Topologie sur les espaces vectoriels normés

Aperçu

D 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **norme** sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$ telle que

- Pour tout $x \in E$, on a l'implication $\|x\| = 0 \implies x = 0$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **normé**.

On a immédiatement les résultats suivants

P 2

- $\|0\| = 0$ *et* 0 *est le seul élément de norme nulle.*
- *Pour tout* $(x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
- *Pour tout* $(x, y) \in E^2$, *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $t \mapsto \|x + ty\|$ *est convexe.*

D 3 Soit N une norme sur E. Un vecteur est dit **unitaire** lorsqu'il est de norme 1.

Tout vecteur non nul s'écrit de façon unique $x = ku$ où k est un réel > 0 et u est un vecteur unitaire:

$$k = N(x) \quad \text{et} \quad u = \frac{x}{N(x)}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, on distingue trois normes dites *normes usuelles*:

$$N_\infty(X) = \|X\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

$$N_1(X) = \|X\|_1 = \sum_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

$$N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq k\leq n} |x_k|^2}.$$

La dernière est la norme euclidienne (ou hermitienne) associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^n$.
Plus généralement, si $p \geq 1$, on peut définir la norme

$$N_p(X) = \|X\|_p = \left(\sum_{1\leq k\leq n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Soit $[a, b]$ un segment réel ; on note $E = \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

On définit ainsi la **norme de la convergence uniforme uniforme** sur $[a, b]$.

On note $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$. On pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On définit ainsi la **norme de la convergence en moyenne**.

T 4 Montrer que l'on a bien défini une norme sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Sur le même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on définit la **norme de la convergence en moyenne quadratique**:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}.$$

Sur l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$, ou, ce qui revient au même , sur l'espace des suites de support fini $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on peut aussi définir trois normes usuelle, profitant du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients en jeu. Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, un polynôme, on prend

$$N_\infty(P) = \|P\|_\infty = \sup_{n\geq 0}|a_n|$$
$$N_1(P) = \|P\|_1 = \sum_{n\geq 0}|a_n|$$
$$N_2(P) = \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n\geq 0}|a_n|^2}.$$

T 5 Vérifier qu'il s'agit de normes.

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $I = [a, b]$ un segment véritable. L'application qui à un polynôme P associe la fonction polynomiale $\tilde{P} : [a, b] \to \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$, est linéaire injective à valeurs dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$. Une norme quelconque sur ce dernier espace fournit donc une norme sur E. Ainsi

$$N_{\infty,[a,b]}(P) = \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$$

$$N_{1,[a,b]}(P) = \int_a^b |P(t)| \,\mathrm{d}t$$

$$N_{2,[a,b]}(P) = \sqrt{\int_a^b P(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.

D 6 Une norme est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Pour une telle norme, on obtient l'égalité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

T 7

1. Montrer que la norme N_1 n'est pas euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
2. Même question pour la norme de la moyenne sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
3. Même question pour la norme de la convergence uniforme $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

D 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E. La **distance associée à la norme** est l'application

$$d: \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & N(x - y) \end{array}.$$

Le réel $\mathrm{d}(x, y)$ est appelé **distance entre x et y**.

P 9 *Pour tout triplet* $(x, y, z) \in E^3$,

1. $\mathrm{d}(x, y) = 0$ *si* $x = y$ *et* $\mathrm{d}(x, y) > 0$ *si* $x \neq y$;
2. $\mathrm{d}(y, x) = \mathrm{d}(x, y)$;
3. $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

D 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E.
Les normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

E 11 Dans $\mathbb{K}^n$, les normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq n N_\infty(x),$$
$$N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{n} N_\infty(x),$$
$$\frac{1}{n} N_1(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{n} N_1(x).$$

E 12 Dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, il existe des normes qui ne sont pas équivalentes.

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sup_{[0,1]}|f| = \|f\|_\infty.$$

Cependant, pour $f_n(t) = t^n$,

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$$

Le quotient $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}$ n'est donc pas majoré : les deux normes ne sont pas équivalentes.

D 13 On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E **converge** vers $L \in E$ pour la norme $\|*\|$ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - L\| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \mathrm{d}(u_n, L) \leq \varepsilon,$$

ce qui équivalent à l'énoncé

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - L\| = 0.$$

T 14 *Si une suite converge pour la norme N, c'est vers un unique L.*

On peut alors noter $L = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

T 15 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de points de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = b$, alors*
$$\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = a + b.$$
2. *Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, alors*
$$\lim_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda a.$$

T 16 *Soit E un espace préhilbertien et N la norme associée.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *et* $\lim v_n = b$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle a, b\rangle \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|a\|.$$

T 17 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, la notion de convergence et la valeur de la limite sont les mêmes pour les deux normes.*

T 18 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

T 19 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $L \in E$. On note*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{j=1}^{p} u_n^{(j)} e_j \qquad \textit{et} \qquad L = \sum_{j=1}^{p} L_j e_j.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L \iff \forall j \in [\![1, p]\!], \lim_{n \to +\infty} u_n^{(j)} = L_j.$$

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers L si, et seulement si la limite de la suite des j-ème coordonnées est la j-ème coordonnée de la limite de la suite.

E 20 On retrouve le cas d'une suite complexe. Si $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$, on a

$$\left(z_n\right) \to a + ib \iff (x_n) \to a \text{ et } (y_n) \to b.$$

E 21 Pour une suite de p-uplets, la convergence équivaut à celle des composantes du p-upllet.

E 22 Pour une suite de matrices, la convergence équivaut à celle de toutes les suites des coefficients.

D 23 Soit $\left(f_n : X \to \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. La suite d'application $(f_n : X \to \mathbb{R})$ **converge simplement** vers une application $f : X \to E$ si, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

On dit que f est **limite simple** de la suite (f_n), ou que la suite (f_n) **converge simplement** vers f.

D 24 Soit $\left(f_n : X \to \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications bornées sur X. On dit que la suite d'application $\left(f_n : X \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers une application $f : X \to E$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

ce qui équivalent à l'énoncé

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On dit alors aussi que f est **limite uniforme** de la suite (f_n).

R L'énoncé avec quantificateurs est la définition du chaptire **??**. Elle s'étend aux suites de fonctions qui ne sont pas nécessairement bornées.

T 25 *Si (f_n) converge uniformément, si f est la limite, alors la suite (f_n) converge simplement vers f.*

La réciproque est fausse. Par exemple, avec $I = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| f_n - f \right\|_\infty = \sup \{ \, |x|^n \mid x \in [0,1[\, \} = 1,$$

ce n'est pas là le terme d'une suite qui tend vers 0.

T 26 *Soit* $\left(f_n : X \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications convergeant uniformément vers* $f : X \to \mathbb{K}$.

- *Si chaque* f_n *est continue en un point* $a \in X$, *alors* f *est continue en* a.
- *Si chaque* f_n *est continue sur* X, *alors* f *est continue sur* X.

D 27 Soit $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$.
On dit que la suite d'application $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en moyenne** vers une application $f : [a,b] \to E$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

ce qui équivalent à l'énoncé

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left|f_n(t) - f(t)\right| \mathrm{d}t = 0.$$

T 28 *Soit $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors*

1. *La suite (f_n) converge vers f dans $\left(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_1\right)$.*
2. *La suite de terme général $\int_a^b f_n$ a une limite, c'est $\int_a^b f$. Autrement dit,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

D 29 Soit $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$.
On dit que la suite d'application $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en moyenne quadratique** vers une application $f : [a,b] \to E$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

ce qui équivalent à l'énoncé

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left|f_n(t) - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

T 30 *Soit $\left(f_n : [a,b] \to \mathbb{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$.*

1. *Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors f est continue et (f_n) tend vers f en moyenne quadratique.*
2. *Si (f_n) converge vers f en moyenne quadratique et si f est continue, alors (f_n) tend vers f en moyenne.*

D 31 Soit $a \in E$ et $r > 0$.

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B(a, r) = B_o(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) < r \} .$$

- La **boule fermé** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) \leq r \} .$$

- La **sphère** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$S(a, r) = \{ x \in E \mid \mathrm{d}(a, x) = r \}$$

On constate facilement

$$\{ a \} \subset B_o(a, r) \subset B_f(a, r).$$

E 32 Dans $\mathbb{R}$,

- les boules ouvertes sont les intervalles $]u, v[$ avec $u < v$.
- les boules fermées sont les intervalles $[u, v]$ avec $u < v$.

T 33 Représenter par une figure les boules de centre O associées aux distances usuelles dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire aux distances associées aux normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

D 34 On dit que A est une partie **bornée** si A est inclue dans une boule, ou de manière équivalente si il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq r.$$

D 35 Une partie A de E est un **ouvert** ou est une partie **ouverte** lorsque

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle **topologie** de E.

P 36

1. *$\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E*
2. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

E 37 Une boule ouverte est un ouvert.

D 38 Soit $x \in E$. On appelle **voisinage** de x toute partie $V \subset E$ contenant un ouvert contenant x, ou de manière équivalente

$$\exists r > 0, B(x,r) \subset V.$$

N L'ensemble des voisinage de x sera noté $\mathscr{V}(x)$.

R Une partie A de E ouverte si, et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.

P 39 *Soit $x \in E$.*

1. *Une union quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.*
2. *Une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*

D 40 Une partie A de E est un **fermé** ou est une partie **fermée** lorsque son complémentaire $E \setminus A$ est ouvert.

P 41

1. *$\emptyset$ et E sont des parties fermées de E*
2. *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
3. *Une union finie de fermés est fermée.*

E 42 Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

D 43 Soit A une partie de E et $x \in E$.

- Nous dirons que x est un point **intérieur** à A lorsque

$$\exists r > 0, B(x,r) \subset A.$$

Ce qui revient à dire que A est un **voisinage** de x.

- Nous dirons que x est un point **adhérent** à A lorsque

$$\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

c'est-à-dire

$$\forall r > 0, \exists y \in A, \|x - y\| \leq r.$$

P 44

1. *Une partie A de E est ouverte si, et seulement si tous ses points lui sont intérieur.*
2. *Une partie A de E est fermée si, et seulement si tous ses points lui sont adhérents.*

D 45 Soit A une partie de E.

- L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A
- L'**intérieur** de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points intérieurs à A
- La **frontière** de A, notée ∂A ou $Fr(A)$ est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- La partie A est dite **dense** dans E lorsque $\overline{A} = E$.

P 46 *Soit A une partie de E.*

1. *On a toujours*
$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}.$$
2. *L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.*
3. *L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé.*
4. $$\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}.$$

P 47

1. *L'ensemble* $\overline{A}$ *est le plus petit ensemble fermé contenant* A.
2. *Une partie* A *est fermée si, et seulement si* $A = \overline{A}$.
3. *L'ensemble* $\mathring{A}$ *est le plus grand ensemble ouvert contenu dans* A.
4. *Une partie* A *est ouverte si, et seulement si* $A = \mathring{A}$.

P 48

1. *Un point $x \in E$ est adhérent à $A \subset E$ si, et seulement si il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite x:*

$$\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} a_n = x.$$

   Autrement dit : les points adhérents à A sont les limites de suites de points de A.

2. *Une partie A est un fermé de E si, et seulement si*

$$\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} a_n = x \implies x \in A.$$

T 49 **Caractérisation séquentielle de la densité**

Une partie A de E est dense dans E si, et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite de points de A tendant vers x.

T 50

1. *L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

C 51 *Les ensemble $(\mathbb{D})^p$, $\mathbb{Q}^p$ ou $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^p$ sont denses dans $\mathbb{R}^p$.*

R Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de cette partie, ou encore si, et seulement si

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, u < v \implies \exists z \in A, u < z < v.$$

T 52 **Caractérisation séquentielle des ouverts**

Soit A une partie de E.

1. *Un point x de E est intérieur à A si, et seulement si pour toute suite (u_n) de limite x, il y a un rang à partir duquel tous les termes sont dans A.*
2. *Ainsi, A est ouvert si, et seulement si toute suite convergeant vers un de ses points y prend ses valeurs à partir d'un certain rang.*

D 53 Soit A une partie de E. On dit de A qu'elle est **compacte** lorsque pour toute suite de points de A, on peut en extraire une sous-suite convergente dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstraß).

P 54 *Si A est une partie compacte de E, alors A est fermée et bornée.*

T 55 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Un partie A de E est compacte si, et seulement si A est fermée et bornée.*