Chapter 5 Fonctions circulaires

5.1 Fonctions trigonométriques

Solution 5.1
Solutions à justifier!

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$.
3. $\operatorname{Dom} f = \dots \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \dots$.

5.2 Formulaire de Trigonométrie

Solution 5.2

Solution 5.3
On a $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$, d'où $\cos^2\alpha = \frac{25}{41}$. Or α est un angle du troisème quadrant, donc $\cos\alpha < 0$, d'où $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

De plus, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{16}{41}$ et $\sin\alpha < 0$, donc $\sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$.

Solution 5.4
Il y a de très nombreuses façons de procéder. Par exemple, on a

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

d'où $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$. Puisque α est un angle du premier quadrant, $\sin\alpha > 0$ donc $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Finalement,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\times 12\times 5}{169} = \frac{120}{169} \qquad \text{et} \qquad \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

5.3 Équations trigonométriques

Solution 5.5

1. $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, \pi, 2\pi \}$.
2. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{2}$.
3. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \frac{3\pi}{2}$.
4. $x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, 2\pi \}$.
5. $x = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x = \pi$.
6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \}$.
7. $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ 0, \pi, 2\pi \}$.

8. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $x \in \{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \}$. Si celui-là est trop difficile graphiquement, écrire $\tan x = 1 \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$.

Solution 5.6

1. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \iff \left(x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin x = \sin -\frac{\pi}{4} \iff \left(x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan x = -1 \iff \tan x = \tan \frac{-\pi}{4} \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \tan x = \cos \frac{\pi}{6} \iff \left(x \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \tan x = \cos\frac{3\pi}{4} \iff \left(x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}\right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

Solution 5.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences successives suivantes

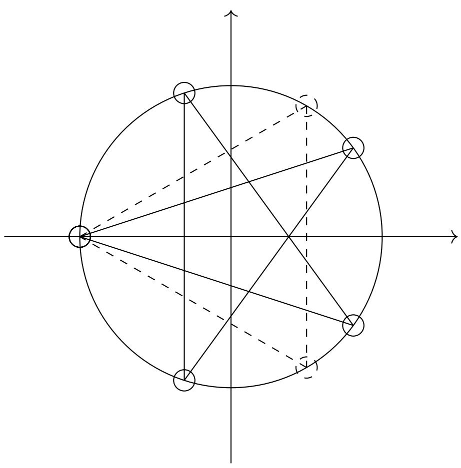
$$\begin{aligned}
\sin 2x = \cos\frac{x}{2} &\iff \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\\
&\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \pmod{2\pi}\\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

L'équation $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$ donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du pentagone régulier étoilé $M_0M_1M_2M_3M_4$ dont le premier sommet M_0 est l'image du nombre $\frac{\pi}{5}$.

ue Toute solution de l'équation $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$ a pour image l'un des sommets du pentagone précédent, mais réciproquement, tout nombre ayant pour image l'un des sommets de ce pentagone n'est pas nécessairement solution de l'équation ; par exemple, le nombre $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ dont l'image est M_3 n'est pas solution.

L'équation $x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}$ donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du triangle équilatéral $N_0N_1N_2$, le sommet N_0 étant l'image de la solution $\frac{\pi}{3}$.

ue Ici encore, il importe d'observer que tout nombre ayant pour image l'un des points N_0, N_1 ou N_2 n'est pas nécessairement solution de l'équation. Par exemple, le nombre π dont l'image est N_2 n'est pas solution.



Solution 5.8

Le polynôme $2X^2 - 5X + 2$ a deux racines : 2 et $1/2$. D'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0 &\iff \underbrace{\sin^2 x = 2}_{\text{Impossible}} \text{ ou } \sin^2 x = \frac{1}{2} \\
&\iff \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que l'on peut réduire l'écriture :

$$\boxed{2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}.}$$

Solution 5.9

Soit $x \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
1 - 2\sin^2 x \geq 0 \iff \sin^2 x \leq \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].
\end{aligned}$$

[1] Également, $1 - 2\sin^2 x = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. De plus,

$$1 + 2\cos x \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right];$$

avec égalité si, et seulement si $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$1-2\sin^2 x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1+2\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-2\sin^2 x}{1+2\cos x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Finalement,

$$\boxed{\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$$

Solution 5.10

[1] ⚠ sin n'est pas monotone, même sur $[0, 2\pi]$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2} \iff \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = m\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour que les deux équations de l'énoncé soient équivalente, on peut donc choisir par exemple, $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

2. On a donc

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{m}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Cette équation admets des solution si, et seulement si $\frac{m}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$, c'est-à-dire $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff \left(x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\right)\\ &\iff \left(x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}\right).\end{aligned}$$

Solution 5.11

5.4 Étude des fonctions trigonométriques

5.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Solution 5.12

Solutions à justifier!

1. Dom $f = \mathbb{R}$.

2. Dom $f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

3. Dom $f = \left[0, 2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[2 + \sqrt{3}, 4\right]$.

Solution 5.13

- On a $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\boxed{A = \frac{\pi}{3}}$.
- $\boxed{B = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ (on a toujours, pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$). [2]
- On a $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\boxed{C = \frac{\pi}{4}}$.
- On a $\cos\left(\frac{89\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{89\pi}{3} - 30\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ d'où $\boxed{D = \frac{\pi}{3}}$.

[2] On peut également calculer directement ! $\tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solution 5.14

Posons $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{3}$. On a alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1.$$

On ne peut pas déduire immédiatement que $a + b = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ car on ignore si $a + b \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Or $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. La fonction arctan étant strictement croissante, on a

$$0 < a = \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad 0 < b = \arctan \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi $0 \leq a + b < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(a+b) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$. Or la fonction tangente est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où

$$a + b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 5.15

Posons $a = \arcsin \frac{3}{5}$ et $b = \arcsin \frac{7}{25}$. L'abus de formules trigonométriques permet d'obtenir $\sin(2a + b) = 1$. De plus, les encadrements

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } 0 < \frac{7}{25} < \frac{1}{2}$$

permettent d'écrire (arcsin étant croissante)

$$\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 < b < \frac{\pi}{6}.$$

On a donc $\frac{\pi}{3} < 2a + b < \frac{2\pi}{3}$ et $\sin(2a + b) = 1$, d'où

$$2 \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{7}{25} = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 5.16

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car le sinus est défini sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$, ensemble de définition de l'arcsinus.

2. La fonction f est impaire. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$-x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x)) = -f(x).$$

   De plus, f est 2π-périodique, car pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$x \pm 2\pi \in \mathbb{R} \text{ et } f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x)) = f(x).$$

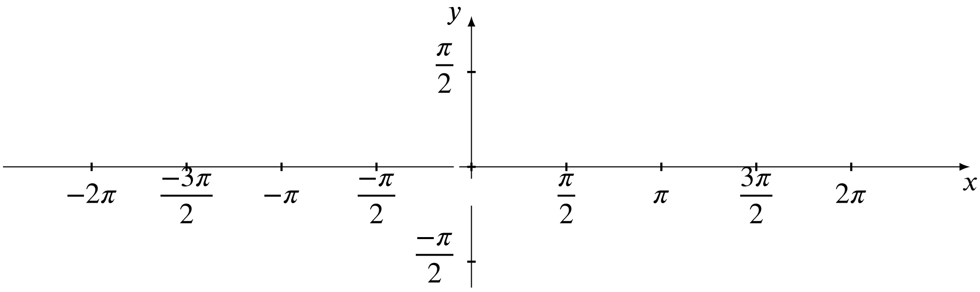
3. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $f(x) = \arcsin(\sin x) = x$.

4. Pour $x \in [\pi/2, \pi]$, on a

   $$\sin(\pi - x) = \sin(x) \text{ et } \pi - x \in [0, \pi/2],$$

   donc $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. On en déduit la courbe de f.

5. Il suffit de tracer la courbe de f sur l'intervalle $[0, \pi]$. Ensuite, on obtient alors la totalité de la courbe en effectuant une symétrie de centre O et des translations de vecteur $2k\pi\vec{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$.



6. • $f(x) = 0$ équivaut à $\arcsin(\sin x) = 0$ ou encore à $\sin(x) = 0$. Ainsi, l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$ est-il égal à $\pi\mathbb{Z}$.

• $f(x) = \frac{\pi}{3}$ équivaut à $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{3}$ ou encore à $\sin(x) = \sin(\pi/3)$. Ainsi, l'ensemble des x tels que $f(x) = \frac{\pi}{3}$ est-il égal à la réunion de $\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$ et de $\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$.

• $f(x) = \pi$ n'admet aucune solution puisque $\pi \notin [-\pi/2, \pi/2]$.

7. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_k$. Distinguons deux cas.

• Supposons k impair. On a alors $\sin(k\pi - x) = \sin(x)$ et puisque $k\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$f(x) = \arcsin\left(\sin(k\pi - x)\right) = k\pi - x.$$

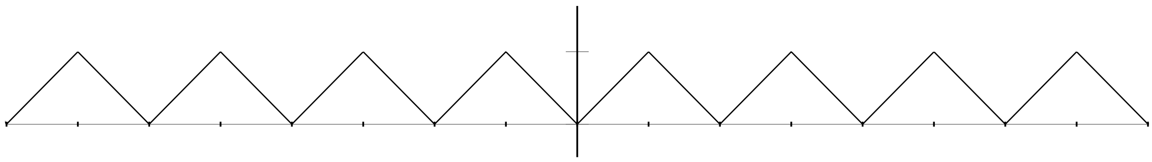
• Supposons k pair. On a alors $\sin(x - k\pi) = \sin(x)$ et puisque $x - k\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$f(x) = \arcsin\left(\sin(x - k\pi)\right) = x - k\pi.$$

Solution 5.17

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$. On complétera le tracé à l'aide d'une symétrie d'axe (Oy) et par des translations de vecteurs $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Or pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \arccos(\cos x) = x$.



Solution 5.18

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, π-périodique et impaire. De plus,

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], f(x) = x$$

Il ne reste plus qu'à tracer !

Solution 5.19

Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos\left(\arccos(x)\right) = x.$$

De plus, $\arccos(x) \in [0, \pi]$, on a donc

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arcsin(x).$$

Solution 5.19

Variation. Pour $x \in [-1,1]$, posons $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.

La fonction f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction f étant continue sur l'*intervalle* $[-1,1]$, elle est donc constante. D'où

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat.

Solution 5.20

Soit $x > 0$. On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{\cos\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\arctan\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1/x} = x.$$

De plus, $\frac{1}{x} > 0$, donc $0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$, d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2},$$

et finalement

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \arctan x.$$

Lorsque $x < 0$, on utilise l'imparité de l'arctangente:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\arctan -x - \arctan\frac{1}{-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Solution 5.20

Variation. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur *chacun* des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Puisque l'on a $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$ et $f(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$, on en déduit que pour tout réel x non nul,

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Solution 5.21

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ et

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \iff |x| \leq \sqrt{x^2+1} \iff x^2 \leq x^2 + 1.$$

Cette dernière assertion étant toujours vrai, on a toujours $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1,1]$.

La fonction arcsin étant définie sur $[-1,1]$, la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$. La fonction $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$$

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in]-1, 1[$ puisque

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \iff |x| < \sqrt{x^2+1} \iff x^2 < x^2 + 1. \iff 0 < 1.$$

La fonction $f = \arcsin \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+1}}} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1-x^2}} \frac{1}{\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan'(x)$. Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x) + k.$$

Puisque $f(0) = 0$ et $\arctan(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x).$$

2. Avec $x = \tan\varphi$ où $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\cos\varphi > 0$ et donc

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \tan\varphi \sqrt{\cos^2 x}^2 = \tan\varphi\cos\varphi = \sin\varphi.$$

Or $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$f(x) = \arcsin(\sin\varphi) = \varphi = \arctan x.$$

3. C'est la courbe de l'arctangente…

Solution 5.22

1. La fonction arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi(x) \in [-1, 1]$.

Méthode 1. Or

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 \leq 1 &\iff 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0 \\ &\iff (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

[3] De plus,

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 \geq -1 &\iff 4x^3 - 3x - 1 \geq 0 \\ &\iff (x-1)(4x^2 + 4x + 1) \geq 0 \\ &\iff (x-1)(2x+1)^2 \geq 0 \\ &\iff x \leq 1 \end{aligned}$$

[4] Finalement : $-1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$. Donc f est définie sur $[-1, 1]$.

[3] On a remarqué que -1 est une racine du polynôme $4X^3 - 3X + 1$; on peut donc mettre $(X + 1)$ en facteur.
[4] Idem avec $+1$ et le polynôme $4X^3 - 3X - 1$.

Méthode 2. Une étude rapide de φ donne le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$1/2$		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	

On constate que $\varphi(x) \in [-1, 1]$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$, d'où le résultat.

2. (a) Pour $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\sin(-\pi - u) = \sin(u) \text{ et } -\pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où $\boxed{\arcsin(\sin u) = -\pi - u}$.

(b) Pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\boxed{\arcsin(\sin u) = u}$.

(c) Pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, on a

$$\sin(\pi - u) = \sin(u) \text{ et } \pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où $\boxed{\arcsin(\sin u) = \pi - u}$.

3. [5]
Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a par la formule de De Moivre

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\end{aligned}$$

Par identification des parties imaginaires, on obtient

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

4. Soit $x \in E$ et $\theta = \arcsin x$. On a donc $x = \sin\theta$ et d'après la question précédente, $\sin 3\theta = 3x - 4x^3$, d'où $f(x) = \arcsin(\sin 3\theta)$. Remarquons également que $3\theta \in \left[-\frac{3}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi\right]$. Utilisons maintenant les résultats de la question **??**.

- Si $-1 \le x \le -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le -\frac{\pi}{6}$, [6] alors $-\frac{3\pi}{2} \le 3\theta \le -\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3\arcsin x}.$$

[5]On peut également utiliser la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}(\sin\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)\right)\end{aligned}$$

[6]Rappelons que arcsin est croissante.

- Si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq 3\theta \leq \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = 3\theta = \boxed{3\arcsin x}.$$

- [7] Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta \leq -\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3\arcsin x}.$$

5. Figure 5.1.

Solution 5.23 *Formule de Machin*

1. (a) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.

2. En notant $a = \arctan\frac{1}{5}$, on a successivement,

$$\begin{aligned}
\tan 2a &= \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12} \\
\tan 4a &= \frac{2\tan 2a}{1 - \tan^2 2a} = \frac{5/6}{1 - 25/144} = \frac{120}{119} \\
\tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{120/119 - 1}{1 + 1 \times 120/119} = \frac{1}{239}.
\end{aligned}$$

3. Puisque la fonction arctan est strictement croissante et $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$0 < a < \frac{\pi}{6}$$

et par conséquent

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 4a - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que

$$4a - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Solution 5.24

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$. Pour x au voisinage de $\pm\infty$,

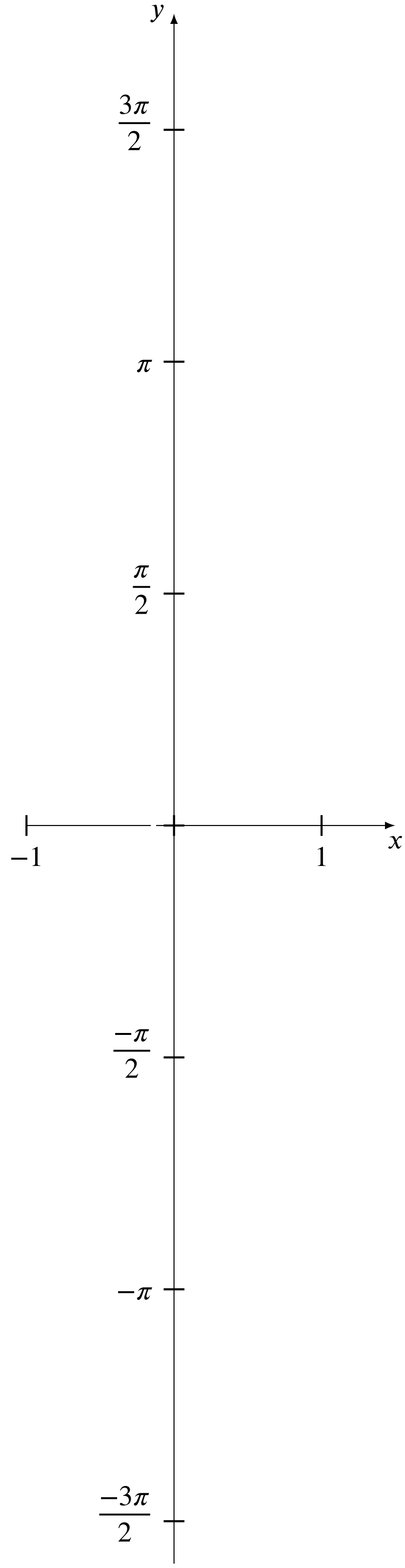
$$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1.$$

Or $\lim\limits_{x \to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$, donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

[7] Pour ce dernier cas, on peut également utiliser le fait que f est impaire avec le résultat du premier cas : $f(x) = -f(-x) = -(-\pi - 3\arcsin(-x)) = \pi - 3\arcsin(x)$.

Figure 5.1: $y = \arcsin(3x - 4x^3)$. En pointillés : $y = 3\arcsin x$.



La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = \frac{\pi}{4}$ est asymptote à la courbe de f (en $-\infty$ et $+\infty$).

De plus

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\underset{>}{x \to -1}} \frac{x}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{u \to \infty} \arctan u = +\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\underset{<}{x \to -1}} f(x) = +\frac{\pi}{2}.$$

De manière analogue

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\underset{<}{x \to -1}} \frac{x}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{u \to \infty} \arctan u = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\underset{<}{x \to -1}} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur D, donc f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} > 0.$$

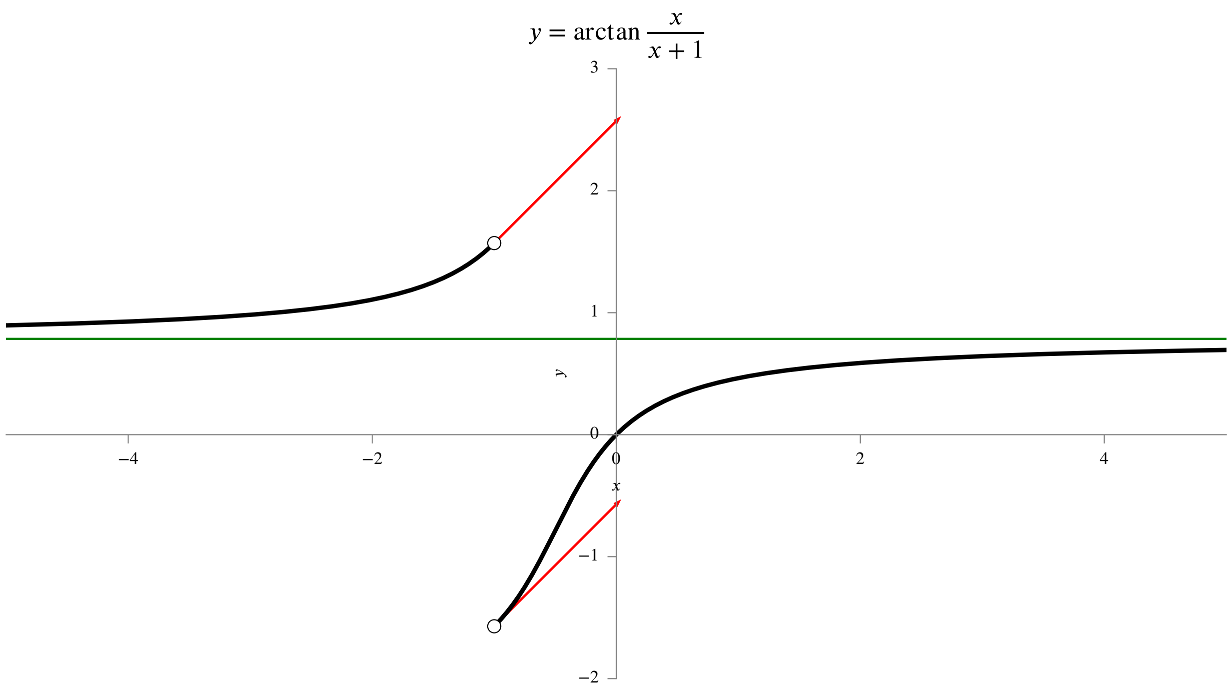
On remarque que

$$\lim\limits_{\underset{<}{x \to -1}} f'(x) = 1 \text{ et } \lim\limits_{\underset{>}{x \to -1}} f'(x) = 1.$$

La fonction f n'est pas prolongeable par continuité en -1, néanmoins, elle admet des limites finies à gauche et à droite de -1. Cela nous donne une information sur l'aspect de la courbe au voisinage de 1.

On en déduit le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$1 \,\Vert\, 1$	$+$	
Variations de f	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} \,\Vert\, -\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$



Solution 5.25