

## DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

## 31.1 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

Supposons que l'on désire étudier le comportement d'une fonction  $f$  autour de  $x = 0$ . Il se peut qu'il existe une constante  $a \neq 0$  et un exposant  $s$  tels que  $f(x) \sim ax^s$ . On a alors – par définition –  $f(x) = ax^s + o(x^s)$ , ce qui nous incite à considérer la différence  $f(x) - ax^s$ . Il se peut alors qu'il existe une constante  $b \neq 0$  et un exposant  $t$  tels que  $f(x) - ax^s \sim bx^t$ ; on a nécessairement  $t > s$  d'où  $f(x) = ax^s + bx^t + o(x^t)$ . Il peut alors arriver qu'il existe une constante  $c \neq 0$  et un exposant  $u > t$  tels que  $f(x) - ax^s - bx^t \sim cx^u$ , et ainsi de suite.

## §1 Partie régulière et développement limité

## Définition 1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être au point 0. On dit que la fonction  $f$  admet un **développement limité** d'ordre  $n$  au point 0 lorsqu'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que pour  $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n a_kx^k + o(x^n) \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

- La fonction polynômiale  $P_n : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  est appelée la **partie régulière** du développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  au point 0.
- Les  $a_kx^k$  sont les **termes**, les  $a_k$  les **coefficients** et la fonction  $r_n = f - P_n$  est le **reste** de ce développement.

Plus généralement, on peut parler développement limité de  $f$  en 0 dès lors que 0 est un point adhérent à  $I$  de sorte que les limites lorsque  $x \rightarrow 0$  aient un sens.

### Remarque

Dire que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au point 0 signifie qu'il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que au voisinage de  $x = 0$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

### Proposition 2

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre  $n$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

S'il existe  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $a_p \neq 0$ , alors

$$f(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{p-1}x^{p-1} \sim a_px^p \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

### Exemple 3

On pose  $f(x) = 1 + x^2 + x^3$ . Donner un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 0, 1, 2 et  $n \geq 3$ .

### Proposition 4

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et au voisinage de  $x = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

### Remarque

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité en 0.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors, lorsque  $x \rightarrow 0$ ,

$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - \cdots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n).$$

### Caractérisation 5 Définition équivalente

L'application  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 si et seulement si il existe un polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  tel que au voisinage de  $x = 0$ ,

$$f(x) = P(x) + o(x^n).$$

## §2 Troncature

### Proposition 6

Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$ , elle admet aussi un développement limité d'ordre  $p$  pour tout  $p < n$  et il est obtenu en **tronquant** à l'ordre  $p$  la partie régulière du développement limité à l'ordre  $n$ .

### §3 Unicité d'un développement limité

#### Théorème 7

Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au point 0, ce développement limité est unique. Cela revient à dire que si les réels  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  vérifient

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n) \end{aligned}$$

alors  $a_k = b_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

#### Corollaire 8

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité en 0.

1. Si  $f$  est paire, alors la partie régulière du développement est un polynôme pair.
2. Si  $f$  est impaire, alors la partie régulière du développement est un polynôme impair.

### §4 Développements limités et régularité

#### Développements limités et continuité

#### Proposition 9

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Alors  $f$  admet une limite en 0 si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en 0.

Dans ce cas

$$f(x) = a_0 + o(1) \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0.$$

#### Corollaire 10

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0, alors  $f$  est continue en 0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 au point 0.

Si on a un développement limité à l'ordre 0,  $f(x) = a_0 + o(1)$ , pour une fonction qui n'est pas définie en 0, celle-ci est alors prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = a_0$ .



**Dans la suite** Quitte à effectuer un prolongement par continuité, on supposera les fonctions définies en 0.

#### Développements limités et dérivabilité

#### Proposition 11

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0. Alors  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce cas

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

### Contre-exemples importants

Il existe des fonctions  $f$  qui admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans que  $f$  soit deux fois dérivable en 0.

Prenons la fonction  $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et qu'on peut prolonger par continuité au point 0 en posant  $f(0) = 1$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , on voit que

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2);$$

la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

De plus, pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ , et d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $f'(0) = 1$  — d'ailleurs  $f(x) = 1 + x + o(x)$  prouve que  $f$  est dérivable en 0 de dérivée 1.

Or, pour  $x \neq 0$ , le taux de variation  $\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0, ce qui prouve que  $f$  n'est pas deux fois dérivable en 0.



Ainsi, pour prouver qu'une fonction  $f$  est  $p$  fois dérivable en 0, il est incorrect de donner pour argument le fait qu'elle admet un développement limité d'ordre  $p$  en ce point.

## 31.2 FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

### Lemme 12

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $g$  une fonction dérivable au voisinage de 0. Si  $g'(x) = o(x^k)$  au voisinage de 0, alors

$$g(x) - g(0) = o(x^{k+1}).$$

*Démonstration.* Par hypothèse, on peut écrire au voisinage de  $h = 0$

$$g'(h) = h^k \omega(h) \quad \text{avec} \quad \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Pour  $x$  au voisinage de 0, l'application  $g$  est continue sur  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ ), dérivable sur  $]0, x[$  (ou  $]x, 0[$ ). Appliquons l'égalité des accroissements finis dans l'intervalle  $[0, x]$  : il existe  $c_x \in ]0, x[$  tel que

$$g(x) - g(0) = x g'(c_x).$$

On en déduit

$$|g(x) - g(0)| = |x c_x^k \omega(c_x)| \leq |x^{k+1} \omega(c_x)|$$

Avec,  $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(c_x) = 0$  puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} c_x = 0$ . ■

### Théorème 13

#### Formule de Taylor-Young

Soient  $f$  une fonction définie au voisinage de 0 et  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, et au voisinage de  $x = 0$ , on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

*Démonstration.* <sup>1</sup> Nous faisons une récurrence sur  $n$ . La formule est bien entendu vraie si  $n = 0$  ou  $n = 1$  d'après les résultats de la partie §4.

<sup>1</sup>L'hypothèse  $f$  est  $n$  fois dérivable au voisinage de 0 suffit pour établir la formule, mais le programme impose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Supposons le résultat établi au rang  $n$  et  $f$   $n + 1$  dérivable au voisinage du point 0. En l'appliquant au rang  $n$  à  $f'$  (qui est bien  $n$  fois dérivable au voisinage de 0), on peut écrire

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Appliquons le lemme avec  $k = n$  et

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

on a alors  $g'(x) = o(x^n)$  et comme  $g(0) = 0$ , le lemme conduit à  $g(x) = o(x^{n+1})$ , ce qui est la formule cherchée. ■

**Corollaire 14** Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ , alors  $f$  admet un développement limité en 0 à tout ordre  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 15** Au voisinage de  $x = 0$ ,

1.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ .
2.  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
3.  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ .
4.  $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
5.  $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ .

**Corollaire 16** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et au voisinage de  $x = 0$ ,

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

où on a noté  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!}$ . On parle de coefficient binomial généralisé.

Dans le cas où  $\alpha$  est entier, la partie régulière reproduit le développement du binôme de Newton.

**Corollaire 17** Au voisinage de  $x = 0$ ,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) \end{cases} \text{ par parité et classe } \mathcal{C}^8.$$

**Remarque**

Il faut se garder de croire que le théorème de Taylor-Young soit la panacée en théorie locale (insistons d'ailleurs encore une fois sur le fait que ses hypothèses sont une condition suffisante mais nullement nécessaire d'existence d'un développement limité à l'ordre  $n$ ). Celui qui a calculé les sept premières dérivées de la fonction  $\tan$  est convaincu de sa lourdeur d'emploi. Il accueillera donc avec soulagement les techniques qui vont suivre qui permettent de trouver plus aisément de nouveaux développements limités.

**Test 18**

(Re)trouver le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  et  $x \mapsto \ln(1+x)$  en utilisant la formule de Taylor-Young.

## 31.3 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Rappel**

Au voisinage de  $x = 0$ ,

1.  $q > p \implies x^q = o(x^p)$ .
2.  $o(x^p) = x^p \times o(1)$ .
3.  $x^p \times o(x^q) = o(x^{p+q})$ .
4.  $o(x^p) \times o(x^q) = o(x^{p+q})$ .
5. Si  $0 \leq p \leq q$ ,  $o(x^p) + o(x^q) = o(x^p)$ .

### §1 Sommes et produits de développements limités

**Théorème 19**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités d'ordre  $n$  au point 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f + g$  et  $\lambda f$  admettent des développements limités d'ordre  $n$  au point 0 donné par

$$(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + o(x^n).$$

**Exemple 20**

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\sin x + \cos x$ .

**Remarque**

Si les développements limités de  $f$  et  $g$  ne sont pas au même ordre, on fait un développement limité de  $f + g$  en gardant l'ordre minimum. Par exemple, si au voisinage de  $x = 0$

$$f(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$g(x) = 3 + 2x + \frac{x^2}{3} + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

alors, on ne peut donner qu'un développement limité de  $f + g$  à l'ordre 2

$$(f + g)(x) = 4 + 2x - \frac{2x^2}{3} + o(x^2).$$

**Théorème 21**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités d'ordre  $n$  au point 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, la fonction  $f g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré  $n$  le produit  $PQ$  de leurs parties régulières.



Le produit de deux développements limités à l'ordre  $n$  n'est pas un développement limité à l'ordre  $2n$  ! C'est un développement limité au même ordre  $n$ .

Autrement dit, on multiplie mentalement terme à terme ; on voit apparaître d'abord des termes de la forme  $ax^s$ , puis des termes de la forme  $ax^s o(x^t) = o(x^{s+t})$ , enfin un terme  $o(x^s) o(x^t) = o(x^{s+t})$ . Parmi les termes de la forme  $o(x^u)$ , seul celui ou ceux ayant le plus petit exposant  $u$  est à retenir puisque tous les autres sont eux mêmes des  $o(x^u)$  ; et parmi les termes de la forme  $ax^s$ , seuls ceux d'exposants  $s \leq u$  sont à retenir pour la même raison.

**Exemple 22**

Développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{1+x}$ .

Dans certains cas, on peut profiter de l'absence de termes constants dans certaines parties régulières pour diminuer la difficulté des calculs :

**Exemple 23**

Chercher un développement limité à l'ordre 7 en 0 de  $(\operatorname{sh} x)(\sin x - x)$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, la fonction étant paire, sa partie régulière n'aura que des puissances paires. Comme  $\operatorname{sh} x = x + o(x)$ , et  $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , on voit qu'on pourra mettre  $x^4$  en facteur dans la partie régulière du produit

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{sh} x)(\sin x - x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\ &= x^4 \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^3)\right) \\ &= x^4 \left(-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{36}\right)x^2 + o(x^3)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + o(x^7)$$

On voit ici que les termes en  $x^5$  et  $x^7$  du *DL7* de  $\operatorname{sh} x$  et le terme en  $x^7$  du *DL7* de  $\sin x - x$  étaient inutiles. ■

Cependant, ces améliorations de la méthode générale sont un peu délicates à manier: il convient, si on les utilise, de rester très soigneux, de peur d'oublier un terme qui ne soit pas négligeable à l'ordre où on travaille.

**Méthode**

De manière générale, si

$$f(x) = x^p(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)) \text{ et } g(x) = x^q(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))$$

Alors on obtient un développement limité de  $f g$  à l'ordre  $p+q+n$  (on garde  $x^{p+q}$  en facteur).

## §2 Composition de développements limités

### Théorème 24

Soient  $u$  et  $f$  deux fonctions admettant des développements limités d'ordre  $n$  au point 0. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ .

$$u(x) = P(x) + o(x^n) \qquad f(y) = Q(y) + o(y^n).$$

Alors l'application  $f \circ u$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au point 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré  $n$  le polynôme composé  $Q \circ P$ .

### Exemple 25

Déterminer en développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}}$ .

## §3 Développement limité d'un quotient

### Théorème 26

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 avec  $f(0) \neq 0$ . Alors la fonction  $\frac{1}{f}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.

### Corollaire 27

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre  $n$  en 0 avec  $g(0) \neq 0$ . Alors la fonction  $\frac{f}{g}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.

*Démonstration & méthode.* La fonction  $f$ , non nulle en 0 et continue en 0, est non nulle au voisinage de 0. Notons  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  la partie régulière du  $DLn$  de  $f$  en 0. Alors  $a_0 = f(0)$  est non nul, et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + (a_1/a_0)x + \dots + (a_n/a_0)x^n + o(x^n)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + u(x)},$$

la fonction  $x \mapsto u(x)$  étant nulle en 0, et admettant un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. Or  $u \mapsto \frac{1}{1+u}$  admet un développement limité en 0 à tout ordre, donc  $1/f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 par composition. ■

### Exemple 28

Déterminer un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de  $x = 0$  de  $\tan x$  en utilisant le quotient

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

### Méthode

Il peut arriver que le quotient  $\frac{f}{g}$  admette un développement limité en 0 alors que  $g(0) = 0$ ; le théorème ne s'applique pas directement. De manière générale, si

$$f(x) = x^p(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)) \text{ et } g(x) = x^q(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))$$

avec  $p \geq q$  et  $b_0 \neq 0$ , alors on obtient un développement limité de  $f/g$  à l'ordre  $p - q + n$  (on garde  $x^{p-q}$  en facteur).

### Exemple 29

Montrer que  $\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$  admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.



## §4 Intégration

### Théorème 30

Soit  $f$  une application dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que sa fonction dérivée  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en 0 et

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

### Corollaire 31

Soit  $f$  une application continue sur un voisinage de 0. On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors toute primitive  $F$  de  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en 0 dont la partie régulière est obtenue par intégration de la partie régulière de celui de  $f$ . Ainsi

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

### Corollaire 32

Au voisinage de  $x = 0$ ,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

### Corollaire 33

Au voisinage de  $x = 0$ ,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

*Démonstration.* On intègre le développement limité

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

■

## §5 Dérivation

L'existence d'un développement limité de  $f$  ne permet *à priori* pas de déduire l'existence d'un développement limité de  $f'$ . Revoir par exemple

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

### Proposition 34

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 et que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n - 1$  en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \\ f'(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

Alors  $b_0 = a_1, b_1 = 2a_2, \dots, b_{n-1} = na_n$ .

En particulier, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , la formule de Taylor-Young assure l'existence du développement limité à l'ordre  $n - 1$  de  $f'$ . On peut donc déduire ce développement limité en dérivant terme à terme le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$ .

## 31.4 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN UN POINT $a$

### Définition 35

#### Développement limité en un point $a$

On dit qu'une fonction  $f$  définie au voisinage d'un point  $a$  admet un **développement limité** d'ordre  $n$  en ce point si la fonction

$$h \mapsto F(h) = f(a + h)$$

admet un développement limité d'ordre  $n$  au point 0. Dans ce cas, il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que au voisinage de  $h = 0$ ,

$$f(a + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + o(h^n)$$

ou de manière équivalente, au voisinage de  $x = a$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Dans la dernière écriture, il ne sert à rien de développer la partie régulière en utilisant la formule du binôme ! En effet, c'est sous la forme écrite ci-dessus que la partie régulière donne des renseignements intéressants.

### Exemple 36

Déterminer un développement limité de  $\ln$  à l'ordre 3 au voisinage de 4.

**Proposition 37**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ .

1. La fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 au point  $a$ . Dans ce cas,<sup>a</sup>

$$f(x) = f(a) + o(1), \quad [x \rightarrow a];$$

2. La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad [x \rightarrow a],$$

ou de manière équivalente, on peut écrire  $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$  quand  $h \rightarrow 0$ .

3. Supposons que  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $a_p \neq 0$ , alors au voisinage de  $x = a$ ,

$$f(x) - a_0 - a_1(x - a) - \dots - a_{p-1}(x - a)^{p-1} \sim a_p(x - a)^p$$

<sup>a</sup>Ou seulement prolongeable par continuité si  $f$  n'est pas définie en  $a$ .

**Théorème 38****Formule de Taylor-Young**

Soit  $I$  un intervalle,  $a \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ . Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Les opérations sur les développements limités restent valables.

**Proposition 39**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , alors

1.  $f + g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .
2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .
3.  $f g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .
4. Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .

**Proposition 40**

Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au point  $a$  et si  $g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au point  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au point  $a$ .

## 31.5 APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### §1 Recherche de limites et d'équivalents

#### Exemple 41

Déterminer la limite au point 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{2x - \sin x - \tan x}.$$

*Démonstration.* Pour  $x$  au voisinage de 0, on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

d'où

$$\begin{aligned} x(1 + \cos x) - 2 \tan x &= x \left( 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \\ &= -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim -\frac{7}{6}x^3 \\ 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim -\frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Finalement  $f(x) \sim \frac{-\frac{7}{6}x^3}{-\frac{1}{6}x^3} \sim 7$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 7$ . ■

#### Test 42

Soit  $g(x) = \frac{\sin x - x}{\operatorname{sh} x - x}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

#### Test 43

Soit  $h(x) = \frac{\ln(1+x) - xe^{-x/2}}{(1+x^3)^\alpha - 1}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .

## §2 Application aux représentations graphiques $y = f(x)$

### Proposition 44

Soit  $f$ , une fonction définie au voisinage d'un point  $a$ . Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 au point  $a$ ,  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$ , Alors  $f$  admet une tangente au point d'abscisse  $a$  d'équation

$$\Delta : y = a_0 + a_1(x - a).$$

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage de  $a$  et admet un développement limité de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0,$$

la représentation graphique de  $f$  admet, au point d'abscisse  $a$ , une tangente  $T_a$  d'équation

$$T_a : y = a_0 + a_1(x - a).$$

Le signe de la quantité  $\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x - a))$  permet de palcer le point  $M(x, f(x))$  par rapport à cette tangente : pour  $\Delta(x)$  positif,  $M$  est situé «au dessus» de  $T_a$ . Comme

$$\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x - a)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x - a)^p,$$

on connaît le signe de cette quantité **au voisinage de  $a$** . En particulier, si  $p$  est pair, la représentation graphique de  $f$  reste **localement** du même côté de  $T_a$  (point à concavité) ; si  $p$  est impair, la représentation graphique de  $f$  traverse donc sa tangente  $T_a$  lorsque  $x - a$  change de signe (point d'inflexion).

### Exemple 45

Le développement limité à l'ordre 3 au point 4 de  $\ln$  nous donne

$$\ln(x) = \ln(4) + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(x-4)^3}{192} + o((x-4)^3).$$

La tangente à la courbe du logarithme au point d'abscisse 4 a donc pour équation

$$T_4 : y = \ln(4) + \frac{x-4}{4}.$$

De plus, pour  $x$  au voisinage de 4, on a  $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \sim -\frac{(x-4)^2}{32}$  donc  $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \leq 0$  pour  $x$  au voisinage de 4. La courbe représentative de logarithme se trouve donc **sous** sa tangente **au voisinage** de  $x = 4$ .

### Exemple 46

Reprenons l'exemple

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

La fonction ci-dessus n'était pas définie en 0, mais elle tend vers 1 en 0, et on peut la prolonger par continuité en posant  $f(0) = 1$ . On en déduit que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ , que la tangente à la courbe est d'équation  $y = 1 + \frac{x}{2}$ , et que la différence  $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$  est équivalente à la fonction  $-\frac{x^2}{4}$  au voisinage de 0, et est donc négative au voisinage de 0. Ainsi la courbe de la fonction est-elle **sous** sa tangente **au voisinage** du point d'abscisse 0.

### §3 Extrémums

#### Méthode

Supposons que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_p \in \mathbb{R}^*$ . Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

- Si  $p$  est pair,  $f(x) - f(a)$  est de signe constant au voisinage de  $a$ . La fonction  $f$  admet un extrémum local en  $a$ .
- Si  $p$  est impair,  $f(x) - f(a)$  change de signe au voisinage de  $a$ . La fonction  $f$  n'admet pas d'extrémum local en  $a$ .

#### Proposition 47

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I)$  et soit  $a \in I$ .

- Si  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $a$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $a$ .

#### Exemple 48

Soit  $f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \sin(x)$ . La fonction  $f$  admet-elle un extrémum local en 0?

## 31.6 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

### §1 Exemples de développements asymptotiques

Lorsque l'on fait un développement limité d'une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $a$ , on compare  $f$  à une fonction polynômiale. On peut généraliser ce procédé en comparant  $f$  à une fonction rationnelle, ou encore à des fonctions comportant des logarithmes ou des racines carrées. On dit alors que l'on fait un **développement asymptotique** de  $f$  en  $a$ .

#### Exemple 49

Étudier la fonction  $f : x \mapsto \cotan(x)$  au voisinage de  $x = 0$ .

*Démonstration.* Cette fonction n'admet pas de développement limité en 0 car elle tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned} \cotan(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x). \end{aligned}$$

La présence du  $\frac{1}{x}$  confirme que ce n'est pas un développement limité. ■

**Exemple 50**

Étudier la fonction  $f : x \mapsto (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

*Démonstration.* Posons  $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$  qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \ln(1+u) \\ &= \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)\right) \\ &= \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)\right) + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{4} + o(u^2)\right). \end{aligned}$$

Ici, on doit additionner un développement limité et un développement asymptotique qui n'ont pas la même précision. On conserve la précision la plus mauvaise.

$$f(x) = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{4u}{3} - \frac{3u^2}{4} + o(u^2) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{x}} - \frac{3}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

■

## §2 Détermination d'une asymptote

**Définition 51**

Soit  $f$ , une fonction définie dans un intervalle ayant pour extrémité  $\omega = \pm\infty$ . On dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote** au graphe de  $f$  en  $\omega$  lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) - ax - b = 0.$$

**Méthode**

Lorsqu'on imagine que  $f$  admet une droite asymptote en  $\omega = \pm\infty$ , il peut être très rapide de faire un développement limité de  $\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right)$  où on a posé  $h = \frac{1}{x}$ . Un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $h = 0$  suffit alors à avoir l'asymptote, et un développement limité à un ordre plus grand permet de comparer les positions du graphe et de l'asymptote.

**Exemple 52**

Étudier au voisinage de  $+\infty$  la fonction

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 - x + 2}{x + 3} e^{-1/x} \end{aligned}$$

*Démonstration.* On a  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$  et il y a donc un espoir d'asymptote.

Posons  $h = \frac{1}{x}$  qui est voisin de 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= hf\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1-h+2h^2}{1+3h} e^{-h} \\ &= (1-h+2h^2)(1-3h+9h^2)(1-h+\frac{1}{2}h^2) + o(h^2) \\ &= (1-4h+14h^2+o(h^2))(1-h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)) \\ &= 1-5h+\frac{37}{2}h^2+o(h^2) \\ &= 1-\frac{5}{x}+\frac{37}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Donc  $f(x) = x - 5 + \frac{37}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Ainsi la droite d'équation  $y = x - 5$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$ , et

$$f(x) - (x - 5) \sim \frac{37}{2}\frac{1}{x}$$

est positif pour  $x$  assez grand : la courbe est au dessus de son asymptote, au moins pour  $x$  assez grand. ■



## 31.7 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS AU VOISINAGE DE $x = 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{cases}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) \end{cases}$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} x^n + o(x^n)$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) \\ o(x^8) \end{cases}$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

**Remarque**

On a aussi les simplifications d'écriture

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) &= 2^n \cdot n! \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} &= \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$