{2}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

3. On peut écrire une somme double ($\sum_i\sum_j$), mais on peut aussi utiliser d'abord la linéarité.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(j-i)=\sum_{1\le i\le j\le n}j-\sum_{1\le i\le j\le n}i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}i$$
$$=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}\left((n+1)k-k^2\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(n+1)k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)^2}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(4n+2-3n-3)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

4.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i^2}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}j^2+\frac{1}{2}j+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{6}n=\frac{n(4n^2+6n+2+9n+9+6)}{36}$$
$$=\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}$$

Solution 8.67
Solution 8.68
Solution 8.69
Solution 8.70
Solution 8.72
Solution 8.73
Solution 8.74

8.4 Le symbole produit $\prod$

Solution 8.76

1. $n!$.

2. k^n.

3. i^n.

4. n^n.

Solution 8.77
Solution 8.78