Chapter 7 Calculs algébriques

7.1 Le symbole somme $\sum$

Solution 7.1

En écrivant explicitement les sommes, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Solution 7.3

Solution 7.4

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2$ ou également $\displaystyle\sum_{k=10}^{10} k^2$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + 1$ ou encore 2^0 ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{5} \frac{1}{l-2}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k-4}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=-1}^{5} \frac{k+3}{2^{k+2}}$.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}$.

7. Poser $l = k - 1$. Lorsque $k \in \{ 1, 2, 3 \}$, on a $l = k - 1 \in \{ 0, 1, 2 \}$.

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{l=0}^{2} (-1)^l \frac{(l+1)^2}{(2l+2)!}.$$

Puis l'indice étant muet, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^l \frac{(k+1)^2}{(2k+2)!}.$$

8. Poser $l = k + 1$.

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{l=2}^{5} (-1)^{l-1} \frac{2l-2}{l} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{k-1} \frac{2k-2}{k}$$

Solution 7.5 *Écriture en base b*

Solution 7.6

Solution 7.7

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n) : u_n = 2^{n-1}$.

On a $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, d'où $R(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose $R(1), \dots, R(n)$ vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} && \text{d'après } R(1), \dots, R(n) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= 1 + 2^n - 1 = 2^n \\
u_{n+1} &= 2^{n+1-1}
\end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution 7.8

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Finalement, par téléscopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$$

Solution 7.9

Une solution directe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1} - \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=p-2}^{q} u_k - \sum_{k=p-4}^{q-2} u_k \\
&= \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k + u_{q-1} + u_q - \left(u_{p-4} + u_{p-3} + \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k \right) \\
&= u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.
\end{aligned}$$

Une solution astucieuse avec télescopage, on écrit $u_{k+1} - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \\ &= u_q - u_{p-3} + u_{q-1} - u_{p-4}.\end{aligned}$$

Solution 7.10

Pour $k \geq 2$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln(k) + \ln(k+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) \\ &= \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(1) + \ln(2) - 2\left(\cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(2) + \ln(n)\right) + \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(n) + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Solution 7.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, d'où

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De manière analogue, $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En sommant les inégalités précédente pour $n = 1..10000$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{100000} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{10000} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Après telescopage, on obtient

$$\sqrt{10001} - 1 < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{10000} = 100$$

Or $\sqrt{10001} - 1 > \sqrt{10000} - 1 = 99$, d'où

$$99 \leq \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < 100$$

et donc

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right\rfloor = 99.$$

Solution 7.12

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a $\frac{1}{k} > 0$ et $\frac{1}{k+1} > 0$. Or la fonction arctan est croissante majorée par $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$0 < \arctan\frac{1}{k} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 < \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) = \frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1-k}{k(k+1)+1} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

Et puisque $\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on a bien

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. On a par telescopage,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \arctan(1) - \arctan\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\arctan x = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

7.2 Sommes usuelles

Solution 7.13

1. $n(n+1)/2$.
2. nk.
3. ni.
4. n^2.

Solution 7.14

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{k=0}^{n}(k-k) + n + 1 = n+1.$

2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2.$

3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$

4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum k = 1^n \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$ $2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

Solution 7.15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$R(0)$ est vraie car

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0(0+1)(2\times 0+1}{6} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $R(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \because R(n) \\ &= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}.\end{aligned}$$

Or $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on a donc $R(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution 7.16

Solution 7.17

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}.$

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$

Solution 7.18

1. $r = -6/5$.
2. $r = 4$.
3. $u_0 = -9$.
4. $u_0 = 60$ et $r = 4$.
5. $u_0 = 320/3$ et $r = -10/3$.
6. $u_0 = 7$ et $r = 2$.

Solution 7.19

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^k .$$

- Si $x \neq 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n}(e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}}\,\frac{e^{-(n+1)x/2}-e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2}-e^{x/2}} = e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^k = e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2}e^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{nx/2}+e^{-nx/2}\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{ch}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

- Si $x = 0$, on a $\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx) = n+1$.

Solution 7.20

Solution 7.21

1.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i = 3\frac{2}{9}\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$

Solution 7.22

1. $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

2. $1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5$.

Solution 7.23

On a

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x)^k \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k (2x)^{3k-24}.$$

L'exposant de x vaut 3 si, et seulement si $3k - 24 = 3$, c'est-à-dire si $k = 9$, et le terme en x^3 est donc

$$\binom{12}{9}(-1)^9(2x)^{3\cdot 9-24} = -\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}(2x)^2 = -220\cdot 8x^3 = -1760x^3.$$

Solution 7.24

De manière analogue à l'exercice **??**, on obtient

1. $-448x^5$.
2. $1001x^{20}y^8$.
3. $-5760x^6$.
4. $3003x^4$ et $0x^6$.

Solution 7.25

On a

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k \left(\frac{a}{x^2}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} x^{3k-14}.$$

Le terme en x^4 de ce développement correspond à $k = 6$. Le coefficient du terme en x^4 est donc $\binom{7}{6}a = 7a$. Celui-ci est égal à 14 si, et seulement si $a = 2$.

Solution 7.26

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1000003^5 = \left(10^6+3\right)^5 &= 10^{30} + 5\times 3\cdot 10^{24} + 10\times 9\cdot 10^{18} + 10\times 27\cdot 10^{12} + 5\times 81\cdot 10^6 + 243 \\ &= 10^{30} + 15\cdot 10^{24} + 90\cdot 10^{18} + 270\cdot 10^{12} + 405\cdot 10^6 + 243 \\ &= 1\,000\,015\,090\,000\,270\,000\,405\,000\,243. \end{aligned}$$

Solution 7.27

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = -\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3\times\left(3^2\right)^k\binom{n}{k} = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(3^2\right)^k = 3\left(1+3^2\right)^n = 3\cdot 10^n.$

Solution 7.28

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, et donc

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

et en évaluant en 1,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2. Le premier terme de la somme étant nul, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}$$

Or,

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}1^{n-p}1^{p} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.$$

Finalement, $\boxed{A_n = n2^{n-1}}$.

Solution 7.29
Solution 7.30
Solution 7.31 *BanqueCCINP 2023 Exercice 3 analyse*

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
On prouve, par récurrence, que :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\, h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.

2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}e^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!e^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons (P_n) la propriété:
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
$\forall\, x \in I,\, (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\, (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$

Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et: $\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+\right.$
En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient: $\forall\, x \in I,\, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x).$
C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \binom{n}{0}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{n}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x$

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

7.3 Généralisation de la notation $\sum$

Solution 7.32

1. Si $x \neq 1$,

$$\sum_{0 \le i,j \le n} x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x^i x^j = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\sum_{j=0}^{n} x^j \right) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)$$
$$= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2.$$

2.

$$\sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} i^2 + 2ij + j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i^2 + 2ij + j^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(ni^2 + 2i \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$
$$= n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n^2(n+1)(2n+1+3n+3+2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

Solution 7.33
Solution 7.34

Posons $P(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k} x^{j+k} \right)$. Alors

$$xP'(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j a_k x^{j+k} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_j x^j \right)^2 \ge 0.$$

L'application P est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $P(0) = 0$ et donc $P(x) \ge 0$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier $P(1) \ge 0$, ce qui est le résultat demandé.

L'application P est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc si $P(1) = 0$, alors P est constante sur $[0,1]$ et donc $P'(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\forall x \in [0,1] \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0,$$

ce qui n'est possible que si tous les coefficients a_i sont nuls.

Solution 7.35

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \frac{j(j+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(j^3 + j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n(n+1) + 2(2n+1) \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n^2 + 7n + 2 \right).
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Solution 7.36

1. On écrit une somme double

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j \right) = \frac{3}{2} \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + j = \frac{3}{2} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

2. Nous allons écrire une somme double. Puisque l'on ne sait pas calculer une somme du type $\sum_j \frac{1}{j}$, nous allons plutôt commencer par sommer sur l'indice i.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

3. On peut écrire une somme double ($\sum_i \sum_j$), mais on peut aussi utiliser d'abord la linéarité.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i) &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}\left((n+1)k - k^2\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(n+1)k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+2-3n-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}j^2 + \frac{1}{2}j + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n = \frac{n(4n^2+6n+2+9n+9+6)}{36} \\
&= \frac{n(4n^2+15n+17)}{36}
\end{aligned}$$

Solution 7.37

7.4 Le symbole produit $\prod$

Solution 7.38

1. $n!$.
2. k^n.
3. i^n.
4. n^n.

Solution 7.39