

Chapter 9 Relations binaires sur un ensemble

Exercice 9.1

Déterminer les propriétés des relations binaires suivantes (réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité), et détecter les relations d'équivalence, d'ordre total ou partiel.

1. \parallel sur \mathcal{D} , l'ensemble des droites du plan.
2. \perp sur \mathcal{D} , l'ensemble des droites du plan.
3. \leq sur \mathbb{R} .
4. \geq sur \mathbb{R} .
5. $\#$ (avoir le même cardinal) sur $E = \mathcal{P}(F)$.
6. \subset sur $E = \mathcal{P}(F)$.
7. «être multiple de» sur \mathbb{N} .
8. «être multiple de» sur \mathbb{Z} .
9. $<$ sur \mathbb{R} .
10. \neq sur \mathbb{R} .
11. $=$ sur \mathbb{R} .

Exercice 9.2

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^*$, on dira que

$$a \mathcal{R} b \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, a = b^n).$$

La relation \mathcal{R} est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 9.3

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit une relation \triangleleft sur E^2 par

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (x', y') \in E^2, (x, y) \triangleleft (x', y') \iff ((x \leq x' \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$$

On peut également écrire : $(x, y) \triangleleft (x', y') \iff (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$.

1. Montrer que \triangleleft est une relation d'ordre sur E^2 .
2. La relation \triangleleft s'appelle ordre lexicographique, pourquoi ?
3. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 9.4

Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$, on définit la relation \leq par

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre.
2. Montrer que l'ordre est partiel.
3. Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ?

Exercice 9.5

Soit Q l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Écrivez les éléments de $\mathcal{P}(Q)$.
2. Quels sont les majorants de $\{2, 4\}$ pour la relation d'ordre \subset dans $\mathcal{P}(Q)$?
3. Quels sont les majorants de $\{1\}$?
4. Quels sont les majorants de l'ensemble $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$?
5. La partie $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-elle un maximum ?
6. Donnez un sous-ensemble à plusieurs éléments de $\mathcal{P}(Q)$ qui admette un maximum pour cette relation. Est-ce que $\mathcal{P}(Q)$ a un maximum ?
7. Reprenez pour minimum les questions posées ci-dessus pour maximum.
8. Le sous-ensemble $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-il une borne supérieure pour la relation d'ordre \subset ? Une borne inférieure ?

Exercice 9.6 Problème des hussards

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de np réels. Comparer

$$A = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right) \quad \text{et} \quad B = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right).$$

1. Comparer A et B .
2. Donner un exemple de non égalité.

Exercice 9.7 (***)

(E, \leq) est un ensemble ordonné et f une application de E dans E telle que

- f est croissante ;
- $\forall x \in E, f(x) \geq x$;
- $\forall x \in E, f(f(x)) = f(x)$.

On dit que f est une **fermeture**. Soit $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.

1. Montrer que, pour tout x de E , l'ensemble $F_x = \{y \in F \mid y \geq x\}$ est non vide et admet un plus petit élément égal à $f(x)$.
2. Soit G sous-ensemble de E tel que pour tout x de E , $G_x = \{y \in G \mid y \geq x\}$ admette un plus petit élément noté $g(x)$. Montrer que g ainsi définie est une fermeture et que l'ensemble de ses éléments invariants est G .

Exercice 9.8

Étant donné un ensemble E , on désigne par \mathcal{R} l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe.

1. R_1 et R_2 étant deux éléments de \mathcal{R} , on considère la relation $R : \ll R_1 \text{ et } R_2 \gg$ appelée intersection de R_1 et R_2 . Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe modulo R est l'intersection d'une classe modulo R_1 et d'une classe modulo R_2 .

Étudier les exemples suivants :

- (a) $E = \mathbb{Z}$, R_1 et R_2 étant les congruences de module respectifs p_1 et p_2 (p_1 et p_2 entiers strictement positifs distincts).
- (b) E est le plan de la géométrie élémentaire. MR_1M' et MR_2M' sont respectivement les relations « MM' est parallèle à d_1 », « MM' est parallèle à d_2 » (d_1, d_2 étant deux directions distinctes du plan).
2. Avec les mêmes notations que ci-dessus, la relation « R_1 ou R_2 » est-elle une relation d'équivalence ? Quel est son graphe ?
3. (R_i) étant une famille de relations d'équivalences définies sur E et indexées par un ensemble I , on désigne par R la relation suivant, appelée *intersection* des (R_i) :

$$R(x, y) \iff \forall i \in I, R_i(x, y).$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe C modulo R est contenue pour tout i dans une et une seule classe C_i modulo R_i et que C est l'intersection de la famille (C_i) .

Exercice 9.9

Étant donné un ensemble E , on désigne par \mathcal{R} l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe. On dit que R est «*plus fine*» que R' si, et seulement si

$$\forall x, y \in E, xRy \implies xR'y.$$

1. Montrer que cette relation entre R et R' définit un ordre sur \mathcal{R} ; comparer les graphes de R et R' ; cet ordre est-il total ou partiel ?
2. Montrer que R est plus fine que R' si, et seulement si toute classe d'équivalence modulo R' est une réunion de classes d'équivalence modulo R .
3. Y a-t-il un plus petit et un plus grand élément dans \mathcal{R} ordonnée par la relation d'ordre défini ci-dessus ?
4. Lorsque $E = \mathbb{Z}$, déterminer toutes les congruences modulo un entier strictement positif qui sont plus fines que $x \equiv y \pmod{n}$ ou qui sont moins fines que cette relation.