Chapitre

2

Corps des nombres réels

- On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} .$$

- On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{ \dots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, -3, \dots \} .$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des nombres x représentés par la «fraction» $\frac{p}{q}$, avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \} \right\} .$$

Nous admettrons que, devant les insuffisances du corps $\mathbb{Q}$, on a su définir un nouveau corps appelé «corps des nombres réels» et noté $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps et encore muni d'une relation d'ordre prolongeant celle définie sur $\mathbb{Q}$. Nous allons en énumérer les propriétés et montrer qu'elles se retrouvent aussi dans d'autres ensembles.

2.1 Structures

Il y a tout d'abord un groupe de formule purement algébriques relatives aux deux opérations fondamentales ; elle s'appliquent aux nombres rationnels, aux nombres réels et aux nombres complexes et expriment que, muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est, comme $\mathbb{Q}$, un *corps* comme on dit en algèbre.

§1 Le corps des nombres réels

Axiome 1 L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une première loi de composition interne, l'**addition** notée « + », qui possède les propriétés suivantes:

- L'addition des nombres réels est **associative**

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x+y)+z = x+(y+z).$$

  On note cette somme $x+y+z$.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède un **élément neutre pour l'addition**. Cet élément est noté 0:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x+0 = 0+x = x.$$

- Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel x' tel que $x+x' = 0$ (x' est unique).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x+x' = 0.$$

  Le nombre x' est noté $-x$ et est appelé l'**opposé** de x.

- La loi de composition interne « + » est **commutative** dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y = y+x.$$

Axiome 2 L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une second loi de composition interne, la **multiplication**, notée ou bien «×» ou bien, plus simplement par juxtaposition. À tout couple (x,y) de nombres réels, cette loi fait correspondre le nombre réel $z = x \times y = xy$.

- La multiplications des nombres réels est **associative**.

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x(yz) = (xy)z = xyz.$$

- Le nombre réel 1, qui est différent de 0, est neutre pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x.$$

- Tout nombre réel *sauf* 0 admet un inverse pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R}, xx' = x'x = 1.$$

  x' est appelé l'**inverse** de x; on le note $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}.

- La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération **commutative**.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx.$$

Axiome 3 De plus, ces propriétés sont liées par la propriété de **distributivité** de la la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x.(y+z)=x.y+x.z \text{ et } (x+y).z=x.z+y.z.$$

L'ensemble de ces propriétés ce résume de la façon suivante:

Théorème 4 *Le triplet* $(\mathbb{R},+,\times)$ *est un **corps**.*

Notation On note $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des éléments qui admettent un inverse pour la multiplication. On a donc $\mathbb{R}^\star=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

§2 Soustraction, division

Définition 5 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels, l'opération «réciproque» de l'addition est définie par l'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+(-b)\end{array}.$$

On note cette loi de composition interne par le signe «$-$», et on l'appelle la **soustraction**.

Remarque

1. La loi «+» est associative. La loi «$-$» n'est pas associative.
2. La loi «+» est commutative. La loi «$-$» n'est pas commutative.
3. La loi «+» admet dans $\mathbb{R}$ un élément neutre. La loi «$-$» n'admet pas dans $\mathbb{R}$ d'élément neutre.

Définition 6 L'opération «réciproque» de la multiplication est la **division**, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$ par

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a\times\frac{1}{b}\end{array}.$$

Le **quotient** x de a par b est noté $x=\frac{a}{b}=a/b$.

§3 Une propriété importante

Théorème 7 *La nullité du produit de deux nombres réels implique celle d'un facteur au moins:*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy=0 \iff (x=0 \text{ ou } y=0)\,.$$

Plus généralement, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

Démonstration. Supposons $x = 0$, puisque $x = 0 = 0 + 0 = x + x$,

$$xy = (x + x)y = xy + xy$$

et donc

$$xy - (xy) = 0 = xy + xy - (xy) = xy.$$

Ainsi $xy = 0$. En supposant $y = 0$, on aurait démontré de même que $xy = 0$.

Réciproquement, supposons

$$x \neq 0 \text{ et } xy = 0;$$

le nombre x, n'étant pas nul, admet un inverse $\frac{1}{x}$; xy étant nul, on a

$$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \times 0 = 0;$$

le premier membre devient par associativité:

$$\left(\frac{1}{x} \times x\right) \times y = 1 \times y = y.$$

On a donc $y = 0$. En supposant $y \neq 0$ et $xy = 0$, on aurait démontré de même que $x = 0$. ∎

Exemple 8

Déterminer les réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On peut écrire

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\iff (x - 2)(x - 3) = 0 \\ &\iff \boxed{x - 2 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0} \end{aligned}$$

2.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

§1 Ordre total sur $\mathbb{R}$

Définition 9

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation notée $\leq$. Cette relation entre deux réel, $x \leq y$, ou $y \geq x$, se lit «x est inférieur ou égal à y», «x est au plus égal à y», «y est supérieur ou égal à x», «y est au moins égal à x».
Cette relation englobe le cas d'égalité; pour l'exclure on utilise la relation $x < y$ qui se lit «x est strictement inférieur à y», ou «y est strictement supérieur à x».

$$x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

On a donc

$$x \leq y \iff x < y \text{ ou } x = y.$$

Notation

$$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} \quad \mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \} \quad \mathbb{R}^\star = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \}$$
$$\mathbb{R}_+^\star = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} \quad \mathbb{R}_-^\star = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$$

Proposition 10 *On dit que la relation $\leq$ est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que*

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **réflexive**:*
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x.$$
- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **antisymétrique**:*
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y.$$
- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **transitive**:*
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z.$$
- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **totale**:*
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Test 11

- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle réflexive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle transitive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle totale?
- ☕ La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle antisymétrique?

§2 Compatibilité de l'ordre et des opérations

On a les trivialités fort utiles suivantes.

Proposition 12

1. *Pour comparer deux nombres réels, on peut étudier le signe de leur différence.*
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \iff y - x \geq 0.$$
2. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition.*
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \iff x + z \leq y + z.$$
3. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la multiplication par les réels* positifs.
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (z \geq 0 \text{ et } x \leq y) \implies xz \leq yz.$$

Nous n'insisterons jamais assez sur le piège tendu par l'assertion 12.3. En effet, on voit encore des gens affirmer

$$\frac{a}{b} \leq 1 \implies a \leq b,$$

sans prendre garde au signe de b.

Lemme 13

Soit $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \quad \textit{et} \quad x < y \iff x^2 < y^2.$$

En d'autre termes, on dit que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Démonstration. Si $x \leq y$, alors

$$\begin{aligned} x \times x &\leq x \times y && \because x \geq 0 \\ &\leq y \times y && \because y \geq 0. \end{aligned}$$

Si $x \leq y$ est faux, c'est-à-dire $y < x$, alors nécessairement $x > 0$ et

$$\begin{aligned} y \times y &\leq x \times y && \because y \geq 0 \\ &< x \times x && \because x > 0. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x^2 \leq y^2$ est faux.

Les assertion $(x \leq y)$ et $(x^2 \leq y^2)$ ont donc même valeur de vérité, on peut donc écrire

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2.$$

La seconde équivalence se prouve de manière analogue (ou plus rapidement avec un peu de logique). ∎

§3 Valeur absolue

Définition 14

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel

$$|x| = \max\{\, x, -x \,\} = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 15

Soient x, y des réels et $a \in \mathbb{R}_+$.

1. *On a $|x| \geq 0$; de plus $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$ *; en particulier $|-x| = |x|$.*
3. $|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$.
4. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
5. $|x| < a \iff -a < x < a$.
6. $\sqrt{x^2} = |x|$ *et* $|x|^2 = x^2$.
7. *Si $x \neq 0$, alors* $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$.
8. *Si $n \in \mathbb{N}$, alors* $|x^n| = |x|^n$.
9. $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
10. $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Il est important de savoir manipuler les inégalités avec valeurs absolues, par exemple

$$\begin{aligned} |x-a| \leq \varepsilon &\iff a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon \\ |x| \geq M &\iff x \geq M \text{ ou } x \leq -M. \end{aligned}$$

Remarque Géométriquement, $|x-a|$ représente la distance entre x et a sur la «droite des réels».

Proposition 16 **Inégalité triangulaire**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

De plus, $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si $xy \geq 0$.

Étant donné $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une récurrence immédiate montre que l'on a toujours l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Corollaire 17 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

§4 Axiome d'Archimède

Proposition 18 **Caractère archimédien de $\mathbb{R}$**
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \times a > b.$$

En particulier, pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

§5 Partie entière

Définition 19 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

On l'appelle **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Remarque

- La double inégalité $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ s'écrit également

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

- La partie entière de x est donc le plus grand entier inférieur ou égal à x. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor).$$

Exemples 20

1. $\lfloor \pi \rfloor =$	**3.** $\lfloor 12 \rfloor =$	**5.** $\lfloor -23.8 \rfloor =$
2. $\lfloor 1.345 \rfloor =$	**4.** $\lfloor -5 \rfloor =$	**6.** $\lfloor 11.8 \rfloor =$

La partie entière n'est ni «l'entier sans la virgule», ni «l'entier le plus proche».

Proposition 21

1. *La partie entière d'un réel est un entier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

2. *Les nombres entiers sont les seuls égaux à leurs parties entières*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

§6 Partie entière supérieure

Remarque En informatique, on utilise fréquemment la **partie entière supérieure**, notée $\lceil x \rceil$, caractérisée par

$$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

On a donc

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & : x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & : x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

§7 Valeur approchée d'un réel

Rappel Un nombre décimal est un nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\lfloor x \times 10^p \rfloor \leq x \times 10^p < \lfloor x \times 10^p \rfloor + 1$$

D'où, en divisant chaque membre par 10^p on trouve

$$\frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}.$$

Proposition 22

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut.*

2. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor + 1}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.*

On peut donc approcher n'importe quel nombre réel aussi près que l'on souhaite par des nombres décimaux. [1]

[1] En anticipant la notion de suite, on dit souvent que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Exemple 23

Le nombre de Neper $e = 2.7182818284590\ldots$ peut être successivement encadré par

$2 \leq e < 3$	valeurs approchées à 10^0 près par défaut et par excès.
$2.7 \leq e < 2.8$	valeurs approchées à 10^{-1} près par défaut et par excès.
$2.71 \leq e < 2.72$	valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut et par excès.
$2.718 \leq e < 2.719$	valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès.
$2.7182 \leq e < 2.7183$	valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès.

§8 Densité

Proposition 24

- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel, et même un nombre décimal z, tel que $x < z < y$.*
- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre irrationnel, tel que $x < z < y$.*

§9 Partie bornée

Définition 25

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un réel M est un **majorant** de A si
$$\forall x \in A, x \leq M.$$
On dit alors que la partie A est **majorée**.
- On dit qu'un réel m est un **minorant** de A si
$$\forall x \in A, m \leq x.$$
On dit alors que la partie A est **minorée**.
- Une partie majorée et minorée est dite **bornée**.

La valeur absolue permet de caractériser facilement les parties bornées de $\mathbb{R}$.

Proposition 26

Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si
$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

Exemple 27

- $\mathbb{R}$ ____________________.
- $[0, 1]$ ____.
- $]0, 1]$ ____ ____.

Remarque

- Lorsqu'il existe, le maximum (resp. minimum) de A est un majorant (resp. minorant) de A.
- Lorsque M majore A, tout réel $M' \geq M$ majore aussi A.
- Lorsque m minore A, tout réel $m' \leq m$ minore aussi A.

§10 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 28 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A ou le **maximum** de A si
$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, x \leq a \qquad .$$
Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.
- On dit que a est **le plus petit élément** de A ou le **minimum** de A si
$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, a \leq x \qquad .$$
Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément. Néanmoins, si il existe, c'est le **seul** élément de A ayant cette propriété ; car si on a aussi $x \preceq b$ pour tout $x \in A$, alors $a \preceq b$ et $b \preceq a$, d'où $b = a$.

Proposition 29 *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors*
$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \} .$$

2.3 Le premier degré

Voici quelques rappels au sujet de problèmes du premier degré.

§1 L'équation $ax + b = 0$

On considère l'équation $ax + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solution de cette équation.

- Si $a \neq 0$, l'équation a une solution unique $-b/a$.
$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$
On a $\mathcal{S} = \{ -b/a \}$.
- Si $a = 0$,
  - si $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution. On a $\mathcal{S} = \emptyset$.
  - si $b = 0$, tout nombre réel en est solution. On a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

§2 Système linéaire «2×2»

Commençons par deux équations très simples,

$$2x - y = 1 \tag{2.1}$$
$$x + y = 5. \tag{2.2}$$

Nous pouvons interpréter ce système *par lignes* ou *par colonnes*.

La première approche consiste à s'intéresser séparément à chaque équation (les *lignes*). L'équation $2x - y = 1$ est représentée par une droite dans le plan (Oxy). La seconde équation $x + y = 5$ est représentée par une seconde droite.

La seconde approche est de s'intéresser aux *vecteurs colonnes* du membre de gauche qui produisent le vecteur du membre de droite. Les deux équations s'écrivent sous forme d'un seule *équation vectorielle* :

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Le problème est alors de trouver la combinaison de vecteurs du membre de gauche qui produit le vecteur du membre de droite.

Les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 1)$ sont représentés en gras. Les inconnues sont les scalaires x et y qui multiplient les vecteurs colonne. L'idée est d'additionner 2 fois la colonne 1 et 3 fois la colonne 2. Géométriquement, on trouve un parallélogramme. De manière algébrique, cela produit le bon vecteur $(1, 5)$, second membre de notre équation. Ce qui confirme la solution $x = 2$, $y = 3$.

Définition 30

Le **déterminant du système**

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{array} \right.$$

est le réel $ad - bc$, noté $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Théorème 31

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{array} \right.$$

1. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, *alors le système admet une et une seule solution.*
2. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, *alors*
   - *le système admet aucune solution*
   - *ou bien le système admet une infinité de solutions.*

Exemples 32

Résoudre les systèmes suivants

1. $\left\{ \begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 4x & -3y & = -17 \end{array} \right.$.

2. $\begin{cases} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -18 \end{cases}$.

2.4 Puissances, racines

§1 Puissances entières

Définition 33

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fois}}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^\star$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Proposition 34

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{N}$:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p / a^q = a^{p-q}$;
3. *Si* $a \neq 0$, $a^{-p} = 1/a^p = (1/a)^p$;
4. $(a^p)^q = a^{pq}$;
5. $a^p b^p = (ab)^p$;
6. $a^p / b^p = (a/b)^p$;
7. $a > 1 \text{ et } p < q \implies a^p < a^q$;
8. $0 < a < 1 \text{ et } p < q \implies a^p > a^q$;
9. $p > 0 \text{ et } 0 < a < b \implies a^p < b^p$;
10. $p < 0 \text{ et } 0 < a < b \implies a^p > b^p$.

Ceci reste valable pour $a, b \in \mathbb{R}^\star$ et $p, q \in \mathbb{Z}$.

Proposition 35

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b| \iff (a = b \text{ ou } a = -b).$$

§2 Racines

Définition 36 Étant donnée $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un réel positif unique dont le carré est égale à a. On l'appelle la **racine carrée arithmétique** de a et on la note $\sqrt{a}$.

Proposition 37

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

§3 Second degrée

Dans les rappels ci-dessous, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$; ce nombre est appelé le **discriminant** du trinome.

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, (E) a une et une seule solution $\dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solutions.

Signe du trinome $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$:

x		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2b}$	
$ax^2 + bx + c$	$\mathrm{sgn}(a)$	0	$-\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$

- Si $\Delta = 0$:

x		$\frac{-b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	$\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$

- Si $\Delta < 0$: partout le signe de a.

Pour résumé: $ax^2 + bx + c$ a le signe de a, sauf éventuellement entre ses racines.

2.5 Congruences dans $\mathbb{R}$

Définition 38

Soit x, y, ω trois réels. L'écriture

$$x \equiv y \pmod{\omega}$$

signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\omega$. On dit que «x est **congru** à y **modulo** ω». Les réels x et y diffèrent donc d'un multiple entier de ω, ce que l'on peut écrire $x - y \in \omega\mathbb{Z}$.

Notation

Pour tous nombres réels x et ω, on note $x + \omega\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $x + k\omega$, où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit

$$x + \omega\mathbb{Z} = \{\, x + k\omega \mid k \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Cet ensemble est la **classe de congruence** de x modulo ω. Il contient notamment x lui-même.

Exemple 39

Soit $\omega = 1$. La classe de congruence de 0 modulo 1 n'est autre que $\mathbb{Z}$; celle de $\frac{1}{3}$ est l'ensemble suivant

$$\left\{ \dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots \right\}.$$

Exemple 40

L'ensemble des multiples entiers de π sera donc noté $\pi\mathbb{Z}$, celui des multiples entiers de 2π est noté $2\pi\mathbb{Z}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Proposition 41

Règles de calcul sur les congruences
Soient $x, x', y, y', \omega \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Si $x \equiv y \pmod{\omega}$ et $x' \equiv y' \pmod{\omega}$ alors $x + x' \equiv y + y' \pmod{\omega}$.*
2. *$x \equiv y \pmod{\omega}$ si et seulement si $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\omega}$.*
3. *Si $x \equiv y \pmod{n\omega}$ alors $x \equiv y \pmod{\omega}$*

Démonstration. **1.** On suppose que $x \equiv y \pmod{\omega}$ et $x' \equiv y' \pmod{\omega}$. Alors, il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $x = y + k\omega$ et $x' = y' + l\omega$, ainsi

$$x + x' = y + y' + (k + l)\omega \ \text{ et } \ k + l \in \mathbb{Z},$$

et donc $x + x' \equiv y + y' \pmod{\omega}$.

2. $\Longrightarrow$ On suppose que $x \equiv y \pmod{\omega}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\omega$, ainsi

$$\lambda x = \lambda y + k(\lambda\omega) \ \text{ et } \ k \in \mathbb{Z},$$

et donc $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\omega}$.

$\Longleftarrow$ La réciproque découle de l'implication précédente appliquée à $1/\lambda$.

3. On suppose que $x \equiv y \pmod{n\omega}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + kn\omega$, ainsi

$$x = y + (kn)\omega \text{ et } kn \in \mathbb{Z}$$

et donc $x \equiv y \pmod{\omega}$.

∎

Test 42

Déterminer l'unique nombre réel α appartenant à $[0, 2\pi[$ et congru à $-\frac{7}{15}\pi$ modulo 2π.

Test 43

L'assertion suivante est-elle vraie en général ?

$$x \equiv y \pmod{\varphi} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{\varphi}.$$

Test 44

Démêler le nécessaire et le suffisant entre les trois propositions suivantes

$$x \equiv y \pmod{\pi}, \quad x \equiv y \pmod{2\pi}, \quad x \equiv y \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$