Chapter 4 Notions sur les fonctions en analyse

4.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Exercice 4.3 (*)

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

Exercice 4.4 (**)

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$.

Exercice 4.5 (**)

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)(x-7)}$.

Exercice 4.6 (*)

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

Exercice 4.8 (*)

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^3 x}$.

Exercice 4.9 (***)

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1 + 2x^2 - x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

Exercice 4.10 (**)

Trouver l'ensemble de définition de

$$g : x \mapsto \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-4} \text{ et } h : x \mapsto \ln \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-4}.$$

4.2 Courbe représentative d'une fonction

Exercice 4.12 (*)

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

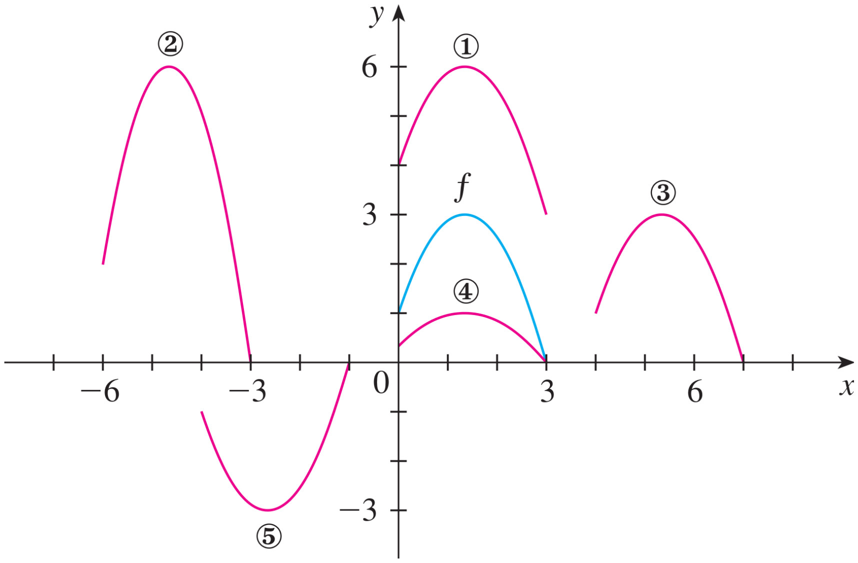
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x)+3$

(e) $y = -f(x+4)$



Exercice 4.13 (*)

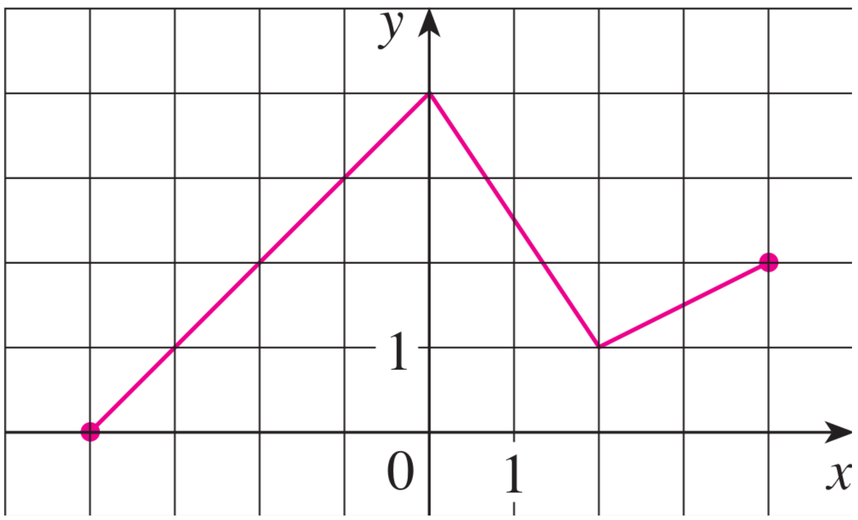
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

(b) $y = f(x)+4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x)+4$



Exercice 4.14 (*)

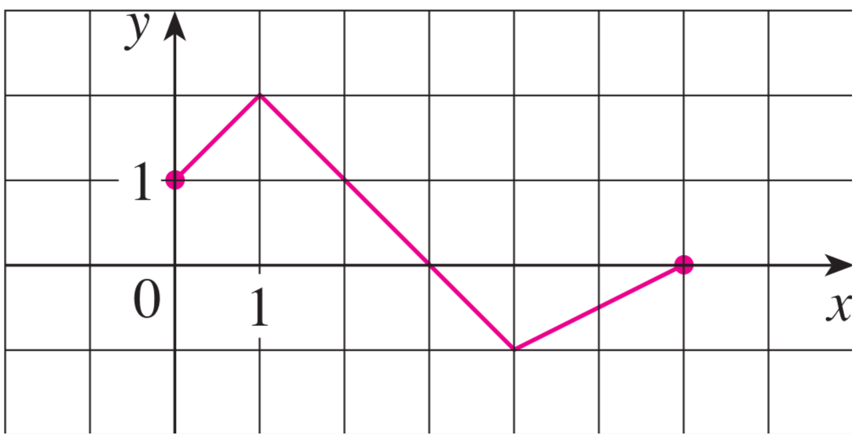
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

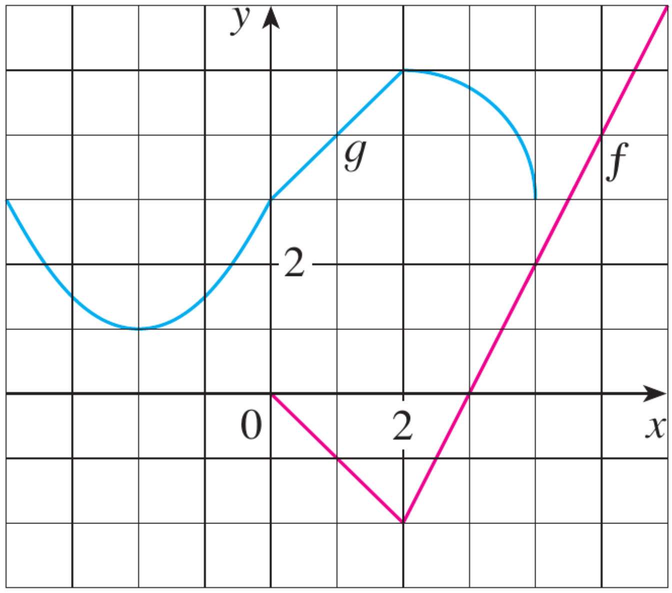
(d) $y = -f(-x)$



Exercice 4.15 (**)

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

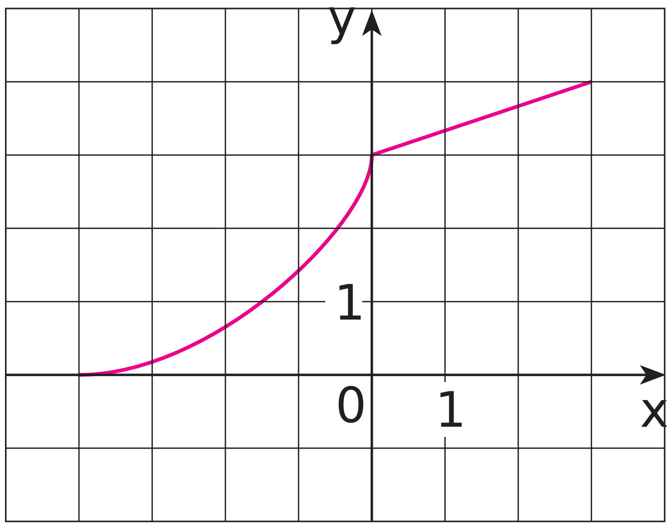
1. $f(g(2))$.
2. $(g \circ f)(6)$.
3. $g(f(0))$.
4. $(g \circ g)(-2)$.
5. $(f \circ g)(0)$.
6. $(f \circ f)(4)$.



Exercice 4.16 (**)

La courbe de la fonction f étant donnée, tracer les courbes d'équations cartésiennes

1. $y = f(x-8)$,
2. $y = -f(x)$,
3. $y = 2 - f(x)$,
4. $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$,
5. $y = f^{-1}(x)$,
6. $y = f^{-1}(x+3)$.



Exercice 4.18 (**)

1. $f\left(\frac{1}{2}(x+|x|)\right)$;
2. $f\left(\frac{1}{2}(x-|x|)\right)$;
3. $\frac{1}{2}xf(x)$;
4. …

4.3 Symétries du graphe

Exercice 4.20 (**)

Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Exercice 4.21 (*)
Parmi les fonction suivantes, déterminer celles qui sont elles paires ou impaires. Justifiez.

1. $f : x \mapsto 2x^5 - 3x^2 + 2$.
2. $f : x \mapsto x^3 - x^7$.
3. $f : x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$.
4. $f : x \mapsto 1 + \sin x$.

Exercice 4.22 (**)
Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?

Exercice 4.23 (***)
Déterminer la période principale des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \cos(3x) + 1$.
2. $x \mapsto \cos(3x+1)$.
3. $x \mapsto \cos(\pi x)$.
4. $x \mapsto \cos(4x) + \sin(x/2)$.
5. $x \mapsto \sin(2x) + \tan(4x)$.
6. $x \mapsto \sin(4x) + \tan(2x)$.
7. $x \mapsto \cos^2(2x)$.
8. $x \mapsto \sin\dfrac{x}{12} + \sin\dfrac{x}{6}$.
9. $x \mapsto \sin(6x)\sin(4x)$.

Exercice 4.24 (**)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(6-x) = 4 - f(x)$. Trouver une symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4.25 (**)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$. Trouver un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

4.4 Injections, surjections, bijections

Exercice 4.26 (**)
Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl}]3,+\infty[& \to &]-\infty,-2[\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{3-x} \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 4.27 (***)
Considérons la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.

Montrer que f est bijective et expliciter sa fonction réciproque.

Exercice 4.28 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
2. On note $g : \mathbb{R} \to]-1,1[, x \mapsto f(x)$. Donner une expression de g^{-1}.

Exercice 4.29 (*)

Montrer que l'application suivante est bijective et déterminer sa fonction réciproque:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+1.$$

Exercice 4.30 (**)

Montrer que l'application suivante est bijective et déterminer sa fonction réciproque:

$$f : [0,2] \to [0,2], x \mapsto \sqrt{4-x^2}.$$

Exercice 4.31 (**)

Montrer que l'application suivante est bijective et déterminer sa fonction réciproque:

$$f : [-4,0] \to [0,4], x \mapsto \sqrt{16-x^2}.$$

Exercice 4.33 (**)

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto x|x|.$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.
2. Construire, relativement à un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et f^{-1}.

Exercice 4.34 (**)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

1. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.
2. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.
3. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée:

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{b\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

   Montrer que g est bijective et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

Exercice 4.35 (**)

On pose $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$.

Montrer que f réalise une bijection de $[-2,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Déterminer la réciproque associée.

Exercice 4.38 (***)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

2. Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice 4.40 (***)
Montrer que $f : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser. Donner la fonction réciproque.

Exercice 4.41 (***)
Montrer que l'application

$$Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & x+\sqrt{x^2+1} \end{array}$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

4.5 Notions liées à l'ordre

Exercice 4.42 (*)
La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?

2. Croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?

3. Croissante ?

4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?

5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?

6. Strictement croissante ?

Exercice 4.43 (**)
Vrai ou Faux ?
Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.

2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.

3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.

4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.

5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.

6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.

7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.

8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Exercice 4.44 (*)
Soient A, B, C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g \circ f$ croissante	$g \circ f$ décroissante
g décroissante	$g \circ f$ décroissante	$g \circ f$ croissante

4.6 Tangente et dérivées

Exercice 4.45 (*)

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1, 4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2, 2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2, 8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1, 2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1, 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5, 2)$.
7. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ au point $A(4, 5)$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ au point $A(0, 1)$.

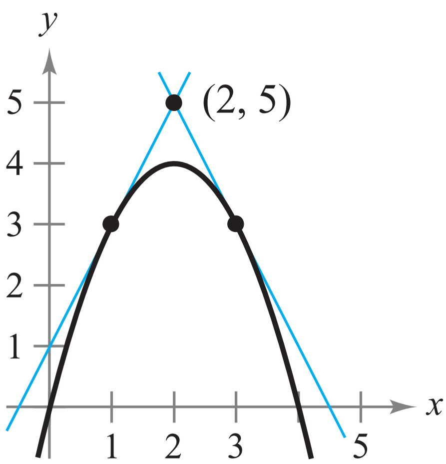
Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Exercice 4.47 (***)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto 4x - x^2$$

passant par le point $A(2, 5)$.

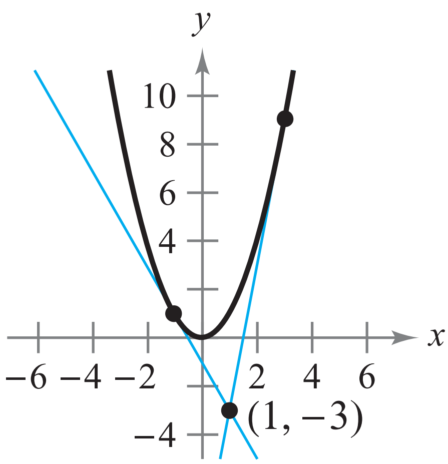


Exercice 4.48 (***)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 4.50 (*)

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$
2. $x^{-1/\sqrt{2}}$
3. $(x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1+x}{1-x}$
5. $\dfrac{7x-3}{x+2}$
6. $\log x$
7. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 1}{2x^2 + x - 3}$

Exercice 4.51 (**)

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\ln(\sin x)$
2. $\arctan(\ln x)$
3. $e^{\cos x}$
4. $\tan^3 x$
5. $\arcsin(e^x)$
6. $\sin(\ln x)$
7. $\sin(\sin x)$
8. $\arctan(\tan x)$
9. e^{e^x}
10. $\arcsin(\cos x)$

Exercice 4.52 (***)

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\sin(\sin(\sin x))$
2. $\ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $e^{e^{e^{e^{e^x}}}}$.

Exercice 4.53 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $f\left(x^2\right)$
2. $f(\sin x)$
3. $f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$
4. $\sin(f(x))$
5. $\dfrac{1}{f(x)^{3/2}}$
6. $\ln(f(e^x))$.

Exercice 4.55 (**)

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1+x^2\right)$.
3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 4.56 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \ln\left(x^2+10\right)$.

Exercice 4.57 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \sin(\ln x)$.

Exercice 4.58 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \ln(\sin^2 x)$.

Exercice 4.59 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \log_2(1-3x)$.

Exercice 4.60 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \log_5(xe^x)$.

Exercice 4.61 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \sqrt[5]{\ln x}$.

Exercice 4.62 (*)

Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \ln \sqrt[5]{x}$.
Exercice 4.63 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : x \mapsto \sin x \ln(5x)$.
Exercice 4.64 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : t \mapsto \dfrac{1+\ln t}{1-\ln t}$.
Exercice 4.65 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $F : t \mapsto \ln \dfrac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}$.
Exercice 4.66 (**)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $h : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
Exercice 4.67 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $g : x \mapsto \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$.
Exercice 4.68 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $F : y \mapsto y \ln(1+e^y)$.
Exercice 4.69 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $f : u \mapsto \dfrac{\ln u}{1+\ln(2u)}$.
Exercice 4.70 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$.
Exercice 4.71 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto \ln\left|2-x-5x^2\right|$.
Exercice 4.72 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $H : z \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{a^2-z^2}{a^2+z^2}}$.
Exercice 4.73 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto \ln(e^{-x}+xe^{-x})$.
Exercice 4.74 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto [\ln(1+e^x)]^2$.
Exercice 4.75 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto 2x \log_{10}\sqrt{x}$.
Exercice 4.76 (*)
Déterminer la dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante. $y : x \mapsto \log_2(e^{-x}\cos \pi x)$.
Exercice 4.77 (**)

- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire?
- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable impaire?
- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable périodique?

Exercice 4.78 (***)
On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.
2. On note $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2\,\mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.
3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1-e)$.

Exercice 4.79 (****)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^x$.

1. Vérifier que la fonction f est bijective. On note alors g son application réciproque.

2. Sans calculer g, justifier que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

4.7 Convexité

Exercice 4.80 (***)
Étudier la convexité / concavité de la fonction

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 3}.$$

4.8 Branches infinies

4.9 Étude pratique des fonctions

Exercice 4.81 (***)
Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$;

2. $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;

3. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Exercice 4.82 (****)
Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.

3. Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

4. En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Exercice 4.83 (**)
Tracer la courbe d'équation $y = 2x^3 - 6x - 4$.

Exercice 4.84 (**)
Tracer la courbe d'équation $y = -2x^4 + x^2 + 3$.

Exercice 4.86 (**)
Tracer la courbe d'équation $y = x + 1 - \dfrac{2}{x}$.

Exercice 4.87 (**)
Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Exercice 4.94 (***)
Étudier les fonctions f définies ci-dessous

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$ sur $D =]0, 4[$.
4. $f(x) = x^2 \ln x$ sur $D =]0, +\infty[$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - e^x$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$ sur $D = \mathbb{R}^\star$.

Exercice 4.100 (****)

1. Déterminer le signe de la fonction polynomiale
$$p : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x^3 + 4x + 1 \end{array}.$$
Pour cela, on effectuera une étude des variations de p.
On admettra qu'il existe un unique réel $\beta \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right[$ tel que $p(\beta) = 0$.
2. Faire une étude complète de la fonction suivante, définies à l'aide de fonctions trigonométriques.
$$f : x \mapsto \frac{\tan x}{1 + 2\cos x}.$$
On soignera en particulier les points suivants.
   (a) Domaines de définition, de dérivabilité.
   (b) Réduction du domaine d'étude autant que possible en utilisant la périodicité et les éléments de symétrie du graphe.
   (c) Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique.
   (d) Dérivée (utiliser la fonction p pour le signe) et tableau de variations.
   (e) Représentation graphique.

Exercice 4.101 (***)
Étudier la fonction d'une variable réelle définie par la relation
$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$
en portant une attention particulière aux symétries de la courbe de f.

Exercice 4.102 (****)
Montrer
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^\star, ab \leq b \ln b + e^{a-1}.$$
À quelle condition a-t-on l'égalité ?

Exercice 4.103 (**)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.
2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation
$$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$
suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 4.104 (**)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Exercice 4.106 (**)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.

Exercice 4.107 (**)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 4.108 (***) *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

1. Justifier que l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ équivaut à l'équation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ sur un certain ensemble D à préciser.
2. Pressentir graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ sur $[0, +\infty[$.
3. Prouver qu'en tout point M_0 d'intersection des deux courbes d'équation $y = \cos(x)$ et $y = x\sin(x)$, les tangentes en M_0 à ces deux courbes sont perpendiculaires.

Rappel. Les deux droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et $y = \alpha x + \beta$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\alpha a = -1$.

Exercice 4.109 (***)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 4.110 (***)

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 4.114 (**)

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}.$$

On soignera en particulier les points suivants.

1. Domaines de définition, de dérivabilité.
2. Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique, position du graphe par rapport aux asymptote.
3. Dérivée et tableau de variations.
4. Représentation graphique.

4.10 Intégration des fonctions continues

Exercice 4.117 (*)

Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$.
4. $y = (3 - x)\sqrt{x}$, $y = 0$.
5. $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$.
6. $y = 1 - x^4$, $y = 0$.
7. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.
8. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Exercice 4.118 (*) *Calcul d'intégrale*

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 2^t \cdot 3^{2t} \cdot 5^{3t} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 4.119 (*) *Intégration par parties*

Les fonctions suivantes sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$. Utiliser l'intégration par parties pour donner une nouvelle écriture de celle proposée.

1. $\int_2^6 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_2^6 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $[u(x)v(x)]_{-3}^4 - \int_{-3}^4 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $u(3)v(3) - u(1)v(1) - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.120 (**) *Intégration par parties*

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 -xe^x\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.121 (***)

Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x \, \mathrm{d}x$.

6. $\displaystyle\int_0^{1} x \arcsin x^2 \, \mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int_0^{1} e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

8. $\displaystyle\int_0^{2} e^{-x} \cos x \, \mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int_1^{2} \sqrt{x} \ln x \, \mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\left(4 + x^2\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 4.122 (**)
À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{\pi} t \sin(3t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4.123 (**)
À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{1} t \operatorname{ch}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4.124 (**)
À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_4^{9} \frac{\ln y}{y} \, \mathrm{d}y.$$

Exercice 4.125 (***) *Intégration par parties*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t$$

Exercice 4.126 (**) *Intégration par parties*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Exercice 4.127 (**) *Intégration par parties*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^{2} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Exercice 4.128 (**)
Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.

6. $f(x) = -\dfrac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.

8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.

9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.

10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.

12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.

13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.

14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.

18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 4.129 (***)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t.$

5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t.$

8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t.$

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1+t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 4.130 (**) *Changement de variable*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.131 (***) *Changement de variable*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.133 (***) *Changement de variable*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.134 (**) *Changement de variable*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.137 (**) *Changement de variable*
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4.138 (**) *Changement de variable*

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 4.139 (***) *Changement de variable, intégration par parties*

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1 - t}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 4.142 (***) *Changement de variable*

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos t}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 4.143 (***)

On fait semblant de ne pas connaître la fonction logarithme. Montrer que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$

$$\int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$