Chapter 48 Espaces préhilbertiens réels, Espaces vectoriels euclidiens

48.1 Produit scalaire

Exercice 48.1

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et des réels a, b, c, d. On pose pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

Trouver condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 48.2

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 48.3

On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Soit ω une fonction continue et strictement positive définie sur $[a, b]$. On pose

$$\varphi(f, g) = \int_a^b \omega(t) f(t) g(t)\, \mathrm{d}t,$$

pour touts f, g de E.
Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 48.4 *Mines-Ponts PSI 2016*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\left(f_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de fonctions continues et de carré intégrable sur I. On pose pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \int_I f_i(t) f_j(t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto X^T A Y$.

Montrer que φ est un produit scalaire si, et seulement si la famille $\left(f_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

48.2 Familles orthogonales

Exercice 48.5

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques et on munit E du produit scalaire $\langle *, * \rangle$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $\langle *, * \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur E.

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère la fonction $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale de E. Est-elle orthonormale ?

Exercice 48.6 *Oral CCINP PSI 2021*

Soient E un espace euclidien de dimension n, $\left(e_1, \dots, e_n\right)$ une base orthonormée de E et $\left(x_1, \dots, x_n\right)$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1.$$

1. Montrer que, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\right).$$

2. En déduire que la famille $\left(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n\right)$ est une base de E.

48.3 Orthogonalité

Exercice 48.7

E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 48.8

Soit $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles, sur le segment $[1,1]$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. C'est un espace vectoriel préhilbertien réel. Soit $F \subset E$ le sous-espace des fonctions nulles sur le segment $[-1,0]$. Expliciter $F^\perp$. En déduire que $F + F^\perp \neq E$.

Exercice 48.9

Soient E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 48.10

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur Vect $\left(x \mapsto x, x \mapsto x^2\right)$.

48.4 Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 48.11

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.

1. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la base orthonormale (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 48.12

Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, la base suivante

$$u = (0, 0, -1) \qquad v = (4, -2, 0) \qquad w = (2, 1, 0)$$

Exercice 48.13

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'application $\langle *, *\rangle$ est un produit scalaire.

2. Déterminer la base de E obtenue par orthonormalisation (pour ce produit scalaire) de la base canonique.

Exercice 48.14

À deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Lorsque $n = 3$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 48.15 *Oral Mines-Ponts PSI 2023*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose, pour $i \in [\![0, 3]\!]$, $L_i = \prod_{k\in[\![0,3]\!]\setminus\{\,i\,\}} \frac{X-k}{i-k}$.

1. Calculer $L_i(j)$ pour $j \in [\![0, 3]\!]$. Montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E.

2. Soit $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))\,(Q(k) + Q(k+1))$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

3. Trouver une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 48.16 *Oral Centrale PSI 2011*

Soient $E = \mathbb{R}[X]$. Si $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(t)Q(t)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle *, *\rangle$ est une produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que : pour tout n, P_n est normalisé (coefficient dominant égal à 1) de degré n et (P_n) est orthogonale.

3. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X).$$

4. Montrer que P_n s'annule n fois sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

48.5 Calculs en bases orthonormale

Exercice 48.17 *Banque PT 2011, Épreuve A, Partie C*

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer qu'il existe un base orthonormale $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E et une seule telle que

$$\forall i \in \{ 0, 1, 2, 3 \}, \mathrm{Vect}(\pi_0, \dots, \pi_i) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^i) \text{ et } \varphi(\pi_i, X^i) > 0.$$

puis déterminer les quatre polynômes $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$.

3. Soit $P \in E$ tel que $\int_{-1}^{1} [P(t)]^2\,\mathrm{d}t = 1$.

(a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.

(b) Sans déterminer les réels α_i, déterminer $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.

(c) i. Soient (a, b, c, d) et (a', b', c', d') deux quadruplets de réels. Montrer que

$$\left|aa' + bb' + cc' + dd'\right| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}.$$

ii. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \left[\pi_i(x)\right]^2}.$$

(d) En étudiant, pour tout k de $\{ 0, 1, 2, 3 \}$, $\sup\left\{ \left|\pi_k(x)\right| \mid -1 \leq x \leq 1 \right\}$, montrer

$$\sup\{ |P(x)| \mid |x| \leq 1 \} \leq 2\sqrt{2}.$$

Exercice 48.18 *X-ENS PSI 2011*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $w \in \mathscr{C}^0\left([a, b], \mathbb{R}_+^\star\right)$ et $E = \mathbb{R}[X]$.

On considère le produit scalaire défini sur E par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P, Q\rangle = \int_a^b w(x)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonale pour $\langle *, * \rangle$ et telle que, pour tout i, P_i soit normalisé (coefficient dominant 1) et de degré i.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que P_n a n racines distinctes dans $]a, b[$.
Soient $m \in \mathbb{N}^\star$ et $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ un m-uplet de réels distincts deux à deux. On pose

$$\forall k \in [\![1, m]\!], b_k = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq k}} \frac{x - c_j}{c_k - c_j}\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \int_a^b w(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m b_k Q(c_k).$$

4. On suppose que $(c_1, \dots, c_m)$ sont les racines de P_m. Montrer
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2m-1}[X], \int_a^b w(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m b_k Q(c_k).$$

Exercice 48.19

Écrire la matrice dans la base canonique des applications linéaires suivantes.

1. La projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite engendrée par le vecteur $(-1, 2, 2)$.

2. La projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

3. Le demi-tour de $\mathbb{R}^3$ dont l'axe est engendré par le vecteur $(-2, 1, 1)$.

4. La réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $2x - y + z = 0$.

Exercice 48.20

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient
$$e_1 = (1, 0, 1, 0), \qquad e_2 = (1, -1, 1, -1), \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

1. Déterminer une base orthonormale de F

2. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur F.

3. En déduire la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

4. Déterminer la distance du vecteur $(1, 2, 3, 4)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 48.21

Dans $E = R^4$, soit F le sous-espace vectoriel des $X = (x, y, z, t)$ tels que
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}.$$

1. Donner une base de F et une base de $F^\perp$.

2. Exprimer la projection orthogonale sur F.

Exercice 48.22

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère les hyperplans
$$H_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad H_2 : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$
les équations étant données dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et on pose $F = H_1 \cap H_2$.

1. Déterminer une base de $H_1^\perp$, une base de $H_2^\perp$ et une base de $F^\perp$.

2. Construire une base orthonormale de $F^\perp$.

3. En déduire les matrices des projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$ dans la base canonique.

Exercice 48.23

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire usuel $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E formé des matrices antisymétriques et $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $\mathrm{d}(A, F)$.

Exercice 48.24

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. On note F l'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques de E.

(a) Donner une base et la dimension de F.

(b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F pour le produit scalaire φ.

3. On suppose maintenant $n = 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{d}(A, F^\perp)$.

Exercice 48.25

On considère $E = \mathbb{R}[x]$.

1. Montrer que l'égalité $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur E.

2. À partir de la base canonique de $F = \mathbb{R}_2[X]$, déterminer une base orthonormale de F pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur F et calculer la distance de X^3 à F.

Exercice 48.26 *Un calcul de distance*

Déterminer la borne inférieure de l'ensemble des réels $I(a, b)$ lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$ avec

$$I(a, b) = \int_0^1 \left(e^t - (at + b)\right)^2 \, \mathrm{d}t.$$

48.6 Matrices orthogonales

Exercice 48.27

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. À quelle condition, sur (a, b, c, d), la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale ?