CHAPITRE 3

NOTIONS SUR LES FONCTIONS EN ANALYSE

Dans tout ce chapitre, on note $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan affine $\mathcal{P}$.

3.1 FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE À VALEURS RÉELLES

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

Définition 1

Une **fonction** ou **application** f est définie par la donnée de trois éléments : un **ensemble de départ** X, un **ensemble d'arrivée** Y et pour tout $x \in X$, la donnée d'une (unique) **image** notée $f(x) \in Y$. On note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$.

- Lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on parle de **fonction d'une variable réelle**.
- Lorsque $Y \subset \mathbb{R}$ (ou $Y \subset \mathbb{C}$), on parle de fonction numérique.
- Nous noterons parfois $\mathrm{dom}(f)$ l'ensemble de départ de f.

Définition 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est **continue en *a*** si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
- On dit que f est **dérivable en *a*** si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a)$.

Remarque

- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.
- On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.

§2 Recherche de l'ensemble de définition

Lorsque l'on rencontre une fonction numérique, la première précision à obtenir est, bien entendu, son ensemble de définition (parfois appelé domaine de définition). En effet, cet ensemble est rarement donné de façon explicite, mais généralement une fonction est «définie» par une, ou plusieurs, formules contenant des fonctions «de base» dont les ensembles de définition font partie du domaine public. Il convient donc, en présence d'une telle fonction, de rechercher sa généalogie et les tares de ses ancêtres.

Par exemple, $f : x \mapsto \sqrt{-\sqrt{-x}}$ n'est définie qu'en 0, car le symbole $\sqrt{\ }$ désigne, par convention, la racine carrée arithmétique d'un nombre réel positif ou nul. Tandis que $g : x \mapsto \sqrt[3]{-\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

La recherche de l'ensemble de définition d'une fonction f se réduit donc en général à la résolution d'inéquations correspondant aux ensembles de définition de ses constituants.

Test 3

Déterminer l'ensemble de définition des applications définies par

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$

2. $g(x) = \frac{1}{x^2-x}$

§3 Image d'une application

Définition 4

Soit $f : X \to Y$ une fonction et A une partie de X. L'**image de A par f**, notée $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A par f, c'est-à-dire

$$f(A) = \{\ f(x) \mid x \in A\ \}.$$

L'image de X tout entier est simplement appelée l'**image de f**. On dit que f est **à valeurs dans J** si toute valeur de f est élément de J, ou encore $f(X) \subset B$.

Remarque

On a l'équivalence

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y.$$

Exemples 5

Déterminer l'image des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$

2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$

3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}.$

4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$

5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$.

Théorème 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

§4 Composition de fonctions

Définition 7

Soit deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$. On suppose que pour tout $x \in X$ on a $f(x) \in Y'$, de sorte que l'expression $g(f(x))$ a un sens et on la note $(g \circ f)(x)$. La fonction ainsi définie

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

est la **composée** des fonctions g et f.

Test 8

On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 3 \end{array}.$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Remarques

- La condition pour que la composée $g \circ f$ ait un sens peut également s'écrire $\operatorname{Im} f \subset Y'$.
- Si $Y \subset Y'$, la condition $f(x) \in Y'$ est vérifiée pour tout $x \in X$. Il est souvent commode d'utiliser des diagrammes lorsque l'on manipule des composées. On note classiquement

$$X \xrightarrow{f} Y \subset Y' \xrightarrow{g} Z.$$

3.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On appelle **graphe** de f, et on note Γ_f, l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$. Ainsi

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}.$$

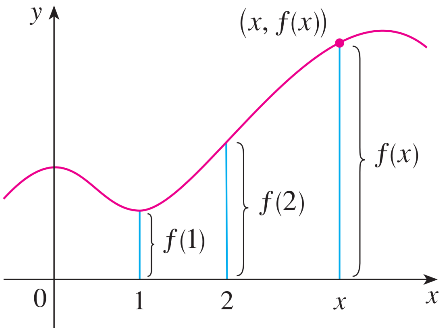
Définition 9

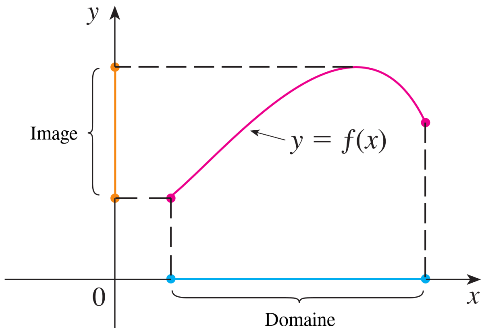
Un repère orthonormal $\mathfrak{R}$ du plan étant choisi, le graphe Γ_f de $f : X \to Y$ s'identifie à l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x décrivant X, appelé **courbe représentative** de f dans $\mathfrak{R}$. On emploiera abusivement le terme graphe de f pour désigner la courbe représentative de f dans $\mathfrak{R}$.

Remarque La courbe représentative de f dans un repère $\mathfrak{R} = (Oxy)$ est la courbe d'équation

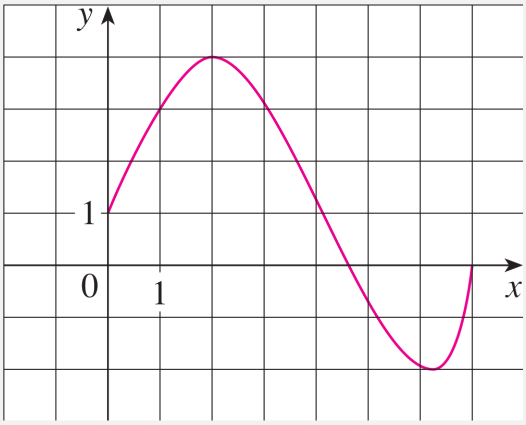
$$y = f(x)$$

c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $x \in \mathrm{Dom}(f)$ et $y = f(x)$.





Test 10 Le graphe d'une fonction f est représenté ci-dessous



1. Quel sont les valeurs de $f(1)$ et $f(5)$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que l'image de f.

§2 Transformations élémentaires

Proposition 11 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de f.*

1. *La courbe $y = f(x) + a$ est obtenue à partir de C par translation de vecteur $a\vec{e_2}$.*
2. *La courbe $y = f(x - a)$ est obtenue à partir de C par translation de vecteur $a\vec{e_1}$.*

En prenant $a = \pm c$ où $c > 0$. Les courbes d'équations $y = f(x) + c$, $y = f(x) - c$, $y = f(x - c)$, $y = f(x + c)$ s'obtiennent respectivement par un translation vers le haut, le bas, la droite, la gauche (voir 3.1).

Test 12 Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto f(x) + a$ et $h : x \mapsto f(x + a)$?

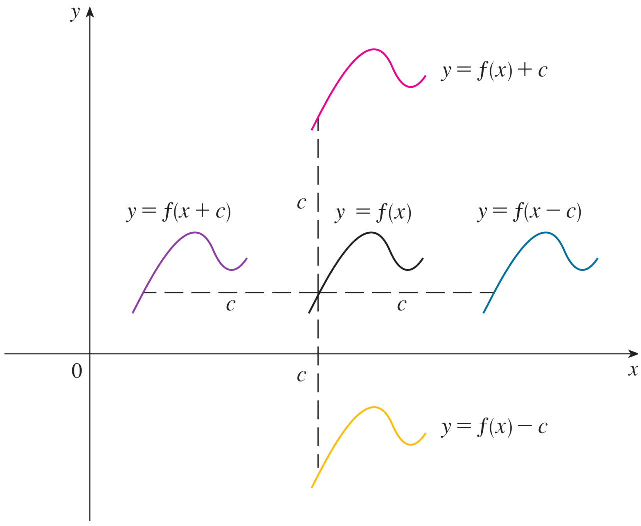


Figure 3.1: Translation d'une courbe ($c > 0$)

Proposition 13 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de f.*

1. *La courbe $y = af(x)$ est obtenue à partir de C par une affinité verticale de rapport a.*
2. *La courbe $y = f(ax)$ est obtenue à partir de C par une affinité horizontale de rapport $1/a$ ($a \neq 0$).*

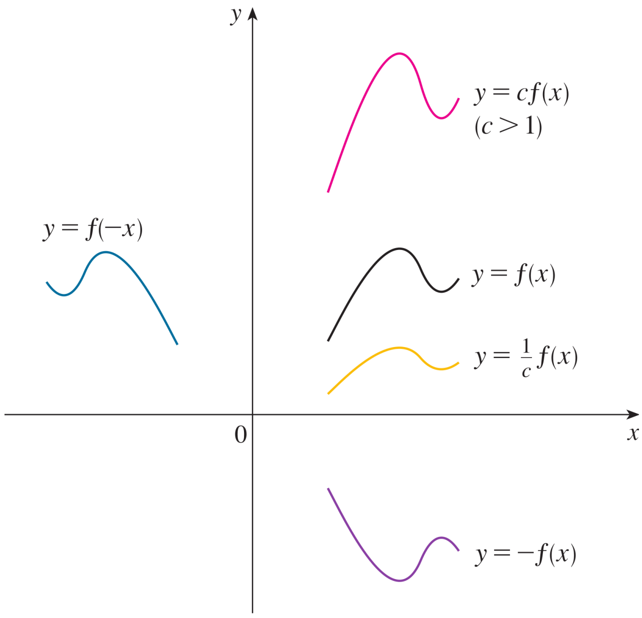


Figure 3.2: Transformation par affinité ($c > 1$)

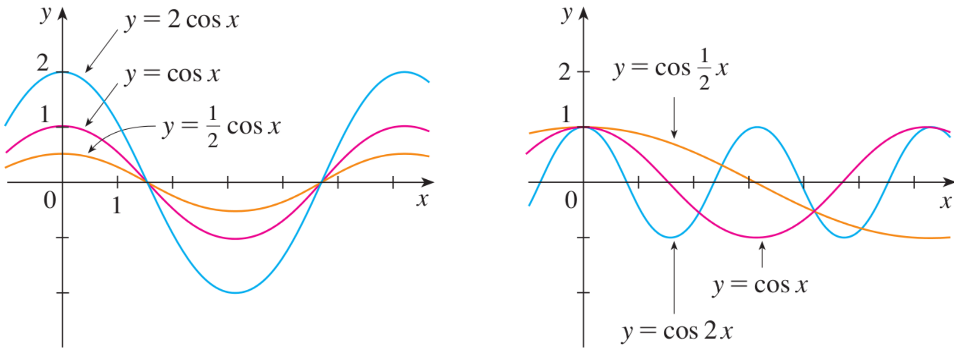


Figure 3.3: Transformation par affinité

Test 14 Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto af(x)$ et $h : x \mapsto f(ax)$?

Test 15 À partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, utiliser les transformations précédentes afin d'obtenir les courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x} - 2$
2. $y = \sqrt{x-2}$
3. $y = -\sqrt{x}$
4. $y = 2\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{-x}$

Test 16 Tracer les courbes d'équations

1. $y = \sin(2x)$.
2. $y = 1 - \sin(x)$.

3.3 Symétries du graphe

Dans un but d'économies d'énergie, nous allons chercher à réduire au maximum l'ensemble des valeurs où il est nécessaire d'étudier une fonction. Pour cela nous exploiterons les éventuelles propriétés algébriques de f.

§1 Parité, imparité

Définition 17 L'ensemble D est **symétrique par rapport à 0** si

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

Définition 18 Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0.

- f est **paire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = f(x).$$

- f est **impaire** si

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

Test 19

Déterminer la parité de chacune des fonctions définies par

1. $f(x) = x^5 + x$ | **2.** $g(x) = 1 - x^4$ | **3.** $h(x) = 2x - x^2$

Méthode

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0. Notons C la représentation graphique de f et C_+ et C_- les représentations respectives des restrictions de f aux intersections de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ avec D.

- Si f est paire, alors on obtient C en traçant C_+ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Si f est impaire, alors on obtient C en traçant C_+ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport au point O.

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction f à $D \cap \mathbb{R}_+$ ou $D \cap \mathbb{R}_-$.

Figure 3.4: Courbe représentative d'une fonction paire

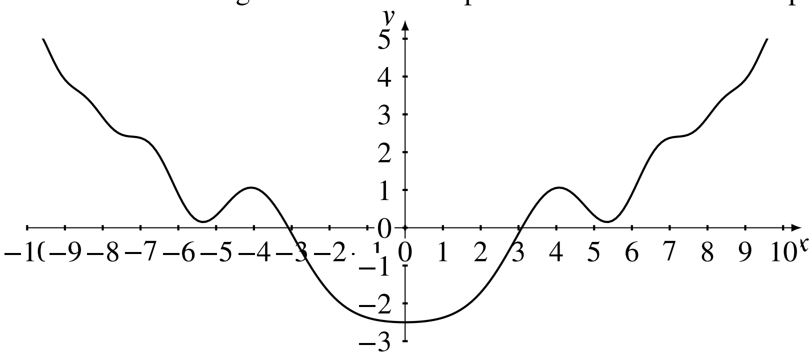
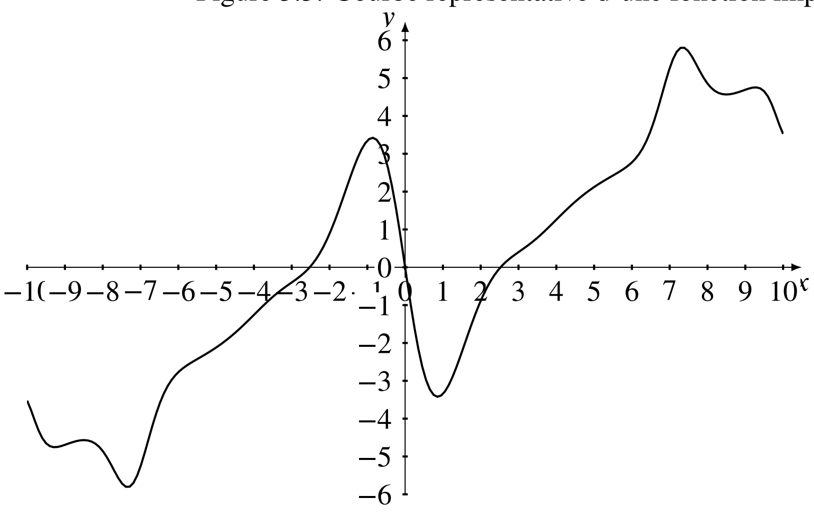


Figure 3.5: Courbe représentative d'une fonction impaire



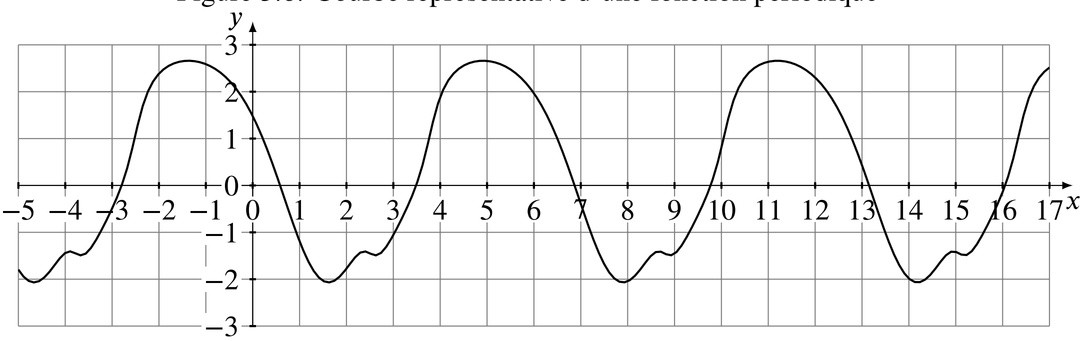
§2 Périodicité

Définition 20 Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- f est **périodique de période T** si
  - $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
  - $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.
- Si f est périodique de période T et si, pour tout $T' \in]0, T[$, f n'est pas périodique de période T', on dit que T est **la période principale** de f.

Méthode Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et soit I un intervalle semi-ouvert de longueur T. La connaissance de la restriction de f à $I \cap D$ détermine f sur tout son ensemble de définition. Cette remarque a une traduction géométrique simple. Pour cela notons C_f la représentation graphique de f et C la représentation graphique de la restriction de f à $I \cap D$. Alors C_f est la réunion de C et des transformées de C par les translations de vecteurs $nT\overrightarrow{e_1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les translations de mesure algébrique nT parallèlement à l'axe des abscisses.

Figure 3.6: Courbe représentative d'une fonction périodique



3.4 Injections, surjections, bijections

§1 Injections, surjections

Définition 21 Soit $f : X \to Y$ une application.

- On dit que f est **injective** quand

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- On dit que f est **surjective** quand

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si, et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent par f.

Remarque Fixons $y \in Y$ et considérons l'équation d'inconnue $x \in X$

$$f(x) = y. \tag{E}$$

- Si f est injective, l'équation (E) a au plus une solution (c'est-à-dire 0 ou 1 solution).
- Si f est injective, l'équation (E) a au moins une solution (c'est-à-dire 1, 2, beaucoup voir une infinité).

Test 22 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est-elle injective? Est-elle surjective?

Test 23 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est-elle injective? Est-elle surjective?

§2 Bijections et réciproques

Définition 24 Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **bijective** quand elle est injective et surjective. Autrement dit, pour tout $y \in Y$, l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in X$ admet exactement une solution.
Lorsque l'application $f : X \to Y$ bijective. En associant à tout élément $y \in Y$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée **application réciproque** de l'application f (ou simplement *réciproque* de f) et notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidement que f^{-1} est à son tour bijective et que sa réciproque est $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

Test 25 Supposons f bijective. Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, déterminer $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

Exemple 26 Soit $f : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\to [0, +\infty[$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Test 27 Soit $f : x \mapsto \sqrt{-1-x}$. Déterminer son ensemble de définition D. Montrer que f, définie comme fonction de D dans $\mathbb{R}_+$ est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

Remarque Si f est bijective, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (d'équation cartésienne $y = x$).

Proposition 28 *Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective. Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.*

Test 29 Pourquoi n'énnonce-t-on pas une propriété analogue pour les fonctions paires?

3.5 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

Définition 30 Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que
$$\forall x \in D, f(x) \leq M.$$
Dans ce cas, le réel M est appelé un **majorant** de f.
- Soit $a \in D$. On dit que f **admet un maximum en a** si
$$\forall x \in D, f(x) \leq f(a).$$
Le réel $f(a)$ est alors appelé le **maximum** de f et est noté $\max_D f$ ou $\max_{x\in D} f(x)$.

Définition 31 Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que
$$\forall x \in D, f(x) \leq m.$$
Dans ce cas, le réel m est appelé un **minorant** de f.
- Soit $a \in D$. On dit que f **admet un minimum en a** si
$$\forall x \in D, f(a) \leq f(x).$$
Le réel $f(a)$ est alors appelé le **minimum** de f et est noté $\max_D f$ ou $\max_{x\in D} f(x)$.

Définition 32 Une fonction f est **bornée** lorsque elle est majorée et minorée.

Proposition 33 *La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un réel μ tel que*
$$\forall x \in D, |f(x)| \leq \mu.$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

§2 Relation d'ordre

Définition 34

Si f et g sont deux applications de D dans $\mathbb{R}$. On introduit la relation d'ordre $\leq$ entre f et g :

$$f \leq g \iff \forall x \in D, f(x) \leq g(x).$$

On dit qu'une application est **positive** (resp. **négative**) lorsque $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$).

La relation $\leq$ est une relation d'ordre partielle dès que A contient plus de deux éléments.[1]

§3 Sens de variation

Définition 35

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **croissante** sur D si
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$
- f est **strictement croissante** sur D si
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$
- f est **décroissante** sur D si
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$
- f est **strictement décroissante** sur D si
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Exemple 36

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante, mais n'est pas strictement croissante.

Proposition 37

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et $f : D \to \mathbb{R}$. Supposons f strictement croissante, alors

1. *f est injective.*
2. $\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.
3. $\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$.

On a bien sûr une proposition similaire pour les fonctions strictement décroissantes. Ce lemme est particulièrement utile lors de la résolution d'inégalités.

[1] Évitez la notation $f < g$ qui signifie «$f \leq g$ et $f \neq g$».

Exemple 38

Soit $x, y \in]0, \pi/2[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin y} &\iff \sin x \geq \sin y && \text{car } \sin x \text{ et } \sin y \text{ sont } > 0 \\ & && \text{et } x \mapsto 1/x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^\star, \\ &\iff x \geq y && \text{car sin est strictement croissante sur }]0, \pi/2[. \end{aligned}$$

Nous disposerons plus tard d'un moyen technique pour étudier les variations d'une fonction suffisamment régulière (vous savez bien, le signe de la dérivée...).

Définition 39

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Étudier les **variations** de f sur D, c'est chercher à partager D en sous-ensembles tels que sur chacun d'eux f soit monotone.

Proposition 40

Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective.
Si f est monotone, alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

Théorème 41

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On suppose f strictement monotone et continue. Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, c'est-à-dire que l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & I & \to & f(I) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. De plus g^{-1} est continue.

3.6 Tangente et dérivées

§1 Tangente à une courbe

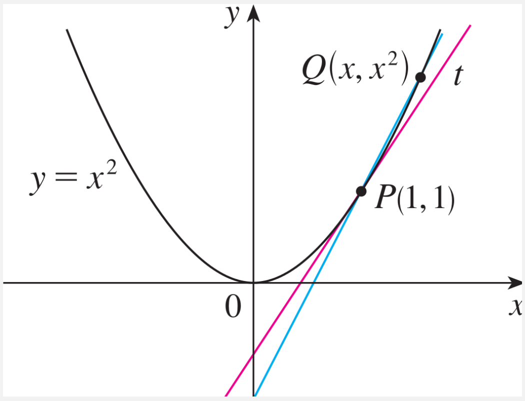
Tangente du latin *tangens*, de *tangere*, toucher.

Nous cherchons à déterminer s'il existe une droite qui «approche au mieux» une courbe.

Exemple 42

Déterminer un équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $P(1, 1)$.

Démonstration. Nous serons capable de trouver une équation de cette tangente T dès que l'on connaîtra sa pente m. Le problème est que nous ne connaissons qu'un seul point, P, sur T, alors qu'il nous en faut deux pour déterminer cette pente. Néanmoins, on peut calculer une approximation de m en choisissant un point $Q(x, x^2)$ de la parabole qui reste assez proche de P, et en calculant la pente m_{PQ} de la sécante (PQ).



x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

∎

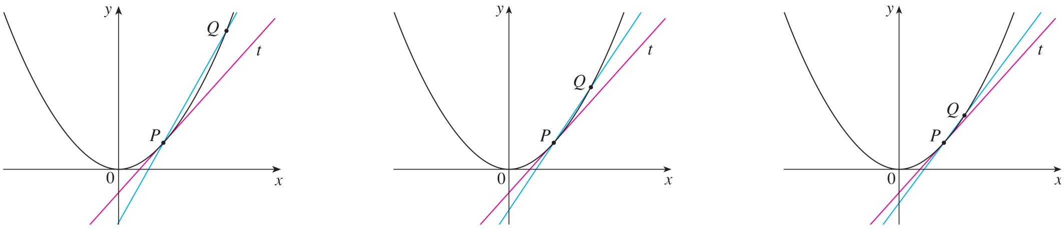


Figure 3.7: Q approche P par la droite

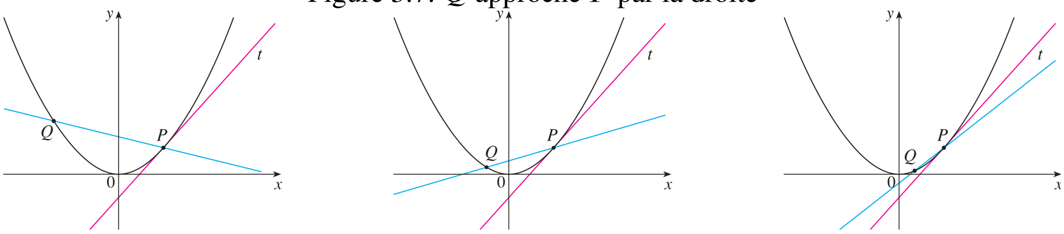


Figure 3.8: Q approche P par la gauche

Définition 43 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** en un point $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie ; la valeur de cette limite s'appelle **dérivée première** (ou simplement **dérivée**) de f **au point** a, et se note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

L'application $T : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ est le **taux d'accroissement de f en a**.

De manière équivalente, on peut considérer la limite

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarque Vu que nous n'avons pas défini la notion de limite, cette définition sert surtout , pour l'instant, à lever des formes indéterminées dans les limites.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} = \frac{1}{1+0} = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} = \mathrm{e}^0 = 1.$

Proposition 44 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application dérivable en $a \in I$, alors C_f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.*

§2 Opérations sur les dérivées

Définition 45 On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et dérivable en tout point de I.
La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I (au moins), est appelée **fonction dérivée** ou (par abus de langage) dérivée de f et se note f' ou $\mathrm{D}\, f$.

Théorème 46 *Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables au point a alors,*

1. *$f+g$ est dérivable au point a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *λf est dérivable au point a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
3. *fg est dérivable au point a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivables au point a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Exemple 47 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}\,(a+bx)$.

Théorème 48 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$. Supposons f dérivable en $a \in A$ et g dérivable en $f(a) \in B$, alors l'application composée*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable au point a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Exemple 49 Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Exemple 50 Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $F(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Exemple 51 Déterminer la dérivabilité et la dérivée des fonctions définies par

1. $f(x) = \sin(x^2)$
2. $g(x) = \sin^2(x)$

Exemple 52 Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction définie par $u(x) = \left(x^3-1\right)^{100}$.

§3 Variations d'une fonction dérivable

Proposition 53 *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *Si f' est positive alors f est croissante.*
- *Si f' est positive et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.*
- *Si f' est négative alors f est décroissante.*
- *Si f' est négative et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.*

Il est essentiel que l'ensemble de départ soit un intervalle. En effet, l'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ mais elle n'est pas croissante puisque $f(-1) > f(1)$.
De même, lorsque la dérivée de f est nulle, alors f est constante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Méthode **Image directe lues sur un tableau de variation**
Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application *dérivable*[2] Alors

1. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante et $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
2. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante et $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

On a un résultat analogue si f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert (éventuellement avec des bornes infinie) en utilisant des limites si nécéssaire. Par exemple si f est dérivable sur $]a,b]$ et croissante alors $f(]a,b]) = \left] \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x), f(b) \right]$.

[2]Nous améliorerons ce résultat en parlant des fonctions continues.

§4 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 54 *Soient f une application continue et strictement monotone d'un* intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Remarque Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

§5 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 55 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est dérivable sur I, on appelle **dérivée seconde** de f, et on note f'', $f^{(2)}$ ou $\mathrm{D}^2 f$ la dérivée de f'. On dit alors que f est **deux fois dérivable** sur I.
- On définit de la même manière par récurrence la **dérivée n-ième** de f : si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on appelle dérivée n-ième de f l'application notée $f^{(n)}$ ou $\mathrm{D}^n f$, définie par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. On dit alors que f est **n fois dérivable** sur I.
- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.7 Convexité

Définition 56 Soient f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **convexe sur I** lorsque sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses cordes.
Lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes, on dit que f est **concave sur I**.

Proposition 57 *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La fonction f est convexe;*
2. *La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes;*
3. *La fonction f' est croissante sur I;*
4. *La fonction f'' est positive sur I.*

Définition 58

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Proposition 59

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si, et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

3.8 BRANCHES INFINIES

Les branches infinies surviennent lorsque $x \to \infty$ ou $f(x) \to \infty$.

§1 Asymptotes verticales et horizontales

Proposition 60

1. *Si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = a$ est* ***asymptote verticale*** *à la courbe C_f en a.*
2. *Si $f(x) \to q \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to \pm\infty$, alors la droite d'équation $y = q$ est* ***asymptote horizontale*** *à la courbe C_f en $\pm\infty$.*

§2 Asymptotes obliques

Définition 61

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. On dit que $\mathcal{A}$ est **asymptote** à la courbe de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} ax + bf(x) + c = 0$$

On a une définition analogue lorsque $x \to -\infty$.

Cela signifie que la distance entre la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $ax + by + c = 0$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Proposition 62

On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = p \in \mathbb{R}^\star \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - px = q \in \mathbb{R}.$$

Alors la droite d'équation $y = px + q$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

On utilise la même méthode lorsque $x \to -\infty$.

Remarque

Supposons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$. Lorsque $x \to +\infty$,

1. Si $\frac{f(x)}{x} \to \pm\infty$, f admet une **branche parabolique d'axe (Oy)** en $+\infty$.

2. Si $\frac{f(x)}{x} \to 0$, on dit que f admet **branche parabolique d'axe (Ox)** en $+\infty$.

Exemple 63

Étudier les branches infinies de la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ par

$$f : x \mapsto \frac{3x^2+1}{x+2}.$$

Démonstration. Puisque $\lim_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$, la courbe de f admet la droite d'équation $x = -2$ pour asymptote verticale.
De plus, pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{3+1/x^2}{1+2/x}$ d'où $\lim_{x\to\pm\infty} = 3$. La courbe de f admet donc une direction asymptotique en $\pm\infty$ d'équation $y = 3x$. Étudions l'existence d'une asymptote : $f(x) - 3x = \frac{-6x+1}{x+2} = \frac{-6+1/x}{1+2/x}$, et ainsi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 3x = -6$, et la courbe de f admet en $\pm\infty$ une asymptote d'équation $y = 3x - 6$.
Puisque $f(x) - 3x + 6 = \frac{13}{x+2}$, la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$. ∎

3.9 Étude pratique des fonctions

§1 Marche à suivre

1. S'il n'est pas donné de manière explicite, on détermine l'ensemble de définition A, c'est-à-dire la partie A de l'ensemble $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie.

2. On étudie la périodicité de la fonction f. Si f est T-périodique, on peut réduire l'ensemble d'étude à son intersection A' avec l'intervalle $[-T/2, T/2]$ (ou $[0, T]$ ou un autre segment d'amplitude T). Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par des translations parallèlement à (Ox).

3. Supposons que A soit symétrique par rapport à l'origine. On étudie la parité de la fonction. Si f est paire, le graphe de f est symétrique par rapport à (Oy) ; si f est impaire, le graphe de f est symétrique par rapport à O. Dans les deux cas, on peut réduire l'ensemble d'étude à $A' = A \cap [0, +\infty[$. Le graphe de f se déduit de celui de la restriction de f à A' par une symétrie.

4. On détermine les valeurs de f, ou leurs limites, aux extrémités des intervalles contenus dans l'ensemble d'étude.

5. Si possible (et rapide), on détermine les points d'intersections avec l'axe des abscisses (résolution de $f(x) = 0$).

6. On étudie la dérivabilité de f, et on calcule la dériée f'. On détermine les valeurs de x qui annulent f', et on cherche le signe de la dérivée. On en déduit les maximums et les minimums de f, ainsi que le sens de variation.

7. On dresse un **tableau de variation** en trois lignes.

- La première ligne comporte les valeurs remarquables de la variable x (bornes des intervalles où f est définie, valeurs annulant f', etc...).

- La deuxième ligne comporte le signe de $f'(x)$ et les valeurs remarquables de la dérivée.
- La troisième ligne comporte les valeurs remarquables de $y = f(x)$, ainsi que des flèches $\nearrow$ et $\searrow$ suivant que f est croissante ou décroissante. Un double trait vertical indique une discontinuité de y. On porte alors à gauche et à droite de ce double trait les limites à guache et à droite de f (éventuellement infinies).
- On calcule souvent la dérivée seconde, pour déterminer la concavité et les points d'inflexion.

8. *Étude des branches infinies.* Soit a un nombre réel n'appartenant pas à A. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) au graphe de f.

De même, si $f(x)$ tend vers une limite finie q lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = q$ est asymptote au graphe de f. On dit aussi que le graphe de f admet une asymptote horizontale.

Considérons enfin le cas où x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, et où $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On forme alors le rapport $f(x)/x$. Si ce rapport tend vers une limite finie non nulle p, la courbe de f présente une branche infinie dans la direction de pente p. Si $g(x) = f(x) - px$ tend vers une limite finie q, on dit que le graphe de f admet pour asymptote oblique la droite affine d'équation

$$y = px + q.$$

9. On construit le graphe de f à l'aide des résultats trouvés dans les études précédentes. On détermine en outre autant de points qu'il est nécessaire pour faire un tracé précis. On calculera en particulier les coordonnées des points d'intersection du graphe avec les axes de coordonnées.

Quelques permutations dans l'ordre sont possibles.

§2 Exemples d'études

Exemple 64 Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

Exemple 65 Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

Exemple 66 Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = x\,(1 + e^{-x})\,.$$

Démonstration. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et il n'y a aucune réduction visible du domaine d'étude.

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}.$$

L'étude directe du signe de f' est ici difficile, on choisit donc de dériver une seconde fois. f' est clairement dérivable (on dit que f est deux fois dérivable) et on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}.$$

- Si $x \geq 2$, $f''(x) \geq 0$ donc f' est croissante sur $[2, +\infty[$.
- Si $x \leq 2$, $f''(x) \leq 0$ donc f' est décroissante sur $]-\infty, 2]$.

Or $f'(2) = 1 - e^{-2} \geq 0$ donc f' est toujours positive ; ainsi f est croissante. Notons au passage que f'' s'annule en 2 en changeant de signe, ce qui montre que f a un point d'inflexion au point d'abscisse 2 (c'est-à-dire que la courbe «traverse» sa tangente).

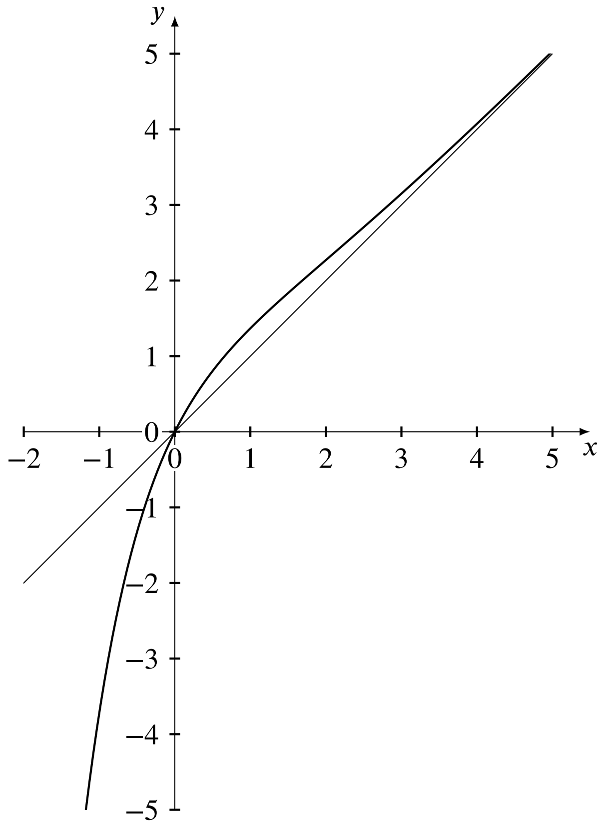
Les limites ne posent aucun problème particulier,

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Étudions à présent les branches infinies.

- En $-\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + e^{-x} = +\infty.$$
La courbe de f possède donc une branche parabolique d'axe (Oy) en $-\infty$.
- En $+\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1.$$
$$\text{et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - 1 \times x = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0+.$$
La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote à C_f en $+\infty$. De plus, C_f est au dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Remarquons également que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, la tangente à C_f en l'origine a pour équation $y = 2x$. On a aussi $f(2) \approx 2.27$ et $f'(2) \approx 0.86$.



∎

Exemple 67 Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}.$$

Démonstration. f est définie en tout point x de $\mathbb{R}$ tel que $\sin^2 x \neq 1$, *i.e.* $\sin x \neq \pm 1$. L'ensemble de définition de f est donc

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soit $x \in D$, alors $x \pm 2\pi \in D$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 - \sin^2(x + 2\pi)}. = \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} = f(x);$$

donc 2π est une période de f. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π. De plus, g est une fonction impaire car pour tout $x \in D$,

$$-x \in D \text{ et } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 - \sin^2(-x)} = \frac{-\sin x}{1 - \sin^2(x)} = -f(x),$$

on a intérêt à choisir l'intervalle $[-\pi, \pi]$, de façon à n'étudier f que sur l'intervalle $[0, \pi]$. Enfin, pour $x \in [0, \pi]$,

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1 - \sin^2(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1 - \sin^2(x)} = f(x),$$

il en résulte que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est élément de symétrie de la représentation de f. On peut également remarquer que f est π-antipériodique, mais cela n'apporte pas de réduction supplémentaire.

En résumé : on étudie f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, puis on effectue une symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$, ensuite on effectue une symétrie par rapport à l'origine et enfin on effectue les translations parallèles à l'axe des abscisses de mesure algébrique $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

La fonction $g : u \mapsto \frac{u}{1-u^2}$ est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$\forall u \in [0, 1[, g'(u) = \frac{1 + u^2}{(1 - u^2)^2} > 0;$$

donc g est croissante sur $[0, 1[$. De plus, sur $[0, \pi/2[$, la fonction sin est croissante, par conséquent $f = g \circ \sin$ est croissante sur $[0, \pi/2[$.

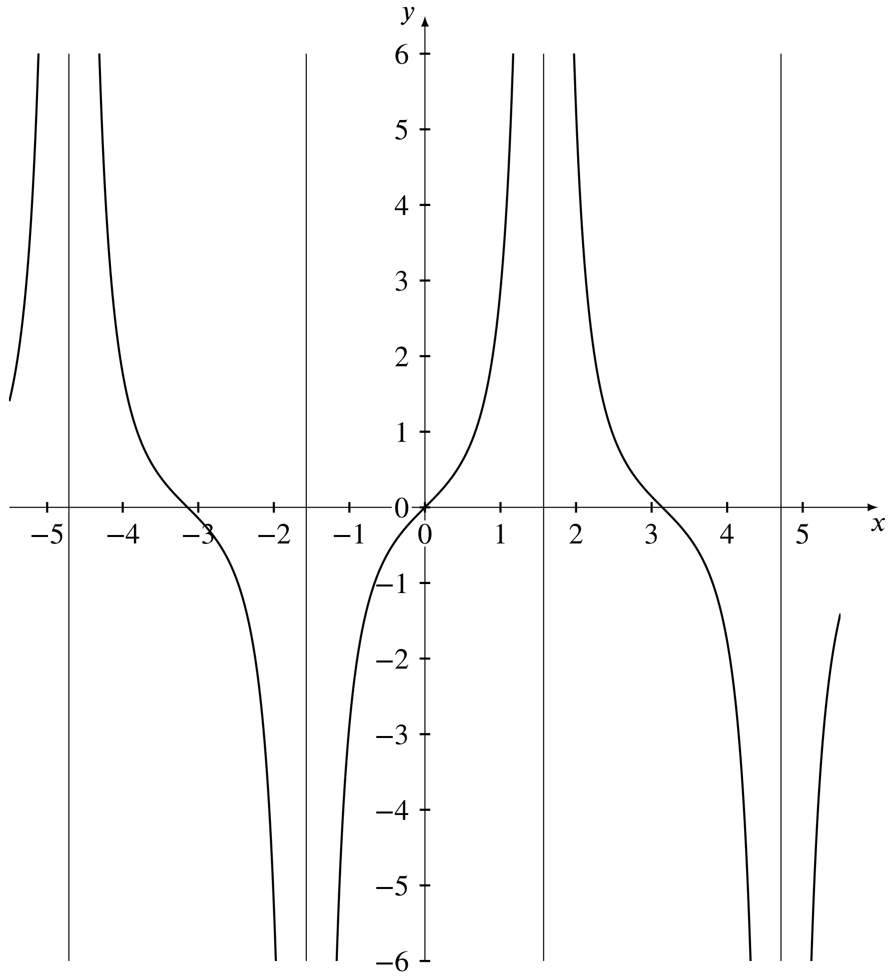
On a $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \sin x = 1-$ et $\lim\limits_{\substack{u \to 1 \\ <}} g(u) = +\infty$, donc

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = \pi/2$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f.

x	0	$\pi/2$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Enfin, remarquons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$; la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, ici l'origine, est la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).


y
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x

∎

CHAPITRE

3

CALCUL INTÉGRAL

3.10 INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES

Définition 68 On dit qu'une fonction f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si

- elle est définie sur I ;
- dérivable en tout point de I ;
- et si la fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$ est continue en tout point de I.

§1 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Définition 69 Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si $F' = f$.

Proposition 70 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F dans I, l'ensemble des primitives de f dans I est identique à l'ensemble des fonctions $F + k$, où k est une constante. En particulier, pour $x_0 \in I$, il existe alors une unique primitive de f s'annulant en x_0 qui est $F - F(x_0)$.*

Théorème 71 **Théorème de Newton-Leibniz alias T.F.C.D.I.**
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue** sur un intervalle I et $a \in I$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} F : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Proposition 72

Calcul des intégrales
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

1. *f admet des primitives sur I.*
2. *Si h est une primitive de f. Alors*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = [h(t)]_a^b.$$
3. *Il existe une et une seule primitive g de f sur I prenant la valeur y_0 au point $x_0 \in I$, elle est donnée par*
$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 73

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$,
$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'.$$

Il est faux de dire que si f est dérivable alors
$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

§2 Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème 74

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Corollaire 75

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 76

Calculer $\int_{-1}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Ici, on utilise les fonctions $u : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto x$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 0]$. On obtient
$$\int_{-1}^0 xe^x\,\mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x\,\mathrm{d}x = e^{-1} - \left[e^x\right]_{-1}^0 = 2e^{-1} - 1.$$
∎

§3 Substitution

Toute fonction de la forme $\left(g' \circ f\right) \times f'$ admet $g \circ f$ pour primitive. Mentionnons quelques cas très courants:

Si u est une fonction dérivable sur I,

- $u' e^u$ admet e^u pour primitive sur I.
- $u' \cos u$ admet $\sin u$ pour primitive sur I.
- $u' \sin u$ admet $-\cos u$ pour primitive sur I.
- $\dfrac{u'}{1+u^2}$ admet $\arctan u$ pour primitive sur I.
- Si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u}$ admet $\ln|u|$ pour primitive sur I.
- Si u est à images dans $\mathbb{R}_+^\star$ sur I et $\alpha \neq -1$, $u' u^\alpha$ admet $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour primitive sur I.
- etc...

Exemple 77

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{5-3\cos x}$ admet $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(5-3\cos x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2+1}$ admet $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$.

Méthode

Le programme exige que vous sachiez primitiver les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique et l'on fait apparaitre la dérivée de l'arctangente.

Exemple 78

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

§4 Changement de variable dans une intégrale

Théorème 79

Formule de changement de variable

Soit u une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ dans un segment $I = [a,b]$ et f une fonction continue dans l'intervalle $J = u(I)$. On a alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

Il est impératif de noter qu'en général $u([a,b])$ est différent de $[u(a), u(b)]$.

Remarque

La formule se comprend d'elle même : on remplace y par son expression en fonction x à la fois dans $f(y)$ et dans $\mathrm{d}y$.

Exemple 80

Calculer $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.
On utilise le changement de variable $t = x^2 = u(x)$. La fonction $u : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, \sqrt{3}]$ et d'image $[1, 3]$.
On note $t = x^2$ et ainsi $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, puis

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|x|}{x^2+1} \times 2x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2(x^2+1-1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,[x - \arctan(x)]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2.\end{aligned}$$

Exemple 81

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.
On peut sentir le «bon» changement de variable $y = \sin t = u(t)$. L'application u étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on a $\mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t$ et

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right) \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 y^2(1-y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

CHAPITRE

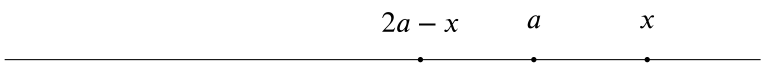
3

COMPLÉMENTS

3.11 D'AUTRES SYMÉTRIES DU GRAPHE

§1 Généralisation de la notion de parité

Lemme 82 *Soit $a \in \mathbb{R}$. Sur la droite réelle, le symétrique du point $x \in \mathbb{R}$ par rapport à a est le point $2a - x$.*



Méthode Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

La représentation graphique de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si

$$\forall x \in D, 2a - x \in D \text{ et } f(2a - x) = f(x).$$

La représentation graphique de f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) si et seulement si

$$\forall x \in D, 2a - x \in D \text{ et } f(2a - x) = 2b - f(x).$$

Ces propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction f à $D \cap [a, +\infty[$ ou $D \cap] - \infty, a]$.

Exemple 83 Trouver un axe de symétrie de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) = x^2 + 4x - 4.$$

Démonstration. Écrivons le trinôme sous forme canonique. Pour tout réel x, $f(x) = (x+2)^2 - 8$. Ainsi $f(-4 - x) = f(x)$. La droite d'équation $x = -2$ est donc un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

(La courbe représentative de f est bien sûr une parabole dont le sommet $S(-2, -8)$ appartient à l'axe de symétrie.) ∎

§2 Généralisation de la notion de périodicité

Méthode Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $T > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
- $\forall x \in D, f(x+T) = f(x) + \alpha$.

La représentation graphique de f est donc invariante par la translation de vecteur $T\vec{e_1} + \alpha\vec{e_2}$. On dit alors que f admet une période oblique. La représentation graphique de f s'obtient donc à partir de celle de sa restriction à un intervalle de longueur T, à l'aide des translations de vecteurs $n(T\vec{e_1} + \alpha\vec{e_2})$, $n \in \mathbb{Z}$.

Méthode Soit un fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que f est **T-antipériodique** si

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
- $\forall x \in D, f(x+T) = -f(x)$.

Une fonction T-antipériodique est nécessairement $2T$-périodique. Une fonction T-antipériodique est donc plus symétrique qu'une fonction $2T$-périodique.

Pour tracer la courbe sur un intervalle de longueur $2T$, il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T, et d'effectuer la symétrie d'axe (Ox) composée avec la translation de vecteur $T\vec{e_1}$ (c'est une symétrie glissée). On est ensuite ramené au cas d'une fonction $2T$-périodique.

3.12 Autres opérations sur les fonctions

§1 Valeur absolue d'une fonction

Définition 84 Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On définit la **valeur absolue de f** par

$$|f| : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}.$$

De cette définition, il résulte immédiatement que

$$\begin{aligned} |f| = 0 &\iff f = 0 \\ |fg| &= |f||g| \\ |f+g| &\leq |f| + |g|. \end{aligned}$$

§2 Enveloppe supérieure et inférieure

Définition 85

Soit f et g deux éléments de $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$.

- On appelle **enveloppe supérieure de f et g** la fonction notée $\sup(f,g)$ donnée par

$$\sup(f,g): \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup(f(x),g(x)) = \max(f(x),g(x)) \end{array}.$$

- On appelle **enveloppe inférieure de f et g** la fonction notée $\inf(f,g)$ donnée par

$$\inf(f,g): \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf(f(x),g(x)) = \min(f(x),g(x)) \end{array}.$$

⚠ L'écriture $\max(f,g)$ n'est pas synonyme de $\sup(f,g)$; il est bon de l'éviter. En effet, elle n'a de sens que si f et g sont comparables.

Proposition 86

Soit f et g deux éléments de $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$, on a

1. $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.
2. $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.
3. $|f| = \sup(-f,f)$.

Il faut bien distinguer $\sup(f,g)$ qui est une application de $\sup\limits_A f = \sup\limits_{x\in A} f(x)$ qui est un réel!