CHAPITRE 52

ISOMÉTRIES VECTORIELLES

52.1 GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\langle *, * \rangle$ son produit scalaire associé.

§1 Isométries vectorielles

Définition 1 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On dit que u est une **isométrie vectorielle** de E si u conserve la norme

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

L'ensemble des isométrie vectorielle de E est noté $\mathbf{O}(E)$.

Proposition 2 *Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.*

Démonstration. Pour $x \in E$, si $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. L'application u est injective ($\ker u = \{ 0_E \}$), et par suite u est un automorphisme de l'espace vectoriel E car E est de dimension finie. ∎

On dit aussi qu'une isométrie vectorielle est un **automorphisme orthogonal**.
Voici différentes caractérisations des isométries vectorielles.

Théorème 3

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire*
$$\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
2. *u est une isométrie vectorielle.*
3. *L'image de toute base orthonormale de E par u est une base orthonormale de E.*
4. *Il existe une base orthonormale de E dont l'image par u est une base orthonormale de E.*

Démonstration.

- $1 \implies 2$. Pour tout $x \in E$, on a
$$\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|.$$
- $2 \implies 3$.

  Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. L'image par u de cette base, notée $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$, est une base de E car u est un automorphisme.

  Soit x un vecteur de E, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{E}'$. On a
$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n)\|^2 \\ &= \|u(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\|^2 && \because u \text{ est linéaire} \\ &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|^2 && \because u \text{ conserve la norme} \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 && \because \mathcal{E} \text{ est une base orthonormale.}\end{aligned}$$
  On retrouve pour $\mathcal{E}'$ une des caractérisations des bases orthonormales.
- $3 \implies 4$. Trivial. Il suffit de justifier que E admet une base orthonormale, ce qui a été prouvé au chapitre précédent.
- $4 \implies 1$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ soit aussi une base orthonormale. Cela assure déjà que u est un automorphisme ; montrons qu'il conserve le produit scalaire. Soient x et y des vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ relativement à la base $\mathcal{E}$. On a
$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i), \sum_{j=1}^n y_j u(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle u(e_i), \sum_{j=1}^n y_j u(e_j)\rangle.$$
  Or
$$\langle u(e_i), \sum_{j=1}^n y_j u(e_j)\rangle = \sum_{j=1}^n y_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \sum_{j=1}^n y_j \delta_{i,j} = y_i.$$
  Donc
$$\langle u(x), u(y)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y\rangle.$$

∎

Une autre démonstration utile. L'implication 2 $\implies$ 1 peut se montrer directement à l'aide d'une formule de polarisation:

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

∎

Test 4

Soit u une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Montrer que u est une isométrie vectorielle de E.

Démonstration. ∎

Exemple 5

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que la symétrie orthogonale s_F est une isométrie vectorielle. Soit x un vecteur de E ; il se décompose sous la forme $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$; alors $s_F(x) = y - z$. On vérifie

$$\left\|s_F(x)\right\|^2 = \|y-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = \|x\|^2$$

grâce à l'orthogonalité de y et de z. Donc s_F est une isométrie vectorielle de E.

Réciproquement,

Proposition 6

Toute symétrie qui est une isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.

⚠ Néanmoins, les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries vectorielles (sauf Id_E qui est le seul à être un automorphisme).

§2 Conservation de l'orthogonalité

Définition 7

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons F stable par u, c'est-à-dire tel que $u(F) \subset F$. On appelle **endomorphisme induit** par u sur F, l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Cette notion n'a de sens que dans le cas où F est un sous-espace vectoriel stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F se note parfois, abusivement, $u|_F$ au lieu de $u|_F^F$.

Remarque

Si u est un automorphisme, alors $\dim u(F) = \dim F$, si bien que dès que F est stable par u, il est en fait *invariant* : $u(F) = F$.

Si u est une isométrie vectorielle, u est compatible avec la relation d'orthogonalité

$$u(x) \perp u(y) \iff x \perp y.$$

Plus généralement, on a le

Théorème 8

Soit u une isométrie vectorielle de E.

1. *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Si $A \perp B$, alors $u(A) \perp u(B)$.*
2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on a $u(F)^{\perp} = u\left(F^{\perp}\right)$.*
3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.*

Démonstration. **1.** Soient $x \in u(A)$ et $y \in u(B)$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = u(a)$ et $y = u(b)$. Puisque A et B sont orthogonaux, on a

$$\langle x, y\rangle = \langle u(a), u(b)\rangle = \langle a, b\rangle = 0.$$

D'où $u(A) \perp u(B)$.

2. Puisque $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et que u est un automorphisme, $u(F)$ et $u(F^{\perp})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. De plus, on a $u(F) \perp u(F^{\perp})$ car $F \perp F^{\perp}$; donc $u(F^{\perp})$ est le supplémentaire orthogonal de $u(F)$.

3. On sait que $u(F^{\perp}) = u(F)^{\perp}$ et $u(F) = F$. Donc $u(F^{\perp}) = F^{\perp}$.

∎

Donc, sous les hypothèses du théorème, u induit sur F, comme sur $F^{\perp}$, une isométrie vectorielle :

$$u|_F \in \mathbf{O}(F) \qquad \text{et} \qquad u|_{F^{\perp}} \in \mathbf{O}(F^{\perp}),$$

F et $F^{\perp}$ étant muni du produit scalaire induit par celui de E. Réciproquement,

Théorème 9

Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $u(F) \subset F$ et que $u\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$; on suppose de plus que u induit dans F comme dans $F^{\perp}$ des isométries vectorielle. Alors u est une isométrie vectorielle.

§3 Groupe orthogonal

Théorème 10

*L'ensemble $\mathbf{O}(E)$ des isométries vectorielle d'un espace euclidien E, muni de la composition, est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathbf{GL}(E), \circ)$, appelé **groupe ohthogonal** de l'espace $(E, \langle *, *\rangle)$.*

Proposition 11

Soient a et b deux vecteurs distincts de E de même norme. Il existe une unique réflexion s de E telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.
Si $x \in E$, son image par cette réflexion est donnée par

$$s(x) = x - 2\langle b - a, x\rangle \frac{b - a}{\|b - a\|^2}.$$

§4 Matrices orthogonales

Rappel Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes et caractérisent les matrices orthogonales.

1. $M^T M = I_n$.
2. Les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
3. $M^T M = I_n$.
4. M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
5. $M M^T = I_n$.
6. Les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Théorème 12 *Soient $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \iff u \in \mathbf{O}(E).$$

Plus généralement, si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E, le choix de cette base donne un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}(E) & \to & \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array}.$$

Remarquons également que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)[i, j] = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

Corollaire 13 *Soient u un endomorphisme de E, et $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *u est une symétrie orthogonale de E.*
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ *est une matrice orthogonale et symétrique.*

Corollaire 14 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P^T \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P.$$

§5 Groupe spécial orthogonal

Définition 15 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on dit que $\mathcal{B}'$ a la **même orientation** que $\mathcal{B}$ si $\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) > 0$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur les bases de E qui ne comporte que deux classes. Orienter E, c'est choisir une de ces deux classes, dont les éléments seront appelés **bases directes**. Les éléments de l'autre classe seront appelées **bases indirectes** ou **bases retrogrades**.

Proposition 16

1. *Si $M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, alors* $\det M \in \{-1, +1\}$.
2. *Si $u \in \mathbf{O}(E)$, alors* $\det(u) \in \{-1, +1\}$.

Définition 17

- L'ensemble
$$\mathbf{SO}(E) = \{\ u \in \mathbf{O}(E) \mid \det u = 1\ \}$$
est un sous-groupe de $\mathbf{O}(E)$ appelé **groupe spécial orthogonal** de l'espace euclidien E.

- Les éléments de $\mathbf{SO}(E)$ sont appelées **isométries vectorielle positives**, **isométries vectorielles directes** ou encore **rotations**.

- Les éléments de
$$\mathbf{O}^-(E) = \{\ u \in \mathbf{O}(E) \mid \det u = -1\ \} = \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$$
sont appelées **isométries vectorielle négatives** ou **isométries vectorielles indirectes**.

- L'ensemble
$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{SO}(n) = \left\{\ M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \det M = 1\ \right\}$$
est un sous-groupe de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal d'ordre** $\boldsymbol{n}$.

Proposition 18

On suppose E orienté et de dimension n. Soient $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{E}$ une base orthonormale directe de E et $P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{F})$ la matrice des coordonnées de $\mathfrak{F}$ relativement à la base $\mathcal{E}$. On a l'équivalence

$$\mathfrak{F} \text{ est une base orthonormale directe} \iff P \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 19

On suppose E orienté et de dimension n. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ une base orthonormale directe de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *u est une isométrie vectorielle directe.*
2. *$u(\mathcal{E})$ est une base orthonormale directe.*
3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 20

Dans un espace euclidien orienté E de dimension $n \geq 2$, le déterminant d'une famille de n vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base orthonormale directe $\mathcal{E}$ ne dépend pas de cette base. Ce déterminant est appelé ***produit mixte*** *des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ et est noté* [a]

$$\mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n).$$

[a] Autre notation $\left[x_1, \dots, x_n\right]$.

Démonstration. On sait en effet que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ étant deux bases quelconques de E,

$$\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \det_{\mathcal{E}}.$$

D'autre part, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont orthonormales, de même orientation, on a $\det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) = 1$ car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \in \mathbf{SO}(n)$. ∎

Le produit mixte hérite bien sûr des propriétés du déterminant, en particulier le produit mixte est une forme n-linéaire alternée.

52.2 Isométries d'une droite vectorielle

Jusque la fin du chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien dont la dimension, non nulle, sera notée n (il nous arrivera d'ailleurs d'écrire E_n pour E).
E ne sera considéré comme orienté que lorsque cela sera dit explicitement.

Théorème 21 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 1.*
Les seuls isométries vectorielle de E sont Id_E et $-\mathrm{Id}_E$.

Corollaire 22 $\mathbf{O}(1) = \{\, (1)\,, (-1)\,\}$ *et* $\mathbf{SO}(1) = \{\, (1)\,\}$.

52.3 Isométries vectorielles en dimension 2

§1 Étude de $\mathbf{O}(2)$

Théorème 23 *Soit $M \in \mathbf{O}(2)$. Alors M est de l'une des deux formes suivantes*

1. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$ *pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors* $\det M = 1$.
2. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = S(\theta)$ *pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors* $\det M = -1$.

Démonstration. Un matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si ses vecteurs colonnes sont unitaires, c'est-à-dire si il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta' \\ \sin\theta & \sin\theta' \end{pmatrix}$$

et orthogonaux, ce qui s'écrit

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta' - \theta) = 0,$$

ce qui est équivalent à $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Comme, d'autre part, $\det M = \sin(\theta' - \theta)$, nous pouvons énoncer

$$M \in \mathbf{O}(2) \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, \exists\varepsilon \in \{\,-1, 1\,\}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on a alors $\varepsilon = \det M$. ∎

Théorème 24

L'application

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbb{R} & \to & \mathbf{SO}_2(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupe surjectif et son noyau est $\ker(R) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 25

1. *Le groupe* $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ *est isomorphe à* $\mathbb{U}$.
2. *Le groupe* $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ *est commutatif.*

§2 Isométries d'un plan vectoriel

Théorème 26

Soit E *un espace euclidien orienté de dimension* 2 *et* u *une isométrie vectorielle positives de* E. *La matrice de* u *dans une base orthonormale directe ne dépend pas de cette base. Il existe un réel* θ*, unique modulo* 2π*, tel que, pour toute base orthonormale directe* $\mathcal{E}$ *de* E*,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta).$$

Définition 27

On dit que u est la **rotation d'angle θ** dans E orienté.

Dans une base indirecte, la matrice de u est $R(-\theta)$: un changement d'orientation de l'espace transforme l'angle d'une rotation en son opposé.

Proposition 28

Soit u *la rotation d'angle* $\theta \in \mathbb{R}$ *dans* E *orienté. Pour tout vecteur unitaire* $x \in E$*, on a*

$$\cos\theta = \langle x, u(x) \rangle \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\,(x, u(x))\,.$$

Théorème 29

Soit E *un espace euclidien de dimension* 2. *L'ensemble* $\mathbf{O}^-(E) = \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$ *est constitué des réflexions de* E.

Remarque

En dimension 2, les réflexions sont les symétries par rapport à une droite vectorielle. Remarquons que certaines symétries orthogonales ne sont pas des réflexions, par exemple Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ (ce sont d'ailleurs les seules en dimension 2).

Remarque

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta'); \quad R(\theta)^{-1} = R(-\theta); \quad S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta'); \quad S(\theta)^{-1} = S(\theta).$$

Proposition 30

Soit E *un espace euclidien de dimension* 2.

1. *La composée de deux réflexions de* E *est une rotation de* E.
2. *Toute rotation de* E *s'écrit comme la composée de deux réflexions de* E *dont l'une peut être choisie arbitrairement.*

§3 Angle de deux vecteurs

Proposition 31 *Soient E un espace euclidien de dimension 2 et a et b deux vecteurs normés de E. Il existe une unique rotation de E qui transforme a en b.*

Définition 32 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et a, b deux vecteurs de $E \setminus \{ 0_E \}$. On appelle **mesure orientée de l'angle** de a et b, un réel noté (a, b), tel que l'image de $\frac{1}{\|a\|} a$ par la rotation d'angle de mesure (a, b) soit $\frac{1}{\|b\|} b$.

Le réel (a, b) est unique modulo 2π.

Proposition 33 **Relation de Chasles**
Pour tous vecteurs non nuls a, b et c, on a

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) \pmod{2\pi}$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'étude de $\mathbf{SO}(2)$. ∎

52.4 Isométries vectorielles en dimension 3

§1 Produit vectoriel

Définition 34 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $(x, y) \in E^2$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \operatorname{Det}(x, y, z) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur de E, noté $x \wedge y$ ou $x \times y$, tel que

$$\forall z \in E, \operatorname{Det}(x, y, z) = \langle x \wedge y, z \rangle$$

Ce vecteur est appelé le **produit vectoriel de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$**.

Le produit vectoriel est ainsi défini par dualité. Il est clair qu'un changement d'orientation de l'espace transforme le produit vectoriel en son opposé.

Proposition 35 *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.*

1. *La famille (x, y) est liée si et seulement si $x \wedge y = 0$.*
2. $x \wedge y \in \operatorname{Vect}\{ x, y \}^{\perp}$.
3. *L'application* $\begin{array}{ccc} E^2 & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$ *est bilinéaire et antisymétrique.*

4. *Identité de Lagrange*

$$\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2.$$

5. *Si (x, y) est une famille orthonormale de E, alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormale directe.*

Proposition 36

Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe

[a] *Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E. Si*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \qquad\qquad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$$

Alors

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

En particulier

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1, \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2.$$

[a] 36: Moyen mémotechnique :

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

Démonstration. Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \left\langle \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3, z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 \right\rangle. \end{aligned}$$

∎

Proposition 37

♥

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de colonnes A, B, C. Cette matrice est orthogonale directe (resp. indirecte) si et seulement si

$$A^T B = 0, \qquad A^T A = 1, \qquad B^T B = 1, \qquad \text{et } C = A \wedge B;$$
$$(\text{resp. } C = -A \wedge B).$$

Les trois premières conditions s'écrivent également $\langle A, B\rangle = 0$, $\langle A, A\rangle = 1$, $\langle B, B\rangle = 1$, c'est-à-dire que les colonnes A, B forment une famille orthonormale.

§2 Réduction

Lemme 38 **Un sous-espace stable par u**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère les deux sous-espaces vectoriels de E suivants

- $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E) = E_1(u)$ *: l'ensemble des vecteurs de E invariants par u,*
- $G = \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E_{-1}(u)$ *: l'ensemble des vecteurs de E changés en leurs opposés par u.*

Alors,

1. *F et G sont stables par u : on a les inclusions $u(F) \subset F$ et $u(G) \subset G$.*
2. *Si $u \in \mathbf{O}(E)$, l'un au moins des deux ensembles F ou G n'est pas réduit à $\{ 0_E \}$.*

Démonstration. Montrons qu'il existe $a \in E \setminus \{ 0 \}$ tel que $u(a) = a$ ou $u(a) = -a$.

Soit $\mathcal{E}$ une base quelconque de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. En développant ce déterminant, on observe que P est une fonction polynomiale en λ, de degré 3, de coefficient dominant -1. Donc, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$ (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). On en déduit que $A - \lambda_0 I_3$ n'est pas inversible et donc que $u - \lambda_0 \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, donc il existe $a \in E \setminus \{ 0_E \}$ tel que

$$u(a) - \lambda_0 a = 0.$$

Or $u \in \mathbf{O}(E)$, donc $\|a\| = \|u(a)\| = \|\lambda_0 a\| = |\lambda_0| \, \|a\|$. D'où $|\lambda_0| = 1$. ∎

Définition 39

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **rotation axiale** de E un endomorphisme de E tel que

- l'espace des vecteurs invariants par u, $D = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, est de dimension 1,
- et l'endomorphisme induit par u sur $D^\perp$, $u|_{D^\perp}$, soit une rotation de $D^\perp$, espace vectoriel de dimension 2.

Soit d un vecteur de $E \setminus \{ 0_E \}$ tel que $D = \mathrm{Vect}\, d$, on oriente $D^\perp$ par rapport à d, $u|_{D^\perp}$ est une rotation de $D^\perp$ d'angle de mesure θ. D est appelé l'**axe orienté de la rotation** u, et θ une **mesure de son angle de rotation**.

Définition 40

Une rotation de E d'angle $\pi \pmod{2\pi}$ est appelé **retournement** de E.

Théorème 41

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, u une isométrie vectorielle de E et $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ l'ensemble des vecteurs de E invariants par f.

1. *Si* $\dim F = 3$, *alors* $u = \mathrm{Id}_E \in \mathbf{SO}(E)$.
2. *Si* $\dim F = 2$, *alors u est la réflexion par rapport à F et* $u \in \mathbf{O}^-(E)$.
3. *Si* $\dim F = 1$, *alors u est un rotation axiale d'axe F et* $u \in \mathbf{SO}(E)$.
4. *Si* $\dim F = 0$, *alors u est la composée commutative d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport au plan $D^\perp$. De plus* $u \in \mathbf{O}^-(E)$.

Corollaire 42 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u une isométrie vectorielle de E (i.e. $u \in \mathbf{O}(E)$). Alors, il existe un base orthonormale directe de E, notée $\mathcal{E}$, et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \varepsilon = \det(u) = \pm 1. \tag{52.1}$$

1. *Si* $\det u = 1$ *: u est une rotation axiale d'angle θ ou l'identité ($\theta = 0$).*
2. *Si* $\det u = -1$*, u est $-\operatorname{Id}_E$ ($\theta = \pi$), une réflexion ($\theta = 0$), ou la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation axiale d'angle θ.*

Démonstration. Considérons

$$F = \{ x \in E \mid u(x) = x \} = \ker(u - \operatorname{Id}_E).$$

- Si $\dim F = 3$, alors $u = \operatorname{Id}_E$ et la matrice de u dans une base quelconque est du type (52.1) avec $\theta = 0$ et $\varepsilon = 1$.
- Si $\dim F = 2$. Soit e_1 un vecteur unitaire de $F^\perp$, alors, $u(e_1) \in F^\perp$ car u est orthogonal, F est stable par u, et donc $F^\perp$ également. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_1) = \alpha e_1$. De plus, $\|u(e_1)\| = \|e_1\|$ donc $|\alpha| = 1$. Or $\alpha \neq 1$ car $e_1 \notin F$, donc $\alpha = -1$. Finalement, si (e_2, e_3) est une base orthonormale de F, alors $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de E et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (52.1) avec $\theta = 0$ et $\varepsilon = -1$: u est la réflexion par rapport à F.
- Si $\dim F = 1$. On a $\dim F^\perp = 2$ et $F^\perp$ est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$. Alors $v \in \mathbf{O}(F^\perp)$ et $\ker(v - \operatorname{Id}_{F^\perp}) = \{ 0_E \}$ (sinon, il existerait deux vecteurs de E linéairement indépendants et invariants par u, d'où $\dim F \geq 2$). Donc v est une rotation vectorielle plane. On définit alors la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où e_1 est un vecteur unitaire de F et (e_2, e_3) est une base orthonormale de $F^\perp$. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (52.1) avec $\varepsilon = 1$ et θ l'angle de la rotation v.
- Si $\dim F = 0$. Dans ce cas, il existe $a \in E \setminus \{ 0 \}$ tel que $f(a) = -a$. On considère alors
$$G = \{ x \in E \mid (-u)(x) = x \} = \ker(u + \operatorname{Id}_E).$$
Alors, $\dim G \in \{ 1, 2, 3 \}$, $-u \in \mathbf{O}(E)$, et donc, il existe $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(-u) = -\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (52.1). D'où le résultat.

∎

⚠ Contrairement à ce qui se passe dans les espaces vectoriels de dimension 2, la matrice d'une isométrie vectorielle positive d'un espace vectoriel de dimension 3, n'est pas la même dans toutes les bases orthonormale directes.

§3 Calculs pratiques

Proposition 43 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et u une rotation axiale d'axe $D = \mathrm{Vect}(d)$ avec d un vecteur normé de E, et d'angle de mesure θ.*

1. *Pour $x \in D^\perp$, on a*
$$u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)d \wedge x.$$

2. *Pour $x \in E$, on a*
$$u(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, d\rangle d + (\cos\theta)x + (\sin\theta)d \wedge x.$$

3. *Si $x \in D^\perp$ est unitaire,*
$$\cos\theta = \langle x, u(x)\rangle, \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\,(d, x, u(x)) = \langle d \wedge x, u(x)\rangle.$$

Méthode Comme $\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$, on obtient la valeur de l'angle θ au signe près. On détermine alors le signe de θ en calculant
$$\mathrm{Det}\,(d, x, u(x)) = \sin\theta \|d \wedge x\|^2$$
où $x \in E$ est un vecteur non colinéaire d.

Proposition 44 **Décomposition d'une rotation**

1. *Toute rotation axiale se décompose en produit de deux réflexions.*
2. *Toute isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3 est la composée d'au plus trois réflexions.*