Chapitre 12

Vocabulaire relatif aux applications

Les applications (et les fonctions, ce qui n'est guère différent) forment une classe d'objets qui est une des plus étudiées en mathématiques, parfois sous d'autres noms : suites, familles, transformations, opérateurs, lois, opérations...

12.1 Définition ensembliste d'une application

§1 Notion d'application

Définition 1 Étant donné deux ensembles A et B, une **application** de A dans B est un triplet $f = (A, B, G)$ où G est une partie de $A \times B$ telle que

$$\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in G.$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de f,
- B est **l'ensemble d'arrivée** de f. On dit que la fonction f **prend ses valeurs dans** B ou est **à image dans** B.
- Pour $x \in A$, l'unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in G$ s'appelle **l'image** de x par f, et se désigne par $f(x)$. On dit encore que $f(x)$ est la **valeur** de f pour l'élément x de A.
- Pour $y \in B$, en cas d'existence, tout $x \in A$ tel que $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f.

- G est le **graphe** de f. On a

$$G = \{\ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\ \} = \{\ (x, f(x)) \mid x \in A\ \}.$$

Notation

L'ensemble des applications de A vers B se note $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
Une application $f \in \mathscr{F}(A, B)$ se note

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ou} \quad f : A \to B$$

Exemple 2

- L'application dont l'ensemble de définition ainsi que celui d'arrivée est $\mathbb{N}$; qui a chaque naturel n fait correspondre $n^2 + 1$ se note

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 + 1 \end{array}.$$

  Par exemple, on a $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la relation $y = \frac{1}{x^2-1}$ définit une application de $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- La fonction f n'est pas l'expression $f(x)$ elle-même, mais l'association du x et du $f(x)$, que l'on note $x \mapsto f(x)$. Notez bien que la lettre x peut être remplacée par n'importe que symbole. On peut donc aussi écrire $z \mapsto f(z)$ ou encore $\heartsuit \mapsto f(\heartsuit)$.
- Les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ ne sont pas les mêmes car leurs ensembles de départ sont différents. Autrement dit, on ne confondra pas une fonction et la donnée d'une formule.
- Notez bien que la flèche, en haut, qui relie l'ensemble de départ à l'ensemble d'arrivée est $\to$ et non $\mapsto$. Allez savoir pourquoi.
- Dire que l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est Y ne signifie pas que f prend toutes les valeurs contenues dans Y. Cela signifie simplement qu'elle est *à valeurs dans* Y. Par exemple, les fonctions suivantes sont correctement définies

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}.$$

Notation

- Soient A et B deux ensembles et b un élément de B. L'application $f : A \to B$ définie par

$$\forall x \in A, f(x) = b$$

  est une **application constante**. On la note parfois $\tilde{b}$ ou simplement b lorsqu'aucune confusion n'est possible.

- Soit A un ensemble. L'application $\mathrm{Id}_A : A \to A$ définie par

$$\forall x \in A, \mathrm{Id}_A(x) = x$$

  est l'**application identique** de A, ou **identité** de A.

Proposition 3 *Deux applications $f : A \to B$ et $g : A' \to B'$ sont **égales** si et seulement si*

- *elles ont même ensemble de départ : $A = A'$,*
- *elles ont même ensemble d'arrivée : $B = B'$,*
- *et si pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$.*

On écrit alors $f = g$.

Remarque Ces deux applications seront inégales ($f \neq g$) si au moins une de ces conditions n'est pas remplie. En particulier, si $A = A'$ et $B = B'$, alors $f \neq g$ est équivalente à

$$\exists x \in A, f(x) \neq g(x).$$

En particulier, il faut bien distinguer

- $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction qui ne s'annule pas s'écrit : $\forall x \in A, f(x) \neq 0$.
- $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction non nulle (que l'on note $f \neq 0$) s'écrit : $\exists x \in A, f(x) \neq 0$.

§2 À propos des fonctions de «définies par morceaux»

Voici des exemple de fonctions définies **par morceaux**. Elle sont définies par différentes formules sur différentes partie de leur domaine de définition. Néanmoins, elle ne constitue qu'une seule fonction.

Exemple 4 Une fonction f est définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Évaluer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et représenter le graphe de f.

Exemple 5 Voici un extrait des tarifs courrier pour la France métropolitaine.

Lettre verte	
Poids jusqu'à	Tarifs nets
20g	0.58€
50g	0.97€
100g	1.45€
250g	2.35€
500g	3.15€
1kg	4.15€
2kg	5.40€
3kg	6.25€

Définir la fonction coût C en fonction du poids. Représenter le graphe de C.

§3 Fonctions indicatrices

Voici une notion qui permet de créer un lien entre les parties d'un ensemble E et des fonctions.

Définition 6

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A (dans E), et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

§4 Familles d'éléments d'un ensemble

Si u est une suite et si n est un naturel, au lieu de noter $u(n)$ l'image de n par u, on la note souvent u_n. Cette notation indicielle est également utilisée dans les cas où, pour des raisons diverses, on a l'habitude d'appeler les applications familles.

Définition 7

Soit A un ensemble. On appelle **famille** d'éléments de A **indexée** par l'ensemble I toute application de I dans A notée

$$\begin{array}{ccc} I & \to & A \\ i & \mapsto & x_i \end{array}.$$

L'ensemble I qui est appelé **ensemble des indices**. On utilise généralement la notation $\left(x_i\right)_{i\in I}$ pour désigner une telle famille.

Exemple 8

- Une suite est une famille dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ (ou $\left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \right\}$).
- Si $I = \{1,2,3\}$, alors l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par I est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) où x, y, z sont trois éléments quelconques de A.

Remarque

Bien que cela soit moins correct, on note souvent une famille $\left(x_i\right)$ quand l'ensemble des indices est clair. C'est notamment le cas pour les suites.

§5 À propos des fonctions de «plusieurs variables»

On appelle **fonction de deux variables** toute fonction dont l'ensemble de départ est un produit de deux ensembles, ou contenu dans un tel produit. Si f est une fonction de deux variables, définie sur une partie A d'un produit $X \times Y$, la valeur de f en un point (x, y) de A, que l'on devrait noter $f((x, y))$, se désigne pratiquement par la notation

$$f(x, y).$$

On définirait de façon analogue les fonctions de trois, quatre,... variables, pour lesquelles on emploie les notations $f(x, y, z)$, $f(x, y, z, t)$, etc...

Mathématiquement parlant, il n'existe aucune différence, sinon dans les notations utilisées, entre fonctions d'une variable et fonctions de plusieurs variables — comme en effet nous n'avons fait aucune espèce d'hypothèse sur les ensembles de départ des fonctions, tout ce qu'on a dit s'applique sans aucun changement aux fonctions de «plusieurs» variables.

La distinction entre «une» et «plusieurs» variables provient du fait que, jadis, le mot «variable» désignait ce qu'on appelle aujourd'hui «variable réelle». C'est entre autres pour éviter d'avoir à tenir compte de ces distinctions qu'on a été amené à donner la définition générale, laquelle englobe *toutes* les notions de fonctions actuellement connues, sans aucune exception.

12.2 Opérations sur les applications

§1 Restriction, prolongement

Définition 9 On dit que deux fonctions f et g **coïncident dans un ensemble** E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Dire que $f = g$ revient à dire que f et g ont même ensemble de définition A, même ensemble d'arrivée B, et coïncident dans A.

Définition 10 Soient A, B, A', B' des ensembles, $f : A \to B$ et $g : A' \to B'$ deux applications. On dit que g est un **prolongement** de f à A' si l'ensemble de définition A de f est contenu dans l'ensemble de définition A' de g, si l'ensemble d'arrivée B de f est contenu dans l'ensemble d'arrivée B' de g et si g coïncide avec f dans A.

$g : A' \to B'$ est un prolongement de $f : A \to B$ si et seulement si

$$A \subset A' \text{ et } B \subset B' \text{ et } (\forall x \in A, f(x) = g(x)).$$

Définition 11 Soient $f : A \to B$ une application et X une partie de l'ensemble de définition A de f. L'application dont l'ensemble de définition est X, qui a le même ensemble d'arrivée que f est la **restriction** de f à X, et on la note $f|_X$

$$f|_X : \begin{array}{rcl} X & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Remarque

- Une fonction est un prolongement d'une quelconque de ses restrictions.
- Si la restriction d'une fonction f est bien déterminée par la connaissance de f et X, il n'en est pas de même des prolongements : g étant connu, un prolongement de g a ses valeurs bien déterminées dans X, par contre dans $A \setminus X$, ses valeurs sont arbitraires.
- Si $f : A \to B$ est une application, et Y une partie de B telle que

  $$\forall x \in A, f(x) \in Y,$$

  Alors on peut définir l'application

  $$f|^Y : \begin{array}{rcl} A & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

  Cette application est appelée **application à valeurs dans Y induite par f**. On dit encore **co-restriction** de f à Y.

§2 Composée de deux applications

Définition 12 Soit A, B et C trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, C)$. L'application définie sur A et à valeurs dans C qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **composée** des applications g et f ; on la note

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut représenter la situation précédente ainsi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Remarque En fait, il est possible de définir la composée de $g : B' \to C$ et $f : A \to B$ dès que $f(A) \subset B'$, c'est-à-dire

$$\forall x \in A, f(x) \in B'.$$

C'est le cas, par exemple, lorsque $B \subset B'$.

Proposition 13 *Soient quatre ensembles A, B, C, D et trois applications définies par le diagramme*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D\ .$$

On a

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f \in \mathscr{F}(A, D).$$

On dit que l'opération $\circ$ est associative.

12.3 Image directe et image réciproque

§1 Image directe d'une partie par une application

Définition 14 Soient $f : A \to B$ une application, et X une partie de A.

- L'ensemble des éléments de B qui possèdent un antécédent dans X s'appelle l'**image** de X par f et se désigne par $f(X)$ ou $f_*(X)$.

  $$f(X) = \{\ y \in B \mid \exists x \in X, y = f(x)\ \} = \{\ f(x) \mid x \in X\ \}\ .$$

  Autrement dit, $f(X)$ est décrit par $f(x)$ quand x décrit X.

- En particulier, $f(A)$ est appelée l'**image** de f, on la note

  $$\mathrm{Im}(f) = \{\ y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\ \} = \{\ f(x) \mid x \in A\ \}$$

  c'est un abus de langage pour «image de l'ensemble de départ de f par f».

Étant donnés $f : A \to B$ et $X \subset A$,

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X, y = f(x).$$
$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

Test 15

Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer

1. $f(4)$
2. $f(\{ 4 \})$
3. $f(\{ 1, 3, 5 \})$
4. $f(\{ -1, 1 \})$
5. $f([0, 2])$
6. $f([-3, 1])$
7. $f(\mathbb{R})$
8. $\operatorname{Im} f$

Lorsque $A \subset B$, certaines circonstances peuvent se produire.

Définition 16

Soient $f : A \to B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie de A.

- Si $f(X) \subset X$, on dira que X est une **partie stable** par f.
- Si $f(X) = X$, on dira que X est une **partie invariante** par f.
- Un élément $x \in A$ tel que $f(x) = x$ est dit **invariant** par f. On dit aussi que x est un **point fixe** de f.

Remarque

- La notation $f(X)$ est «incorrecte» (mais commode !), puisque f ne devrait agir que sur des éléments de l'ensemble A, et que la partie X de A est un élément de l'ensemble des parties de A, mais pas de A.

  Il faut bien remarquer les différents sens du mot «image» ;

  - l'image d'un élément de l'ensemble de départ est un élément du but,
  - l'image d'une partie de l'ensemble de départ est une partie du but.

  Aussi faut-il être attentif à la nature de ce qui est à la place de $\square$ dans l'écriture $f(\square)$.
- L'image de f est toujours inclue dans l'ensemble d'arrivée de f, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \subset Y$.
- Si $X = \{ x \}$, alors $f(X)$ a un seul élément, on a $f(X) = \{ f(x) \}$, c'est une partie de B ; tandis que $f(x)$ est un élément de B.
- L'ensemble $f(X)$ est vide si et seulement si l'ensemble X est vide.
- Nous avons déjà croisé une notion très proche de la notion d'image directe. C'est la notation d'ensemble en extension. Par exemple, l'ensemble des multiple de 2π,

  $$\{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

  est l'image directe de $\mathbb{Z}$ par l'application $x \mapsto 2\pi\, x$.
- La notion d'image d'un ensemble par une application apparaît en Géométrie élémentaire lorsqu'on parle par exemple de «la transformée d'une droite par une rotation» : une droite est un ensemble (de points), une rotation est une certaine application (de l'ensemble des points de l'espace dans lui-même), et la transformée en question n'est autre que l'image de l'ensemble considéré par cette application.

§2 Image réciproque d'une partie par une application

Définition 17

Soit $f : A \to B$ une application, et Y une partie de B. L'ensemble des éléments de A dont l'image est dans Y s'appelle l'**image réciproque** de Y par f et se désigne par $f^{-1}(Y)$ ou $f^*(Y)$.

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}.$$

Étant donnés $f : A \to B$ et $Y \subset B$,

$$x \in f^{-1}(Y) \iff x \in A \text{ et } f(x) \in Y.$$

Test 18

Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer

1. $f^{-1}(\{ 4 \})$.
2. $f^{-1}(\{ 1, 9, 25 \})$.
3. $f^{-1}(\{ -2 \})$.
4. $f^{-1}([0, 4])$.
5. $f^{-1}([-5, -3])$.
6. $f^{-1}([-4, 4])$.
7. $f^{-1}(f([0, 2]))$.
8. $f\left(f^{-1}([-4, 4])\right)$.
9. $f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}_-\right)\right)$.

Remarque

- On a toujours $f^{-1}(B) = A$.
- Pour $y \in B$, $f^{-1}(\{ y \})$ est l'ensemble des antécédents de y par f. Il peut-être vide, ou contenir un ou plusieurs éléments.
- L'image réciproque d'un ensemble Y par une application f est «le plus gros ensemble» X tel que $f(X) \subset Y$. Autrement dit, f et Y étant donnés,
$$f(X) \subset Y \iff X \subset f^{-1}(Y).$$

Remarque

Soient $f \in \mathscr{F}(A, B)$ et $g \in \mathscr{F}(B, C)$ deux applications. On vérifie facilement les propriétés suivantes.

1. Si X est une partie de A, alors $(g \circ f)(X) = g(f(X))$.
2. Si Y est une partie de C, alors $(g \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}\left(g^{-1}(Y)\right)$.

Observons que l'on a bien $g^{-1}(Y) \subset B$ et donc $f^{-1}\left(g^{-1}(Y)\right)$ a bien du sens.

À l'inverse, $g^{-1}\left(f^{-1}(Y)\right)$ n'a même pas de sens en général : il faudrait $Y \subset B$ et $f^{-1}(Y) \subset C$.

12.4 Injection, surjection, bijection

§1 Injection

Définition 19

Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **injection**, ou que f est une application **injective**, si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ou de manière équivalente, f est injective si, et seulement si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x');$$

autrement dit, si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f.

Caractérisation 20 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

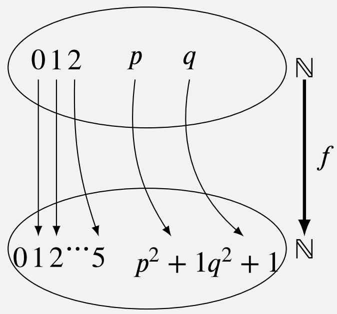
(i) f *est injective.*

(ii) *Pour tout* $y \in B$, *l'équation* $f(x) = y$, *d'inconnue* $x \in A$, *admet au plus une solution.*

(iii) *Tout élément de* B *a au plus un antécédent par* f.

Exemple 21

Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$ est injective.
Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n) = f(n')$. On a donc $n^2 + 1 = n'^2 + 1$, alors $n^2 = n'^2$ et donc $n = \pm n'$. Puisque n et n' sont positifs, on en déduit $n = n'$.
Nous avons montré : $\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, f(n) = f(n') \implies n = n'$. L'application f est donc injective.
Si on s'intéresse à la représentation sagittale[a] de cette application f, cela signifie que les flèches qui partent de deux points distincts arrivent à deux points distincts, ou encore qu'un point de l'ensemble d'arrivée est l'extrémité d'au plus une flèche.



[a] **sagittal** signifie en forme de flèche.

Exemple 22

Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$ est injective.
Soient $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $u' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(u) = f(u')$, c'est-à-dire (égalité de deux couples)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x_1' + x_2' \\ x_1 + 2x_2 & = & x_1' + 2x_2' \end{array} \right. .$$

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient $x_1 = x_1'$ puis que $x_2 = x_2'$.
On a donc $u = (x_1, x_2) = (x_1', x_2') = u'$.

Test 23

On reprend l'exemple de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f^{-1}(\{ (a, b, c) \})$.
2. En déduire $f\left(\mathbb{R}^2\right)$ l'image de f. L'application f est-elle surjective?
3. L'application f est-elle injective?

Remarque Toute application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective. Mais la réciproque est fausse : $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $x \in [0,1[\mapsto x$ et $x \in [1,2] \mapsto 3-x$ est injective mais pas monotone sur $[0,2]$.

Théorème 24 *La composée de deux injections est une injection.*

Démonstration. [1] Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications injectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est injective, c'est-à-dire

$$\forall (x,x') \in A^2, (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'.$$

Considérons donc deux éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque par hypothèse g est injective, nous pouvons affirmer que $f(x) = f(x')$. Puis, f étant également injective, nous avons $x = x'$.

Ceci étant vrai pour tous éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, l'application $g \circ f$ est injective. ∎

§2 Surjection

Définition 25 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **surjection**, ou que f est une application **surjective** si

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Caractérisation 26 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est surjective.*

(ii) $f(A) = B$ *(ou encore* $\operatorname{Im} f = B$*).*

(iii) Pour tout $y \in B$*, l'équation* $f(x) = y$*, d'inconnue* $x \in A$*, admet au moins une solution.*

(iv) Tout élément de B *a au moins un antécédent par* f.

Exemple 27 Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_2 + x_3, 2x_1 - x_3) \end{array}$ est surjective.

Théorème 28 *La composée de deux surjections est une surjection.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications surjectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in C, \exists x \in A, g \circ f(x) = z.$$

[2] Soit $z \in C$. On cherche $x \in A$ tel que $g \circ f(x) = z$.

[1] 24: Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par se donner des objets sur lesquels on peut travailler. Ici nous avons besoin de deux injections que l'on peut composer ; notons les $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

[2] 28: Rappelons que dans les assertions quantifiées, les «variables» sont muettes. Il sera ici un peu plus pratique d'utiliser z plutôt que y.

Puisque par hypothèse g est surjective, z a un antécédent au moins par g ; c'est-à-dire qu'il existe $y \in B$ tel que $z = g(y)$. Puisque B est aussi l'espace d'arrivée de f et que f est surjective, y a au moins un antécédent dans A : il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

On constate que
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$
ce qui montre que z a au moins un antécédent par $g \circ f$.

Ceci étant vrai pour tout élément de C, l'application $g \circ f$ est surjective. ∎

§3 Bijection

Définition 29 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **bijection**, ou que f est une application **bijective**, si
$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

Caractérisation 30 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f est bijective.

♥ *(ii) f est à la fois injective et surjective.*

(iii) Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet une et une seule solution.

Exemple 31 Montrer à l'aide de la définition que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$ est bijective.

(Analyse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$. Dans ce cas, on a
$$\begin{cases} x + y &= a \\ x + 2y &= b \end{cases}$$
En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient $y = b - a$. Puis, par substitution, $x = a - y = 2a - b$. Ainsi, $v \in \mathbb{R}^2$ admet au plus un antécédent par f qui ne peut être que $u = (2a - b, b - a)$. Ceci montre que f est injective et
$$f^{-1}(\{ (a, b) \}) \subset \{ (2a - b, b - a) \}.$$
(Synthèse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = (2a - b, b - a)$. Alors
$$u \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad f(u) = (2a - b + b - a, 2a - b + 2(b - a)) = (a, b) = v.$$
Ainsi, tout $v \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par f: l'application f est surjective.

(Conclusion) Tout élément $v \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f : l'application f est donc bijective.

Définition 32 L'ensemble des bijections de A dans B se note $\mathcal{B}\mathrm{ij}(A, B)$. Lorsque $A = B$, on note plus simplement $\mathfrak{S}(A) = \mathcal{B}\mathrm{ij}(A, A)$. Une bijection de A dans A est également appelée une **permutation** de E.

§4 Bijection réciproque d'une bijection

Théorème 33 et définition
Soient A et B deux ensembles. Soit f une bijection de A vers B.
Il existe une application unique g de B vers A qui est une bijection telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \textit{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

L'application g est appelée ***application réciproque*** *de l'application f et on la note f^{-1}.*

Démonstration. Soit $y \in B$. Puisque f est bijective, l'équation $f(x) = y$ a une solution unique ; désignons-là par $x = g(y)$. Nous avons donc $y = f(x) = f(g(y))$. Nous définissons ainsi une application g de B dans A. Nous avons donc $f \circ g \in \mathscr{F}(B, B)$ et

$$\forall y \in B, f \circ g(y) = y,$$

c'est-à-dire $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

De plus, étant donné $x \in A$, on a $f(x) \in B$ d'où

$$f\left(g\left(f(x)\right)\right) = f\left(x\right).$$

Or f est injective, donc $g\left(f(x)\right) = x$. On a donc $g \circ f \in \mathscr{F}(A, A)$ et

$$\forall x \in A, g \circ f(x) = x,$$

c'est-à-dire $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

L'application g est visiblement bijective car

$$\forall y \in B, \forall x \in A, g(y) = x \iff y = f(x).$$

Montrons maintenant l'unicité : soit g et h des bijections de B dans A telles que $g \circ f = h \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = f \circ h = \mathrm{Id}_B$. Calculons $g \circ f \circ h$ de deux manières différentes :

$$g \circ (f \circ h) = g \circ \mathrm{Id}_B = g \text{ et } (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_A \circ h = h.$$

On a donc $g = h$. ∎

Corollaire 34 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

1. $\forall x \in A, f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.
2. $\forall y \in B, f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

Corollaire 35 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \left(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\right)$$

Bien remarquer que f^{-1} ne définit une application que si f est une bijection.

Se rappeler également que $f^{-1}(Y)$ désigne un ensemble si Y est une partie de l'ensemble d'arrivée de f, et ce même si f n'est pas bijective.

Si $f : A \to B$ est bijective et Y est une partie de B, on peut vérifier que l'image directe de Y par f^{-1} est égale à l'image réciproque de Y par f. Autrement dit, $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y)$...

Exemple 36

L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$$

est bijective et sa bijection réciproque est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (2a - b, b - a) \end{array}$$

qui s'écrit aussi

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (2x_1 - x_2, x_2 - x_1) \end{array}$$

Proposition 37

Soient A et B deux ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans A. Si

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \textit{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B,$$

alors f et g sont bijectives et on a $g = f^{-1}$.

Démonstration. Nous allons montrer que f et g sont bijectives. La relation $g = f^{-1}$ découle alors de l'unicité de la bijection réciproque.

— Soit $(x, x') \in A$, tels que $f(x) = f(x')$. En composant par g, on obtient

$$g(f(x)) = g\left(f(x')\right).$$

Or $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ donc $x = x'$.

L'application f est donc injective. De même, la relation $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ permet de conclure à l'injectivité de g.

— Soit $y \in B$. On pose $x = g(y)$, alors

$$x \in A \text{ et } f(x) = f \circ g(y) = y.$$

L'application f est donc surjective. De même, la relation $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ permet de conclure à la surjectivité de g. ∎

Théorème 38

Soit trois ensembles A, B, C et deux applications bijective définies par

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_B \circ f = f^{-1} \circ \left(\mathrm{Id}_B \circ f\right) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

et

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_B \circ g^{-1} = \left(g \circ \mathrm{Id}_B\right) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_C.$$

∎

Remarque Au lieu d'application réciproque, on dit souvent «application inverse». Cette terminologie peut entraîner de graves confusions ; par exemple (pour $A = B = \mathbb{R}$), tout le monde pensera que la fonction «inverse» de la fonction $x \mapsto x$ est la fonction $x \mapsto 1/x$, alors que la fonction «réciproque» de $x \mapsto x$ est elle-même (d'une manière générale, une application identique est égale à son application réciproque).

Nous ne saurions trop mettre en garde le débutant contre la tentation de croire que le langage est un détail sans importance ; connaître avec précision les définitions de tous les termes techniques, et employer ceux-ci dans leur sens propre, toujours le même, est strictement indispensable à la compréhension des Mathématiques — c'est même parfois suffisant...

§5 Ensembles équipotents

Définition 39 Deux ensembles A et B sont **équipotents** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On dit aussi que A est équipotent à B (ou B est équipotent à A).

Remarque Il existe une bijection de $\emptyset$ sur lui même.

Proposition 40 *Deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents.*

Proposition 41 *Soit $f : A \to B$ une application. Si f est injective, alors les ensemble A et $f(A)$ sont équipotents.*

Définition 42 Un ensemble E est dit **dénombrable** quand il est équipotent à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemple 43

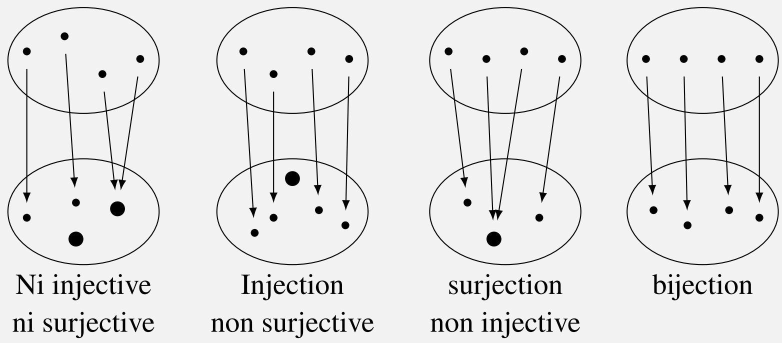
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini mais n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ est infini mais n'est pas dénombrable.

Test 44 Montrer que A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont jamais équipotents. Pour cela, considérer une bijection $f : A \to \mathcal{P}(A)$ et

$$W = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \} .$$

En résumé

Exemples 45



Exemples 46

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni injective, ni surjective.

2. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective mais n'est pas surjective.

3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective mais n'est pas injective.

4. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

Chapitre 12

Compléments

12.5 Vocabulaire relatif aux fonctions entre ensembles ordonnés

Soient $(E, \preceq_E)$ et $(F, \preceq_F)$ deux ensembles ordonnés et f une fonction de E dans F. L'ensemble image de f est noté $f(E) = \{\, f(x) \mid \in E \,\}$.

§1 Fonctions bornées

On dit que l'application f est **minorée** (resp. **majorée**, **bornée**) si l'ensemble $f(E)$ est minoré (resp. majoré, borné) dans F.

Définition 47

- La fonction f est dite **majorée** lorsqu'il existe $M \in F$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) \preceq_F M.$$

- La fonction f est dite **minorée** lorsqu'il existe $m \in F$ tel que

$$\forall x \in A, m \preceq_F f(x).$$

- La fonction f est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

§2 Extrémums d'une fonction

Définition 48

- Le **maximum** d'une fonction f, s'il existe, est le plus grand élément de son ensemble image $f(E)$. On le note $\max(f)$ ou $\max\limits_{x\in E} f(x)$.

$$M = \max(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, f(x) \preceq_F M \\ \text{et} & \exists x_0 \in E, f(x_0) = M. \end{cases}$$

  C'est un majorant de f qui est atteint, c'est-à-dire qu'il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \max(f)$.

- Le **minimum** d'une fonction f, s'il existe, est le plus petit élément de son ensemble image $f(E)$. On le note $\min(f)$ ou $\min\limits_{x\in E} f(x)$.

$$m = \min(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, m \preceq_F f(x) \\ \text{et} & \exists x_0 \in E, f(x_0) = m. \end{cases}$$

  C'est un minorant de f qui est atteint, c'est-à-dire qu'il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \min(f)$.

§3 Borne supérieure, borne inférieure d'une fonction

Définition 49

- La **borne supérieure** de la fonction f, si elle existe, est le plus petit des majorants de son ensemble image $f(E)$. On la note $\sup(f)$ ou $\sup_{x\in E} f(x)$.

$$S = \sup(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, f(x) \preceq_F S \\ \text{et} & \forall M \in F, (\forall x \in E, f(x) \preceq_F M) \implies S \preceq_F M. \end{cases}$$

- La **borne inférieure** de la fonction f, si elle existe, est le plus grand des minorants de son ensemble image $f(E)$. On la note $\inf(f)$ ou $\inf_{x\in E} f(x)$.

$$I = \inf(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, I \preceq_F f(x) \\ \text{et} & \forall m \in F, (\forall x \in E, m \preceq_F f(x)) \implies m \preceq_F I). \end{cases}$$

Exemple 50

L'application $f: \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan x \end{array}$

- a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
- a pour majorant tout élément de $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$,
- a pour minimum 0,
- ne possède pas de maximum,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure $\frac{\pi}{2}$.

Remarquez que $f\left([0,+\infty[\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

§4 Fonction monotone

Définition 51

- La fonction f est dite **croissante** si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \preceq_E x_2 \implies f(x_1) \preceq_F f(x_2).$$

- La fonction f est dite **décroissante** si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \preceq_E x_2 \implies f(x_2) \preceq_F f(x_1).$$