CHAPITRE 34

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES DU PREMIER ORDRE

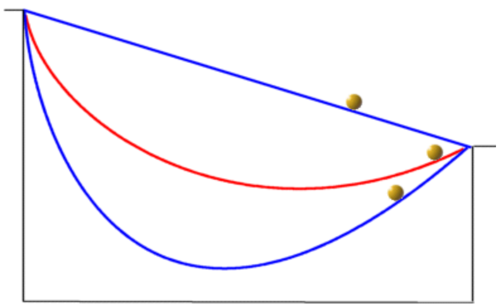
Dans tout ce chapitre On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le terme intervalle désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

En 1696, Jean Bernoulli annonce un grand concours qui occupera les plus grands esprits de son temps. Il fait insérer le problème suivant dans les actes de Leipzig :

> Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible.

Il ajoute que la solution n'est pas une droite, même si c'est le long d'une droite que le mobile parcourt une distance minimale. Il termine en promettant gloire et approbation à celui qui donnera la solution correcte de ce problème.

C'est le début d'une grande aventure qui sera à l'origine du calcul des variations, une branche des mathématiques qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation et de réécrire toute la mécanique classique. Cinq personnes présentent des solutions : Jean Bernoulli, son frère Jacques, Leibniz, le marquis de l'Hospital et une personne anonyme. Il s'avère que la solution anonyme vient de Isaac Newton, qui a résolu le problème en une seule soirée !



La solution est la cycloïde, une courbe engendrée par le déplacement d'un point sur un cercle roulant sans glisser sur un axe. C'est une surprise, car Huygens vient de prouver en 1659 que la cycloïde est isochrone, c'est-à-dire qu'un pendule qui décrit une forme de cycloïde a une période constante, quelle que soit l'amplitude de ses oscillations. Il est assez étrange que la solution de ces deux problèmes classiques soit la même.

Après le problème du brachistochrone[1], les frères Bernoulli continuent à se défier mutuellement avec divers problèmes d'optimisation similaires. Au XVIII-ième siècle, Euler décide de rassembler toutes les méthodes qu'ils ont développées pour résoudre des problèmes de maxima et de minima. Il élabore aussi l'équation d'Euler-Lagrange, une équation différentielle qui permet de résoudre de tels problèmes. C'est le début d'une nouvelle branche des mathématiques, le calcul des variations.

Encore aujourd'hui, le calcul des variations est un domaine de recherche très riche, qui trouve des applications dans des domaines de recherche aussi variés que la physique, les réseaux et l'aéronautique.

34.1 Ensemble des solutions

§1 Définitions

Définition 1

Soit α, β et $\gamma : J \to \mathbb{K}$ trois applications continues sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1** une équation qui s'écrit sous la forme

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

Définition 2

Soit $I \subset J$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est **solution de (E) sur I** si

- l'application f est dérivable sur I,
- et $\forall t \in I, \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle (E) sur I, c'est donner toutes les solutions définies sur I.
Une **courbe intégrale** de (E) est la courbe représentative d'une solution de (E).

Notation

On note ici $\mathcal{S}(E, I)$ l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I.

[1] Du grec brakhisto «le plus court» (s'écrit donc avec un i et non un y) et chronos «temps».

Remarques

- Souvent, l'équation (E) se note abusivement
$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t).$$
- Une équation différentielle linéaire est une équation linéaire au sens de l'algèbre linéaire (cf. espaces vectoriels)...

Exemple 3 L'équation $y'(t) = y(t)$ admet pour solutions

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$$

Définition 4 Une solution $f : I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle est une **solution maximale** si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle $I' \neq I$ contenant I.

§2 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 5 **Principe de superposition des solutions**
On considère les équations différentielles

$$(E_1) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma_1(t) \qquad (E_2) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma_2(t)$$

Si f_1 et f_2 sont solutions sur I respectivement de (E_1) et (E_2), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \lambda\gamma_1(t) + \mu\gamma_2(t).$$

Démonstration. Soient f_1 et f_2 des solutions sur I respectivement de (E_1) et (E_2). Soient également $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et l'application

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Les applications f_1 et f_2 sont dérivables sur I en tant que solutions de E_1 et E_2. L'application f est donc dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I.

Soit $t \in I$.

$$f(t) = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \qquad \text{et} \qquad f'(t) = \lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) &= \alpha(t)\left(\lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t)\right) + \beta(t)\left(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\right) \\ &= \lambda\left(\alpha(t)f_1'(t) + \beta f_1(t)\right) + \mu\left(\alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t)\right) \\ &= \lambda\gamma_1(t) + \mu\gamma_2(t) \end{aligned}$$

car f_1, f_2 sont solutions de $(E_1), (E_2)$. Autrement dit, f est solution de (E). ∎

Théorème 6

Soit α, β et $\gamma : I \to \mathbb{K}$ trois applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

On suppose qu'il existe une solution $f_0 \in \mathcal{S}(E, I)$, alors

$$\mathcal{S}(E, I) = f_0 + \mathcal{S}(H, I) = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$$

La «solution générale» s'écrit donc sous la forme «solution particulière» plus «solutions de l'équation homogène associée».

Démonstration. On note $F = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$.

Montrons que $\mathcal{S}(E, I) \subset F$. Si $f \in \mathcal{S}(E, I)$, alors $h = f - f_0 \in \mathcal{S}(H, I)$, d'où $f = f_0 + h \in F$.

Montrons que $F \subset \mathcal{S}(E, I)$. Si $f \in F$, alors il existe $h \in \mathcal{S}(H, I)$ tel que $f = f_0 + h$ et f est solution de (E) d'après le principe de superposition. ∎

§3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

Proposition 7

Soient

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \qquad \beta : I \to \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \gamma : I \to \mathbb{C}.$$

L'application $f : I \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \tag{E}$$

si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ est $\mathfrak{Im}(f)$ sont solutions respectives de

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

Ce résultat est faux si α et β ne sont pas à images réelles.

Démonstration. Supposons que $f : I \to \mathbb{C}$ soit solution de l'équation différentielle (E). On note alors $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$.

L'application f est dérivable sur I, ce qui équivaut à dire que f_1 et f_2 sont dérivables sur I. Soit $t \in I$, on a

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \qquad \text{et} \qquad f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t).$$

Or f est solution de (E), donc $\alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$, ce qui s'écrit également

$$\alpha(t)\left(f_1'(t) + i f_1(t)\right) + \beta(t)\left(f_1(t) + i f_2(t)\right) = \gamma(t),$$

ou encore,

$$\left(\alpha(t)f_1'(t) + \beta(t)f_1(t)\right) + i\left(\alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t)\right) = \gamma(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) + i\,\mathfrak{Im}(\gamma)(t). \tag{34.1}$$

Or $\alpha(t)f_1'(t)+\beta(t)f_1(t)\in\mathbb{R}$, et $\alpha(t)f_2'(t)+\beta(t)f_2(t)\in\mathbb{R}$, donc par identification des parties réelles et imaginaires dans la relation (34.1), nous obtenons

$$\forall t\in I,\quad \alpha(t)f_1'(t)+\beta(t)f_1(t)=\mathfrak{Re}(\gamma)(t)\qquad\text{et}\qquad \alpha(t)f_2'(t)+\beta(t)f_2(t)=\mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

Autrement dit, $f_1=\mathfrak{Re}(f)$ est $f_2=\mathfrak{Im}(f)$ sont solutions respectives de

$$\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=\mathfrak{Re}(\gamma)(t)\qquad\text{et}\qquad \alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=\mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

La réciproque est une application immédiate du principe de superposition des solutions (prendre $\gamma_1=\mathfrak{Re}(\gamma)$, $\gamma_2=\mathfrak{Im}(\gamma)$, $\lambda=1$, $\mu=i$). ∎

34.2 Résolution d'une équation différentielle normalisée

§1 Équation différentielle normalisée

Définition 8 Si pour tout $t\in J$, $\alpha(t)\neq 0$, alors (E) est équivalente à une équation de la forme

$$y'(t)=a(t)y(t)+b(t).$$

Une telle équation est dite sous forme **réduite** ou **normalisée**.

§2 Résolution d'une équation homogène normalisée

Théorème 9 *Soit $a : I\to\mathbb{K}$ où I est un* intervalle. *On suppose que la fonction a admet une primitive $A : I\to\mathbb{K}$ sur I. Alors, les solutions maximales de l'équation homogène*

$$y'(t)=a(t)y(t)\tag{H}$$

sont les applications

$$h_\lambda :\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & \lambda e^{A(t)}\end{array},\text{avec } \lambda\in\mathbb{K}$$

Démonstration. Soit $y : I\to\mathbb{K}$ une application et A une primitive de a sur I. Posons $z=ye^{-A} : t\mapsto y(t)e^{-A(t)}$. On a donc

$$\forall t\in I, y(t)=z(t)e^{A(t)}.$$

Donc *la fonction z est dérivable si et seulement si y est dérivable*. Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned}\forall t\in I, y'(t)-a(t)y(t)&=z'(t)e^{A(t)}+z(t)A'(t)e^{A(t)}-a(t)z(t)e^{A(t)}\\&=z'(t)e^{A(t)}+z(t)a(t)e^{A(t)}-a(t)z(t)e^{A(t)}\\&=z'(t)e^{A(t)}.\end{aligned}$$

Puisque $e^{A(t)}$ n'est jamais nul,

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}(H,I) &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \qquad \text{car } I \text{ est un intervalle.} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)} \end{aligned}$$

∎

Corollaire 10 *Soit h une solution non nulle de (H), par exemple $h : t \mapsto e^{A(t)}$, alors*

$$\mathcal{S}(H,I) = \{ \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

On dit que $\mathcal{S}(H,I)$ est une **droite vectorielle** de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et que h en est un **générateur**.

Remarque L'équation différentielle $y' = ay$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'application $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $A(t) = at$ est une primitive de l'application constante $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a \end{array}$.

Les solution de l'équation différentielle homogène $y' = ay$ sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 11 Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) - ty(t) = 0. \tag{H}$$

Démonstration. L'équation (H) est équivalente à l'équation $y'(t) = ty(t)$. L'application $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array}$ admet pour primitive l'application

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{2} \end{array}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ étant un intervalle, les solutions réelles maximales de (H) sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{t^2/2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

∎

§3 Résolution par changement de fonction inconnue

Méthode Nous supposons que la fonction α ne s'annule pas sur I. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et h est une solution *qui ne s'annule pas* [2] de l'équation homogène associée à (E),

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que h est un **facteur intégrant**.

[2] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci dessus.

Considérons une application $y : I \to \mathbb{K}$. On sait que h ne s'annule pas donc $z = \frac{y}{h}$ est dérivable sur I si et seulement si $y = zh$ est dérivable sur I. Sous cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) &= \alpha(t)\left(z'(t)h(t) + z(t)h'(t)\right) + \beta(t)z(t)h(t) \\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) + z(t)\cancel{\left(\alpha(t)h'(t) + \beta(t)h(t)\right)} \\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) \qquad \text{car } h \text{ est solution de } (H).\end{aligned}$$

De plus, on sait que α et h ne s'annulent pas, d'où

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}(E, I) &\iff \forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \\ &\iff \forall t \in I, \alpha(t)z'(t)h(t) = \gamma(t) \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \qquad \text{où } b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.\end{aligned}$$

Supposons alors qu'il existe B une primitive de $\frac{b}{h}$ sur l'*intervalle* I. Nous sommes assurés de son existence lorsque α et γ sont continues. Alors la fonction $f_0 : t \mapsto B(t)h(t)$ est solutions de (E) sur I.

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions définies sur I sont donc les applications

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (B(t) + \lambda)\, h(t) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Proposition 12 *Soient I un intervalle, a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux applications. On suppose qu'il existe $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I et $B : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ sur I.*
Alors, les solutions de l'équation

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

sont les applications

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (B(t) + \lambda)\, e^{A(t)} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 13 Déterminer les solutions définies sur $]0, +\infty[$ et à images réelles, de l'équation différentielle

$$t y'(t) - y(t) = t^2\, \mathrm{e}^t\,. \tag{E}$$

Démonstration. L'équation homogène associée à (E) est $ty'(t) - y(t) = 0$ qui est équivalente sur $]0, +\infty[$ à l'équation réduite

$$y'(t) = \frac{1}{t} y(t).$$

L'application $\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$ admet pour primitive $\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln t \end{array}$.

Les solutions de l'équation $ty'(t) - y(t) = 0$ sur l'*intervalle* $]0, +\infty[$ sont

$$\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln t} = \lambda t \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution de (E) sous la forme $f : t \mapsto z(t)\,\mathrm{e}^{\ln t} = tz(t)$ où z est une application dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in]0, +\infty[$, on a

$$tf'(t) - f(t) = t\left(tz'(t) + \cancel{z(t)}\right) - \cancel{tz(t)} = t^2 z'(t),$$

et on en déduit

$$tf'(t) - f(t) = t^2 e^t \iff t^2 z'(t) = t^2 e^t \iff z'(t) = e^t \quad \text{car} \quad t^2 \neq 0.$$

On peut choisir $z(t) = e^t$, c'est-à-dire $f(t) = te^t$. La fonction f est donc *une solution* de (E) sur $]0, +\infty[$.

L'équation (E) étant linéaire, l'ensemble de ses solutions réelles définies sur $]0, +\infty[$ est donc

$$\mathcal{S}\left(E,]0, +\infty[\right) = \left\{ \begin{array}{rrcl} f_\lambda : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t + \lambda t \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

∎

§4 Expression des solutions sous forme intégrale

Corollaire 14 *Soient I un intervalle, a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues.*

Soit $t_0 \in I$. Les solutions maximales de l'équation différentielle

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

sont les applications

$$\begin{array}{rrcl} f : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left(\lambda + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}\,\mathrm{d}u\right) e^{A(t)} \end{array}$$

avec

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \qquad \textit{et} \qquad \lambda = f(t_0) \in \mathbb{R} \textit{ un réel quelconque.}$$

Corollaire 15 *Une solution particulière de (E) est donnée par*

$$\begin{array}{rrcl} f_0 : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}\,\mathrm{d}u\right) e^{A(t)} \end{array}.$$

Remarque L'application f_0 est une solution de (E), c'est une « solution particulière » de (E). En notant $\lambda h : t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ les solutions de l'équation homogène associée à (E), on a [3]

$$\mathcal{S}(E, I) = \left\{ f_0 + \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

<u>On dit que $\mathcal{S}(E, I)$ est une **droite affine**</u> de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

[3]
$$\overbrace{f_0}^{\text{«point»}} + \underbrace{\mathbb{K}\ \overbrace{h}^{\text{«vect.directeur»}}}_{\text{«direction»}}$$

34.3 Problème de Cauchy

§1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 16

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$.

Théorème 17

Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{E}$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point $M_0(t_0, y_0)$.

§2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Remarque

Ici, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

- Toutes les solutions, et il y en a une infinité, vérifient $y(0) = 0$.
- On peut vérifier que toutes les applications de la forme

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^2 + t^3 \end{array}$$

  sont solution de (E). Il y en a encore d'autres.

Test 18

Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Démonstration. On commence par chercher les solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

L'équation homogène associée à (E) est

$$ty'(t) - 2y(t) = 0. \tag{H}$$

Sur $]-\infty, 0[$, l'équation (H) est équivalente à $y'(t) = \frac{2}{t} y(t)$. L'application $\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{2}{t} \end{array}$ admet pour primitive $\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2\ln|t| = 2\ln(-t) \end{array}$. Les solutions de (H) sur $]-\infty, 0[$ sont donc les applications

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^2 \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous cherchons maintenant une solution de (E) sur $]-\infty,0[$ sous la forme $y : t \mapsto z(t)\,\mathrm{e}^{2\ln(-t)} = t^2 z(t)$ où $z :]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ est dérivable. Or, pour $t \in]-\infty,0[$, on a

$$ty'(t) - 2y(t) = 2t^2 z(t) + t^3 z'(t) - 2t^2 z(t) = t^3 z'(t).$$

Ainsi, y est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ si, et seulement si

$$\forall t \in]-\infty,0[,\ z'(t) = 1.$$

On choisit par exemple $z(t) = t$ et une solution de (E) est

$$\begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 \end{array}.$$

La solution générale de (E) sur $]-\infty,0[$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3+\lambda t^2 \end{array},\ \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mutatis mutandis, la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3+\mu t^2 \end{array},\ \text{avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{R}$, la théorie ne s'applique pas. Nous travaillons alors par condition nécessaire et condition suffisante pour déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

(CN) Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit solution de (E). Alors, f est solution[4] de (E) sur $]-\infty,0[$; en effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,+\infty[$ et vérifie $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ pour $t \in \mathbb{R}$, donc *a fortiori* pour $t \in]-\infty,0[$. Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\infty,0[,\ f(t) = t^3 + \lambda t^2.$$

De même, f est solution de (E) sur $]0,+\infty[$. Il existe donc une constante $\mu \in \mathbb{R}$[5] telle que

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t^3 + \mu t^2.$$

On utilise ensuite le fait qu'une solution de (E) est une application dérivable : [6]

- f doit être continue en 0, or

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^-} t^3 + \lambda t^2 = 0 \ \text{ et } \ \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} t^3 + \mu t^2 = 0.$$

  La continuité de f en 0 donne $f(0) = 0$.

- f doit être dérivable en 0, or

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} t^2 + \lambda t = 0 \ \text{ et } \ \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} t^2 + \mu t = 0;$$

  la dérivabilité de f en 0 donne $f'(0) = 0$.

[4] ou plutôt sa restriction à $]-\infty,0[$

[5] : les constantes intervenant sur chaque intervalle sont, à priori, différentes. Il faut donc leur donner un nom différent.

[6] On peut également dire que f coïncide à gauche et à droite de 0 avec des fonctions dérivables.

(CS) Réciproquement, soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & t < 0 \end{cases} \end{array}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

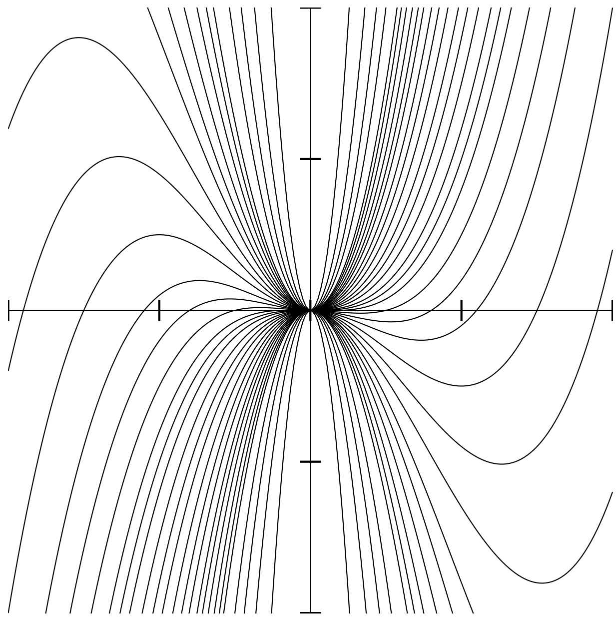
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star, ty'(t) - 2y(t) = t^3$$

puisque les restrictions de f à $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ sont solutions de l'équation différentielle (E). De plus, le calcul précédent montre que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$, et puisque $0f'(0) - 2f(0) = 0^3$, la fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & t < 0 \end{cases} \end{array}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$



∎

CHAPITRE 34

COMPLÉMENTS

34.4 MÉTHODE D'EULER

Certaines équations différentielles ne peuvent être résolues formellement. On peut alors chercher une solution numérique approchée. La méthode d'Euler est la plus simple et la plus intuitive de ces méthodes.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où F est une fonction réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ [7]

L'idée de la méthode d'Euler est la suivante : on choisit un pas $h > 0$ puis on remplace, en $t_k = t_{k-1} + h = t_0 + kh$, la courbe intégrale du problème par sa tangente en ce point. On effectue donc l'approximation

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + hy'(t_k) \\ &= y(t_k) + hF(t_k, y(t_k)). \end{aligned}$$

La suite des valeurs approchées de la solution du problème de Cauchy se définit ainsi par la relation de récurrence

$$y_{k+1} = y_k + hF(y_k).$$

On obtient une ligne polygonale joignant les points (t_k, y_k) qui approche la courbe intégrale de la solution du problème de Cauchy.

Remarque C'est en utilisant cette approximation qu'Euler a démontré l'existence de solutions pour les équations différentielles d'ordre 1.

[7] Dans les cas résolus précédemment

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}, F(t, y) = a(t)y + b(t).$$