Chapter 4 Notions sur les fonctions en analyse

4.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Solution 4.9

Solutions à justifier!

1. Dom $f = \mathbb{R}$.
2. Dom $f =]-\infty, 1]$.
3. Dom $f = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.
4. Dom $f = \emptyset$.
5. Dom $f = [0, 1[$.
6. Dom $f = \{ -1 \} \cup \mathbb{R}_+$.
7. Dom $f = \{ -1, 1 \}$.
8. Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$.
9. Dom $f = [1, +\infty[$.
10. Dom $f = \mathbb{R}^\star$.
11. Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{ -2, -1, 1, 2 \}$.

Solution 4.10

Comme toute fonction rationnelle, g est définie sur $\mathbb{R}$ privé des pôles de cette fonction. Or $x^2 - 3x - 4 = (x-1)(x+4)$, d'où l'on déduit que g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -4, 1 \}$.

La fonction h apparaît comme la composée de la fonction ln et de la fonction g précédente. On a donc

$$\begin{aligned} h(x) \text{ est défini } &\iff g(x) \text{ est défini et } g(x) \in \mathrm{Dom}(\ln) \\ &\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{ -4, 1 \} \text{ et } g(x) > 0. \end{aligned}$$

Cherchons donc le signe de $g(x)$. On a $g(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+4)}$, d'où

x	$-\infty$		-4		-2		-1		$+1$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Et par conséquent

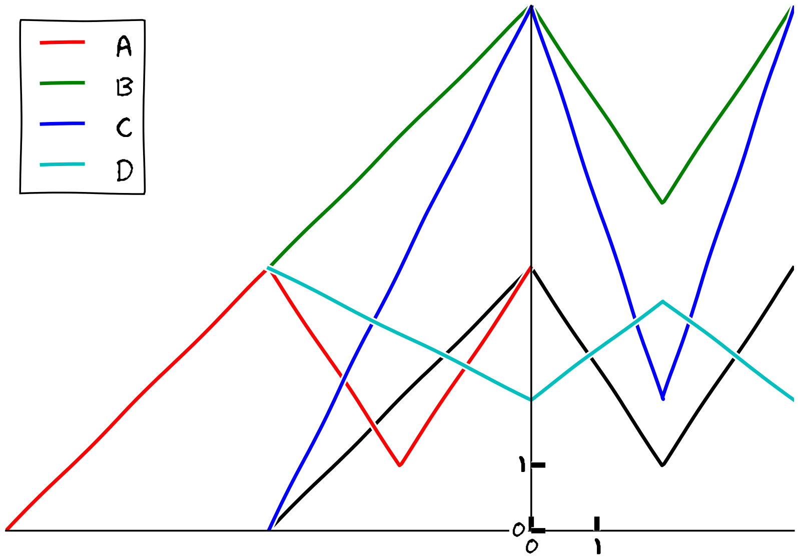
$$\mathrm{Dom}(h) =]-1, -\infty, -4[\cup]-2, -1[\cup]1, +\infty[.$$

4.2 Courbe représentative d'une fonction

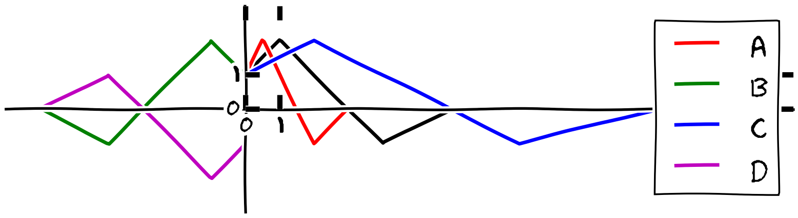
Solution 4.12

a3, b4, c2, d1, e5.

Solution 4.13



Solution 4.14



Solution 4.15

Solution 4.16

4.3 Symétries du graphe

Solution 4.20

Solutions à justifier!

1. Ni paire ni impaire.
2. Paire et non impaire.
3. Impaire et non paire.
4. Paire et impaire.
5. Ni paire ni impaire.
6. Ni paire ni impaire.
7. Ni paire ni impaire.
8. Paire et non impaire.
9. Impaire et non paire.
10. Ni paire ni impaire.
11. Impaire et non paire.
12. Impaire et non paire.
13. Ni paire ni impaire.
14. Impaire et non paire.

Solution 4.21

Solution 4.22

Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par prendre des notations. Soit A, B, C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

Supposons f impaire et g impaire. Soit $x \in A$, alors $-x \in A$ car f est impaire, donc définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0. Deplus,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f(x)).$$

L'application $g \circ f$ est donc impaire.

De manière analogue, on montre que

- si f est paire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire;
- si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire;
- si f est paire et g est impaire, alors $g \circ f$ est paire.

Solution 4.23

Démontrer que l'on a effectivement trouver la période principale (la plus petite période) est bien difficile. Par contre, il est facile de vérifier (à faire donc!) que les périodes suivantes conviennent.

1. $2\pi/3$.
2. $2\pi/3$.
3. 2.
4. 4π.
5. π.
6. $\pi/2$.
7. $\pi/2$.
8. 96π.
9. π.

Solution 4.24

Solution 4.25

4.4 Injections, surjections, bijections

Solution 4.26

Soit $y \in]-\infty,-2[$ et $x \in]3,+\infty[$.

$$y = f(x) \iff y = \frac{2x}{3-x} \iff 3y - yx = 2x \iff 3y = 2x + yx \iff x = \frac{3y}{2+y}$$

De plus, on vérifie que si $y < -2$, on a bien

$$\frac{3y}{2+y} = 3\frac{y+2-2}{2+y} = 3 - \frac{6}{2+y} > 3.$$

On a donc

$$\forall y \in]-\infty,-2[, \exists ! x \in]3,+\infty[, y = f(x)$$

ainsi, f est bijective. De plus,

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl}]-\infty,-2[& \to &]3,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{3x}{2+x} \end{array}.$$

Solution 4.27

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2yX - 1$ a pour discriminant $4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0$ et pour racines

$$y - \sqrt{y^2+1} \text{ et } y + \sqrt{y^2+1}.$$

Remarquons que la première est < 0. Finalement,

$$y = f(x) \iff \cancel{e^x = y - \sqrt{y^2+1}} \text{ ou } e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Conclusion

La fonction f est bijective et pour $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Autrement dit

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

Remarquez que $f = \mathrm{sh}$ et que sa réciproque f^{-1} est notée argsh.

Solution 4.28

1. On peut étudier la fonction f en remarquant que f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions continues. De plus, f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x < 0, f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

et

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on pourrait vérifier qu'elle est aussi dérivable en 0, mais c'est inutile). La fonction f est donc injective. On a de plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$$

Puisque f est continue, l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ est un intervalle et puisque f est strictement croissante, on en déduit

$$f(\mathbb{R}) =]-1, 1[\,.$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

marque Cette question peut en fait se déduire de la suivante. Néanmoins, il est alors plus difficile de deviner l'intervalle image $]-1, 1[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$.

$$y = g(x) \iff y = \frac{x}{1+|x|} \iff (1+|x|)y = x$$

On constate que dans la dernière relation, que x et y on nécessairement le même signe. Si $y \in [0, 1[$,

$$y = g(x) \iff (1+x)y = x \iff y = x(1-y) \iff x = \frac{y}{1-y}.$$

Et si $y \in]-1, 0[$,

$$y = g(x) \iff (1-x)y = x \iff y = x(1+y) \iff x = \frac{y}{1+y}.$$

Finalement,

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y} & \text{si } y \in [0, 1[, \\ \frac{y}{1+y} & \text{si } y \in]-1, 0]. \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$g^{-1} : \begin{array}{rcl}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-|x|} \end{array}.$$

Solution 4.29

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = y \iff 2x + 1 = y \iff x = \frac{y-1}{2}.$$

Conclusion

L'application f est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y-1}{2}$. Ce qui s'écrit également (le y est muet)

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{2} \end{array}.$$

Solution 4.30

Soit $x \in [0, 2]$ et $y \in [0, 2]$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt{4-x^2} \\ &\iff y^2 = 4 - x^2 && \because y \geq 0 \\ &\iff x^2 = 4 - y^2 \\ &\iff x = \sqrt{4-y^2} && \because x \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion

L'application f est bijective et

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array}.$$

Solution 4.31

Soit $x \in [-4,0]$ et $y \in [0,4]$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt{16-x^2} \\ &\iff y^2 = 16-x^2 && \because y \geq 0 \\ &\iff x^2 = 16-y^2 \\ &\iff x = -\sqrt{16-y^2} && \because x \leq 0. \end{aligned}$$

Conclusion

L'application f est bijective et

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} [0,4] & \to & [-4,0] \\ x & \mapsto & -\sqrt{16-x^2} \end{array}.$$

Solution 4.33

Solution 4.34

1. Clairement $a = 2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = y \iff \frac{3x-1}{x-2} = y \iff 3x - 1 = xy - 2y$$
$$\iff 3x - xy = 1 - 2y \iff x(3-y) = 1 - 2y.$$

Ainsi, si $y \neq 3$, $f(x) = y \iff x = \frac{1-2y}{3-y}$. Donc y admet un antécédent et un seul par f qui est $\frac{1-2y}{3-y}$.
Si $y = 3$, alors $f(x) = y \iff 0x = 5$, donc y n'a pas d'antécédent par f.

Conclusion

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

3. On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$g(x) = y \iff \frac{3x-1}{x-2} = y \iff x = \frac{2y-1}{y-3}$$

Conclusion

Ainsi, tout élément y de l'espace d'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est

$$g^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y & \mapsto & \frac{2y-1}{y-3} \end{array}.$$

Solution 4.35
Solution 4.40
Solution 4.41

4.5 Notions liées à l'ordre

Solution 4.42

1. f est croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ car pour $x, y \in \mathbb{R}_-^\star$,
$$x \leq y < 0 \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$
2. f est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ car pour $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$0 < x \leq y \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$
3. f n'est pas croissante car
$$-1 \leq 3 \text{ et non } \left(f(-1) = 1 \leq f(3) = -\frac{1}{3}\right).$$
4. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
5. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
6. f n'est pas strictement croissante car elle n'est pas croissante.

Solution 4.43

1. Vrai. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Soit $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$. Puisque f et g sont croissantes, on a
$$f(x) \leq f(x') \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(x').$$
En sommant ces deux inégalités, on obtient
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x') = (f+g)(x').$$

Conclusion

On a montré
$$\forall x, x' \in A, x \leq x' \implies (f+g)(x) \leq (f+g)(x');$$
c'est-à-dire $f + g$ est croissante.

2. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $f - g : x \mapsto -2x$ n'est pas croissante.
3. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $fg : x \mapsto 3x^2$ n'est pas croissante.
4. Vrai. Supposons f croissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est croissante.

   Ainsi $g \circ f$ est croissante.

5. Faux. Remarquons tout d'abord que l'inverse d'une fonction n'est pas toujours définie (il faut que la fonction ne s'annule pas). Comme contre exemple, on peut prendre $\exp : x \mapsto e^x$. Cette fonction est croissante, et sont inverse $\frac{1}{\exp} : x \mapsto e^{-x}$ n'est pas croissante.

6. Vrai. Soit $f : A \to B$ une bijection croissante. Remarquons d'abord que f étant croissante et injective, elle est donc strictement croissante,

   Nous allons montrer que sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ est aussi croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in B^2, x \leq x' \implies f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

   Soient $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$. On peut réécrire cette inégalité

$$f\left(f^{-1}(x)\right) \leq f\left(f^{-1}(x')\right).$$

   et puisque f est strictement croissante, cela équivaut à la relation

$$f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

Conclusion

La récirpoque d'une bijection croissante est croissante.

7. Faux. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto x$ qui est croissante, et la constante -3. Alors $-3f : x \mapsto -3x$ n'est pas croissante.

8. Vrai. Ce sont les fonctions constante.

Solution 4.44

1. Supposons f croissante et g croissante.

Remarque

On doit montrer que $g \circ f$ est croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in A^2, x \leq x' \implies g \circ f(x) \leq g \circ f(x').$$

Le «$\forall (x, x') \in A^2$ suggére de commencer la preuve par «Soient $x, x' \in A$». Pour montrer l'implication, on suppose $x \leq x'$ et on se débrouille pour arriver à $g(f(x)) \leq g(f(x'))$. Pour y arriver, nous avons le droit (en fait nous n'avons trop le choix) d'utiliser les hypothèses : f et g sont croissantes.

   Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est croissante.

2. Supposons f croissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ car g est décroissante.

3. Supposons f décroissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ car g est croissante.

4. Supposons f décroissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est décroissante.

4.6 Tangente et dérivées

Solution 4.45

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ d'où $f'(1) = 2$ et la tangente recherchée admet pour équation cartésienne
$$y = 2(x-1)+4 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = 2x+2.$$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x+3$ d'où $f'(-2) = -1$ et la tangente recherchée admet pour équation cartésienne
$$y = -(x+2)+2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = -x.$$
5. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(1) = \frac{1}{2}$ et la tangente au point d'abscisse 1 admet pour équation cartésienne
$$y = \frac{1}{2}(x-1)+1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$
6. Pour $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ d'où $f'(5) = \frac{1}{4}$ et la tangente au point d'abscisse 5 admet pour équation cartésienne
$$y = \frac{1}{4}(x-5)+2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}.$$

Solution 4.47

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application f est dérivable en a et $f'(a) = 4-2a$. La tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation cartésienne
$$y = (4-2a)(x-a)+4a-a^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad T_a\ :\ y = (4-2a)x+a^2.$$
Enfin
$$A \in T_a \iff 5 = (4-2a)\times 2+a^2 \iff a^2-4a+3=0 \iff (a=1 \text{ ou } a=3)$$

Conclusion

Il y a deux tangente à la courbe de f passant par le point $A(2,5)$:
$$T_1\ :\ y = 2x+1 \qquad \text{et} \qquad T_3\ :\ y = -2x+9.$$

Solution 4.48

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$. La tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation cartésienne
$$y = 2a(x-a)+a^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad T_a\ :\ y = 2ax-a^2.$$
Enfin
$$A \in T_a \iff -3 = 2a\times 1-a^2 \iff a^2-2a-3=0 \iff (a=-1 \text{ ou } a=3)$$

Conclusion

Il y a deux tangente à la courbe de f passant par le point $A(1,-3)$:
$$T_1\ :\ y = -2x+1 \qquad \text{et} \qquad T_3\ :\ y = 6x-9.$$

Solution 4.50

1. La fonction $f : x \mapsto 4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$ est une fonction polynômiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 20x^4 + 15x^2 - 3.$$

2. La fonction $f : x \mapsto x^{-1/\sqrt{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est une fonction usuelle) et

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{-1}{\sqrt{2}}-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}.$$

3. La fonction $f : x \mapsto (x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ est une fonction polynômiale ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2-b^2)(x^3-c^3) + 2x(x-a)(x^3-c^3) + 3x^2(x-a)(x^2-b^2).$$

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}, f'(x) = \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

5. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-3}{x+2}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}, f'(x) = \frac{7(x+2) - (7x-3)(1)}{(x+2)^2} = \frac{17}{(x+2)^2}.$$

6. La fonction $f : x \mapsto \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est une fonction usuelle) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

7. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^4 - 5x^3 + 1}{2x^2 + x - 3}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, 1 \right\}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in D, f'(x) &= \frac{(12x^3 - 15x^2)(2x^2 + x - 3) - (3x^4 - 5x^3 + 1)(4x + 1)}{(2x^2 + x - 3)^2} \\ &= \frac{12x^5 - x^4 - 46x^3 + 45x^2 - 4x - 1}{(2x^2 + x - 3)^2}\end{aligned}$$

Solution 4.51

1. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\sin x > 0 \iff x \in D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[.$$

De plus, la fonction sin est dérivable sur D. La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \sin'(x) \ln'(\sin x) = \cos(x) \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto \arctan(\ln x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f'(x) = \arctan'(\ln x)\ln'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

3. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto e^{\cos x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \exp'(\cos x)\cos'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}.$$

4. La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction tan est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

La fonction $f : x \mapsto \tan^3 x$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = 3\tan'(x)\tan^2(x) = 3(1+\tan^2(x))\tan^2(x) = 3\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}.$$

5. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et

$$e^x \in [-1, 1] \iff -1 \leq e^x \leq 1 \iff x \leq 0.$$

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(e^x)$ est donc définie sur $]-\infty, 0]$.

Néanmoins, la fonction arcsin n'est dérivable que sur $]-1, 1[$ et

$$e^x \in]-1, 1[\iff x < 0.$$

Le théorème de dérivation d'une composée n'assure donc la dérivabilité de f que sur $]-\infty, 0[$ et alors

$$\forall x \in]-\infty, 0[\,, f'(x) = \arcsin'(e^x)e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure. Il faudrait donc revenir à la définition, mais lever l'indétermination est pour l'instant un peu compliqué.

6. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = \sin'(\ln x)\ln'(x) = \cos(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

7. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles). La fonction $f : x \mapsto \sin(\sin x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sin'(\sin x)\sin'(x) = \cos(\sin x)\cos(x).$$

8. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction tan est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan x)$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \arctan'(\tan x)\tan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}1 + \tan^2 x = 1.$$

9. La fonction $f : x \mapsto e^{e^x}$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{e^x}e^x = e^{x+e^x}.$$

10. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1, 1].$$

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(\cos x)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\cos x = \pm 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} x = k\pi.$$

Le théorème de dérivation d'une composée assure donc la dérivabilité de f sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ et on a

$$\forall x \in D, f'(x) = \arcsin'(\cos x)\cos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

On a donc,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\\ +1 & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Lorsque $x \equiv 0 \pmod \pi$, les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure. On peut revenir à la définition, mais l'indétermination est un peu compliquée à lever pour l'instant.

Solution 4.53

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$) et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xf'(x^2).$$

2. La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$) et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f(\sin x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos x f'(\sin x).$$

3. La fonction $u : x \mapsto \frac{3x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}.$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = u'(x)f'(u(x)) = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2} \times f'\left(\frac{3x}{x^2+1}\right).$$

4. L'application sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images réelles), donc $g : x \mapsto \sin(f(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)\sin'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x)).$$

5. La fonction $h : x \mapsto x^{-3/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, h'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}.$$

Notons $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \}$. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f(x) > 0.$$

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{f(x)^{3/2}}$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, g'(x) = f'(x) \times \frac{-3}{2} f(x)^{-5/2} = \frac{-3f'(x)}{2f(x)^{5/2}}.$$

6. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Notons $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(e^x) > 0 \}$. La fonction exp est dérivable sur D, à images dans $\mathbb{R}$ et la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g : x \mapsto f(e^x)$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, g'(x) = e^x f'(e^x).$$

De plus, ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x \in D, g(x) = f(e^x) > 0$; la fonction $h : x \mapsto \ln(f(e^x))$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, h'(x) = g'(x) \ln'(g(x)) = e^x f'(e^x) \frac{1}{g(x)} = \frac{e^x f'(e^x)}{g(x)}.$$

Solution 4.55

1. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x^2 + 1 \in]0, +\infty[.$$

La fonction $f = g \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(u(x)) u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}$. La fonction $g_1 = \sin \circ u : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1'(x) = \sin'(u(x)) u'(x) = \cos\left(x^2\right) \times 2x.$$

De plus, la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $v : x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $[1, +\infty] \subset]0, +\infty[$. La fonction $g_2 : x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_2'(x) = \ln'(v(x)) v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $g_3 : x \mapsto x g_2(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_3'(x) = \ln\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Conclusion

La fonction $g = g_1 + g_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x \cos\left(x^2\right) + \ln\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

3. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $h_1 : x \mapsto \exp\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_1'(x) = 2x \exp\left(x^2\right).$$

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 + x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à images dans $]0, +\infty[$. La fonction $h_2 : x \mapsto \ln\left(1 + x^4\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_2'(x) = \frac{4x^3}{1 + x^4}.$$

Ainsi, la fonction $h_3 = h_1 h_2 : x \mapsto \exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_3'(x) = 2x \exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right) + \exp\left(x^2\right) \frac{4x^3}{1 + x^4} = \exp\left(x^2\right) \left(2x \ln\left(1 + x^4\right) + \frac{4x^3}{1 + x^4}\right).$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'application $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. La fonction $h_4 : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_4'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Remarquons que h_4 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $h = h_3/h_4$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \frac{h_3'(x)h_4(x) - h_3(x)h_4'(x)}{h_4(x)^2} \\ &= \frac{\exp\left(x^2\right) \left(2x \ln\left(1 + x^4\right) + \frac{4x^3}{1+x^4}\right)}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{x\left(\exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right)\right)}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Solution 4.77
Solution 4.79

1. La fonction f est clairement définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^x > 0.$$

De plus

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$, on note $a = f^{-1}(b) = g(b)$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$; de plus, f est dérivable en a et $f'(f^{-1}(b)) = f'(a) = 1 + e^a \neq 0$. La fonction g est donc dérivable en $b = f(a)$ et on a

$$g'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(b)}} = \frac{1}{1 + e^{g(b)}}.$$

On constate que $f(0) = 1$ donc $g(1) = 0$, d'où

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonctin exp également donc $x \mapsto 1 + e^{g(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall y \in \mathbb{R}, 1 + e^{g(y)} \neq 0.$$

La fonction $g' : x \mapsto \frac{1}{1+e^{g(x)}} = \frac{1}{f'(g(x))}$ et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x)))^2}.$$

En particulier,

$$g''(1) = -\frac{f''(g(1))g'(1)}{(f'(g(1)))^2} = -\frac{f''(0) \times \frac{1}{2}}{(f'(0))^2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2^2} = -\frac{1}{8}.$$

4.7 Convexité

Solution 4.80

4.8 Branches infinies

4.9 Étude pratique des fonctions

Solution 4.81

1. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) - \sin(3x + 6\pi) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x) - \sin(-3x) = -\sin(x) + \sin(3x) = -f(x) \\ f(\pi - x) &= \sin(\pi - x) - \sin(3\pi - 3x) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x). \end{aligned}$$

[1] Nous pouvons donc

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$;
- effectuer une symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la courbe sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie par rapport à l'origine, on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $k2\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(x/2 + \pi)\sin(3x/2 + 3\pi) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x/2) - \sin(-3x/2) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \end{aligned}$$

[2] Nous pouvons donc

[1]On peut également utiliser la π-antipériodicité.
[2]On a également $f(2\pi - x) = f(x)$, mais cela n'apporte rien de plus que la périodicité et la parité.

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie d'axe (Oy), on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

3. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-\frac{2}{3} - x) &= -x^3 - 2x^2 - \cancel{\frac{4}{3}x} - \frac{8}{27} + x^2 + \cancel{\frac{4}{3}x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - x \\ &= -\left(x^3 + x^2 + x\right) - \frac{14}{9} \\ &= -f(x) - \frac{14}{27}. \end{aligned}$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport au point $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{27}\right)$. Il suffit donc d'étudier f sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (ou $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$) et d'effectuer cette symétrie.

Solution 4.82

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+1}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + x - (x+1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) \geq 0 \iff x\sqrt{x} \geq 1 \iff x^{3/2} \geq 1 \iff x \geq 1.$$

Avec égalité si, et seulement si $x = 1$. D'où le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que le minimum de f sur $]0, +\infty[$ est $f(1) = 2\sqrt{2}$.

Soit $a > 0$ et $b > 0$, alors

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a/b+1}\sqrt{b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a/b+1}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + 1\right) = f(a/b) \geq 2\sqrt{2}.$$

Solution 4.83
Solution 4.84
Solution 4.86
Solution 4.87
Solution 4.94
Solution 4.101

f est définie et continue en tout x où $\sin x + \cos x \neq 0$, c'est-à-dire sur

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus f est 2π-périodique, on a même

$$\forall x \in D, x + \pi \in D \text{ et } f(x+\pi) = \frac{\sin^2(x+\pi)}{\sin(x+\pi) + \cos(x+\pi)} = \frac{\sin^2(x)}{-\sin(x) - \cos(x)} = -f(x).$$

Cette invariance du graphe par translation-symétrie permet de borner l'étude à un intervalle d'amplitude π. En outre,

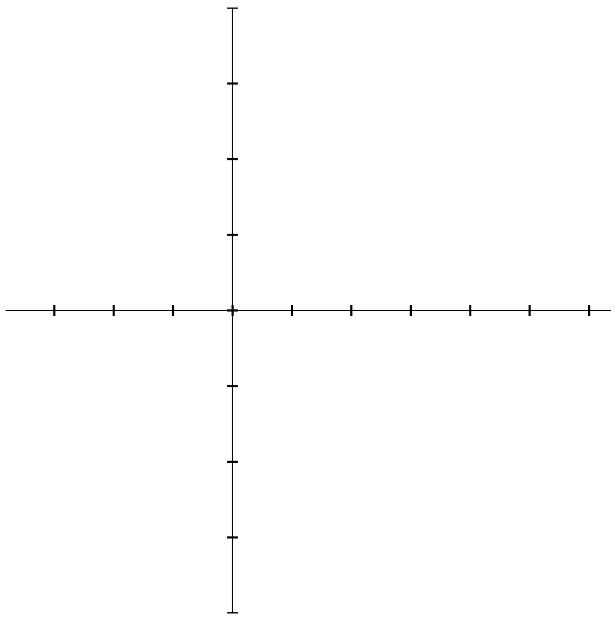
$$\forall x \in D, \frac{\pi}{2} - x \in D \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) == \frac{\sin^2(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x) + \cos(\pi/2 - x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = f(x).$$

Il suffit d'étudier f dans un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ et d'extrémité $\frac{\pi}{4}$, par exemple $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, et d'effectuer la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ du graphe de cette restriction.

f est définie et continue sur $\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur cette intervalle en tant que quotient de fonction dérivables sur leur ensemble de définition et on a

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right], f'(x) = \frac{2\cos x}{(\cos x + \sin x)^2} > 0.$$

x	$-\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $+\frac{\pi}{4}$
$f(x)$	$-\infty \nearrow \frac{\sqrt{2}}{2}$



Solution 4.102

Considèrons la fonction $f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_b(x) = e^{x-1} - bx + b\ln b$. La fonctions f_b est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_b'(x) = e^{x-1} - b.$$

De plus,

$$\begin{aligned} f_b'(x) \geq 0 \iff e^{x-1} - b \geq 0 &\iff e^{x-1} \geq b \\ &\iff x - 1 \geq \ln b \qquad \because \ln \text{ strictement croissante} \\ &\iff x \geq 1 + \ln b. \end{aligned}$$

De plus, $f_b(1 + \ln b) = e^{lnb} - b = 0$. D'où le tableau de variation de f_b

x	$-\infty$		$1 + \ln b$		$+\infty$
$f_b'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_b		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_b(a) \geq 0$, c'est-à-dire $e^{a-1} - ab + b \ln b \geq 0$.
Conclusion :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^\star, e^{a-1} - ab + b \ln b \geq 0.$$

Solution 4.103

1. La fonction f est polynômiale. Elle est donc définie, continue et dérivable pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. Sa dérivée,

   $$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

   est nulle pour $x = -\frac{4}{3}$, positive pour $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > 0$, négative pour $-\frac{4}{3} < x < 0$.
   Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Tous ces résultats permettent de dresser le tableau suivant,

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow$	$-\frac{76}{27}$	$\downarrow$	-4	$\uparrow$	$+\infty$

   À faire : faire un tableau plus joli et tracer la courbe (c'est à vous!).

2. Les racines de l'équation $x^3 + 2x^2 - 4 = m$, lorsqu'elles existent, ne sont autres que les abscisses des points communs à l acourbe précédente et à la droite (Δ) parallèle à $x'x$ et d'ordonnée égale à m.

   Un simple examen du graphique conduit alors aux conclusions suivantes:

   - $m < -4$: une racine (négative);
   - $m = 4$: un racine négative et une racine double, $x = 0$;
   - $-4 < m < -\frac{76}{27}$: trois racines (deux négatives et une positive);
   - $m = -\frac{76}{27}$: une racine double, $x = -\frac{4}{3}$, et une racine positive;
   - $m > -\frac{76}{27}$: un racine (positive).

Solution 4.104

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x}{x^2 - 9} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. Nous effectuons donc l'étude de f sur $A = D \cap \mathbb{R}_+ = [0, 3[\cup]3, +\infty[$ et compléterons le tracé de la courbe à l'aide d'une symétrie de centre O.

On peut écrire $f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour x au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \times 1 = 0.$$

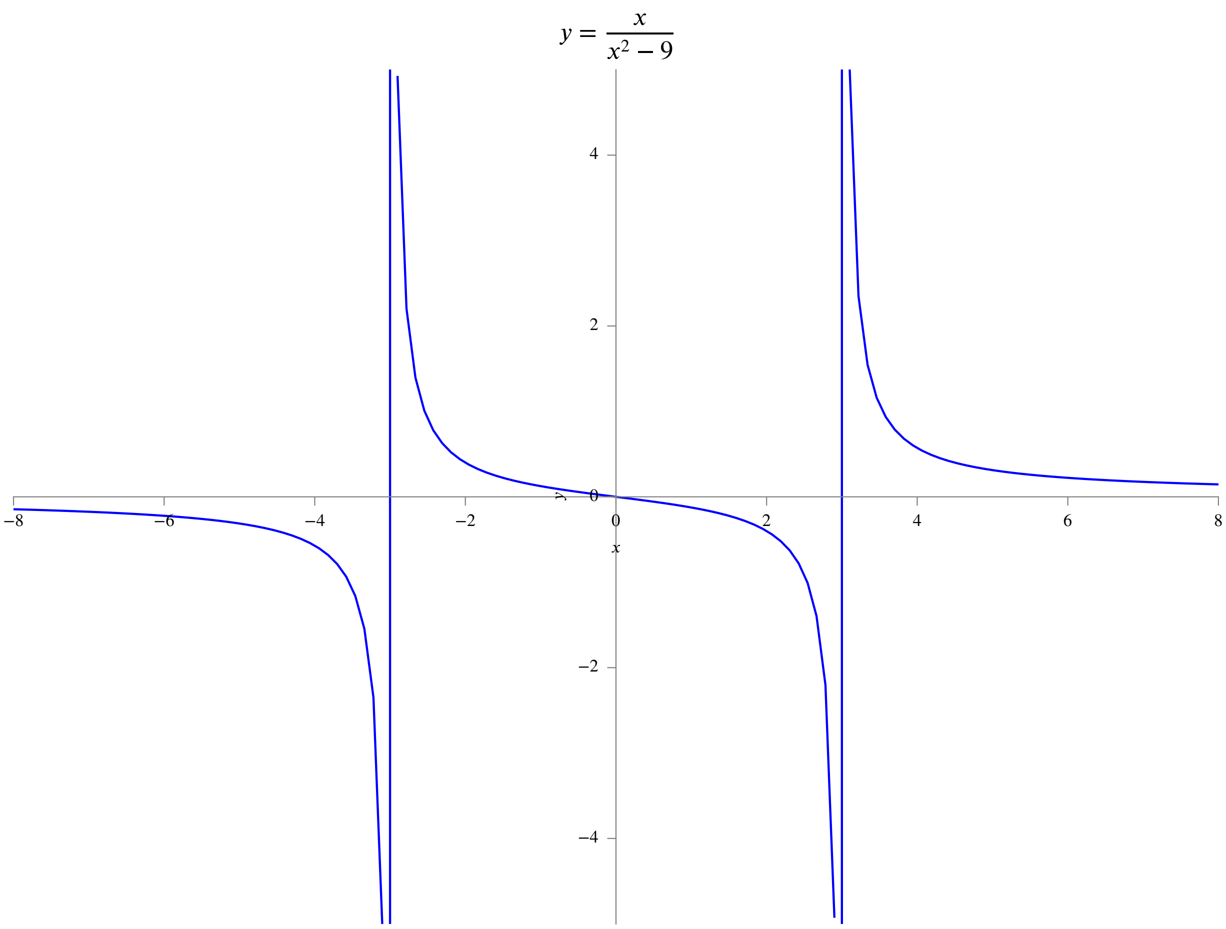
La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur A et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{(1)(x^2 - 9) - (x)(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} < 0.$$

On en déduit le tableau de variations

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{9}$	$-$	$\Vert$	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

La courbe de f possède une asymptote verticale $\mathcal{A}_1$ d'équation $x = 3$ et une asymptote horizontale $\mathcal{A}_2$ d'équation $y = 0$. Le tableau de variations nous permet de préciser que la courbe de f est au dessus de $\mathcal{A}_2$ au voisinage de $+\infty$.



Solution 4.106

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

La fonction f est définie au point x si, et seulement si

$$1 - x^2 \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

Donc f est définie sur $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire Nous effectuons donc l'étude de f sur $A = D \cap \mathbb{R}_+ =]0, 1]$ et compléterons le tracé de la courbe à l'aide d'une symétrie de centre O.

On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe de f.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $u : x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $[0, 1[$ et pour $x \in]0, 1]$,

$$u(x) \in]0, +\infty[\iff 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x < 1.$$

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est donc dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin, f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que quotient définit de fonction dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{v'(x)x - v(x)}{x^2} = \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 1 + x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

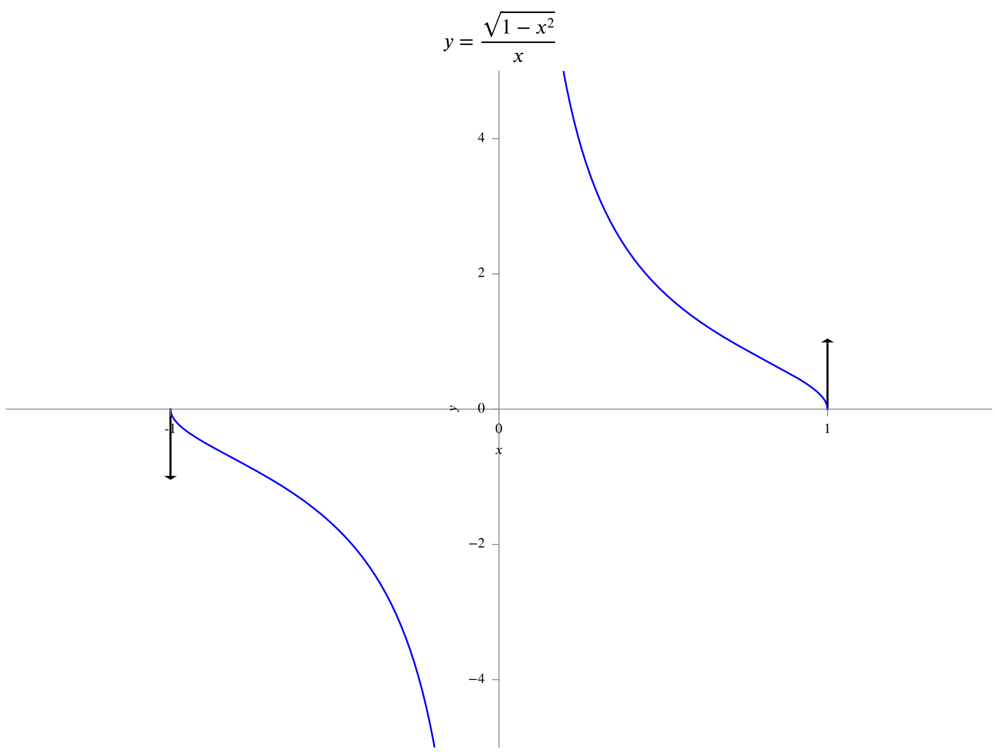
On en déduit le tableau de variations

x	0		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
Variations de f	‖	$+\infty \searrow 0$	

Étudions le taux d'accroissement de f en 1.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(x-1)} = -\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Néanmoins, la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.



Solution 4.107

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1$. La fonction f est donc définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous l'étudions sur $A =]1, +\infty[$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O.

On a clairement

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f. De plus, pour x au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

La droite $\mathcal{A}_2$ d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur A. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x \in A$, $x^2 - 1 \in \mathbb{R}_+^\star$. La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ et donc dérivable sur A et

$$\forall x \in A, u'(x) = 2x \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

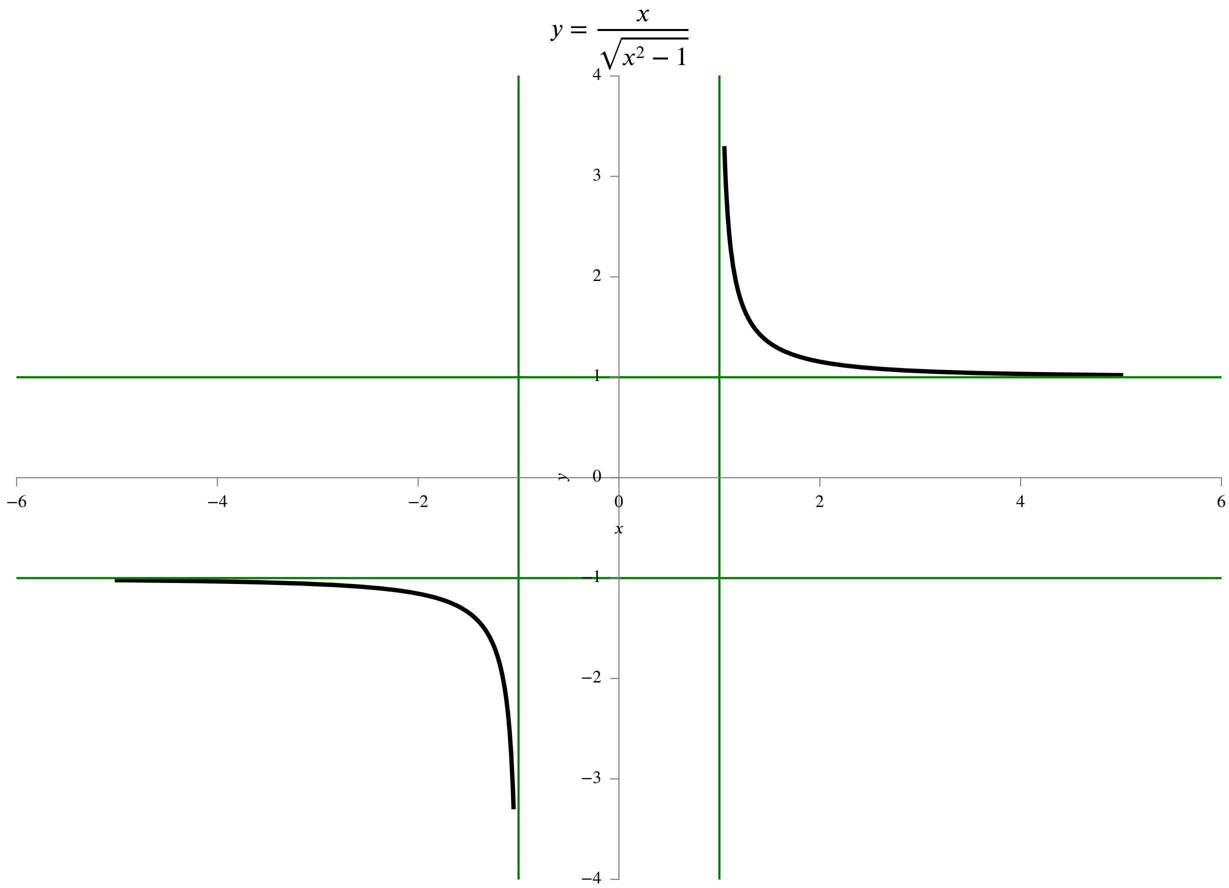
La fonction f est donc dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivable et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{3/2}} < 0.$$

On en déduit le tableau de variations

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$ 1

La courbe de f est donc au-dessus de $\mathcal{A}_2$ au voisinage de $+\infty$.



Solution 4.108 *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*
Solution 4.109

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \cos x = 0 \iff x \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} = \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Pour $x \in D$, $x \pm 2\pi \in D$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique. De plus, pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous étudions donc f sur $A = D \cap [0, \pi] = [0, \pi[$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O puis des translations de vecteurs $2k\pi 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $x \in A$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \xrightarrow[\substack{x \to \pi \\ <}]{} +\infty.$$

La droite $\mathcal{A}$ d'équation $x = \pi$ est asymptote verticale à la courbe de f.

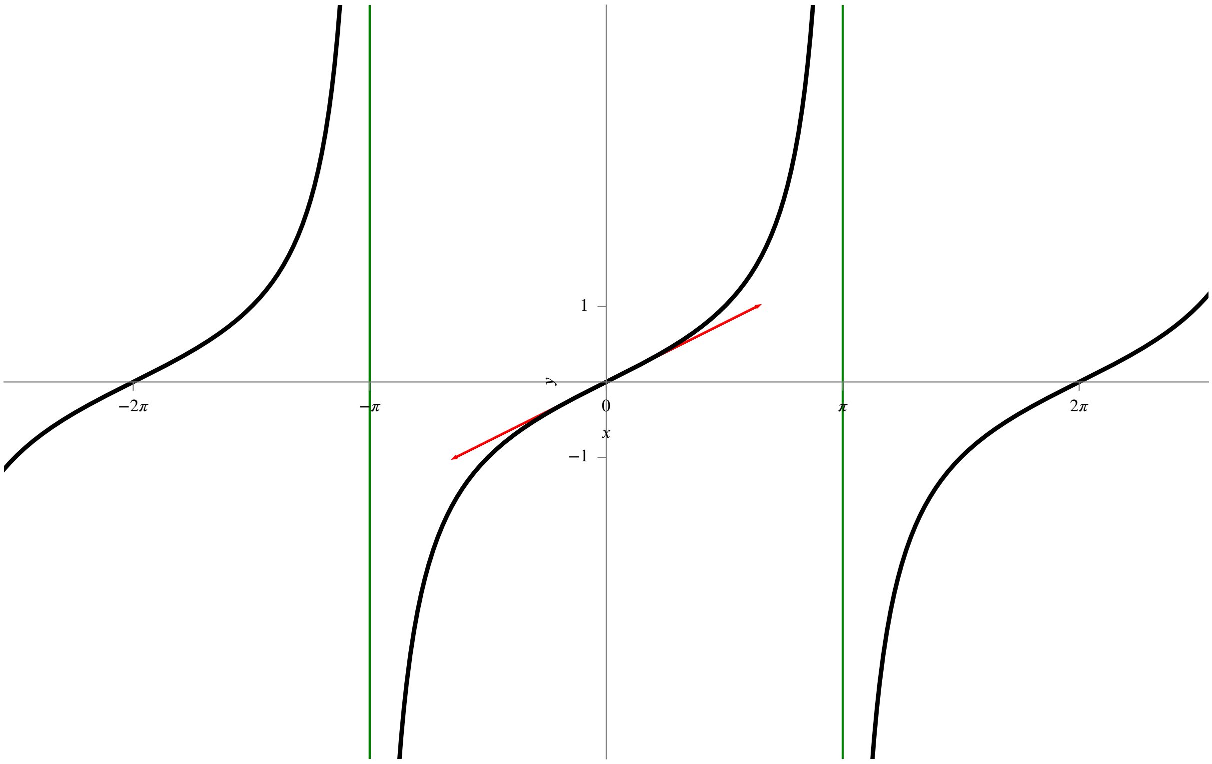
La fonction f est dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivables sur A et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

De plus, pour $x \in A = [0, \pi[$, $\cos x > -1$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations

x	0		π
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	‖
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$



Solution 4.110

Pour $x \in \mathbb{R}$, $2 + \cos x \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous étudions donc f sur $A = [0, \pi]$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O puis des translations de vecteurs $2k\pi 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f est dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivables sur A et

$$\forall x \in A,\ f'(x) = \frac{(\cos x)(2 + \cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

De plus, pour $x \in A = [0, \pi]$,

$$f'(x) = 0 \iff 2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}.$$

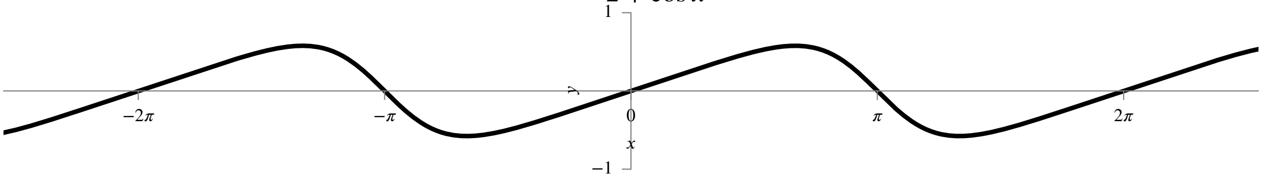
De plus, cos est décroissante sur $A = [0, \pi]$ d'où

$$f'(x) \geq 0 \iff 2\cos x + 1 \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit le tableau de variations

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$	-1
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$

$y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$



Solution 4.114

La fonction f est définie, continue, dérivable, pour tout valeur de x différente de 2.

Lorsque $x \to 2$, (...) on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote à la courbe de f.

(...) On trouve pour dérivée

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

Le numérateur est un polynôme du second degré ayant pour racines 1 et 3, on en déduit

$$f'(x) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3.$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(…) On trouve successivement les limites

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - x = \frac{-3x+7}{x-2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -3$$

$$f(x) - x + 3 = \frac{1}{x-2} \begin{cases} > 0 & (x > 2) \\ < 0 & (x < 2). \end{cases}$$

La courbe de f admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite Δ d'équation $y = x - 3$. La courbe de f est en-dessous de Δ au voisinage de $-\infty$ et au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

Joli Dessin...

4.10 Intégration des fonctions continues

Solution 4.117

1. $52/3$

2.

3. 20

4.

5. $32/3$

6.

7. 4

8.

Solution 4.118 *Calcul d'intégrale*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 2^t \cdot 3^{2t} \cdot 5^{3t}\,\mathrm{d}t$, nous simplifions l'expression sous l'intégrale. Nous utilisons les propriétés des exponentielles :

$$2^t \cdot 3^{2t} \cdot 5^{3t} = 2^t \cdot (3^2)^t \cdot (5^3)^t = 2^t \cdot 9^t \cdot 125^t = (2 \cdot 9 \cdot 125)^t = 2250^t$$

L'intégrale devient :

$$\int_0^1 2250^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2250^t}{\ln 2250}\right]_0^1 = \frac{2250-1}{\ln 2250}$$

Solution 4.119 *Intégration par parties*
Solution 4.120 *Intégration par parties*
Solution 4.121

1. $2e^{3/2}+4$

2.

3. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

4.

5. $\left(\pi - 3\sqrt{3}+6\right)/6$.

6.

7. $\frac{1}{2}\,(e(\sin 1 - \cos 1)+1)$.

8.

9. $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2 - \frac{8}{9}\sqrt{2}+\frac{4}{9}$.

10.

Solution 4.122
Solution 4.123
Solution 4.124
Solution 4.125 *Intégration par parties*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^\pi t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$, nous utilisons une intégration par parties deux fois. Posons $u = t^2$ et $\mathrm{d}v = \sin t\,\mathrm{d}t$. Alors $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ et $v = -\cos t$. La première intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi t^2 \sin t\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2t\cos t\,\mathrm{d}t = \pi^2 + 2\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$$

Pour la deuxième intégrale, nous utilisons une autre intégration par parties. Posons $u = t$ et $\mathrm{d}v = \cos t\,\mathrm{d}t$. Alors $\mathrm{d}u = dt$ et $v = \sin t$. L'intégrale devient :

$$2\left([t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t\right) = 2\left(0 - [-\cos t]_0^\pi\right) = 2\,(0+2) = 4$$

Donc, l'intégrale originale est :

$$\pi^2 + 4$$

Solution 4.126 *Intégration par parties*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, \mathrm{d}x$, nous utilisons une intégration par parties. Posons $u = x$ et $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$. Alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et $v = -\cos x$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, \mathrm{d}x = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Solution 4.127 *Intégration par parties*

Pour calculer l'intégrale $\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$, nous utilisons une intégration par parties. Posons $u = \ln x$ et $\mathrm{d}v = x^2 \, \mathrm{d}x$. Alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ et $v = \frac{x^3}{3}$. L'intégrale devient :

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - 0\right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

Solution 4.128

Ajouter une constante pour obtenir toutes les primitives (I est un intervalle).

1. $x^3 + x^5$.
2. $\frac{1}{3}x^3 - \cos x$.
3. $\frac{3}{2} \sin(2x)$.
4. $\frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.
5. $-\frac{1}{2x^2}$.
6. $\frac{3}{4x^4}$.
7. $-\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$.
8. $\frac{1}{16}\left(x^2 + 1\right)^8$.
9. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$.
10. $\frac{1}{3}\left(x^2 + 1\right)^{3/2}$.
11. $\frac{1}{3} \sin^3 x$.
12. $-\frac{1}{4} \cos^4 x$.
13. $\ln\left|x^2 + 3x\right| = \ln\left(x^2 + 3x\right)$.
14. $-\frac{1}{x^2+x+2}$.
15. $\ln\left|x^2 + 2x + 2\right| = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.
16. $-2\sqrt{3 - x}$.
17. $-e^{1/x}$.
18. $\frac{1}{4}e^{x^4+4x+1}$.

Solution 4.129

1. La fonction $u : t \mapsto t^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = 3t^2 \, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^6 + 1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan 1 = \frac{\pi}{12}.$$

2. La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1/3, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t + 1)\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{2}{u^2 + 1} \, \mathrm{d}u = [2 \arctan u]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

3. La fonction $u : t \mapsto 1 + t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = 2t \, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2} \, \mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{3/2}}{3}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

4. La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2, e]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_2^e \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^1 \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{4u^4}\right]_{\ln 2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\ln^4 2}.$$

5. La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 2]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t(\ln t)^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} e^u u^2\,\mathrm{d}u.$$

On peut chercher une primitive de $e^u u^2$ sous la forme $(au^2 + bu + c)e^u$ ou faire une triple intégration par parties donne

$$\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = \left[\left(u^2 - 2u + 2\right) e^u\right]_0^{\ln 2} = 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 2) - 2 = 2 + 2\ln^2 2 - 2\ln 2.$$

6. La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 2]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{t + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{t} + 1}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [2\ln(u+1)]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - 2\ln(2) = 2\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}.\end{aligned}$$

7. La fonction $u : t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$ et on a $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}/2} u^5(-\,\mathrm{d}u) = \int_{\sqrt{2}/2}^1 u^5\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^6}{6}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}.$$

8. La fonction $u : t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi/6, \pi/3]$ et on a $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t. = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t. = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Solution 4.130 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, nous utilisons un changement de variable. Posons $u = \arctan x$. Alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$ et lorsque $x = 1$, $u = \frac{\pi}{4}$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

Solution 4.131 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x\,\mathrm{d}x$, nous utilisons un changement de variable et la propriété $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Posons $u = \frac{1}{x}$. Alors $\mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Lorsque $x = \frac{1}{2}$, $u = 2$ et lorsque $x = 2$, $u = \frac{1}{2}$. L'intégrale devient :

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \arctan x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^2 \arctan x\,\mathrm{d}x + \int_2^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{1}{u}\right)(-du)$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \arctan x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u \right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

Solution 4.133 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$, nous utilisons un changement de variable. Posons $x = 2\sin\theta$. Alors $\mathrm{d}x = 2\cos\theta \, \mathrm{d}\theta$. Lorsque $x = 0$, $\theta = 0$ et lorsque $x = \sqrt{3}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta}{2\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Nous utilisons l'identité $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta = 2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solution 4.134 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+7} \, \mathrm{d}x$, nous complétons le carré au dénominateur :

$$x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$$

Nous utilisons un changement de variable. Posons $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$. Alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}} \, \mathrm{d}x$. Lorsque $x = -1$, $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et lorsque $x = 1$, $u = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. L'intégrale devient :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3u^2 + 3} \cdot \sqrt{3} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2 + 1} \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\arctan u \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Solution 4.137 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$, nous utilisons un changement de variable. Posons $u = 1 - t^2$. Alors $\mathrm{d}u = -2t \, \mathrm{d}t$. Lorsque $t = 0$, $u = 1$ et lorsque $t = 1$, $u = 0$. L'intégrale devient :

$$\int_1^0 \frac{-1/2}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{u} \right]_0^1 = 1$$

Solution 4.138 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, \mathrm{d}t$, nous utilisons un changement de variable. Posons $t = a\sin\theta$. Alors $dt = a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta$. Lorsque $t = 0$, $\theta = 0$ et lorsque $t = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \cdot a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Nous utilisons l'identité $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Solution 4.139 *Changement de variable, intégration par parties*

Pour calculer l'intégrale $\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1} \cos\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$, nous utilisons un changement de variable. Posons $t = 1-u^2$. Alors $\mathrm{d}t = -2u\,\mathrm{d}u$. Lorsque $t = 1 - \frac{\pi^2}{4}$, $u = \frac{\pi}{2}$ et lorsque $t = 1$, $u = 0$. L'intégrale devient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos u \cdot (-2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u\cos u\,\mathrm{d}u$$

Nous utilisons une intégration par parties. Posons $v = u$ et $dw = \cos u\,\mathrm{d}u$. Alors $\mathrm{d}v = du$ et $w = \sin u$. L'intégrale devient :

$$2\left([u\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,\mathrm{d}u\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2$$

Solution 4.142 *Changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$, nous utilisons un changement de variable. Posons $u = \frac{t}{2}$. Alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}dt$. Lorsque $t = -\pi$, $u = -\frac{\pi}{2}$ et lorsque $t = \pi$, $u = \frac{\pi}{2}$. L'intégrale devient :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2u}\cdot 2\,\mathrm{d}u = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\,\mathrm{d}u$$

Puisque $\cos u$ est positif sur $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, l'intégrale devient :

$$2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\,[\sin u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}(1-(-1)) = 4\sqrt{2}$$

Solution 4.143