Relations binaires sur un ensemble

Aperçu

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

3. Relation d'équivalence

D 1 Soit E un ensemble. Définir une **relation binaire** $\mathcal{R}$ dans E, c'est se donner une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$. On écrit alors $x\mathcal{R}y$ pour exprimer que $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Dans ce cas, on dit que x **est en relation avec** y. L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est appelé le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Une relation binaire est donc une application $\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \{\,\mathrm{Vrai}, \mathrm{Faux}\,\} \\ (x, y) & \mapsto & x\mathcal{R}y \end{array}$. Dans la suite, on parlera simplement de **relation** dans un ensemble E.

D 2 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** si
$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$
- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si
$$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x;$$
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si
$$\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y;$$
- $\mathcal{R}$ est **transitive** si
$$\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

E 3

1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
3. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la relation en x et y
$$x\mathcal{R}y \iff y - x \in 5\mathbb{Z}$$
est la relation de congruence modulo 5. Cette relation est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.
4. Dans l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à trois éléments, la relation $\mathcal{R}$ définie par
$$A\mathcal{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$$
est réflexive et symétrique, non antisymétrique, non transitive.
5. Sur tout ensemble E, la relation d'égalité $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On peut d'ailleurs vérifier que c'est la seule.
6. Soient $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E et A une partie de E. En convenant que $x\mathcal{R}_A y$ signifie $x\mathcal{R}y$, nous définissons une relation $\mathcal{R}_A$ sur A qui est dite **induite** par $\mathcal{R}$. Nous constatons que si $\mathcal{R}$ est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), il en est de même pour $\mathcal{R}_A$. La réciproque n'est pas vraie.

D 4

- Une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- On dit que $(E, \preceq)$ est un **ensemble ordonné**.
- Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** si

$$x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

- On dit que $\preceq$ est un **ordre total** sur E si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, x \preceq y \ \text{ ou } \ y \preceq x.$$

- Si $\preceq$ n'est pas total, c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables, on dit que $\preceq$ est un **ordre partiel** sur E.

$\preceq$ se lit « précède » ou « inférieur ou égal à ».

E 5 Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ l'ordre usuel, $\leq$, est un ordre total.

E 6 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathcal{E}$. En effet, elle est réflexive (pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $A \subset A$) anti-symétrique (c'est le principe de double inclusion) et transitive ($A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$). C'est pour cette raison qu'on écrit, de façon abrégée,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

au lieu d'écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ et } \dots$$

E 7 Soit $E = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 < a \leq b \leq c \right\}$. On définit une relation d'ordre sur E par

$$(a,b,c) \preceq (a',b',c') \iff a \leq a' \text{ et } b \leq b' \text{ et } c \leq c'.$$

Autrement dit, E est un ensemble de boîtes et on écrit $(a,b,c) \preceq (a',b',c')$ si la boîte (a',b',c') peut contenir la boîte (a,b,c).

D 11 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si M, élément de E, est tel que $x \preceq M$, on dit que M est un **majorant** de x, ou encore qu'il **majore** x.
- Soit A un sous-ensemble de E. On dit que M, élément de E, est un **majorant** de A si M est un majorant de chaque élément de A, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, x \preceq M.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des majorants est non vide est dite **majorée**.

D 12 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si m, élément de E, est tel que $m \preceq x$, on dit que m est un **minorant** de x, ou encore qu'il **minore** x.
- Soit A un sous-ensemble de E. On dit que m, élément de E, est un **minorant** de A si m est un minorant de chaque élément de A, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, m \preceq x.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des minorants est non vide est dite **minorée**.

D 13 Une partie de E à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

D 14 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \preceq a.$$

  Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

- a est **le plus petit élément** de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, a \preceq x.$$

  Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément. Néanmoins, si il existe, c'est le **seul** élément de A ayant cette propriété ; car si on a aussi $x \preceq b$ pour tout $x \in A$, alors $a \preceq b$ et $b \preceq a$, d'où $b = a$.

D 15 Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit qu'un élément de E est la **borne inférieure** de A dans E si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E. Lorsque cette borne existe, on la note $\inf A$.
- On dit qu'un élément de E est la **borne supérieure** de A dans E si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E. Lorsque cette borne existe, on la note $\sup A$.

⚠ Contrairement au plus grand élément, la borne supérieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

N La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ se note (lorsqu'elle existe) $\sup(x, y)$ (resp. $\inf(x, y)$) ; notations analogues pour les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble à trois éléments, etc.

M Pour prouver que M est la borne supérieure de A, on procède en deux étapes :

1. on vérifie que M est un majorant de A (pour tout $x \in A$, $x \preceq M$);
2. pour tout majorant M' de A, on vérifie que $M \preceq M'$.

E 16

1. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'intervalle $[0,1]$
   - a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
   - a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
   - a pour plus petit élément 0,
   - a pour plus grand élément 1,
   - a pour borne inférieure 0,
   - a pour borne supérieure 1.
2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'intervalle $[0,1[$
   - a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
   - a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
   - a pour plus petit élément 0,
   - ne possède pas de plus grand élément,
   - a pour borne inférieure 0,
   - a pour borne supérieure 1.

E 17 Dans $E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre d'ordre «divise» :

$$a \Bigm| b \iff \exists q \in \mathbb{N}, aq = b.$$

L'ensemble $A = \{ 15, 21 \}$

- a pour minorant les entiers 1 et 3,
- a pour majorant 0, 105, 210 et les autres multiples de 105,
- n'a pas de plus petit élément,
- n'a pas de plus grand élément,
- a pour borne inférieure 3,
- a pour borne supérieure 105.

P 19

1. *Si une partie A de E admet un plus grand élément a, a est borne supérieure de A dans E.*
2. *Si une partie A de E admet une borne supérieure et si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le plus grand élément de A.*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

P 20 *Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E, non vide, admettant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure dans E. Alors $\inf(A) \preceq \sup(A)$.*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

P 21 *Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, A et B deux parties de E, admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E ; si $A \subset B$, on a $\sup(A) \preceq \sup(B)$ (resp. $\inf(B) \preceq \inf(A)$).*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

D 22 Une relation sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

E 23 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo α pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \text{ et } y \text{ sont congrus modulo } \alpha \text{ si et seulement si } \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha.$$

On note $x \equiv y[\alpha]$. Cette relation est une relation d'équivalence.

D 24 Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle **classe** d'équivalence de $x \in E$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \} .$$

- Il n'y a pas de notation au programme, on notera ici $\bar{x}$ ou $\mathrm{Classe}(x)$ la classe de x.
- La notation usuelle, mais hors programme, pour l'ensemble des classes d'équivalences est $E/\mathcal{R}$.

P 25 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Alors pour tout $x, y \in E$, on a*

$$(x\mathcal{R}y) \iff y \in \mathrm{Classe}(x) \iff x \in \mathrm{Classe}(y) \iff \mathrm{Classe(x)} = \mathrm{Classe}(y).$$

Ainsi, deux classes d'équivalence sont ou bien égales, ou bien d'intersection vide.

E 26 Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation «être congru modulo 5». Il y a cinq classes d'équivalence qui forment une partition de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \text{Classe}(0) = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots \} \\
\bar{1} &= \text{Classe}(1) = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \} \\
\bar{2} &= \text{Classe}(2) = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots \} \\
\bar{3} &= \text{Classe}(3) = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \} \\
\bar{4} &= \text{Classe}(4) = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \} .
\end{aligned}$$

On a par exemple $\text{Classe}(11) = \text{Classe}(6) = \text{Classe}(1)$.
On note l'ensemble des classe d'équivalence modulo 5

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ \text{Classe}(0), \text{Classe}(1), \text{Classe}(2), \text{Classe}(3), \text{Classe}(4) \}$$

T 27

1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. La famille des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment une partition de E.*
2. *Réciproquement, si une famille $\left(A_i\right)_{i\in I}$ constitue une partition de E, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par*

$$(x\mathcal{R}y) \iff \left(\exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i\right)$$

est une relation d'équivalence. Les classe d'équivalence pour cette relation sont les ensembles $\left(A_i\right)_{i\in I}$.