Chapter 51 Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$

51.1 Calcul différentiel

Exercice 51.1

Calculer les dérivées partielles des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par

1. $f(x, y) = x^3(y^2 - 1)^4$;
2. $g(x, y) = \cos(x^2 y)\sin(x^2)$.

Exercice 51.2

La fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^2$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 \ln\left(x^2 + y^2\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Exercice 51.3

Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

1. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$
2. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Exercice 51.4

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy^2 \end{array}.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f en $a = (-1, 3)$.
2. Déterminer la dérivée de f en a suivant le vecteur $h = (2, 3)$.
3. Écrire la différentielle de f en a.

Exercice 51.5

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous.

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$;
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2 y - 1)$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

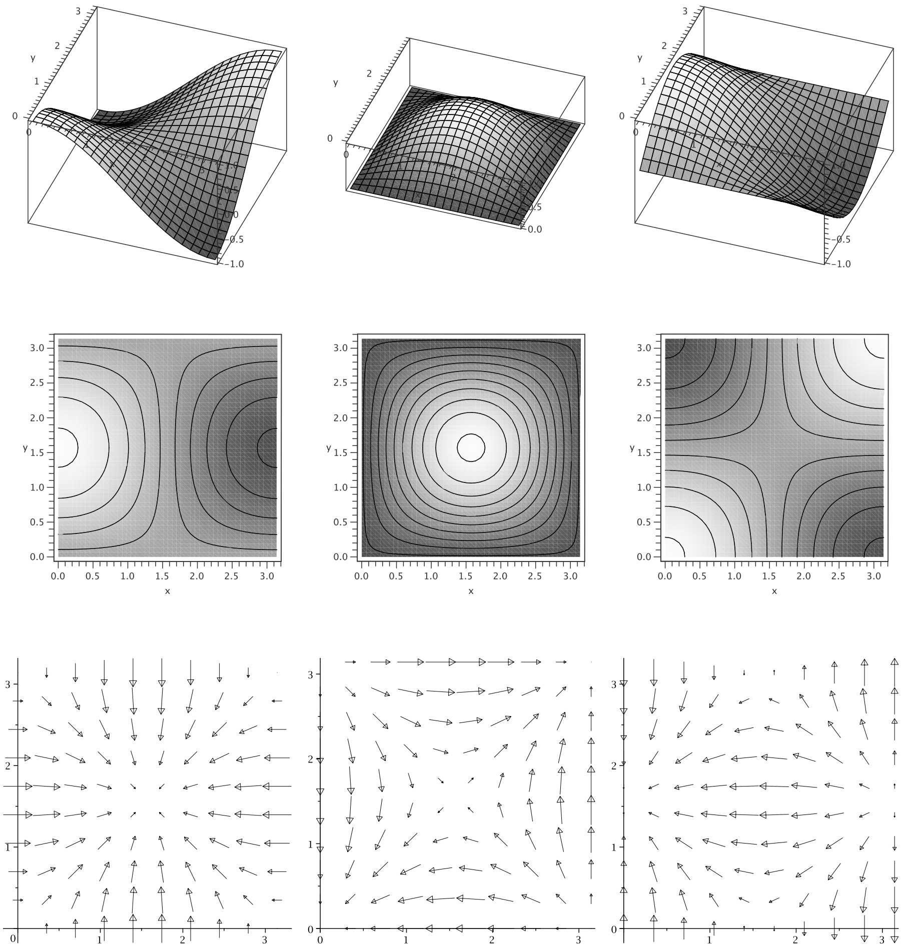
Exercice 51.6

Restituer à chaque fonction son graphe, ses courbes de niveau et son champ de vecteurs gradients.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [0, \pi] \times [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sin x \sin y \end{array},$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} [0, \pi] \times [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \cos x \sin y \end{array},$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} [0, \pi] \times [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \cos x \cos y \end{array}.$$



51.2 Composition

Exercice 51.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xy + \sin(x)\,\mathrm{e}^y - \cos(x + y)$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(\mathrm{e}^t, t^3)$. Sans calculer explicitement g, déterminer g'.

Exercice 51.8

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto F(u, v)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & F(x + y, 2x + y) \end{array}.$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$.

Exercice 51.9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u, v)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x^2 - y^2, 2xy) \end{array}.$$

Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$.

51.3 Changements de variables

Exercice 51.10

Soit le changement de variable

$$\varphi : \begin{cases} u = \dfrac{x}{1+y^2} \\ v = \dfrac{xy}{1+y^2}. \end{cases}$$

1. Déterminer $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que φ définit une bijection de $\Omega =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ dans lui-même et déterminer la bijection réciproque.

3. Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}^1(\Omega)$ vérifiant $g(x, y) = f(u, v)$. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et réciproquement.

Exercice 51.11

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$F(\varrho, \theta) = f(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta).$$

1. Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

2. En transformant

$$\frac{\partial F}{\partial\varrho}(\varrho, \theta)\vec{u}(\theta) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\theta}(\varrho, \theta)\vec{v}(\theta),$$

retrouver l'expression du gradient en coordonnées polaires.

Exercice 51.12

Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\times]0, +\infty[\\ (u, v) & \mapsto & (x, y) = (ue^{v}, e^{-v}) \end{array}.$$

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

2. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, exprimer $\varphi^{-1}(x, y)$ et justifier que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

3. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy. \tag{E}$$

On pose $g = f \circ \varphi$, on peut donc écrire $g(u, v) = f(x, y)$.

(a) Justifier que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer

$$\frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v}$$

les dérivées partielles premières de g.

(b) En déduire que g vérifie une équation aux dérivées partielles simple $(\boldsymbol{E'})$.

(c) Résoudre $(\boldsymbol{E'})$.

(d) En déduire les solutions de (E)

Exercice 51.13

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2. \tag{E}$$

On pourra poser $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ et chercher une équation différentielle simple vérifiée par g.

Exercice 51.14

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + xy$$

en utilisant le changement de variable défini par $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$

Exercice 51.15

En passant en cordonnées polaires, déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\}$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \tag{1}$$

51.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exercice 51.16

Soit l'application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \mapsto (s,p)$ avec $s = x + y$ et $p = xy$.

1. Soit Ω l'ensemble de $\mathbb{R}^2$: $y < x$. Montrer que Ω est un ouvert et que F induit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^2$, à expliciter.

2. On considère F comme un changement de variable. Exprimer les dérivées partielles d'ordre un et deux par rapport à x et y à l'aide des dérivées par rapport à s et p. Exprimer le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Exercice 51.17

On note $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$. Trouver toutes les applications f $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur telle que l'application $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in U, F(x,y) = f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$$

soit de laplacien nul.

Exercice 51.18

Soit U le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine $(0,0)$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie dans l'ouvert U. Le Laplacien Δf de la fonction f est défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

En utilisant les expressions de $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ calculées dans l'exercice **??**, trouver l'expression du Laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 51.19

Soient f une fonction d'une variable de classe $\mathscr{C}^2$ et $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \right\}$. Vérifier que la fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2. \tag{1}$$

Exercice 51.20

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$. On le note encore f.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra mettre en défaut le résultat du théorème de Schwarz.

Exercice 51.21 *Équation des cordes vibrantes*

Soit $c > 0$. On se propose de déterminer dans cet exercice toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0. \tag{E}$$

1. Montrer que le changement de variables $u = x + cy, v = x - cy$ permet de se ramener à une équation plus simple de la forme
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 51.22

Déterminer les fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

On pourra utiliser $x = u + v$ et $y = u - v$.

Exercice 51.23

À l'aide d'un passage en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles qu'en tout point $(x, y) \in U$, on ait :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

51.5 Extrémums locaux

Exercice 51.24

Étudier les extrémums locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3.$$

Exercice 51.25

Déterminer les extrémums locaux de la fonction

$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1.$$

Exercice 51.26

Déterminer les extremums de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y)(3x^2-y) \end{array}.$$

Exercice 51.27

Diagonaliser en base orthonormée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 51.28

Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$.
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 51.29 (*)

Déterminer les extrémums locaux et globaux de $f : \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y\left(x^2 + (\ln(y))^2\right).$$

Exercice 51.30

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné.

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Exercice 51.31

Rechercher si la fonction

$$f : (x,y) \mapsto (y-x)^2\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

admet un extrémum.

Exercice 51.32

Rechercher si la fonction

$$g : (x,y) \mapsto \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right)$$

admet un extrémum.

Exercice 51.33

Rechercher si la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$$

admet un extrémum.

Exercice 51.34

Montrer que la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + (ax + by + c)^2$$

admet un minimum et trouver la valeur de ce minimum.

Compléments

51.6 Potentiel scalaire

Exercice 51.35

Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire et déterminer leurs potentiels.

1. $F : (x, y) \mapsto (2xy^3 + y^2, 3x^2y^2 + 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. $F : (x, y) \mapsto \left(-\dfrac{y}{(x-y)^2}, \dfrac{x}{(x-y)^2}\right)$ sur $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > y \right\}$.

51.7 Brève extension aux fonctions de trois variables

Exercice 51.36

1. Démontrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$$

est $\mathscr{C}^1$ en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice jacobienne au point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

2. Mêmes questions pour l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v).$$

3. Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes.