Chapter 20 Polynômes

20.1 Polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

20.2 Polynômes dérivés

Solution 20.1

1. Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. On a $P' = \sum_{n\geq 1} a_n n X^{n-1}$ et $P'' = \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)X^{n-2}$, d'où

$$\begin{aligned} X^2P'' + 2XP' - 2P &= \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)X^n + 2\sum_{n\geq 1} a_n n X^n - 2\sum_{n\geq 0} a_n X^n \\ &= -2a_0 + 2a_1X - 2a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n \left(n(n-1) + 2n - 2\right) X^n \\ &= -2a_0 + \sum_{n\geq 2} a_n \left(n^2 + n - 2\right) X^n. \end{aligned}$$

Or un polynôme est nul si, et seulement si ses coefficient sont nuls. On en déduit donc

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 a_n \left(n^2 + n - 2\right) = 0.$$

Or $n^2 + n - 2 = 0$ si, et seulement si $n \in \{ -2, 1 \}$, ainsi

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 a_n = 0 \iff P = a_1X.$$

Conclusion

Les solutions de l'équation $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$ sont les polynômes de la forme aX avec $a \in \mathbb{R}$.

2. La résolutions est similaire. On obtient cette fois ci,

$$\begin{aligned} X^2P'' + 2XP' - P &= \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)X^n + 2\sum_{n\geq 1} a_n n X^n - 2\sum_{n\geq 0} a_n X^n \\ &= -a_0 + 2a_1X - a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n \left(n(n-1) + 2n - 1\right) X^n \\ &= -a_0 + a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n \left(n^2 + n - 1\right) X^n. \end{aligned}$$

Or $n^2 + n - 1 = 0$ si, et seulement si $n \in \{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \}$ (impossible avec $n \in \mathbb{N}$). On a donc

$$X^2P'' + 2XP' - P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2, a_n = 0 \iff P = 0.$$

L'unique solution de l'équation $X^2P'' + 2XP' - P = 0$ est le polynôme $P = 0$.

Solution 20.3

1. P n'est pas le polynôme nul et si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$ on a pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{P^{(k)}}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i X^{i-k},$$

Finalement,

$$\frac{P^{(k)}(1)}{k!} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ est impair, donc non nul.

- Si x est pair, on écrit
$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x^j = P(0) + x \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1},$$
donc $P(x)$ a même parité que $P(0)$ et $P(x)$ est impair.
- Si x est impair, alors par application de la formule de Taylor pour les polynômes au point 1, on a
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + (x-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^{k-1},$$
donc d'après la question **1**. et le fait que $x-1$ est pair, on en conclut que $P(x)$ et $P(1)$ ont même parité donc que $P(x)$ est impair.

Finalement, P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Solution 20.4

0 et 1 sont racines d'ordre n de P, donc
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = 0.$$
$\deg P = 2n$, donc
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2n \implies P^{(k)} = 0$$
ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2n \implies P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = 0.$$
Il reste à determiner $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![n, 2n]\!]$.

En utilisant la formule de Taylor au point $a = 0$, on obtient
$$P = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$
car $P^{(k)}(0) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc
$$\frac{1}{n!} X^n (X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^{n+k} = \frac{1}{n!} X^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$
et puisque $\mathbb{R}[X]$ est intègre,
$$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$
et donc
$$\forall k \in [\![0, n]\!], P^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{n!}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$$
ce que l'on peut écrire
$$\forall k \in [\![n, 2n]\!], P^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{k!}{n!}\binom{n}{k-n} = (-1)^k \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}.$$
De manière analogue avec la formule de Taylor au point 1, on obtient
$$\forall k \in [\![n, 2n]\!], P^{(k)}(1) = \frac{k!}{n!}\binom{n}{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}.$$

20.3 Division dans $\mathbb{K}[X]$

Solution 20.5

1. Quotient $Q = 3X^2 + 2X - 3$, reste $R = -9X^2 - X + 7$.
2. Quotient $Q = 0$, reste $R = X^3 + X + 2$.
3. Quotient $Q = 4X^4 + 9X^2 + 3X$, reste $R = 2X + 1$.
4. Quotient $Q = X^2 + (-1 + 2i)X - 3i$, reste $R = 3 + 3i$.
5. Quotient $Q = X - 3$, reste $R = 5$.
6. Quotient $Q = X^2 + X - 1$, reste $R = 0$.
7. Quotient $Q = X^2 - 1$, reste $R = X^2$.
8. Quotient $Q = X^2 + 2X + 1$, reste $R = 0$.

Solution 20.6

On effectue la division euclidienne de A par B, on trouve

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + a - 2) + (b - 2)X + 6 - 2a.$$

Or le polynôme B divise A si, et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, c'est-à-dire

$$(b-2)X + 6 - 2a = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} b-2 & = 0 \\ 6-2a & = 0 \end{array} \right. \iff a = 3 \text{ et } b = 2.$$

Solution 20.7

On note Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$, on a donc

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{1}$$

On peut donc noter $R = a + bX$. On remarque que les racines de $X^2 - X - 2$ sont 2 et -1. En substituant à X ses deux valeurs dans la relation (1), on obtient

$$\begin{aligned} 2^n &= 0 \times Q(2) + a + 2b \\ (-1)^n &= 0 \times Q(-1) + a - b \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{rl} a + 2b & = 2^n \\ b - b & = (-1)^n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} a & = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \\ b & = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \end{array} \right. \iff R = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} + \frac{2^n - (-1)^n}{3} X.$$

Solution 20.8
Solution 20.9

1. Notons Q et R, le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$. On a

$$P = X(X-1)Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{1}$$

On peut donc écrire $R = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. En substituant à X les valeurs 0 et 1 dans l'équation (2), on obtient les équations

$$P(0) = 0Q(0) + b \text{ et } P(1) = 0Q(1) + a + b,$$

c'est-à-dire $b = 1$ et $a + b = 2$. On a donc $R = X + 1$.

2. Notons Q et R, le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$. On a

$$P = (X-1)^2 Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{2}$$

On peut donc écrire $R = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc $P - R = (X-1)^2 Q$: l'ordre de multiplicité de1 comme racine de $P - R$ est donc au moins 2. On a donc,

$$(P-R)(1) = 0 \text{ et } (P-R)'(1) = 0$$

c'est-à-dire, puisque $P - R = X^n + 1 - aX - b$,

$$2 - a - b = 0 \text{ et } n - a = 0.$$

c'est-à-dire $a = n$ et $b = 2 - n$. On a donc $R = nX + 2 - n$.

Variante. On peut utiliser la formule de Taylor. Voir exercice **??**.

Solution 20.10

En notant $P = X^n$, on a pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k}$. La formule de Taylor pour les polynôme appliqué à P au point 1 donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3 \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-3}$$

Le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$ est donc le polynôme

$$\begin{aligned} P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 &= 1 + n(X-1) + \frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}X^2 - n(n-2)X + \frac{n(n-3)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Solution 20.11

1. On trouve $\left(A - I_2\right)^2 = 0$.

2. On considère la division euclidienne de X^{100} par $(X-1)^2$. Il existe des polynômes Q, R tels que

$$X^{100} = (X-1)^2 Q + R \text{ et } \deg R < 2.$$

On peut donc écrire R sous la forme $R = aX + b$. En substituant 1 à X dans la relation $X^{100} = (X-1)^2 Q + R$, on obtient

$$1 = 0Q(1) + a + b,$$

c'est-à-dire $a+b = 1$. En dérivant cette même relation, on obtient $100X^{99} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + R'$ que l'on évalue en 1 pour obtenir

$$100 = 0Q(1) + 0Q'(1) + a$$

c'est-à-dire, $a = 100$. Ainsi, on a $R = 100X - 99$. Puisque toutes les puissances de A commutent deux à deux, on a donc

$$A^{100} = (A - I_2)^2 Q(A) + R(A),$$

c'est-à-dire

$$A^{100} = 100A - 99I_2 = \begin{pmatrix} 51 & 50 \\ -50 & -49 \end{pmatrix}.$$

Variante On utilise la formule du binôme en remarquant que $A = (A - I_2) + I_2$ et que $A - I_2$ et I_2 commutent.

20.4 Racines

Solution 20.12

A a pour racine apparente -1, et l'on factorise

$$A = (X+1)(X^2 - X + 1).$$

On en déduit quatre diviseurs de A dans $\mathbb{R}[X]$ de degrés distincts

$$1, \quad X+1, \quad , X^2 - X + 1, \quad X^3 + 1.$$

Solution 20.14

1. On a $P(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 44 \cdot 2 + 24 = 0$, donc 2 est racine de P.
2. On a $P' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$ et $P'(2) = 0$, $P'' = 12X^2 - 54X + 60$ et $P''(2) = 0$, $P''' = 24X - 54$ et $P'''(2) = -6 \neq 0$. 2 est donc une racine d'ordre 3 pour P.
3. On met en facteur $(X-2)^3$ dans P (par exemple, en effectuant la division euclidienne) et on obtient $P = (X-3)(X-2)^3$.

   Le polynôme P n'a donc qu'une racine distincte de 2, c'est 3 et elle est d'ordre 1.
4. Le polynome Q divise P si, et seulement si, Q est associé à un polynôme de la forme

$$(X-3)^a (X-2)^b \quad \text{où} \quad a \in \{0,1\} \text{ et } b \in \{0,1,2,3\}.$$

Solution 20.16

Solution 20.17

Notons a, b, c les racines (avec multiplicité) de P telles que $a + b = -1$. Les relation entre racines et coefficients permettent d'écrire

$$a + b + c = -5 \qquad \text{et} \qquad abc = 48.$$

Puisque $a + b = -1$, on a donc $c = -4$ puis $ab = -12$. Alors, a et b sont également les racines du polynôme $X^2 + X - 12$, c'est-à-dire -4 et 3.

Finalement, les racine de P sont -4 (ordre 2) et 3 (ordre 1).

Solution 20.20

(CN) Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit racine d'ordre au moins 2, alors

$$P_n(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$
$$\text{et } P_n'(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

En soustrayant ces deux relation, on obtient $\alpha^n = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$.

(CS) On a $P_n(0) = 1$, donc 0 n'est pas racine de P_n.

Conclusion

Le polynôme P_n n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Solution 20.22

20.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Solution 20.24
Solution 20.25 *Arithmétique autour des polynômes* $X^n - 1$
Solution 20.26
Solution 20.27
Solution 20.28

20.6 Décomposition en facteurs irréductibles

Solution 20.29 *Factorisation d'un polynôme dans* $\mathbb{R}[X]$

On a

$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3 + 3j + 3j^2 = 0$$

puisque $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$ et

$$P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 6 + 6j + 6j^2 = 0.$$

Ainsi, j est racine d'ordre au moins 2 pour P. Or P étant à coefficients réel, $\bar{j} = j^2$ est également racine d'ordre au moins 2 pour P. Puisque P est de degré 4, on en déduit que les seule racine de P sont j et $\bar{j}$ et qu'elle sont d'ordre 2. Et puisque le coefficient dominant de P est 1, on a

$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2.$$

Finalement, en regroupant les conjugués, on obtient la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X^2 + X + 1)^2.$$

Solution 20.31

1. 1, j et j^2 sont les trois racines cubiques de l'unité donc $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$, d'où

   $$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(1 + j + j^2) = 0$$

   Donc j est racine de P ; déterminons son ordre de multiplicité à l'aide du critère différentiel. On a

   $$\begin{aligned} P' &= 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X \\ P'(j) &= 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(1 + j + j^2) = 0 \\ P'' &= 56X^6 + 60X^4 + 36X^2 + 4 \\ P''(j) &= 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4 = 56 + 60j + 36j^2 + 4 = 60(1 + j + j^2) - 24j^2 = -24j^2 \neq 0. \end{aligned}$$

   Donc j est racine d'ordre 2 de P.

2. P est pair donc $P(-j) = 0$; P' est impair donc $P'(-j) = -P'(j) = 0$ et P'' est pair donc $P''(j) = P''(-j) \neq 0$.

   Donc $-j$ est racine double de P.

3. Puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $\bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont également racines doubles de P. Comme P est de degré 8 et de coefficient dominant 1, on a

   $$P = (X - j)^2(X + j)^2(X - \bar{j})^2(X + \bar{j})^2.$$

En regroupant les termes conjugués

$$(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(j)X + j\bar{j} = X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1 = X^2 + X + 1,$$
$$(X + j)(X + \bar{j}) = X^2 + 2\,\mathfrak{Re}(j)X + j\bar{j} = X^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1 = X^2 - X + 1.$$

On obtient ainsi la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

Solution 20.32 *Factorisation d'un polynôme dans* $\mathbb{C}[X]$
Solution 20.33

Si $\deg P = 0$, alors P est le polynôme constant égal à 1 puisque son terme dominant est 1, ce qui est contraire à l'hypothèse $|P(z)| < 1$.

Donc P est un polynôme de degré $n \geq 1$.

D'après le théorème de D'Alembert, P admet n racines complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distinctes ou confondues. Comme son coefficient dominant est égal à 1, il se factorise sous la forme

$$P = \prod_{k=1}^{n}\left(X - x_k\right).$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que toutes ces racines sont réelles, alors, pour tout k, on a

$$|i - x_k| = \sqrt{1 + x_k^2} \geq 1$$

par conséquent

$$|P(i)| = \prod_{k=1}^{n}|i - x_k| \geq 1$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur P.

Donc P admet au moins une racine complexe non réelle.

Solution 20.35

20.7 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Petits problèmes

Solution 20.36
Solution 20.37