♫ 12 Vocabulaire relatif aux applications

12.1 Définition ensembliste d'une application

12.2 Opérations sur les applications

12.3 Image directe et image réciproque

Exercice 12.4 (*)
Soit $f : A \to B$ une application, X_1 et X_2 deux parties de A. Montrer

1. $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

4. Montrer que l'inclusion réciproque, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$, est fausse en général.

Exercice 12.5 (*)
Soit $f : A \to B$ une application, Y_1 et Y_2 deux parties de B. Montrer

1. $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.

2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 12.6 (*)
Soient $f : E \to F$ et B une partie de F. Vrai ou Faux?

1. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

2. $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Exercice 12.7 (*)
Soient une application $f : A \to B$, X une partie de A et Y une partie de B. Montrer les assertions suivantes

1. $X \subset f^{-1}(f(X))$;

2. $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$.

Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 12.8 (**)
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. On considère une partie A de E et une partie B de F. Démontrer l'égalité

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 12.9 (***)
Étant donné une application f de E dans F, on désigne pas $\mathcal{S}$ la famille des parties X de E telle que

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

1. A étant une partie quelconque de E, démontrer que $f^{-1}(f(A))$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.

2. Démontrer que toute intersection et toute réunion d'ensembles de $\mathcal{S}$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.

3. X étant un ensemble de $\mathcal{S}$ et A une partie de E telle que X et A soient disjoints, démontrer que X et $f^{-1}(f(A))$ sont disjoints.

4. X_1 et X_2 étant deux ensembles de $\mathcal{S}$ tels que $X_1 \subset X_2$, démontrer que $X_2 \setminus X_1$ est un ensemble de $\mathcal{S}$.

Exercice 12.10 (**)
On définit la somme de deux parties E et F de $\mathbb{R}$ par

$$E + F = \{ x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F \}.$$

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. Vrai ou Faux?

1. $(f+g)(A) \subset f(A) + g(A)$.
2. $f(A) + g(A) \subset (f+g)(A)$.
3. $(f+g)^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) + g^{-1}(A)$.
4. $f^{-1}(A) + g^{-1}(A) \subset (f+g)^{-1}(A)$.

Exercice 12.11 (*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \}$ comme une image réciproque.

Exercice 12.12 (*)
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer

1. $f(2)$,
2. $f(\{ 2 \})$,
3. $f(\{ -1, 0, 1, 2 \})$,
4. $f^{-1}(4)$,
5. $f^{-1}(\{ 4 \})$,
6. $f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})$,
7. $f\left(f^{-1}(\{ -2, 0, 1, 4 \})\right)$,
8. $f^{-1}(f(\{ -1, 0, 1, 2 \}))$,
9. $f([1, 2])$,
10. $f([-1, 4[)$,
11. $f^{-1}(]1, 2])$,
12. $f^{-1}([-1, 4])$,
13. $f(\mathbb{R})$,
14. $f^{-1}(\mathbb{R})$,
15. $\operatorname{Im} f$.

Exercice 12.14 (*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f (sur $\mathbb{R}$).

2. Déterminer (graphiquement) $f([0, 2])$ et $f^{-1}([0, 2])$.

Exercice 12.15 (*)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - |1 - x| \end{array}$.

1. Esquisser le graphe de f.

2. Calculer $f(]0, 2[)$ et $f^{-1}(]0, 3])$.

Exercice 12.17 (**)

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $\varphi(\mathbb{R})$.

Exercice 12.19 (**)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \left(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3\right) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{ (0,0,0) \})$.

2. Soit $P = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b + 3c = 0 \right\}$. Déterminer $f^{-1}(P)$.

3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

4. Soit $\Delta = \{ (t,t,t) \mid t \in \mathbb{R} \}$. Déterminer $f(\Delta)$.

5. Soit $Q = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b + c = 0 \right\}$. Déterminer $f(Q)$.

Exercice 12.20 (**)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble

$$J = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 \right\}.$$

2. Que valent $f(J)$ et $f^{-1}(f(J))$?

12.4 Injection, surjection, bijection

Exercice 12.23 (*)

Soit f une bijection de E dans F, et A une partie de E telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. On appelle g la restriction de f à A.

1. L'application g est-elle injective ?

2. L'application g est-elle surjective ?

Exercice 12.24 (**)

Soient trois ensembles A,B,C et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que g ne l'est pas nécessairement.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective, puis montrer à l'aide d'un contre-exemple que f ne l'est pas nécessairement.

3. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective sans que ni g ni f ne le soit.

Exercice 12.25 (**)

Soit f une application de E dans E telle que

$$f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E .$$

Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 12.26 (**)

Soient A, B, C trois ensembles et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 12.27 (***)
Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est injective.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12.29 (***)
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 12.32 (***)
Soient E et F deux ensembles non vides, on considère une application $f : E \to F$.

1. (a) Soit A une partie de E, montrer l'inclusion

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

(b) Montrer que si A est une partie de E et f est injective, alors

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

(c) Réciproquement, on suppose

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)).$$

Montrer que l'application f est alors injective.

2. (a) Soit B une partie de F, montrer l'inclusion

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$

(b) Montrer que si B est une partie de E et f est surjective, alors

$$f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

(c) Réciproquement, on suppose

$$\forall B \in \mathcal{P}(E), f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

Montrer que l'application f est alors surjective.

Exercice 12.33 (**)
Soient une application $f : E \to F$ et deux parties $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer que

1. Si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$.

2. Si f est surjective, alors $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Exercice 12.34 (****)
Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 12.35 (***)
Soit f une application de E dans F et soit $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ définie par

$$\forall Y \in \mathcal{P}(F), g(Y) = f^{-1}(Y).$$

1. Montrer que g est injective si, et seulement si f est surjective.

2. Montrer que g est surjective si, et seulement si f est injective.

Exercice 12.36 (***)
Soient E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E. On note

$$[A, A\cup B] = \{\ X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X \subset A\cup B\ \} \qquad \text{et} \qquad [A\cap B, B] = \{\ Y \in \mathcal{P}(E) \mid A\cap B \subset Y \subset B\ \}.$$

On définit également

$$\begin{array}{rccc} f: & [A, A\cup B] & \to & [A\cap B, B] \\ & X & \mapsto & X\cap B \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g: & [A\cap B, B] & \to & [A, A\cup B] \\ & Y & \mapsto & Y\cup A \end{array}.$$

Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 12.37 (***)
Soient A et B deux partie d'un ensemble E. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B = E$.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B = \emptyset$.

Exercice 12.38 (*****) *Théorème de Cantor-Bernstein*
On se propose de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein

> Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications injectives. On note

- $h = g\circ f$,
- $R = E \setminus g(F)$,
- $W = \{\ M \in \mathcal{P}(E) \mid R\cup h(M) \subset M\ \}$,
- $A = \bigcap_{M\in W} M$.

1. (a) Vérifier que $E \in W$ et que $A \in W$.
   (b) Montrer
   $$\forall M \in W, R\cup h(M) \in W.$$

2. On note $B = \complement_E(A)$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$.
   (a) Vérifier que $R\cup h(A) = A$ et $B' = \complement_F\left(A'\right)$.
   (b) On considère les restriction de f et g
   $$f' : A \to A' \qquad \text{et} \qquad g' : B' \to B.$$
   Montrer que f' et g' sont bijectives, ainsi que l'application
   $$\begin{array}{rccc} \varphi: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f'(x) & \text{si } x\in A \\ \left(g'\right)^{-1}(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{array}.$$

Exercice 12.39 (*)

Donner, pour chacun des énoncés suivants, une formulation du type «l'application de ... vers ... qui à tout ... associe ... est (n'est pas) injective (surjective)».

1. Dans mon quartier, il y a deux personnes qui ont le même modèle de voiture.
2. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
3. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
4. Toute ville de France possède au moins une église.
5. Il y a des villes de France qui ont plusieurs églises.
6. Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée réelle.
7. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
8. On peut avoir $a+b=c+d$ sans que $a=c$ et $b=d$.

Exercices de révisions 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33,...

Exercice 12.40 (*)

Les applications suivantes sont-elles des injections,des surjections, des bijections ?

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
4. $\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
5. $\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+ & \to & \mathbb{Q}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
6. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
7. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
8. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
9. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
10. $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Exercice 12.41 (*)

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, montrer que f est bijective (en complétant éventuellement les $\boxed{?}$) et déterminer une expression explicite de sa bijection réciproque.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star, x \mapsto e^{x^3}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3+3$.
3. $f : \boxed{?} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{10-3x}$.
4. $f : \boxed{?} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \dfrac{4x-1}{2x+3}$.
5. $f : \boxed{?} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x+3)$.
6. $f : \mathbb{R} \to \boxed{?}, x \mapsto \dfrac{e^x}{1+2e^x}$.

Exercice 12.42 (**)

On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0, & n=0 \\ n-1, & n>0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer $g \circ f$.

2. Les applications f et g sont-elles bijectives ? Que dire de $f \circ g$?

Exercice 12.43 (**)
Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3. On veut maintenant montrer que si $g \circ f$ est injective, alors g n'est pas nécessairement injective. Donner une représentation sagittale d'un contre exemple.

4. Voici un autre contre exemple.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y^2 \end{array}.$$

Montrer que $g \circ f$ est injective mais que g n'est pas injective.

Exercice 12.44 (**)

1. Une application admet un point fixe s'il existe x tel que $f(x) = x$. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.

2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 12.45 (**)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que f est surjective mais n'est pas injective.

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, x+2y) \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y^2+1) \end{array}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

4. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

Exercice 12.46 (**)
Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$.

2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2+1 \end{array}$.

Exercice 12.47 (***)

Soit f et g définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}.$$

Montrer que f n'est pas injective mais que g l'est.

Exercice 12.48 (**)

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-3\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 12.49 (***)

Soit f la fonction de la variable complexe z définie par

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition E de f. Ainsi
$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{z^2+1} \end{array}.$$
2. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in E$
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
On donnera les solutions sous forme algébrique *et* sous forme trigonométrique.
3. Soit un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$. En fonction de ω, déterminer le nombre de solutions z dans E de l'équation
$$f(z) = \omega.$$
4. L'application f est-elle injective? Est-elle surjective?
5. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
6. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$.
7. On note g la restriction de f au disque ouvert D, de contre O et de rayon 1. Ainsi
$$g : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{z^2+1} \end{array} \quad \text{avec} \quad D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}.$$
   (a) Justifier que l'application g est bien définie.
   (b) Montrer que l'application g est injective.
   (c) L'application g est-elle surjective?

Exercice 12.50 (***)

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormal direct $(O, 1, 2)$.

Soit f la fonction qui à nombre complexe z associe, lorsque c'est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2i}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.
   (b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.

3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

4. Déterminer l'image $f(D)$ de D par f.

5. L'application f est-elle une surjection de D sur $\mathbb{C}$?

6. L'application f est-elle injective ?

Exercice 12.51 (***)

1. Démontrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{ -i \}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{ 1 \}$ et que la bijection réciproque est l'application $w \mapsto i\dfrac{1+w}{1-w}$.

2. On note $\mathcal{D}$ le disque unité ouvert et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré:

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \} \qquad \mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z > 0 \}.$$

   Démontrer *géométriquement* que $z \in \mathcal{H}$ si, et seulement si $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$. En déduire une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 12.55 (**)

Dans chacun des cas suivants

- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelle des applications f.
- Préciser l'ensemble image.
- Lorsque f est bijective, déterminer explicitement f^{-1}.
- Pour **4.**, **5.**, **6.**, **7.** : faire une représentation graphique.
  On pourra s'aider d'un logiciel, mais faire quelques études « à la main » ne fait pas de mal !
- Pour **8.** et **11.** : déterminer l'ensemble des points invariants et interpréter géométriquement ces applications.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$.

2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$.

3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{ -1, 1 \} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array}$.

4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |\sin x| \end{array}$.

5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$.

7. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$.

8. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$.

9. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + 3y, x + 2y) \end{array}$.

10. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y^2 + 1) \end{array}$.

11. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array}$.

12. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$.

Exercice 12.56 (**)

Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2y \end{array}$.

2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (1, x - y, y) \end{array}$.

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, 3x - 2y) \end{array}$.

4. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - y - z, x) \end{array}$.

Exercice 12.60 (***)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array}$.

1. On considère un élément $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{ (u, v) \})$. (Les notations sont-elles correctes ?)
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
4. Soit $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \right\}$ et φ la restriction de f à D. L'application φ est-elle injective ?

Exercice 12.62 (**)

On note f l'application

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[^2 & \to &]0, +\infty[\\ (x, y) & \mapsto & \frac{2x+3y}{x+y} \end{array}.$$

1. L'application f est-elle injective?
2. Déterminer son image.

Exercice 12.63 (***)

On note f l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(2x + y, x^2 + y\right) \end{array}.$$

1. L'application f est-elle injective?
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[\times\mathbb{R}$ sur son image (à préciser).

Exercice 12.64 (****)

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & 2^p(2q + 1) \end{array}.$$

1. Montrer, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, 2^p(2q + 1).$$

Que peut-on en déduire pour f ?

2. Prouver que f est une bijection.

3. Construire, à l'aide de f, une application bijective $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

4. On dispose maintenant d'une bijection g de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$. On définit alors l'application

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{N} \\ (a,b,c) & \mapsto & g\left(g(a,b),c\right) \end{array}.$$

(a) Montrer que h est bijective.

(b) Déterminer $h^{-1}(2042)$.

5. Construire une application bijective $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$.

Exercice 12.65 (**)

L'application suivante est-elle injective? surjective? bijective?

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b\sqrt{2} \end{array}.$$

Exercice 12.66 (**)

L'application suivante est-elle injective? surjective? bijective?

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1)-f(0) \end{array}.$$