Chapter 11 Relations binaires sur un ensemble

Solution 11.1

Nous ferons un joli tableau en cours!

Solution 11.2

Solution 11.5

Solution 11.6 *Problème des hussards*

Solution 11.7

Solution 11.8

Solution 11.9

Solution 11.10

Solution 11.11

Solution 11.12

- Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors
$$\forall n \geq 0, u_n = u_n.$$
On a donc $(u_n) \cong (u_n)$. La relation $\cong$ est réflexive.
- Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n) \cong (v_n)$, c'est-à-dire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq p, u_n = v_n.$$
On a alors trivialement,
$$\forall n \geq p, v_n = u_n,$$
d'où $(v_n) \cong (u_n)$. La relation $\cong$ est donc symétrique.
- Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $v = (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $w = (w_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n) \cong (v_n)$ et $(v_n) \cong (w_n)$. Il existe donc $p_1 \in \mathbb{N}$ et $p_2 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geq p_1, u_n = v_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq p_2, v_n = w_n.$$
Posons $p = \max(p_1, p_2)$. Alors, pour tout $n \geq p$, on a simultanément $n \geq p_1$ et $n \geq p_2$, d'où
$$u_n = v_n \quad \text{et} \quad v_n = w_n.$$
On a donc
$$\forall n \geq p, u_n = w_n,$$
d'où $\left(u_n\right) \cong \left(w_n\right)$.
La relation $\cong$ est donc transitive.

La relation $\cong$ est donc réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

Solution 11.14

Solution 11.15