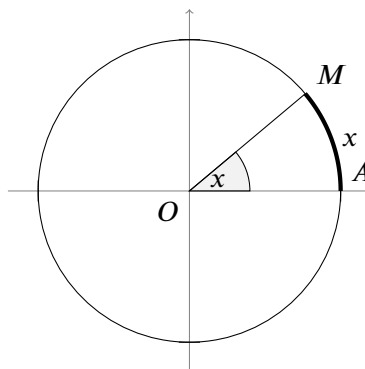


FONCTIONS CIRCULAIRES

6.1 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

§1 Le cercle trigonométrique

On utilisera souvent les fonctions **trigonométriques**, appelées fonctions **cosinus**, **sinus**, **tangente** et **cotangente**, abrégées par \cos , \sin , \tan et \cotan .



On peut définir géométriquement les fonctions trigonométriques à l'aide du «cercle trigonométrique». On note $\mathfrak{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct du plan, C le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique** du repère \mathfrak{R} . On appelle A le point du cercle de coordonnées $(1, 0)$. Un point M se déplace le long du cercle. On repère M par le réel x , qui est la distance AM parcourue sur le cercle s'il s'est déplacé dans le sens direct, et qui est son opposé s'il s'est déplacé dans le sens contraire. Le cercle étant de circonférence égale à 2π , M se confond avec A si $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Par définition,

Définition 1

l'abscisse de M est $\cos x$ et son ordonnée est $\sin x$.

Lorsque M n'est pas sur l'axe (Oy) , c'est-à-dire lorsque $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π , notons T l'intersection de la droite OM et de la droite Δ d'équation $x = 1$. Par définition,

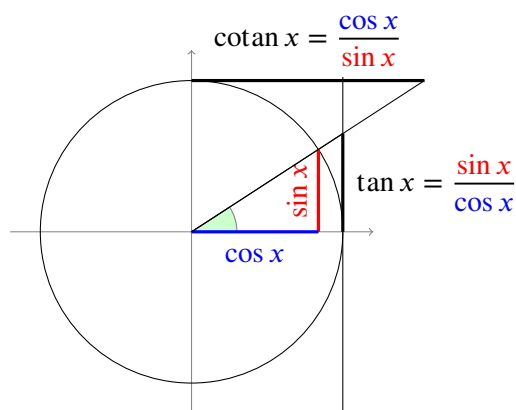
Définition 2

l'ordonnée de T est $\tan x$.

Lorsque M n'est pas sur l'axe (Ox) , c'est-à-dire lorsque x n'est pas multiple de π , notons T' l'intersection de la droite OM et de la droite Δ' d'équation $y = 1$. Par définition,

Définition 3

l'abscisse de T' est $\cotan x$.

**Test 4**

Résoudre l'équation $5x + \pi/2 \equiv 0 \pmod{\pi}$.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Par le théorème de Pythagore

Proposition 5

Pour tout réel x ,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Remarque

Pour les fonctions trigonométrique, l'habitude est de noter

$$\sin^2(x) = (\sin x)^2$$

$$\cos^2(x) = (\cos x)^2$$

$$\tan^2(x) = (\tan x)^2.$$

On fait de même pour les autres puissances, même pour -1 :

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan x},$$

et ceci n'a rien à voir avec une quelconque fonction réciproque (qui n'existe pas pour les fonctions \sin , \cos , \tan).

Par le théorème de Thalès,

Proposition 6

1. Si $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π , alors

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

2. Si x n'est pas multiple de π , alors

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

3. Si x n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$, alors

$$\cotan x = \frac{1}{\tan x}.$$

C'est pour cela que cotangente est peu utilisé.

4. Si $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π , alors

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Proposition 7

Si on donne deux réels u et v vérifiant $u^2 + v^2 = 1$, alors le point de coordonnées (u, v) se trouve sur le cercle trigonométrique, et il existe un réel x , unique modulo 2π , tel que

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

Proposition 8

Si x et y sont deux réels



$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi \iff x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

x	Quadrants			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	+	−
$\cotan x$	+	−	+	−

Valeurs remarquables du premier quadrant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cotan x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

6.2 FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

Les fonctions trigonométriques vérifient des formules tout à fait remarquables à *retenir impérativement*.



Les formules contenant uniquement les fonctions sinus et cosinus sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les formules contenant une tangente sont valables uniquement sur leur ensemble de définition.

§1 Angles associés

Ces égalités sont, de préférence, à mémoriser visuellement, sur le cercle trigonométrique ou sur les courbes des fonctions circulaires.

$$\begin{array}{lll}
 \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x} \\
 \sin(\pi - x) = \sin x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
 \sin(\pi + x) = -\sin x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \tan(\pi + x) = \tan x
 \end{array}$$

§2 Formules d'addition

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\end{aligned}$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x+y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

§3 Formules de duplication

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.\end{aligned}$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

§4 Formules de Carnot

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

§5 Formules de l'angle moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, lorsque $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

§6 Formules de Simpson inverses

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)), \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)), \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)).\end{aligned}$$

§7 Formules de Simpson

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

6.3 ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

§1 Résolution d'équations trigonométriques

Théorème 9

Si x et y sont deux réels, alors

$$\cos x = \cos y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi})$$

$$\sin x = \sin y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi})$$

Si x et y appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on a

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}$$

§2 Principe de superposition des sinusoides

Proposition 10



Superposition des sinusoides

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors φ est unique modulo 2π .

6.4 ÉTUDE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

Proposition 11

1. Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

2. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques. Pour tout réel x et tout entier k ,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

3. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire. Pour tout réel x ,

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Le lemme suivant, relativement clair sur le dessin, ne se démontre pas si facilement géométriquement.

Lemme 12

Admis

Pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \leq |x|.$$

Lemme 13

Continuité du sinus et du cosinus en 0

Les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 12, on a pour $x \in [0, \pi/2]$ l'inégalité

$$0 \leq \sin x \leq x,$$

on a donc, par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Puisque la fonction sinus est impaire, on en déduit

que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$; la fonction sinus est donc continue en 0.

Puisque la fonction cosinus prend ses valeurs entre 0 et 1 sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $\cos^2(x) \leq \cos(x) \leq 1$, c'est-à-dire

$$1 - \sin^2 x \leq \cos x \leq 1,$$

et puisque le sinus tend vers 0 en 0, on a par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Puisque la fonction

cos est paire, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$. ■

Des premier et second lemmes, nous déduisons la limite du rapport $\sin(x)/x$ lorsque x tend vers 0; cette quantité n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0. Ce résultat prouve donc la dérivabilité de la fonctions sinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du sinus en 0 : $\sin'(0) = 1$.

Le second résultat prouve la dérivabilité du cosinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du cosinus en 0 : $\cos'(0) = 0$.

Lemme 14

1. Le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

2. Le rapport $\frac{\cos x - 1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Démonstration. 1. D'après le lemme 12, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, \pi/2[$, on a $\sin x \leq x \leq \tan x$, d'où $x \cos x \leq \sin x \leq x$, ou encore

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. La fonction $x \mapsto \sin x/x$ définie sur \mathbb{R}^*

étant paire, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -2 \frac{\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{x}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2.$$

Puisque $x/2$ tend vers 0 avec x , on déduit du résultat précédent et du théorème de composition des limites que le rapport $\frac{\sin(x/2)}{x/2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 ; d'après le théorème sur le produit des limites, il en est de même de son carré. Et, toujours par ce même théorème, le rapport $\frac{\cos x - 1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. ■

Théorème 15**Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus**

Les fonctions \sin et \cos sont définies et dérivables (donc continues) sur \mathbb{R} et on a

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

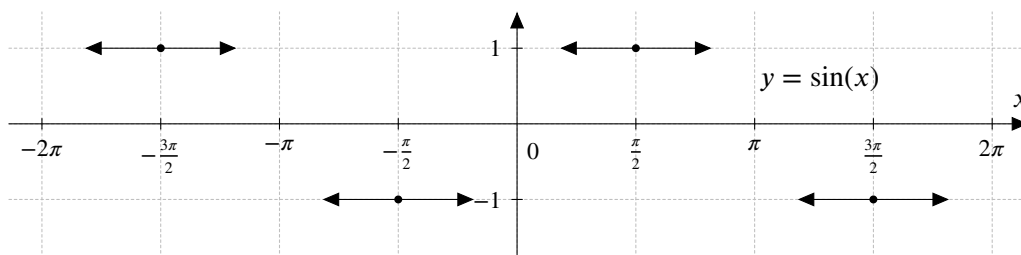
Démonstration. Soit $x, h \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\sin(x + h) = \sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h),$$

la fonction sinus est dérivable en x de dérivée $\sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \cos(x)$.

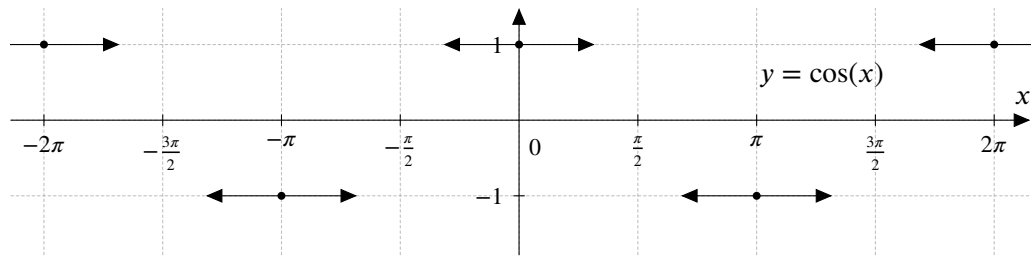
On raisonne de la même façon pour la fonction cosinus. ■

La fonction sinus est impaire et 2π -périodique ; il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.¹ La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et $\sin' = \cos$. Le sinus est donc croissant sur $[0, \pi/2]$ (de 0 à 1) puis décroissant sur $[\pi/2, \pi]$ (de 1 à 0). La courbe représentative du sinus admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$. La tangente à l'origine est d'équation $y = x$ (il s'agit de la première bissectrice du repère). On en déduit la courbe représentative de la fonction sinus.



¹On pourrait encore réduire l'intervalle d'étude car pour $x \in [0, \pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$.

On peut faire une étude similaire pour le cosinus, mais la relation $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, montre que la courbe de la fonction cosinus s'obtient en translatant celle du sinus du vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{e}_1$.



§2 Étude de la fonction tangente

Proposition 16

1. La fonction \tan est définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right).$$

par la relation $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

2. La fonction \tan est π -périodique. Pour tout réel x tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et tout entier k ,

$$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

3. La fonction \tan est impaire. Pour tout réel x tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

Théorème 17

Dérivabilité de la fonction tangente

La fonction \tan est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition et on a

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Démonstration. Puisque le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire là où le dénominateur ne s'annule pas, la fonction tangente est dérivable et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

■

Proposition 18

On a les limites suivantes au bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \searrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty.$$

Les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ sont donc asymptotes verticales à la courbe de la fonction \tan .

Démonstration. On rappelle que pour tout réel x appartenant à $[0, \pi/2[$, on a $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, or,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos(x) = 0+$$

d'où $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$.

On a un résultat analogue en $-\pi/2$ car \tan est une fonction impaire. ■

La fonction tangente est définie sur l'ensemble

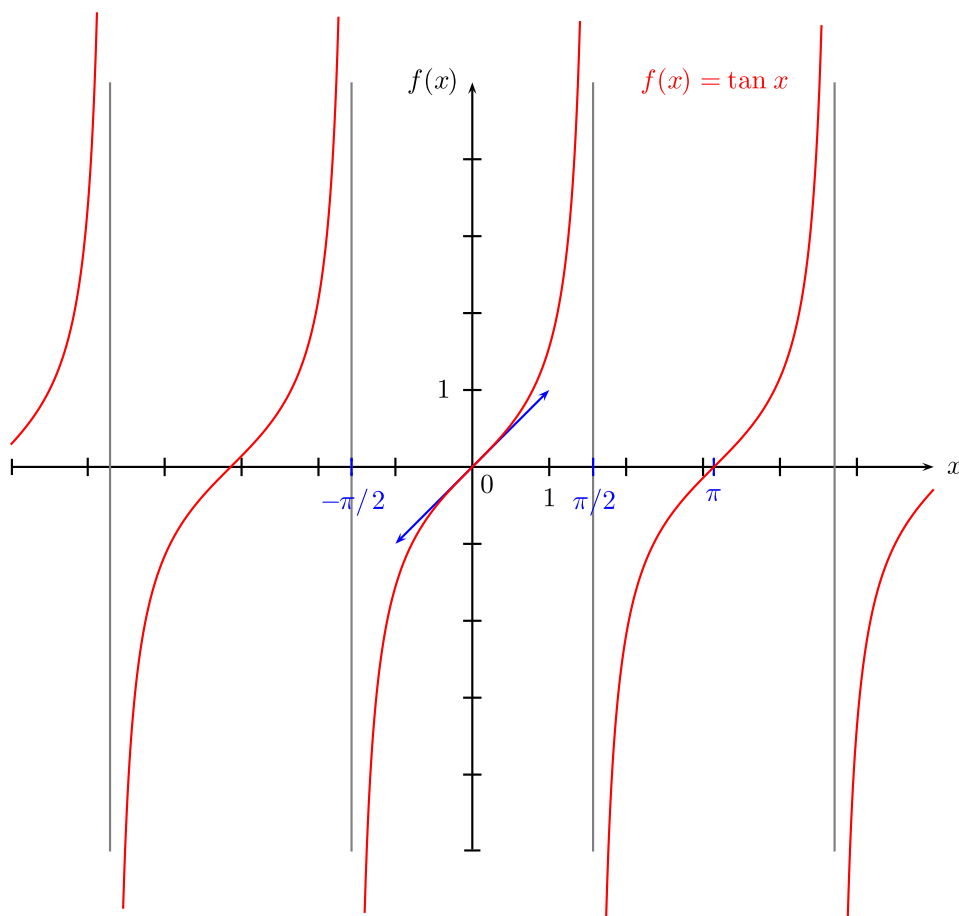
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

La tangente est une fonction impaire et π -périodique : il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$ pour tracer sa courbe représentative sur \mathcal{D} . Enfin, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

La fonction tangente est donc strictement croissante sur $[0, \pi/2[$. De plus, $\tan'(0) = 1$; la droite d'équation $y = x$ est donc tangente à la courbe représentative de \tan .

Remarquez que la fonction tangente réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$.



6.5 FONCTIONS RÉCIPROQUES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

§1 La fonction arcsin

Pour tout x compris entre -1 et 1 , l'équation d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin \alpha = x$$

possède une infinité de solutions. La fonction arcsin en donne l'une d'elle.

Remarque

La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une bijection entre \mathbb{R} et \mathbb{R} . En effet ;

- Certain réels x n'ont pas d'antécédents par \sin . Par exemple, il n'existe pas de réel α tel que $\sin \alpha = 2$.
- Il existe plusieurs réels α ayant la même image par \sin . Par exemple, $0 = \sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \dots$. Le réel 0 a donc plusieurs antécédents par \sin .

Définition 19

La restriction $\widetilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ de la fonction sinus réalise une bijection de

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ est appelée l'**arcsinus** et notée

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \widetilde{\sin}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction arcsin est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arcsin x) \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$



La fonction arcsinus n'est pas la réciproque de \sin , mais celle d'une restriction bien choisie.

Exemple 20

$$\begin{aligned} \arcsin(0) &= 0 \\ \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{\pi}{3} \\ \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{\pi}{4} \\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \arcsin(1) &= \frac{\pi}{2} \\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} \\ \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Test 21

Calculer.

$$1. \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right). \quad \left| \quad 2. \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right). \quad \left| \quad 3. \arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

Proposition 22**Propriétés de l'arcsinus**

$$1. \forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$2. \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x.$$

3. Plus généralement, on a l'équivalence pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\arcsin(\sin x) = x \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in [-1, 1]$. D'après la définition de l'arcsinus, $\arcsin(x)$ est une mesure d'angle dont le sinus vaut x . Ainsi $\sin(\arcsin(x)) = x$. On a de plus $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. La fonction cosinus étant positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ auquel appartient $\arcsin(x)$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par définition de l'arcsinus, $\arcsin(\sin x)$ est l'unique $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin \alpha = \sin x$; puisque $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $x = \alpha = \arcsin(\sin x)$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arcsin(\sin x) = x$. Puisque l'arcsinus est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$, on a bien $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. ■

Proposition 23**Étude de l'arcsinus**

1. L'application arcsin est impaire et continue sur $[-1, 1]$.

2. L'arcsinus est dérivable sur $] -1, 1[$ avec

$$\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. L'arcsinus n'est pas dérivable en ± 1 , sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.

Démonstration. 1. La fonction sin est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée cos, qui est positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, ne s'annulant sur cet intervalle qu'en $\pm\pi/2$. La fonction sinus réalise donc une bijection strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. De plus, ces deux ensembles étant des intervalles et sin étant continue sa bijection

réciproque $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est continue. De plus, l'arcsinus est une fonction impaire ; en effet, pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin(x)) = -x \text{ et } -\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

c'est-à-dire $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$.²

2. Soit $y \in [-1, 1]$. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction arcsinus est dérivable en y si et seulement si

$$\sin'(\arcsin(y)) = \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2} \neq 0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si $y \neq \pm 1$. La fonction arcsin est donc dérivable sur $] -1, 1[$, avec sur cet intervalle $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

3. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, le calcul de $\sin'(\arcsin(y))$ montre que la courbe représentative de la fonction arcsin admet une tangente verticale aux points d'abscisses ± 1 .

■

§2 La fonction arccos

Définition 24

La restriction $\widetilde{\cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ de la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\cos}$ est appelée l'**arccosinus** et notée

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \widetilde{\cos}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction arccos est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arccos x) \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}.$$

Exemple 25

$$\begin{aligned} \arccos(0) &= \frac{\pi}{2} & \arccos(1) &= 0 \\ \arccos(-1) &= \pi & \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{5\pi}{6} & \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{3\pi}{4} & \arccos\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} \\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{2\pi}{3} & & \end{aligned}$$

²De manière générale, on peut montrer que la réciproque d'une bijection impaire est impaire.

Test 26

Calculer

$$1. \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right). \quad \left| \quad 2. \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right). \quad \left| \quad 3. \arccos\left(\cos\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

Proposition 27**Propriétés de l'arccosinus**

$$1. \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \text{ et } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$2. \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x.$$

3. Plus généralement, on a l'équivalence pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leq x \leq \pi.$$

Test 28

Démontrer la proposition précédente.

Proposition 29**Étude de l'arccosinus**

1. L'application \arccos n'est ni paire ni impaire. Elle est continue sur $[-1, 1]$.

2. L'arccosinus est dérivable sur $] -1, 1[$ avec

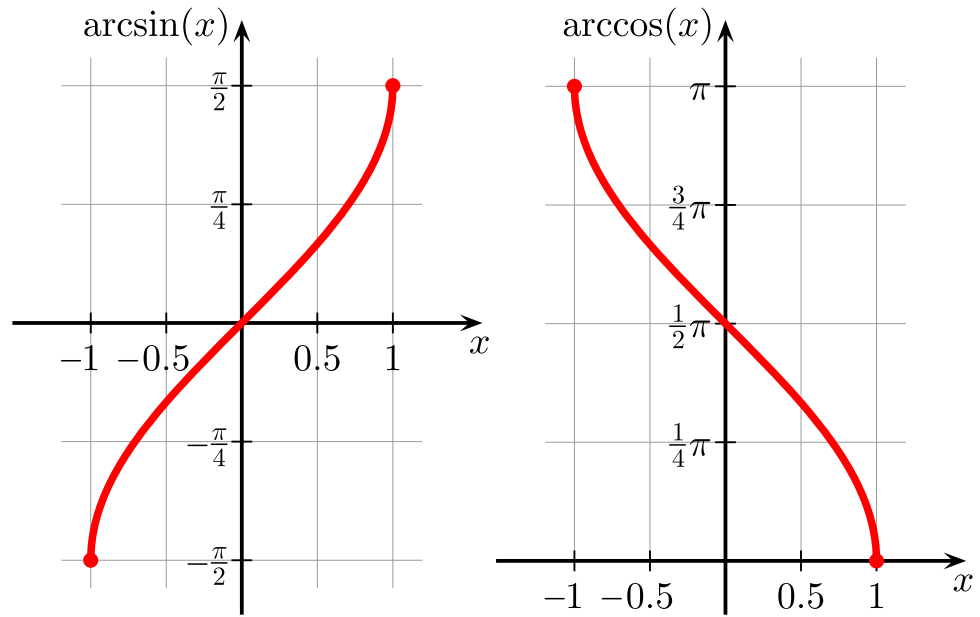
$$\forall x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. L'arccos n'est pas dérivable en ± 1 , sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.

Démonstration. ■

Remarque

Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$. La courbe représentative de la fonction \arccos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



§3 La fonction arctan

Définition 30

La restriction $\widetilde{\tan} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ de la fonction tangente réalise une bijection de

$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\tan}$ est appelée l'**arctangente** et notée

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \widetilde{\tan}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction arctan est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arctan x) \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple 31

$$\begin{aligned} \arctan(0) &= 0 \\ \arctan(-1) &= -\frac{\pi}{4} & \arctan(1) &= \frac{\pi}{4} \\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{\pi}{6} & \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\pi}{6} \\ \arctan(-\sqrt{3}) &= -\frac{\pi}{3} & \arctan(\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Test 32

Calculer

$$1. \arctan\left(\tan\left(\frac{33\pi}{7}\right)\right). \quad | \quad 2. \arctan\left(\tan\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right). \quad | \quad 3. \arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

Proposition 33**Propriétés de l'arctangente**

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$
2. $\forall x \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan x) = x.$
3. Plus généralement, on a l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right), \arctan(\tan x) = x \iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

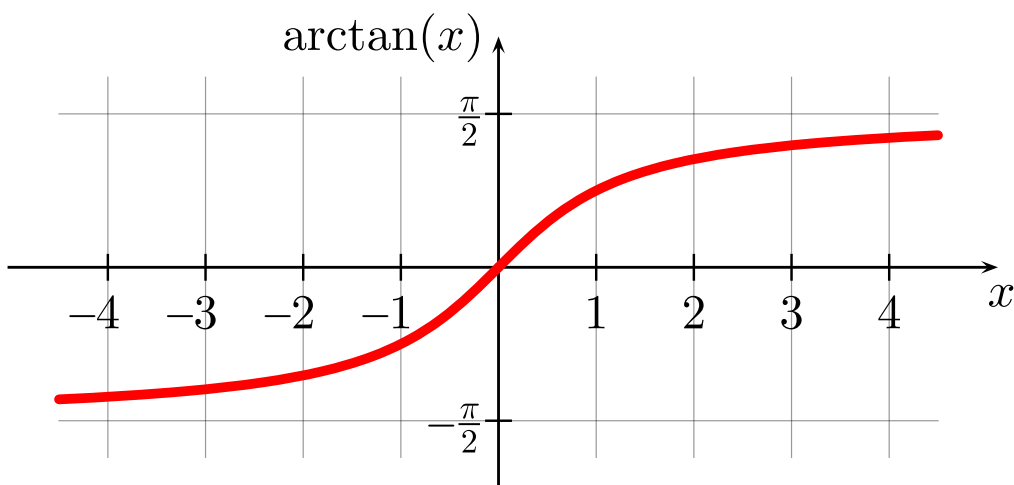
Proposition 34**Étude de l'arctan**

1. L'application \arctan est impaire et continue sur \mathbb{R} .
2. L'arctangente est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}.$

Démonstration. Les limites en $\pm\infty$ sont admises en début d'année. ■

**Test 35**

Montrer que $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}.$