# Chapter 18 Matrices inversibles

## 18.1 Matrices inversibles et opérations élémentaires

**Solution 18.1**
**Solution 18.2**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la réduction, on obtient

$$(E|I_3) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & * & * & * \\ 0 & 2 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Donc $E$ n'est pas inversible.

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & -2/3 & 1/6 \\ -3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

**Solution 18.3**

$A$ n'est pas inversible. $B$ est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $B$ est inversible, l'unique solution de $Bx = b$ est

$$x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

De même, puisque $B$ est inversible, le système $Bx = d$ est compatible pour tout $d \in \mathbb{R}^3$ (et a pour unique solution $x = B^{-1}d$).

Pour résoudre $Ax = b$, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauß. On a

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le système $Ax = b$ est compatible et admet une infinités de solutions, paramétrées par

$$x = \begin{pmatrix} -1+5t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus, il existe des vecteurs $d$ tel que le système $Ax = d$ soit incompatible. Par exemple, en changeant la troisième composante de $b$ afin de ne pas avoir à refaire trop de calcul pour la réduction, on peut choisir $d = (1, 1, 0)^T$. On a alors,

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Solution 18.4**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \qquad B \text{ n'est pas inversible} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $C$ on peut également remarquer qu'elle s'obtient à partir de la matrice $I_4$ par les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$ puis $L_3 \leftrightarrow L_4$ (ou $L_3 \leftrightarrow L_4$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4$), d'où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aurait pu également se servir de cette décomposition pour déterminer $C^{-1}$.

**Solution 18.5**

$$A \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3]{L2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

On peut alors renverser les opérations afin d'obtenir $A$ à partir de $I_3$

$$I_3 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} A$$

Or, effectuer une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice élémentaire. On en déduit donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution 18.6**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Puisque $A$ est inversible, on a

$$Ax = b_1 \iff x = A^{-1}b_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b_2 \iff x = A^{-1}b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b_3 \iff x = A^{-1}b_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie les solutions en calculant $\frac{1}{4}A\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,etc...

**Solution 18.7**

On peut appliquer l'alogorthme du pivot de Gauss à la matrice $(A|I_n)$. Il est ici plus rapide d'utiler un autre enchainnement d'opérations élémentaires. La succéssion d'opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ permet d'écrire

$$(A|I_n) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & -1 & 1 & & & (0) & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & 1 & & & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & & & 1 & 1 & & (0) & & -1 & 1 & \\ & & & & & 1 & & & & & -1 & 1 \end{array}\right)$$

On effectue ensuite l'enchainnement d'opération élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$,...puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$, et on obtient

$$(A|I_n) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & & & & & & 2 & -1 & & & & \\ & 1 & & & (0) & & -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ & & 1 & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 1 & & & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 1 & & & & & -1 & 1 \end{array}\right) = (I_n|B)$$

La matrice $A$ est donc inversible et son inverse est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solution 18.8**

**Solution 18.10**

**Solution 18.11**

**Solution 18.12**

**1.** On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**2.** Notons $D = PAP^{-1} = \operatorname{diag}(1, 2, -1, 3)$. Commençons par remarquer que

$$A = P^{-1}PAP^{-1}P = P^{-1}DP.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n)$ : « $A^n = P^{-1}D^nP$ ».

On a $P^{-1}D^0P = P^{-1}I_4P = P^{-1}P = I_4 = A^0$, d'où $R(0)$.

Précédement, nous avons montré $A = P^{-1}DP$, c'est-à-dire $R(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $R(n)$. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \\ &= \left(P^{-1}D^nP\right)\left(P^{-1}DP\right) && \because R(n) \text{ et } R(1) \\ &= P^{-1}D^n(PP^{-1})DP \\ &= P^{-1}D^nDP \\ &= P^{-1}D^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

**Conclusion**

Par récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.$$

Remarquons enfin que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^n = P^{-1}DP = \begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{(-1)^n-3^n}{2} & \frac{(-1)^n-3^n}{2} & 1-(-1)^n \\ 0 & \frac{3^n+2^n}{2} & \frac{3^n-2^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3^n-2^n}{2} & \frac{3^n+2^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution 18.13**

Voilà un bon exercice d'entrainnement!

## 18.2 Opérations élémentaires sur les colonnes

## 18.3 Critères d'inversibilité d'une matrice

**Solution 18.14**

La matrice $B$ est carrée, elle est donc inversible si, et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, Bx = 0 \implies x = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Bx = 0$. Alors

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0.$$

Or la matrice $AB$ est inversible, donc $x = 0$. Ce qui prouve que la matrice $B$ est inversible. Puisque $AB$ et $B^{-1}$ sont inversible, la matrice $(AB)(B^{-1}) = A$ est également inversible en tant que produit de matrice inversibles.

*Variante* Avec le déterminant, on obtient rapidement le résulat. Si $AB$ est inversible, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$, ce qui montre que $A$ et $B$ sont inversibles.

**Solution 18.15**

1. Considèrons la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et la matrice $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A = D + J$. Or

$$DX = \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad JX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X^T DX = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 \qquad \text{et} \qquad X^T JX = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^2.$$

Finalement

$$\begin{aligned} X^T AX = X^T(D + J)X = X^T DX + X^T JX \\ = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 + \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^2. \end{aligned}$$

2. La matrice $A$ est une matrice carrée. Pour montrer que $A$ est inversible, nous allons montrer

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \mathbf{0} \implies X = \mathbf{0}.$$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \mathbf{0}$. Alors, $X^T AX = X^T\mathbf{0} = 0$, et d'après le calcul précédent

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 + \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^2 = 0.$$

Or, les $a_i$ et $x_i^2$ sont des réels positifs. Un somme de termes positifs est nulle si, et seulement si chaque terme est nul, on a donc

$$a_1x_1^2 = 0 \qquad a_2x_2^2 = 0 \qquad \dots \qquad a_nx_n^2 = 0.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \neq 0$, donc

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

c'est-à-dire $X = \mathbf{0}$.

**Conclusion**

La matrice $A$ est inversible.

**Solution 18.16** *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*

Nous allons montrer la contraposée.

Puisque $A$ est une matrice carrée, $A$ est inversible si, et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, Ax = 0 \implies x = 0.$$

Supposons donc $A$ non inversible : il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $x \neq 0$ et $Ax = 0$, c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0.$$

Soit alors $i$ un indice quelconque tel que $x_i \neq 0$, nous pouvons pour cette valeur de l'indice écrire

$$a_{ii} = -\frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{n} \left( -\frac{x_j}{x_i} \right) a_{ij}.$$

puis

$$|a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{n} \left( -\frac{x_j}{x_i} \right) a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{n} \frac{|x_j|}{|x_j|} |a_{ij}|.$$

Considérons alors que l'indice $i$ choisi jusqu'ici tel que $x_i \neq 0$ est plus précisément celui vérifiant

$$|x_i| = \max \left\{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \right\}.$$

Nous avons alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{ i \}, \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq 1$$

puis

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq x}}^{n} |a_{ij}|.$$