Dérivées

Aperçu

D 1 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.
On dit que f est **dérivable** au point a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie ; la valeur de cette limite s'appelle **dérivée première** (ou simplement **dérivée**) de f au point a, et se note $f'(a)$ ou $\mathrm{D} f(a)$.

P 2 **La dérivabilité en un point est une notion locale**
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$ et $\eta > 0$. On note g la restriction de f à $X \cap]a - \eta, a + \eta[$. Alors f est dérivable en a si, et seulement si g est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, on a alors $f'(a) = g'(a)$.

E 3

1. Une fonction constante a en tout point une dérivée nulle.
2. Une fonction affine $x \mapsto px + q$ a en tout point une dérivée égale à p.

E 4 La fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ (définies pour $x \neq 0$) est dérivable en tout point a, $a \neq 0$, car on a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) \Big/ (x-a) = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{a^2}.$$

E 5 La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. En effet, pour $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin(a) &= \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)\\ &= \sin(a)\,(\cos(h) - 1) + \cos(a)\sin(h).\end{aligned}$$

Sachant que

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2}{h} = \frac{h}{2}\frac{\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2}{(h/2)^2}, \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

On obtient alors,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a) \times 0 + \cos(a) \times 1 = \cos(a).$$

Ainsi, $\sin$ est dérivable au point a et $\sin'(a) = \cos(a)$.

E 6 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est définie et dérivable en tout réel a et a pour dérivée en a: $f'(a) = n\,(a)^{n-1}$. En effet, pour $x \neq a$, on a

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}a^i.$$

On a alors

$$T_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}a^i \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}a^i.$$

Ainsi, f est dérivable en a et

$$f'(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}a^i = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}.$$

D 7 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

- On dit qu'une fonction f est **dérivable sur l'ensemble** I si elle est définie et dérivable en tout point de I.
- Si f est dérivable en tout point de X, on dit simplement que f est **dérivable**.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I (au moins), est appelée **fonction dérivée** ou (par abus de langage) dérivée de f et se note f' ou $\mathrm{D} f$.

Si f est dérivable sur l'ensemble I alors la restriction de f à I est dérivable. La réciproque est fausse.

T 8 Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ la fonction «racine carrée».

- Sur quel ensemble est-elle définie?
- Sur quel ensemble est-elle continue?
- Sur quel ensemble est-elle dérivable?

T 9 Soit $u : x \mapsto |x|$ la fonction «valeur absolue».

- Sur quel ensemble est-elle définie?
- Sur quel ensemble est-elle continue?
- Sur quel ensemble est-elle dérivable?

Fonction	Ens. de définition	Ens. de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0)$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
ln	$\mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	exp
sin	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cos
cos	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin$
tan	$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \right\}$	$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
cotan	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0\,[\pi] \}$	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0\,[\pi] \}$	$\dfrac{-1}{\sin^2} = -1 - \mathrm{cotan}^2$
arcsin	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch
ch	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sh

T 10 **Développement limité à l'ordre 1**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ et $L \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'application f est dérivable en a et $f'(a) = L$.*
2. *Il existe une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,L + (x-a)\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \omega(x) = 0.$$

Démonstration. $(1 \implies 2)$ Il suffit de poser

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & x \neq a \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

$(2 \implies 1)$ On a alors pour $x \neq a$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L + \omega(x) \xrightarrow[x\to a]{} L.$$

∎

D 11 **$DL^1(a)$ de f**

Lorsque l'on écrit

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)\omega(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to a} \omega(x) = 0,$$

ou de manière équivalente,

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h\omega(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \omega(h) = 0,$$

on dit que l'on fait un **développement limité à l'ordre 1 de f au point a**.

Avec les notations de Landau, cela s'écrit

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + o(x-a) \qquad \text{quand } x \to a$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h) \qquad \text{quand } h \to 0$$

P 12 DL^1 **classiques**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé et au voisinage de* 0, *on a*

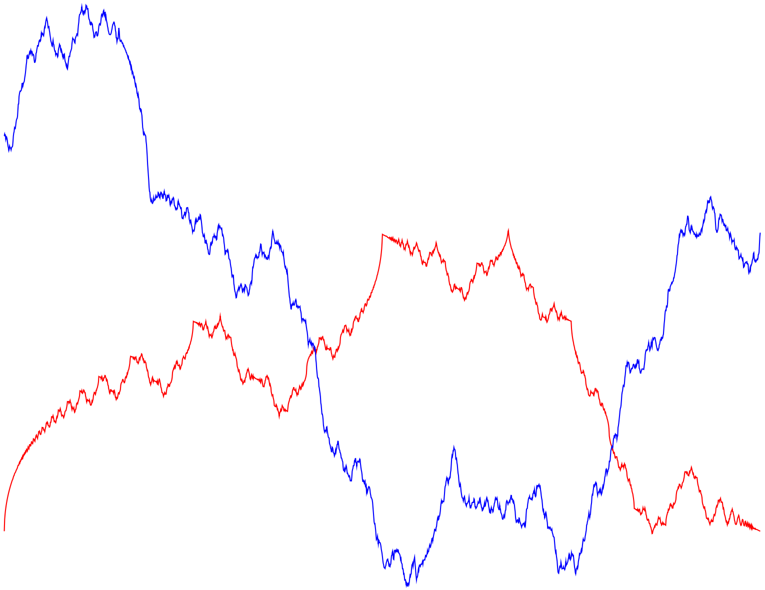
$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) & e^x &= 1 + x + o(x) & \ln(1+x) &= x + o(x) \\
\sin(x) &= x + o(x) & \cos(x) &= 1 + o(x) & \tan(x) &= x + o(x) \\
\mathrm{sh}(x) &= x + o(x) & \mathrm{ch}(x) &= 1 + o(x) & \tanh(x) &= x + o(x) \\
\mathrm{Arcsin}(x) &= x + o(x) & \mathrm{Arccos}(x) &= 1 + o(x) & \mathrm{Arctan}(x) &= x + o(x)
\end{aligned}
$$

T 13 *Toute fonction dérivable au point a est continue en a.*

La réciproque est fausse ($x \mapsto |x|$ en 0). On peut donner des exemples de fonctions continues dans un intervalle et n'ayant de dérivée en *aucun* point de l'intervalle.

Dans une lettre à Thomas Stieltjes datant de 1893, Charles Hermite écrivait

> « *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée* ».



Sans doute Poincaré pensait-il à ces exemples quand il disait, en 1899

> *« Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela ».*

Sur la dernière partie de sa phrase, il se trompait lourdement. . .

D 14 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.
On dit que f est **dérivable à droite** au point a si la restriction de f à l'ensemble $X \cap [a, +\infty[$ est dérivable au point a ; la valeur de la dérivée de cette restriction au point a, s'appelle **dérivée à droite** de f au point a, et se note $f'_d(a)$. Dans ce cas, on a

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On a une définition similaire à gauche et l'égalité

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

P 15 *Soit f une fonction définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et a un point intérieur à I. Pour que f soit dérivable au point a il faut et il suffit que f admette en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, et que ces dérivées soient égales ; on a alors*

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

E 16

1. La fonction $x \mapsto |x|$, définie dans $\mathbb{R}$, admet au point $a = 0$ une dérivée à droite égale à $+1$ et une dérivée à gauche égale à -1 ; elle n'est donc pas dérivable en ce point.
2. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, est définie et continue dans $\mathbb{R}$, mais elle n'admet ni dérivée à droite ni dérivée à gauche au point $a = 0$.

D 18 Lorsque f est dérivable au point a, la fonction affine

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$$

est dite **fonction affine tangente** à la fonction f au point a.
La droite Δ d'équation cartésienne

$$\Delta : y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

est appelée la **tangente** à la courbe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

P 19 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. Si la fonction f est continue en $a \in I$ et si*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

la courbe de f admet une ***tangente verticale*** *au point de coordonnées $(a, f(a))$.*

T 20 *Soient f et g deux applications de X dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables au point a alors,*

1. *$\lambda f + \mu g$ est dérivable au point a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;*
2. *fg est dérivable au point a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivables au point a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

C 21 *Lorsque* f *et* g *sont dérivables sur* $I \subset X$, *alors* $\lambda f + \mu g$, fg *sont dérivables sur* I *et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = fg' + f'g.$$

Si de plus, g *ne s'annule pas sur* I, *alors* $\frac{1}{g}$ *et* $\frac{f}{g}$ *sont dérivables sur* I *et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Les théorèmes généraux (composition, produit,. . .) ne donne qu'une condition nécessaire pour qu'une fonction soit dérivable au point a. Par exemple,

$$x \mapsto \sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$$

est dérivable au point $a = 0$, bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0.

T 24 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ avec $f(X) \subset Y$. Supposons f dérivable en $a \in X$ et g dérivable en $f(a) \in Y$, alors l'application composée*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable au point a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

C 25 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ avec $f(X) \subset Y$.*
Supposons f dérivable sur $I \subset X$ et g dérivable sur $f(I)$, alors l'application composée

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = \left(g' \circ f\right) \times f'.$$

T 26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(x^2 - 3\right) + \ln(x + 1)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, l'ensemble de dérivabilité de f ainsi que sa dérivée.

M Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs > 0 et $v : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose pour $x \in I$,

$$(u^v)(x) = u(x)^{v(x)} = \exp(v(x)\ln(u(x))) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Si les fonctions u et v sont dérivables sur I alors la fonction u^v l'est également et on a [1]

$$(u^v)' = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) u^v$$

T 27 Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & x^{(x^2)} \end{array}.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Face à une telle application, si vous devez dériver, trouver une limite, faire une étude ou plus tard trouver un équivalent ou un développement limité :

♥ il faut toujours se ramener à la forme exponentielle. ♥

[1] 26: Il faut être capable de retrouver la formule sur des exemples. Gare au premier qui écrit $(u^v)' = vu^{v-1}$ ou autre horreur.

T 28 *Soient f une application continue et strictement monotone d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

R Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

E 29 Définir la fonction «racine carrée» sur $[0,+\infty[$ comme une bijection réciproque. Étudier alors sa dérivabilité et retrouver l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. En tant que fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x)=2x$. Puisque f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0, f est strictement croissante. Comme $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$, la tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ est

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Notons, pour tout $x\geq 0$, $\sqrt{x}=f^{-1}(x)$. D'après le théorème précédent, la racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, non dérivable en 0 car $f'(\sqrt{0})=0$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec sur cet intervalle

$$\left(\sqrt{}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{2f^{-1}(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

D 30 On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en un point $c \in X$, s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in X \cap]c-\eta, c+\eta[, f(x) \leq f(c).$$

On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ admet un **minimum local** en un point $c \in X$, s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in X \cap]c-\eta, c+\eta[, f(c) \leq f(x).$$

Un **extrémum local** est un minimum local ou un maximum local.

R Il est clair que si f admet un maximum global, alors elle a un maximum local. La réciproque est bien entendu inexacte.

T 31 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si en un point c intérieur à I, f admet un extrémum local et si f est dérivable au point c, on a $f'(c) = 0$.*

Plus précisément, on a montré

C 32 *Si en un point c intérieur à I, f admet un maximum local (resp. minimum local) et a en ce point une dérivée à droite et à gauche, on a $f'_d(c) \leq 0$ et $f'_g(c) \geq 0$ (resp. $f'_d(c) \geq 0$ et $f'_g(c) \leq 0$).*

D 33 Un **point critique** de f est un zéro de la dérivée de f.

E 34 Déterminer les extrémums globaux de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$ sur $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$.

T 35 **Théorème de Rolle, formulation classique**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$. *On suppose :*

- $f(a) = f(b)$
- f *est continue sur* $[a,b]$
- f *est dérivable sur* $]a,b[$

Alors, il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

C 36 **Théorème de Rolle**

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *avec* $a < b$, *dérivable sur* $]a,b[$, *et telle que* $f(a) = f(b)$. *Alors il existe un point* $c \in]a,b[$ *qui est l'abscisse d'un extrémum local de* f, *et donc tel que* $f'(c) = 0$.

T 37 **Égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Alors, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \tag{1}$$

Démonstration. Comme $a \neq b$, nous pouvons écrire $f(b) - f(a) = (b - a)A$, où A est le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Définissons alors $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par la relation

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)A.$$

Comme g diffère de f d'une fonction polynômiale, il est clair que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'autre part on a $g(a) = 0$ (trivial) et $g(b) = 0$ (par définition de A !). Ainsi g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - A$ et, par conséquent, $A = f'(c)$. ∎

T 37 **Égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors, il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c). \tag{1}$$

M **Astuce de la fonction auxiliaire.**

Dans la démonstration, nous avions

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b-a)A \\ \text{et} \quad g(x) &= f(x) - f(a) - (x-a)A. \end{aligned}$$

Nous avons donc remplacé un des paramètres par la variable x en remplaçant le signe $=$ par le signe $-$. Cette astuce permettra de trouver des fonctions auxiliaires dans d'autres situations du même type.

T 37 **Égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors, il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c). \tag{1}$$

R Interprétation géométrique : il existe un point de la représentation graphique de f où la tangente est parallèle à la corde. Remarquons que la fonction auxiliaire introduite dans la preuve n'est autre que la distance courbe-corde à l'abscisse x.

D 38 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est ***k*-lipschitzienne** ou lipschitzienne de rapport k si

$$\forall (x, y) \in X^2, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Lorsque $k < 1$, on dit que f est **contractante**.

Une fonction lipschitzienne est donc continue.

T 39 **Inégalité des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *On suppose qu'il existe* $k \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\forall x \in \,]a,b[\,, \left|f'(x)\right| \leq k.$$

Alors f *est* k*-lipschitzienne :*

$$\forall x, y \in [a,b], |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

En particulier,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

C 40 *Soit* $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. *Alors* f *est lipschitzienne de rapport* $\sup\limits_{[a,b]}\left|f'\right|$.

M Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$ un intervalle tel que $f(I) \subset I$. On considère la suite définie par

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ et que pour tout $x \in I$

$$\left|f'(x)\right| \leq k \quad \text{où} \quad 0 \leq k < 1.$$

Alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

E 41 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^2\right).$$

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$ et montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
2. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$$

   puis que

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

T 42 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, l'intérieur de I.*

1. *f est croissante si et seulement si*
$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0.$$
2. *f est décroissante si et seulement si*
$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0.$$
3. *f est constante si et seulement si*
$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0.$$

R En particulier, lorsque $f' \geq 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

T 42 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, l'intérieur de I.*

4. *f est strictement croissante sur I si et seulement si*
   - $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0,$
   - *et* $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ *est d'intérieur vide.*
5. *f est strictement décroissante sur I si et seulement si*
   - $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leq 0,$
   - *et* $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ *est d'intérieur vide.*

R En particulier, lorsque $f' \geq 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

C 43 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues dans I et dérivable sur $\mathring{I}$, si*

$$\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = g'(x),$$

alors il existe une constante λ telle que

$$\forall x \in I, f(x) = g(x) + \lambda.$$

T 44 **Limite de la dérivée**

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que

- *l'application f est continue sur I,*
- *l'application f est dérivable sur $I \setminus \{ a \}$,*
- *l'application $f'(x)$ admet une limite ℓ (réel ou infini) au point lorsque x tend vers a.*

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.
En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable au point a et on a $f'(a) = \ell$.

R Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et si $f' \underset{a}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais on a néanmoins $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (tangente verticale).

E 45 La fonction $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ est définie, continue, dérivable et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

De plus, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$: f se prolonge par continuité en 0. On note encore f ce prolongement (on a alors $f(0) = 0$).
On a également

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{h \to \pm\infty} 2h^3 e^{-h^2} = 0.$$

L'application f (ainsi prolongée) est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

R L'application f est d'ailleurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D 46 Soient f une application à valeurs réelles définie sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$. On définit par récurrence l'application dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$ ou $\mathrm{D}^n f$.

- Pour $n = 0$, on pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 1$. On suppose que l'on dispose de $f^{(n-1)} : X \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, et on note

$$\mathrm{D}^n f(a) = f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) = \left(f'\right)^{(n-1)}(a).$$

On dit que f est **n fois dérivable**, ou que f **admet une dérivée d'ordre n** sur $I \subset X$, si f admet une dérivée n-ième en tout point $a \in I$.
On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

E 47 L'application

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^5}.$$

est dérivable deux fois sur $[0, +\infty[$ mais est trois fois dérivable uniquement sur $]0, +\infty[$.

T 48 *Soit $n \in \mathbb{N}$, f, g deux fonctions n-fois dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est n-fois dérivable sur I et*

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

T 49 **Formule de Liebniz**

Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications n fois dérivables sur I. Alors fg est n-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

T 50 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(X) \subset Y$. Si f est n-fois dérivable sur $I \subset X$ et g est n-fois dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.*

T 51 *Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications n fois dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n-fois dérivables sur I.*

P 52 *Soient f une application dérivable sur un intervalle I. On suppose que f' est à valeurs > 0 (ou à valeurs < 0).*
Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \to I$ est dérivable avec

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

De plus, si f est n fois dérivable sur I, alors f^{-1} est n-fois dérivable sur I.

R Une telle application est appelé un **difféomorphisme**.

D 53 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

- On dit que f est de **classe** $\boldsymbol{\mathscr{C}^0}$ sur I si f est continue sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que f est de **classe** $\boldsymbol{\mathscr{C}^n}$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de **classe** $\boldsymbol{\mathscr{C}^\infty}$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^n(X, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur X.

E 54 **Un contre-exemple important**

La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable, mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Les résultats précédents restent valables si on remplace « n-fois dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^n$ » ou par « de classe $\mathscr{C}^\infty$ ».

T 55 *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors*

- *la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I,*
- *et la fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I,*
- *si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*

T 56 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(X) \subset Y$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I \subset X$ et g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*

P 57 *Soient f une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. On suppose que f' est à valeurs > 0 (ou à valeurs < 0).*
Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

R Une telle application est appelé un **$\mathscr{C}^n$-difféomorphisme**.

Lorsque f est dérivable au point a, on considère la fonction affine tangente

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a).$$

Sa partie homogène en $h = x - a$ dépend à la fois du point $a \in I$ et d'une variable auxiliaire $h \in \mathbb{R}$, d'où la définition

D 59 Lorsque f est dérivable au point $a \in I$, on appelle **différentielle de f en a** la *fonction*

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(a)h \end{array} \in \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{2}$$

Lorsque f est dérivable en tout point de I, on appelle **différentielle de f** la *fonction*

$$\mathrm{d}f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) : h \mapsto f'(a)h \end{array}.$$

Si par exemple $f(x) = x$, on a $f'(a) = 1$, de sorte que la différentielle de f est la fonction $h \mapsto h$; autrement dit [2]

$$\mathrm{d}x(a)(h) = h$$

quels que soient a et h réels. En comparant avec (2), on voit donc que

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)\,\mathrm{d}x(a)(h)$$

pour toute fonction f dérivable en a ; de façon plus condensée :

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x(a), \quad (\in \mathbf{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

produit de l'*application linéaire* $\mathrm{d}x(a) : h \mapsto h$, par la *constante* (relativement à h) $f'(a)$; et comme en fait la différentielle $\mathrm{d}x(a)$ ne dépend pas de a, autant l'appeler $\mathrm{d}x$ tout court et obtenir la formule

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x,$$

voire même, si f est dérivable quel que soit $x \in I$,

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou simplement } \mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x.$$

ou encore $\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x$.

[2] À strictement parler, on note $\mathrm{d}x(a)$ se qu'on devrait noter $\mathrm{d}(\mathrm{Id})(a)$. C'est un «abus de notation» que l'on se permet pour d'autres fonctions ; personne n'a jamais noté $\mathrm{d}(\sin)(x)$ la différentielle de la fonction sinus en un point x ; on la note simplement $\mathrm{d}\sin x$.

D'où l'écriture traditionnelle

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

des dérivées ; elle n'a *aucun* sens dans ce cadre puisque $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ sont des fonctions et non pas des nombres, mais tout le monde l'utilise non seulement pour obéir à la tradition, mais aussi et surtout en raison de sa commodité qui ne s'est pas encore démentie au niveau élémentaire.

L'inventeur des notations $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, à savoir Leibniz, un métaphysicien, les interprétait de toute autre façon ; il n'y a pas, chez lui, de variable h ni de fonctions linéaires. Pour Leibniz et ceux qui l'ont suivi jusqu'à Cauchy au moins, le symbole $\mathrm{d}x$ représentait un «accroissement infiniment petit» de la variable x et $\mathrm{d}f$ la «partie principale », proportionnelle à $\mathrm{d}x$, de l'accroissement

$$f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$$

de f au point x. Ces notions, qui reposent sur des «infiniment petits» que personne n'a jamais pu définir, ont fait inutilement cogiter et divaguer beaucoup trop de gens pour qu'on leur attribue maintenant un autre rôle que celui d'une explication historique de la notation différentielle. Newton, esprit positif en ce qui concerne les mathématiques, l'astronomie, la physique, l'émission de la monnaie et, dans une moindre mesure, la Bible et l'alchimie, ne les appréciait pas car «elles ne se rencontrent pas dans la Nature».

Opérations sur les différentielles Les règles de calcul peuvent se mettre sous forme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f+g)(a) &= \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a), & \mathrm{d}(f+g) &= \mathrm{d}f + \mathrm{d}g, \\ \mathrm{d}(fg)(a) &= g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a), & \mathrm{d}(fg) &= g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g, \\ \mathrm{d}(1/g)(a) &= -\mathrm{d}g(a)/g(a)^2, & \mathrm{d}(1/g) &= -\mathrm{d}g/g^2, \\ \mathrm{d}(f/g)(a) &= \left(g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)\right)/g(a)^2, & \mathrm{d}(f/g) &= \left(g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g\right)/g^2. \end{aligned}$$

Différentielle d'une composée Le théorème de dérivation des fonctions composées s'écrit de même sous une forme très simple. Posons $y = f(x)$ et $z = g(y) = h(x)$. On a

$$\mathrm{d}z = g'(y)\,\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \text{ d'où } \mathrm{d}z = g'(y)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ puisque $\mathrm{d}z = h'(x)\,\mathrm{d}x$. Chez Leibniz and Co. on écrivait tout simplement la séduisante formule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; il vaut mieux ne pas l'appliquer trop mécaniquement car elle n'indique pas en quels points les dérivées doivent être calculées. Ce sont des formules de ce genre qui, ne se trouvant pas sous une forme aussi commode chez Newton, ont fait le succès du système de Leibniz en dispensant les usagers de réfléchir, mais non, même de nos jours, d'écrire parfois des bêtises.

C 60 *Sous les hypothèse du théorème,*

$$\mathrm{d}\,(g\circ f)\,(a) = \underbrace{\mathrm{d}g\,(f\,(a))}_{\in\mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\cdot\underbrace{\mathrm{d}f\,(a)}_{\in\mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Le $\cdot$, généralement omis, désignant la composée entre applications linéaires. Abréviativement, la séduisante formule devient $\mathrm{d}\,(g\circ f) = \mathrm{d}g\circ\mathrm{d}f$ avec toujours la même méfiance à son égard.

Quelques calculs à la physicienne Soit $f : I \to J$ un «difféomorphisme». Pour tout réel $x \in I$, notons y le réel $f(x) \in J$ et pour tout réel $y \in J$, notons x le réel $f^{-1}(y)$. On a donc

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & y \end{array}.$$

On a alors pour tout $y \in J$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Notons enfin $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = f'(x)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \left(f^{-1}\right)'(y)$. On obtient donc la formule

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)} \text{ ou plus simplement } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

Il vaut mieux ne pas appliquer cette dernière et séduisante formule sans réfléchir car elle n'indique pas en quels points les dérivées doivent être calculées.
Rappelons également que cette formule n'est valable que pour des *difféomorphismes*.