Chapter 33 Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

33.1 Construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment

33.2 Propriétés élémentaires des intégrales

Exercice 33.1

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 33.2

Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33.3

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n}{1+x} \end{array}.$$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
2. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

Exercice 33.4 *Une intégrale à paramètre*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Étudier les variations de f.
5. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 33.5

Pour $p, n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_p(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 33.6

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer

$$H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$$

33.3 Deux normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Exercice 33.7

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 33.8

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x.$$

33.4 Sommes de Riemann

Exercice 33.9

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants

1. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}$.
2. $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$.
4. $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=2n}^{3n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$.
5. $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$.
6. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n}$.

33.5 Intégration des fonctions continues

Exercice 33.10

Déterminer les ensembles de définition et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. $g(x) = \int_x^{x^2+x} e^{1/t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33.11

f est définie par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calculer $f'(x)$ de deux façons.

Exercice 33.12

On considère l'application f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations de f.
5. À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

33.6 Intégration par parties

Exercice 33.13

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n (on pourra intégrer par parties).

4. En déduire une expression factorisée de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. On écrira le résultat avec des factorielles.

5. Montrer que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)$ est constante.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

Exercice 33.14

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 33.15

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

2. Déduire I_n en fonction de n.

Exercice 33.16

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

Exercice 33.17

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$\big|u_n(x) - \cos(x)\big| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout réel x,

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

33.7 La formule du changement de variable

Exercice 33.18

À l'aide du changement de variable indiqué, calculer l'intégrale I dans les cas suivants

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\arccos x}\,\mathrm{d}x, \quad x = \cos u.$

2. $I = \displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{sh}\,x - 4\,\mathrm{ch}\,x}, \quad t = \mathrm{e}^{x}.$

3. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ainsi $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

4. $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln t)^3}, \quad x = \ln t.$

33.8 Intégrales généralisées

Exercice 33.19

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 33.20

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{t}}\,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t.$

33.9 Rappel des primitives usuelles

33.10 À la recherche de primitives

Exercice 33.21

On cherche à calculer $I = \int_1^2 \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5} + \frac{dx+e}{\left(x^2+2x+5\right)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 33.22

1. Trouver les coefficients a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\, 1, 2 \,\},\ \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

et en déduire

$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Trouver les coefficients a, b, c, d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\, -2 \,\},\ \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

et en déduire

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Trouver les coefficients a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\, 1 \,\},\ \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

et en déduire

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 33.23

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 33.24

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 33.25

Utiliser la règle de Bioche pour calculer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x(1 + 3\cos x)}\,\mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

33.11 Calcul approché d'intégrales

33.12 Intégration et relations de comparaison