Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Aperçu

1. Théorème de la borne supérieure
2. Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$
3. La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 3

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 3

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

R Il est faux que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ admet une «borne supérieure» dans $\mathbb{Q}$. Par exemple avec A=$\left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 2 \right\}$. L'ensemble des rationnels qui majore A est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$: il n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$.

E 4 Soit

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Alors A n'a pas de plus grand élément et $\sup(A) = 0$.

T 5 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

D 6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **la borne inférieure de A** et on la note $\inf A$.

T 7 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

T 8 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est minorée. Alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

T 9 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{-x \mid x \in A\}$. Alors B est minorée et $\inf B = -\sup A$.

D 10 Une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de A est inclus dans A, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in A.$$

T 11 Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles ouverts**, de la forme*

$$
\begin{aligned}
]a, +\infty[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x\ \} \\
]-\infty, b[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid x < b\ \} \\
]a, b[&=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\ \} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

T 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles fermés**, de la forme*

$$[a, +\infty[\; = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \, \}$$

$$]-\infty, b] = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \, \}$$

$$[a, b] = \;]-\infty, b] \cap [a, +\infty[\; = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \, \}$$

$$]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$$

*Les intervalles de la forme $[a, b]$ fermés et bornées sont aussi appelés **segments**.*

T 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les intervalles de la forme*

$$]a, b] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\ \}$$
$$[a, b[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\ \}$$

Ces intervalles ne sont ni ouverts, ni fermés.

T 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *L'ensemble vide : $\emptyset$.*

R

- Noter que si $b < a$, alors $]a, b[= [a, b] = \emptyset$. Si $a = b$, on a $[a, a] = \{ a \}$.
- Par ailleurs, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles ouverts et fermés.

C 12 *Toute intersection d'intervalles est un intervalle.*

N On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ appelé droite numérique achevée.

Notation à ne pas confondre avec l'adhérence de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$!

D 13 On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leq$ de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty.$$

D 14 On prolonge l'addition de $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x &= +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = (-\infty) + x &= -\infty \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty
\end{aligned}$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{et} \quad (-\infty) + (+\infty).$$

D 15 On prolonge la multiplication de $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{ 0 \}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{ 0 \}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nous posons également

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$0 \times (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \times 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0}$$

T 16 *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement $\pm\infty$.*

E 17

1. Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncide.
2. Tout partie de $\overline{\mathbb{R}}$ est majorée par $+\infty$.
3. Si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, elle est toutefois majorée dans $\overline{\mathbb{R}}$ par $+\infty$. On peut alors écrire
$$\sup(A) = +\infty.$$
4. L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Donc la borne supérieure de $\emptyset$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $-\infty$.

T 18 *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement $\pm\infty$.*

D 19 Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$, on définit les **intervalles**

$$[a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$
$$]a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a < x < b \right\}$$
$$[a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$$
$$]a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$$

D 20 Une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ est convexe lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

T 21 *Les parties convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.*