Chapitre 26

Topologie de $\mathbb{R}^p$

Dans ce chapitre on note E l'un des espaces $\mathbb{R}^p$, $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. Nous noterons donc indifféremment en ligne ou en colonne leurs éléments.

26.1 Une norme sur $\mathbb{R}^p$

§1 Norme euclidienne

Définition 1

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, posons

$$N_2(x) = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_p}^2}.$$

L'application $N_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ est appelée **norme euclidienne** de $\mathbb{R}^p$.

On définit l'application N_2 de manière analogue sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et sur $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Notation

On note $\|x\| = N_2(x)$.

Proposition 2

Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ *et* $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, *alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i^2\right).$$

Proposition 3

Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. L'application $N_2 : E \to \mathbb{R}_+ \mapsto \|x\|$ vérifie les propriété suivantes:

- *On a l'implication $\|x\| = 0 \implies x = 0$.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.*
- *On a l'inégalité triangulaire*
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$
- *On a l'inégalité triangulaire*
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

§2 Distance euclidienne

Définition 4

Soit $E = \mathbb{R}^p$. On appelle **distance euclidienne** sur $E = \mathbb{R}^p$ l'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|y - x\| \end{array}.$$

Le réel $\mathrm{d}(x, y)$ est appelé **distance entre x et y**.

Proposition 5

Pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$,

1. $\mathrm{d}(x, y) = 0$ *si* $x = y$ *et* $\mathrm{d}(x, y) > 0$ *si* $x \neq y$*;*
2. $\mathrm{d}(y, x) = \mathrm{d}(x, y)$*;*
3. $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

§3 Boules

Définition 6

Soit $a \in E$ et $r > 0$.

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l'ensemble
$$B(a, r) = B_o(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) < r \}.$$
- La **boule fermé** de centre a et de rayon r est l'ensemble
$$B_f(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) \leq r \}.$$
- La **sphère** de centre a et de rayon r est l'ensemble
$$S(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) = r \}$$

On constate facilement
$$\{ a \} \subset B_o(a,r) \subset B_f(a,r).$$

Exemple 7

Pour tous réels x et a et pour tout $r > 0$,

1. $|x-a| < r \iff a-r < x < a+r \iff x \in]a-r, a+r[$.
2. $|x-a| \leq r \iff a-r \leq x \leq a+r \iff x \in [a-r, a+r]$.

Ainsi, dans $\mathbb{R}$,

1. les boules ouvertes sont les intervalles $]u, v[$ avec $u < v$.
2. les boules fermées sont les intervalles $[u, v]$ avec $u < v$.

§4 Parties bornées

Définition 8

Soit A une partie de E. On dit que A est une partie **bornée** s'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall (x,y) \in A^2, \mathrm{d}(x,y) \leq \mu.$$

Proposition 9

Une partie A est bornée si, et seulement si A est inclue dans une boule, ou de manière équivalente si il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in A, \|x\| \leq r.$$

§5 Parties convexes

Définition 10

On dit que A est une partie **convexe** si
$$\forall (u,v) \in A^2, \forall t \in [0,1], tu + (1-t)v \in A.$$

Notation

Pour $(u,v) \in E^2$, on peut définir le segment $[u,v]$ par
$$[u,v] = \{ z \in E \mid \exists t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } z = tu + (1-t)v \}.$$

Cette notation est cohérente avec la notation habituelle des segments des $\mathbb{R}$ si $u \leq v$:
$$\{ x \in \mathbb{R} \mid u \leq x \leq v \} = \{ tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Avec cette notation, A est une partie **convexe** de E si, et seulement si
$$\forall (u,v) \in A^2, [u,v] \subset A.$$

Exemple 11

Un boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

26.2 Suites d'éléments de $\mathbb{R}^p$

§1 Suites convergentes

Définition 12 On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E = \mathbb{R}^p$ **converge** vers $\ell \in E$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \mathrm{d}(u_n, \ell) \leq \varepsilon,$$

ce qui équivalent à l'énoncé

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|u_n - \ell\right\| = 0.$$

Théorème 13 *Si une suite converge, c'est vers un unique ℓ.*

On peut alors noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

§2 Opérations algébriques

Théorème 14 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de points de $E = \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b.$$
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda a.$$

§3 Suites et coordonnées

Théorème 15 *Soit $E = \mathbb{R}^p$, $u = \left(u_n\right) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On note*

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(p)}\right).$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si toutes les suites $\left(u_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(u_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall j \in [\![1, p]\!], \lim_{n\to+\infty} u_n^{(j)} = \ell_j.$$

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si la limite de la suite des j-ème coordonnées est la j-ème coordonnée de la limite de la suite.

Exemple 16 La suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3n+5}, \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right)$$

converge vers $(1, 0)$.

Exemple 17 On pourrait étendre la définition à d'autres espace. Par exemple, pour une suite de matrices, la convergence équivaut à celle de toutes les suites des coefficients.

26.3 Topologie de $\mathbb{R}^p$

§1 Parties ouvertes, voisinages

Définition 18 Une partie A de E est un **ouvert** ou est une partie **ouverte** lorsque

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subset A.$$

L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle **topologie** de E.

Proposition 19

1. *$\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E*
2. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Exemple 20 Une boule ouverte est un ouvert.

Exemple 21 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est un **ouvert** de $\mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\forall x \in A, \exists r > 0,]x-r, x+r[\subset A.$$

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles $]\alpha, \beta[= \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta \}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles $]\alpha, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \}$ et $]-\infty, \beta[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < \beta \}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 22 Soit $x \in E$. On appelle **voisinage** de x toute partie $V \subset E$ contenant un ouvert contenant x, ou de manière équivalente

$$\exists r > 0, B(x,r) \subset V.$$

L'ensemble des voisinage de x sera noté $\mathscr{V}(x)$.

Remarque Une partie A de E ouverte si, et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 23 *Soit $x \in E$.*

1. *Une union quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.*
2. *Une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*

§2 Parties fermées

Définition 24 Une partie A de E est un **fermé** ou est une partie **fermée** lorsque son complémentaire $E \setminus A$ est ouvert.

Exemple 25 Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

Exemples 26

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles $[\alpha, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta \}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles $[\alpha, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \}$ et $]-\infty, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \beta \}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition 27

1. *$\emptyset$ et E sont des parties fermées de E*
2. *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
3. *Une union finie de fermés est fermée.*

§3 Point intérieur et point adhérent

Définition 28

Soit A une partie de E et $x \in E$.

- Nous dirons que x est un point **intérieur** à A lorsque

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

  Ce qui revient à dire que A est un **voisinage** de x.

- Nous dirons que x est un point **adhérent** à A lorsque

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

  c'est-à-dire

$$\forall r > 0, \exists y \in A, \|x - y\| \leq r.$$

  Cela revient à dire que tout voisinage de x rencontre A.

Proposition 29

1. *Une partie A de E est ouverte si, et seulement si tous ses points lui sont intérieur.*
2. *Une partie A de E est fermée si, et seulement si tous ses points lui sont adhérents.*

Remarque

Ces notion ne sont pas au programme, mais peuvent être utile

- Nous dirons que x est un point **extérieur** à A lorsque

$$\exists r > 0, B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

  Ce qui revient à dire que x est un point intérieur à $E \setminus A$.

- Nous dirons que x est un **point isolé** de A lorsque

$$\exists r > 0, B(x, r) \cap A = \{ x \}.$$

- Nous dirons que x est **point d'accumulation** de A si x est adhérent à $A \setminus \{ x \}$, c'est-à-dire

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, r) \cap A \neq \{ x \}.$$

  Si x est un point d'accumulation de A, alors x est adhérent à A et pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ contient une infinité de points de A.

§4 Sous-ensembles remarquables

Définition 30

Soit A une partie de E.

- L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.
- L'**intérieur** de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points intérieurs à A.
- La **frontière** de A, notée ∂A ou $Fr(A)$ est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- La partie A est dite **dense** dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Exemple 31

Dans $\mathbb{R}$,

- Si $\alpha < \beta$, on a $\overline{]\alpha, \beta[} = [\alpha, \beta]$.
- Si $\alpha < \beta$, on a $\overset{\circ}{\overbrace{[\alpha, \beta]}} =]\alpha, \beta[$.
- Si $\alpha < \beta$, on a $\partial[\alpha, \beta] = \{ \alpha, \beta \}$.

Exemple 32

Soit $a \in E$ et $r > 0$,

$$\overline{B_o(a, r)} = B_f(a, r).$$

Proposition 33

Soit A une partie de E.

1. *On a toujours*
$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}.$$
2. *L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.*
3. *L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé.*
4. $$\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Proposition 34

1. *L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A.*
2. *Une partie A est ouverte si, et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*
3. *L'ensemble $\overline{A}$ est le plus petit ensemble fermé contenant A.*
4. *Une partie A est fermée si, et seulement si $A = \overline{A}$.*

26.4 Caractérisations séquentielles

§1 Caractérisation des points adhérents, des fermés

Proposition 35

1. *Un point $x \in E$ est adhérent à $A \subset E$ si, et seulement si il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite x:*
$$\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} a_n = x.$$
Autrement dit : les points adhérents à A sont les limites de suites de points de A.

2. *Une partie A est un fermé de E si, et seulement si*
$$\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} a_n = x \implies x \in A.$$

§2 Caractérisation séquentielle de la densité

Théorème 36

Caractérisation séquentielle de la densité
Une partie A de E est dense dans E si, et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite de points de A tendant vers x.

Théorème 37

1. *L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Rappel

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de cette partie, ou encore si, et seulement si
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, u < v \implies \exists z \in A, u < z < v.$$

§3 Caractérisation des points intérieurs, des ouverts

Théorème 38

Caractérisation séquentielle des ouverts
Soit A une partie de E.

1. *Un point x de E est intérieur à A si, et seulement si pour toute suite (u_n) de limite x, il y a un rang à partir duquel tous les termes sont dans A.*
2. *Ainsi, A est ouvert si, et seulement si toute suite convergeant vers un de ses points y prend ses valeurs à partir d'un certain rang.*

26.5 Topologie de $\mathbb{C}^p$

Les résultats précédents se généralisent naturellement à l'ensemble $E = \mathbb{C}^p$. Pour cela on utilise une norme appelée norme hermitienne sur $\mathbb{C}^p$.

Définition 39

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p$, posons

$$N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_p|^2}.$$

L'application $N_2 : \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}_+$ est appelée **norme hermitienne** de $\mathbb{C}^p$.