

Chapter 30 Convexité

30.1 Parties convexes

30.2 Fonctions convexes

Exercice 30.1 (*)

Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur \mathbb{R} .

Exercice 30.2 (*)

Montrer que la somme de deux fonctions convexes est une fonction convexe.

Exercice 30.3 (*)

Montrer que si la fonction g est convexe et la fonction f est convexe croissante, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 30.4 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On suppose que la fonction f est convexe. Montrer que pour tout réel y , l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ est un intervalle.

2. Que dire de la réciproque?

Exercice 30.5 (***) Condition suffisante de convexité (XMP)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 30.6 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 30.7 (*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que a et $a + 2h$ sont élément de I . Montrer que

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) \geq 0.$$

Exercice 30.8 (**) (XMP)

Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+^* et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si $h : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

Exercice 30.9 (**) (XMP)

Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et c un point qui n'est pas une extrémité de I .

Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point c et que

$$f'_g(c) \leq f'_d(c).$$

En déduire que f est continue en tout point qui n'est pas une extrémité de I .

30.3 Convexité et dérivabilité

Exercice 30.10 (*)

Montrer que $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave.

En déduire

$$\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 30.11 (*)

Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Exercice 30.12 (*)

Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$.

Exercice 30.13 (**)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^6 + x^5 + x^2 - x + 1$. Montrer que f n'a pas de zéro sur \mathbb{R} .

Exercice 30.14 (***) (XMP)

Soit $a, b \geq 0$ tel que $a + b = 1$. Montrer que pour tous réels positifs x et y , on a

$$1 + x^a y^b \leq (1+x)^a (1+y)^b.$$

Exercice 30.15 (***) *Minimum d'une fonction convexe (ENS)*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint?
2. On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet en a un minimum global.
3. On suppose maintenant que f est deux fois dérivable et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'' \geq \alpha > 0$. Montrer que f possède un minimum unique.

A-t-on encore ce résultat avec l'hypothèse $f'' > 0$?

Exercice 30.16 (***) *Étude asymptotique d'une fonction convexe (XMP)*

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\ell \leq 0$, alors f est décroissante.
3. Montrer que si ℓ est fini, alors $f(x) - \ell x$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 30.17 (****)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit f dérivable et convexe sur I , à valeurs réelles. On suppose

$$\exists x_0 \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}\ell h^2 + o(h^2).$$

Montrer que f' est dérivable en x_0 (et $f''(x_0) = \ell$).

Exercice 30.18 (****)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle qu'existe en tout $x \in]a, b[$

$$\Delta f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Montrer

1. $\Delta f \geq 0 \implies f$ convexe.

2. $\Delta f = 0 \implies f$ affine.

Exercice 30.19 (*)

Montrer

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \geq \sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

30.4 Inégalités de convexités

Exercice 30.20 (*)

Soit x_1, \dots, x_n des réels positifs. On note A_n , G_n et H_n leurs moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques :

$$A_n = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n), G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \text{ et } H_n = \frac{n}{1/x_1 + \dots + 1/x_n}.$$

1. Montrer que $G_n \leq A_n$.

2. Montrer que $H_n \leq G_n$ en se ramenant au cas précédent.

Exercice 30.21 ()**

Vous êtes ingénieur chez Candia. Le boss à l'intuition que la forme des briques de lait n'est pas optimale du point de vue de la quantité de carton utilisée pour conditionner le lait. Il vous demande s'il existe un parallélépipède rectangle qui pour une contenance donnée, minimise la quantité de carton. Qu'en pensez-vous ?

(Une absence de réponse serait mal vue...)

Exercice 30.22 (*)

1. Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \ln(1 + e^t)$ est convexe.

2. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k)^{1/n}.$$

Exercice 30.23 ()** *Inégalité de Hölder*

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres positifs et p et q deux nombres supérieurs à 1, liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Démontrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q \right)^{1/q}.$$

Exercice 30.24 ()** *Inégalité de Minkowski*

Soit $p \in]1, +\infty[$ et $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1 + x^{1/p})^p$.

1. Montrer que la fonction f est concave.

2. En déduire que pour x_1, \dots, x_n strictement positifs et t_1, \dots, t_n positifs de somme 1,

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right)^{1/p} \right)^p \geq \sum_{i=1}^n \left(t_i^{1/p} + (t_i x_i)^{1/p} \right)^p.$$

3. Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels strictement positifs, démontrer l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^p \right)^{1/p}.$$

4. *Application.* Soient n un entier ≥ 1 et p et q deux nombres supérieurs à 1, liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Prouver que l'application qui à tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le nombre réel positif

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p \right)^{1/p}$$

est une *norme* sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p \geq 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, (\|x\|_p = 0 \implies x = 0)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$,
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

(b) Prouver que pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = \sup_{\substack{y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_q \leq 1}} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(c) Établir enfin que pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Exercice 30.25 (***) (ENS)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *bistochastique*, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de A soit égale à 1.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur de \mathbb{R}^n à coordonnées positives. On pose $Y = AX$. Montrer

$$\prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i.$$