CHAPITRE

45

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé fini ou $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

45.1 COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

§1 Loi d'un couple

Définition 1

On appelle **couple de variables aléatoires réelles** toute application

$$\begin{array}{rccl} Z: & \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

où X et Y sont des variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
On note $Z = (X, Y)$ ce couple de variables.

Par définition, $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned} (X, Y)(\Omega) &= \{ (X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega \} \\ &\subset \left\{ \left(X(\omega_1), Y(\omega_2)\right) \,\middle|\, \left(\omega_1, \omega_2\right) \in \Omega^2 \right\} = X(\Omega) \times Y(\Omega). \end{aligned}$$

Méthode

Connaitre la loi du couple (X, Y) revient à connaitre

- $X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$,
- $Y(\Omega) = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_p \right\}$,
- $p_{i,j} = P\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\}\right)$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

La loi du couple (X, Y) est encore appelé **loi conjointe de X et de Y**.

On note plus simplement $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{i,j} = P\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\}\right)$.

Exemple 2

On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On appelle résultat le couple formé du numéro de la première boule et du numéro de la deuxième boule. Ainsi $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}^2$. Sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on choisit pour P l'équiprobabilité. On a

$$X_1(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$$

On a alors,

$$\forall (i, j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P\left((X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)\right) = \frac{1}{16}.$$

ce que l'on peut représenter ainsi:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

De même, on trouve pour la loi du couple (X_1, Y):

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3, 1); (3, 2); (3, 3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

Test 3

Vérifier les autres cas pour la loi du couple (X_1, Y).

Remarque

La famille

$$\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\} | i \in [\![1, n]\!] \text{ et } j \in [\![1, p]\!]\right)$$

forment un système complet d'événements (certains événements pouvant être vides). Ainsi,

$$\sum_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = 1.$$

§2 Lois marginales

On note comme précédemment,

- $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$,
- $Y(\Omega) = \{ y_1, y_2, \dots, y_p \}$,
- $p_{i,j} = P\left(\{ X = x_i \} \cap \{ Y = y_j \}\right)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Proposition 4

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$P\{ X = x_i \} = \sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} P\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \}.$$

On note parfois $p_{i,\bullet} = P\{ X = x_i \}$.

2. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$P\{ Y = y_j \} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} P\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \}.$$

On note parfois $p_{\bullet,j} = P\{ Y = y_j \}$.

Démonstration. **1.** La famille $\left(\{ Y = y_j \} \mid j \in [\![1,p]\!]\right)$ est un système complet d'événements.

2. La famille $\left(\{ X = x_i \} \mid i \in [\![1,n]\!]\right)$ est un système complet d'événements.

∎

Définition 5

- Les variables aléatoires X et Y sont appelés **variables marginales** du couple (X,Y).
- La loi de la variable aléatoire réelle X (resp. Y) seule est appelé **loi marginale** de X (resp. Y).

Exemple 6

On reprend l'exemple 2.

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4	Total
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$
Total	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

On (re)trouve ainsi les loi de X_1 et Y :

x_i	1	2	3	4
$p_{i,\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et

y_j	1	2	3	4
$p_{\bullet,j}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Ainsi, la connaissance de la loi du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales. La réciproque est bien sûr totalement fausse!

Remarque Plus généralement, on a pour $Z = \phi(X, Y)$ avec $\phi : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\{ Z = z \} = \bigsqcup_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ \phi(x,y)=z}} (\{ X = x \} \cap \{ Y = y \}).$$

et

$$P\{ Z = z \} = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ \phi(x,y)=z}} P(\{ X = x \} \cap \{ Y = y \}).$$

§3 Loi conditionnelles

Proposition 7 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.*
Si $y_\ell \in Y(\Omega)$, ***la loi de X conditionné par $\left\{ Y = y_\ell \right\}$*** *est caractérisée par les probabilités*

$$P\left(X = x_k | Y = y_\ell\right) = \frac{P\left(X = x_k \text{ et } Y = y_\ell\right)}{P\left(Y = y_\ell\right)} = \frac{p_{k,\ell}}{p_{\bullet,\ell}}.$$

Exemple 8 On reprend l'exemple 2. La loi de X sachant $\{ Y = 3 \}$ est donnée par

x_k	1	2	3	4
$P_{(Y=3)}\left(X = x_k\right)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

45.2 Indépendance

§1 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 9 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On dit que X et Y sont indépendantes si pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Théorème 10 *X et Y sont indépendantes si, et seulement si*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Exemple 11 On reprend l'exemple 2.

- X_1 et X_2 sont indépendantes.

- X_1 et Y ne sont pas indépendantes car

$$P\left(X_1 = 2 \text{ et } Y = 1\right) = 0 \neq P(X_1 = 2) \times P(Y = 1) = \frac{4}{16} \times \frac{1}{16}.$$

Théorème 12

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. On remarque que

$$\{ f(X) \in A \} = \{ \omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) \in A \} = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; X(\omega) \in f^{-1}(A) \right\} = \left\{ X \in f^{-1}(A) \right\}.$$

De même $\{ g(Y) \in B \} = \left\{ Y \in g^{-1}(B) \right\}$. Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P\left(f(X) \in A \text{ et } g(Y) \in B\right) &= P\left(X \in f^{-1}(A) \text{ et } Y \in g^{-1}(B)\right) \\ &= P\left(X \in f^{-1}(A)\right) \times P\left(Y \in g^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. ∎

Exemple 13

Si X et Y sont indépendantes,

- X^2 et Y^2 sont indépendantes,
- X^2 et $aY + b$ sont indépendantes.

Théorème 14

Si X et Y sont indépendantes,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration. On utilise le théorème de transfert (qui s'applique également aux couples):

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j P\left(X = x_i \text{ et } Y = y_j\right)$$

où l'on a noté $X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$ et $Y(\Omega) = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_p \right\}$. ∎

§2 Indépendance mutuelle

Dans la suite, $X_1, X_2, \dots, X_n$ désignent des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Définition 15

On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &P\left(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n\right) \\ &\qquad = P\left(X_1 = x_1\right) \times P\left(X_2 = x_2\right) \times \dots \times P\left(X_n = x_n\right). \end{aligned}$$

Proposition 16

*$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, et seulement si pour toute famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ dévénements,*

$$\left\{ X_1 \in A_1 \right\}, \quad \left\{ X_2 \in A_2 \right\}, \quad \dots \quad \left\{ X_n \in A_n \right\}$$

sont des événements mutuellement indépendants.

Rappelons que cela signifie que pour toute sous-famille $i_1, i_2, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}.$$

Théorème 17

Lemme des coalitions

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Soit

$$f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : X_{k+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires

$$f(X_1, \dots, X_k) \quad \text{et} \quad g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

sont indépendantes.

Démonstration. Démonstration hors programme. ∎

Ce résultat s'étend au cas de plus de deux coalitions.

Théorème 18

Soit p un réel, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Alors la variable aléatoire

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Esquisse de démonstration. On effectue une récurrence sur n. On remarque que pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = k\right) &= P\left(X_n = 0\right) P\left(S_{n-1} = k\right) + P\left(X_n = 1\right) P\left(S_{n-1} = k-1\right) \\
&= (1-p)\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} + p\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

∎

45.3 Covariance

Lorsque X et Y sont des variables indépendantes, nous avons vu que $E(XY) = E(X)E(Y)$; dans le cas général, cette relation n'est plus vraie. La **covariance** du couple (X, Y) est la mesure du défaut d'égalité.

Définition 19 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, on appelle **covariance** de X et Y le réel noté $\mathrm{Cov}(X, Y)$ défini par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Théorème 20 **Formule de König-Huygens**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Théorème 21 *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

⚠ La réciproque est fausse.
Quand on est malade, il ne faut surtout pas aller à l'hôpital : la probabilité de mourir dans un lit d'hôpital est 10 fois plus grande que dans son lit à la maison.

Définition 22 Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.

Proposition 23 *Soient X, Y, Z, T des variables aléatoires réelles et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. $\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X + Y, Z + T) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(X, T) + \mathrm{Cov}(Y, Z) + \mathrm{Cov}(Y, T)$.
4. $V(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

Théorème 24 **Variance d'une somme**

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

De même, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors

$$V(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

Proposition 25 *Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$