Chapter 46 Déterminant d'une matrice carrée

46.1 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 46.1 *Oral ENS MP*
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

(i) pour $i \neq j$, $a_{i,j} \neq 0 \implies a_{j,i} = 0$.

(ii) pour i, j, k deux à deux distincts, $\left(a_{i,j} \neq 0 \text{ et } a_{j,k} \neq 0\right) \implies a_{i,k} \neq 0$.

Calculer $\det A$.

Exercice 46.2
En développant selon une ligne ou une colonne bien choisie, calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$,

2. $\begin{vmatrix} 1 & 23 & 6 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

Exercice 46.3
Soit $w \in \mathbb{R}$ et B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & w \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de w telles que $\det B = 0$.

Exercice 46.4 *Matrices à petits coefficients*
Soit $n \geq 1$ et $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes:

- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} \in [0, 1[$.
- $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \leq 1$.

Démontrer que $|\det(A)| < 1$.

Exercice 46.5
Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 46.6
Évaluer le déterminant ci-dessous en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes pour simplifier vos calculs.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vérifier le résultat de votre calcul en utilisant cette fois des opérations élémentaires sur les colonnes.

Exercice 46.7 *Dérivation d'un déterminant*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère un déterminant Δ d'ordre 3 dont les neuf coefficients sont des fonctions $a_{i,j}$ dérivables sur I:

$$\forall x \in I, \Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est dérivable en tout point $x \in I$ et que

$$\forall x \in I, \Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a'_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a'_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a'_{1,2}(x) & a_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a'_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a'_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & a'_{1,3}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & a'_{2,3}(x) \\ a_{3,1}(x) & a_{3,2}(x) & a'_{3,3}(x) \end{vmatrix}.$$

2. Sans aucun calcul de déterminant, montrer que le déterminant suivant est indépendant de x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(x+1) & \operatorname{sh}(x+1) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+2) & \operatorname{sh}(x+2) & -4 \\ \operatorname{ch}(x+3) & \operatorname{sh}(x+3) & -4 \end{vmatrix}.$$

Donner sa valeur.

Exercice 46.8

Prouver l'identité suivante

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c).$$

Exercice 46.9

Soit $(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les déterminants suivants en présentant, si possible, les résultats sous forme factorisée.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$.

Exercice 46.10

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, donner une forme factorisée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 46.11

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 46.12

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en mettant en évidence la factorisation

1. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 46.13 *Déterminant et suites récurrentes linéaire*

Soient a et b deux réels distincts et non nuls. Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

- Déterminer une relation entre Δ_n, Δ_{n+1} et Δ_{n+2}.
- Donner l'expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 46.14

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, tel que $\sin\varphi$ soit non nul. On note A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ avec $a_{i,i} = 2\cos\varphi$ pour $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leq i < n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. On pose $D_n = \det A_n$.

Établir une formule de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$. En déduire

$$\forall n \geq 1, D_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Exercice 46.15

Soit $a \in \mathbb{C}^\star$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le déterminant $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 46.16 *Oral CCINP PC 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, soit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(matrice tridiagonale de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{).}$$

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (Δ_n).

2. En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 46.17 *Oral IMT MP 2023*

Calculer

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{vmatrix} \quad \text{(matrice tridiagonale de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{).}$$

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (Δ_n).

2. En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

Exercice 46.18 *Déterminant de Vandermonde*

Pour $n \geq 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit le déterminant de Vandermonde

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V_2(a_1, a_2)$ et $V_3(a_1, a_2, a_3)$ sous forme factorisée.

2. On suppose que a_2, a_3 et a_4 sont deux à deux distincts, et on considère

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto V_4(x, a_2, a_3, a_4).$$

- Montrer que f est une fonction polynômiale de degré 3 et déterminer le coefficient du terme de degré 3.
- Montrer que f s'annule en a_2, a_3 et a_4.
- En déduire une expression factorisée de $V_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

3. Calculer $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ sous forme factorisée pour tout n.

Déterminants

46.2 Applications bilinéaires

46.3 Applications multilinéaires

Exercice 46.19

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application φ suivante est une forme trilinéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q,R) & \mapsto & \left(\sum_{k=0}^{10} P(k)\right) \times Q'(2) \times \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

46.4 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

Exercice 46.20

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\mathcal{B}$. Prouver que quels que soient les vecteurs u, v, w,

$$\det_{\mathcal{B}}(u+v, v+w, w+u) = 2\det_{\mathcal{B}}(u, v, w).$$

Exercice 46.21 *Application du déterminant de Vandermonde*

Soit $m < n$ deux entiers naturels, $P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ et $(a_1, \dots, a_n)$ des réels.

1. Calculer

$$\begin{vmatrix} P_1(a_1) & \cdots & P_1(a_n) \\ P_2(a_1) & \cdots & P_2(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(a_1) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

À quelle condition le déterminant est-il non nul ?

2. En déduire pour $m < n$, la valeur de

$$\begin{vmatrix} 1^m & 2^m & \cdots & n^m \\ 2^m & 3^m & \cdots & (n+1)^m \\ \vdots & & \vdots & \\ n^m & (n+1)^m & \cdots & (2n-1)^m \end{vmatrix}.$$

Exercice 46.22

Déterminer selon le paramètre réel α si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante est libre ou liée:

$$a = (4, -1, 3), \qquad b = (2, 2, 1), \qquad c = (\alpha, 1, \alpha - 2).$$

Exercice 46.23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 dont on considère un base $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $\left(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1\right)$ est-elle une base de E ?

46.5 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 46.24

Calculer les déterminants des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

1. $P(X) \mapsto P(X+1)$
2. $P \mapsto (X+1)P' + P$
3. $P \mapsto P(2) + P(1)X + P(0)X^2$
4. $P \mapsto (X^2-1)P' - 2(X+3)P$

Exercice 46.25

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $f(P)$ le polynôme donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widetilde{f(P)}(x) = \int_x^{x+1} \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis calculer son déterminant.

Exercice 46.26 *Oral CCP MP 2015*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Soit $x \in E$. Démontrer que si $x = y + z$ où $y \in \ker f$ et $z \in \ker(f^2 + \mathrm{Id})$ alors $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$.
2. Montrer que $E = \ker f \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$.
3. Prouver que $\dim \ker(f^2 + \mathrm{Id}) \geq 1$. Montrer que, si $x \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$, alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$.
4. Que vaut $\det(-\mathrm{Id})$? En déduire que $\dim \ker(f^2 + \mathrm{Id}) = 2$.
5. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

46.6 Applications aux déterminants de matrices

Exercice 46.27

Soit A une matrice $(3,3)$ telle que $\det A = 7$.
Déterminer $\det(2A)$, $\det(A^2)$, $\det\left(2A^{-1}\right)$ et $\det\left((2A)^{-1}\right)$.

Exercice 46.28 *Factorisation d'un déterminant circulant*

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère les deux matrices U et V de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ définies par

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit UV.
2. Calculer $\det(UV)$ en le mettant sous la forme
$$\det(UV) = P(1)P(j)P(j^2)\det(V).$$
où $P(x) = a + bx + cx^2$.
3. En déduire une factorisation complexe de $\det(U)$.

Exercice 46.29

Pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible?

Exercice 46.30

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble Γ de tous les réels λ tels que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation

$$AX = \lambda X \iff (A - \lambda I_3)X = 0$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 46.31 *Une famille de matrices inversibles*

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, A + xB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 46.32

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -9 & -7 & 6 \\ -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I_3$ n'est-elle pas inversible ?

2. Pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente, déterminer le sous-espace vectoriel $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

3. En déduire une base $\boldsymbol{e}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D de u soit une matrice diagonale puis exprimer le lien entre A et D.

Exercice 46.33

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par u. En déduire une base relativement à laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 46.34

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels et A la matrice de coefficient général $a_{i,j} = \sin(\alpha_i + \alpha_j)$. Montrer que $\det A = 0$ si $n \geq 3$. Qu'en est-il pour $n = 2$?

46.7 Comatrice

Exercice 46.35 *Matrices à coefficients entiers et inversibilité*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que son inverse ait tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 46.36

Soient des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $\det(A)$ et $\det(B)$ soient premiers entre eux.

Montrer l'existence de $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n.$$

Compléments

46.8 Formules de Cramer

Exercice 46.37

Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauß puis à l'aide des formules de Cramer.

1. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x + 4y + z = 1 \end{cases}.$

Exercice 46.38

1. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer le déterminant de Vandermonde

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec a, b, c deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}. \tag{S}$$