Relations de comparaisons sur les fonctions

Aperçu

1. Comparaison des fonctions
2. Comparaison des applications usuelles
3. Calcul avec les relations de comparaisons
4. Cours sous forme d'exercices
5. La sympathique fonction $\ln$

X désigne une partie de $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à X (dans $\overline{\mathbb{R}}$), le cas où $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ n'étant pas exclu, bien au contraire.

1. Comparaison des fonctions
1.1 La relation $\mathcal{O}$
1.2 La relation o
1.3 La relation $\sim$
1.4 Caractérisation par le quotient

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

1. Comparaison des fonctions
1.1 La relation $\mathcal{O}$
1.2 La relation o
1.3 La relation $\sim$
1.4 Caractérisation par le quotient

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

D 1 Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie

- lorsque a est un point adhérent à X :

$$\exists \delta > 0, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas majorée et $a = +\infty$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas minorée et $a = -\infty$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

On dit que f est **dominée** par g, ou que g **domine** f, au voisinage de a.

On lit « f est grand $\mathcal{O}$ de g » au lieu de « f égale grand $\mathcal{O}$ de g ».

P 2 **Caractérisation par un produit de fonctions**

Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie qu'il existe un nombre $k \geq 0$ et un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap X, |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

On dit que f est ***dominée*** *par g, ou que g* ***domine*** *f, au voisinage de a.*

E 3 On a
$$10^{100}x^2 + 10^{100000}x = \mathcal{O}(x^2) \text{ quand } x \to +\infty$$
car pour $x \geq 1$ (d'où $x \leq x^2$), le premier membre est inférieur à kx^2 avec $k = 10^{100} + 10^{100000}$; ce nombre peut paraître «très grand» aux chétifs membres de l'espèce humaine, mais il est indépendant de x et l'on en demande pas plus.

E 4

1. $\sin^2 x = \mathcal{O}(\sin x)$ quand $x \to +\infty$.
2. $x \cos \frac{1}{x^5} = \mathcal{O}(x)$, quand $x \to 0$.

E 5 $f = \mathcal{O}_a(1)$ signifie que l'application f est bornée au voisinage de a

1. Comparaison des fonctions
1.1 La relation $\mathcal{O}$
1.2 La relation o
1.3 La relation $\sim$
1.4 Caractérisation par le quotient

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

D 6 Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation

$$f(x) = o(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie

- lorsque a est un point adhérent à X :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas majorée et $a = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas minorée et $a = -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On dit que f est **négligeable** devant g, ou que g est **prépondérante** sur f, au voisinage de a.

On lit « f est petit o de g».

P 7 *Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie qu'il existe un voisinage V de a et une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in X \cap V, f(x) = g(x)\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \omega(x) = 0.$$

On écrit également,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \qquad f = o_a(g) \qquad \text{et même} \qquad f \underset{a}{=} o(g).$$

E 8

1. $x^3 = o(x^4)$ au voisinage de $+\infty$.
2. $x^4 = o(x^3)$ au voisinage de 0.
3. $x^3 \cos \frac{1}{x^5} = o(x^2)$ au voisinage de 0.
4. $f = o_a(1)$ signifie que $\lim_a f = 0$. Plus généralement, on a $o_a(g) = g o_a(1)$.
5. Si f est bornée et $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, alors $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$.

1. Comparaison des fonctions
1.1 La relation $\mathcal{O}$
1.2 La relation o
1.3 La relation $\sim$
1.4 Caractérisation par le quotient

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

D 9 Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation

$$f(x) \sim g(x) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie

- lorsque a est un point adhérent à X :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas majorée et $a = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

- lorsque X n'est pas minorée et $a = -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de a**.

On écrit également $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

P 10 *Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation*

$$f(x) \sim g(x) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie qu'il existe un voisinage V de a et une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in X \cap V, f(x) = g(x)\,(1 + \omega(x)) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

T 11 *Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage du point a si, et seulement si*

$$f(x) - g(x) = o\,(g(x)) \quad \text{lorsque} \quad x \to a.$$

1. Comparaison des fonctions
1.1 La relation $\mathcal{O}$
1.2 La relation o
1.3 La relation $\sim$
1.4 Caractérisation par le quotient

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

T 12 *Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a. On a alors les équivalences suivantes*

1. *On a $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si, et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage du point a.*
2. *On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si, et seulement si*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
3. *On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x))$ si, et seulement si*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles
2.1 Croissance comparée
2.2 Quelques équivalents classiques

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles
2.1 Croissance comparée
2.2 Quelques équivalents classiques

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

P 13 Comparaison des applications usuelles

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $a > 0$ *fixés.*

- *Pour* x *au voisinage de* $+\infty$,

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\iff x^\alpha = o\left(x^\beta\right), & \\ a > 1 &\implies x^\alpha = o\left(a^x\right), & \text{en particulier } x^\alpha = o\left(e^x\right). \\ 0 < a < 1 &\implies a^x = o\left(x^\alpha\right), & \text{en particulier } e^{-x} = o\left(1/x^\alpha\right). \\ \alpha > 0 &\implies \ln x = o\left(x^\alpha\right). & \end{aligned}$$

- *Pour* x *au voisinage de* $0+$,

$$\begin{aligned} \alpha > \beta &\iff x^\alpha = o\left(x^\beta\right), \\ \beta > 0 &\implies |\ln(x)|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right). \end{aligned}$$

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles
2.1 Croissance comparée
2.2 Quelques équivalents classiques

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

P 14 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ fixé et pour x au voisinage de 0, on a*

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \qquad e^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$\sin(x) \sim x \qquad \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \qquad \tan(x) \sim x$$

$$\mathrm{sh}(x) \sim x \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2} \qquad \tanh(x) \sim x$$

$$\mathrm{Arcsin}(x) \sim x \qquad \mathrm{Arctan}(x) \sim x$$

Démonstration. On remarque $\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{x}{2}$ et $\mathrm{ch}\, x - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2 \frac{x}{2}$. ∎

R On peut réécrire ces résultats avec la notation de Landau (page **??**).

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$,
- $e^x = 1 + x + o(x)$,
- $\ln(1+x) = x + o(x)$,
- $\sin(x) = x + o(x)$,
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,
- $\tan(x) = x + o(x)$,
- $\mathrm{sh}(x) = x + o(x)$,
- $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,
- $\tanh(x) = x + o(x)$,
- $\mathrm{Arcsin}(x) = x + o(x)$,
- $\mathrm{Arctan}(x) = x + o(x)$.

P 15 *Pour x au voisinage de $+\infty$, on a*

$$\operatorname{ch} x \sim \operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2}.$$

Pour x au voisinage de $-\infty$, on a

$$\operatorname{ch} x \sim \frac{e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} x \sim -\frac{e^{-x}}{2}.$$

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

T 16 *Soient $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h$ des applications définies sur X.*

1. *La relation $\mathcal{O}$ est réflexive : $f = \mathcal{O}(f)$.*
2. *La relation $\mathcal{O}$ est transitive : $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(h) \implies f = \mathcal{O}(h)$.*
3. *Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $f = \mathcal{O}(\lambda g) \iff f = \mathcal{O}(g)$.*
4. *$f_1 = \mathcal{O}(g)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g) \implies f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g)$.*
5. *$f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g_2) \implies f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$.*
6. *Pour tout scalaire λ, $f = \mathcal{O}(g) \implies \lambda f = \mathcal{O}(g)$.*

Les $\mathcal{O}$ étant tous au voisinage du point a.

T 17 *Soient $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h$ des applications définies sur X.*

1. *Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g) \iff f = o(g)$.*
2. $f = o(g) \implies f = \mathcal{O}(g)$ *(la réciproque est fausse).*
3. $f = \mathcal{O}(g)$ *et* $g = o(h) \implies f = o(h)$.
4. $f = o(g)$ *et* $g = \mathcal{O}(h) \implies f = o(h)$.
5. $f = o(g)$ *et* $g = o(h) \implies f = o(h)$.
6. $f_1 = o(g)$ *et* $f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$.
7. $f_1 = o(g_1)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
   En particulier, $f_1 = o(g_1)$ *et* $f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
8. *Pour tout scalaire λ, $f = o(g) \implies \lambda f = o(g)$.*

Les o et $\mathcal{O}$ étant tous au voisinage du point a.

E 18 Quand $x \to +\infty$, $-3x^4 + 2x = o\left(2x^6\right)$ car

$$x^4 = o\left(x^6\right) \quad \text{et} \quad x = o\left(x^6\right).$$

Ainsi, $2x^6 - 3x^4 + 2x \sim 2x^6$.

E 19 Quand $x \to 0$, $2x^6 - 3x^4 = o(2x)$ car

$$x^6 = o(x) \quad \text{et} \quad x^4 = o(x).$$

Ainsi, $2x^6 - 3x^4 + 2x \sim 2x$.

T 20 *La relation $\underset{a}{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.*

$$f \underset{a}{\sim} f, \quad f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f, \quad f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h.$$

T 21 *Soient f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 des applications définies sur X.*

1. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ alors $f_1 = \mathcal{O}(f_2)$*
2. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $f_1 = \mathcal{O}(g)$, alors $f_2 = \mathcal{O}(g)$.*
3. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $f_1 = o(g)$, alors $f_2 = o(g)$.*
4. *Si $f = \mathcal{O}(g_1)$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f = \mathcal{O}(g_2)$.*
5. *Si $f = o(g_1)$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f = o(g_2)$.*

Les o, $\mathcal{O}$ et $\sim$ étant tous au voisinage du point a.

Autrement dit, dans les relations $f = \mathcal{O}(g)$ et $f = o(g)$, on peut toujours remplacer f et g par des fonctions équivalentes.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

3.1 Propriétés des relations de comparaisons

3.2 Notation de Landau

3.3 Propriétés conservées par équivalence

3.4 Opérations sur les équivalents

3.5 Changement de variable

3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

D 22 Soient f, g, φ des applications définies sur X.

- La notation $f = g + \mathcal{O}(\varphi)$ signifie $f - g = \mathcal{O}(\varphi)$.
- La notation $f = g + o(\varphi)$ signifie $f - g = o(\varphi)$.

Avec cette notation, il faut traiter les égalités avec $o(\varphi)$ «comme des congruences», par exemple $0 \equiv -2\pi \pmod{\pi}$ et $0 \equiv 10\pi \pmod{\pi}$, mais on a pas $-2\pi = 10\pi$ mais seulement $-2\pi \equiv 10\pi \pmod{\pi}$.

- Lorsque $x \to +\infty$, on a indifféremment

$$x^8 + \frac{4}{x} + \ln(x) = x^8 + \ln(x) + o(x), \quad x^8 + \frac{4}{x} + \ln(x) = x^8 + \cos(x) + o(x).$$

  Ici chaque $o(x)$ désigne une application négligeable devant x, mais elles sont distinctes. On n'a pas $\ln(x) = \cos(x)$!

- Au voisinage de $x = 0$, on a bien $1 + x^2 = 1 - x^2 + o(x)$ et $1 + x^2 = 1 + 3x^2 + o(x)$. On peut écrire $1 - x^2 + o(x) = 1 + 3x^2 + o(x)$ et donc :

$$-4x^2 = 1 - x^2 - (1 + 3x^2) = o(x) - o(x) = o(x) \text{ et non } -4x^2 = \cdots = 0.$$

E 23 Multiplions membres à membres les relations

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3), \qquad \sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$$

valable pour $x \to 0$.

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (1 + x + x^2/2)(x - x^3/6) + (1 + x + x^2/2)\mathcal{O}(x^5) + (x - x^3/6)\mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^3)\mathcal{O}(x^5) \\ &= x + x^2 + x^3/3 - x^4/6 - x^5/12 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^5) + \cdots \mathcal{O}(x^8); \end{aligned}$$

dans ces calculs, on a utilisé le fait que $x^a\mathcal{O}(x^b) = \mathcal{O}(x^{a+b})$, cas particulier de 16, mais comme $x^n = \mathcal{O}(x^4)$ pour $n \geq 4$, il reste

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4);$$

on ne peut rien tirer de plus précis des relations initiales.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

T 24 *On suppose que* $f \underset{a}{\sim} g$*, alors* f *et* g *ont même signe au voisinage de* a*.*

T 25 *On suppose que* $f \underset{a}{\sim} g$*, et que* g *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *lorsque* $x \to a$*, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}^\star$. En considérant ℓ comme une application constante $\neq 0$

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Ce résultat est bien sûr *totalement faux* avec $\ell = 0$.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

T 26 *Soient f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 des applications définies sur X.*

1. $f \sim g \implies f = \mathcal{O}(g)$.
2. $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2 \implies f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
3. $f \sim g \implies \forall n \in \mathbb{N}, f^n \sim g^n$.
4. *Si f_2 et g_2 ne s'annulent pas,*

$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \implies \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}.$$

5. *Si f et g sont à valeurs strictement positives et si $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha.$$

Les $\mathcal{O}$ et $\sim$ étant tous au voisinage du point a.

Par contre, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, on a pas en général $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

E 27 Considérons le rapport

$$\frac{x^2 - x + \ln x}{x^2 - (\ln x)^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Au numérateur x et $\ln x$ sont $o(x^2)$, de sorte qu'il est $\sim x^2$. Au dénominateur, $\ln x$ est $o(x)$, donc $(\ln x)^2$ est $o(x^2)$, de sorte que le dénominateur aussi est $\sim x^2$. La fraction considérée tend donc vers 1 lorsque $x \to +\infty$.

E 28 Comme on l'a déjà noté quelque part, un polynôme est, à l'infini, équivalent à son terme de plus haut degré ; une fraction rationnelle est donc équivalente, toujours en l'infini, au quotient des termes de plus haut degré de ses deux facteurs.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

T 29 **Composition à droite**

Soit f et g des applications de X dans $\mathbb{R}$ et $u : A \to X$, telle que $\lim_{x\to a} u(x) = b$.

1. *si $f = \mathcal{O}_b(g)$ alors*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\left(g(u(x))\right).$$
2. *si $f = o_b(g)$ alors*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{=} o\left(g(u(x))\right).$$
3. *si $f \underset{b}{\sim} g$,*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x)).$$

M **On peut toujours se ramener 0**

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} g(a+h),$$
$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} g(x) \iff f(1/h) \underset{h\to 0+}{\sim} g(1/h).$$

E 30 Lorsque $x \to 1^-$,

$$f(x) = \arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$$

E 31 Lorsque $x \to +\infty$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} \sim \frac{1}{x^2}$$

R On n'a pas le droit de composer un équivalent (ou un $\mathcal{O}$ ou o) par la gauche !

- Au voisinage de $+\infty$, $x \sim x+1$ mais $e^x \nsim e^{x+1}$ car

$$\frac{e^x}{e^{x+1}} = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Au voisinage de 0, $1+x^2 \sim 1+x$ mais $\ln(1+x) \nsim \ln(1+x^2)$. En effet

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \text{ et } \ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

P 32 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une extrémité de I, f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, et (u_n) une suite d'éléments de I. On suppose*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \qquad \text{et} \qquad f(x) \sim g(x) \text{ lorsque } x \to \ell.$$

Alors

$$f(u_n) \sim g(u_n) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

C 33 Quelques équivalents classiques

Soit (u_n) *une suite de limite nulle. Alors* [1]

1. $\sin(u_n) \sim u_n$,
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$,
3. $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
4. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
5. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Par contre, la relation $u_n \sim v_n$ n'entraîne pas $f(u_n) \sim f(v_n)$ comme le montre l'exemple

$$n+1 \sim n \text{ et } e^{n+1} \nsim e^n \quad \text{car} \quad \frac{e^{n+1}}{e^n} \longrightarrow e \neq 1.$$

[1] ⚠ Ces équivalents sont généralement faux sans l'hypothèse $u_n \to 0$.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons
3.1 Propriétés des relations de comparaisons
3.2 Notation de Landau
3.3 Propriétés conservées par équivalence
3.4 Opérations sur les équivalents
3.5 Changement de variable
3.6 Obtention d'un équivalent par encadrement

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction ln

T 34 *Soient f, g, h des application définies sur X. Si les fonctions réelles f, g, h vérifient*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

pour x au voisinage de a, et si

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$$

alors $g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.

1. Comparaison des fonctions

2. Comparaison des applications usuelles

3. Calcul avec les relations de comparaisons

4. Cours sous forme d'exercices

5. La sympathique fonction $\ln$

T 35 *Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a. On a alors les équivalences suivantes*

1. *On a $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si, et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage du point a.*
2. *On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si, et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3. *On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x))$ si, et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dans la suite, on suppose que les fonction considérées ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a.

1. On suppose que $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$ au voisinage de a. Montrer que $f_1 + f_2 = O(g)$ au voisinage de a.
2. Même question avec o.
3. Montrer que $f \sim_a g$ si, et seulement si $f - g = o(g)$ au voisinage de a.
4. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim_a g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$. Que dire de $\lim_{x\to a} f(x)$?
5. On suppose que $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$. Montrer que $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$ et $f_1/f_2 \sim_a g_1/g_2$.
6. Montrer sur un contre-exemple que $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ n'entraine par $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$ en général.
7. On suppose que $f \sim_a g$ au voisinage de a. Montrer que f et g ont même signe au voisinage de a.
8. Classer les fonctions suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes, au voisinage de $+\infty$.

$$x \mapsto e^{2x} \qquad x \mapsto e^{x^2} \qquad x \mapsto e^x \qquad x \mapsto \ln(x) \qquad x \mapsto x \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x \ln x.$$

9. Classer les fonctions suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes, au voisinage de 0 à droite.

$$x \mapsto x \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto x \ln(x).$$

10. Montrer que, au voisinage de 0,

$$\sin(\alpha x) \sim \alpha x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

11. Trouver un équivalent simple de
    - 11.1 $\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ au voisinage de 0 ($\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$).
    - 11.2 $\dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}$ au voisinage de $3/2$, $-3/2$, $+\infty$.
    - 11.3 $\dfrac{3x^2 + x\cos x - 7}{4x^3 - 11x^2 \sin x + \sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$ et 0.

1. Comparaison des fonctions
2. Comparaison des applications usuelles
3. Calcul avec les relations de comparaisons
4. Cours sous forme d'exercices
5. La sympathique fonction $\ln$

P 36 *Soit u et v deux fonctions à valeurs strictement positives sur X.*
On suppose $u(x) \underset{x\to a}{\sim} v(x)$ et

$$\lim_{x\to a} v(x) = 0 \ \textit{ou} \ \lim_{x\to a} v(x) = +\infty.$$

Alors on a

$$\ln u(x) \underset{x\to a}{\sim} \ln v(x).$$

Démonstration. Pour $x \in X$ au voisinage de a,

$$\ln(v(x)) = \ln\left(u(x)\frac{v(x)}{u(x)})\right) = \ln(u(x)) + \ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)$$

Comme u et v ne s'annulent pas, $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$. Or $\lim\limits_{x\to a} \ln u(x) = \pm\infty$, il est alors clair que

$$\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)})\right) \underset{x\to a}{=} o(\ln(u(x)))$$

et donc

$$\ln u(x) \underset{x\to a}{\sim} \ln v(x).$$