Chapter 32 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Exercice 32.1
Étude de la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Exercice 32.2
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x), & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.

Exercice 32.3
Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

Exercice 32.4
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,+\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,+\infty[$.

Exercice 32.5
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction u_n de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = x^n(1-x).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction u que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\|u_n - u\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers u sur $[0,1]$?

Exercice 32.6
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n}x.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 32.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x|, & |x| < n \\ 0, & |x| \geq n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g que l'on précisera.

2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$?

Exercice 32.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction h_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h que l'on précisera.

2. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $\mathbb{R}$?

Exercice 32.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction k_n de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$k_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n, & \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 4n^2x, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction k que l'on précisera.

2. La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $[0,1]$?

3. Soit $a, b \in]0,1[$ avec $a < b$. La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers h sur $[a,b]$?

Exercice 32.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction ℓ_n de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\ell_n(x) = n\left(x^n - x^{n+1}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction ℓ que l'on précisera.

2. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers ℓ sur $[0,1]$?

3. Soit $a, b \in]0,1[$ avec $a < b$. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers ℓ sur $[a,b]$?

Exercice 32.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction m_n de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par

$$m_n(x) = \frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction m que l'on précisera.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\left|m_n(x) - m(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle uniformément vers m sur $\mathbb{R}_+$?