

Chapter 14 Groupe symétrique

Exercice 14.1

Dans \mathcal{S}_n , on considère une permutation σ et un cycle de longueur p

$$c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p).$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un cycle de longueur p que l'on précisera.

Exercice 14.2

Soit V_4 la partie de \mathcal{S}_4 donnée par

$$V_4 = \{ 1, (1 \ 2)(3 \ 4), (1 \ 3)(2 \ 4), (1 \ 4)(2 \ 3) \}$$

Montrer que V_4 est un sous-groupe de \mathcal{S}_4 , puis que V_4 est isomorphe au groupe produit $\{-1, 1\}^2$.

Exercice 14.3

Calculer la puissance 38-ème de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.4

Soit p et n deux entiers tels que $2 \leq p \leq n$.

Combien y-a-t-il de cycles de longueur p dans \mathcal{S}_n ?

Exercice 14.5 (***) Inégalité de réarrangement

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels tels que

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \quad \text{et} \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n.$$

Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Exercice 14.6

En n points distincts d'une piste circulaire, n coureurs sont prêts à partir.

- Au top départ, chacun démarre en choisissant aléatoirement un sens de rotation.
- Quand deux coureurs se rencontrent, ils font demi-tour et repartent immédiatement.
- Tous les coureurs vont à la même vitesse, et cette vitesse reste constante.

Montrer qu'au bout d'un certain temps, tous se retrouvent à leur point de départ.

Exercice 14.7 Exemples dans \mathcal{S}_7

Soient

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma' = (1 \ 4 \ 5)(2 \ 4 \ 6 \ 7)(1 \ 2 \ 6)$$

deux permutations de $\{1, \dots, 7\}$.

1. Déterminer σ^{-1} et $(\sigma')^{-1}$.
2. Écrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints et écrire σ' sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma'(1) & \sigma'(2) & \sigma'(3) & \sigma'(4) & \sigma'(5) & \sigma'(6) & \sigma'(7) \end{array} \right).$$

3. Écrire σ et σ' comme produit de transpositions.
4. Déterminer la signature de σ , σ' , $\sigma\sigma'$ et $\sigma^{-1}\sigma'\sigma$.
5. Déterminer $\sigma\sigma'$ et $\sigma'\sigma$.

Exercice 14.8

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.
3. Déterminer les orbites de σ .
4. Déterminer σ^{2041} .