CHAPITRE 51

CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre, On considère l'espace vectoriel euclidien canonique $E = \mathbb{R}^2$. Le plus souvent, U est un ouvert de E et $a \in U$.

Exemple d'introduction : Calcul du volume de la Terre

On suppose la terre sphérique, son volume est donc

$$V = \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

Le rayon de la terre R_T est mesuré avec une erreur de $\mathrm{d}R_T$ de signe quelconque. Pour calculer l'erreur sur le volume, on introduit

$$V : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ R & \mapsto & \frac{4}{3}\pi R^3 \end{array}$$

On a alors

$$\frac{V(R_T + \mathrm{d}R_T) - V(R_T)}{\mathrm{d}R_T} \simeq V'(R_T) \text{ car } |\mathrm{d}R_T| \ll R_T$$

On en déduit une valeur approchée de l'erreur commise dans la mesure du volume de la terre

$$\boxed{V(R_T + \mathrm{d}R_T) - V(R_T) \simeq 4\pi R_T^2 \,\mathrm{d}R_T.}$$

On suppose maintenant la terre ellipsoïdale, applatie au pôles. Soit a_T son demi grand axe et b_T son demi petit axe. Le volume de la terre est

$$\frac{4}{3}\pi a_T^2 b_T.$$

On suppose que a_T a été mesuré à $\mathrm{d}a_T$ prés et b_T mesuré à $\mathrm{d}b_T$. On considère la fonction

$$V : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \to &]0,+\infty[\\ (a,b) & \mapsto & \frac{4}{3}\pi a^2 b \end{array}$$

L'erreur commise dans la mesure du volume de la terre est alors

$$\begin{aligned} V(a_T + \mathrm{d}a_T, b_T + \mathrm{d}b_T) - V(a_T, b_T) &= \overbrace{V(a_T + \mathrm{d}a_T, b_T + \mathrm{d}b_T) - V(a_T, b_T + \mathrm{d}b_T)}^{\text{variation de } V(\cdot, b_T + \mathrm{d}b_T) \text{ entre } a_T \text{ et } a_T + \mathrm{d}a_T} \\ &\quad + \underbrace{V(a_T, b_T + \mathrm{d}b_T) - V(a_T, b_T)}_{\text{variation de } V(a_T, \cdot) \text{ entre } b_T \text{ et } b_T + \mathrm{d}b_T} \\ &\simeq \frac{\partial V}{\partial a}(a_T, b_T + \mathrm{d}b_T)\,\mathrm{d}a_T + \frac{\partial V}{\partial b}(a_T, b_T)\,\mathrm{d}b_T \end{aligned}$$

En conclusion, une valeur approchée de l'erreur commise dans la mesure du volume de la terre est

$$\boxed{V(a_T + \mathrm{d}a_T, b_T + \mathrm{d}b_T) - V(a_T, b_T) \simeq \frac{8}{3}\pi a_T b_T\,\mathrm{d}a_T + \frac{4}{3}\pi a_T^2\,\mathrm{d}b_T.}$$

51.1 Calcul différentiel

Remarque Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que, pour $h \in E$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

où le symbole $o(h)$ désigne n'importe quelle fonction ω telle que le rapport $\|\omega(h)\|/\|h\|$ tende vers 0 lorsque $h \to 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall h \in E, \|h\| \leq r \implies \|\omega(h)\| \leq \varepsilon\|h\|.$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. Comme elle dépend du point a, on la note $\mathrm{d}f(a)$.

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est **différentiable** sur U et l'application

$$\mathrm{d}f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

s'appelle la **différentielle** de f.

§1 Notation différentielle

Définition 1 On dit qu'une application φ, définie au voisinage de $(0,0)$, est **négligeable** devant $\|(x,y)\|$ en $(0,0)$ s'il existe une application ε telle que pour (x,y) au voisinage de $(0,0)$

$$\varphi(x,y) = \varepsilon(x,y).\|(x,y)\| \text{ et } \varepsilon(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

On note alors

$$\varphi(x,y) = o\left(\|(x,y)\|\right) \text{ lorsque } (x,y) \to (0,0).$$

Cela revient encore à montrer que

$$\varphi(0,0) = 0 \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Définition 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour $v \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on ait

$$f(a+v) = f(a) + L(v) + o(\|v\|).$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. Comme elle dépend du point a, on la note $\mathrm{d}f(a)$.
Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est **différentiable** sur U et l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

s'appelle la **différentielle** de f.

Ainsi $\mathrm{d}f(a)$ est l'analogue pour une fonction de plusieurs variables du nombre dérivé, et $\mathrm{d}f$ est l'analogue de la fonction dérivée.

Pour $a \in U$ fixé, l'application $v \mapsto \mathrm{d}f(a)(v)$ est linéaire. Rapportons $\mathbb{R}^2$ à la base canonique (e_1, e_2), alors pour tout$v = (h, k) = he_1 + ke_2$,

$$\mathrm{d}f(a)(v) = h\,\mathrm{d}f(a)(e_1) + k\,\mathrm{d}f(a)(e_2).$$

Si l'on note $a = (x, y)$, $\alpha(x, y) = \mathrm{d}f(x, y)(e_1)$ et $\beta(x, y) = \mathrm{d}f(x, y)(e_2)$, alors

$$\mathrm{d}f(x, y)(h, k) = \alpha(x, y)h + \beta(x, y)k.$$

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Pour $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= (x+h)(y+k) - xy \\ &= yh + xk + hk \\ &= yh + xk + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en tout point $a = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f(a) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (h, k) & \mapsto & yh + xk \end{array}.$$

Exemple 4

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire, l'égalité $f(a+v) = f(a)+f(v)$ montre que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathrm{d}f(a) = f$ pour tout a.

Proposition 5

Une application différentiable en un point est continue en ce point.

§2 Dérivée suivant un vecteur

La notion d'ouvert permet de considérer des limites dans toutes les directions, ce qui généralise les limites à gauche et à droite.

Lemme 6 *Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in A$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall t \in]-\delta, \delta[, a + t\vec{v} \in A$$

Ce lemme caractérise d'ailleurs les parties ouvertes.

Définition 7 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, $a = (x, y) \in U$, v un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet une **dérivée** en a selon le vecteur v si l'application définie au voisinage de 0

$$\begin{array}{rccc} f_v : &]-\delta, \delta[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(a + tv) \end{array}$$

est dérivable en 0, c'est-à-dire lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$ admet une limite en 0. Cette limite est appelé **dérivée** de f au point a selon le vecteur v et est notée $D_v f(a)$.

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

En notant

$$\begin{aligned} a &= (x, y), \\ v &= (h, k), \\ M(t) &= (x + th, y + tk, f(a + tv)) \\ \text{et } \ A = M(a) &= (x, y, f(x, y)), \end{aligned}$$

on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \overrightarrow{AM(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(th, tk, f(a + tv) - f(a))}{t} = (h, k, \mathrm{D}_v f(a))$$

Lorsque v est unitaire, $\mathrm{D}_v f(a)$ est la pente de la tangente du graphe de f_v.

Proposition 8 *Si f est différentiable au point a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a*

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

Une application peut avoir en un point des dérivées selon tout vecteur et être non continue en ce point, et donc a fortiori non différentiable en ce point.

Exemple 9 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0, \\ y & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées selon tout vecteur.
2. L'application f est-elle continue en $(0, 0)$?

Démonstration. **1.** Soit $v = (h,k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

(a) Si $h \neq 0$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star, \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2k^2}{t^2h} = \frac{k^2}{h}.$$

Ce qui prouve que f est dérivable selon le vecteur $v = (h,k)$ avec $\mathrm{D}_v f(0,0) = \frac{k^2}{h}$.

(b) Si $h = 0$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star, \frac{f(0,tk) - f(0,0)}{t} = \frac{tk}{t} = k.$$

Ce qui prouve que f est dérivable selon le vecteur $v = (0,k)$ avec $\mathrm{D}_v f(0,0) = k$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}^\star$, $f(t^3,t) = \frac{1}{t}$. Ainsi

$$\lim_{t\to 0}(t^3,t) = (0,0) \text{ et } \lim_{t\to 0} f(t^3,t) = +\infty.$$

Ceci prouve que f n'est pas continue en $(0,0)$.

∎

§3 Dérivées partielles

Définition 10 Lorsque f est dérivable en $a = (x,y)$ selon les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on dit que f admet des **dérivées partielles premières** en a.

- Le nombre $\mathrm{D}_{e_1} f(a)$ est noté plus simplement $\partial_1 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
- Le nombre $\mathrm{D}_{e_2} f(a)$ est noté plus simplement $\partial_2 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

On a alors

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe si et seulement si l'application partielle $f_y = f(*,y)$ est dérivable en x et dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe si et seulement si l'application partielle $f_x = f(x,*)$ est dérivable en x et dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_x'(y)$.

En pratique, cela signifie que l'on calcule, dans la plupart des cas, les dérivées partielles au moyen des formules de dérivation usuelles, en y regardant une des variables comme une constante.

Les notations $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont utilisées lorsque les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont notés (x,y). Lorsqu'ils sont notés (x_1,x_2), les dérivées partielles en A sont plutôt notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$.

Exemple 11

$P(V,T) = \frac{nRT}{V}$. P admet des dérivées partielles premières sur $]0,+\infty[^2$ et

$$\forall (V,T) \in]0,+\infty[^2, \frac{\partial P}{\partial V}(V,T) = -\frac{nRT}{V^2} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial T}(V,T) = +\frac{nR}{V}$$

Proposition 12

Si f est différentiable au point a, alors f admet des dérivées partielles en a.
Dans ce cas,

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{d}f(a)\cdot e_1$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{d}f(a)\cdot e_2$$

Test 13

Fonctions admettant des dérivées partielles mais qui ne sont pas continues
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

3. Mêmes questions avec

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$$

§4 Opérations sur les dérivées partielles

Proposition 14

Opérations sur les dérivées partielles
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x,y) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux applications, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

1. *Si f est g possèdent une dérivée partielle par rapport à x en a, alors c'est aussi le cas pour toute combinaison linéaire de f et g ainsi que du produit fg. Dans ce cas, on a pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}(a) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \mu\frac{\partial g}{\partial x}(a) \text{ et } \frac{\partial fg}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a).$$

2. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivable au point a et*

$$\frac{\partial 1/g}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{(g(a))^2} \text{ et } \frac{\partial f/g}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{(g(a))^2}.$$

3. *On suppose que $f(U) \subset I$, que f possède une dérivée partielle par rapport à x en a et que φ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ possède une dérivée partielle par rapport à x en a et*

$$\frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

On a, bien sûr, des résultats analogues pour les dérivées partielles par rapport à y.

Les résultats de la proposition 14 induisent des théorèmes opératoires «naturels» que nous résumerons en 27.

§5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 15 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^1$** si ses dérivées partielles existent en tout $a \in U$ et si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U (en tant que fonctions de deux variables).

Exemple 16 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

§6 Développement limité à l'ordre 1

Théorème 17 **Formule de Taylor-Young à l'ordre 1**
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f admet un ***développement limité à l'ordre 1*** *en a, c'est-à-dire*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + o(\|(h, k)\|).$$

lorsque $(h, k) \to (0, 0)$.

De manière équivalente, on peut écrire

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right).$$

lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Démonstration. Admise. ∎

Notation L'application $p_1 : (x, y) \mapsto x$, que l'on note parfois x (attention aux confusions!) est de classe $\mathscr{C}^1$ et a pour différentielle en a la fonction $(h, k) \mapsto h$. De même la deuxième fonction coordonnée $(x, y) \mapsto y$ a pour différentielle $(h, k) \mapsto k$.

Dans ce contexte, on a l'habitude de noter $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les formes linéaires coordonnées

$$\mathrm{d}x : (h,k) \mapsto h \quad \mathrm{d}y : (h,k) \mapsto k$$

plutôt que $\mathrm{d}(p_1)(x,y)$ comme, théoriquement, on devrait le faire. Avec ces notations, on peut écrire pour $a \in U$

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}).$$

On simplifie encore cette écriture pour retenir finalement

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \in \mathscr{F}(U,\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})).$$

♥ Cette notation est dite **notation différentielle**. Les physiciens et chimistes utilisent fréquemment cette dernière formule en l'interprétant comme l'égalité entre une variation infiniment petite de $f(x,y)$ et des variations infiniment petites des variables x et y.

Théorème 18 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a=(x_0,y_0)\in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est différentiable et sa différentielle au point a est*

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot k \end{array}.$$

C'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Corollaire 19 *Une application de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.*

Corollaire 20 *Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Alors f admet des dérivées directionnelles $\mathrm{D}_v f(a)$ en tout point $a=(x_0,y_0)\in U$ et suivant tous les vecteurs $v=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ avec*

$$\mathrm{D}_{(h,k)} f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot k = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k.$$

Exemple 21 Avec les notations de physiciens.

- $r=\sqrt{x^2+y^2}$. On a $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ d'où

$$\mathrm{d}r = \frac{x}{r}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{r}\,\mathrm{d}y$$

- Avec $\theta = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ l'argument principal de $x+iy$, défini sur $\mathbb{R}^2\backslash]-\infty,0]\times\{0\}$. on a $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}$, d'où

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{y}{r^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{r^2}\,\mathrm{d}y$$

Remarque **Fonction différentiable qui n'est pas $\mathscr{C}^1$**
La réciproque du théorème est fausse. Une application qui admet un DL^1 n'est pas toujours de classe $\mathscr{C}^1$. Elle l'était déjà pour les fonctions d'une variable ; dans la veine de notre contre exemple préféré ($f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$), l'application

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admet un DL^1 en $(0, 0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition 22 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a = (x_0, y_0) \in U$. Le **plan tangent** au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

§7 Vecteur gradient

Définition 23 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. On appelle **vecteur gradient**, ou **gradient** de f en a l'unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}f(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

On note également ce vecteur $\operatorname{grad} f(a)$.

On peut encore noter $\mathrm{d}f(a) = \langle \nabla f(a), * \rangle$ ou même $\mathrm{d}f = \langle \nabla f, * \rangle$.

Proposition 24 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. Alors*

$$f(a + v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + o(\|v\|) \text{ quand } v \to (0, 0).$$

Corollaire 25 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$.*

1. *On a*

$$\nabla f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot e_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

2. *Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Exemple 26

Avec $f : (x,y) \mapsto x^3y + 3xy^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2y + 3y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^3 + 6xy, \\
\mathrm{d}f(x,y) &= (3x^2y+3y^2)\,\mathrm{d}x + (x^3+6xy)\,\mathrm{d}y, \\
\nabla f(x,y) &= (3x^2y+3y^2, x^3+6xy), \\
\mathrm{d}f(x,y)\,((h,k)) = D_{(h,k)}f(x,y) &= (3x^2y+3y^2)h + (x^3+6xy)k.
\end{aligned}$$

Le vecteur gradient peut s'interpréter géométriquement.

- On a vu que la dérivée en a suivant le vecteur v est $\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle$. Lorsque v est unitaire, elle représente la pente de la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}_v$ intersection du graphe de f avec le plan $a + \mathrm{Vect}(v, e_3)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left\|\mathrm{D}_v f(a)\right\| \leq \|\nabla f(a)\|$ prouve que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_v$ ont des pentes de valeur absolue inférieure ou égale à $\|\nabla f(a)\|$, l'égalité n'ayant lieu que pour v colinéaire à $\nabla f(a)$. La direction du vecteur gradient donne donc la direction de la plus grande pente et son module la valeur de la plus grande pente.
- Le vecteur gradient est orthogonal aux lignes de niveau et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

§8 Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$

Proposition 27

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x,y) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

1. *Toute combinaison linéaire de f et g est de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas, on a pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y}.$$

2. *Le produit de f et g est de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas,*

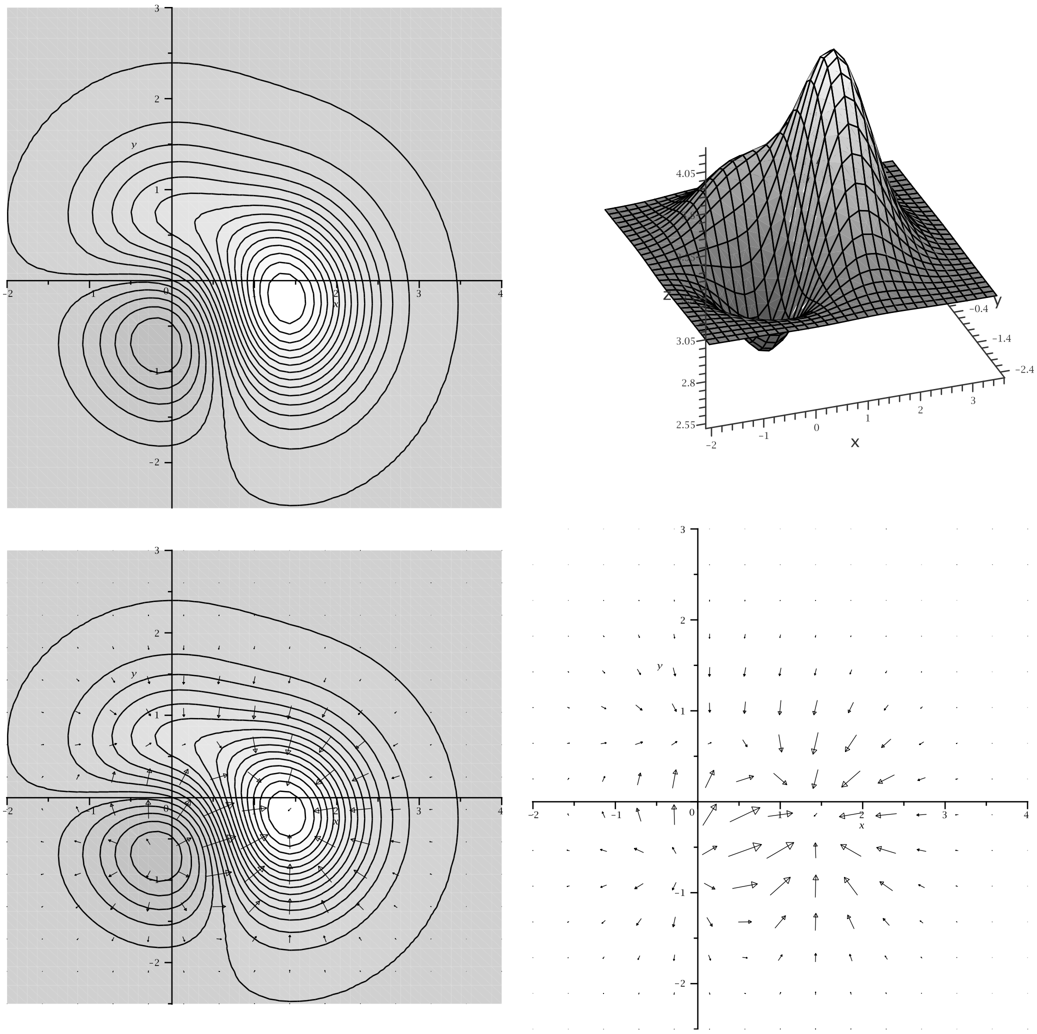
$$\frac{\partial fg}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial fg}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y}.$$

3. *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\frac{\partial 1/g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{(g)^2} \qquad \frac{\partial 1/g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{(g)^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f/g}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{(g)^2} \qquad \frac{\partial f/g}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{(g)^2}.$$

Figure 51.1: Vecteur gradient et lignes de niveau



Corollaire 28 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

Corollaire 29

1. *Les fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition.*
2. *Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ «ne dépendant que d'une variable», c'est-à-dire de la forme $(x,y)\mapsto\varphi(x)$ avec $\varphi\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, sont de classe $\mathscr{C}^1$.*

Proposition 30 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.*

- *L'application $\lambda f+\mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\nabla(\lambda f+\mu g)=\lambda\nabla f+\mu\nabla g.$$
- *L'application fg est de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\nabla(fg)=f.\nabla g+g.\nabla f.$$
- *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\nabla\left(\frac{1}{g}\right)=-\frac{\nabla g}{g^2}\qquad\qquad\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g.\nabla f-f.\nabla g}{g^2}.$$

Proposition 31 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.*

- *L'application $\lambda f+\mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\mathrm{d}(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\mathrm{d}f+\mu\,\mathrm{d}g.$$
- *L'application fg est de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\mathrm{d}(fg)=f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f.$$
- *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{g}\right)=-\frac{1}{g^2}\,\mathrm{d}f\qquad\qquad\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,\mathrm{d}f-f\,\mathrm{d}g}{g^2}.$$

§9 Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Fonctions numériques

Remarque Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.

Dans ce cas, la notion de fonction différentiable coïncide avec la notion de fonction dérivable. On a alors la relation

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1).$$

Arc paramétrés

Remarque Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2, t \mapsto$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.

Lorsque $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, cela est équivalent à x et y dérivable en a :

$$x(a+h) = x(a) + x'(a)h + o(h) \qquad y(a+h) = y(a) + y'(a)h + o(h)$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x(a+h) \\ y(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h) \\ o(h) \end{pmatrix}.$$

On note alors $f'(a) = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

En particulier

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1).$$

Champs de vecteurs

Définition 32 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour $v \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on ait

$$f(a+v) = f(a) + L(v) + o(v).$$

où le symbole $o(v)$ désigne cette fois ci n'importe quelle fonction telle que le rapport $\|o(v)\|/\|v\|$ tende vers 0 avec v.

Si L existe, on appelle L **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.

Définition 33 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2) : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur U si f_1 et f_2 le sont.

On peut alors écrire $f = f_1 e_1 + f_2 e_2$ et $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_1 e_1 + \mathrm{d}f_2 e_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$
$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

51.2 Composition

§1 Composition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Théorème 34 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions de classes $\mathscr{C}^1$

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$$

telles que $f(U) \subset I$. Alors, la fonction de deux variables réelles

$$\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(f(x,y)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et pour tout $a \in U$,

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Autrement dit,
$$\nabla(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \times \nabla f(a).$$

§2 Composition $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Théorème 35 $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\gamma : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \qquad et \qquad f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

telles que $\gamma(I) \subset U$. Alors, la fonction d'une variable réelle

$$f \circ \gamma : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\,(x(t), y(t)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

Autrement dit

$$\frac{\partial (f \circ \gamma)}{\partial t}(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Remarque

$$\forall t \in I, \frac{\partial (f \circ \gamma)}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{\partial y}{\partial t}(t).$$

ou plus simplement, avec des notations de physicien,

$$\frac{\partial f \circ \gamma}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

car le physicien confond systématiquement la fonction et sa valeur.

§3 Composition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Théorème 36 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. On considère deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) \end{array} \qquad et \qquad f : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

telles que $\varphi(U) \subset V$. Alors la fonction de deux variables réelles

$$f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f\,(u(x, y), v(x, y)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et pour $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x}(x, y) = (\partial_1 f)(\varphi(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + (\partial_2 f)(\varphi(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$
$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y}(x, y) = (\partial_1 f)(\varphi(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + (\partial_2 f)(\varphi(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

Remarque Dans un souci de lisibilité, posons $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ et $g = f \circ \varphi$. On a donc

$$g(x, y) = f \circ \varphi(x, y) = f(u, v).$$

Notons $\frac{\partial f}{\partial u} = \partial_1(f)$ et $\frac{\partial f}{\partial v} = \partial_2(f)$. Cela revient à considérer les variables de f comme étant u et v au lieu de x et y dans le calcul des dérivées partielles.

On peut maintenant écrire notre formule d'une autre manière, importante, car il s'agit de l'usage standard en physique.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Les notations ont été choisies de sorte que $\frac{\partial *}{\partial x}$ et $\frac{\partial *}{\partial y}$ s'appliquent en (x, y) et $\frac{\partial *}{\partial u}$ et $\frac{\partial *}{\partial v}$ s'appliquent en (u, v).

Exemple 37 Avec $f(x, y) = xy^2$ et $\varphi(x, y) = (x + y, xy)$.

1. Pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $u = x + y$ et $v = xy$. Alors $f \circ \varphi(x, y) = f(u, v) = uv^2$ et on a

$$\frac{\partial uv^2}{\partial u} = v^2, \quad \frac{\partial uv^2}{\partial v} = 2uv, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

   En vertu du théorème

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x}(x, y) = v^2 + 2uvy = x^2y^2 + 2(x + y)xy^2 = 3x^2y^2 + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial y}(x, y) = v^2 + 2uvx = x^2y^2 + 2(x + y)x^2y. = 2x^3y + 3x^2y^2$$

2. On vérifie directement $f \circ \varphi(x, y) = (x + y)x^2y^2 = x^3y^2 + x^2y^3$.

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy^3 \qquad\qquad \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial y}(x, y) = 2x^3y + 3x^2y^2$$

§4 Résultat général

Corollaire 38 *Soient $n, p, q \in \{1, 2\}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ deux ouverts et $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : V \to \mathbb{R}^n$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f(U) \subset V$. Alors pour $a \in U$,*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = (\mathrm{d}g(f(a))) \circ (\mathrm{d}f(a)).$$

§5 Matrice Jacobienne

Définition 39 Soient $n, p \in \{ 1, 2 \}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$ la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) est $\partial_j f_i(a)$, où les f_i sont les fonctions coordonnées de f. On note

$$\operatorname{Jac}_a f = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Exemples 40

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice ligne
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$
qui s'identifie naturellement au vecteur $\nabla f(a)$.
2. Si $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice colonne
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix}.$$
Puisque f est une fonction d'une seule variable réelle, il s'agit de la dérivée usuelle d'une fonction à valeurs vectorielles.
3. Si $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice carrée
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice $(1, 1)$: $\operatorname{Jac}_a f = (f'(a))$ qui s'identifie avec le nombre dérivé de f en a.

Exemple 41 Avec $\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$,

$$\operatorname{Jac}_{(r,\theta)} \varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposition 42 *La matrice jacobienne* $\operatorname{Jac}_a f$ *est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire* $\mathrm{d}f(a)$.

Proposition 43 *Soient $n, p, q \in \{ 1, 2 \}$, $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$ deux ouverts et $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : V \to \mathbb{R}^n$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et si $a \in U$, on a*

$$\operatorname{Jac}_a(g\circ f) = (\operatorname{Jac}_{f(a)} g) \times (\operatorname{Jac}_a f).$$

51.3 Changements de variables

§1 Difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 44 Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Une application $f : U \to V$ est un **difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$** si f est bijective, et si f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition 45 *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tout $a \in U$,*

$$\mathrm{Jac}_{f(a)}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Jac}_a f\right)^{-1}.$$

Remarques

- Cet énoncé est l'exact analogue de l'énoncé équivalent pour une fonction d'une seule variable : $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.
- Si f est un difféomorphisme, on a pas besoin de déterminer f^{-1} pour déterminer ses dérivées partielles. Il suffit d'inverser la matrice jacobienne de f.

§2 Passage en coordonnées polaires

Proposition 46 *Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \leq 0 \}$, $V =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & V & \to & U \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \psi : & U & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

Alors φ et ψ sont deux difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^1$ réciproques l'un de l'autre.

Remarque Pour le physicien, une fonction f (penser à T une température ou P une pression) désigne une grandeur physique, qui a une existence indépendante du choix des variables utilisées pour la décrire. Par exemple, un physicien désignera de la même lettre la température en un point d'une plaque infinie exprimée en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires. Si par exemple la température est inversement proportionnelle à la distance à $(0,0)$, on aura

$$T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{mais} \quad T(r,\theta) = \frac{k}{r}.$$

Mais que désigne alors $T(2,3)$? C'est pour cela qu'un mathématicien n'utilisera pas le même symbole pour ces deux fonctions. On écrira préférentiellement $T(x,y)$ et $\tilde{T}(r,\theta) = T(r\cos\theta, r\sin\theta)$ afin de les distinguer. [1]

Le physicien écrira donc quant à lui

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

[1] L'histoire se complique encore avec le gradient ou les matrices jacobiennes. On a bien

$$\nabla\tilde{T} = \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}, \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}\right),$$

expression différente du gradient (en coordonnées cartésiennes) de T exprimé en coordonnées polaires donnée par la formule (51.1).

Proposition 47

Un calcul à savoir refaire

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit une application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}.$$

Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Corollaire 48

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}(\theta). \tag{51.1}$$

§3 Exemple d'équation aux dérivées partielles

Exemple 49

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy. \tag{E}$$

On utilisera le changement de variable $\begin{cases} u = \dfrac{x}{2} \\ v = y - \dfrac{3x}{2} \end{cases}$.

Démonstration. Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x}{2}, y - \frac{3x}{2}\right) \end{array}.$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, notons $u = \frac{x}{2}$ et $v = y - \frac{3x}{2}$ de sorte que $\varphi(x,y) = (u,v)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective puisque l'on a l'équivalence

$$\begin{cases} x &= 2u \\ y &= 3u + v \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \dfrac{x}{2} \\ v &= y - \dfrac{3x}{2} \end{cases}$$

Nous effectuons dans (E) un changement de fonction inconnue en considérant la fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ définie par $f = g \circ \varphi$, c'est-à-dire $g = f \circ \varphi^{-1}$. Autrement dit, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) = \varphi(x,y)$, on a $g(u,v) = f(x,y)$, c'est-à-dire

$$g(u,v) = f(2u, 3u+v), \qquad f(x,y) = g\left(\frac{x}{2}, y - \frac{3x}{2}\right).$$

On a donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v).\frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v).\frac{-3}{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v).0 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v).1.$$

d'où
$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-3\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)+3\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).$$
De plus, $xy = 2u(3u+v) = 6u^2+2uv$. La fonction f vérifie donc l'équation (E) si et seulement si g est solution de
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=6u^2+2uv. \tag{E'}$$
c'est-à-dire si et seulement si il existe une application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = 2u^3 + u^2 v + \alpha(v)$.

Finalement, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$ sont les applications de la forme
$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{4} - \frac{x^3}{8} + \alpha\left(y - \frac{3}{2}x\right)$$
où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. ∎

51.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

§1 Définition

Définition 50 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de qui admet des dérivées partielles premières sur U. On dit que f admet des **dérivées partielles d'ordre 2** sur U si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles sur U, c'est-à-dire si
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
sont définies. On note alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si ces quatre fonctions sont continues sur U, on dit que f est de **classe $\mathscr{C}^2$** sur U.

Définition 51 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$ est un champ de vecteurs. On dit que F est **de classe $\mathscr{C}^2$** sur U si f_1 et f_2 le sont.

Remarque

- L'application f est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, autrement dit, si et seulement si le champ de vecteurs ∇f est de classe $\mathscr{C}^1$.
- On définit de manière analogue, par récurrence, les dérivées partielles d'ordre $k \geq 3$ et les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Les combinaisons linéaires, produits et composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sont de classe $\mathscr{C}^2$:

Proposition 52 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, noté $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

Proposition 53 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, noté $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau. De plus, si f et g sont deux fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Alors*

- *l'application fg est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si f ne s'annule pas sur U, l'application $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(U) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g(J) \subset U$, alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur J.*

Exemple 54 Les fonctions polynomiales et rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur domaine de définition.

Test 55 Calculer les dérivées partielles secondes de l'application f et vérifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 3x^5 y + \sin x \cos y \end{array}$$

§2 Théorème de Schwarz

Théorème 56 **de Schwarz**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Démonstration. Non exigible. ∎

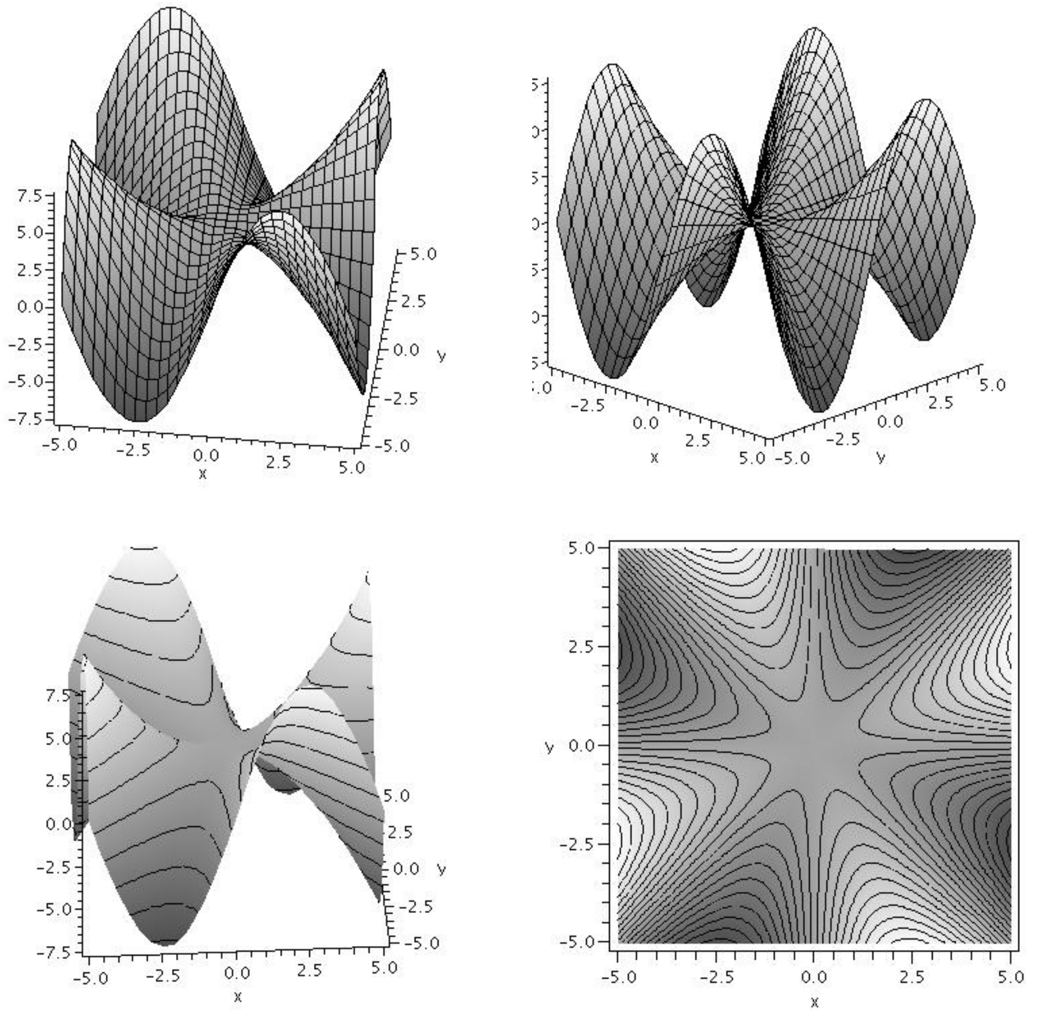
Si on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles secondes, le résultat est faux en général.

Exemple 57 **Fonction f telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont différentes.**
Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont différentes.

$$z = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$



§3 Équation des cordes vibrantes

Exemple 58

Soit $c > 0$. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \text{(E)}$$

appelée équation des cordes vibrantes.

Démonstration. Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (u,v) = (x+cy, x-cy) \end{array}.$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, bijective et sa réciproque φ^{-1} n'est autre que

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right) \end{array}$$

qui est également $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous effectuons dans (E) un changement de fonction en considérant la fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$g = f \circ \psi \iff f = g \circ \varphi.$$

c'est-à-dire $f(x,y) = g(x+cy, x-cy) = g(u,v)$.

Nous avons donc, d'après le théorème de composition

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = c\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - c\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{aligned}$$

puis avec le théorème de Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &\qquad + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ &\qquad + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{\partial v}{y}(x,y) \\ &= c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (E) est équivalente à

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, 4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

Une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est solution de cette équation si et seulement si

$$\exists F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \partial g v(u,v) = F(v),$$

ce qui est encore équivalent à

$$\exists (G,H) \in (\mathscr{C}^2(\mathbb{R}))^2, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = G(u) + H(v)$$

où H désigne une primitive de F sur $\mathbb{R}$. Puisque nous avons toujours raisonné par équivalence, l'égalité $f = g \circ \varphi$ nous permet de donner l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & G(x+cy) + H(x-cy) \end{array} \middle| \, (G,H) \in (\mathscr{C}^2(\mathbb{R}))^2 \right\}$$

∎

51.5 Extrémums locaux

§1 Définition

Définition 59 Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

- On dit que f a un **maximum local** en $a \in U$ si il existe $r > 0$ tel que
$$\forall z \in U, \|z - a\| < r \implies f(a) \geq f(z).$$
- On dit que f a un **minimum local** en $a \in U$ si il existe $r > 0$ tel que
$$\forall z \in U, \|z - a\| < r \implies f(a) \leq f(z).$$
- On dit que f a un **extrémum local** en $a \in U$ si f admet en a un minimum local ou un maximum local.

Exemple 60 **Très simple**
L'application définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ a un minimum local (et même global) en $(0,0)$.

§2 Étude au premier ordre

Proposition 61 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si f admet un extrémum local au point $a \in U$ alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

ou de manière équivalente $\mathrm{d}f(a) = 0$ *ou encore* $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Définition 62 Un point a vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ est appelé un **point critique** de f.

Exemple 63

Très simple
Avec $f(x,y) = x^2 + y^2$, on a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Exemple 64

On considère $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - 2x + xy + y^2 \end{array}$.
Déterminer les extrémums locaux de f.

Démonstration. La fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'*ouvert* $\mathbb{R}^2$.

1. On commence par chercher les point critiques de f. Ici, le seul point critique de f est le point $a = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.
2. On vérifie à la main, au cas par cas, si les points critiques sont bien des extrémums locaux. Pour cela, on étudie le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ pour (x,y) proche de $a = (x_0,y_0)$. On peut pour cela regarder le signe de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour h, k assez proche de 0.

   Pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$, on a

   $$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) + \frac{4}{3} = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0.$$

   Donc f admet un minimum local (et même global) en $a = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

∎

Remarque

- La propriété donne seulement une condition nécessaire pour qu'il y ait un extrémum local en a. Par exemple $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ a un unique point critique $(0,0)$ mais f n'a pas d'extrémum local en ce point car pour tout $r > 0$, et pour tout $t \neq 0$,

  $$f(t,0) = t^2 > 0 \text{ et } f(0,t) = -t^2 < 0,$$

  et $(t,0), (0,t) \in B((0,0), r)$ dès lors que $|t| < r$.
  Ici, on dit que $(0,0)$ est un **point selle** ou **point col** de f.
- L'hypothèse U ouvert est fondamentale. Par exemple, l'application

  $$f : \begin{array}{rcl} [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

  a un maximum en $(1,1)$ alors que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$.
- Plus généralement, si $U \subset \mathbb{R}^2$ est quelconque et si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrémum local au point a, alors a est un point appartenant à la «frontière» de U ou alors a est intérieur à U et est donc un point critique.

Exemple 65

G. Peano, 1884. Application qui n'admet pas de minimum relatif en $(0,0)$ alors que sa restriction à chaque droite affine passant par $(0,0)$ admet un minimum relatif strict.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x^4 - 4x^2y + y^2 \end{array}$$

§3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème 66

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en a, c'est-à-dire que pour $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ assez petit

$$\begin{aligned} f(a+v) = f(x_0+h, y_0+k) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot k \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot k^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right). \end{aligned}$$

Notation

On note $H_f(a)$ la matrice

$$H_f(a) = \left(\partial_i \partial_j f(a)\right)_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 devient

$$f(a+v) = f(a) + \langle v, \nabla f(a)\rangle + \frac{1}{2}\langle v, H_f(a)\cdot v\rangle + o\left(\|v\|^2\right)$$

ou encore

$$f(a+v) = f(a) + \nabla f(a)^T v + \frac{1}{2} v^T H_f(a)\cdot v + o\left(\|v\|^2\right).$$

§4 Étude au second ordre

Proposition 67

Théorème spectral en dimension 2

Soit $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle. Alors H est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire

1. *Il existe $P \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$P^T H P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2. *Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de H.*

Théorème 68

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a) = 0$. Posons

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \text{ avec } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a),$$

de sorte que d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(a+v) = f(a) + Q(v)/2 + o\left(\|v\|^2\right)$$

où

$$Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

Notons λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de $H_f(a)$, (qui sont réelles car $H_f(a)$ est symétrique).

1. *Si f admet un minimum local en a, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, +\infty[$.*
2. *Si f admet un maximum local en a, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in]-\infty, 0]$.*
3. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in]-\infty, 0[$, alors f admet un minimum local (strict) en a.*
4. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, +\infty[$, alors f admet un maximum local (strict) en a.*
5. *Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a.*

Méthode

Avec les notation précédentes,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det H_f(a) = rt - s^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = r + t.$$

Alors, d'après le théorème

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: f admet un minimum local en a.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: f admet un maximum local en a.
3. Si $rt - s^2 < 0$, alors $\lambda_1 \lambda_2 < 0$: f n'admet pas d'extremum local en a.
4. Si $rt - s^2 = 0$, alors l'une des valeurs propres est nulle : on ne peut pas conclure.

Chapitre 51

Compléments

51.6 Potentiel scalaire

Définition 69

Soit f un champ continu de vecteurs défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On dit que f **dérive d'un potentiel scalaire** lorsqu'il existe une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f = \nabla F$$

On dit alors que F est un **potentiel** de f.

En physique, une force $\vec{F}$ est conservative s'il existe une fonction E telle que $\vec{F} = -\nabla(E) = \nabla(-E)$.

Si $f = (f_1, f_2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et dérive d'un potentiel F alors F est de classe $\mathscr{C}^2$ et le théorème de Schwarz affirme que [2]

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

La réciproque est vraie sous certaines conditions.

Définition 70

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est **étoilé** s'il existe un point $a \in U$ tel que

$$\forall z \in U, [a, z] \subset U$$

où $[a, z] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda z \mid \lambda \in [0, 1] \}$ est le segment joignant les points a et z. On dit alors que U est **étoilé par rapport à *a***.

[2] Cette condition correspond à rot $\vec{f} = \vec{0}$ en dimension 3.

Théorème 71 **Lemme de Poincaré**

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Alors f dérive d'un potentiel scalaire F. Les autres potentiels de f sont les fonctions $F + k$ avec k constante.

Démonstration. Non exigible. ∎

51.7 Brève extension aux fonctions de trois variables

Voir exercices.