Calculs algébriques

Aperçu

1. Le symbole somme $\sum$
2. Sommes usuelles
3. Généralisation de la notation $\sum$
4. Le symbole produit $\prod$

1. Le symbole somme $\sum$
1.1 Sommes finies
1.2 Propriétés
1.3 Changement d'indices
1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

1. Le symbole somme $\sum$
1.1 Sommes finies
1.2 Propriétés
1.3 Changement d'indices
1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

D 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. La somme des termes de u_p à u_q est notée

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme $\sum_{k=p}^{q} u_k$ se note aussi $\sum_{p\leq k\leq q} u_k$.

Pour tous entiers naturels $p \leq q$, la somme $\sum_{k=p}^{q}$ comporte $q-p+1$ termes.

E 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premier entiers non nuls est

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

R L'indice k est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre indice. Il convient de ne jamais confondre k et n. Ainsi

$$\underbrace{n + n + n \cdots + n}_{n} = \sum_{k=1}^{n} n \neq \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

T 3 Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

___

___

T 3 Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

____

____

T 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 775 + 777$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

T 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 775 + 777$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

1. Le symbole somme $\sum$
1.1 Sommes finies
1.2 Propriétés
1.3 Changement d'indices
1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

P 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q < n$ trois entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k$$

P 6 *Pour tous nombres complexes λ et μ, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a*

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad \sum_{k=p}^{q}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$$

On dit que $\sum_{k=p}^{q}$ est linéaire.

On peut écrire directement,

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k + \mu \sum_{k=p}^{q} b_k.$$

P 7 *Pour toutes suites de nombres complexes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *et tous entiers naturels* $p \leq q$, *on a*

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Re}(a_k); \quad \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Im}(a_k); \quad \overline{\sum_{k=p}^{q} a_k} = \sum_{k=p}^{q} \overline{a_k}.$$

1. Le symbole somme $\sum$
1.1 Sommes finies
1.2 Propriétés
1.3 Changement d'indices
1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

La somme $S = 6 + 8 + 10 + \cdots + 26 + 28$ possède de nombreuses écritures

$$S = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13} (2k+2) = \sum_{k=4}^{15} (2k-2)$$

Plus généralement, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

M Effectuons le changement de variable $l = k + 1$ dans la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \{ 0, 1, \dots, n \} & \to & \{ 1, 2, \dots, n+1 \} \\ k & \mapsto & k+1 \end{array}$$

est une bijection : lorsque k décrit l'ensemble $\{ 0, 1, \dots, n \}$, $l = k + 1$ décrit l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n+1 \}$, d'où

$$S_n = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$$

L'indice l étant muet, on préfère écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$

Pour certain changement d'indice, il faut faire attention à l'ordre des bornes : $\sum_{l=n}^{0}$ n'a pas de sens si $0 < n$. On aura par exemple,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} u_{n-l}.$$

P 8 **Changements d'indices utiles (à savoir retrouver)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels.

1. *Par translation :*

$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+m} = \sum_{k'=p+m}^{q+m} u_{k'} = \sum_{k=p+m}^{q+m} u_k$$

   car $p \leq k \leq q$ équivaut à $p+m \leq k+m \leq q+m$.

2. *Par symétrie :*

$$\sum_{k=p}^{q} u_{p+q-k} = \sum_{k'=p}^{q} u_{k'} = \sum_{k=p}^{q} u_k$$

   car $p+q-k$ est le symétrique de k par rapport à $\frac{p+q}{2}$ et $p \leq k \leq q$ équivaut à $p \leq p+q-k \leq q$.

1. Le symbole somme $\sum$
1.1 Sommes finies
1.2 Propriétés
1.3 Changement d'indices
1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

P 9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

T 10 En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

P 9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

T 10 En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

2.1 Somme de puissances successives

2.2 Somme d'une progression arithmétique

2.3 Factorisation de $a^n - b^n$

2.4 Somme d'une progression géométrique

2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles
2.1 Somme de puissances successives
2.2 Somme d'une progression arithmétique
2.3 Factorisation de $a^n - b^n$
2.4 Somme d'une progression géométrique
2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

P 11 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = 2S + (n+1).$$

D'où $2S = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1-1)(n+1) = n(n+1)$. ∎

P 12 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esquisse de démonstration. On peut par exemple effectuer une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. ∎

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles
2.1 Somme de puissances successives
2.2 Somme d'une progression arithmétique
2.3 Factorisation de $a^n - b^n$
2.4 Somme d'une progression géométrique
2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

T 13 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $p \le q$ deux entiers naturels alors*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$$

Démonstration. Notons r la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 + kr = u_0 + pr + (k-p)r = u_p + (k-p)r$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} u_k &= \sum_{k=p}^{q} u_p + (k-p)r \\
&= (q-p+1)u_p + \sum_{k'=0}^{q-p} k'r && (k' = k-p) \\
&= (q-p+1)u_p + \frac{(q-p+1)(q-p)}{2}r \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_p + (q-p)r\right) \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_q\right).
\end{aligned}$$

∎

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

E 14 $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} k = (q-p+1)\frac{p+q}{2}.$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles
2.1 Somme de puissances successives
2.2 Somme d'une progression arithmétique
2.3 Factorisation de $a^n - b^n$
2.4 Somme d'une progression géométrique
2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

T 15 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

On peut également écrire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

T 16

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

T 16

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

Démonstration.

- $a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$
- $a^7 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6)$
- $a^{n+1} - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$.

∎

C 17 *Soit $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles
2.1 Somme de puissances successives
2.2 Somme d'une progression arithmétique
2.3 Factorisation de $a^n - b^n$
2.4 Somme d'une progression géométrique
2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

T 18 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r, $p \leq q$ deux entiers naturels alors*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - r^{q-p+1}}{1-r} & \textit{si } r \neq 1 \\ (q-p+1)u_p & \textit{si } r = 1 \end{cases}$$

T 19 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

M Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a\left(u_{n+1} - u_n\right) = av_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_n = v_0 \frac{1-a^n}{1-a} = \left((a-1)u_0 + b\right) \frac{1-a^n}{1-a} = u_0\left(a^n - 1\right) + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Par télescopage, on a également,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right)$$

et après simplification,

$$u_n = u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles
2.1 Somme de puissances successives
2.2 Somme d'une progression arithmétique
2.3 Factorisation de $a^n - b^n$
2.4 Somme d'une progression géométrique
2.5 Formule du binôme

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

D 20

- Soit n un entier ; on note $n!$, qui se lit **factorielle n**, l'entier défini par

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

On a donc $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$** le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p < 0$ ou $p > n$.

T 21

- Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

T 21

- Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

P 22

1. *Pour tout* $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
3. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ *(formule de Pascal).*
4. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p}$ *est un entier naturel.*

T 23 Formule du binôme de Newton

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut également écrire

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esquisse de démonstration. Démonstration par récurrence sur n. Pour l'hérédité, on utilise $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$. On développe et on effectue le changement de variable adéquat pour retrouver des termes en $a^{n+1-k}b^k$. On découpe les indices qui dépassent, on regroupe les autres grâce à la formule de Pascal. ∎

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

Si on rajoute une condition sous le symbole $\sum$, cela signifie qu'on se limite aux indices qui vérifient la condition.

E 24 La somme $u_{2p} + u_{2p+2} + \cdots + u_{2q-2} + u_{2q}$ peut être notée $\sum_{k=p}^{q} u_{2k}$, mais également

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2q} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{k=2p \\ k\in 2\mathbb{N}}}^{2q} u_k.$$

E 25

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 5}}^{10} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$$

N Soit $I = \{ i_1, \dots, i_n \}$ un ensemble fini et $u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ des complexes alors on note

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \cdots + u_{i_n}$$

E 26 Si $I = \{ 0, 2, \dots, 2n \}$,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ une famille de nombres complexes. Une telle famille peut être rangée dans un tableau que nous appellerons **matrice** à p lignes et q colonnes. Par exemple, dans le cas où $p=3$ et $q=5$:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{matrix}$$

T 27 Permutation des $\sum$

La somme des nombres $a_{i,j}$ est

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

Lorsque i et j décrivent le même ensemble d'indices, on écrit abréviativement

$$\sum_{1\leq i\,,\,j\leq n} a_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

T 28 *Soient* $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ *et* $(b_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ *deux familles finies de nombres complexes. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_i b_j.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

3.5 Sommations par partition

3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

T 29 *Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de nombres complexes*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

et

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

E 30 Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

T 31 *Si Ω est la réunion disjointe de plusieurs parties Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_n$, on a*

$$\sum_{i\in\Omega} x_i = \sum_{i\in\Omega_1} x_i + \sum_{i\in\Omega_2} x_i + \cdots + \sum_{i\in\Omega_n} x_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in\Omega_k} x_i.$$

E 32 Si $\Omega = [\![m, n]\!]^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} &= \sum_{m\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} + \sum_{m\leq j<i\leq n} x_{i,j}\\ &= \sum_{i=m}^{n} x_{i,i} + \sum_{m\leq i<j\leq n} x_{i,j} + \sum_{m\leq j<i\leq n} x_{i,j}.\end{aligned}$$

E 33 Découpage en diagonale

Il est possible de décrire une zone triangulaire par des parallèles aux diagonales. Par exemple (en faisant un dessin) :

$$\sum_{0 \le j \le i \le n} x_{i,j} = \sum_{d=0}^{n} \left(\sum_{\substack{0 \le j \le i \le n \\ i-j=d}} x_{i,j} \right) = \sum_{d=0}^{n} \left(\sum_{i=d}^{n} x_{i,i-d} \right) = \sum_{d=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-d} x_{j+d,j} \right).$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$
3.1 Somme d'une famille finie
3.2 Sommes doubles
3.3 Produit de deux sommes finies
3.4 Sommes triangulaires
3.5 Sommations par partition
3.6 Développement du carré ou du cube d'une somme

4. Le symbole produit $\prod$

P 34 *Soit* $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ *une famille finie de nombres complexes. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq p} a_i a_j = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ i\neq j}} a_i a_j = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq p} a_i a_j.$$

P 35 *Soit* $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ *une famille finie de nombres complexes. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^3 = \sum_{1\leq i,j,k\leq p} a_i a_j a_k = \sum_{i=1}^{p} a_i^3 + 3\sum_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ i\neq j}} a_i a_j^2 + 6\sum_{1\leq i<j<k\leq p} a_i a_j a_k.$$

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

4.1 Produits finis

1. Le symbole somme $\sum$

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation $\sum$

4. Le symbole produit $\prod$

4.1 Produits finis

D 36 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Le produit des termes u_p à u_q est notée

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

E 37

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \leq q$ deux entiers naturels, $\prod_{k=p}^{q} \alpha = \alpha^{q-p+1}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

P 38 *Pour tout nombre complexe λ, tout entier n, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a*

1. $$\prod_{k=p}^{q}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right).$$
2. $$\prod_{k=p}^{q}(\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k.$$
3. $$\prod_{k=p}^{q}(a_k^n) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^n.$$

P 39 **Simplification télescopique**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$