Chapitre 39

Génération et liberté

39.1 Familles et parties génératrices

§1 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A admet un plus petit élément (pour l'inclusion). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par A**, il se note $\operatorname{Vect}(A)$, et on a

$$\operatorname{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{W \text{ sev de } E \\ A \subset W}} W.$$

Si $\operatorname{Vect} A = E$, on dit que A est une **partie génératrice** de E.

Exemple 2 Soit $x \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x est

$$\operatorname{Vect}\{\, x \,\} = \mathbb{K}x.$$

En effet, si un sous-espace vectoriel V de E contient x, il contient tous les multiples de x car il est stable par multiplication externe ; on a donc $\mathbb{K}x \subset V$.
Or nous avons vu que $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus $x \in \mathbb{K}x$. Le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x est donc $\mathbb{K}x$, autrement dit $\operatorname{Vect}(\{\, x \,\}) = \mathbb{K}x$.

Exemple 3 Le sous-espace vectoriel engendré par la partie vide est le sous-espace vectoriel nul

$$\text{Vect}\,\emptyset = \{0\}.$$

Proposition 4 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soit A et B deux parties de E. Alors*

1. $A \subset \text{Vect}(A)$.
2. *Si V est un sous-espace vectoriel de E et $A \subset V$, alors* $\text{Vect}(A) \subset V$.
3. $A = \text{Vect}(A)$ *si, et seulement si, A est un sous-espace vectoriel de E.*
4. $A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Exemple 5 Soit $x, y \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x et y est

$$\text{Vect}\,\{\,x, y\,\} = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{\,\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,\}.$$

Proposition 6 *Soit A et B sont deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors*

$$\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}\,(A \cup B).$$

§2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Définition 7 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(v_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par l'image $\left\{\,v_i \;\middle|\; i \in I\,\right\}$ de cette famille.
- On dit que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E.

Dans cette partie, nous ne considérons que des famille finie de vecteurs. Le cas général est traité dans la section39.4.

Théorème 8 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel engendré par $\left(v_1, v_2, \dots, v_p\right)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$:*

$$\text{Vect}\left(v_1, v_2, \dots, v_p\right) = \left\{\,\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^k\,\right\}.$$

Corollaire 9 *Soit $v_1, v_2, \dots v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

Si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$ et $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p$, Alors $v + w$ et αv ($\alpha \in \mathbb{K}$) sont également combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Exemple 10

L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$. On a

$$S = \left\{ sv_1 + tv_2 \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 = \mathrm{Vect}\left\{ v_1, v_2 \right\}.$$

Exemple 11

L'espace des solutions de l'équations différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est

$$\left\{ y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; y'' + 2y' + y = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\{ x \mapsto e^x, x \mapsto xe^x \}.$$

Exemple 12

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v = (1,1,2)^T \qquad \text{et} \qquad w = (-1,2,3)^T.$$

Un vecteur $b = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si le système linéaire suivant, d'inconnues $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a au moins une solution

$$\alpha v + \beta w = b \iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ \alpha + 2\beta &= y \\ 2\alpha + 3\beta &= z \end{cases}$$

Ce système est successivement équivalent au systèmes

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta w = b &\iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ 3\beta &= y - x \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5\beta &= z - 2x \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ 3\beta &= y - x \\ 0 &= 5(y-x) - 3(z-2x) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait une solution (α, β), il faut et il suffit que les égalités de compatibilité soient satisfaites. Le sous-espace vectoriel V a donc pour équation

$$x + 5y - 3z = 0.$$

Par exemple, le vecteur $(5,2,5)^T$ appartient à V et $(1,2,3)^T$ n'y appartient pas.
On peut d'ailleurs vérifier que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

§3 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 13 On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qu'il est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie et on note alors $\dim E < \infty$. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et on note $\dim E = \infty$.

Exemples 14

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Définition 15

- On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel non nul engendré par un seul élément.
- On appelle **plan vectoriel** un espace vectoriel engendré par deux éléments et qui n'est pas une droite vectorielle.

Tout élément non nul d'une droite vectorielle l'engendre. Deux éléments quelconques d'une droite vectorielle sont proportionnels. Enfin, on verra plus loin que deux éléments non proportionnels d'un plan vectoriel l'engendrent.

39.2 Liberté

§1 Relations linéaires

Il est naturel de se demander comment s'étend l'idée de la colinéarité à une famille comprenant plus de deux vecteurs ; le plus simple est de partir de la remarque suivante.

Soient k un entier ≥ 2, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Supposons que l'un d'entre eux, par exemple le dernier, soit combinaison linéaire des autres, autrement dit qu'il existe une famille de scalaire $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ telle que

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Si on pose $\alpha_p = -1$, on voit que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E$.

Réciproquement, s'il existe une famille de p scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ telle que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E$$

et que l'un d'entre eux est différent de 0, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : par exemple, si $\alpha_j \neq 0$, on constate que

$$v_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{-\alpha_i}{\alpha_j} v_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_j} v_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_j} v_2 + \cdots + \frac{-\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} + \frac{-\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} + \cdots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_j} v_p.$$

Lemme 16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E et $j \in [\![1, p]\!]$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, tels que*

$$\alpha_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E;$$

2. *le vecteur v_j est combinaison linéaire des vecteurs v_i, avec $i \neq j$.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p \in E$ sont **linéairement dépendants** ou encore que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **liée**, s'il existe une famille de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ non tous nuls[1] telle que
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E.$$
Dans ce cas, la relation $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E$ est appelée **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

- Dans le cas contraire, autrement dit lorsque l'équation
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E.$$
dont les inconnues sont les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ a pour unique solution $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_p = 0$, on dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p \in E$ sont **linéairement indépendants** ou encore que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **libre**.

Définition 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$.

- La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **libre** si et seulement si
$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E \implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0.$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **liée**, c'est-à-dire
$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0) \text{ et } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E.$$

Exemple 18

Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
sont linéairement indépendants.
En effet, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
alors
$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ 2\alpha - \beta & = 0 \end{cases}$$
Et ce système homogène a pour unique solution $\alpha = 0, \beta = 0$. Ainsi, les vecteurs v et w sont linéairement indépendants.

[1] Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont non tous nuls si au moins un des scalaires α_i est différent de 0. Ceci est bien sûr différent d'une famille de scalaires «tous non nuls».

Test 19 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que les vecteurs

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants en écrivant une relation de dépendance linéaire non triviale entre p et q.

Exemple 20 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

sont linéairement dépendants. En effet (vérifiez!),

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Remarquons que l'on peut également écrire $v_3 = 2v_1 + v_2$.

Proposition 21 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Alors la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des $n-1$ autres.*

Corollaire 22 *Deux vecteurs forment une famille liée si, et seulement si l'un est un multiple scalaire de l'autre.*

Exemple 23 Les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (2, 1, 5)$ sont linéairement indépendants.

Test 24 Obtenir une relation de dépendance linéaire pour les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3) \qquad v_2 = (2, 1, 5) \qquad v_3 = (4, 5, 11).$$

Test 25 Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où e_i est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ème qui vaut 1. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Il est également utile d'avoir en tête les résultats suivants.

Proposition 26 1. *Tout famille extraite d'une famille libre est une famille libre.*

2. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

Il est exact que si la famille (u, v, w) est libre, alors les familles (u, v), (u, w) et (v, w) le sont également. Mais la réciproque est fausse.

Exemple 27 Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Exemple 28 Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer quelles familles sont libres.

$$L_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$L_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille L_2 est libre car aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre. La famille L_3 est par contre liée (Test). La famille L_3 est une sous-famille de L_4 et L_1 ; ces deux familles sont donc également liées.

Test 29 Montrer que L_3 est liée. Écrire une relation de dépendance linéaire non triviale. Écrire l'un des vecteur comme combinaison linéaire des 2 autres.

§2 Unicité de la décomposition

Théorème 30 *Soit* $(v_1, v_2, \dots, v_p) \in E^p$ *une famille libre de vecteurs de* E *et soit* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$ *des scalaires tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p,$$

alors

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \dots\dots \qquad \alpha_p = \beta_p.$$

Test 31 Montrer le!

Remarque Qu'implique le théorème pour un vecteur v, combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$, s'écrivant

$$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_p v_p ?$$

Le théorème affirme que *si* un vecteur v est combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants, cette écriture est *unique*.

§3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

Théorème 32

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $w \in E$.
Alors la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p, w)$ est libre si, et seulement si, w n'est pas combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$, c'est-à-dire $w \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Supposons que la famille $S = (v_1, \dots, v_p)$ engendre l'espace vectoriel V, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(S) = V$.

- Si S est libre, alors une sous famille de S n'engendre pas V. En effet, si l'on supprime un vecteur, disons v_i, alors la sous famille de $p-1$ vecteurs ne peut engendrer V puisque v_i (qui appartient à V) n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs.

- Si S est liée, alors un vecteur v_i est combinaison linéaire des autres. Si l'on supprime le vecteur v_i dans la famille S, la nouvelle famille reste une famille génératrice.

  En effet, formons la famille $T = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p)$ (il manque v_i), alors $v_i \in \mathrm{Vect}(T)$ et plus généralement $\{ v_1, v_2, \dots, v_p \} \subset \mathrm{Vect}(T)$. Puisque S engendre V, on obtient
  $$V = \mathrm{Vect}\,\{ v_1, v_2, \dots, v_p \} \subset \mathrm{Vect}(T) \subset V$$
  c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(T) = V$.

39.3 Bases

§1 Bases d'un espace vectoriel

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de E si, et seulement si tout vecteur $v \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteur $v_1, v_2, \dots, v_n$, c'est-à-dire
  $$\forall v \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v.$$
  De manière ensembliste, cela s'écrit $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = E$.

- Si la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre, alors *si* un vecteur v *peut* s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$:
  $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v,$$
  alors cette écriture est unique.

Si une famille possède ces deux propriétés, on dit que $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de E.

Définition 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, et seulement si

- La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une famille libre

- et la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ engendre E, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ou encore, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une **base** de E si, et seulement si tout vecteur $v \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\forall v \in E, \exists! \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \in \mathbb{K}^n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v.$$

Par convention, on dira l'espace vectoriel $\{ 0 \}$ admet pour base la famille vide $\mathcal{F} = (\quad)$.

Exemple 34

Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où e_i est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ème qui vaut 1. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Nous avons déjà montré que la famille $\mathcal{B}$ était libre. De plus, il est facile de voir que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{K}^n$, puisque tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ s'écrit

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

c'est-à-dire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelée la **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.

Exemple 35

Déterminons une base de W, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\}.$$

Si $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u \in W \iff x + y - 3z = 0 \iff x = -y + 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff u = y \cdot v + z \cdot w \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a bien $v, w \in W$. L'équivalence précédente montre que les vecteurs $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$ engendrent W. La famille (v, w) est également libre. Cela se montre facilement grâce aux coefficients 0 et 1, si $\alpha v + \beta w = 0$, on a directement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Exemple 36 La famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.
On peut montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$. Nous allons plutôt montrer que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b.$$

Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque $\det(A) \neq 0$. L'équation ci-dessus admet donc une unique solution, c'est-à-dire que b s'écrit de manière unique

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b$$

§2 Théorème de la base extraite

Lemme 37 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale de E, c'est-à-dire que si l'on considère une sous-famille de $\mathcal{B}$ où l'un des v_i est supprimé, la nouvelle famille n'est plus génératrice.*

Théorème 38 **Théorème de la base extraite**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Plus généralement, de toute partie génératrice $\mathcal{G} \subset E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, on peut extraire une famille génératrice finie, et donc également extraire une base.

Démonstration. Une version plus générale de ce théorème, le théorème de la base incomplète, sera démontré ultérieurement. Donnons une esquisse de la démonstration, qui explicite une manière d'obtenir une base à partir d'une partie génératrice finie qui contient k vecteurs

$$S = \{ w_1, w_2, \dots, w_k \}.$$

Si les vecteurs de S sont liés, alors l'un des vecteur est combinaison linéaire des $k-1$ autres. L'ensemble S_1 obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble S engendre toujours E. Si les vecteurs de S_1 sont linéairement indépendant, ils forment une base.

Sinon, on répète le processus: l'un des $k-1$ vecteurs est combinaison linéaire des $k-2$ autres. L'ensemble S_2 obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble S_1 engendre toujours E. Si les vecteurs de S_2 sont linéairement indépendant, ils forment une base.

On répète ainsi le processus jusqu'à obtenir une partie génératrice de E contenant des vecteurs linéairement indépendants… ∎

Théorème 39 *Tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ admet une base.*

§3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

La notion de base est fondamentale en algèbre linéaire. En effet, c'est à partir d'une base que l'on peut définir la notion de coordonnées.

Définition 40 **Coordonnées d'un vecteur**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Étant donné v un vecteur de E, il se décompose dans la base S sous la forme

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les **coordonnées** de v relativement à la base S.
On appelle **matrice colonne des coordonnées de v relativement à la base S** la matrice

$$\operatorname{Coord}_S(v) = M_S(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Théorème 41 *L'application* Coord_S *qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base S est linéaire.*

Exemple 42 On considère les familles $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les familles, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur $v = (2, -5)^T$ dans chacune de ces bases sont

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En effet, $v = 2e_1 - 5e_2$: dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées de v sont exactement ses coefficients.
Dans la base $\mathcal{S}$, on obtient les coordonnées de v en remarquant (ou en résolvant $\alpha v_1 + \beta v_2 = v$) que

$$v = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi} \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Test 43 Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\},$$

admet pour base $\mathcal{B} = (v, w)$ avec $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$.
Montrer que le vecteur $c = (5, 1, 2)^T$ appartient à W et déterminer ses coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$.

§4 Application linéaire attachée à une famille

Théorème 44 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}^p & \to & E \\ & \left(\alpha_1, \dots, \alpha_p\right) & \mapsto & \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \end{array}$$

est linéaire.

- *L'application φ est injective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.*
- *L'application φ est surjective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice. Plus précisément,*
  $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right).$$
- *L'application φ est bijective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E. Dans ce cas, la bijection réciproque de φ est l'application* $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}$ *qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{S}$.*

Corollaire 45 *L'application* $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}$ *qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{S}$ est linéaire.*

Chapitre

39

Compléments

39.4 Généralisation aux familles quelconques

§1 Combinaison linéaire

Définition 46

Soit I un ensemble quelconque et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires indexée par I.

- On appelle **support** de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\left\{ j \in I \;\middle|\; \lambda_j \neq 0 \right\}$.
- On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **à support fini** lorsque son support est fini.

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini de $\mathbb{K}^I$.

Proposition 47

L'ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ des familles de scalaire indexées par I à support fini est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^I$.

Définition 48

Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. Soit par ailleurs $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini. On définit la somme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in J} \lambda_i v_i,$$

où J est le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.

Définition 49

Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit qu'un vecteur v de E est combinaison linéaire de la famille $(v_i)_{i\in I}$, s'il existe une famille

$(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires, à support fini, telle que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i.$$

Exemple 50 Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

§2 Familles génératrices

Proposition 51 *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_i:*

$$\operatorname{Vect}(v_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

Remarque Lorsque l'on dispose d'une partie A, on peut indexer ses éléments par elle-même. On peut alors écrire

$$\operatorname{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a\in A} \lambda_a a \;\middle|\; (\lambda_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.$$

§3 Liberté

Définition 52 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit que cette famille est **libre** lorsque

$$\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0\right) \implies \left(\forall i \in I, \alpha_i = 0\right).$$

Sinon, la famille est dite **liée**.

Remarque La famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre, si, et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

§4 Bases

Définition 53 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit que cette famille est une **base** de E lorsque

$$\forall v \in E, \exists! (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = v.$$

Exemple 54 La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.