Notions sur les fonctions en analyse

Aperçu

D

Une **fonction** ou **application** f est définie par la donnée de trois éléments : un **ensemble de départ** X, un **ensemble d'arrivée** Y et pour tout $x \in X$, la donnée d'une (unique) **image** notée $f(x) \in Y$. On note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$.

- Lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on parle de **fonction d'une variable réelle**.
- Lorsque $Y \subset \mathbb{R}$ (ou $Y \subset \mathbb{C}$), on parle de fonction numérique.
- Nous noterons parfois $\mathrm{dom}(f)$ l'ensemble de départ de f.

D

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
- On dit que f est **dérivable en a** si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a)$.

R

- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.
- On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.

T

Déterminer l'ensemble de définition des applications définies par

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$
2. $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

D Soit $f : X \to Y$ une fonction et A une partie de X. L''**image de A par f**, notée $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A par f, c'est-à-dire

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} .$$

L'image de X tout entier est simplement appelée l'**image de f**. On dit que f est **à valeurs dans J** si toute valeur de f est élément de J, ou encore $f(X) \subset B$.

R On a l'équivalence

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y.$$

E

Déterminer l'image des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}.$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}.$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}.$

T

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

D

Soit deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$. On suppose que pour tout $x \in X$ on a $f(x) \in Y'$, de sorte que l'expression $g(f(x))$ a un sens et on la note $(g \circ f)(x)$. La fonction ainsi définie

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

est la **composée** des fonctions g et f.

T

On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}.$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On appelle **graphe** de f, et on note Γ_f, l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$. Ainsi

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} .$$

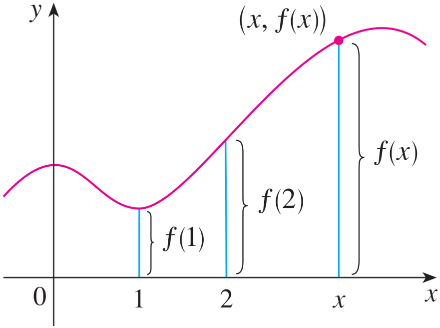
D

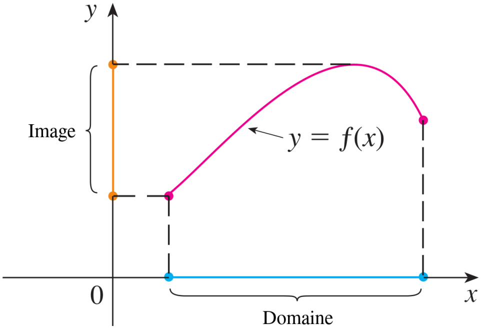
Un repère orthonormal $\mathfrak{R}$ du plan étant choisi, le graphe Γ_f de $f : X \to Y$ s'identifie à l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x décrivant X, appelé **courbe représentative** de f dans $\mathfrak{R}$. On emploiera abusivement le terme graphe de f pour désigner la courbe représentative de f dans $\mathfrak{R}$.

R La courbe représentative de f dans un repère $\mathfrak{R} = (Oxy)$ est la courbe d'équation

$$y = f(x)$$

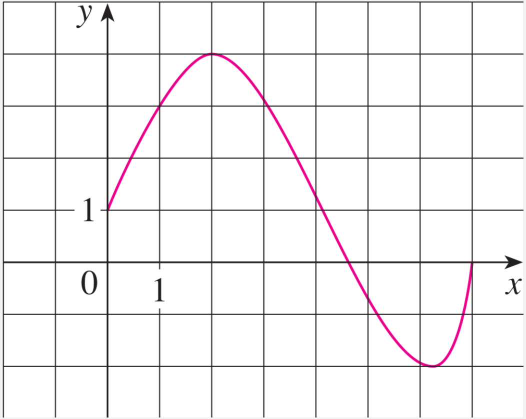
c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient
$x \in \mathrm{Dom}(f)$ et $y = f(x)$.





T

Le graphe d'une fonction f est représenté ci-dessous



1. Quel sont les valeurs de $f(1)$ et $f(5)$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que l'image de f.

P

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *On note* $\mathcal{C}$ *la courbe représentative de* f.

1. *La courbe* $y = f(x) + a$ *est obtenue à partir de* $\mathcal{C}$ *par translation de vecteur* $a\overrightarrow{e_2}$.
2. *La courbe* $y = f(x - a)$ *est obtenue à partir de* $\mathcal{C}$ *par translation de vecteur* $a\overrightarrow{e_1}$.

En prenant $a = \pm c$ où $c > 0$. Les courbes d'équations $y = f(x) + c$, $y = f(x) - c$, $y = f(x - c)$, $y = f(x + c)$ s'obtiennent respectivement par un translation vers le haut, le bas, la droite, la gauche (voir 1).

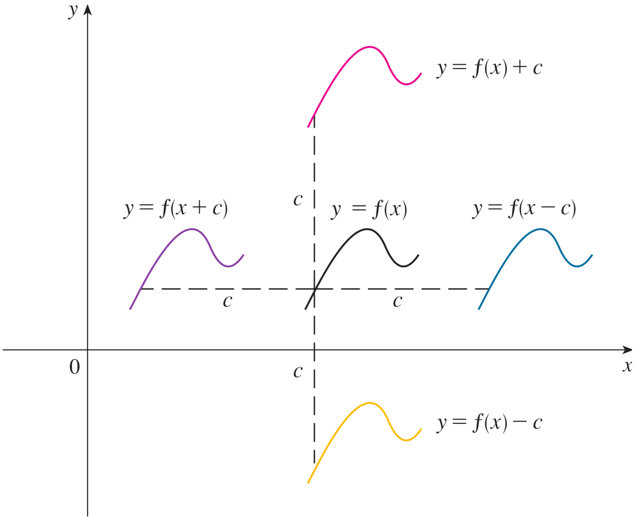


Figure: Translation d'une courbe ($c > 0$)

T Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto f(x) + a$ et $h : x \mapsto f(x + a)$?

P

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. *La courbe $y = af(x)$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par une affinité verticale de rapport a.*
2. *La courbe $y = f(ax)$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par une affinité horizontale de rapport $1/a$ $(a \neq 0)$.*

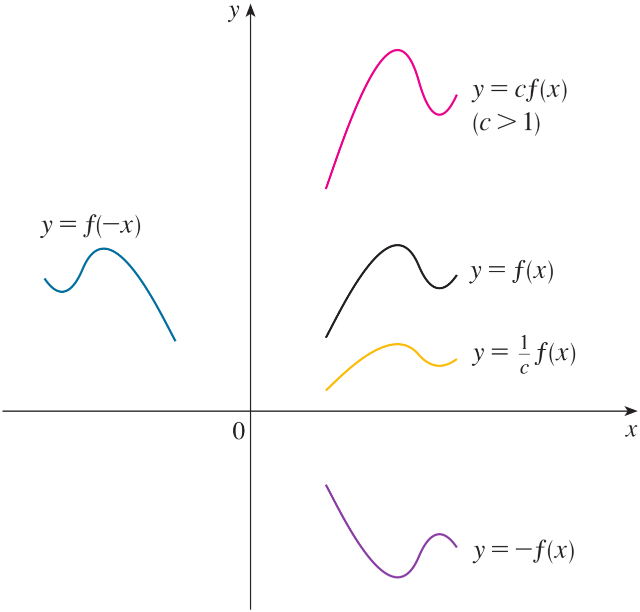


Figure: Transformation par affinité $(c > 1)$

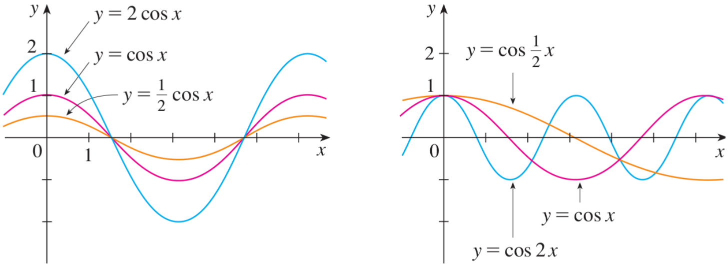


Figure: Transformation par affinité

T Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto af(x)$ et $h : x \mapsto f(ax)$?

T À partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, utiliser les transformations précédentes afin d'obtenir les courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x} - 2$
2. $y = \sqrt{x - 2}$
3. $y = -\sqrt{x}$
4. $y = 2\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{-x}$

T Tracer les courbes d'équations

1. $y = \sin(2x)$.
2. $y = 1 - \sin(x)$.

D

L'ensemble D est **symétrique par rapport à $\mathbf{0}$** si

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

D

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0.

- f est **paire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = f(x).$$
- f est **impaire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

T

Déterminer la parité de chacune des fonctions définies par

1. $f(x) = x^5 + x$
2. $g(x) = 1 - x^4$
3. $h(x) = 2x - x^2$

M Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0. Notons $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ les représentations respectives des restrictions de f aux intersections de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ avec D.

- Si f est paire, alors on obtient $\mathcal{C}$ en traçant $\mathcal{C}_+$ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors on obtient $\mathcal{C}$ en traçant $\mathcal{C}_+$ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport au point O.

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction f à $D \cap \mathbb{R}_+$ ou $D \cap \mathbb{R}_-$.

Figure: Courbe représentative d'une fonction paire

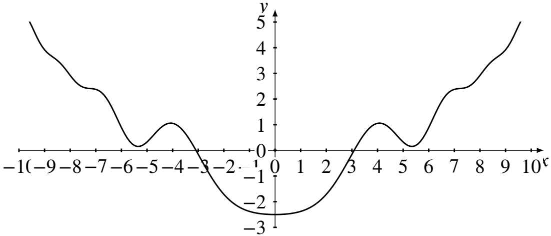
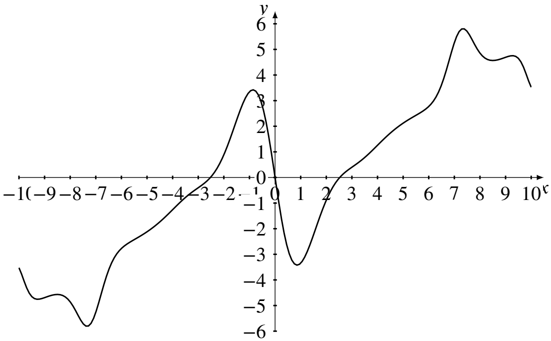


Figure: Courbe représentative d'une fonction impaire



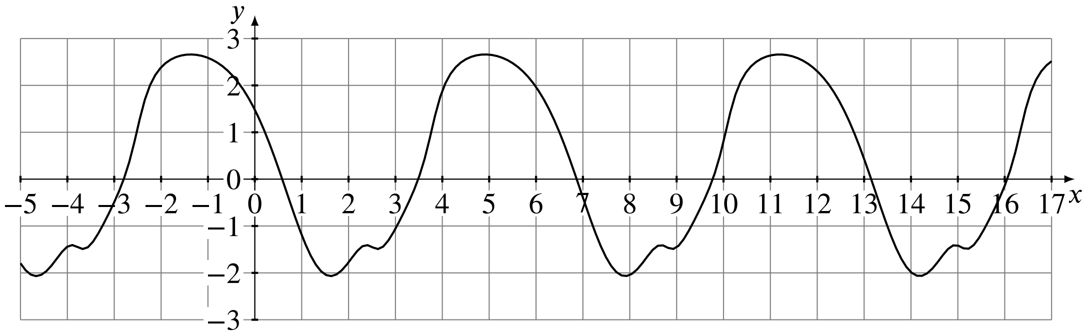
D

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- f est **périodique de période T** si
  - $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
  - $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.
- Si f est périodique de période T et si, pour tout $T' \in]0, T[$, f n'est pas périodique de période T', on dit que T est **la période principale** de f.

M Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et soit I un intervalle semi-ouvert de longueur T. La connaissance de la restriction de f à $I \cap D$ détermine f sur tout son ensemble de définition. Cette remarque a une traduction géométrique simple. Pour cela notons $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la restriction de f à $I \cap D$. Alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de $\mathcal{C}$ et des transformées de $\mathcal{C}$ par les translations de vecteurs $nT\overrightarrow{e_1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les translations de mesure algébrique nT parallèlement à l'axe des abscisses.

Figure: Courbe représentative d'une fonction périodique



D

Soit $f : X \to Y$ une application.

- On dit que f est **injective** quand

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- On dit que f est **surjective** quand

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

  Autrement dit, f est surjective si, et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent par f.

R

Fixons $y \in Y$ et considérons l'équation d'inconnue $x \in X$

$$f(x) = y. \tag{E}$$

- Si f est injective, l'équation (E) a au plus une solution (c'est-à-dire 0 ou 1 solution).
- Si f est injective, l'équation (E) a au moins une solution (c'est-à-dire 1, 2, beaucoup voir une infinité).

T La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est-elle injective? Est-elle surjective?

T La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est-elle injective? Est-elle surjective?

D Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **bijective** quand elle est injective et surjective. Autrement dit, pour tout $y \in Y$, l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in X$ admet exactement une solution.
Lorsque l'application $f : X \to Y$ bijective. En associant à tout élément $y \in Y$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée **application réciproque** de l'application f (ou simplement *réciproque* de f) et notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidement que f^{-1} est à son tour bijective et que sa réciproque est $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

T Supposons f bijective. Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, déterminer $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

E Soit $f : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\to [0, +\infty[$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

T Soit $f : x \mapsto \sqrt{-1-x}$. Déterminer son ensemble de définition D. Montrer que f, définie comme fonction de D dans $\mathbb{R}_+$ est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

R Si f est bijective, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (d'équation cartésienne $y = x$).

P *Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective. Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.*

T Pourquoi n'énnonce-t-on pas une propriété analogue pour les fonctions paires?

D

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in D, f(x) \leq M.$$

  Dans ce cas, le réel M est appelé un **majorant** de f.

- Soit $a \in D$. On dit que f **admet un maximum en a** si

$$\forall x \in D, f(x) \leq f(a).$$

  Le réel $f(a)$ est alors appelé le **maximum** de f et est noté $\max_D f$ ou $\max_{x \in D} f(x)$.

D

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in D, f(x) \leq m.$$

  Dans ce cas, le réel m est appelé un **minorant** de f.

- Soit $a \in D$. On dit que f **admet un minimum en a** si

$$\forall x \in D, f(a) \leq f(x).$$

  Le réel $f(a)$ est alors appelé le **minimum** de f et est noté $\max_D f$ ou $\max_{x \in D} f(x)$.

D Une fonction f est **bornée** lorsque elle est majorée et minorée.

P *La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un réel μ tel que*

$$\forall x \in D, |f(x)| \leq \mu.$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

D

Si f et g sont deux applications de D dans $\mathbb{R}$. On introduit la relation d'ordre $\leq$ entre f et g :

$$f \leq g \iff \forall x \in D, f(x) \leq g(x).$$

On dit qu'une application est **positive** (resp. **négative**) lorsque $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$).

La relation $\leq$ est une relation d'ordre partielle dès que A contient plus de deux éléments. [1]

[1] Évitez la notation $f < g$ qui signifie «$f \leq g$ et $f \neq g$».

D

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **croissante** sur D si

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f est **strictement croissante** sur D si

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

- f est **décroissante** sur D si

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

- f est **strictement décroissante** sur D si

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

E

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante, mais n'est pas strictement croissante.

P

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et $f : D \to \mathbb{R}$. Supposons f strictement croissante, alors

1. *f est injective.*
2. $\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.
3. $\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$.

On a bien sûr une proposition similaire pour les fonctions strictement décroissantes. Ce lemme est particulièrement utile lors de la résolution d'inégalités.

E

Soit $x, y \in]0, \pi/2[$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin y} &\iff \sin x \geq \sin y && \text{car } \sin x \text{ et } \sin y \text{ sont } > 0 \\
& && \text{et } x \mapsto 1/x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^\star, \\
&\iff x \geq y && \text{car } \sin \text{ est strictement croissante sur }]0, \pi/2[.
\end{aligned}$$

D

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Étudier les **variations** de f sur D, c'est chercher à partager D en sous-ensembles tels que sur chacun d'eux f soit monotone.

P

Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective.
Si f est monotone, alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

T

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On suppose f strictement monotone et continue.
Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, c'est-à-dire que l'application

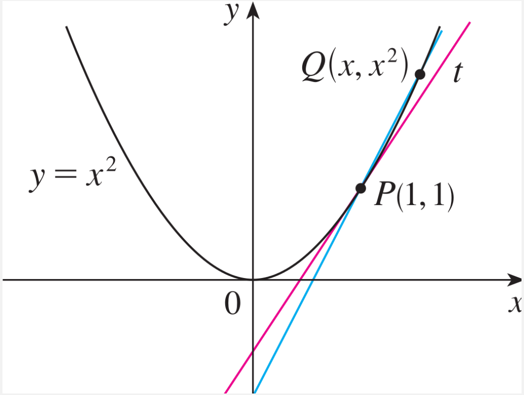
$$g : \begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. De plus g^{-1} est continue.

Tangente du latin *tangens*, de *tangere*, toucher.

Nous cherchons à déterminer s'il existe une droite qui «approche au mieux» une courbe.

E Déterminer un équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $P(1, 1)$.



x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

∎

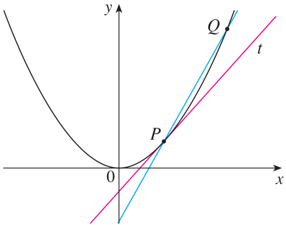


Figure: Q approche P par la droite

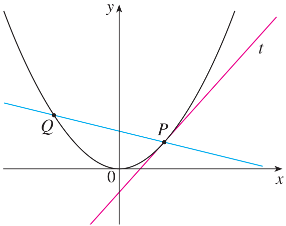


Figure: Q approche P par la gauche

D Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** en un point $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie ; la valeur de cette limite s'appelle **dérivée première** (ou simplement **dérivée**) de f **au point** a, et se note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

L'application $T : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ est le **taux d'accroissement de f en a**.

De manière équivalente, on peut considérer la limite

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

P

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application dérivable en $a \in I$, alors C_f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

D

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et dérivable en tout point de I.
La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I (au moins), est appelée **fonction dérivée** ou (par abus de langage) dérivée de f et se note f' ou $\mathrm{D}\, f$.

T *Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables au point a alors,*

1. *$f + g$ est dérivable au point a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *λf est dérivable au point a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
3. *fg est dérivable au point a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivables au point a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

E Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}\,(a + bx)$.

T

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$. Supposons f dérivable en $a \in A$ et g dérivable en $f(a) \in B$, alors l'application composée

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable au point a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

E Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

E Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $F(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

E Déterminer la dérivabilité et la dérivée des fonctions définies par

1. $f(x) = \sin(x^2)$
2. $g(x) = \sin^2(x)$

E Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $u(x) = \left(x^3 - 1\right)^{100}$.

P

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- *Si f' est positive alors f est croissante.*
- *Si f' est positive et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.*
- *Si f' est négative alors f est décroissante.*
- *Si f' est négative et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.*

Il est essentiel que l'ensemble de départ soit un intervalle. En effet, l'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ mais elle n'est pas croissante puisque $f(-1) > f(1)$.
De même, lorsque la dérivée de f est nulle, alors f est constante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

M

Image directe lues sur un tableau de variation

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application *dérivable*[2] Alors

1. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante et $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
2. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante et $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

On a un résultat analogue si f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert (éventuellement avec des bornes infinie) en utilisant des limites si nécéssaire. Par exemple si f est dérivable sur $]a, b]$ et croissante alors $f(]a, b]) = \left] \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), f(b) \right]$.

[2]Nous améliorerons ce résultat en parlant des fonctions continues.

T *Soient f une application continue et strictement monotone d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

R Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

D

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est dérivable sur I, on appelle **dérivée seconde** de f, et on note f'', $f^{(2)}$ ou $D^2 f$ la dérivée de f'. On dit alors que f est **deux fois dérivable** sur I.
- On définit de la même manière par récurrence la **dérivée n-ième** de f : si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on appelle dérivée n-ième de f l'application notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$, définie par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. On dit alors que f est **n fois dérivable** sur I.
- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D

Soient f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **convexe sur I** lorsque sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses cordes.
Lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes, on dit que f est **concave sur I**.

P

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *La fonction f est convexe;*
2. *La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes;*
3. *La fonction f' est croissante sur I;*
4. *La fonction f'' est positive sur I.*

D

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, la fonction change de convexité.

P

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si, et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

P

1. *Si* $f(x) \to \pm\infty$ *lorsque* $x \to a \in \mathbb{R}$, *alors la droite d'équation* $x = a$ *est* ***asymptote verticale*** *à la courbe* C_f *en* a.
2. *Si* $f(x) \to q \in \mathbb{R}$ *lorsque* $x \to \pm\infty$, *alors la droite d'équation* $y = q$ *est* ***asymptote horizontale*** *à la courbe* C_f *en* $\pm\infty$.

D

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. On dit que $\mathcal{A}$ est **asymptote** à la courbe de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} ax + bf(x) + c = 0$$

On a une définition analogue lorsque $x \to -\infty$.

Cela signifie que la distance entre la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $ax + by + c = 0$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

P

On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = p \in \mathbb{R}^\star \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - px = q \in \mathbb{R}.$$

Alors la droite d'équation $y = px + q$ *est asymptote à la courbe de* f *en* $+\infty$*.*

On utilise la même méthode lorsque $x \to -\infty$.

E Étudier les branches infinies de la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ par

$$f : x \mapsto \frac{3x^2+1}{x+2}.$$

Démonstration. Puisque $\lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty$, la courbe de f admet la droite d'équation $x = -2$ pour asymptote verticale.
De plus, pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{3+1/x^2}{1+2/x}$ d'où $\lim_{x \to \pm\infty} = 3$. La courbe de f admet donc une direction asymptotique en $\pm\infty$ d'équation $y = 3x$. Étudions l'existence d'une asymptote : $f(x) - 3x = \frac{-6x+1}{x+2} = \frac{-6+1/x}{1+2/x}$, et ainsi $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 3x = -6$, et la courbe de f admet en $\pm\infty$ une asymptote d'équation $y = 3x - 6$.
Puisque $f(x) - 3x + 6 = \frac{13}{x+2}$, la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$. ∎

1. S'il n'est pas donné de manière explicite, on détermine l'ensemble de définition A, c'est-à-dire la partie A de l'ensemble $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie.
2. On étudie la périodicité de la fonction f. Si f est T-périodique, on peut réduire l'ensemble d'étude à son intersection A' avec l'intervalle $[-T/2, T/2]$ (ou $[0, T]$ ou un autre segment d'amplitude T). Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par des translations parallèlement à (Ox).
3. Supposons que A soit symétrique par rapport à l'origine. On étudie la parité de la fonction. Si f est paire, le graphe de f est symétrique par rapport à (Oy) ; si f est impaire, le graphe de f est symétrique par rapport à O. Dans les deux cas, on peut réduire l'ensemble d'étude à $A' = A \cap [0, +\infty[$. Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par une symétrie.
4. On détermine les valeurs de f, ou leurs limites, aux extrémités des intervalles contenus dans l'ensemble d'étude.
5. Si possible (et rapide), on détermine les points d'intersections avec l'axe des abscisses (résolution de $f(x) = 0$).
6. On étudie la dérivabilité de f, et on calcule la dériée f'. On détermine les valeurs de x qui annulent f', et on cherche le signe de la dérivée. On en déduit les maximums et les minimums de f, ainsi que le sens de variation.
7. On dresse un **tableau de variation** en trois lignes.
   - La première ligne comporte les valeurs remarquables de la variable x (bornes des intervalles où f est définie, valeurs annulant f', etc...).
   - La deuxième ligne comporte le signe de $f'(x)$ et les valeurs remarquables de la dérivée.
   - La troisième ligne comporte les valeurs remarquables de $y = f(x)$, ainsi que des flèches $\nearrow$ et $\searrow$ suivant que f est croissante ou décroissante. Un double trait vertical indique une discontinuité de y. On porte alors à gauche et à droite de ce double trait les limites à guache et à droite de f (éventuellement infinies).
   - On calcule souvent la dérivée seconde, pour déterminer la concavité et les points d'inflexion.
8. *Étude des branches infinies*. Soit a un nombre réel n'appartenant pas à A. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) au graphe de f.
   De même, si $f(x)$ tend vers une limite finie q lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = q$ est asymptote au graphe de f. On dit aussi que le graphe de f admet une asymptote horizontale.
   Considérons enfin le cas où x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, et où $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On forme alors le rapport $f(x)/x$. Si ce rapport tend vers une limite finie non nulle p, la courbe de f présente une branche infinie dans la direction de pente p. Si $g(x) = f(x) - px$ tend vers une limite finie q, on dit que le graphe de f admet pour asymptote oblique la droite affine d'équation
   $$y = px + q.$$
9. On construit le graphe de f à l'aide des résultats trouvés dans les études précédentes. On détermine en outre autant de points qu'il est nécessaire pour faire un tracé précis. On calculera en particulier les coordonnées des points d'intersection du graphe avec les axes de coordonnées.

Quelques permutations dans l'ordre sont possibles.

1. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

2. Courbe représentative d'une fonction

3. Symétries du graphe

4. Injections, surjections, bijections

5. Notions liées à l'ordre

6. Tangente et dérivées

7. Convexité

8. Branches infinies

9. Étude pratique des fonctions

9.1 Marche à suivre

9.2 Exemples d'étude

E Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

E Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

D

On dit qu'une fonction f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si

- elle est définie sur I;
- dérivable en tout point de I;
- et si la fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$ est continue en tout point de I.

D

Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si $F' = f$.

P

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F dans I, l'ensemble des primitives de f dans I est identique à l'ensemble des fonctions $F + k$, où k est une constante. En particulier, pour $x_0 \in I$, il existe alors une unique primitive de f s'annulant en x_0 qui est $F - F(x_0)$.

T

Théorème de Newton-Leibniz alias T.F.C.D.I.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une application* ***continue*** *sur un intervalle* I *et* $a \in I$. *On définit*

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et* $F' = f$.

P

Calcul des intégrales

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

1. *f admet des primitives sur I.*
2. *Si h est une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = [h(t)]_a^b.$$

3. *Il existe une et une seule primitive g de f sur I prenant la valeur y_0 au point $x_0 \in I$, elle est donnée par*

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

P

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$,

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'.$$

Il est faux de dire que si f est dérivable alors

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

T *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

C

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

E Calculer $\int_{-1}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Ici, on utilise les fonctions $u : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto x$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 0]$. On obtient

$$\int_{-1}^0 xe^x\,\mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x\,\mathrm{d}x = e^{-1} - \left[e^x\right]_{-1}^0 = 2e^{-1} - 1.$$

∎

Toute fonction de la forme $(g' \circ f) \times f'$ admet $g \circ f$ pour primitive. Mentionnons quelques cas très courants:
Si u est une fonction dérivable sur I,

- $u' e^u$ admet e^u pour primitive sur I.
- $u' \cos u$ admet $\sin u$ pour primitive sur I.
- $u' \sin u$ admet $-\cos u$ pour primitive sur I.
- $\dfrac{u'}{1+u^2}$ admet $\arctan u$ pour primitive sur I.
- Si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u}$ admet $\ln|u|$ pour primitive sur I.
- Si u est à images dans $\mathbb{R}_+^\star$ sur I et $\alpha \neq -1$, $u' u^\alpha$ admet $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour primitive sur I.
- etc...

E

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{5-3\cos x}$ admet $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(5-3\cos x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2+1}$ admet $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$.

M Le programme exige que vous sachiez primitiver les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.
Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique et l'on fait apparaitre la dérivée de l'arctangente.

E La fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

T

Formule de changement de variable

Soit u une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ dans un segment $I = [a, b]$ et f une fonction continue dans l'intervalle $J = u(I)$. On a alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f\left(u(x)\right) u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Il est impératif de noter qu'en général $u\left([a, b]\right)$ est différent de $[u(a), u(b)]$.

R La formule se comprend d'elle même : on remplace y par son expression en fonction x à la fois dans $f(y)$ et dans $\mathrm{d}y$.

E

Calculer $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.
On utilise le changement de variable $t = x^2 = u(x)$. La fonction $u : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, \sqrt{3}]$ et d'image $[1, 3]$.
On note $t = x^2$ et ainsi $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, puis

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|x|}{x^2+1} \times 2x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2(x^2+1-1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[x - \arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2.\end{aligned}$$

E Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^2 t \, \mathrm{d}t$.
On peut sentir le «bon» changement de variable $y = \sin t = u(t)$. L'application u étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on a $\mathrm{d}y = \cos t \, \mathrm{d}t$ et

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right) \sin^2 t \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^1 y^2(1 - y^2) \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

D

Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On définit la **valeur absolue de f** par

$$|f| : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}.$$