Vocabulaire relatif aux applications

Aperçu

D 1 Étant donné deux ensembles A et B, une **application** de A dans B est un triplet $f = (A, B, G)$ où G est une partie de $A \times B$ telle que

$$\forall x \in A, \exists ! y \in B, (x, y) \in G.$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de f,
- B est **l'ensemble d'arrivée** de f. On dit que la fonction f **prend ses valeurs dans** B ou est **à image dans** B.
- Pour $x \in A$, l'unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in G$ s'appelle **l'image** de x par f, et se désigne par $f(x)$. On dit encore que $f(x)$ est la **valeur** de f pour l'élément x de A.
- Pour $y \in B$, en cas d'existence, tout $x \in A$ tel que $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f.
- G est le **graphe** de f. On a

$$G = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \} = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \} .$$

N L'ensemble des applications de A vers B se note $\mathscr{F}(A,B)$ ou B^A.
Une application $f \in \mathscr{F}(A,B)$ se note

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ou} \quad f : A \to B$$

E 2

- L'application dont l'ensemble de définition ainsi que celui d'arrivée est $\mathbb{N}$; qui a chaque naturel n fait correspondre n^2+1 se note

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}.$$

  Par exemple, on a $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.
- Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la relation $y = \frac{1}{x^2-1}$ définit une application de $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

N

- Soient A et B deux ensembles et b un élément de B. L'application $f : A \to B$ définie par
$$\forall x \in A, f(x) = b$$
est une **application constante**. On la note parfois $\tilde{b}$ ou simplement b lorsqu'aucune confusion n'est possible.
- Soit A un ensemble. L'application $\mathrm{Id}_A : A \to A$ définie par
$$\forall x \in A, \mathrm{Id}_A(x) = x$$
est l'**application identique** de A, ou **identité** de A.

P 3 *Deux applications $f : A \to B$ et $g : A' \to B'$ sont **égales** si et seulement si*

- *elles ont même ensemble de départ : $A = A'$,*
- *elles ont même ensemble d'arrivée : $B = B'$,*
- *et si pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$.*

On écrit alors $f = g$.

E 4 Une fonction f est définie par

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Évaluer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et représenter le graphe de f.

E 5 Voici un extrait des tarifs courrier pour la France métropolitaine.

Lettre verte	
Poids jusqu'à	Tarifs nets
20g	0.58€
50g	0.97€
100g	1.45€
250g	2.35€
500g	3.15€
1kg	4.15€
2kg	5.40€
3kg	6.25€

Définir la fonction coût C en fonction du poids. Représenter le graphe de C.

Voici une notion qui permet de créer un lien entre les parties d'un ensemble E et des fonctions.

D 6 Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A (dans E), et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{ 0, 1 \} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

D 7 Soit A un ensemble. On appelle **famille** d'éléments de A **indexée** par l'ensemble I toute application de I dans A notée

$$\begin{array}{ccc} I & \to & A \\ i & \mapsto & x_i \end{array}.$$

L'ensemble I qui est appelé **ensemble des indices**. On utilise généralement la notation $\left(x_i\right)_{i\in I}$ pour désigner une telle famille.

E 8

- Une suite est une famille dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ (ou $\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \geq n_0 \right\}$).
- Si $I = \{ 1, 2, 3 \}$, alors l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par I est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) où x, y, z sont trois éléments quelconques de A.

$$f(x, y).$$

D 9 On dit que deux fonctions f et g **coïncident dans un ensemble** E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

$g : A' \to B'$ est un prolongement de $f : A \to B$ si et seulement si

$$A \subset A' \text{ et } B \subset B' \text{ et } (\forall x \in A, f(x) = g(x)).$$

D 11 Soient $f : A \to B$ une application et X une partie de l'ensemble de définition A de f. L'application dont l'ensemble de définition est X, qui a le même ensemble d'arrivée que f est la **restriction** de f à X, et on la note $f|_X$

$$f|_X : \begin{array}{ccc} X & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

D 12 Soit A, B et C trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, C)$. L'application définie sur A et à valeurs dans C qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **composée** des applications g et f ; on la note

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut représenter la situation précédente ainsi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

P 13 *Soient quatre ensembles A, B, C, D et trois applications définies par le diagramme*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \ .$$

On a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in \mathscr{F}(A, D).$$

On dit que l'opération $\circ$ est associative.

D 14 Soient $f : A \to B$ une application, et X une partie de A.

- L'ensemble des éléments de B qui possèdent un antécédent dans X s'appelle l'**image** de X par f et se désigne par $f(X)$ ou $f_*(X)$.

$$f(X) = \{ \, y \in B \mid \exists x \in X, y = f(x) \, \} = \{ \, f(x) \mid x \in X \, \}.$$

Autrement dit, $f(X)$ est décrit par $f(x)$ quand x décrit X.

- En particulier, $f(A)$ est appelée l'**image** de f, on la note

$$\operatorname{Im}(f) = \{ \, y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \, \} = \{ \, f(x) \mid x \in A \, \}$$

c'est un abus de langage pour «image de l'ensemble de départ de f par f».

Étant donnés $f : A \to B$ et $X \subset A$,

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X, y = f(x).$$
$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

T 15 Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer

1. $f(4)$
2. $f(\{4\})$
3. $f(\{1, 3, 5\})$
4. $f(\{-1, 1\})$
5. $f([0, 2])$
6. $f([-3, 1])$
7. $f(\mathbb{R})$
8. $\operatorname{Im} f$

Lorsque $A \subset B$, certaines circonstances peuvent se produire.

D 16 Soient $f : A \to B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie de A.

- Si $f(X) \subset X$, on dira que X est une **partie stable** par f.
- Si $f(X) = X$, on dira que X est une **partie invariante** par f.
- Un élément $x \in A$ tel que $f(x) = x$ est dit **invariant** par f. On dit aussi que x est un **point fixe** de f.

D 17 Soit $f : A \to B$ une application, et Y une partie de B. L'ensemble des éléments de A dont l'image est dans Y s'appelle l'**image réciproque** de Y par f et se désigne par $f^{-1}(Y)$ ou $f^{*}(Y)$.

$$f^{-1}(Y) = \{ \ x \in A \mid f(x) \in Y \ \} \, .$$

Étant donnés $f : A \to B$ et $Y \subset B$,

$$x \in f^{-1}(Y) \iff x \in A \text{ et } f(x) \in Y.$$

T 18 Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer

1. $f^{-1}(\{4\})$.
2. $f^{-1}(\{1, 9, 25\})$.
3. $f^{-1}(\{-2\})$.
4. $f^{-1}([0, 4])$.
5. $f^{-1}([-5, -3])$.
6. $f^{-1}([-4, 4])$.
7. $f^{-1}(f([0, 2]))$.
8. $f\left(f^{-1}([-4, 4])\right)$.
9. $f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}_-\right)\right)$.

D 19 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **injection**, ou que f est une application **injective**, si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ou de manière équivalente, f est injective si, et seulement si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x');$$

autrement dit, si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f.

C 20 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est injective.*

(ii) *Pour tout* $y \in B$, *l'équation* $f(x) = y$, *d'inconnue* $x \in A$, *admet au plus une solution.*

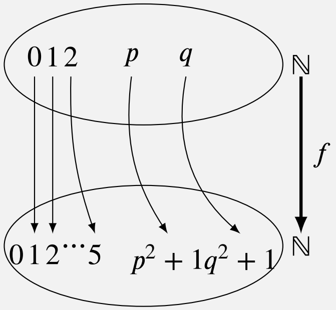
(iii) *Tout élément de* B *a au plus un antécédent par* f.

E 21 Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$ est injective.

Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n) = f(n')$. On a donc $n^2 + 1 = n'^2 + 1$, alors $n^2 = n'^2$ et donc $n = \pm n'$. Puisque n et n' sont positifs, on en déduit $n = n'$.

Nous avons montré : $\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, f(n) = f(n') \implies n = n'$. L'application f est donc injective.

Si on s'intéresse à la représentation sagittale[a] de cette application f, cela signifie que les flèches qui partent de deux points distincts arrivent à deux points distincts, ou encore qu'un point de l'ensemble d'arrivée est l'extrémité d'au plus une flèche.



[a]**sagittal** signifie en forme de flèche.

E 22 Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$ est injective.

Soient $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $u' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(u) = f(u')$, c'est-à-dire (égalité de deux couples)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x'_1 + x'_2 \\ x_1 + 2x_2 & = & x'_1 + 2x'_2 \end{array} \right. .$$

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient $x_1 = x'_1$ puis que $x_2 = x'_2$. On a donc $u = (x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) = u'$.

T 23 *La composée de deux injections est une injection.*

Démonstration. [1] Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications injectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est injective, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in A^2, (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'.$$

Considérons donc deux éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque par hypothèse g est injective, nous pouvons affirmer que $f(x) = f(x')$. Puis, f étant également injective, nous avons $x = x'$.
Ceci étant vrai pour tous éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, l'application $g \circ f$ est injective. ∎

[1] 23: Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par se donner des objets sur lesquels on peut travailler. Ici nous avons besoin de deux injections que l'on peut composer ; notons les $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

D 24 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **surjection**, ou que f est une application **surjective** si

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

C 25 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est surjective.*

(ii) *$f(A) = B$ (ou encore $\operatorname{Im} f = B$).*

(iii) *Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet au moins une solution.*

(iv) *Tout élément de B a au moins un antécédent par f.*

E 26 Montrons que l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_2 + x_3, 2x_1 - x_3) \end{array}$ est surjective.

T 27 *La composée de deux surjections est une surjection.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications surjectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in C, \exists x \in A, g \circ f(x) = z.$$

[2] Soit $z \in C$. On cherche $x \in A$ tel que $g \circ f(x) = z$.
Puisque par hypothèse g est surjective, z a un antécédent au moins par g ; c'est-à-dire qu'il existe $y \in B$ tel que $z = g(y)$. Puisque B est aussi l'espace d'arrivée de f et que f est surjective, y a au moins un antécédent dans A : il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
On constate que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

ce qui montre que z a au moins un antécédent par $g \circ f$.
Ceci étant vrai pour tout élément de C, l'application $g \circ f$ est surjective. ∎

---

[2]27: Rappelons que dans les assertions quantifiées, les «variables» sont muettes. Il sera ici un peu plus pratique d'utiliser z plutôt que y.

D 28 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **bijection**, ou que f est une application **bijective**, si

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

C 29 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est bijective.*

(ii) *f est à la fois injective et surjective.*

(iii) *Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet une et une seule solution.*

E 30 Montrer à l'aide de la définition que que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$ est bijective.

(Analyse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ x + 2y & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ y & = & b - a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2a - b \\ y & = & b - a \end{array} \right. .$$

Ainsi, $v \in \mathbb{R}^2$ admet au plus un antécédent par f qui ne peut être que $u = (2a - b, b - a)$. Ceci montre que f est injective.

(Synthèse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = (2a - b, b - a)$. Alors

$$u \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad f(u) = (2a - b + b - a, 2a - b + 2(b - a)) = (a, b) = v.$$

Ainsi, tout $v \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par f: l'application f est surjective.

(Conclusion) Tout élément $v \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f : l'application f est donc bijective.

D 31 L'ensemble des bijections de A dans B se note $\mathcal{B}\text{ij}(A, B)$. Lorsque $A = B$, on note plus simplement $\mathfrak{S}(A) = \mathcal{B}\text{ij}(A, A)$. Une bijection de A dans A est également appelée une **permutation** de E.

T 32 **et définition**

Soient A et B deux ensembles. Soit f une bijection de A vers B.
Il existe une application unique g de B vers A qui est une bijection telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B .$$

L'application g est appelée ***application réciproque*** *de l'application f et on la note f^{-1}.*

C 33 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

1. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
2. $\forall y \in B, f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

C 34 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \left(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\right)$$

Bien remarquer que f^{-1} ne définit une application que si f est une bijection.

Se rappeler également que $f^{-1}(Y)$ désigne un ensemble si Y est une partie de l'ensemble d'arrivée de f, et ce même si f n'est pas bijective.

Si $f : A \to B$ est bijective et Y est une partie de B, on peut vérifier que l'image directe de Y par f^{-1} est égale à l'image réciproque de Y par f. Autrement dit, $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) \ldots$

E 35 L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$$

est bijective et sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (2a - b, b - a) \end{array}$$

qui s'écrit aussi

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (2x_1 - x_2, x_2 - x_1) \end{array}$$

P 36 *Soient A et B deux ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans A. Si*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B,$$

alors f et g sont bijectives et on a $g = f^{-1}$.

T 37 *Soit trois ensembles A, B, C et deux applications bijective définies par*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \ .$$

Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_B \circ f = f^{-1} \circ \left(\mathrm{Id}_B \circ f\right) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

et

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_B \circ g^{-1} = \left(g \circ \mathrm{Id}_B\right) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_C \ .$$

∎

D 38 Deux ensembles A et B sont **équipotents** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On dit aussi que A est équipotent à B (ou B est équipotent à A).

R Il existe une bijection de $\emptyset$ sur lui même.

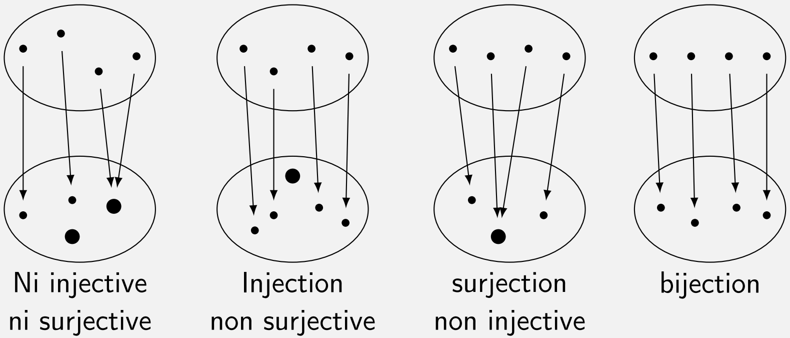
P 39 *Deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents.*

P 40 *Soit $f : A \to B$ une application. Si f est injective, alors les ensemble A et $f(A)$ sont équipotents.*

T 41 Montrer que A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont jamais équipotents. Pour cela, considérer une bijection $f : A \to \mathcal{P}(A)$ et

$$W = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \} .$$

E 42


Ni injective
ni surjective
Injection
non surjective
surjection
non injective
bijection

E 43

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni injective, ni surjective.
2. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective mais n'est pas surjective.
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective mais n'est pas injective.
4. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

1. Définition ensembliste d'une application
2. Opérations sur les applications
3. Image directe et image réciproque
4. Injection, surjection, bijection
5. Fonctions majorées

D 44 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et f une application d'un ensemble quelconque A dans E. On dit que l'application f est **minorée** (resp. **majorée**, **bornée**) si l'ensemble $f(A)$ est minoré (resp. majoré, borné) dans E.

R On retrouve

- f est **majorée** lorsqu'il existe $M \in E$ tel que

$$\forall x \in A, f(x) \preceq M.$$

- f est **minorée** lorsqu'il existe $m \in E$ tel que

$$\forall x \in A, m \preceq f(x).$$

D 45 Soit $(E,\preceq)$ un ensemble ordonné et f une application d'un ensemble quelconque A dans E. On dit que l'application f admet un minimum si l'image $f(A)$ a un plus petit élément ; cet élément est alors appelée **minimum** de f et se note $\min\limits_{x\in A} f(x)$ ou $\min\limits_{A} f$.
Le **maximum** de f se définit et se note d'une manière analogue.

D 46 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et f une application d'un ensemble quelconque A dans E. On dit que l'application f admet une borne supérieure si l'image $f(A)$ admet une borne supérieure dans E ; cette borne est alors appelée **borne supérieure** de f et se note $\sup_{x \in A} f(x)$ ou $\sup_A f$. La **borne inférieure** de f se définit et se note d'une manière analogue.

E 47 L'application $f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan x \end{array}$

- a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
- a pour majorant tout élément de $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$,
- a pour minimum 0,
- ne possède pas de maximum,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure $\frac{\pi}{2}$.

Remarquez que $f\left([0,+\infty[\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.