Chapter 34 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Exercice 34.1

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $y'(t) - \dfrac{1}{1+t^2} y(t) = 0$, sur $I = \mathbb{R}$.
2. $(t^2-1)y'(t) + ty(t) = 0$, sur $I =]-1, 1[$.
3. $\cos(t)y'(t) - \sin(t)y(t) = 0$, sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 34.2

Soit l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2\sin x. \tag{E}$$

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).
3. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie $h(0) = 1$.

Exercice 34.3

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{3}{2t} y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \in]0, +\infty[. \tag{E}$$

Exercice 34.4

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante, avec condition initiale

$$xy' - 2y = x^2 \ln x \quad \text{et} \quad y(\mathrm{e}) = 0. \tag{1}$$

Exercice 34.5

Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln(x)} y(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}. \tag{E}$$

Exercice 34.6

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1. $ty'(t) - 2y(t) = t^3 e^t$ sur $]0, +\infty[$.
2. $ty'(t) - y(t) = \ln t$.
3. $2y'(t) + ty(t) = t^3$.

Exercice 34.7

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = \sqrt{1+t^2}. \qquad (E)$$

1. Déterminer la solution $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette équation (E) telle que $f_m(1) = \sqrt{2}m$.

2. Écrire une équation de la tangente T_m au point A de coordonnées $(1, \sqrt{2}m)$, à Γ_m la courbe représentative de f_m.

3. Prouver que lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, toutes ces tangentes T_m sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 34.8

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$t^2y'(t) - y(t) = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. On note I l'un des intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Résoudre E sur I.

2. Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 34.9

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) - 2y(t) = 2e^{-2|t|}. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre E sur $]-\infty, 0[$.

2. Résoudre E sur $]0, +\infty[$.

3. Déterminer les solutions de E sur $\mathbb{R}$. Sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$? Sont-elles deux fois dérivables ?

4. Trouver la solution particulière de E qui est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34.10

Résoudre l'équation différentielle

$$\sqrt{|x|}y' - y = x \qquad \text{(E)}$$

dans chacun des intervalles $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

Montrer qu'il existe une et une seule fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est solution dans $\mathbb{R}$ entier de l'équation.

Exercice 34.11 *Recherche de solutions maximales*

Résoudre, chercher les solutions maximales (c'est-à-dire celles qu'on ne peut pas prolonger en d'autres solutions) et tracer les courbes intégrales des équations différentielles suivantes

1. $t^2y'(t) + ty(t) = 1$;

2. $\sin(t)y'(t) - 2y(t)\cos(t) = 0$;

3. $|t|y'(t) + y(t) = t^2$;

4. $y'(t)\sin(t)\cos(t) - y(t) + 1 = 0$;

5. $t(t^2+1)y'(t) + 2y(t) = t^2$.

Exercice 34.12

On cherche à résoudre sur $I =]0, 1[$ l'équation différentielle

$$te^{y(t)}y'(t) - 2e^{y(t)} = -t^2. \tag{E}$$

1. Montrer que si y est solution de (E), alors $w : t \mapsto e^{y(t)}$ est solution de l'équation différentielle

$$tw'(t) - 2w(t) = -t^2. \tag{E'}$$

2. Résoudre (E') sur $]0, 1[$.

3. Résoudre (E) sur $]0, 1[$.

Exercice 34.13

Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle du premier ordre non linéaire

$$y' = a|y|. \tag{E}$$

On considère une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Quel est le sens de variation de f ?

2. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que f est à valeurs > 0.

3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer par un raisonnement analogue que f est à valeurs < 0.

4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.