Chapter 11 Relations binaires sur un ensemble

Exercice 11.1 (*)

Déterminer les propriétés des relations binaires suivantes (réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité), et détecter les relations d'équivalence, d'ordre total ou partiel.

1. $\|$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.

2. $\perp$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.

3. $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

4. $\geq$ sur $\mathbb{R}$.

5. # (avoir le même cardinal) sur $E = \mathcal{P}(F)$.

6. $\subset$ sur $E = \mathcal{P}(F)$.

7. «être multiple de» sur $\mathbb{N}$.

8. «être multiple de» sur $\mathbb{Z}$.

9. $<$ sur $\mathbb{R}$.

10. $\neq$ sur $\mathbb{R}$.

11. $=$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.2 (**)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^\star$, on dira que

$$aRb \iff \left(\exists n \in \mathbb{N}^\star, a = b^n\right).$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 11.3 (***)

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit une relation $\lhd$ sur E^2 par

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (x', y') \in E^2, (x, y) \lhd (x', y') \iff \big((x \preceq x' \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\big)$$

On peut également écrire : $(x, y) \lhd (x', y') \iff \big(x \prec x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\big)$.

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E^2.

2. La relation $\lhd$ s'appelle ordre lexicographique, pourquoi ?

3. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 11.4 (**)

Sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, [0, 1[)$, on définit la relation $\leq$ par

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre.

2. Montrer que l'ordre est partiel.

3. Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ?

Exercice 11.5 (*)

Soit Q l'ensemble $\{ 1, 2, 3, 4 \}$.

1. Écrivez les éléments de $\mathcal{P}(Q)$.

2. Quels sont les majorants de $\{ 2, 4 \}$ pour la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(Q)$?

3. Quels sont les majorants de $\{ 1 \}$?

4. Quels sont les majorants de l'ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$?

5. La partie $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-elle un maximum ?

6. Donnez un sous-ensemble à plusieurs éléments de $\mathcal{P}(Q)$ qui admette un maximum pour cette relation. Est-ce que $\mathcal{P}(Q)$ a un maximum ?

7. Reprenez pour minimum les questions posées ci-dessus pour maximum.

8. Le sous-ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-il une borne supérieure pour la relation d'ordre $\subset$? Une borne inférieure ?

Exercice 11.6 (****) *Problème des hussards*

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de np réels. Comparer

$$A = \min_{1\leq i\leq n} \left(\max_{1\leq j\leq q} a_{i,j} \right) \qquad \text{et} \qquad B = \max_{1\leq j\leq q} \left(\min_{1\leq i\leq n} a_{i,j} \right).$$

1. Comparer A et B.

2. Donner un exemple de non égalité.

Exercice 11.7 (*****)

$(E, \leq)$ est un ensemble ordonné et f une application de E dans E telle que

- f est croissante ;
- $\forall x \in E, f(x) \geq x$;
- $\forall x \in E, f(f(x)) = f(x)$.

On dit que f est une **fermeture**. Soit $F = \{ x \in E \mid f(x) = x \}$.

1. Montrer que, pour tout x de E, l'ensemble $F_x = \{ y \in F \mid y \geq x \}$ est non vide et admet un plus petit élément égal à $f(x)$.

2. Soit G un sous-ensemble de E tel que pour tout x de E, $G_x = \{ y \in G \mid y \geq x \}$ admette un plus petit élément noté $g(x)$. Montrer que g ainsi définie est une fermeture et que l'ensemble de ses éléments invariants est G.

Exercice 11.8 (**)

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\mathcal{R}y \iff \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.9 (**)

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les classes d'équivalence de 0, de 1 et de $\frac{1}{2}$. Puis, de manière générale la classe d'équivalence $\overline{x}$ d'un élément $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Combien-y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

Exercice 11.10 (**)

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:

$$x\mathcal{R}y \iff \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il y a 3 classes d'équivalences.

Exercice 11.11 (***)

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la classe d'équivalence $\overline{x}$ d'un élément $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Combien-y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

Exercice 11.12 (**)

Sur l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans un ensemble E. On définit la relation $\cong$ par :

$$\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \cong \left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n = v_n.$$

Démontrer que $\cong$ est une relation d'équivalence.

Exercice 11.14 (***)

Étant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe.

1. R_1 et R_2 étant deux éléments de $\mathcal{R}$, on considère la relation R : «R_1 et R_2» appelée intersection de R_1 et R_2. Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe modulo R est l'intersection d'une classe modulo R_1 et d'une classe modulo R_2.

   Étudier les exemples suivants :

   (a) $E = \mathbb{Z}$, R_1 et R_2 étant les congruences de module respectifs p_1 et p_2 (p_1 et p_2 entiers strictement positifs distincts).

   (b) E est le plan de la géométrie élémentaire. MR_1M' et MR_2M' sont respectivement les relations «MM' est parallèle à d_1», «MM' est parallèle à d_2» (d_1, d_2 étant deux directions distinctes du plan).

2. Avec les mêmes notations que ci-dessus, la relation «R_1 ou R_2» est-elle une relation d'équivalence ? Quel est son graphe ?

3. (R_i) étant une famille de relations d'équivalences définies sur E et indexées par un ensemble I, on désigne par R la relation suivant, appelée *intersection* des (R_i) :

$$R(x, y) \iff \forall i \in I, R_i(x, y).$$

   Démontrer que R est une relation d'équivalence. Quel est son graphe ? Démontrer qu'une classe C modulo R est contenue pour tout i dans une et une seule classe C_i modulo R_i et que C est l'intersection de la famille (C_i).

Exercice 11.15 (*****)

Étant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E ; dans un but de simplification on représentera par la même lettre une équivalence et son graphe. On dit que R est «*plus fine*» que R' si, et seulement si

$$\forall x, y \in E, xRy \implies xR'y.$$

1. Montrer que cette relation entre R et R' définit un ordre sur $\mathcal{R}$; comparer les graphes de R et R'; cet ordre est-il total ou partiel ?

2. Montrer que R est plus fine que R' si, et seulement si toute classe d'équivalence modulo R' est une réunion de classes d'équivalence modulo R.

3. Y a-t-il un plus petit et un plus grand élément dans $\mathcal{R}$ ordonnée par la relation d'ordre défini ci-dessus ?

4. Lorsque $E = \mathbb{Z}$, déterminer toutes les congruences modulo un entier strictement positif qui sont plus fines que $x \equiv y \pmod{n}$ ou qui sont moins fines que cette relation.