Isométries vectorielles

Aperçu

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\langle *, * \rangle$ son produit scalaire associé.

D 1 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On dit que u est une **isométrie vectorielle** de E si u conserve la norme

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

L'ensemble des isométrie vectorielle de E est noté $\mathbf{O}(E)$.

P 2 *Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.*

Démonstration. Pour $x \in E$, si $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. L'application u est injective $(\ker u = \{ 0_E \})$, et par suite u est un automorphisme de l'espace vectoriel E car E est de dimension finie. ∎

On dit aussi qu'une isométrie vectorielle est un **automorphisme orthogonal**.

Voici différentes caractérisations des isométries vectorielles.

T 3 *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire*

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

2. *u est une isométrie vectorielle.*
3. *L'image de toute base orthonormale de E par u est une base orthonormale de E.*
4. *Il existe une base orthonormale de E dont l'image par u est une base orthonormale de E.*

Démonstration. ▶ $1 \implies 2$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|.$$

▶ $2 \implies 3$.
Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. L'image par u de cette base, notée $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$, est une base de E car u est un automorphisme.
Soit x un vecteur de E, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{E}'$. On a

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n)\|^2 \\ &= \|u(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\|^2 && \because u \text{ est linéaire} \\ &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|^2 && \because u \text{ conserve la norme} \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 && \because \mathcal{E} \text{ est une base orthonormale.} \end{aligned}$$

On retrouve pour $\mathcal{E}'$ une des caractérisations des bases orthonormales.

▶ $3 \implies 4$. Trivial. Il suffit de justifier que E admet une base orthonormale, ce qui a été prouvé au chapitre précédent.

∎

- $4 \implies 1$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ soit aussi une base orthonormale. Cela assure déjà que u est un automorphisme ; montrons qu'il conserve le produit scalaire. Soient x et y des vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ relativement à la base $\mathcal{E}$. On a

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\rangle.$$

Or

$$\langle u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \delta_{i,j} = y_i.$$

Donc

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle.$$

∎

Une autre démonstration utile. L'implication $2 \implies 1$ peut se montrer directement à l'aide d'une formule de polarisation:

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\
&= \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

∎

T 4 Soit u une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Montrer que u est une isométrie vectorielle de E.

Démonstration. ∎

E 5 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que la symétrie orthogonale s_F est une isométrie vectorielle. Soit x un vecteur de E ; il se décompose sous la forme $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$; alors $s_F(x) = y - z$. On vérifie

$$\left\|s_F(x)\right\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2$$

grâce à l'orthogonalité de y et de z. Donc s_F est une isométrie vectorielle de E.

Réciproquement,

P 6 *Toute symétrie qui est une isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.*

⚠ Néanmoins, les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries vectorielles (sauf Id_E qui est le seul à être un automorphisme).

D 7 Soient F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons F stable par u, c'est-à-dire tel que $u(F) \subset F$. On appelle **endomorphisme induit** par u sur F, l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Cette notion n'a de sens que dans le cas où F est un sous-espace vectoriel stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F se note parfois, abusivement, $u|_F$ au lieu de $u|_F^F$.

R Si u est un automorphisme, alors $\dim u(F) = \dim F$, si bien que dès que F est stable par u, il est en fait *invariant* : $u(F) = F$.

Si u est une isométrie vectorielle, u est compatible avec la relation d'orthogonalité

$$u(x) \perp u(y) \iff x \perp y.$$

Plus généralement, on a le

T 8 *Soit u une isométrie vectorielle de E.*

1. *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Si $A \perp B$, alors $u(A) \perp u(B)$.*
2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on a $u(F)^{\perp} = u\left(F^{\perp}\right)$.*
3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.*

Démonstration.

1. Soient $x \in u(A)$ et $y \in u(B)$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = u(a)$ et $y = u(b)$. Puisque A et B sont orthogonaux, on a
$$\langle x, y\rangle = \langle u(a), u(b)\rangle = \langle a, b\rangle = 0.$$
D'où $u(A) \perp u(B)$.
2. Puisque $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et que u est un automorphisme, $u(F)$ et $u(F^{\perp})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. De plus, on a $u(F) \perp u(F^{\perp})$ car $F \perp F^{\perp}$; donc $u(F^{\perp})$ est le supplémentaire orthogonal de $u(F)$.
3. On sait que $u(F^{\perp}) = u(F)^{\perp}$ et $u(F) = F$. Donc $u(F^{\perp}) = F^{\perp}$.

Donc, sous les hypothèses du théorème, u induit sur F, comme sur $F^{\perp}$, une isométrie vectorielle :

$$u|_F \in \mathbf{O}(F) \quad \text{et} \quad u|_{F^{\perp}} \in \mathbf{O}(F^{\perp}),$$

F et $F^{\perp}$ étant muni du produit scalaire induit par celui de E. Réciproquement,

T 9 *Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $u(F) \subset F$ et que $u\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$; on suppose de plus que u induit dans F comme dans $F^{\perp}$ des isométries vectorielle. Alors u est une isométrie vectorielle.*

T 10 *L'ensemble $\mathbf{O}(E)$ des isométries vectorielle d'un espace euclidien E, muni de la composition, est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathbf{GL}(E), \circ)$, appelé **groupe ohthogonal** de l'espace $(E, \langle *, * \rangle)$.*

P 11 *Soient a et b deux vecteurs distincts de E de même norme. Il existe une unique réflexion s de E telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.*
Si $x \in E$, son image par cette réflexion est donnée par

$$s(x) = x - 2\langle b - a, x \rangle \frac{b - a}{\|b - a\|^2}.$$

R Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes et caractérisent les matrices orthogonales.

1. $M^T M = I_n$.
2. Les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
3. $M^T M = I_n$.
4. M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
5. $M M^T = I_n$.
6. Les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

T 12 *Soient $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \iff u \in \mathbf{O}(E).$$

Plus généralement, si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E, le choix de cette base donne un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{O}(E) & \to & \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array}.$$

Remarquons également que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)[i, j] = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

C 13 *Soient u un endomorphisme de E, et $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *u est une symétrie orthogonale de E.*
2. *$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est une matrice orthogonale et symétrique.*

C 14 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P^T \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P.$$

D 15 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on dit que $\mathcal{B}'$ a la **même orientation** que $\mathcal{B}$ si $\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) > 0$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur les bases de E qui ne comporte que deux classes. Orienter E, c'est choisir une de ces deux classes, dont les éléments seront appelés **bases directes**. Les éléments de l'autre classe seront appelées **bases indirectes** ou **bases retrogrades**.

P 16

1. *Si* $M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, *alors* $\det M \in \{ -1, +1 \}$.
2. *Si* $u \in \mathbf{O}(E)$, *alors* $\det(u) \in \{ -1, +1 \}$.

D 17

- L'ensemble
$$\mathbf{SO}(E) = \{ \ u \in \mathbf{O}(E) \mid \det u = 1 \ \}$$
est un sous-groupe de $\mathbf{O}(E)$ appelé **groupe spécial orthogonal** de l'espace euclidien E.
- Les éléments de $\mathbf{SO}(E)$ sont appelées **isométries vectorielle positives**, **isométries vectorielles directes** ou encore **rotations**.
- Les éléments de
$$\mathbf{O}^{-}(E) = \{ \ u \in \mathbf{O}(E) \mid \det u = -1 \ \} = \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$$
sont appelées **isométries vectorielle négatives** ou **isométries vectorielles indirectes**.
- L'ensemble
$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{SO}(n) = \left\{ \ M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \ \middle| \ \det M = 1 \ \right\}$$
est un sous-groupe de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal d'ordre n**.

P 18 *On suppose E orienté et de dimension n. Soient $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{E}$ une base orthonormale directe de E et $P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{F})$ la matrice des coordonnées de $\mathfrak{F}$ relativement à la base $\mathcal{E}$. On a l'équivalence*

$$\mathfrak{F} \text{ est une base orthonormale directe} \iff P \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R}).$$

P 19 *On suppose E orienté et de dimension n. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ une base orthonormale directe de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *u est une isométrie vectorielle directe.*
2. *$u(\mathcal{E})$ est une base orthonormale directe.*
3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

P 20 *Dans un espace euclidien orienté E de dimension $n \geq 2$, le déterminant d'une famille de n vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ dans une base orthonormale directe $\mathcal{E}$ ne dépend pas de cette base. Ce déterminant est appelé* ***produit mixte*** *des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ et est noté* [a]

$$\operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n).$$

[a] Autre notation $[x_1, \ldots, x_n]$.

Démonstration. On sait en effet que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ étant deux bases quelconques de E,

$$\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \det_{\mathcal{E}}.$$

D'autre part, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont orthonormales, de même orientation, on a $\det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) = 1$ car $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \in \mathbf{SO}(n)$. ∎

Le produit mixte hérite bien sûr des propriétés du déterminant, en particulier le produit mixte est une forme n-linéaire alternée.

T 21 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 1.*
Les seuls isométries vectorielle de E sont Id_E et $-\mathrm{Id}_E$.

C 22 $\mathbf{O}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \right\}$ *et* $\mathbf{SO}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\}$.

T 23 *Soit $M \in \mathbf{O}(2)$. Alors M est de l'une des deux formes suivantes*

1. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$ *pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors* $\det M = 1$.
2. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = S(\theta)$ *pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors* $\det M = -1$.

Démonstration. Un matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si ses vecteurs colonnes sont unitaires, c'est-à-dire si il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta' \\ \sin\theta & \sin\theta' \end{pmatrix}$$

et orthogonaux, ce qui s'écrit

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta' - \theta) = 0,$$

ce qui est équivalent à $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Comme, d'autre part, $\det M = \sin(\theta' - \theta)$, nous pouvons énoncer

$$M \in \mathbf{O}(2) \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, \exists\varepsilon \in \{-1, 1\}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on a alors $\varepsilon = \det M$.

T 24 *L'application*

$$R : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbf{SO}_2(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupe surjectif et son noyau est $\ker(R) = 2\pi\mathbb{Z}$.

T 25

1. *Le groupe* $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ *est isomorphe à* $\mathbb{U}$.
2. *Le groupe* $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ *est commutatif.*

T 26 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et u une isométrie vectorielle positives de E. La matrice de u dans une base orthonormale directe ne dépend pas de cette base. Il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que, pour toute base orthonormale directe $\mathcal{E}$ de E,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta).$$

D 27 On dit que u est la **rotation d'angle θ** dans E orienté.

Dans une base indirecte, la matrice de u est $R(-\theta)$: un changement d'orientation de l'espace transforme l'angle d'une rotation en son opposé.

P 28 *Soit u la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ dans E orienté. Pour tout vecteur unitaire $x \in E$, on a*

$$\cos\theta = \langle x, u(x) \rangle \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\,(x, u(x))\,.$$

T 29 *Soit E un espace euclidien de dimension 2. L'ensemble $\mathbf{O}^-(E) = \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$ est constitué des réflexions de E.*

R En dimension 2, les réflexions sont les symétries par rapport à une droite vectorielle. Remarquons que certaines symétries orthogonales ne sont pas des réflexions, par exemple Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ (ce sont d'ailleurs les seules en dimension 2).

R Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta'); \qquad R(\theta)^{-1} = R(-\theta); \qquad S(\theta)S(\theta') = R(\theta-\theta'); \qquad S(\theta)^{-1} = S(\theta).$$

P 30 *Soit E un espace euclidien de dimension 2.*

1. *La composée de deux réflexions de E est une rotation de E.*
2. *Toute rotation de E s'écrit comme la composée de deux réflexions de E dont l'une peut être choisie arbitrairement.*

P 31 *Soient E un espace euclidien de dimension 2 et a et b deux vecteurs normés de E. Il existe une unique rotation de E qui transforme a en b.*

D 32 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et a, b deux vecteurs de $E \setminus \{ 0_E \}$. On appelle **mesure orientée de l'angle** de a et b, un réel noté (a, b), tel que l'image de $\frac{1}{\|a\|}a$ par la rotation d'angle de mesure (a, b) soit $\frac{1}{\|b\|}b$.

Le réel (a, b) est unique modulo 2π.

P 33 **Relation de Chasles**

Pour tous vecteurs non nuls a, b et c, on a

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) \pmod{2\pi}$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'étude de $\mathbf{SO}(2)$. ∎

D 34 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $(x, y) \in E^2$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Det}\,(x, y, z) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur de E, noté $x \wedge y$ ou $x \times y$, tel que

$$\forall z \in E, \mathrm{Det}\,(x, y, z) = \langle x \wedge y, z \rangle$$

Ce vecteur est appelé le **produit vectoriel de x et y**.

Le produit vectoriel est ainsi défini par dualité. Il est clair qu'un changement d'orientation de l'espace transforme le produit vectoriel en son opposé.

P 35 *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.*

1. *La famille (x, y) est liée si et seulement si $x \wedge y = 0$.*
2. $x \wedge y \in \mathrm{Vect}\,\{\, x, y \,\}^{\perp}$.
3. *L'application* $\begin{array}{ccc} E^2 & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$ *est bilinéaire et antisymétrique.*
4. *Identité de Lagrange*
$$\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2.$$
5. *Si (x, y) est une famille orthonormale de E, alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormale directe.*

P 36 **Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe**

Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E. Si

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \qquad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$$

Alors

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

En particulier

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1, \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2.$$

Démonstration. Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\
&= \left\langle \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3, z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 \right\rangle.
\end{aligned}$$

P 37 ♥

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de colonnes A, B, C. Cette matrice est orthogonale directe (resp. indirecte) si et seulement si

$$A^T B = 0, \qquad A^T A = 1, \qquad B^T B = 1, \qquad \textit{et } C = A \wedge B;$$
$$(\textit{resp. } C = -A \wedge B).$$

Les trois premières conditions s'écrivent également $\langle A, B\rangle = 0$, $\langle A, A\rangle = 1$, $\langle B, B\rangle = 1$, c'est-à-dire que les colonnes A, B forment une famille orthonormale.

L 38 Un sous-espace stable par u

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère les deux sous-espaces vectoriels de E suivants

- $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E) = E_1(u)$ *: l'ensemble des vecteurs de E invariants par u,*
- $G = \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E_{-1}(u)$ *: l'ensemble des vecteurs de E changés en leurs opposés par u.*

Alors,

1. *F et G sont stables par u : on a les inclusions $u(F) \subset F$ et $u(G) \subset G$.*
2. *Si $u \in \mathbf{O}(E)$, l'un au moins des deux ensembles F ou G n'est pas réduit à $\{ 0_E \}$.*

D 39 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **rotation axiale** de E un endomorphisme de E tel que

- l'espace des vecteurs invariants par u, $D = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, est de dimension 1,
- et l'endomorphisme induit par u sur $D^\perp$, $u|_{D^\perp}$, soit une rotation de $D^\perp$, espace vectoriel de dimension 2.

Soit d un vecteur de $E \setminus \{ 0_E \}$ tel que $D = \mathrm{Vect}\, d$, on oriente $D^\perp$ par rapport à d, $u|_{D^\perp}$ est une rotation de $D^\perp$ d'angle de mesure θ. D est appelé l'**axe orienté de la rotation** u, et θ une **mesure de son angle de rotation**.

D 40 Une rotation de E d'angle $\pi \pmod{2\pi}$ est appelé **retournement** de E.

T 41 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, u une isométrie vectorielle de E et $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ l'ensemble des vecteurs de E invariants par f.*

1. *Si $\dim F = 3$, alors $u = \mathrm{Id}_E \in \mathbf{SO}(E)$.*
2. *Si $\dim F = 2$, alors u est la réflexion par rapport à F et $u \in \mathbf{O}^-(E)$.*
3. *Si $\dim F = 1$, alors u est un rotation axiale d'axe F et $u \in \mathbf{SO}(E)$.*
4. *Si $\dim F = 0$, alors u est la composée commutative d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport au plan $D^\perp$. De plus $u \in \mathbf{O}^-(E)$.*

C 42 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u une isométrie vectorielle de E (i.e. $u \in \mathbf{O}(E)$). Alors, il existe un base orthonormale directe de E, notée $\mathcal{E}$, et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \varepsilon = \det(u) = \pm 1. \tag{1}$$

1. *Si $\det u = 1$: u est une rotation axiale d'angle θ ou l'identité ($\theta = 0$).*
2. *Si $\det u = -1$, u est $-\mathrm{Id}_E$ ($\theta = \pi$), une réflexion ($\theta = 0$), ou la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation axiale d'angle θ.*

Démonstration. Considérons

$$F = \{ x \in E \mid u(x) = x \} = \ker(u - \mathrm{Id}_E).$$

- Si $\dim F = 3$, alors $u = \mathrm{Id}_E$ et la matrice de u dans une base quelconque est du type (1) avec $\theta = 0$ et $\varepsilon = 1$.
- Si $\dim F = 2$. Soit e_1 un vecteur unitaire de $F^\perp$, alors, $u(e_1) \in F^\perp$ car u est orthogonal, F est stable par u, et donc $F^\perp$ également. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_1) = \alpha e_1$. De plus, $\|u(e_1)\| = \|e_1\|$ donc $|\alpha| = 1$. Or $\alpha \neq 1$ car $e_1 \notin F$, donc $\alpha = -1$. Finalement, si (e_2, e_3) est une base orthonormale de F, alors $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de E et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (1) avec $\theta = 0$ et $\varepsilon = -1$: u est la réflexion par rapport à F.
- Si $\dim F = 1$. On a $\dim F^\perp = 2$ et $F^\perp$ est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$. Alors $v \in \mathbf{O}(F^\perp)$ et $\ker(v - \mathrm{Id}_{F^\perp}) = \{ 0_E \}$ (sinon, il existerait deux vecteurs de E linéairement indépendants et invariants par u, d'où $\dim F \geq 2$). Donc v est une rotation vectorielle plane. On définit alors la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où e_1 est un vecteur unitaire de F et (e_2, e_3) est une base orthonormale de $F^\perp$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (1) avec $\varepsilon = 1$ et θ l'angle de la rotation v.
- Si $\dim F = 0$. Dans ce cas, il existe $a \in E \setminus \{ 0 \}$ tel que $f(a) = -a$. On considère alors

$$G = \{ x \in E \mid (-u)(x) = x \} = \ker(u + \mathrm{Id}_E).$$

  Alors, $\dim G \in \{ 1, 2, 3 \}$, $-u \in \mathbf{O}(E)$, et donc, il existe $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(-u) = -\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est du type (1). D'où le résultat.

∎

P 43 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et u une rotation axiale d'axe $D = \mathrm{Vect}(d)$ avec d un vecteur normé de E, et d'angle de mesure θ.*

1. *Pour $x \in D^{\perp}$, on a*
$$u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)d \wedge x.$$
2. *Pour $x \in E$, on a*
$$u(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, d\rangle d + (\cos\theta)x + (\sin\theta)d \wedge x.$$
3. *Si $x \in D^{\perp}$ est unitaire,*
$$\cos\theta = \langle x, u(x)\rangle, \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\,(d, x, u(x)) = \langle d \wedge x, u(x)\rangle.$$

M Comme $\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$, on obtient la valeur de l'angle θ au signe près. On détermine alors le signe de θ en calculant

$$\mathrm{Det}\,(d, x, u(x)) = \sin\theta \|d \wedge x\|^2$$

où $x \in E$ est un vecteur non colinéaire d.

P 44 **Décomposition d'une rotation**

1. *Toute rotation axiale se décompose en produit de deux réflexions.*
2. *Toute isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension* 3 *est la composée d'au plus trois réflexions.*