Chapter 2 Corps des nombres réels

2.1 Structures

2.1.1 Le corps des nombres réels

Exercice 2.1

Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

- 1. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.
- **2.** $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.
- **3.** 2(3+k) = (6+2k).
- **4.** $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.
- 5. 5 + (-5) = 0.
- **6.** $18 \cdot 1 = 18$.
- 7. (3+7) + 19 = 3 + (7+19).
- **8.** 23 + 6 = 6 + 23.
- **9.** 3 + 0 = 3.
- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 2.2

Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

- 1. 6(-8) = (-8)6.
- **2.** 5 + 0 = 5.
- 3. (2+3)+4=2+(3+4).
- **4.** $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.
- **5.** $8(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

2.1.2 Soustraction, division

2.1.3 Une propriété importante

2.2 Relation d'ordre sur \mathbb{R}

2.2.1 Ordre total sur \mathbb{R}

2.2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

Exercice 2.4

Encadrer x + y, x - y, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 2.5

On rappelle que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln x \le x - 1$.

Déterminer un encadrement de $\frac{x + \ln x}{1 + x^2}$ sur l'intervalle [1, 2], puis sur [1, +\infty[.

2.2.3 Valeur absolue

Exercice 2.8

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation |x-1| < |x-2|. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 2.9

Résoudre l'inéquation

$$3|x-2|-2|x-1| \ge |x-4| - \frac{1}{4}(2x-11).$$
 (E)

Exercice 2.11

Résoudre les équations

1.
$$|x + 1| = 3$$
;

2.
$$|x + 5| = |x + 7|$$
;

3.
$$|x+3| = x-1$$
;

4.
$$|x| = x - 1$$
;

5.
$$x + 4 = 3|x|$$
:

5.
$$x + 4 = 3|x|$$
;
6. $|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10|$;
7. $|1 - x| = x - 1$.

7.
$$|1-x|=x-1$$

Exercice 2.12

Résoudre

$$\frac{|x-1|+2x-3}{|x-1|-2|x+2|} \le 0.$$

Exercice 2.13

Soit
$$f(x) = \frac{x \sin(x^3 + 1) + 3\sqrt{x} \cos x}{x^4 + 2x - 3}$$
. Montrer

$$\forall x \in [2, +\infty[, |f(x)| \le \frac{1}{2}.$$

11

Résoudre sur ℝ l'équation

$$|x-1| + |2x-7| + |x+3| = 10.$$

Exercice 2.15

Le maximum de deux nombres x et y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même, on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres. Démontrer que

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$
 et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$

Trouver une formule pour max(x, y, z).

2.2.4 Axiome d'Archimède

2.2.5 Partie entière

Exercice 2.16

Trouver *n*, entier naturel, pour que $\frac{n}{13} < \frac{110}{17} < \frac{n+1}{13}$.

Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\frac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Exercice 2.17

Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π .

On rappelle que $\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971...$

Exercice 2.18

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$|x| + |y| \le |x + y| \le |x| + |y| + 1.$$

- 2. Trouver deux réels x et y tels que |x| + |y| = |x + y|.
- **3.** Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 2.19

Soient x et y deux nombres réels vérifiant |x - y| > 1. Alors il existe un entier compris au sens strict entre x et y.

Exercice 2.20

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 2.21

Soit $k \in]0, +\infty[$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1 - kx} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.24

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left| \frac{n-1}{2} \right| + \left| \frac{n+2}{4} \right| + \left| \frac{n+4}{4} \right| = n.$$

Exercice 2.25

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right| = 4n + 1.$$

Exercice 2.26

Résoudre dans R

$$\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor.$$

Exercice 2.27

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor$ est impair.

2.2.6 Partie entière supérieure

Valeur approchée d'un réel

2.2.8 Densité

2.3 Le premier degré

L'équation ax + b = 02.3.1

2.3.2 Petits systèmes

Exercice 2.28

Résoudre les systèmes suivants.

$$\mathbf{1.} \ \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}.$$

3.
$$\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}$$

Exercice 2.29

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

$$1. \begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

2.
$$\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5\\ 4x - 3my = 5m \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1\\ mx + y = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}$$

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

$$\mathbf{1.} \ \begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2 y = m \end{cases}$$

Exercice 2.31

Résoudre graphiquement les systèmes suivants.

$$\mathbf{1.} \begin{cases} 3x = 2y \\ x = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y = x/2 + 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y + 4 > 0 \\ y - 4 > 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x - y + 4 > 0 \\ y - 4 > 0 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y \le 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 4y < 0 \\ x \le 2y \\ 2x > y \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x + 4y < 0 \\ x \le 2y \\ 2x > y \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x + y \ge 1 \\ x/3 + y/2 \le 1 \\ y \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

2.4 Puissances, racines

2.4.1 Puissances entières

Exercice 2.35

Effectuer les calculs indiqués.

1.
$$(-7)^2$$
.

2.
$$(9)^2$$
.

3.
$$(-10)^3$$
.

4.
$$(+8)^3$$
.

5.
$$(-11)^2$$
.

6.
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
.

7.
$$\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
.

8.
$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

9.
$$\left(-\frac{10}{3}\right)^3$$
.

10.
$$\left(-\frac{1}{10}\right)^2$$

11.
$$\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2$$
.

12.
$$\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$$
.

13.
$$(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$$
.

14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.

15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$.

16. $((-3)^{-2})^{-1}$.

17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

14.
$$(-3)^4 \times (-3)^5$$
.

15.
$$\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$$

7.
$$(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$$

18.
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$$

19.
$$77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$$
.

Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1.
$$3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$$
.

$$2. \ \frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}.$$

3.
$$9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$$
.

$$4. \ \frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}.$$

$$5. \ \frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}.$$

6.
$$\frac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$$

Exercice 2.37

Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1.
$$(4^x)^x = (4^8)^2$$
.

2.
$$100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$$
.

3.
$$2^x + 4^x = 20$$
.

4.
$$3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$$

5.
$$\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$$

4.
$$3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$$

5. $(4^{(2+x)})^{3-x} = 1.$
6. $(10^{x-1})^{x-4} = 100^2.$

2.4.2 Racines

Exercice 2.41

On a 0 < a < 1 < b. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

0; 1;
$$\sqrt{a}$$
; a ; a^2 ; a^3 ; \sqrt{b} ; b ; b^2 ; b^3 .

Exercice 2.43

Après avoir simplifié chaque radical, calculer les sommes.

1.
$$\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$$
.

2.
$$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$$
.

3.
$$2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$$
.
4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$

4.
$$2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$$
.

Exercice 2.44

Soient $x \ge 0$ et $y \ge 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
.

2.4.3 Second degrée

Exercice 2.47

Déterminer m paramètre réel pour que l'équation suivante ait deux racines inférieures ou égales à 1 :

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0.$$

Exercice 2.48

Montrer que pour tous x > 0 et y > 0,

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{x} \ge 2.$$

Exercice 2.49

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1.
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
;

2.
$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$
;

3.
$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$$
;

4.
$$x^2 + x + 1 = 0$$
;

4.
$$x^2 + x + 1 = 0$$
;
5. $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$.

Exercice 2.50 Équation bicarrée

Résoudre les équations suivantes.

1.
$$2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$
.

2.
$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$
.

3.
$$3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$
.

4.
$$3x^4 - x^2 + 5 = 0$$
.

Exercice 2.51

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Discuter, selon les signes de $\Delta = b^2 - 4ac$, $\sigma = -b/a$ et $\pi = c/a$ le nombre de racines de l'équation

$$ax^2 + b|x| + c = 0 (E)$$

d'inconnue réelle x.

Exercice 2.52

Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes

1.
$$3x^2 - 12x + 9 < 0$$
.

2.
$$x^2 - 7x + 6 < 0$$
.

3.
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)(6 - 4x) \ge 0$$
.

4.
$$(x-3)(5-2x) > 0$$
.

5.
$$(x^2 - 3x - 9)(x^2 - 1) > 0$$
.

6.
$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) < 0$$

6.
$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \le 0.$$

7. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \ge 0.$

8.
$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2} > 1$$
.

9. $\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} \le 0.$

Exercice 2.53

Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?

Exercice 2.54

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Exercice 2.55

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel *m* le trinôme

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.57

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1.
$$|4 - x| = x$$
.

2.
$$|x^2 + x - 3| = |x|$$
.

3.
$$|x+2| + |3x-1| = 4$$
.

4.
$$\sqrt{1-2x} = |x-7|$$
.

5.
$$x|x| = 3x + 2$$

6.
$$x + 5 = \sqrt{x + 11}$$

7.
$$x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$$

5.
$$x|x| = 3x + 2$$
.
6. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \frac{2}{x}$.

Exercice 2.58

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1.
$$|x^2 - 6x + 4| \le 1$$
.

2.
$$x + 2 < |2x - 5|$$
.

3.
$$\frac{x}{x+1} \le \frac{x+2}{x+3}$$
.

4.
$$|3x - 5| \le |2x + 3|$$
.

5.
$$|x-1| \le |2x+1| + 1$$
.

6.
$$x + 3 \le \sqrt{x + 5}$$
.

7.
$$\frac{x+5}{x^2-1} \ge 1$$
.

8.
$$x + \frac{1}{x} \le |x+4| + 3$$
.

9.
$$x^2 - 4|x| + 3 > 0$$
.

10.
$$|x+3| > |x^2-3|$$

10.
$$|x+3| > |x^2 - 3|$$
.
11. $\sqrt{|x+2|} \le |x - 10|$.

12.
$$\sqrt{x^2-1} < 2-x$$

Exercice 2.59

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \ge 1$. Montrer que

$$\frac{(x-1)^2}{8x} \le \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} \le \frac{(x-1)^2}{8}.$$

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb R$ l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \le x+m$.

Exercice 2.62

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb R$ l'inéquation $\sqrt{x^2+1} \le mx$.

Exercice 2.63

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 2.65

Après avoir déterminé son domaine de définition, rendre le dénominateur rationnel dans l'expression

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}.$$

Exercice 2.71

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x, après avoir précisé leur domaine.

1.
$$\sqrt{3x+3} = x+1$$
.

2.
$$\sqrt{x^2 + 5x - 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = \sqrt{4x^2 + 6x - 1}$$

3.
$$\sqrt{3+\sqrt{x}}-\sqrt{10-\sqrt{x}}=1$$
.

4.
$$\sqrt{1-2x^2} - \sqrt{1-3x^2} = 1$$
.

$$5. \ \sqrt{\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{x+3}{3x}.$$

Exercice 2.72

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x, après avoir précisé leur domaine.

18

1.
$$\sqrt{10-x} < 5$$
.

2.
$$3x + 2 > -2\sqrt{-x^2 - x + 2}$$
.

3.
$$2\sqrt{x^2 - 4x + 11} \le |x - 19| - 3|x - 3|$$
.

4.
$$6\left|x - \frac{4}{3}\right| + x + 57 \le 35\sqrt{|x| + 1}$$
.

$$5. \ \frac{x-2}{8} \le \frac{\sqrt{20x-x^2}}{3}.$$

6.
$$\sqrt{x} + \sqrt{|x-1|} \le \sqrt{x+1}$$
.

7.
$$\sqrt{x+6} > \sqrt{2|x|-5}$$
.

8.
$$\left| \sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} \right| < 1.$$

Exercice 2.73 Un avant-goût de la définition des limites de fonctions...

1. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [3 - \alpha, 3 + \alpha], |x + 2| \le 10.$$

2. En déduire qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in [3-\beta, 3+\beta] \,, \, \left| x^2 - x - 6 \right| \leq 0.001.$$

3. Plus généralement, étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, montrer

$$\exists \delta > 0, \ \forall x \in [3 - \delta, 3 + \delta], \ \left| x^2 - x - 6 \right| \le \varepsilon.$$

Exercice 2.74

Dans cet exercice, on n'utilisera pas la calculatrice et on supposera qu'on ne connaît de $\sqrt{2}$ que sa définition, *i.e.* que $\sqrt{2}$ est l'unique réel strictement positif dont le carré est égal à 2.

- 1. Montre que 1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision 1/2.
- **2.** Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\varepsilon > 0$. On pose $r_1 = \frac{p}{q}$ et $r_2 = \frac{p+2q}{p+q}$.
 - (a) Exprimer $r_2 \sqrt{2}$ en fonction de $r_1 \sqrt{2}$.
 - (b) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision ε . Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $\varepsilon/5$.
 - (c) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision ε . Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision $\varepsilon/2$.
- 3. En déduire une fraction qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2 que $\sqrt{2}$.

2.5 Congruences dans \mathbb{R}

Exercice 2.75

L'assertion suivante est-elle vraie en général ?

$$x \equiv y \pmod{\varphi} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{\varphi}.$$

Exercice 2.76

Démêler le nécessaire et le suffisant entre les trois propositions suivantes

$$x \equiv y \pmod{\pi}, \quad x \equiv y \pmod{2\pi}, \quad x \equiv y \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$