Chapter 47 Diagonalisation

47.1 Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Exercice 47.1

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$.

Exercice 47.2

Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(-4)X + P(6)$.

Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les espaces propres de u.

47.2 Polynôme caractéristique

47.3 Diagonalisation en dimension finie

Exercice 47.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser u et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 47.4

Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

et déterminer un vecteur propre pour chaque valeur propre. Déterminer ensuite une matrice P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}BP = D$.

Exercice 47.5

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47.6

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Décrire précisément ses sous-espaces propres.

Exercice 47.7

Soit A une matrice carrée diagonalisable dont les valeurs propres appartiennent à $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 47.8

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles conditions les éléments $a, a', \dots, c$ doivent-ils vérifier pour que f soit diagonalisable ?

Exercice 47.9

Diagonaliser les matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 47.10

Diagonaliser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 47.11

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit Tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la somme de ses éléments diagonaux.

1. Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M) I_n.$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe

$$g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J,$$

où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

(a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

(b) g est-il diagonalisable ?

47.4 Calcul des puissances de matrices

Exercice 47.12

On considère la matrice suivante de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est diagonalisable. Expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 47.13

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.

2. Si $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, montrer que B et A commutent. Déterminer l'ensemble $\left\{ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mid B^2 = A \right\}$.

47.5 Suites récurrentes

Exercice 47.14

On considère les suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par

$$x_0 = -1 \qquad y_0 = 2 \qquad z_0 = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 7x_n - 3z_n \\ y_{n+1} &= x_n + 6y_n + 5z_n \\ z_{n+1} &= 5x_n - z_n. \end{aligned}$$

Donner l'expression du terme général de ces trois suites en fonction de n.

Exercice 47.15

On considère les suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par

$$x_0 = 4 \qquad y_0 = 5 \qquad z_0 = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n + 3y_n - 7z_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n + 2y_n - 3z_n. \end{aligned}$$

Donner l'expression du terme général de ces trois suites en fonction de n.

47.6 Équations différentielles

Exercice 47.16

Résoudre le système différentiel

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 4y_1(t) + 5y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - 2y_2(t). \end{aligned}$$

Déterminer les solutions vérifiant $y_1(0) = 2$ et $y_2(0) = 6$.

Exercice 47.17

Résoudre le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= -y_1 + y_2 + 2y_3 \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= -6y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} &= y_2 + y_3. \end{aligned}$$

47.7 Lemme de décomposition des noyaux