Couples de variables aléatoires finies

Aperçu

1. Couples de variables aléatoires
2. Indépendance
3. Covariance

1. Couples de variables aléatoires
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelles

2. Indépendance

3. Covariance

1. Couples de variables aléatoires
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelles

2. Indépendance

3. Covariance

D 1 On appelle **couple de variables aléatoires réelles** toute application

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

où X et Y sont des variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
On note $Z = (X, Y)$ ce couple de variables.

Par définition, $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned}(X, Y)(\Omega) &= \{ (X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega \} \\ &\subset \left\{ \big(X(\omega_1), Y(\omega_2)\big) \;\middle|\; \big(\omega_1, \omega_2\big) \in \Omega^2 \right\} = X(\Omega) \times Y(\Omega).\end{aligned}$$

M Connaitre la loi du couple (X, Y) revient à connaitre

- $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$,
- $Y(\Omega) = \{ y_1, y_2, \dots, y_p \}$,
- $p_{i,j} = P\left(\{ X = x_i \} \cap \{ Y = y_j \}\right)$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

La loi du couple (X, Y) est encore appelé **loi conjointe de X et de Y**.

On note plus simplement $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{i,j} = P\left(\{ X = x_i \} \cap \{ Y = y_j \}\right)$.

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On appelle résultat le couple formé du numéro de la première boule et du numéro de la deuxième boule. Ainsi $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}^2$. Sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on choisit pour P l'équiprobabilité. On a

$$X_1(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$$

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On a alors,

$$\forall (i,j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P\left((X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)\right) = \frac{1}{16}.$$

ce que l'on peut représenter ainsi:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple (X_1, Y):

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

T 3 Vérifier les autres cas pour la loi du couple (X_1, Y).

R La famille

$$\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\} | i \in [\![1, n]\!] \text{ et } j \in [\![1, p]\!]\right)$$

forment un système complet d'événements (certains événements pouvant être vides). Ainsi,

$$\sum_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = 1.$$

1. Couples de variables aléatoires
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelles

2. Indépendance

3. Covariance

On note comme précédemment,

- $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$,
- $Y(\Omega) = \{ y_1, y_2, \dots, y_p \}$,
- $p_{i,j} = P\left(\{ X = x_i \} \cap \{ Y = y_j \}\right)$ pour $(i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

P 4

1. *Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left\{ X = x_i \right\} = \sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} P\left\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \right\}.$$

On note parfois $p_{i,\bullet} = P\left\{ X = x_i \right\}$.

2. *Pour tout* $j \in [\![1, p]\!]$,

$$P\left\{ Y = y_j \right\} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} P\left\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \right\}.$$

On note parfois $p_{\bullet,j} = P\left\{ Y = y_j \right\}$.

Démonstration.

1. La famille $\left(\left\{ Y = y_j \right\} | j \in [\![1, p]\!]\right)$ est un système complet d'événements.
2. La famille $\left(\left\{ X = x_i \right\} | i \in [\![1, n]\!]\right)$ est un système complet d'événements.

∎

D 5

- Les variables aléatoires X et Y sont appelés **variables marginales** du couple (X, Y).
- La loi de la variable aléatoire réelle X (resp. Y) seule est appelé **loi marginale** de X (resp. Y).

E 6 On reprend l'exemple 2.

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4	Total
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$
Total	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

On (re)trouve ainsi les loi de X_1 et Y :

x_i	1	2	3	4
$p_{i,\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et

y_j	1	2	3	4
$p_{\bullet,j}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Ainsi, la connaissance de la loi du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales. La réciproque est bien sûr totalement fausse!

1. Couples de variables aléatoires
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelles

2. Indépendance

3. Covariance

P 7 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.*
*Si $y_\ell \in Y(\Omega)$, **la loi de X conditionné par $\{ Y = y_\ell \}$** est caractérisée par les probabilités*

$$P\left(X = x_k | Y = y_\ell\right) = \frac{P\left(X = x_k \text{ et } Y = y_\ell\right)}{P\left(Y = y_\ell\right)} = \frac{p_{k,\ell}}{p_{\bullet,\ell}}.$$

E 8 On reprend l'exemple 2. La loi de X sachant $\{ Y = 3 \}$ est donnée par

x_k	1	2	3	4
$P_{(Y=3)}\left(X = x_k\right)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple (X_1, Y):

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

T 3 Vérifier les autres cas pour la loi du couple (X_1, Y).

1. Couples de variables aléatoires

2. Indépendance
2.1 Indépendance de deux variables aléatoires
2.2 Indépendance mutuelle

3. Covariance

1. Couples de variables aléatoires

2. Indépendance
2.1 Indépendance de deux variables aléatoires
2.2 Indépendance mutuelle

3. Covariance

D 9 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On dit que X et Y sont indépendantes si pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a
$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$
On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

T 10 *X et Y sont indépendantes si, et seulement si*
$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

E 11 On reprend l'exemple 2.
- X_1 et X_2 sont indépendantes.
- X_1 et Y ne sont pas indépendantes car

$$P\left(X_1 = 2 \text{ et } Y = 1\right) = 0 \neq P(X_1 = 2) \times P(Y = 1) = \frac{4}{16} \times \frac{1}{16}.$$

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On appelle résultat le couple formé du numéro de la première boule et du numéro de la deuxième boule. Ainsi $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}^2$. Sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on choisit pour P l'équiprobabilité. On a

$$X_1(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$$

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On a alors,

$$\forall (i,j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P\left((X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)\right) = \frac{1}{16}.$$

ce que l'on peut représenter ainsi:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

E 2 On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- X_1 le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- X_2 le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- Y le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple (X_1, Y):

$X_1 \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

T 3 Vérifier les autres cas pour la loi du couple (X_1, Y).

T 12 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.*
Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. On remarque que

$$\{ f(X) \in A \} = \{ \omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) \in A \} = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; X(\omega) \in f^{-1}(A) \right\} = \left\{ X \in f^{-1}(A) \right\}.$$

De même $\{ g(Y) \in B \} = \left\{ Y \in g^{-1}(B) \right\}$. Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P\left(f(X) \in A \text{ et } g(Y) \in B\right) &= P\left(X \in f^{-1}(A) \text{ et } Y \in g^{-1}(B)\right) \\ &= P\left(X \in f^{-1}(A)\right) \times P\left(Y \in g^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. ∎

E 13 Si X et Y sont indépendantes,

- X^2 et Y^2 sont indépendantes,
- X^2 et $aY + b$ sont indépendantes.

T 14 *Si X et Y sont indépendantes,*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration. On utilise le théorème de transfert (qui s'applique également aux couples):

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j P\left(X = x_i \text{ et } Y = y_j\right)$$

où l'on a noté $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ et $Y(\Omega) = \{ y_1, y_2, \dots, y_p \}$. ∎

1. Couples de variables aléatoires

2. Indépendance
2.1 Indépendance de deux variables aléatoires
2.2 Indépendance mutuelle

3. Covariance

D 15 On dit que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &P\left(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n\right) \\ &\qquad = P\left(X_1 = x_1\right) \times P\left(X_2 = x_2\right) \times \cdots \times P\left(X_n = x_n\right). \end{aligned}$$

P 16 *$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont* ***mutuellement indépendantes*** *si, et seulement si pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dévénements,*

$$\left\{ X_1 \in A_1 \right\}, \quad \left\{ X_2 \in A_2 \right\}, \quad \ldots \quad \left\{ X_n \in A_n \right\}$$

sont des événements mutuellement indépendants.

Rappelons que cela signifie que pour toute sous-famille $i_1, i_2, \ldots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}.$$

T 17 **Lemme des coalitions**

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ *des variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. *Soit*

$$f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_k(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad \textit{et} \qquad g : X_{k+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires*

$$f(X_1, \dots, X_k) \qquad \textit{et} \qquad g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

sont indépendantes.

Démonstration. Démonstration hors programme. ∎

Ce résultat s'étend au cas de plus de deux coalitions.

T 18 *Soit p un réel, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.*
Alors la variable aléatoire

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Esquisse de démonstration. On effectue une récurrence sur n. On remarque que pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P\left(S_n = k\right) &= P\left(X_n = 0\right) P\left(S_{n-1} = k\right) + P\left(X_n = 1\right) P\left(S_{n-1} = k-1\right) \\ &= (1-p)\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} + p\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\ &= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

∎

1. Couples de variables aléatoires

2. Indépendance

3. Covariance

D 19 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$, on appelle **covariance** de X et Y le réel noté $\mathrm{Cov}(X,Y)$ défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y)\right).$$

T 20 **Formule de König-Huygens**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

T 21 *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

La réciproque est fausse.
Quand on est malade, il ne faut surtout pas aller à l'hôpital : la probabilité de mourir dans un lit d'hôpital est 10 fois plus grande que dans son lit à la maison.

D 22 Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites **décorrélées**.

P 23 *Soient X, Y, Z, T des variables aléatoires réelles et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. $\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \, \mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X + Y, Z + T) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(X, T) + \mathrm{Cov}(Y, Z) + \mathrm{Cov}(Y, T)$.
4. $V(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

T 24 **Variance d'une somme**

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

De même, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors

$$V(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

P 25 *Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$