Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

Solution 8.1

1. $z_1 = \frac{1}{6}(7-5i)$
2. $z_2 = -3-4i$
3. $z_3 = \frac{1}{10}(1-3i)$
4. $z_4 = \frac{1}{2}(1-3i)$
5. $z_5 = 2+11i$
6. $z_6 = -3+6i$.

Solution 8.2

1. $z_1 = 71+17i$
2. $(1+i)^2 = 2i$ donc $z_2 = (2i)^5 = 32i$.
3. $z_3 = -7-24i$

Solution 8.3
Cette assertion est fausse. Par exemple $\mathfrak{Re}(i^2) = -1 \neq \mathfrak{Re}(i)^2 = 0$.
Solution 8.4

1. En isolant la variable z dans le membre de gauche, on otient

$$(-1+4i)z+(1-2i) = iz+3 \iff (-1+3i)z = 2+2i \iff z = \frac{2+2i}{-1+3i} \iff z = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

2. L'équation est définie si $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 5 \right\}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\frac{1+3iz}{1+3z} = i\frac{z+2}{z-5} &\iff (1+3iz)(z-5) = (1+3z)(iz+2i)\\ &\iff z+\cancel{3iz^2}-5-15iz = iz+\cancel{3iz^2}+2i+6iz\\ &\iff (1-22i)z = 5+2i \iff z = \frac{5+2i}{1-22i} = -\frac{39}{485}+\frac{112}{485}i.\end{aligned}$$

8.2 Conjugué, module

Solution 8.6
Soit $z \in \mathbb{C}$. Par unicité de l'écriture sous forme algébrique, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z)$ et, sous cette hypothèse, $|z| = |\mathfrak{Re}(z)|$. Ainsi, $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z) = |z|$.
Solution 8.7
Écrivons $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à

$$12x^2 + 4y^2 + 8ixy = 3,$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} 12x^2+4y^2 = 3 \\ 8xy = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solution 8.8

1. Soit A le point d'affixe 2 et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|z-2| = 3 \iff AM = 3.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 3.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|2z - 1 + i| = 4 \iff \left|z - \frac{1-i}{2}\right| = 2 \iff AM = 2.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-i$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq -i$. Alors

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \iff \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \iff |z-i| = |z+i| \iff AM = BM.$$

Remarquons que $-i$ n'est pas solution de $|z-i| = |z+i|$. L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment $[A, B]$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

4. On remarque que

$$\left|\frac{iz-2}{z+3}\right| = 1 \iff \left|i\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1 \iff \left|\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1.$$

Comme précédemment, on trouve que l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[A, B]$ où $A(-2i)$ et $B(-3)$.

Solution 8.9 *Identité du parallélogramme*

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + \cancel{w\bar{z}} + \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} + z\bar{z} - \cancel{w\bar{z}} - \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} \\ &= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right). \end{aligned}$$

Solution 8.10
Solution 8.11

8.3 Racines d'un polynôme

Solution 8.13

Solution 8.15

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5 + 8i$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x+iy)^2 = -15+8i \iff \begin{cases} x^2+y^2 &= \sqrt{15^2+8^2} = 17 \\ x^2-y^2 &= -15 \\ 2xy &= 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 &= 1 \\ y^2 &= 16 \\ xy &= 4 \end{cases} \iff (x,y) = (1,4) \text{ ou } (x,y) = (-1,-4)$$

$$\iff x+iy = \pm(1+4i).$$

Une racine carrée de $5 + 8i$ est $1 + 4i$, les solutions de l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$ sont donc

$$\frac{3+2i-1-4i}{2} = 1+2i \quad \text{et} \quad \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2+3i.$$

Solution 8.16

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -20 - 48i = 4(-5 - 12i)$.

Une racine carrée de $-5 - 12i$ est $2 - 3i$, donc $\Delta = (4 - 6i)^2$.

Les solutions de l'équation sont donc $2 - i$ et $3 + 4i$.

Solution 8.17

Solution 8.18

Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$iz^3-(1+i)z^2+(1-2i)z+6+8i = 0 \iff -z^2+z+6+i(z^3-z^2-2z+8) = 0 \iff \begin{cases} z^2-z-6=0 \\ z^3-z^2-2z+8=0 \end{cases}$$

Les solutions de la première équation sont -2 et 3 et l'on vérifie que -2 est solution de la seconde équation (et 3 ne l'est pas) donc $z = -2$ est solution de l'équation (**??**).

Nous pouvons dès lors écrire pour $z \in \mathbb{C}$,

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = (z+2)(az^2 + bz + c).$$

Par identification des coefficient, on trouve $a = i$, $c = 3 + 4i$ et $2a + b = -(1 + i)$ d'où $b = -(1 + 3i)$.

Finalement, l'équation du second degré $iz^2-(1+3i)z+3+4i = 0$ a pour discriminant $8-6i = (\pm(3-i))^2$ et pour racine $1 - 2i$ et $2 + i$.

Finalement

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0 \iff z \in \{ -2, 1-2i, 2+i \}.$$

Solution 8.19

Le polynôme $Z^2 - 30Z + 289$ a pour discriminant $-256 = (16i)^2$ et pour racines $15 - 8i$ et $15 + 8i$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z^2 = 15-8i \text{ ou } z^2 = 15+8i.$$

Or, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+iy)^2 = 15-8i \iff \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2-y^2=15 \\ 2xy=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=16 \\ y^2=1 \\ 2xy=-8 \end{cases}$$

Les racines carrées de $15-8i$ sont donc $4-i$ et $-4+i$.

De même les racines carrées de $15+8i = \overline{15-8i}$ sont $4+i$ et $-4-i$.

Finalement,

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z \in \{\, 4-i, -4+i, 4+i, -4-i \,\}.$$

Solution 8.20

1. Le discriminant de l'équation $z^2-2z+2=0$ est $-4=(2i)^2$ et ses solutions sont donc $1+i$ et $1-i$.

   Les solutions du système $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$ sont donc les couples

   $$(x,y) = (1+i, 1-i) \quad \text{et} \quad (x,y) = (1-i, 1+i)$$

2. Le polynôme $z^2-(1+i)z+13i$ a pour discriminant $-50i = 25\times(-2i) = (5-5i)^2$ et pour racines $3-2i$ et $-2+3i$. Les solutions du système $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=13i \end{cases}$ sont donc les couples

   $$(x,y) = (3-2i, -2+3i) \quad \text{et} \quad (x,y) = (-2+3i, 3-2i)$$

8.4 Représentation trigonométrique

Solution 8.21
Solution 8.22
Solution 8.23

1. $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) \equiv \pi/4 \pmod{2\pi}$.
2. $\left|1-i\sqrt{3}\right| = 2$, $\arg(1-i\sqrt{3}) \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$.
3. $|i| = 1$, $\arg(i) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$.
4. $\left|-2\sqrt{3}+2i\right| = 4$, $\arg(-2\sqrt{3}+2i) \equiv 5\pi/6 \pmod{2\pi}$.
5. $|2+i| = \sqrt{5}$, et $2+i = \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Les arguments de $2+i$ sont donc dans le premier cadrant.

   On peut par exemple choisir $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan\dfrac{1}{2}$.
6. $|17| = 17$, $\arg(17) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
7. $|-3i| = 3$, $\arg() \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$.
8. $|-\pi| = \pi$, $\arg(-\pi) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

9. $|-12-5i| = 13$ et $-12-5i = 13\left(-\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i\right)$. Les arguments de $-12-5i$ sont donc dans le troisième quadrant. On peut par exemple choisir $-\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$, ou $\pi + \arcsin\frac{5}{13}$ ou $\pi + \arctan\frac{5}{12}$.

10. $|-5+4i| = \sqrt{41}$, $\arg(-5+4i) \equiv \pi - \arctan\frac{4}{5} \pmod{2\pi}$.

Solution 8.24
Solution 8.25

1. On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i1\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

De plus $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Enfin $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

2. On a

$$z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad z_1z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Solution 8.26

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/6} \text{ et } 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

d'où

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{5i\pi/12}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20}e^{20\times5i\pi/12} = 2^{10}e^{i\pi/3}$$

Donc $|z| = 1024$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
Solution 8.27
Solution 8.28
On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, d'où

$$(1+i)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}.$$

Mais la formule du binome de Newton donne également

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k.$$

Or

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{si } k \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{si } k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

On a donc

$$(1+i)^n = 1 + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} - i\binom{n}{7} + \cdots = S_1 + iS_2.$$

En identifiant parties réelles et imaginaire, on obtient

$$S_1 = 2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad\qquad S_2 = 2^{n/2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Solution 8.29

1. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
2. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.
3. $\sin 4x = 4\cos x \sin x - 8\cos x \sin^3 x$.
4. $\cos 8x = 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1$.

Solution 8.30

1. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.
2. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$.
3. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}-e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}(2i\sin 5x - 2i\sin 3x - 4i\sin x) \\
&= \frac{-1}{16}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x).
\end{aligned}$$

5. $\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$.

Solution 8.31

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}-2e^{3ix}-6e^{ix}-6e^{-ix}-2e^{-3ix}+e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{-1}{32}\left(2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\cos^3(x)\sin^2(x) = -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right).}$$

Solution 8.33

En cours!

Solution 8.34 *IMT PSI 2022*

Solution 8.35 *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

1. On pose $Z = z^k - 1$.

$$Z = e^{i\frac{k2\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = e^{i\frac{k\pi}{n}}\, 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2})}$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.

Donc le module de Z est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$.

Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

S est donc la partie imaginaire de $T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}$.

Or, comme $e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

Or $1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) = -2ie^{i\frac{\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

On en déduit que $T = \dfrac{4e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\, i\, e^{-i\frac{\pi}{2n}}$.

En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ ($n \geqslant 2$), on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Solution 8.36

On a $\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc, pour $z=x+iy\in\mathbb{C}$, avec $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{2z-1}=\sqrt{3}-3i \iff e^{2x-1}e^{2iy}=2\sqrt{3}e^{-\pi/3} &\iff \begin{cases} e^{2x-1}=2\sqrt{3} \\ 2y\equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2x-1=\ln\left(2\sqrt{3}\right) \\ y\equiv -\pi/6 \pmod{\pi}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=(1+\ln\left(2\sqrt{3}\right))/2 \\ y\equiv -\pi/6 \pmod{\pi}\end{cases}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^{2z-1}=\sqrt{3}-3i$ sont donc les nombres complexes de la forme

$$z=\frac{1+\ln 2\sqrt{3}}{2}+i\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

8.5 Nombres complexes et géométrie plane

Solution 8.37
Solution 8.38

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z-iz}=\frac{z-i}{z(1-i)}&=\frac{(z-i)\bar{z}(1+i)}{2|1-i|^2z\bar{z}}\\
&=\frac{z\bar{z}+iz\bar{z}-i\bar{z}+\bar{z}}{2z\bar{z}}\\
&=\frac{|z|^2+i|z|^2+(1-i)\bar{z}}{2|z|^2}\\
&=\frac{x^2+y^2+x+y}{2(x^2+y^2)}+i\frac{x^2+y^2-x-y}{2(x^2+y^2)}.
\end{aligned}$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{z-i}{z-iz}\right)=\boxed{\frac{x^2+y^2-x-y}{2\left(x^2+y^2\right)}}.$$

2. Puisque $z\neq 0$, on a $z\neq iz$ d'où $M\neq M'$. On donc les équivalences

$$\begin{aligned}
I,M,M' \text{ sont alignés} &\iff \left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MI}\right)\equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } I=M \text{ ou } I=M'\\
&\iff \frac{z-i}{z-iz}\in\mathbb{R}^\star \text{ ou } z=i \text{ ou } z=1\\
&\iff \frac{z-i}{z-iz}\in\mathbb{R}\\
&\iff \mathfrak{Im}\left(\frac{z-i}{z-iz}\right)=0\\
&\iff \boxed{x^2+y^2-x-y=0}.
\end{aligned}$$

3. Remarquons que si $z = 0$, alors $M = M'$, donc I, M, M' sont alignés. De plus, dans ce cas, on a bien $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

On a donc les équivalences suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} I, M, M' \text{ sont alignés} &\iff x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}^2\right) - \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}^2\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de ray

8.6 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

Solution 8.39

1. On a

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{2i\pi/3} = \left(e^{i\pi/9}\right)^6.$$

Les racine sixième de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sont obtenue en multipliant un racine sixième particulière par les racines sixième de l'unité. Elle sont donc de la forme

$$e^{i\frac{\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{i\frac{3k+1}{9}\pi}, \quad k \in [\![0, 5]\!].$$

c'est-à-dire

$$e^{i\pi/9}, e^{4i\pi/9}, e^{7i\pi/9}, e^{10i\pi/9}, e^{13i\pi/9}, e^{16i\pi/9}.$$

2. On a

$$\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{5i\pi/12} = \left(\frac{1}{2^{1/16}} e^{5i\pi/96}\right)^8.$$

D'où

$$z^8 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} \iff \exists k \in [\![0, 7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}} e^{\frac{5i\pi}{96}} e^{\frac{2ik\pi}{8}} \iff \exists k \in [\![0, 7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}} e^{\frac{(24k+5)i\pi}{96}}.$$

Les racines 8-ème de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ sont donc

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^{1/16}} e^{5i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{29i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{53i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{77i\pi/96} \\ \frac{1}{2^{1/16}} e^{101i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{125i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{149i\pi/96}, & \frac{1}{2^{1/16}} e^{173i\pi/96}. \end{array}$$

Solution 8.40

1. Le discriminant de l'équation (**??**) est $(3-2i)^2 - 4(2-2i) = -3-4i$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+ib)^2 = -3-4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 1 \\ b = 2 \text{ ou } b = -2 \\ ab = -2 < 0 \end{cases}.$$

Une racine carrée de $-3-4i$ est donc $1-2i$.

Conclusion : les solutions complexes de l'équation (**??**) sont

$$\frac{3-2i-(1-2i)}{2} = 1 \text{ et } \frac{3-2i+(1-2i)}{2} = 2-2i.$$

2. Soit $Z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente

$$Z^6 - (3-2i)Z^3 + (2-2i) = 0 \iff Z^3 = 1 \text{ ou } Z^3 = 2-2i.$$

Or les racines cubiques de l'unité sont

$$1, j = e^{2i\pi/3} \text{ et } j^2 = e^{4i\pi/3}.$$

De plus $2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Les racines cubiques de $2-2i = (\sqrt{2})^3 e^{-i\pi/4}$ sont donc

$$\sqrt{2}e^{-i\pi/12}, \sqrt{2}e^{-i\pi/12+2i\pi/3} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12} \text{ et } \sqrt{2}e^{-i\pi/12+4i\pi/3} = \sqrt{2}e^{15i\pi/12}.$$

Conclusion : les solution de l'équation (**??**) sont

$$1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}, \sqrt{2}e^{-i\pi/12}, \sqrt{2}e^{7i\pi/12} \text{ et } \sqrt{2}e^{15i\pi/12}.$$

Solution 8.42
Solution 8.43

1. Une racine cinquième de l'unité dans $\mathbb{C}$ est une nombre complexe z tel que $z^5 = 1$. Il y a cinq racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$,

$$1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5} = e^{-4i\pi/5} \text{ et } e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}.$$

2. Clairement, i n'est pas une racine de P ; donc pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = 0 \iff (z+i)^5 = (z-i)^5 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1.$$

z est donc racine de P si et seulement si $\frac{z-i}{z+i}$ est une racine cinquième de l'unité, c'est-à-dire, si et seulement si il existe $k \in \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/5}.$$

Le cas $k = 0$ est à exclure car sinon on aurait $z + i = z - i$. Enfin, pour $k \in \{ -2, -1, 1, 2 \}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} &\iff z + i = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z - i) \\
&\iff i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1\right) z \\
&\iff z = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}+1}}{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1} && \because e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq 1 \\
&\iff z = i\frac{e^{\frac{ik\pi}{5}}}{e^{\frac{ik\pi}{5}}} \frac{\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} + e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)}{\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)} \\
&\iff z = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{5}}{2i\sin\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion : Les racines de P sont

$$-\frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}}, -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}, \frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}, \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}}.$$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
(z+i)^5 &= z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10iz^2 + 5z + i \\
\text{et } (z+i)^5 &= z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5z - i.
\end{aligned}$$

D'où

$$P(z) = \frac{1}{2i}\left(10iz^4 - 20iz^2 + 2i\right) = 5z^4 - 10z^2 + 1.$$

Or le polynôme $5X^2 - 10X + 1$ a pour discriminant $100 - 20 = 80$; ses racines sont donc $\frac{10\pm4\sqrt{5}}{10}$, c'est-à-dire

$$1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ et } 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La première est clairement positive et leur produit est $\frac{1}{5} > 0$; on a donc également $1 - \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$. Finalement,

$$P(z) = 0 \iff z^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ou } z^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Les racines de P sont donc

$$-\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

4. Les racines obtenues aux questions **??** et **??** sont les mêmes. Or

$$0 < \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}} < \frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}$$

car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et que tan est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$0 < \tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}.$$

De plus, $0 < \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} < \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$. On a donc

$$\tan\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}}} \qquad \text{et} \qquad \tan\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}}}$$

Solution 8.44

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, (**??**) $\iff$ $z^5 = 1$. Les solutions de (**??**) sont donc les cinq racines 5-ième de l'unité. L'ensemble des solutions de (**??**) est

$$\boxed{\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\}.}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^5 - 1 = (z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)$. On peut choisir

$$\boxed{Q(z) = z^4+z^3+z^2+z+1.}$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{z^2} &= z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \\ &= z^2+\frac{1}{z^2}+1+z+\frac{1}{z} \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 + 1 + \left(z+\frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\boxed{a = 1, b = 1 \text{ et } c = -1}$.

4. Le discriminant de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$ est 5 ; ses solutions sont donc

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

5. Commençons par remarquer que $Q(0) = 1$, donc 0 n'est pas solution de l'équation $Q(z) = 0$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 &\iff \frac{Q(z)}{z^2} = 0 \\ &\iff \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0 && \because \text{d'après (??)} \\ &\iff z+\frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } z+\frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 && \because z \neq 0. \end{aligned}$$

L'équation $z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

L'équation $z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de $Q(z) = 0$ est

$$\boxed{\{ z_1, z_2, z_3, z_4 \}}.$$

6. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^5 - 1 = 0 \iff (z-1)Q(z) = 0.$$

Donc l'équation (**??**) a pour ensemble de solutions

$$\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\} = \{ 1, z_1, z_2, z_3, z_4 \}.$$

On remarque

$$\mathfrak{Re}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \cos(2\pi/5) > 0 \ \text{ et } \ \mathfrak{Im}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \sin(2\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_1) < 0$, $\mathfrak{Re}(z_2) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z_3) < 0$. On a nécessairement $e^{2i\pi/5} = z_4$ d'où

$$\boxed{\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

De même,

$$\mathfrak{Re}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \cos(4\pi/5) < 0 \ \text{ et } \ \mathfrak{Im}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \sin(4\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_3) > 0$, $\mathfrak{Re}(z_4) > 0$ et $\mathfrak{Im}(z_1) < 0$. On a nécessairement $e^{4i\pi/5} = z_2$ d'où

$$\boxed{\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(4\pi/5) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

7. On a $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5}$, d'où

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

[1]

Solution 8.46

L'équation (**??**) est définie pour $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{ -1, 1 \}$. En posant $Z = \frac{z-1}{z+1}$, cette équation s'écrit

$$(\textbf{??}) \iff Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos\alpha \iff Z^{2n} - 2\cos\alpha Z^n + 1 = 0.$$

Le discriminant de $X^2 - 2\cos\alpha X + 1$ est $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2$ et ses racines sont

$$\frac{2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = e^{-i\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{2\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = e^{i\alpha}.$$

Ainsi

$$(\textbf{??}) \iff Z^n = e^{i\alpha} \text{ ou } Z^n = e^{-i\alpha}$$

Or les racines n-ième de $e^{i\alpha}$ sont les complexes $e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

De plus, un calcul simple montre que $z = \frac{Z+1}{1-Z}$ si $Z \neq 1$ et que $Z = 1 \iff z - 1 = z + 1$, donc $Z \neq 1$ nécessairement.

Supposons maintenant $e^{i\alpha} \neq 1$, c'est-à-dire $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. On a

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = e^{i\alpha} \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{z-1}{z+1} = e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = \frac{1 + e^{i(\alpha+2k\pi)/n}}{1 - e^{i(\alpha+2k\pi)/n}}.$$

La ruse habituelle nous permet d'écrire

$$\frac{1 + e^{i(\alpha+2k\pi)/n}}{1 - e^{i(\alpha+2k\pi)/n}} = \frac{e^{i(\alpha+2k\pi)/2n} 2\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)}{e^{i(\alpha+2k\pi)/2n}(-2i)\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)} = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right).$$

On a bien sûr un calcul analogue en substituant $e^{-i\alpha}$ à $e^{i\alpha}$.

Conclusion

Lorsque $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, les solutions de l'équation (**??**) sont les nombres

$$i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\varepsilon\alpha + 2k\pi}{2n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } \varepsilon \in \{ -1, 1 \}.$$

Dans le cas où $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$, les calculs et le résultat sont analogues, mais avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\varepsilon \in \{ -1, 1 \}$ tels que $\varepsilon\alpha + 2k\pi \not\equiv 0 \pmod{2n\pi}$.

Solution 8.47 *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

---

[1]On peut également remarquer que $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et utiliser la formule de Carnot

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \cos\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

2. $z=0$ n'est pas solution de l'équation $z^n=1$.
Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
On a $z^n=1 \iff \left\{\begin{array}{c} r^n=1 \\ \text{et} \\ n\theta=0 \mod 2\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} r=1 \\ \text{et} \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$
Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall\, k\in[\![0,n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n}\in[0,2\pi[$.
Or $\begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est injective.
Donc, $\left\{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n=1$.
Les solutions de l'équation $z^n=1$ étant également racines du polynôme X^n-1, il ne peut y en avoir d'autres.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n=1$ est $S=\left\{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$.

3. $z=i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+i)^n=(z-i)^n$,

$$\begin{aligned}(z+i)^n=(z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1 \\ &\iff \exists\, k\in[\![0,n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+i}{z-i}=e^{\frac{i2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists\, k\in[\![0,n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)=-i\left(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

En remarquant que $z\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)=-i\left(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k=0$, on en déduit que:

$$(z+i)^n=(z-i)^n \iff \exists\, k\in[\![1,n-1]\!] \text{ tel que } z=i\,\frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}}+1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}$$

En écrivant $i\,\dfrac{e^{\frac{i2k\pi}{n}}+1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}=i\,\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}=i\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.
On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+i)^n=(z-i)^n$ alors $|z+i|=|z-i|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A,B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-i$, c'est-à-dire à la droite des réels.

8.7 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Solution 8.48

1. L'équation est $r^2-5r+3=0$ a pour racines $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n=\alpha\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha+\beta & =0 \\ \alpha\frac{5-\sqrt{13}}{2}+\beta\frac{5+\sqrt{13}}{2} & =1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \beta & =-\alpha \\ -\alpha\sqrt{13} & =1 \end{array}\right. \iff \alpha=-1/\sqrt{13} \text{ et } \beta=1/\sqrt{13}.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

2. L'équation est $2r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ où $\theta = \arctan\sqrt{7}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = \frac{1}{2^{n/2}}\left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha & =0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta) & =-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \alpha & =0 \\ \beta\sin\theta & =-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Or $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{4}{\sqrt{7}}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{4\sin\left(n\arctan\sqrt{7}\right)}{2^{n/2}\sqrt{7}}.$$

3. L'équation $4r^2 - 12r + 9r = 0$ a une racine double, $\frac{3}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = (\alpha n + \beta)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = -3$, $u_1 = 4$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta & =-3 \\ \frac{3}{2}(\alpha+\beta) & =4 \end{array}\right. \iff \alpha = \frac{17}{3} \text{ et } \beta = -3.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{17n}{3} - 3\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4. Une récurrence immédiate montre que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. D'où

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5} \iff \ln\left(u_{n+2}\right) = 6\ln\left(u_{n+1}\right) - 5\ln\left(u_n\right).$$

On pose $v_n = \ln\left(u_n\right)$ et on a donc

$$v_0 = 0, \quad v_1 = \ln 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n.$$

L'équation $r^2 - 6r + 5 = 0$ a pour racines 1 et 5, ainsi

$$u_n = \alpha + \beta 5^n$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. Puisque $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln 2$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha + 5\beta & = \ln 2 \end{array} \right. \iff \alpha = -\frac{1}{4} \ln 2 \text{ et } \beta = \frac{1}{4} \ln 2.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln 2}{4} (5^n - 1)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{v_n} = 2^{1/4} \exp (5^n - 1) .$$