Chapter 11 Dénombrement

11.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

11.2 Ensembles finis

Exercice 11.1 (*)

On considère un ensemble X de $n+1$ entiers distincts choisis dans $[\![1, 2n]\!]$. Démontrer que parmi les éléments de X, on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n+1$.

Solution 11.1

Les paires d'entiers dont la somme fait $2n+1$ sont

$$\{1, 2n\}, \{2, 2n-1\}, \{3, 2n-2\}, \dots, \{n, n+1\}.$$

Il y a n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ apparait dans une et une seule paire. D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, les $n+1$ éléments de X ne peuvent être dans des paires différentes. Il existe donc deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $n+1$.

Exercice 11.2 (**)

Soient $x_1, \dots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j distincts dans $[\![1, 13]\!]$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Solution 11.2

Exercice 11.3 (***)

On considère un ensemble E de 10 entiers différents pris dans l'ensemble $[\![1, 99]\!]$. Montrer qu'il existe deux parties non vides A et B de E, disjointes et de même somme.

Solution 11.3

Pour $X \subset E$, on note $s(X)$ la somme des éléments de X. On a

$$s(\emptyset) = 0 \leq s(X) \leq s(E) \leq 90 + 91 + \cdots + 99 = 945.$$

Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ parties non vides X de E. Le principe des tiroirs et des chaussettes permet d'affirmer qu'il existe deux parties distinctes de E, X et Y telles que $s(X) = s(Y)$.

On ne peut avoir $X \subsetneq Y$ car sinon $s(X) < s(Y)$. De même, $Y \subsetneq X$.

Posons $A = X \setminus Y$ et $B = Y \setminus X$. Ces deux parties sont donc non vides et disjointes. On peut réécrire X et Y sous la forme d'unions disjointes $X = (X \cap Y) \cup A$ et $Y = (X \cap Y) \cup B$. On a donc

$$s(X) = s(X \cap Y) + s(A) \quad \text{et} \quad s(Y) = s(X \cap Y) + s(B)$$

et donc $s(A) = s(B)$.

Exercice 11.4 (*)

À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Solution 11.4

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition.

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 11.5 (*)

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Solution 11.5

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne

$$\mathrm{card}(E) = 800, \quad \mathrm{card}(H) = 300, \quad \mathrm{card}(S) = 352, \quad \mathrm{card}(M) = 424,$$

$$\mathrm{card}(E) = 800, \quad \mathrm{card}(H) = 300, \quad \mathrm{card}(S) = 352, \quad \mathrm{card}(M) = 424,$$

$$\mathrm{card}(H \cap S) = 188, \quad \mathrm{card}(H \cap M) = 166, \quad \mathrm{card}(S \cap M) = 208, \quad \mathrm{card}(H \cap M \cap S) = 144.$$

$$\mathrm{card}(H \cap S) = 188, \quad \mathrm{card}(H \cap M) = 166, \quad \mathrm{card}(S \cap M) = 208, \quad \mathrm{card}(H \cap M \cap S) = 144.$$

On cherche $\mathrm{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S})$, où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. D'après les lois de Morgan (en notant $\bar{H} = E \setminus H, \ldots$):

$$\mathrm{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = \mathrm{card}\left(\overline{H \cup M \cup S}\right).$$

$$\mathrm{card}(H \cup M \cup S) = \mathrm{card}(H) + \mathrm{card}(M) + \mathrm{card}(S) \\ - \mathrm{card}(H \cap M) - \mathrm{card}(H \cap S) - \mathrm{card}(M \cap S) + \mathrm{card}(H \cap M \cap S).$$

On en déduit :

$$\mathrm{card}(H \cup M \cup S) = 658 \text{ et } \mathrm{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = 800 - 658 = 142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Exercice 11.6 (*)

Pour A, B deux parties de E on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer

$$\mathrm{card}\, A\Delta B = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B - 2\,\mathrm{card}\, A \cap B. \tag{1}$$

Exercice 11.7 (**)

Montrer que, dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Solution 11.7

Soit E un ensemble fini non vide. Fixons $a \in E$, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \begin{cases} A \cup \{ a \} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{ a \} & \text{si } a \in A. \end{cases} \end{array}$$

est une bijection (elle est sa propre réciproque). Deplus, l'image d'une partie A par φ est une partie contenant un élément en plus ou en moins, ainsi

- l'image d'une partie A de cardinal pair est une partie de cardinal impair,
- l'image d'une partie A de cardinal impair est une partie de cardinal pair.

L'application φ étant bijective, il y a donc autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinale impair.

11.3 Analyse combinatoire

Exercice 11.8 (***)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini à n éléments. Calculer

$$S = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\,(X \cap Y) \quad \text{et} \quad T = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\,(X \cup Y)\,.$$

Solution 11.8

On note ici $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E.

Lorsque X, Y parcourent $\mathcal{P}(E)$, il en est de même de $\bar{X}$ et de $\bar{Y}$, autrement dit

$$(X, Y) \mapsto (\bar{X}, Y), \quad (X, Y) \mapsto (X, \bar{Y}), \quad (X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y}),$$

sont des bijections de $(\mathcal{P}(E))^2$ dans lui même. Donc

$$\begin{aligned} S = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\,(X \cap Y) &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\left(\bar{X} \cap Y\right) \\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\left(X \cap \bar{Y}\right) = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right). \end{aligned}$$

Mais on a toujours l'union disjointe

$$E = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 4S &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\,(X \cap Y) + \mathrm{card}\left(\bar{X} \cap Y\right) + \mathrm{card}\left(X \cap \bar{Y}\right) + \mathrm{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right) \\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{card}\,(E) \\ &= n\,(2^n)^2 = n4^n. \end{aligned}$$

On en déduit que $S = n4^{n-1}$.

Pour le calcul de T, utiliser le complémentaire

$$\mathrm{card}\,(X \cup Y) = n - \mathrm{card}\left(\overline{X \cup Y}\right) = n - \mathrm{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right).$$

on trouve $T = 3n4^{n-1}$.

Exercice 11.9 (*)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de partitions de E formées de deux parties (A, B) de E.

Solution 11.9

Exercice 11.10 (**)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ (on dit que (A, B) est un recouvrement de E).

2. Calculer le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$.

Solution 11.10

Exercice 11.11 (**) *Convolution de Vandermonde*

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f\ :\ \begin{array}{rcl}\mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\\ X & \mapsto & (A\cap X, B\cap X)\end{array}.$$

1. À quelles conditions sur A et B a-t-on f surjective ? f injective ?

2. Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.

3. En déduire la formule de convolution de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}.$$

Solution 11.11 *Convolution de Vandermonde*

1. On remarque que si $X = A^c \cap B^c$, on a $f(X) = (\emptyset,\emptyset) = f(\emptyset)$. Si f est injective, on a nécessairement $A^c \cap B^c = \emptyset$, c'est-à-dire après passage au complémentaire (dans E) $A \cup B = E$. Réciproquement, si $A \cup B = E$, alors si $f(X_1) = f(X_2)$, on a

$$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2,$$

et donc f est injective.

Si f est surjective, il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$, on a donc $A \subset X$ et $A \cap B = \emptyset$. Réciproquement supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on pose $X = A' \cup B'$, alors

$$A' \cap A = A' \qquad A' \cap B = \emptyset \qquad B' \cap A = \emptyset \qquad B' \cap B = B',$$

et donc $f(X) = (A', B')$. L'application f est donc surjective.

Conclusion

- L'applicaiton f est injective si, et seulement si $A \cup B = E$.
- L'applicaiton f est surjective si, et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

2. Lorsque f est bijective, on a

$$f^{-1}\left(A', B'\right) = A' \cup B'.$$

3. Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs p et q. On pose $E = A \cup B$, et donc $\operatorname{card} E = p + q$.

Le nombre de parties à n éléments de E est $\binom{p+q}{n}$.

En utilisant la fonction f précédente, on constante que former une partie à n lément de E revient à choisir une partie A' à k éléments $(0 \leq k \leq n)$ de A et une partie B' à $n-k$ éléments de B. Il y a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, puis au total

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

possibilités. D'ou l'identité demandée.

Exercice 11.12 (*)

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Solution 11.12

Les parties de E qui contiennent un et un seul élément de A s'écrivent de manière unique

$$X = \{ a \} \cup Y$$

avec $a \in A$ et $Y \in \mathcal{P}(E \setminus A)$.

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix. Quelque-soit le choix de a, nous pouvons choisir 2^{n-p} ensembles dans $E \setminus A$ (de cardinal $n - p$).

Ainsi, le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Exercice 11.13 (*)

Déterminer le nombre de surjection de l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n, n+1 \}$ vers l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n \}$.

Solution 11.13

Exercice 11.14 (**) *Permutations*

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\implies$ $f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\implies$ $f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Solution 11.14 *Permutations*

Réponses à justifier:

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6$, $4^4 \times 12^8$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Exercice 11.15 (*)

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot OIGNON ?

Reprendre la question précédente, avec le mot OGNON[1].

Solution 11.15

Il s'agit de placer six lettres à six places dans le mot. Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre d'anagrammes serait égal au nombre de permutations de ces six lettres : 6!. Le mot comporte deux lettres répétées une fois : O et N. Une anagramme correspond donc à $2! \times 2!$ permutations des lettres : celles qui sans toucher aux places du G et du I, transposent les O entre eux ou les N entre eux.

Le nombre d'anagrammes cherché est donc égal à $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Pour OGNON, utilisons une autre méthode : il y a $\binom{5}{2}$ choix pour placer les deux O, il reste alors $\binom{3}{2}$ choix pour les deux N.

Le nombre d'anagrammes cherché est $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$.

[1]On notera le rôle de la réforme de l'orthographe dans la simplification des exercices de mathématiques.

Exercice 11.16 (*)

Combien d'anagrammes différentes peut-on composer avec les lettres du mot BALKANISATION ?

Solution 11.16

Le mot comporte 13 lettres, il y a donc 13! permutations de ces lettres. La lettre A est présente trois fois : pour une disposition de ces trois A on a 3! permutations.

Les lettres I et N sont présentes deux fois, à un mot correspond donc $3! \times 2! \times 2!$ permutations.

Le nombre d'anagrammes est égal à

$$\frac{13!}{3!2!2!} = 259459200.$$

Exercice 11.17 (*)

Combien d'anagrammes peut-on composer en utilisant toutes les lettres du mot FILOZOFI[2].

Solution 11.17

Le mot a 8 lettres, il y a $\binom{8}{2}$ choix pour placer les deux I, il reste $\binom{6}{2}$ choix pour les deux O, il reste $\binom{4}{2}$ choix pour les deux F, il reste deux places pour le L.

Nombre d'anagrammes :

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = \frac{8!6!4!}{6!2!4!2!2!2!} \times 2 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040.$$

Exercice 11.18 (**)

Dans un restaurant de Courseulles-sur-mer, trois convives ont à se partager sept douzaines de belons.

Combien y a-t-il de répartitions possibles des huîtres, en les distinguant, sachant que chacun doit en avoir au moins une ?

Solution 11.18

Il y a 3^{84} applications des huîtres dans les assiettes, dont 3 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Si on retire une assiette, une distribution des huîtres correspond alors à une application des 84 huîtres dans deux assiettes. Parmi ces applications, il y en a 2 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Il y a donc $2^{84} - 2$ de ces applications qui mettent au moins une huître dans chacune des deux assiettes. On a 3 manières de retirer une assiette, par conséquent il y a $3 \times (2^{84} - 2)$ distributions qui laissent exactement une assiette vide.

Il y a $3^{84} - 3 \times (2^{84} - 2) - 3 = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$ manières de répartir les 84 huîtres en ne laissant aucune assiette vide.

Remarque : on retrouve $\mathcal{S}(84, 3) = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$.

Exercice 11.19 (*)

Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast. Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut éventuellement, en plus de la confiture, les beurrer ?

Solution 11.19

Julie dispose de huit façons de tartiner chaque type de pain : quatre confitures sans beurre et quatre confitures avec beurre. On doit donc dénombrer les applications de l'ensemble $\{ \text{tartine}, \text{biscotte}, \text{toast} \}$ dans un ensemble de huit éléments : le nombre de possibilités différentes offertes à Julie est donc $8^3 = 512$.

Exercice 11.20 (*)

1. Combien d'équipes différentes de rugby à quinze peut-on former avec les vingt-deux joueurs d'une équipe de football américain ?

2. Combien d'équipes différentes de jeu à treize peut-on former avec une équipe de rugby à quinze ?

   (On ne tient pas compte de la place des joueurs.)

[2] Je suis en avance de quelques réformes.

Solution 11.20

1. Ce sont des combinaisons de 15 joueurs choisis parmi 22, il y a donc $\binom{22}{15} = 170544$ équipes différentes.

2. On prend 13 joueurs parmi 15 joueurs, il y a donc $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$ équipes différentes.

Exercice 11.21 (*)

Un club de football est composé de vingt joueurs dont trois gardiens de but. Combien d'équipes différentes de onze joueurs dont un gardien peut-on former ?

(On ne tient pas compte de la place des joueurs, sauf pour les gardiens qui ne peuvent jouer que dans les buts.)

Solution 11.21

Dénombrons d'abord le nombre de groupes de dix joueurs que l'on peut former avec les dix-sept joueurs autres que les gardiens : il y en a $\binom{17}{10} = 19448$. Chacun de ces groupes peut constituer une équipe avec chacun des trois gardiens.

Il y a donc $19448 \times 3 = 58344$ équipes possibles.

Exercice 11.22 (*)

Avant de pénétrer dans un magasin de porcelaines, l'éléphant doit chausser des pantoufles en vair prises parmi trois paires (une rose, une bleue, une jaune).

1. Combien a-t-il de manières de se chausser ?

2. Combien a-t-il de manières de se chausser, en prenant une pantoufle droite pour chaque patte droite et une pantoufle gauche pour chaque patte gauche ?

Solution 11.22

On note $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ le nombre de p-arrangements dans un ensemble à n éléments.

1. Toutes les pattes sont différentes, toutes les pantoufles sont différentes. Il y a donc $A_6^4 = 6{\times}5{\times}4{\times}3 = 360$ manières de chausser le pachyderme.

2. Il y a trois chaussons pour les deux pattes de droites et trois chaussons pour les deux pattes de gauches. Il y a $A_3^2 \times A_3^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ façons de chausser l'éléphant en respectant la droite et la gauche.

Exercice 11.23 (*)

Une société multinationale impose l'anglais comme langue interne à toutes ses filiales. Le siège social, situé à Bruxelles, emploie p Flamands et q Wallons.

Chaque matin, les employés se saluent deux par deux :

- en français lorsque les deux sont wallons,
- en néerlandais lorsque les deux sont flamands,
- en anglais lorsqu'il y a un Flamand et un Wallon.

1. Combien y a-t-il d'échanges en français ?

2. Combien y a-t-il d'échanges en néerlandais ?

3. Combien y a-t-il d'échanges en anglais ?

4. En déduire la relation
$$\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}.$$

Solution 11.23

1. Il y a autant d'échanges en français que de combinaisons de deux Wallons dans un ensemble de q Wallons, soit $\binom{q}{2}$.

2. Il y a autant d'échanges en néerlandais que de combinaisons de deux Flamands dans un ensemble de p Flamands, soit $\binom{p}{2}$.

3. Il y a autant d'échanges en anglais que de couples formés d'un Flamand et d'un Wallon, soit pq.

4. On a ainsi dénombré tous les échanges de politesses qui correspondent aux combinaisons de deux personnes parmi $p+q$. Il y en a $\binom{p+q}{2}$. On en déduit $\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}$.

Exercice 11.24 (*)

Anne-Sophie a n amis. Elle ne peut en inviter que p où $p < n-1$. Parmi ses amis, il y a Édouard et Marie-Josèphe. Édouard, attiré par Marie-Josèphe, demande à Sophie de les inviter ensemble à une soirée.

1. Combien de listes différentes d'invités peut-elle établir pour cette soirée ? (sans tenir compte de l'ordre)

   Marie-Josèphe a trouvé Édouard déplaisant à cette soirée. Anne-Sophie ne peut plus les inviter ensemble pour la soirée suivante.

2. Combien peut-elle établir de listes en invitant soit Marie-Josèphe, soit Édouard ?

3. Combien peut-elle établir de listes en n'invitant ni Marie-Josèphe, ni Édouard ?

4. En déduire la relation suivante, pour tout entier $n \geq 2$, et pour tout entier p tel que $2 \leq p \leq n-2$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}.$$

Solution 11.24

Exercice 11.25 (**)

Le portillon automatique du métro permet de faire passer une ou deux personnes à la fois.

Combien y a-t-il de manières différentes de faire passer une file de dix personnes ?

On fermera les yeux sur le côté hautement répréhensible du passage simultané de deux personnes.

Solution 11.25

- *Première méthode.*
  Soit i le nombre de groupes de 2 personnes qui passent en même temps. i varie entre 0 et 5. i étant fixé, le nombre de passges est égal à $10-i$: on doit dénombrer les manières de placer i groupes de 2 personnes parmi $10-i$ passages. Il s'agit donc de combinaisons : il y en a $\binom{10-i}{i}$. Comme i varie de 0 à 5, le nombre total de possibilités est égal à

$$\binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3}\binom{6}{4} + \binom{5}{5} = \sum_{i=0}^{5} \binom{10-i}{i} = 89.$$

- *Deuxième méthode.*
  Notons T_n le nombre de manières de faire passer n personnes. Au premier passage, il peut y avoir soit une personne, soit deux.

  - Premier cas : il reste $n-1$ personnes à faire passer de T_{n-1} manières différentes.
  - Deuxième cas : il en reste $n-2$ à faire passer de T_{n-2} manières différentes.

On obtient la relation $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$.

La suite (T_n) est la suite de Fibonacci. De proche en proche, on obtient

$$T_3 = 3, T_4 = 5, T_5 = 8, T_6 = 13, T_7 = 21, T_8 = 34, T_9 = 55, T_10 = 89.$$

Il y a donc 89 possibilités.

Exercice 11.26 (**)

Le sultan de Bagdad décide de partager équitablement ses np chameaux entre ses n fils.

1. Il donne p chameaux au premier fils, combien a-t-il de choix possibles?

Il donne p chameaux, pris parmi ceux qui restent, au deuxième fils, combien a-t-il de choix possibles?

Ainsi de suite... Il donne p chameaux, pris parmi ceux qui restent, au k-ième fils, combien a-t-il de choix possibles?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

2. Les chameaux étant alignés, il donne les p premiers au premier fils, il donne les p suivants au deuxième fils, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Combien y a-t-il de manières d'aligner les chameaux?

Combien d'alignements différents des chameaux correspondent à une même répartition entre les fils?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses n fils?

3. Déduire des questions précédentes la relation

$$\prod_{k=1}^{k=n} \binom{pk}{p} = \frac{(np)!}{(p!)^n}.$$

Le sultant possède aussi $n(n+1)$ ânes qu'il veut répartir entre ses fils proportionnellement à: n pour l'aîné, $(n-1)$ pour le deuxième... $(n-k+1)$ pour le k-ième... 2 pour l'avant-dernier et 1 pour le dernier.

4. Déterminer la méthode de répartition des ânes.

5. Combien a-t-il de répartitions différentes des ânes?

Solution 11.26

Exercice 11.27 (*)

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?

(b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?

(c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?

(d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

(a) Combien y-a-t-il de codes possibles?

(b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?

(c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Solution 11.27

1. (a) Il y a $9^3 = 9\times 9\times 9 = 729$ codes possibles.
   (b) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir $2, 4, 6, 8$). Il y a donc $9\times 9\times 4$ tels codes.
   (c) On va compter par différence. Il y a $8\times 8\times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9\times 9\times 9 - 8\times 8\times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
   (d) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3\times 8\times 8$ tels codes.
2. (a) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9\times 8\times 7$ choix possibles.
   (b) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8\times 7\times 5$ tels codes.
   (c) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8\times 7\times 3$.

Exercice 11.28 (*)
Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent

1. Un seul roi.
2. Aucun roi.
3. Au moins un roi.
4. Les 4 rois.
5. Que des piques.

Solution 11.28
Une main de 13 cartes s'identifie à une partie à 13 éléments de l'ensemble des 52 cartes (il y en a $\binom{52}{13}$).

1. On choisit le roi puis on choisit 12 cartes parmi 48, ce qui fait $4\times\binom{48}{12}$ mains possibles.
2. C'est le nombre de combinaisons de 13 cartes parmi 48. Il y a $\binom{48}{13}$ possibilités.
3. L'ensemble des mains contenants au moins un roi est le complémentaire le l'ensemble des mains ne contenant aucun roi. Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles. Il y a donc $\binom{52}{13}-\binom{52}{12}$ possibilités.
   On peut aussi dénombrer les mains avec exactement un roi, exactement deux rois, exactement trois rois, et exacteement quatre rois. On en déduit
   $$\binom{52}{13}-\binom{52}{12} = 4\binom{48}{12}+\binom{4}{2}\binom{48}{11}+\binom{4}{3}\binom{48}{10}+\binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$
4. Il n'y a qu'une seule possibilité de choisir quatre rois. Reste ensuite à choisir neux cartes parmi les 48 restantes. Il y a $\binom{48}{9}$ possibilités.
5. Une seule main ne contient que des piques.

Exercice 11.29 (**)
Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 52 cartes. Déterminer le nombre de mains que comportent

1. Exactement une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur).
2. Deux paires (mais pas un carré ni un brelan).
3. Un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur mais pas un full).
4. Un full (c'est-à-dire un brelan et une paire).

5. Un carré (c'est-à-dire quatre cartes de même hauteur).

6. Une couleur (c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur).

Solution 11.29

1. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ possibilités pour la hauteur de la paire et il faut choisir 2 cartes dans cette hauteur, soit $\binom{4}{2}$ possibilités. Pour les 3 cartes manquantes, il faut les choisir en sorte de ne pas reformer de paire, c'est-à-dire dans des hauteurs différentes, ce qui laisse $\binom{12}{3}$ choix. Et il faut choisir une couleur pour chacune de ces hauteurs. On trouve alors $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3$ mains avec exactement une paire.

2. Il faut choisir les hauteurs des 2 paires, ce qui fait $\binom{13}{2}$ possibilités. Il faut ensuite choisir les couleurs pour chaque paires, soit $\binom{4}{2}$ possibilités chacune. Enfin, reste à choisir la cinquième carte dans les 11 hauteurs restantes, soit 44 cartes possibles. Au total, il y a $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot 44$ mains contenant deux paires (sans carré, ni brelan).

3. Pour former un brelan, on choisit une hauteur puis 3 cartes dans cette hauteur. On complète la main par 2 cartes prises dans les 12 hauteurs restantes mais dans des hauteurs différentes, ce qui correspond à $\binom{12}{2} \times 4^2$ possibilités. Il y a alors $13 \times \binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2$ mains contenant des brelans.

4. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs pour le brelan, avec $\binom{4}{3}$ couleurs différentes. On complète la main avec une paire parmis le $12 = \binom{12}{1}$ hauteurs possibles, avec $\binom{4}{2}$ couleurs différentes. Au total, il y a $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ mains avec un full.

5. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs possibles pour le carré (avec $\binom{4}{4} = 1$ couleur(s) différente(s)). On complète la main avec une carte parmis les 48 restantes. Il y a donc $13 \cdot 48$ mains contenant un carré.

6. On choisit une couleur, puis 5 cartes dans cette couleur. Cela donne $4\binom{13}{5}$ mains possibles.

narque S'il on souhaite obtenir la probabilité d'obtenir une telle main, on divise le résultat par le nombre de mains possibles, c'est-à-dire $\binom{52}{5}$.

On trouve respectivement $\approx 42.257\%$, $\approx 4.754\%$, $\approx 2.113\%$, ≈ 0.144, $\approx 0.024\%$, 0.197%.

Question subsidiaire, avec un jeu de 32 cartes, quel ordre des mains devrait être retenu pour être cohérent avec les probabilités?

Exercice 11.30 (*)

Il faut ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques distincts, 6 livres de philosophie distincts et 2 livres de géographie distincts.

De combien de façons peut-on effectuer ce rangement dans les cas suivants :

1. Les livres doivent être groupés par matières.

2. Les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Solution 11.30

1. Pour ranger les 12 livres, je choisis l'ordre des 3 groupes de livres (3! choix possibles), puis pour chacun de ces choix, il y a 4! façoins de ranger les livres de mathématiques entre eux, puis 6! façons de ranger les livres de philosophie et 2! façons de ranger les livres de géographie. Donc $n_1 = 3!4!6!2!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsqu'ils doivent être groupés par matières.

2. Il y a 9 façons de choisir le nombre de livres rangés avant ceux de mathématiques (il peut y avoir $0, 1, \dots, 8$ livres placés avant ceux de mathématiques). Puis, pour chacun de ces choix, 4! façons de ranger les livres de mathématiques, puis 8! façons de ranger les autres livrers entre eux. Donc $n_2 = 9 \times 4!8!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsque les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Exercice 11.31 (**)

On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Solution 11.31

On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0, 0)$ à (p, q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du H est $\binom{p+q}{q}$. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc $\binom{p+q}{q}$ chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a $\binom{p+q}{q}$ choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{(p+q)-p} = \binom{p+q}{q}$.