Chapitre 18

Matrices inversibles

18.1 Opérations élémentaires sur les lignes

§1 Matrices d'opérations élémentaires

Soit A une matrice de type (m, n) et soit A_i la i-ème ligne de A. Nous pouvons écrire A sous la forme d'une colonne de m lignes,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Cette notation permet d'illustrer facilement les opérations élémentaires sur les lignes. Par exemple, voici les matrices obtenues à partir de A par une opération élémentaire

$L_2 \leftarrow 3L_2$	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$
$\begin{pmatrix} A_1 \\ 3A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

Remarquons maintenant que le produit matriciel AB s'écrit simplement par bloc:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix}.$$

Effectuons maintenant une opération élémentaire sur les lignes du produit AB. Par exemple, ajoutons 4 fois la lignes 1 à la ligne 2:

$$\begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B + 4A_1B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B \\ (A_2 + 4A_1)B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B.$$

Plus généralement, on peut énoncer

Lemme 1

$$\begin{aligned} &(\textit{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } AB) \\ &\qquad = (\textit{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } A) \times B. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $A = I_n$, on a

$$\begin{aligned} &(\text{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } B) \\ &\qquad = \big(\text{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } I_n\big) \times B. \end{aligned}$$

Définition 2

Une **matrice d'opération élémentaire**, E, est une matrice carrée (n, n) obtenue à partir de la matrice unité I_n en effectuant exactement *une* opération élémentaire.

Exemple 3

Les matrices suivantes sont des matrices d'opérations élémentaires:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première est obtenue à partir de I_3 en multipliant la deuxième ligne par 3. La seconde en échangeant les deux premières lignes. La troisième en ajoutant 4 fois la première ligne à la deuxième ligne.

Test 4

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont-elles des matrices d'opérations élémentaires?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la première matrice comme produit de deux matrices d'opérations élémentaires.

Définition 5

Une matrice d'opération élémentaire est

- une **matrice de dilatation** lorsqu'elle est obtenue en multipliant une ligne par un scalaire non nul dans I_n;
- une **matrice de transposition** lorsqu'elle est obtenue en échangeant deux lignes de I_n;

- une **matrice de transvection** lorsqu'elle est obtenue en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne dans I_n.

Les matrices d'opérations élémentaires permettent de traduire les opérations élémentaires en terme de produit de matrices. En particulier, elle permettent de relier une matrice à sa forme échelonnée réduite.

Exemple 6

Supposons que l'on cherche la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme première opération élémentaire, nous choisissons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons la même opération sur la matrice unité I_3, nous obtenons une matrice d'opération élémentaire notée E_1:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1.$$

On peut alors vérifier

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7

Une matrice d'opération élémentaire est inversible, et son inverse est aussi une matrice d'opération élémentaire.

Test 8

Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer E^{-1}. Vérifier que $EE^{-1} = I_3$ et $E^{-1}E = I_3$.

Exemple 9

Nous avons calculer précédemment

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons «annuler» cette opération élémentaire et retrouver la matrice B en multipliant à gauche par E_1^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Ainsi, deux matrice A et B sont équivalentes par lignes si, et seulement si il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires telle que

$$B = EA.$$

Théorème 10 **Traduction matricielle de l'algorithme de Gauß-Jordan**
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par ligne. Autrement dit, pour toute matrice A, il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires et une unique matrice R échelonnée réduite R telles que

$$EA = E_r \dots E_1 A = R.$$

§2 Algorithme pour le calcul de l'inverse

Si $A \underset{L}{\sim} I_n$, alors A est inversible. En effet, on peut donc écrire

$$E_r \dots E_1 A = I_n$$

où $E_1, \dots, E_r$ sont des matrices d'opérations élémentaires correspondants aux opérations élémentaires utilisées pour effectuer la réduction de la matrice A. En multipliant à gauche par $E_1^{-1} \dots E_r^{-1}$, on obtient

$$A = E_1^{-1} \dots E_r^{-1}$$

qui est le produit de matrice inversible. On en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = E_r \dots E_1 = E_r \dots E_1 I_n.$$

Ainsi, si nous appliquons *les même opérations élémentaires* à la matrice I_n que pour réduire A vers I_n, nous obtenons la matrice A^{-1}.

Autrement dit

Théorème 11 *Soit A un matrice carrée (n, n).*
Si $\left(A|I_n\right) \underset{L}{\sim} \left(I_n|B\right)$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple 12 Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test 13

Vérifier que $AA^{-1} = I_3$ (on peut aussi vérifier $A^{-1}A = I_3$).

Test 14

Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 15

Un matrice A est inversible si, et seulement si A est un produit de matrices d'opérations élémentaires.

Proposition 16

Étant donnée deux matrices A et B, alors $A \underset{L}{\sim} B$ si, et seulement si il existe P inversible telle que $A = PB$.

§3 Calcul de l'inverse par résolution du système $Ax = y$

Méthode

La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si pour tout $y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = y$ admet une unique solution. Alors, on peut écrire

$$Ax = y \iff x = A^{-1}y.$$

Exemple 17

Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18.2 Opérations élémentaires sur les colonnes

§1 Matrice équivalentes par colonnes

Brève extension des définitions et résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes sont analogues à celles sur les lignes:

$$C_i \leftarrow \alpha C_i \qquad C_i \leftrightarrow C_j \qquad C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$$

- Faire des opération élémentaires sur les colonnes de A «revient à» faire des opérations élémentaires sur les lignes de A^T.
- Deux matrices A et B sont **équivalentes par colonnes** (notation $A \underset{C}{\sim} B$) si l'on peut obtenir la matrice B à partir de la matrice A en effectuant une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.

- Une opération élémentaire sur les colonnes se traduit par la multiplication à droite par une matrice d'opération élémentaires(ce sont les mêmes «par ligne» que «par colonne»).
- Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si $A \underset{C}{\sim} I_n$
- Si $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix}$ Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition 18 *Si $A \underset{C}{\sim} A'$, alors* $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A')$.

18.3 Critères d'inversibilité d'une matrice

§1 Critères d'inversibilité

Théorème 19 *Pour A une matrice carrée (n, n). Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.*

3a. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.*

3b. $\ker(A) = \{\, \mathbf{0} \,\}$.

4. $\operatorname{rg}(A) = n$.
5. $A \underset{L}{\sim} I_n$.

6a. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une solution.*

6b. $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

7. $A \underset{C}{\sim} I_n$.

Ici $\mathbb{K}^n$ désigne $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On a quelques équivalences immédiates:

- $(3a) \iff (3b)$.
- $(6a) \iff (6b)$.

Nous allons montrer $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (1)$. Ainsi, chacune des ces cinq assertions implique toutes les autres : elles sont équivalentes.

$(1) \implies (2)$ Si A est inversible, on a l'équivalence

$$Ax = b \iff x = A^{-1}b.$$

(2) $\implies$ (3) (3) est une spécialisation de (2) avec $b = 0$.

(3) $\implies$ (4) Si la seule solution de $Ax = 0$ est $x = 0$, alors il n'y a pas de «variable libre» dans l'expression des solutions. Ainsi, dans la matrice R, forme échelonnée réduite de A, chaque colonne contient un pivot. Il y en a n, donc $\mathrm{rg}(A) = n$.

(4) $\implies$ (5) La matrice R, forme échelonnée réduite de A est carrée, et comme $\mathrm{rg}(A) = n$, elle possède un pivot sur chaque ligne et les pivots sont donc sur la diagonale de R. Puisque chaque colonne de R possède un pivot, les autres coefficients de la colonnes sont nuls, la matrice R est donc la matrice I_n.

(5) $\implies$ (1) Si $I_n \underset{L}{\sim} A$, alors il existe des matrices d'opérations élémentaires $E_1, \dots, E_r$ telles que $A = E_r \dots E_1 I_n = E_r \dots E_1$. La matrice A est donc inversible en tant que produit de matrice inversibles.

Ensuite, (2) $\implies$ (6) est évident. Nous montrons aussi (6) $\implies$ (4).

non(4) $\implies$ non(6) Soit R la forme échelonnée réduite de A. Il existe donc une matrice inversible E (produit de matrice d'opération élémentaires) telle que $ER = A$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R) < n$. La dernière ligne de R est donc un ligne nulle. Ainsi, en notant $d = (0, \dots, 0, 1)^T$, le système $Rx = d$ est incompatible. Ce système est équivalent au système $AX = Ed$ qui est donc lui aussi imcompatible.

(7) $\iff$ (1) Enfin, effectuer des opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de sa transposée. Ainsi, A est inversible si, et seulement si A^T est inversible si, et seulement si $A^T \underset{L}{\sim} I_n$ ce qui est équivalent à $A \underset{C}{\sim} I_n$.

∎

Corollaire 20 *Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.*

Exemple 21

Lemme d'Hadamard

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

autrement dit, si le module de chaque coefficient diagonal est strictement plus grand que la somme des modules des autres coefficients de sa ligne.

Alors A est inversible.

§2 Inverse à droite, inverse à gauche

Théorème 22

Soit A et B deux matrice carrée (n, n).
Si $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles, et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

Autrement dit,

- une matrice carrée inversible à gauche est inversible,
- une matrice carrée inversible à droite est inversible.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Bx = 0$. Alors

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0.$$

Or $AB = I_n$, donc $(AB)x = x$ et donc $x = 0$.

On a donc montrer que l'unique solution du système $Bx = 0$ est la solution nulle. En utilisant les critères d'inversibilité d'une matrice (théorème 19), on a montré que B était inversible.

En multipliant à droite par B^{-1} l'identité $AB = I_n$, on obtient alors

$$A = I_n B^{-1} = B^{-1},$$

d'où A est inversible et $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$. ∎