Chapter 11 Dénombrement

11.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

11.2 Ensembles finis

Exercice 11.1 (*)

On considère un ensemble X de $n+1$ entiers distincts choisis dans $[\![1, 2n]\!]$. Démontrer que parmi les éléments de X, on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n+1$.

Exercice 11.2 (**)

Soient $x_1, \dots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j distincts dans $[\![1, 13]\!]$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 11.3 (***)

On considère un ensemble E de 10 entiers différents pris dans l'ensemble $[\![1, 99]\!]$. Montrer qu'il existe deux parties non vides A et B de E, disjointes et de même somme.

Exercice 11.4 (*)

À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 11.5 (*)

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 11.6 (*)

Pour A, B deux parties de E on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer

$$\operatorname{card} A \Delta B = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - 2 \operatorname{card} A \cap B. \tag{1}$$

Exercice 11.7 (**)

Montrer que, dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

11.3 Analyse combinatoire

Exercice 11.8 (***)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini à n éléments. Calculer

$$S = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cap Y) \quad \text{et} \quad T = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cup Y).$$

Exercice 11.9 (*)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de partitions de E formées de deux parties (A, B) de E.

Exercice 11.10 (**)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ (on dit que (A, B) est un recouvrement de E).

2. Calculer le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 11.11 (**) *Convolution de Vandermonde*

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}.$$

1. À quelles conditions sur A et B a-t-on f surjective ? f injective ?

2. Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.

3. En déduire la formule de convolution de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 11.12 (*)

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 11.13 (*)

Déterminer le nombre de surjection de l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n, n+1 \}$ vers l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n \}$.

Exercice 11.14 (**) *Permutations*

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\implies$ $f(n)$ est pair ?

2. la propriété : n est divisible par 3 $\implies$ $f(n)$ est divisible par 3 ?

3. ces deux propriétés à la fois ?

4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Exercice 11.15 (*)

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot OIGNON ?

Reprendre la question précédente, avec le mot OGNON[1].

Exercice 11.16 (*)

Combien d'anagrammes différentes peut-on composer avec les lettres du mot BALKANISATION ?

Exercice 11.17 (*)

Combien d'anagrammes peut-on composer en utilisant toutes les lettres du mot FILOZOFI[2].

Exercice 11.18 (**)

Dans un restaurant de Courseulles-sur-mer, trois convives ont à se partager sept douzaines de belons.

Combien y a-t-il de répartitions possibles des huîtres, en les distinguant, sachant que chacun doit en avoir au moins une ?

Exercice 11.19 (*)

Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast. Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut éventuellement, en plus de la confiture, les beurrer ?

Exercice 11.20 (*)

[1]On notera le rôle de la réforme de l'orthographe dans la simplification des exercices de mathématiques.

[2]Je suis en avance de quelques réformes.

1. Combien d'équipes différentes de rugby à quinze peut-on former avec les vingt-deux joueurs d'une équipe de football américain ?

2. Combien d'équipes différentes de jeu à treize peut-on former avec une équipe de rugby à quinze ?

   (On ne tient pas compte de la place des joueurs.)

Exercice 11.21 (*)

Un club de football est composé de vingt joueurs dont trois gardiens de but. Combien d'équipes différentes de onze joueurs dont un gardien peut-on former ?

(On ne tient pas compte de la place des joueurs, sauf pour les gardiens qui ne peuvent jouer que dans les buts.)

Exercice 11.22 (*)

Avant de pénétrer dans un magasin de porcelaines, l'éléphant doit chausser des pantoufles en vair prises parmi trois paires (une rose, une bleue, une jaune).

1. Combien a-t-il de manières de se chausser ?

2. Combien a-t-il de manières de se chausser, en prenant une pantoufle droite pour chaque patte droite et une pantoufle gauche pour chaque patte gauche ?

Exercice 11.23 (*)

Une société multinationale impose l'anglais comme langue interne à toutes ses filiales. Le siège social, situé à Bruxelles, emploie p Flamands et q Wallons.

Chaque matin, les employés se saluent deux par deux :

- en français lorsque les deux sont wallons,
- en néerlandais lorsque les deux sont flamands,
- en anglais lorsqu'il y a un Flamand et un Wallon.

1. Combien y a-t-il d'échanges en français ?

2. Combien y a-t-il d'échanges en néerlandais ?

3. Combien y a-t-il d'échanges en anglais ?

4. En déduire la relation
$$\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}.$$

Exercice 11.24 (*)

Anne-Sophie a n amis. Elle ne peut en inviter que p où $p < n - 1$. Parmi ses amis, il y a Édouard et Marie-Josèphe. Édouard, attiré par Marie-Josèphe, demande à Sophie de les inviter ensemble à une soirée.

1. Combien de listes différentes d'invités peut-elle établir pour cette soirée ? (sans tenir compte de l'ordre)

   Marie-Josèphe a trouvé Édouard déplaisant à cette soirée. Anne-Sophie ne peut plus les inviter ensemble pour la soirée suivante.

2. Combien peut-elle établir de listes en invitant soit Marie-Josèphe, soit Édouard ?

3. Combien peut-elle établir de listes en n'invitant ni Marie-Josèphe, ni Édouard ?

4. En déduire la relation suivante, pour tout entier $n \geq 2$, et pour tout entier p tel que $2 \leq p \leq n-2$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}.$$

Exercice 11.25 (**)

Le portillon automatique du métro permet de faire passer une ou deux personnes à la fois.

Combien y a-t-il de manières différentes de faire passer une file de dix personnes ?

On fermera les yeux sur le côté hautement répréhensible du passage simultané de deux personnes.

Exercice 11.26 (**)

Le sultan de Bagdad décide de partager équitablement ses np chameaux entre ses n fils.

1. Il donne p chameaux au premier fils, combien a-t-il de choix possibles?

Il donne p chameaux, pris parmi ceux qui restent, au deuxième fils, combien a-t-il de choix possibles?

Ainsi de suite... Il donne p chameaux, pris parmi ceux qui restent, au k-ième fils, combien a-t-il de choix possibles?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

2. Les chameaux étant alignés, il donne les p premiers au premier fils, il donne les p suivants au deuxième fils, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Combien y a-t-il de manières d'aligner les chameaux?

Combien d'alignements différents des chameaux correspondent à une même répartition entre les fils?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

3. Déduire des questions précédentes la relation

$$\prod_{k=1}^{k=n} \binom{pk}{p} = \frac{(np)!}{(p!)^n}.$$

Le sultant possède aussi $n(n+1)$ ânes qu'il veut répartir entre ses fils proportionnellement à: n pour l'aîné, $(n-1)$ pour le deuxième... $(n-k+1)$ pour le k-ième... 2 pour l'avant-dernier et 1 pour le dernier.

4. Déterminer la méthode de répartition des ânes.

5. Combien a-t-il de répartitions différentes des ânes?

Exercice 11.27 (*)

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?

(b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?

(c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?

(d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

(a) Combien y-a-t-il de codes possibles?

(b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?

(c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Exercice 11.28 (*)

Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent

1. Un seul roi.
2. Aucun roi.
3. Au moins un roi.
4. Les 4 rois.
5. Que des piques.

Exercice 11.29 (**)
Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 52 cartes. Déterminer le nombre de mains que comportent

1. Exactement une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur).
2. Deux paires (mais pas un carré ni un brelan).
3. Un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur mais pas un full).
4. Un full (c'est-à-dire un brelan et une paire).
5. Un carré (c'est-à-dire quatre cartes de même hauteur).
6. Une couleur (c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur).

Exercice 11.30 (*)
Il faut ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques distincts, 6 livres de philosophie distincts et 2 livres de géographie distincts.
De combien de façons peut-on effectuer ce rangement dans les cas suivants :

1. Les livres doivent être groupés par matières.
2. Les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Exercice 11.31 (**)
On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?