Chapter 8 Calculs algébriques

8.1 Le symbole somme $\sum$

Exercice 8.1 (*)

Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Solution 8.1

En écrivant explicitement les sommes, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Exercice 8.2 (***)

Démontrer par récurrence l'assertion suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{\, 0, 1 \,\}, \sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 8.5 (*)

Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$
8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Solution 8.5

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2$ ou également $\displaystyle\sum_{k=10}^{10} k^2.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + 1$ ou encore 2^0 ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{5} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}=\sum_{k=5}^{7}\frac{1}{k-4}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{k+1}{2^k}=\sum_{k=-1}^{5}\frac{k+3}{2^{k+2}}$.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-1)^k\frac{k}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{4}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{k!}$.

7. Poser $l=k-1$. Lorsque $k\in\{1,2,3\}$, on a $l=k-1\in\{0,1,2\}$.

$$\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\frac{k^2}{(2k)!}=\sum_{l=0}^{2}(-1)^l\frac{(l+1)^2}{(2l+2)!}.$$

Puis l'indice étant muet, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\frac{k^2}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{2}(-1)^l\frac{(k+1)^2}{(2k+2)!}.$$

8. Poser $l=k+1$.

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{2k}{k+1}=\sum_{l=2}^{5}(-1)^{l-1}\frac{2l-2}{l}=\sum_{k=2}^{5}(-1)^{k-1}\frac{2k-2}{k}$$

Exercice 8.6 (**)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0=1\ \text{ et }\ u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Montrer par récurrence (avec prédécesseurs) que pour tout $n\geq 1$, on a $u_n=2^{n-1}$.

Solution 8.6

Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)\,:\,u_n=2^{n-1}$.

On a $u_1=\sum_{k=0}^{0}u_k=u_0=1=2^{1-1}$, d'où $R(1)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On suppose $R(1),\dots,R(n)$ vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}&=\sum_{k=0}^{n}u_k\\
&=u_0+\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&=u_0+\sum_{k=1}^{n}2^{k-1} && \text{d'après } R(1),\dots,R(n)\\
&=1+\sum_{k=0}^{n-1}2^k\\
&=1+\frac{1-2^n}{1-2}\\
&=1+2^n-1=2^n\\
u_{n+1}&=2^{n+1-1}
\end{aligned}$$

D'où $R(n+1)$.

Conclusion

Par récurrence, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 8.7 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = 3n$.

Solution 8.7

Exercice 8.9 (**)

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Solution 8.9

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Finalement, par téléscopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 8.10 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(1-k)$,

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} 2\left(k - \frac{1}{2}\right)$,

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$,

4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

Solution 8.10

Exercice 8.11 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Solution 8.11

Une solution directe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1} - \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=p-2}^{q} u_k - \sum_{k=p-4}^{q-2} u_k \\
&= \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k + u_{q-1} + u_q - \left(u_{p-4} + u_{p-3} + \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k \right) \\
&= u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.
\end{aligned}$$

Une solution astucieuse avec télescopage, on écrit $u_{k+1} - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \\
&= u_q - u_{p-3} + u_{q-1} - u_{p-4}.
\end{aligned}$$

Exercice 8.12 (**)

Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Solution 8.12

Pour $k \geq 2$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln(k) + \ln(k+1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) \\
&= \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(1) + \ln(2) - 2\left(\cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(2) + \ln(n) \right) + \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(n) + \ln(n+1) \\
&= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2) \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 8.13 (**)

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ à l'aide d'un télescopage.

Solution 8.13

Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \times k! = (k+1-1) \times k! = (k+1)! - k!$. On a donc par telescopage

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1.}$$

Exercice 8.15 (**)

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Solution 8.15

1. Pour $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k^2}$$
car $k(k-1) = k^2 - k \leq k^2$ puisque $k \geq 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En sommant les inégalités obtenues à la questions précédente pour $k = 2 \dots n$, on obtient
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \underset{\text{télescopage}}{=} 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Exercice 8.16 (**)

Soit $n \geq 1$. On considère les deux sommes

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$$
$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

1. (a) Calculer S_1, S_2 et S_3.
   (b) Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $S_n = 2n^4 - n^2$.
2. (a) Déterminer deux réels α et β tels que
$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{p(p+1)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+1}.$$
   (b) En déduire une expression simple de $\tilde{S}_n$.

(c) Retrouver ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

Solution 8.16

Exercice 8.17 (***)

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Solution 8.17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
De manière analogue, $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En sommant les inégalités précédente pour $n = 1..10000$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{100000} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{10000} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$
Après telescopage, on obtient
$$\sqrt{10001} - 1 < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{10000} = 100$$
Or $\sqrt{10001} - 1 > \sqrt{10000} - 1 = 99$, d'où
$$99 \leq \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < 100$$
et donc
$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) \right\rfloor = 99.$$

Exercice 8.18 (***)

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
Déterminer la valeur de
$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Solution 8.18

Exercice 8.21 (***)

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

3. En déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution 8.21

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a $\frac{1}{k} > 0$ et $\frac{1}{k+1} > 0$. Or la fonction arctan est croissante majorée par $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$0 < \arctan\frac{1}{k} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 < \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k}\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1-k}{k(k+1)+1} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

Et puisque $\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on a bien

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. On a par telescopage,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \arctan(1) - \arctan\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \arctan x = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8.23 (****)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} + u_k = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(x)\right) \tan^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2k+1}.$$

2. En faisant apparaitre un télescopage, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\, u_{n+1}.$$

3. (a) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

(b) En déduire l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4n+2}.$$

4. En déduire finalement la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

ce que l'on note aussi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution 8.23

8.2 Sommes usuelles

Exercice 8.24 (*)

Calculer

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} k$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} i$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} n$.

Solution 8.24

1. $n(n+1)/2$.

2. nk.

3. ni.

4. n^2.

Exercice 8.25 (**)

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;

2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;

4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Solution 8.25

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{k=0}^{n}(k-k) + n + 1 = n+1$.

2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2$.

3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.

4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum k = 1^n \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Exercice 8.26 (**)

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Solution 8.26

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$R(0)$ est vraie car
$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0(0+1)(2\times 0+1}{6} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $R(n)$ vraie. On a alors
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \because R(n) \\
&= (n+1)\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}.
\end{aligned}$$

Or $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on a donc $R(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8.29 (*)

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.

Solution 8.29

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$.
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

Exercice 8.33 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}$.
2. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx).$$
On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh.

Solution 8.33

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k.$$

- Si $x \neq 0$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \frac{e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} = e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}.$$
De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient,
$$\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k = e^{-nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2} e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} e^{-nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{nx/2} + e^{-nx/2}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \boxed{\frac{\operatorname{ch} \frac{nx}{2} \operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}}.$$

- Si $x = 0$, on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = n + 1}$.

Exercice 8.35 (***)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a + kb).$$

On donnera une expression factorisée utilisant les fonctions ch et sh.

2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{100} \operatorname{sh}(2 + kx) = 0. \tag{E}$$

Solution 8.35

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer les sommes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a + kb).$$

Pour cela, nous utilisons la définition exponentielle des fonctions hyperboliques cosinus et sinus :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On a alors

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a+kb} + e^{-a-kb}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(a+kb)} = A_n + B_n$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a+kb} - e^{-a-kb}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(a+kb)} = A_n - B_n.$$

Pour la première somme, on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kb} = \sum_{k=0}^{n-1} e^a (e^b)^k = e^a \sum_{k=0}^{n-1} (e^b)^k$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique. Nous devons distinguer deux cas selon la valeur de b.

- **Cas 1 :** $b = 0$. La raison de la suite géométrique est $e^0 = 1$.

$$A_n = e^a \sum_{k=0}^{n-1} 1 = ne^a.$$

- **Cas 2 :** $b \neq 0$. La raison $e^b \neq 1$.

$$A_n = e^a \frac{1-(e^b)^n}{1-e^b} = e^a \frac{1-e^{nb}}{1-e^b}.$$

Pour retrouver une expression factorisée avec des fonctions hyperboliques, on utilise l'astuce de l'angle moitié :

$$e^x - 1 = e^{x/2}(e^{x/2} - e^{-x/2}) = 2e^{x/2}\,\mathrm{sh}(x/2).$$

On obtient alors,

$$A_n = e^a \frac{e^{nb/2}(e^{nb/2} - e^{-nb/2})}{e^{b/2}(e^{b/2} - e^{-b/2})} = e^a \frac{2e^{nb/2}\,\mathrm{sh}(nb/2)}{2e^{b/2}\,\mathrm{sh}(b/2)} = e^{a+(n-1)b/2}\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)}.$$

De manière similaire, on a

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(a+kb)} = e^{-a}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-b})^k.$$

- **Cas 1 :** $b = 0$. La raison est $e^0 = 1$.

$$B_n = e^{-a}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = ne^{-a}$$

- **Cas 2 :** $b \neq 0$. La raison $e^{-b} \neq 1$.

$$B_n = e^{-a}\frac{1-(e^{-b})^n}{1-e^{-b}} = e^{-a}\frac{e^{-nb/2}(e^{nb/2} - e^{-nb/2})}{e^{-b/2}(e^{b/2} - e^{-b/2})} = e^{-a-(n-1)b/2}\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)}$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient

- **Cas 1 :** $b = 0$.

$$C_n = \frac{ne^a + ne^{-a}}{2} = n\,\mathrm{ch}(a)$$

et

$$S_n = \frac{ne^a - ne^{-a}}{2} = n\,\mathrm{sh}(a).$$

- **Cas 2 :** $b \neq 0$.

$$C_n = \frac{1}{2}\left(e^{a+(n-1)b/2} + e^{-(a+(n-1)b/2)}\right)\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)} = \mathrm{ch}\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)}$$

et

$$S_n = \frac{1}{2}\left(e^{a+(n-1)b/2} - e^{-(a+(n-1)b/2)}\right)\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)} = \mathrm{sh}\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(nb/2)}{\mathrm{sh}(b/2)}.$$

Il s'agit de résoudre l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{100} \mathrm{sh}(2 + kx) = 0. \tag{E}$$

Cette somme correspond à la somme S_n calculée précédemment, avec les paramètres :

$$n - 1 = 100 \implies n = 101, \quad a = 2, \quad b = x$$

On distingue à nouveau les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

- **Cas 1 :** $x = 0$. L'équation devient $\sum_{k=0}^{100} \mathrm{sh}(2) = 0$.

$$\sum_{k=0}^{100} \mathrm{sh}(2) = 101\,\mathrm{sh}(2)$$

Comme $2 \neq 0$, $\mathrm{sh}(2) \neq 0$, et donc $101\,\mathrm{sh}(2) \neq 0$. Ainsi, $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation (E).

- **Cas 2 :** $x \neq 0$. On peut utiliser la formule générale établie à la question précédente pour $b \neq 0$:

$$S_{101} = \mathrm{sh}\left(2 + \frac{(101-1)x}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(101x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)} = 0$$

Ce qui se simplifie en :

$$\mathrm{sh}(2+50x)\frac{\mathrm{sh}(101x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)} = 0.$$

On sait que $\mathrm{sh}(Y) = 0 \iff Y = 0$. Comme $x \neq 0$, le dénominateur $\mathrm{sh}(x/2)$ est non nul (et sinon, il y aurait un problème dans notre formule obtenue à la première question!) ainsi que $\sin(101x/2)$.

Ainsi,

$$(E) \iff \mathrm{sh}(2+50x) = 0 \iff 2+50x = 0 \iff x = -\frac{1}{25}.$$

L'unique solution de l'équation (E) est $x = -1/25$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{25}\right\}$.

Exercice 8.37 (***)

Définissons une suite par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, u_n est positif. En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $u_n \geq n - 2$. En déduire la limite de la suite.
2. Définissons maintenant la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Remarquer que u_n est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de l'entier n.

Solution 8.37

Exercice 8.39 (*)

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$.
2. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

Solution 8.39

1.
2. $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i = 3\frac{2}{9}\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$$

Exercice 8.40 (****) *Écriture en base b*

Soit $b \geq 2$ un entier. On souhaite démontrer que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k$$

avec $p \geq 0$, $a_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $a_p \geq 1$.

1. Existence: démontrer l'existence en procédant par récurrence forte. Pour l'hérédité, on pourra utiliser la division euclidienne de n par b.

2. Unicité: on suppose que n admet deux décompositions distinctes
$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k = \sum_{k=0}^{p'} a'_k b^k.$$
On peut supposer $p \geq p'$. Quitte à compléter la suite a'_k par $a'_{p+1} = \cdots = a'_p = 0$, on peut supposer que $p = p'$.
Soit $\ell \in [\![0, p]\!]$ le plus grand possible tel que $a_\ell \neq a'_\ell$.
   (a) Vérifier que $\left(a_\ell - a'_\ell\right) b^\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(a'_k - a_k\right) b^k$.
   (b) Démontrer que, pour toute suite finie $c_0, \dots, c_{\ell-1}$ avec $0 \leq c_k \leq b-1$, on a
$$\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k b^k < b^\ell.$$
   (c) Conclure.

3. Donner l'écriture de 37 écrit en base 10) en base 2, puis en base 3.

Solution 8.40 *Écriture en base b*
Exercice 8.41 (**)
Calculer
$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2}.$$
Solution 8.41
Exercice 8.43 (**)

1. Pour $p, k \in \mathbb{N}$, exprimer $\binom{p+k}{p}$ en fonction de $\binom{p+k+1}{p+1}$ et $\binom{p+k}{p+1}$.

2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer la somme
$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}.$$

Solution 8.43

1. La formule de Pascal donne pour $p, k \in \mathbb{N}$,
$$\binom{p+k+1}{p+1} = \binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1}.$$
D'où la relation
$$\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}.$$

2. Par télescopage, on obtient
$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+(k+1)}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Exercice 8.45 (*)
Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Solution 8.45

1. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

2. $1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$.

Exercice 8.46 (**)

Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Solution 8.46

On a

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x)^k \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k (2x)^{3k-24}.$$

L'exposant de x vaut 3 si, et seulement si $3k - 24 = 3$, c'est-à-dire si $k = 9$, et le terme en x^3 est donc

$$\binom{12}{9}(-1)^9(2x)^{3\cdot 9-24} = -\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}(2x)^2 = -220\cdot 8x^3 = -1760x^3.$$

Exercice 8.47 (*)

Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.

2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2 - y^2)^{14}$.

3. Le terme en x^6 du développement de $(3 - 4x^2)^5$.

4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{14}$.

Solution 8.47

De manière analogue à l'exercice 8.46, on obtient

1. $-448x^5$.

2. $1001x^{20}y^8$.

3. $-5760x^6$.

4. $3003x^4$ et $0x^6$.

Exercice 8.50 (*)

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Solution 8.50

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}1000003^5 = \left(10^6+3\right)^5 &= 10^{30} + 5\times 3\cdot 10^{24} + 10\times 9\cdot 10^{18} + 10\times 27\cdot 10^{12} + 5\times 81\cdot 10^6 + 243\\ &= 10^{30} + 15\cdot 10^{24} + 90\cdot 10^{18} + 270\cdot 10^{12} + 405\cdot 10^6 + 243\\ &= 1\,000\,015\,090\,000\,270\,000\,405\,000\,243.\end{aligned}$$

Exercice 8.51 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Solution 8.51

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = -\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3\times\left(3^2\right)^k\binom{n}{k} = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(3^2\right)^k = 3\left(1+3^2\right)^n = 3\cdot 10^n.$

Exercice 8.52 (***)
Soit n un entier naturel

1. Montrer qu'il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = p_n + q_n\sqrt{2}.$$

2. Exprimer $(1-\sqrt{2})^n$ à l'aide de p_n, q_n et $\sqrt{2}$.

3. En déduire une relation entre p_n et q_n.

4. Calculer $\left\lfloor \left(1+\sqrt{2}\right)^n \right\rfloor$ en fonction de p_n.

Solution 8.52

Exercice 8.53 (***)
Pour $0 \le k \le p \le n$, démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 8.54 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.

2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Solution 8.54

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, et donc

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

et en évaluant en 1,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2. Le premier terme de la somme étant nul, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}$$

Or,

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}1^{n-p}1^{p} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.$$

Finalement, $\boxed{A_n = n2^{n-1}}$.

Exercice 8.55 (****) *Une formule d'inversion*

On considère deux suites de nombres (f_n) et (g_n) liées par la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k. \tag{1}$$

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer le terme général de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si on prend successivement pour terme général de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les quantités

(a) $g_n = 1$;

(b) $g_n = 2^n$;

(c) $g_n = (-1)^n$;

(d) $g_n = e^{na}$ où a est un réel fixé.

2. Démontrer par récurrence la relation réciproque suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k. \tag{2}$$

Solution 8.55 *Une formule d'inversion*

1. Il s'agit d'applications immédiates de la formule du binôme de Newton.

(a) $f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$;

(b) $f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n$;

(c) $f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$;

(d) $f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^a)^k = (1+e^a)^n$.

2. [1] [2]On a $f_0 = g_0$, d'où $g_0 = f_0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

---

[1]
$$R(n) : f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k.$$

[2] $R(0)$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons que la formule demandée soit vraie pour tous les entiers strictement inférieurs à n[3]. On a

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k = g_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k.$$

D'où, par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
g_n &= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k \\
&= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i \right). \\
&= f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} f_i. \\
&= f_n - \sum_{0 \leq i \leq k \leq n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} f_i. \\
&= f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \right) f_i.
\end{aligned}$$

Un recours aux factorielles donne[4]

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

et donc

$$\sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{i} \sum_{\ell=0}^{n-i-1} (-1)^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell}.$$

Or lorsque $i < n$, $\sum_{\ell=0}^{n-i} (-1)^{\ell} \binom{n-i}{\ell} = (1-1)^{n-i} = 0$, et donc

$$\sum_{\ell=0}^{n-i-1} (-1)^{\ell} \binom{n-i}{\ell} = -(-1)^{n-i} \binom{n-i}{n-i} = -(-1)^{n-i}.$$

Finalement, le terme f_n réintégrant la cohue

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

ce qui est le résultat attendu au rang n et achève la preuve par récurrence[5].

8.3 Généralisation de la notation $\sum$

Exercice 8.58 (**)

Simplifier les sommes suivantes.

[3]On suppose $R(0), \ldots, R(n-1)$. Une récurrence simple, où la propriété ne sera supposée vraie qu'au rang $n-1$ ne suffit pas.

[4]On peut également effectuer un raisonnement ensembliste direct.

[5]d'où $R(n)$

1. $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} x^{i+j}$.

2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$.

Solution 8.58

1. Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq i,j\leq n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^i x^j = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2 + 2i\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1+3n+3+2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 8.59 (***)

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.

2. Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer

$$\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \tag{1}$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{2}$$

Solution 8.59

Exercice 8.60 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^{i+j}.$$

Solution 8.60

Exercice 8.62 (****)

On se donne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j a_k}{j+k}\right) \geq 0.$$

Préciser le cas d'égalité.

Solution 8.62

Posons $P(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k} x^{j+k} \right)$. Alors

$$xP'(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j a_k x^{j+k} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_j x^j \right)^2 \geq 0.$$

L'application P est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $P(0) = 0$ et donc $P(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier $P(1) \geq 0$, ce qui est le résultat demandé.

L'application P est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc si $P(1) = 0$, alors P est constante sur $[0,1]$ et donc $P'(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\forall x \in [0,1] \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0,$$

ce qui n'est possible que si tous les coefficients a_i sont nuls.

Exercice 8.63 (*)

Compléter les interversions suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$

Solution 8.63

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$

Exercice 8.64 (***)

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

Solution 8.64

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \frac{j(j+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(j^3 + j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n(n+1) + 2(2n+1) \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n^2 + 7n + 2 \right).
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Exercice 8.65 (***)

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j).$
2. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}.$
3. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} (j-i).$
4. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^2}{j}.$

Solution 8.65

1. On écrit une somme double

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j) = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j\right) = \frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)$$
$$= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + j = \frac{3}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.$$

2. Nous allons écrire une somme double. Puisque l'on ne sait pas calculer une somme du type $\displaystyle\sum_j \frac{1}{j}$, nous allons plutôt commencer par sommer sur l'indice i.

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\frac{j(j+1)}{2}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

3. On peut écrire une somme double ($\displaystyle\sum_i \sum_j$), mais on peut aussi utiliser d'abord la linéarité.

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} (j-i) = \sum_{1 \le i \le j \le n} j - \sum_{1 \le i \le j \le n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$$
$$= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}\left((n+1)k - k^2\right)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(n+1)k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)^2}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(4n+2-3n-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{3}j^2 + \frac{1}{2}j + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n = \frac{n(4n^2+6n+2+9n+9+6)}{36} \\
&= \frac{n(4n^2+15n+17)}{36}
\end{aligned}$$

Exercice 8.67 (***)

Calculer

$$S = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}.$$

Solution 8.67

Exercice 8.68 (***)

Calculer

$$\sum_{0\leq p\leq q\leq n} \binom{n}{p} 2^q.$$

Solution 8.68

Exercice 8.69 (****)

Pour $n \geq 1$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

le n-ième nombre harmonique.

1. Calculer
$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i+1} \right).$$

2. Pour $k \geq 1$, exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{i+1}$ comme la différence de deux termes de la suite $\left(H_n\right)_{n\geq 1}$.

3. En écrivant S comme une somme double, en déduire
$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2}\left(H_{n+1} - \frac{1}{2}\right).$$

Solution 8.69

Exercice 8.70 (****)

Calculer

$$S = \sum_{1\leq i\leq k\leq n} \frac{i2^k}{k(k+1)}.$$

Solution 8.70

Exercice 8.72 (***)

Pour tout entier n, on note

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2 \sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk.$$

2. Montrer ensuite

$$2 \sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2.$$

3. À l'aide des questions précédentes, retrouver l'expression de Q_n vue en cours.

Solution 8.72

Exercice 8.73 (***)

On considère (a_k), (b_k), (c_k), (d_k) des familles de nombres réels.

1. Donner une expression développée (relativement simple) de

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j\right)\left(c_j d_k - c_k d_j\right).$$

2. En déduire l'identité de Lagrange:

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

3. Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Solution 8.73

Exercice 8.74 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i + j$.

2. Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i, j).$$

On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i, j)$.

arque Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Solution 8.74

8.4 Le symbole produit $\prod$

Exercice 8.76 (*)

Calculer

1. $\prod_{k=1}^{n} k.$

2. $\prod_{i=1}^{n} k.$

3. $\prod_{k=1}^{n} i.$

4. $\prod_{k=1}^{n} n.$

Solution 8.76

1. $n!.$

2. $k^n.$

3. $i^n.$

4. $n^n.$

Exercice 8.77 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Solution 8.77

Exercice 8.78 (*)

Calculer les nombres suivants:

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} 1, \qquad \sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} k,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} h,$$

$$\prod_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} h, \qquad \prod_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} k.$$

Solution 8.78

Exercice 8.79 (**)

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $p_n \sin \frac{a}{2^n}$.

2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} p_n$.