Corps des nombres complexes

Aperçu

1. Définition des nombres complexes
2. Conjugué, module
3. Racines d'un polynôme
4. Représentation trigonométrique
5. Nombres complexes et géométrie plane
6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul
7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes
8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$
9. Suites de nombres complexes

T

Définition de $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, muni de deux opérations $+$ et $.$, tel que

1. *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
2. *Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = i.i = -1$.*
3. *Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + i.y$ où x et y sont réels.*
4. *Les opérations $+$ et $.$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication usuelles.*
5. *Les règles habituelles d'usage de ces opérations restent valables dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire*
   - *$+$ et $.$ sont associatives et commutatives.*
   - *$.$ est distributive par rapport à $+$.*
   - *tout élément z de $\mathbb{C}$ possède un opposé, noté $-z$.*
   - *tout élément z de $\mathbb{C}$ différent de 0 possède un inverse, noté z^{-1}.*

On dit que $+$ et $.$ sont des **lois de compositions internes** et que $(\mathbb{C}, +, .)$ est un **corps**.
Afin d'alléger les notations, nous noterons les produits zw au lieu de $z.w$.

T

Calculer $(1 + 2i)(8 - 3i)$.

D

Soit z un nombre complexe, de la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- L'écriture $z = x + iy$ est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Les réels x et y sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. Ils sont notés respectivement $\Re\mathfrak{e}\, z$ et $\Im\mathfrak{m}\, z$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z = \Re\mathfrak{e}\, z + i\, \Im\mathfrak{m}\, z.$$
- Les nombres complexes de la forme iy, avec $y \in \mathbb{R}$, sont dits **imaginaires purs**. On note leur ensemble
$$i\mathbb{R} = \{\, iy \mid y \in \mathbb{R} \,\}.$$
Remarquons que 0 est un réel et un imaginaire pur.

P

Soient z et w deux nombres complexes, alors

$$z = w \iff \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, w \ \text{ et } \ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, w$$

Autrement dit, pour tous réels x, y, x', y', on a

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \ \text{ et } \ y = y'.$$

P **Règles de calcul dans $\mathbb{C}$**

Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$, avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

1. *La somme des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe*

$$z + w = (x + x') + i(y + y')$$

   autrement dit, $\mathfrak{Re}(z + w) = \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(w)$ et $\mathfrak{Im}(z + w) = \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(w)$.

2. *Le produit des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe*

$$z \times w = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

R Plus généralement, on peut écrire

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Re}(a_k); \qquad \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Im}(a_k);$$

R Pour tout *réel* λ et tout complexe $z = x + iy$, on a $\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$, d'où

$$\mathfrak{Re}\,(\lambda x) = \lambda\,\mathfrak{Re}(x) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\,(\lambda x) = \lambda\,\mathfrak{Im}(x).$$

P

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z \neq 0$ si, et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$; et dans ce cas l'inverse de z est donnée par

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On notera $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$.
Nous utiliserons la convention usuelle d'exponentiation : pour tout nombre complexe z, z^0 sera par convention égal à 1 ; pour tout $n \geq 1$, z^n désignera le nombre $z \cdot \cdots \cdot z$ (n fois). Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note z^{-n} le nombre complexe $(1/z)^n$.

E

$$i^{-1} = -i, \qquad i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1.$$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{Z}, \qquad i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

R

Règles d'exponentiation

Les propriétés des puissances sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$. Soient $z, w \in \mathbb{C}^\star$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. $z^n z^m = z^{m+n}$.
2. $(z^n)^m = z^{nm}$.
3. $z^n w^n = (zw)^n$.

On retrouve également les identités remarquables bien connues, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \text{(Binome de Newton)}$$

par exemple,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

T Développer et simplifier $(2+3i)^2$ et $(3-4i)^2$.

T Développer et simplifier $(2+3i)^7$.

T Développer et simplifier

$$s = (1+i)^7 + (1+i)^9 + (1+i)^{11} + \cdots + (1+i)^{17}.$$

Les nombres complexes sont nés de la résolution des équations algébriques. Par exemple, $z^2 = -1$ équivaut à $z^2 - i^2 = 0$, c'est-à-dire $(z - i)(z + i) = 0$. Arrivés à ce stade de la résolution nous appliquons la propriété ci-dessous pour affirmer que les seules solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont $\pm i$.

P *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ ou } w = 0.$$

T Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

D Le **conjugué** du complexe $z \in \mathbb{C}$ est le complexe $\overline{z} = \mathfrak{Re}\, z - i\, \mathfrak{Im}\, z$. En représentation algébrique

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overline{x + iy} = x - iy.$$

L *Pour tout nombre complexe z,*

$$z\overline{z} = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2,$$

en particulier $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

T Vérifier le lemme précédent.

P *Si $z, w \in \mathbb{C}$ et $w \neq 0$, alors*

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}.$$

Remarquez que $w\overline{w}$ est un réel.

T Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{2+3i}$ et $\dfrac{1-5i}{2+i}$.

P

Propriétés de la conjugaison

Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$ *est un réel.*
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$ *est un imaginaire pur.*
3. $\overline{\overline{z}} = z$.
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$.
6. *Si* $w \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
7. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

T

Soit $z = a + ib$ et $w = c + id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vérifier les propriétés précédentes.

R

Plus généralement, on peut écrire

$$\overline{\sum_{k=p}^{q} a_k} = \sum_{k=p}^{q} \overline{a_k}.$$

D

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}.$$

Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Rappelons que pour tout nombre réel a, on a

$$\sqrt{a^2 + 0} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Si z est réel, alors le module de z est égal à la valeur absolue de z, il n'y a donc pas conflit de notations.

P

Propriétés du module

Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

1. $z\overline{z} = |z|^2$.
2. $z = 0 \iff |z| = 0$.
3. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.
4. $|zw| = |z||w|$.
5. *Si* $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

C

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

T

Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes.

1. $\mathfrak{Re}\, z \leq |\mathfrak{Re}\, z| \leq |z|$,
2. $\mathfrak{Im}\, z \leq |\mathfrak{Im}\, z| \leq |z|$.
3. *L'inégalité triangulaire :*
$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$
de plus, il y a égalité si et seulement si $w = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda w$.
4. *Plus généralement, on a l'encadrement*
$$\Big||z| - |w|\Big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

D

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y), c'est-à-dire tel que

$$\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

On appelle **affixe** de $\vec{u}$ le complexe $z = x + iy$.
Réciproquement, $\vec{u}$ est appelé **(vecteur) image** du complexe z.

On notera de manière condensée $\vec{u}(z)$ le vecteur d'affixe z.

P

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z et w et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + w$.*
2. *Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz.*
3. *On a $\|\vec{u}\| = |z|$.*

D

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y), c'est-à-dire tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

On appelle **affixe** de M le complexe $z = x + iy$. Réciproquement, on dit que M est le **(point) image** du complexe z.

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M, alors l'abscisse de M est $\mathfrak{Re}(z)$ et son ordonnée est $\mathfrak{Im}(z)$.

P

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A l'affixe de A et z_B l'affixe de B. Alors, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

R **Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des vecteurs**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z et w. Puisque $|z+w| \leq |z| + |w|$, on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

R **Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des points**

Soit A, B et C trois points d'affixes z_A, z_B et z_C. Alors

$$AC = |z_C - z_A| = |z_C - z_B + z_B - z_A| \leq |z_C - z_B| + |z_B - z_A| = AB + BC$$

De plus, il y a égalité si et seulement si A, B et C sont alignés dans cet ordre.

R Soit A un point du plan d'affixe z_A et R un réel > 0.

- Le **cercle** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = R$.
- Le **disque ouvert** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| < R$.
- Le **disque fermé** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| \leq R$.

La distance de A à B est $\mathrm{d}(A, B) = AB = \left|z_B - z_A\right|$.

T Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie

$$|z - 1| = |z + 1 + 3i|.$$

T **d'Alembert-Gauß**

Tout polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Admise. ∎

R Si z est racine d'un polynôme à coefficient réel, alors $\overline{z}$ aussi.

M Si un polynôme P admet une racine $a \in \mathbb{C}$, il est alors possible de factoriser $(X-a)$ dans P. Par exemple, 3 est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ et on a

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-3)(X^2 - 3X + 2).$$

Pour déterminer cette factorisation, on peut par exemple utiliser des «coefficients inconnus»:

$$(X-3)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-3a)X^2 + (c-3b)X - 3c,$$

et «par identification»,

$$\left\{\begin{array}{rl} a & = 1 \\ b - 3a & = -6 \\ c - 3b & = 11 \\ -3c & = -6 \end{array}\right. \text{ et par substitution } \left\{\begin{array}{ll} a & = 1 \\ b & = -6 + 3 = -3 \\ c & = 11 - 9 = 2 \\ c & = 2 \quad \text{(pour vérification)} \end{array}\right.$$

On peut également «poser» la division (voir le chapitre «Polynômes»).

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & X - 3 \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

D On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine carrée** de $a \in \mathbb{C}$ si $z^2 = a$.

T *Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes opposées.*

M **Extraction des racines carrées sous forme algébrique**

On cherche les racines carrées d'un nombre complexe $w = u + iv$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 = w &\iff z^2 = w \text{ et } |z|^2 = |w| \\ &\iff (x+iy)^2 = u + iv \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{u^2+v^2} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2+v^2} \\ x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} . \end{aligned}$$

Des deux première lignes, on déduit x^2 et y^2, puis x et y au signe près. La troisième donne le signe du produit xy, donc les deux racines recherchées.

R On se gardera d'appliquer cette méthode dans le cas où w est un nombre réel. Les racines carrés de w sont alors évidentes, égales à $\pm\sqrt{w}$ si w est positif et à $\pm i\sqrt{|w|}$ si w est négatif.

T Déterminer les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique.

T

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes données par :*

$$\frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

  *On dit que ces nombres sont **racines simples** du trinôme $az^2 + bz + c$.*

- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution : $\dfrac{-b}{2a}$. On dit qu'elle est **racine double** du trinôme $az^2 + bz + c$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et notons δ une racine carrée de Δ. Puisque $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\iff z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \\ &\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a}. \end{aligned}$$

T Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.

T Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1-i)z - i = 0$.

P

Relations coefficients-racines

Soit z_1 et z_2 les deux solutions (éventuellement confondues) de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{E}$$

On a alors les relations

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

C

Soit S et P deux nombres complexes. Alors, les seuls nombres complexes z_1 et z_2, éventuellement égaux, qui vérifient

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= S \\ z_1 z_2 &= P \end{cases}$$

sont les deux racines du trinôme $z^2 - Sz + P$.

D On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \ \}$$

P *L'ensemble $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, c'est-à-dire*

1. $1 \in \mathbb{U}$.
2. $\forall (z, w) \in \mathbb{U}^2, zw \in \mathbb{U}$.
3. $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

R L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est un groupe commutatif.

P *Soit $z \in \mathbb{C}$,*

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists t \in \mathbb{R}, z = \cos(t) + i\sin(t).$$

D Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$$

T

1. $e^{i0} =$
2. $e^{i\pi} =$
3. $e^{i\frac{\pi}{2}} =$

P

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$.
2. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.
3. $\dfrac{1}{e^{ia}} = e^{-ia} = \overline{e^{ia}}$.

T

Démontrer ces propriétés.

T

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ia} = e^{ib} \iff \cos a = \cos b \ \ \textit{et} \ \ \sin a = \sin b \iff a \equiv b \pmod{2\pi}.$$

D Si z est un nombre complexe non nul, le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est-à-dire

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Une telle écriture est **une forme trigonométrique**. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé **un argument** de z.

R Géométriquement, si $z \in \mathbb{C}^\star$ est l'affixe d'un point M, alors un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$.

Pour mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, on commence par factoriser son module.

T Mettre sous forme trigonométrique.

1. $1 + i$.
2. $1 - i\sqrt{3}$.
3. $1 + 7i$.

P

Soient $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\varphi}$ deux nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique. Alors

$$z = w \iff \left(|z| = |w| \text{ et } \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}\right).$$

Ainsi, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et *les* mêmes arguments.

L *Soient z et w deux complexes non nuls dont on donne une forme trigonométrique*

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad w = |w|e^{i\varphi}.$$

Alors, on a les formes trigonométriques suivantes

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

N Pour dire que θ est *un* argument de z, on note

$$\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

La notation est cohérente en raison de la transitivité de la relation modulo 2π.

R Tout nombre complexe non nul possède un argument unique dans $]-\pi,\pi]$ (ou $[0,2\pi[$).

L *Soient z et w deux complexes non nuls dont on donne une forme trigonométrique*

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad w = |w|e^{i\varphi}.$$

Alors, on a les formes trigonométriques suivantes

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

C *Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :*

1. $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$
2. $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$
3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
4. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}$
5. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$.

P

Formules d'Euler

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{Euler}$$

P **Formule de (De) Moivre**

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\left(e^{it}\right)^n = e^{int}$, c'est-à-dire

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt).$$

T Soit $t \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(5t)$ et $\sin(5t)$ en un polynôme en $\sin(t)$ et $\cos(t)$. En déduire une expression sympathique de $\tan(5t)$.

P *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors*

$$\cos(nt) =$$

$$\textit{et } \sin(nt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).

Savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ est

Linéariser une expression trigonométrique, c'est la transformer en une combinaison linéaire de $\sin(at)$ et $\cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$ (il n'y a donc pas de carré, cube,...).
On utilise pour cela les formules d'Euler ainsi que la formule du binôme de Newton

T Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\sin^3(t)$.
2. Linéariser $\cos^4(t)$.

L *Soit $t \in \mathbb{R}$. On a*

$$1 + e^{it} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}} \qquad \textit{et} \qquad 1 - e^{it} = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}.$$

T Soit $(p, q) \in \mathbb{R}$. En factorisant «par l'angle moitié» $e^{ip} + e^{iq}$, retrouver les formules de Simpson.

On peut utiliser le même type d'idée que pour $1 + e^{it}$ pour des sommes plus générales. On peut calculer un grande variété de sommes trigonométriques de cette façon.

P

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) =$$

$$\textit{et} \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).
Le calcul de ces sommes est dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne me semble pas une exigence du programme. Par contre, vous devez savoir retrouver le résultat rapidement. ∎

D Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On note également $e^z = \exp(z)$.

P *Soient* $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\exp(z) \neq 0$.
2. $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
3. $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
4. $\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right)$.
5. $|\exp(z)| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$.
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, (\exp(z))^n = \exp(nz)$.

On dit que l'application $\exp : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$ est un morphisme de groupes.

P *Soient* $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$$\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = w + 2ik\pi.$$

M Résolution de l'équation $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $a \neq 0$, on écrit a sous forme trigonométrique $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \exp(z) = a &\iff e^x e^{iy} = |a|e^{i\theta} \\ &\iff \begin{cases} e^x = |a| \\ y \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln|a| + i(\theta + 2k\pi) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^z = a$ sont les complexes $\ln|a| + i(\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

T Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i$.

P

Interprétation géométrique du module et de l'argument

Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors :

1. $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z|$.
2. *si* $M \neq O$, *alors* $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$.

P

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A *et* z_B *les affixes respectives de* A *et* B.

1. $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.
2. *Si* $A \neq B$, $(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

C *Soit A, B, C et D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On note z_A, z_B, z_C et z_D leurs affixes respectives. Alors*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}.$$

En particulier,

- $(AB) \parallel (CD) \iff \arg \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
- $(AB) \perp (CD) \iff \arg \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$

D

Si $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ est une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, on appelle **représentation analytique complexe** de F l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' \end{array}$, qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de $M' = F(M)$.

E

1. La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe $(O\vec{e_1})$ est
$$z' = \overline{z}$$
2. La représentation complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est
$$z' = z + b$$
3. La représentation complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est
$$z' - \omega = \lambda(z - \omega) \text{ soit } z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega.$$
4. La représentation complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \text{ soit } z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

D On appelle **similitude directe** toute application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui admet une représentation complexe de la forme

$$z \mapsto az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

P *Soit s la similitude directe de représentation complexe*

$$z \mapsto az + b \textit{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

1. *Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe b.*
2. *Si $a \neq 1$, alors s possède un unique point fixe Ω[a]. Alors s est la composé de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$. On dit que s est la similitude directe de* ***centre*** *Ω, de* ***rapport*** *λ et d'****angle*** *θ.*

[a] Si ω désigne l'affixe de Ω, on a $\omega = a\omega + b$.

R Cette similitude directe conserve les angles orientés et multiplie les distances par $|a|$.

C

Racines carrées sous forme trigonométrique

Soit $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}$*, avec* θ *réel. Les racines carrées de* a *sont*

$$\sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \quad \textit{et} \quad -\sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,.$$

T

Déterminer les racines carrées de $w = 1 + i$ sous forme trigonométrique.
En déduire une expression de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

D Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième** de a est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = a.$$

Lorsque $n = 2$, on dit que z est une **racine carrée** de a. Lorsque $n = 3$, on dit que z est une **racine cubique** de a.

Certains nombres ont plus d'une racine n-ième. Par exemple, 5 et -5 sont tout deux racine carrée de 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, 0 possède une unique racine n-ième, c'est 0.

L *Si $a = |a|e^{i\theta}$, alors*

$$|a|^{1/n} e^{i\theta/n}$$

est une racine n-ième de a.

E

Déterminons les racines cubique de 1, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$z^3 = 1.$$

Il y a une solution apparente qui est $z = 1$. Ainsi,

$$z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2+z+1) = 0.$$

On trouve alors, trois solutions,

$$1 \qquad\qquad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième** de l'unité est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = 1.$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les racines n-ièmes de 1.

T

Racines n-ièmes de 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ième de l'unité. Ce sont les complexes $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$ c'est-à-dire les nombres complexes

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \textit{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

N On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

T *L'ensemble des racines n-ième de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif à n éléments.*

T Déterminer $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

P

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

1. $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.
2. $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \omega_k = \omega_1^k$.
3. *Si $n \geq 2$, alors la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.*

Par exemple, on a $1 + j + j^2 = 0$.

R

Les images des racines n-ièmes de l'unité ω_k sont réparties régulièrement sur le cercle unité.
Les images des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'affixe 1.

T *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Alors a admet exactement n racines n-ièmes. Si z_0 désigne l'une d'entre elles, alors les racines n-ièmes de a sont les complexes*

$$z_0 \times \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \text{où} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

M Si on écrit a sous forme trigonométrique : $a = |a|e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, les racines n-ième de a sont les complexes

$$z_k = |a|^{1/n} \exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

On peut également choisir $k \in [\![1, n]\!]$ ou parmi n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.

R Les points d'affixes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O, de côté $|z_1 - z_0| = 2\sqrt[n]{r} \sin \frac{\pi}{n}$.

T Résoudre l'équation $z^5 = -1 + i\sqrt{3}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^3$. On note

$$S_{a,b}(\mathbb{K}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$

P *Une suite géométrique de raison q est élément de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ si et seulement si q est zéro du polynôme du second degré $X^2 - aX - b$.*

D Le polynôme $X^2 - aX - b$ s'appelle le **polynôme caractéristique** de $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Il s'agit donc de discuter une équation du second degré. Pour écarter les trivialités, nous supposerons $(a, b) \neq (0, 0)$ et nous poserons $\Delta = a^2 + 4b$.

T

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ *et* $\left(u_n\right)$ *une suite complexe vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. *Si le polynôme* P *admet deux racines distinctes* q_1 *et* q_2, *alors*

$$\exists!\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. *Si le polynôme* P *admet une racine double* $q = a/2$, *alors*

$$\exists!\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)\, q^n.$$

E Résolvons la récurrence

$$u_0 = 1, u_1 = -1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2iu_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2iX - 1$, son discriminant est $\Delta = -4 + 4 = 0$. On est dans la seconde situation avec $q = i$ – on peut vérifier que $X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$. On a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)i^n,$$

λ et μ étant à déterminer ; mais par définition de (u_n),

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = (\lambda + \mu)i = -1 \end{cases} \text{d'où } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = i - 1 \end{cases};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n + ni)i^n.$$

T

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* $\left(u_n\right)$ *une suite réelle vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. *Si le polynôme* P *admet deux racines réelles* q_1 *et* q_2, *alors*

$$\exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. *Si le polynôme* P *admet une racine double* $q = a/2$, *alors*

$$\exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) \, q^n.$$

3. *Si le polynôme* P *admet deux racines complexes conjuguées* $q_1 = \varrho \, (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ *et* $q_2 = \varrho \, (\cos\alpha - i \sin\alpha)$, *alors*

$$\exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \varrho^n \cos(n\alpha) + \mu \varrho^n \sin(n\alpha).$$

E Soit u la suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, son discriminant est $\Delta = 5 > 0$ et ses racines sont $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a pour tout entier n,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

λ et μ étant à déterminer d'après les conditions initiales ;

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \text{d'où } \lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Remarquons (ce qui n'est pas évident sur la formule !) que u_n est un nombre entier et qu'il représente le nombre de façon de payer la somme de n € en utilisant uniquement des pièces de 1€ et 2€, avec ordre.

E Soit u la suite définie par

$$u_0 = 2, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4$, son discriminant est $\Delta = 0$ et la racine double est $q = 2$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n,$$

où λ et μ sont à trouver. Tous calculs faits, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2 - n)2^n.$$

E Soit u la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 4$, son discriminant est $-12 < 0$ et les racines complexes sont $-1 \pm i\sqrt{3}$. On a donc

$$\varrho^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4$$

$$\text{et } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\varrho} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n \cos\frac{2n\pi}{3} + \mu 2^n \sin\frac{2n\pi}{3},$$

où λ et μ sont à trouver avec

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = -\lambda + \mu\sqrt{3} = 2 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \sqrt{3} \end{cases};$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

D

Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne** sur E une application

$$\varphi : E \times E \to E.$$

La valeur $\varphi(x, y)$ de $\top$ pour un couple $(x, y) \in E \times E$ s'appelle le **composé** de x et de y pour cette loi. Le plus souvent, $\varphi(x, y)$ se notera $x \star y$ ou $x \cdot y$ ou xy ou $x \top y$ ou $x + y$ ou...

D

Soit E un ensemble et $\star$ une loi de composition interne sur E. On dit que $(E, \star)$[a] est un groupe si

1. La loi $\star$ est associative, *i.e.*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

2. Il existe un élément $e \in E$, appelé élément neutre de $\star$ tel que

$$\forall x \in E, x \star e = e \star x = x.$$

3. On a

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x \star x' = x' \star x = e.$$

On dit que x' est **le symétrique de x pour** $\star$.

[a] lire E muni de la loi $\star$

E

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe d'élément neutre 0 et le symétrique de x par $+$ est $-x$.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe d'élément neutre 0 et le symétrique de x par $+$ est $-x$.
3. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car, par exemple, 1 n'a pas de symétrique.

D Soit E un ensemble, $+$ et $\times$ deux lois de composition interne sur E. On dit que $(E, +, \times)$ est un corps si

1. $(E, +)$ est un groupe.
2. La loi $+$ est commutative, *i.e.*

   $$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

   On dit alors que $(E, +)$ est un groupe commutatif ou abélien. On note (souvent) 0 (ou 0_E) l'élément neutre de la loi $+$.
3. La loi $\times$ est commutative.
4. La loi $\times$ est associative.
5. Il existe un élément neutre pour la loi $\times$ (noté souvent 1 ou 1_E).
6. Tout $x \in E \setminus \{ 0_E \}$ admet un symétrique pour la loi $\times$.
7. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$, *i.e.*

   $$\forall (x, y, z) \in E^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

On définit ainsi sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$.

T

- $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *est un corps.*
- $(0, 0)$ *est l'élément neutre de* $+$, *noté* $0_{\mathbb{C}}$ *ou* 0.
- $(1, 0)$ *est l'élément neutre de* $\cdot$, *noté* $1_{\mathbb{C}}$ *ou* 1.
- *Tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *a pour symétrique par la loi* $+$ $(-x, -y)$ *que l'on note* $-(x, y)$.
- *Tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ *a pour symétrique par la loi* $\cdot$ $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

N $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se note $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ appelé **corps des nombres complexes**.

R En toute rigueur, $\mathbb{C}$ ne contient pas $\mathbb{R}$, mais on identifie l'ensemble $\mathbb{R}$ avec

$$\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2.$$

En ce sens, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

D On pose $i = (0, 1)$. Alors $i^2 = -1$.

1. Définition des nombres complexes
2. Conjugué, module
3. Racines d'un polynôme
4. Représentation trigonométrique
5. Nombres complexes et géométrie plane
6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul
7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes
8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$
9. Suites de nombres complexes

1. Définition des nombres complexes

2. Conjugué, module

3. Racines d'un polynôme

4. Représentation trigonométrique

5. Nombres complexes et géométrie plane

6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9. Suites de nombres complexes

1. Définition des nombres complexes
2. Conjugué, module
3. Racines d'un polynôme
4. Représentation trigonométrique
5. Nombres complexes et géométrie plane
6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul
7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes
8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$
9. Suites de nombres complexes

1. Définition des nombres complexes

2. Conjugué, module

3. Racines d'un polynôme

4. Représentation trigonométrique

5. Nombres complexes et géométrie plane

6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9. Suites de nombres complexes

D Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Dans ce cas, on note $f'(a) = \ell$. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est **dérivable sur I**.

P **Pont**

f est dérivable en a si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables en a. Dans ce cas

$$f'(a) = (\mathfrak{Re}(f))'(a) + i\,(\mathfrak{Im}(f))'(a).$$

C *On retrouve les théorèmes opératoires sur les dérivées.*

C *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si $f' = 0$.*

P *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $m = a + ib$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{mx}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = me^{mt}.$$

Démonstration. En exercice (déjà vu en début d'année). ∎

On retrouve souvent ce résultat en physique sous la forme

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}e^{i\omega x}}{\mathrm{d}x} = i\omega e^{i\omega x}.$$

Plus généralement, on démontre

P *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & e^{\varphi(x)} \end{array}$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \ f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

1. Définition des nombres complexes

2. Conjugué, module

3. Racines d'un polynôme

4. Représentation trigonométrique

5. Nombres complexes et géométrie plane

6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9. Suites de nombres complexes

1. Définition des nombres complexes

2. Conjugué, module

3. Racines d'un polynôme

4. Représentation trigonométrique

5. Nombres complexes et géométrie plane

6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9. Suites de nombres complexes

1. Définition des nombres complexes

2. Conjugué, module

3. Racines d'un polynôme

4. Représentation trigonométrique

5. Nombres complexes et géométrie plane

6. Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

7. Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

8. Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$

9. Suites de nombres complexes