Chapter 47 Diagonalisation

47.1 Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Solution 47.2

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P \in \ker u \iff P(-4)X + P(6) = 0 \iff P(-4) = 0 \text{ et } P(6) = 0 \iff (X+4)(X-6) \Big| P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], P = (X$$

Observons que $\ker u$ a pour dimension $n-2$. Clairement $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_1[X]$, le théorème du rang assure $\dim \operatorname{Im} u = 2$, d'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$. On peut également utiliser $u(X-6) = -10X$, $u(X+4) = 10$ qui montre $\mathbb{R}_1[X] \subset \operatorname{Im} u$.

Si P est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $P \in \operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$. Supposons pour le moment $n = 2$, alors la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X^2 + 3X - 10$ et ses valeurs propres sont -5 et 2. On trouve pour espace propre deux droites vectorielles engendrées respectivement par $X - 1$ et $X + 6$.

Revenons au cas général. Remarquons qu'un vecteur propre de $u|_{\mathbb{R}_1[X]}$ est également vecteur propre de u. Finalement, les espaces propres de u sont

$$E_0 = \ker u = (X+4)(X-6)\mathbb{R}_{n-2}[X], \quad E_{-5} = \operatorname{Vect}\{X - 1\}, \quad E_2 = \operatorname{Vect}\{X + 6\}.$$

47.2 Polynôme caractéristique

47.3 Diagonalisation en dimension finie

Solution 47.3
Solution 47.4
Solution 47.5
Solution 47.6
Solution 47.7
Solution 47.8
Solution 47.9

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -5 & 12 & 12 \\ -3 & 9-\sqrt{57} & 9+\sqrt{57} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3-\sqrt{57}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3+\sqrt{57}}{2} \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

4. $P = \begin{pmatrix} -7 & 5+3\sqrt{5} & 5-3\sqrt{5} \\ 11 & -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 2 & 5+5\sqrt{5} & 5-5\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

5. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solution 47.10

1. $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 21 & 99 \\ 0 & 1 & -11 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. 1 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

7. 0 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

8. 0 est vp double, $\mathrm{rg} A = 2$. Autres vp : $\frac{-3\pm 3\sqrt{13}}{2}$, diagonalisable.

Solution 47.11

47.4 Calcul des puissances de matrices

Solution 47.12

$$\chi_A(X) = -(1-X)^2(2+X).\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solution 47.13

1. On peut commencer par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$. Valeurs propres : $0, 1, 2$. Base de vecteurs propres

$$e_1 = (1, -2, 4)^T, e_2 = (1, -2, 5)^T, e_3 = (1, -4/3, 4)^T.$$

2. Si $B^2 = A$, alors $AB = B^2B = B^3 = BB^2 = BA$. Les sous-espaces propres de A, qui sont des droites, sont donc stables par B. Par conséquent, B est nécessairement diagonalisable dans la même base que A, on a donc

$$B = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3c-4b+2a & \frac{3c}{2}-\frac{3a}{2} & b-a \\ -4c+8b-4a & 3a-2c & 2a-2b \\ 12c-20b+8a & 6c-6a & 5b-4a \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

47.5 Suites récurrentes

Solution 47.14
Solution 47.15

47.6 Équations différentielles

Solution 47.16
Solution 47.17

47.7 Lemme de décomposition des noyaux