CHAPITRE 37

APPLICATIONS LINÉAIRES

37.1 APPLICATIONS LINÉAIRES

§1 Définition

Définition 1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que pour tous $u, v \in E$, et tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

Si l'on veut préciser le corps de base, on pourra dire que f est $\mathbb{K}$-linéaire.

Proposition 2 *Soit f une application de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Alors f est linéaire si, et seulement si*

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Test 3 Montrer le!

Test 4 Plus généralement, montrer que les applications linéaires préservent les combinaisons linéaires, autrement dit, pour tous $v_1, v_2, \dots, v_p \in E$, et tous $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$,

$$f\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p\right) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_p f(v_p).$$

c'est-à-dire
$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f\left(v_i\right).$$

Proposition 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors
$$f\left(0_E\right)=0_F.$$

Test 6

Montrer le! En remarquant par exemple que $0_E+0_E=0_E$.

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $f : E \to E$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme** de l'espace vectoriel E.

  L'ensemble $\mathcal{L}(E,E)$ se note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

- Si $f : E \to \mathbb{K}$ est une application linéaire, on dit que f est une **forme linéaire** sur E.

  L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ se note également E^*.

§2 Exemples

Exemple 8

Soit $p\in\mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto px$. Alors f_1 est linéaire car pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
$$f_1(\alpha x+\beta y)=p(\alpha x+\beta y)=\alpha(px)+\beta(py)=\alpha f_1(x)+\beta f_1(y).$$

Test 9

Soit $f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto px+q$ (avec $p,q\in\mathbb{R}$ et $q\neq 0$) et $f_3 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.
Montrer que ni f_2, ni f_3, ne sont des applications linéaires puisqu'elles ne vérifient pas l'assertion
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Test 10

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (2x+y,x)\end{array}$. Montrer que f est linéaire, c'est-à-dire
$$\forall(u,v)\in E^2, \forall\alpha\in\mathbb{R}, f(u+v)=f(u)+f(v) \text{ et } f(\alpha u)=\alpha f(u).$$

Exemple 11

On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables une infinité de fois.
L'application
$$T : \begin{array}{ccc}\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f & \mapsto & f''-f\end{array}$$
est une application linéaire.

Test 12

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i \end{array}.$$

Montrer que S est une application linéaire.

Exemple 13

Soit $V = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit l'application $T : V \to F$ par

$$T(u) = T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = p_{u_1,u_2,\dots,u_n} = p_u$$

où p_u est la fonction polynômiale définie par

$$p_u(x) = u_1 x + u_2 x^2 + x_3 x^3 + \dots + u_n x^n.$$

Alors T est une application linéaire.
En effet, soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$T(u+v) = p_{u+v} \quad T(u) = p_u \quad T(v) = p_v.$$

Montrons que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ c'est-à-dire $p_{u+v} = p_u + p_v$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p_{u+v}(x) &= p_{u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n}(x) \\ &= (u_1+v_1)x + \dots + (u_n+v_n)x^n \\ &= (u_1 x + \dots u_n x^n) + (v_1 x + \dots v_n x^n) \\ &= p_u(x) + p_v(x) \\ &= \left(p_u + p_v\right)(x). \end{aligned}$$

Ainsi les fonction p_{u+v} et $p_u + p_v$ sont égales. La preuve que $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ est analogue.

Test 14

Montrer que $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

L'application T est donc linéaire.

§3 Quelques applications particulières

Exemple 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

est un endomorphisme de E appelé **homothétie de rapport λ**.

Exemple 16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application identique de E, $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est linéaire.

Exemple 17 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'**application nulle**

$$\widetilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

est une application linéaire.

Proposition 18 *Soit A une matrice de type (m,n). Alors l'application*

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est une application linéaire.

L'application T est la **multiplication à gauche par A**.

Démonstration. C'est une conséquence de la «bilinéarité» du produit matriciel. Pour $(u,v) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v)$$
$$\text{et } T(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha A u = \alpha T(u).$$

∎

Test 19 L'application $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y)^T & \mapsto & (2x+y,x)^T \end{array}$ vu précédemment est la multiplication à gauche par une matrice A. Déterminer A.

§4 Composition et combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 20 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, T une application linéaire de E dans F, S une application linéaire de F dans G. Alors l'application composée $S \circ T$ est linéaire.*

Test 21 Montrer le!

Test 22 Lorsque

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Bx \end{array} \text{ et } S : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^m & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & Ax \end{array},$$

de quels types sont les matrices A et B? Pour quelle matrice C a-t-on

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, (S \circ T)(x) = Cx \quad ?$$

Proposition 23 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

En particulier si $S, T : E \to F$ sont des applications linéaires, alors $S+T$ et αS, $\alpha \in \mathbb{K}$, sont linéaires.

Proposition 24 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\begin{aligned} S\circ(T_1 + T_2) &= S\circ T_1 + S\circ T_2 \\ (S_1 + S_2)\circ T &= S_1\circ T + S_2\circ T \\ (\alpha S)\circ T &= S\circ(\alpha T) = \alpha(S\circ T) \end{aligned}$$

§5 Isomorphismes

Proposition 25 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $T : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors $T^{-1} : F \to E$ est linéaire.*

Définition 26 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, on dit que f est un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de E dans F.
- On dit que les espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Proposition 27 *Soit $T : E \to F$ et $S : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $S\circ T : E \to G$ est un isomorphisme et*

$$(S\circ T)^{-1} = T^{-1}\circ S^{-1}.$$

Exemple 28 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Notons S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \to & \mathbb{R}^2 \\ & y & \mapsto & \big(y(0), y'(0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

§6 L'algèbre des endomorphismes

Théorème 29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.

1. *Muni de l'addition et de la multiplication externe, l'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Muni de l'addition et de la composition, l'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

Remarque

Le programme suggère la notation vu pour la composée $v \circ u$ et u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 30

Si $f : E \to E$ est un endomorphisme bijectif de E, on dit que f est un **automorphisme** de E.
L'ensemble des automorphismes de E est le **groupe linéaire** de E et se note $\mathbf{GL}(E)$: c'est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 31

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

L'application T est-elle bijective? Si oui, déterminer sa réciproque.

Test 32

Soit $u = (1, 2, 3)^T$. Vérifier que $T^{-1}(w) = u$ lorsque $w = T(u) = (6, -1, -4)^T$.
Vérifier plus généralement que $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

37.2 Anatomie d'une application linéaire

§1 Noyau et image

Définition 33

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau** de f, noté $\ker f$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est 0_F, c'est-à-dire

$$\ker f = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = 0_F \right\}.$$

- On appelle **image** de f, noté $\operatorname{Im} f$, l'ensemble $f(E)$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in E \} = \{ y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y \}.$$

Test 34

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors le noyau $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E

Test 35

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'image $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple 36

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ x-y \\ y \end{pmatrix}.$$

Test 37

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix}.$$

Exemple 38

L'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admet pour noyau le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Celui-ci est engendré par la fonction constante $\widetilde{1} : x \mapsto 1$, c'est donc une droite vectorielle.

Test 39

Déterminer le noyau de l'application linéaire $\sigma : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\sigma(f) = f'' - 4f.$$

Théorème 40 ♥

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
2. $\operatorname{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant avec

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = f(E).$$

Théorème 41

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si W un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si V un sous-espace vectoriel de E, alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

§2 Injectivité, surjectivité

Théorème 42

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors l'application f est injective si, et seulement si $\ker(f) = \{ 0_E \}$.

L'inclusion, $\{ 0_E \} \subset \ker(f)$ étant triviale, montrer $\ker(f) = \{ 0_E \}$ revient à montrer

$$\forall x \in E, f(x) = 0_F \implies x = 0_E.$$

Exemple 43

L'endomorphisme M qui, à la fonction f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $x \mapsto xf(x)$, est injectif. Soit en effet un élément f du noyau; on a alors $xf(x) = 0$ pour tout réel x, donc $f(x) = 0$ pour tout réel non nul x. Par continuité, f est l'application constante nulle: $f = \widetilde{0}$. Le noyau de l'endomorphisme M est donc $\left\{ \widetilde{0} \right\}$ et M est injectif.

Théorème 44

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors l'application f est surjective si, et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

L'inclusion, $\operatorname{Im}(f) \subset F$ étant triviale, montrer $\operatorname{Im}(f) = F$ revient à montrer

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Ce qui est bien sûr la définition d'une fonction surjective, la linéarité ne joue aucun rôle ici.

§3 Équations linéaires

Définition 45

Une **équation linéaire** est une équation de la forme $u(x) = b$ où

- $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
- $b \in F$ est fixé,
- l'inconnue est $x \in E$.

Théorème 46

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = b$.

- *Si $b \notin \operatorname{Im} u$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.*
- *Si $b \in \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire si il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$, alors*

$$\mathscr{S} = x_0 + \ker u = \{ x_0 + y \mid u(y) = 0_F \}.$$

Définition 47

On dit que x_0 est une **solution particulière**, et y est une **solution générale** de l'équation homogène associée (c'est-à-dire l'équation $u(x) = 0_F$).

Exemple 48

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) - 4y(t) = \cos(t)$.

§4 Notion de sous-espace affine

Définition 49 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, x_0 un point de E, et W un sous-espace vectoriel de E. On note $x_0 + W$, et on appelle **sous-espace affine** passant par x_0 et dirigé par W l'ensemble

$$\mathscr{W} = x_0 + W = \left\{ x_0 + w \mid w \in W \right\}.$$

L'espace W est appelé la **direction** du sous-espace affine $\mathscr{W}$.

Si W est une droite vectorielle, $x_0 + W$ est appelé **droite affine**.

Chapitre

37

Compléments

37.3 La structure d'algèbre

MP La notion d'algèbre est une notion qui apparait dans le programme de seconde année.

Définition 50

On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un quadruplet $(A, +, *, \cdot)$ tel que

- $(A, +, *)$ est un anneau.
- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A^2, (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x * y)$.

Définition 51

Soit $(A, +, *, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une **sous-algèbre** de A est une partie V qui est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de A.

Théorème 52

Soit $(A, +, *, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et V une sous-algèbre de A. Alors, V est une algèbre pour les lois induites

$$+ : \begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad * : \begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

Exemple 53

Les endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 54

Les matrices carrées de taille n sur le corps $\mathbb{K}$ forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 55

Les polynômes sur le corps $\mathbb{K}$ forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 56

Soit I une partie de $\mathbb{R}$.

- Les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ forment la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
- Les fonctions continues forment la sous-algèbre $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$; et l'on a de même la sous-algèbre des fonctions dérivables, des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$,*etc*.

Définition 57

Soient $(A, +, *, \cdot)$ et $(B, \oplus, \circledast, \odot)$ deux algèbres sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle **morphisme d'algèbre** de A dans B toute application $f : A \to B$ telle que pour tous $u, v \in A$, et tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) \oplus f(v) \\ f(\alpha \cdot u) &= \alpha \odot f(u) \\ f\left(1_A\right) &= 1_B \\ f(u * v) &= f(u) \circledast f(v) \end{aligned}$$