CHAPITRE 41

APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION

41.1 APPLICATION LINÉAIRE EN DIMENSION FINIE

§1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Test 1

On considère la base $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ de $E = \mathbb{R}^2$ donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On suppose donnée une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image du vecteur $v = (2, -5)^T$ par f.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors, il existe une unique application linéaire $T : E \to F$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], T(v_j) = y_j.$$

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Corollaire 3 *Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.*

Théorème 4 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et*

$$\dim\left(\mathcal{L}(E, F)\right) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration. Admettons ce résultat pour ce chapitre. Nous verrons le cas particulier $F = \mathbb{K}$ dans la section 41.3. ∎

§2 Caractérisation des isomorphismes par les bases

Théorème 5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. On note $f(\mathcal{B})$ la famille*

$$\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right)$$

Alors,

1. *f est un isomorphisme si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*
2. *f est un injective si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F.*
3. *f est un surjective si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.*

Proposition 6 *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.*

Proposition 7 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors, pour toute famille $\mathcal{S} = \left(w_1, w_2, \dots, w_p\right)$ de vecteurs de E, on a*

$$\operatorname{rg}\left(f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_p)\right) = \operatorname{rg}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right).$$

Corollaire 8 ♥ *Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors*

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right) &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1\right), \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_2\right), \dots, \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_p\right)\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right)\right).\end{aligned}$$

§3 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Théorème 9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose $\dim(E) = \dim(F)$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est bijective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est injective.*

Corollaire 10

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est bijective si, et seulement si f est surjective si, et seulement si f est injective.

Exemple 11

On reprend l'exemple de l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

Montrer (rapidement) que T est bijective.

41.2 Rang d'une application linéaire

§1 Applications linéaires de rang fini

Définition 12

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que f est de **rang fini** lorsque l'image de f est de dimension finie. La dimension de cette image est alors appelée **rang** de f que l'on note $\mathrm{rg}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Théorème 13

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$ et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E. Alors f est de rang fini et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right).$$

On a donc

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right) \qquad \mathrm{rg}(f) \leq \dim(E) \qquad \mathrm{rg}(f) \leq \dim(F).$$

Remarque

Plus généralement, si A est une partie de E,

$$f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A)).$$

§2 Rang d'une composée

Proposition 14 *Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors*

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f$ *et* $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$.
2. *Si g est injective, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
3. *Si f est surjective, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Corollaire 15 *Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche, ou à droite, par un isomorphisme.*

§3 Théorème du rang pour les application linéaires

Théorème 16 **Forme géométrique du théorème du rang**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit S est un supplémentaire de $\ker f$ dans E alors

$$g = f_S^{\operatorname{Im} f} : \begin{array}{ccc} S & \to & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire que tout supplémentaire de $\ker f$ dans E est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

On dit que f induit un isomorphisme g de S sur $\operatorname{Im} f$.

Théorème 17 **Théorème du rang**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est de rang fini et

$$\operatorname{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim E.$$

Dans le cas où $f \in \mathcal{L}(E)$, il n'y a aucune raison de croire que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires. Par contre, si E est de dimension finie et si $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{ 0_E \}$, alors

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f).$$

Corollaire 18 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors si $(b_1, \dots, b_p)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, a_i un élément de E tel que $f(a_i) = b_i$, la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre et engendre un sous-espace supplémentaire de $\ker(f)$.*

Remarque Soit une matrice A de type (m, n) et $T : x \mapsto Ax$. Alors T est une application linéaire de $E = \mathbb{K}^n$ dans $F = \mathbb{K}^m$. De plus, $\ker(T) = \ker(A)$ et $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(A)$, donc $\operatorname{rg}(T) = \operatorname{rg}(A)$. Le théorème du rang affirme donc que

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\ker A) = n,$$

où n est la dimensions de $E = \mathbb{K}^n$, qui est égale au nombre de colonnes de A.

Test 19

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

1. On a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$, et $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ si, et seulement si f est injective.
2. On a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$, et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ si, et seulement si f est surjective.

En particulier, f est bijective si, et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Test 20

Existe-il une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$?

41.3 Dualité

§1 Base duale

Définition 21

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La **base duale** de $(e_1, \dots, e_n)$ est la famille $\left(e_1^*, \dots, e_n^*\right)$ des **formes linéaires coordonnées** relativement à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la famille des formes linéaires vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!]\, e_i^*\left(e_j\right) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Exemple 22

La base duale de la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est $(\mathfrak{Re}, \mathfrak{Im})$.

Exemple 23

La base duale de la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}[X]$ est $\left(P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right)_{k=0,\dots,n}$.

Proposition 24

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Par conséquent, E^* est de dimension finie et

$$\dim\left(E^*\right) = \dim(E).$$

§2 Formes linéaires et hyperplans

Définition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E si il existe une droite vectorielle $D = \operatorname{Vect}\{\, a \,\}$ telle que

$$E = H \oplus D.$$

Proposition 26

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E et $x \notin H$. Alors l'hyperplan H et la droite $\operatorname{Vect}(x)$ *sont supplémentaire dans E.*

Théorème 27

Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$.

Théorème 28

Soit φ une forme linéaire non nulle *sur un espace vectoriel E.*
Alors, $\ker(\varphi)$ *est un hyperplan de E.*

Le théorème précédent admet une réciproque:

Théorème 29

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E.

1. *Il existe des formes linéaire φ telles que $H = \ker \varphi$.*
2. *Si φ_0 est l'une d'entre elles, les autres sont les $\lambda\varphi_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\, 0 \,\}$.*

Définition 30

Lorsque $H = \ker \varphi$, on dit que H a pour **équation** $\varphi(x) = 0$.

Il n'y a pas unicité de cette équations, mais les autres équations de H sont $\lambda\varphi(x) = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Remarquez qu'en dimension finie, après choix d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, une forme linéaire sera décrite par une expression du type

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

où les $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, l'équation d'un hyperplan est de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

et les autres sont promotionnelles.

Théorème 31

Intersection d'hyperplans
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. *L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-m$.*
2. *Tout sous-espace vectoriel V de E de dimension $n-m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.*

Esquisse. **1.** Par récurrence sur m, en utilisant la formule de Grassmann.

2. Soit $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ une base de V que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ une base de E.

En notant $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de la base $\mathcal{B}$ et

$$H_i = \ker\left(e_i^*\right),$$

on vérifie bien que $V = H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

∎

CHAPITRE 41

COMPLÉMENTS

41.4 APPLICATION AUX SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE DEUX