Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$

Aperçu

R Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que, pour $h \in E$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

où le symbole $o(h)$ désigne n'importe quelle fonction ω telle que le rapport $\|\omega(h)\|/\|h\|$ tende vers 0 lorsque $h \to 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall h \in E, \|h\| \leq r \implies \|\omega(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. Comme elle dépend du point a, on la note $\mathrm{d}f(a)$.
Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est **différentiable** sur U et l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

s'appelle la **différentielle** de f.

D 1 On dit qu'une application φ, définie au voisinage de $(0,0)$, est **négligeable** devant $\|(x,y)\|$ en $(0,0)$ s'il existe une application ε telle que pour (x,y) au voisinage de $(0,0)$

$$\varphi(x,y) = \varepsilon(x,y).\|(x,y)\| \text{ et } \varepsilon(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

On note alors

$$\varphi(x,y) = o\left(\|(x,y)\|\right) \text{ lorsque } (x,y) \to (0,0).$$

Cela revient encore à montrer que

$$\varphi(0,0) = 0 \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

D 2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour $v \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on ait

$$f(a+v) = f(a) + L(v) + o(\|v\|)\,.$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. Comme elle dépend du point a, on la note $\mathrm{d}f(a)$.
Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est **différentiable** sur U et l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

s'appelle la **différentielle** de f.

Ainsi $\mathrm{d}f(a)$ est l'analogue pour une fonction de plusieurs variables du nombre dérivé, et $\mathrm{d}f$ est l'analogue de la fonction dérivée.

Pour $a \in U$ fixé, l'application $v \mapsto \mathrm{d}f(a)(v)$ est linéaire. Rapportons $\mathbb{R}^2$ à la base canonique (e_1, e_2), alors pour tout$v = (h, k) = he_1 + ke_2$,

$$\mathrm{d}f(a)(v) = h\,\mathrm{d}f(a)(e_1) + k\,\mathrm{d}f(a)(e_2).$$

Si l'on note $a = (x, y)$, $\alpha(x, y) = \mathrm{d}f(x, y)(e_1)$ et $\beta(x, y) = \mathrm{d}f(x, y)(e_2)$, alors

$$\mathrm{d}f(x, y)(h, k) = \alpha(x, y)h + \beta(x, y)k.$$

E 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Pour $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= (x+h)(y+k) - xy \\ &= yh + xk + hk \\ &= yh + xk + o(\|(h, k)\|) \,. \end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en tout point $a = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ et

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h, k) & \mapsto & yh + xk \end{array} .$$

E 4 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire, l'égalité $f(a+v) = f(a) + f(v)$ montre que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathrm{d}f(a) = f$ pour tout a.

P 5 *Une application différentiable en un point est continue en ce point.*

La notion d'ouvert permet de considérer des limites dans toutes les directions, ce qui généralise les limites à gauche et à droite.

L 6 *Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in A$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall t \in]-\delta, \delta[, a + t\vec{v} \in A$$

Ce lemme caractérise d'ailleurs les parties ouvertes.

D 7 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, $a = (x, y) \in U$, v un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet une **dérivée** en a selon le vecteur v si l'application définie au voisinage de 0

$$\begin{array}{rrcl} f_v : &]-\delta, \delta[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(a+tv) \end{array}$$

est dérivable en 0, c'est-à-dire lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$ admet une limite en 0. Cette limite est appelé **dérivée** de f au point a selon le vecteur v et est notée $D_v f(a)$.

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

En notant

$$\begin{aligned} a &= (x, y), \\ v &= (h, k), \\ M(t) &= (x + th, y + tk, f(a + tv)) \\ \text{et} \;\; A = M(a) &= (x, y, f(x, y)), \end{aligned}$$

on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \overrightarrow{AM(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(th, tk, f(a + tv) - f(a))}{t} = (h, k, \mathrm{D}_v f(a))$$

Lorsque v est unitaire, $\mathrm{D}_v f(a)$ est la pente de la tangente du graphe de f_v.

P 8 *Si f est différentiable au point a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a*

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

Une application peut avoir en un point des dérivées selon tout vecteur et être non continue en ce point, et donc a fortiori non différentiable en ce point.

E 9 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0, \\ y & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées selon tout vecteur.
2. L'application f est-elle continue en $(0, 0)$?

D 10 Lorsque f est dérivable en $a = (x, y)$ selon les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on dit que f admet des **dérivées partielles premières** en a.

- Le nombre $\mathrm{D}_{e_1} f(a)$ est noté plus simplement $\partial_1 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
- Le nombre $\mathrm{D}_{e_2} f(a)$ est noté plus simplement $\partial_2 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

On a alors

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}$$
$$\partial_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe si et seulement si l'application partielle $f_y = f(*,y)$ est dérivable en x et dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe si et seulement si l'application partielle $f_x = f(x,*)$ est dérivable en x et dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_x'(y)$.

En pratique, cela signifie que l'on calcule, dans la plupart des cas, les dérivées partielles au moyen des formules de dérivation usuelles, en y regardant une des variables comme une constante.
Les notations $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont utilisées lorsque les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont notés (x,y).
Lorsqu'ils sont notés (x_1,x_2), les dérivées partielles en A sont plutôt notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$.

E 11 $P(V,T) = \frac{nRT}{V}$. P admet des dérivées partielles premières sur $]0,+\infty[^2$ et

$$\forall (V,T) \in]0,+\infty[^2, \frac{\partial P}{\partial V}(V,T) = -\frac{nRT}{V^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial T}(V,T) = +\frac{nR}{V}$$

P 12 *Si f est différentiable au point a, alors f admet des dérivées partielles en a. Dans ce cas,*

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_1$$
$$\partial_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_2$$

T 13 Fonctions admettant des dérivées partielles mais qui ne sont pas continues

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3. Mêmes questions avec

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$$

P 14 **Opérations sur les dérivées partielles**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x, y) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux applications, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

1. *Si f est g possèdent une dérivée partielle par rapport à x en a, alors c'est aussi le cas pour toute combinaison linéaire de f et g ainsi que du produit fg. Dans ce cas, on a pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,*
$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}(a) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \mu\frac{\partial g}{\partial x}(a) \text{ et } \frac{\partial fg}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a).$$
2. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivable au point a et*
$$\frac{\partial 1/g}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{(g(a))^2} \text{ et } \frac{\partial f/g}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{(g(a))^2}.$$
3. *On suppose que $f(U) \subset I$, que f possède une dérivée partielle par rapport à x en a et que φ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi\circ f$ possède une dérivée partielle par rapport à x en a et*
$$\frac{\partial \varphi\circ f}{\partial x}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

On a, bien sûr, des résultats analogues pour les dérivées partielles par rapport à y.

D 15 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^1$** si ses dérivées partielles existent en tout $a \in U$ et si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U (en tant que fonctions de deux variables).

E 16 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

T 17 **Formule de Taylor-Young à l'ordre 1**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
*Alors f admet un **développement limité à l'ordre $\mathbf{1}$** en a, c'est-à-dire*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + o\left(\|(h,k)\|\right).$$

lorsque $(h, k) \to (0, 0)$.

De manière équivalente, on peut écrire

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right).$$

lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Démonstration. Admise. ∎

N L'application $p_1 : (x, y) \mapsto x$, que l'on note parfois x (attention aux confusions!) est de classe $\mathscr{C}^1$ et a pour différentielle en a la fonction $(h, k) \mapsto h$. De même la deuxième fonction coordonnée $(x, y) \mapsto y$ a pour différentielle $(h, k) \mapsto k$.
Dans ce contexte, on a l'habitude de noter $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les formes linéaires coordonnées

$$\mathrm{d}x : (h, k) \mapsto h \quad \mathrm{d}y : (h, k) \mapsto k$$

plutôt que $\mathrm{d}(p_1)(x, y)$ comme, théoriquement, on devrait le faire. Avec ces notations, on peut écrire pour $a \in U$

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

On simplifie encore cette écriture pour retenir finalement

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \in \mathscr{F}(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})).$$

♥ Cette notation est dite **notation différentielle**. Les physiciens et chimistes utilisent fréquemment cette dernière formule en l'interprétant comme l'égalité entre une variation infiniment petite de $f(x, y)$ et des variations infiniment petites des variables x et y.

T 18 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est différentiable et sa différentielle au point a est*

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot k \end{array}.$$

C'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

C 19 *Une application de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.*

C 20 *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$*. Alors* f *admet des dérivées directionnelles* $\mathrm{D}_v f(a)$ *en tout point* $a=(x_0,y_0)\in U$ *et suivant tous les vecteurs* $v=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ *avec*

$$\mathrm{D}_{(h,k)} f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot k = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k.$$

E 21 Avec les notations de physiciens.

- $r=\sqrt{x^2+y^2}$. On a $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ d'où
$$\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\,\mathrm{d}y$$
- Avec $\theta=2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ l'argument principal de $x+iy$, défini sur $\mathbb{R}^2\backslash]-\infty,0]\times\{0\}$. on a $\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}$, d'où
$$\mathrm{d}\theta=-\frac{y}{r^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{r^2}\,\mathrm{d}y$$

R

Fonction différentiable qui n'est pas $\mathscr{C}^1$

La réciproque du théorème est fausse. Une application qui admet un DL^1 n'est pas toujours de classe $\mathscr{C}^1$. Elle l'était déjà pour les fonctions d'une variable ; dans la veine de notre contre exemple préféré $\left(f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}\right.$ si $x \neq 0$ et $\left.f(0) = 0\right)$, l'application

$$f\, : (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admet un DL^1 en $(0, 0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

D 22 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a = (x_0, y_0) \in U$. Le **plan tangent** au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

D 23 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$. On appelle **vecteur gradient**, ou **gradient** de f en a l'unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}f(a)(v) = \langle \nabla f(a), v\rangle.$$

On note également ce vecteur $\operatorname{grad} f(a)$.

On peut encore noter $\mathrm{d}f(a) = \langle \nabla f(a), *\rangle$ ou même $\mathrm{d}f = \langle \nabla f, *\rangle$.

P 24 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. Alors*

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + o(\|v\|) \text{ quand } v \to (0,0).$$

C 25 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$.*

1. *On a*

$$\nabla f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot e_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

2. *Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

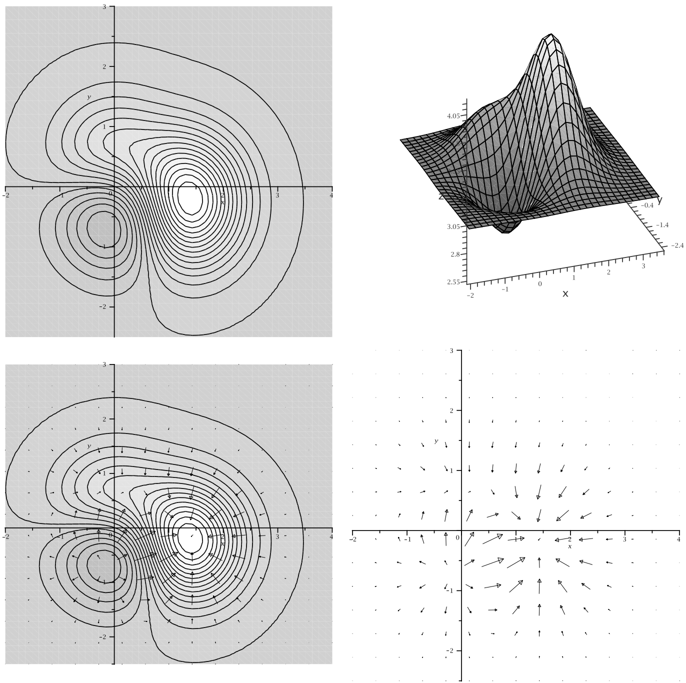
E 26 Avec $f : (x, y) \mapsto x^3 y + 3xy^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 y + 3y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 + 6xy, \\
\mathrm{d}f(x, y) &= (3x^2 y + 3y^2)\,\mathrm{d}x + (x^3 + 6xy)\,\mathrm{d}y, \\
\nabla f(x, y) &= (3x^2 y + 3y^2, x^3 + 6xy), \\
\mathrm{d}f(x, y)((h, k)) = \boldsymbol{D}_{(h,k)} f(x, y) &= (3x^2 y + 3y^2)h + (x^3 + 6xy)k.
\end{aligned}$$

Le vecteur gradient peut s'interpréter géométriquement.

- On a vu que la dérivée en a suivant le vecteur v est $\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$. Lorsque v est unitaire, elle représente la pente de la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe C_v intersection du graphe de f avec le plan $a + \mathrm{Vect}(v, e_3)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\|\mathrm{D}_v f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\|$ prouve que les tangentes aux courbes C_v ont des pentes de valeur absolue inférieure ou égale à $\|\nabla f(a)\|$, l'égalité n'ayant lieu que pour v colinéaire à $\nabla f(a)$. La direction du vecteur gradient donne donc la direction de la plus grande pente et son module la valeur de la plus grande pente.
- Le vecteur gradient est orthogonal aux lignes de niveau et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

Figure: Vecteur gradient et lignes de niveau



P 27 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x, y) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$. Alors*

1. *Toute combinaison linéaire de f et g est de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas, on a pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y}.$$

2. *Le produit de f et g est de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas,*

$$\frac{\partial f g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial f g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y}.$$

3. *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\frac{\partial 1/g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{(g)^2} \qquad \frac{\partial 1/g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{(g)^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f/g}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}}{(g)^2} \qquad \frac{\partial f/g}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} g - f \frac{\partial g}{\partial y}}{(g)^2}.$$

C 28 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

C 29

1. *Les fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition.*
2. *Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ «ne dépendant que d'une variable», c'est-à-dire de la forme $(x,y)\mapsto\varphi(x)$ avec $\varphi\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, sont de classe $\mathscr{C}^1$.*

P 30 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

- *L'application $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g.$$

- *L'application $f g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\nabla(f g) = f.\nabla g + g.\nabla f.$$

- *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\nabla\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\nabla g}{g^2} \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.\nabla f - f.\nabla g}{g^2}.$$

P 31 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

- *L'application $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mu\, \mathrm{d}g.$$

- *L'application fg est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\mathrm{d}(fg) = f\, \mathrm{d}g + g\, \mathrm{d}f.$$

- *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g^2}\, \mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, \mathrm{d}f - f\, \mathrm{d}g}{g^2}.$$

R Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.
Dans ce cas, la notion de fonction différentiable coïncide avec la notion de fonction dérivable. On a alors la relation

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1).$$

R Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2, t \mapsto$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}$ assez petit, on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

Si L existe, on appelle L la **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.
Lorsque $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, cela est équivalent à x et y dérivable en a :

$$x(a+h) = x(a) + x'(a)h + o(h) \qquad y(a+h) = y(a) + y'(a)h + o(h)$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x(a+h) \\ y(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h) \\ o(h) \end{pmatrix}.$$

On note alors $f'(a) = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

En particulier

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1).$$

D 32 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$ une application. L'application f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour $v \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on ait

$$f(a+v) = f(a) + L(v) + o(v).$$

où le symbole $o(v)$ désigne cette fois ci n'importe quelle fonction telle que le rapport $\|o(v)\|/\|v\|$ tende vers 0 avec v.
Si L existe, on appelle L **différentielle** de f en a, ou encore l'**application linéaire tangente** à f en a. On la note $\mathrm{d}f(a)$.

D 33 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2) : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur U si f_1 et f_2 le sont.

On peut alors écrire $f = f_1 e_1 + f_2 e_2$ et $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_1 e_1 + \mathrm{d}f_2 e_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

T 34 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soient deux fonctions de classes* $\mathscr{C}^1$

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$$

telles que $f(U) \subset I$. *Alors, la fonction de deux variables réelles*

$$\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(f(x,y)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* U *et pour tout* $a \in U$,

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(a) = \varphi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Autrement dit,

$$\nabla(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \times \nabla f(a).$$

T 35 $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\gamma : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

telles que $\gamma(I) \subset U$. Alors, la fonction d'une variable réelle

$$f \circ \gamma : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

Autrement dit

$$\frac{\partial (f \circ \gamma)}{\partial t}(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

R

$$\forall t \in I, \frac{\partial(f \circ \gamma)}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\partial y}{\partial t}(t).$$

ou plus simplement, avec des notations de physicien,

$$\frac{\partial f \circ \gamma}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

car le physicien confond systématiquement la fonction et sa valeur.

T 36 $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. On considère deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\varphi : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

telles que $\varphi(U) \subset V$. Alors la fonction de deux variables réelles

$$f \circ \varphi : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et pour $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial x}(x,y) &= (\partial_1 f)(\varphi(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + (\partial_2 f)(\varphi(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial y}(x,y) &= (\partial_1 f)(\varphi(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + (\partial_2 f)(\varphi(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

R Dans un souci de lisibilité, posons $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ et $g = f \circ \varphi$. On a donc

$$g(x, y) = f \circ \varphi(x, y) = f(u, v).$$

Notons $\frac{\partial f}{\partial u} = \partial_1(f)$ et $\frac{\partial f}{\partial v} = \partial_2(f)$. Cela revient à considérer les variables de f comme étant u et v au lieu de x et y dans le calcul des dérivées partielles.
On peut maintenant écrire notre formule d'une autre manière, importante, car il s'agit de l'usage standard en physique.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Les notations ont été choisies de sorte que $\frac{\partial *}{\partial x}$ et $\frac{\partial *}{\partial y}$ s'appliquent en (x, y) et $\frac{\partial *}{\partial u}$ et $\frac{\partial *}{\partial v}$ s'appliquent en (u, v).

E 37 Avec $f(x,y) = xy^2$ et $\varphi(x,y) = (x+y, xy)$.

1. Pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $u = x+y$ et $v = xy$. Alors $f\circ\varphi(x,y) = f(u,v) = uv^2$ et on a

$$\frac{\partial uv^2}{\partial u} = v^2, \qquad \frac{\partial uv^2}{\partial v} = 2uv, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

En vertu du théorème

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial x}(x,y) = v^2 + 2uvy = x^2y^2 + 2(x+y)xy^2 = 3x^2y^2 + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial y}(x,y) = v^2 + 2uvx = x^2y^2 + 2(x+y)x^2y. = 2x^3y + 3x^2y^2$$

2. On vérifie directement $f\circ\varphi(x,y) = (x+y)x^2y^2 = x^3y^2 + x^2y^3$.

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy^3 \qquad \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial y}(x,y) = 2x^3y + 3x^2y^2$$

C 38 *Soient* $n, p, q \in \{1, 2\}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ *et* $V \subset \mathbb{R}^q$ *deux ouverts et* $f : U \to \mathbb{R}^q$ *et* $g : V \to \mathbb{R}^n$ *deux applications de classe* $\mathscr{C}^1$ *telles que* $f(U) \subset V$. *Alors pour* $a \in U$,

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = (\mathrm{d}g(f(a))) \circ (\mathrm{d}f(a)).$$

D 39 Soient $n, p \in \{ 1, 2 \}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$ la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) est $\partial_j f_i(a)$, où les f_i sont les fonctions coordonnées de f. On note

$$\mathrm{Jac}_a f = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

E 40

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice ligne
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$
qui s'identifie naturellement au vecteur $\nabla f(a)$.
2. Si $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice colonne
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix}.$$
Puisque f est une fonction d'une seule variable réelle, il s'agit de la dérivée usuelle d'une fonction à valeurs vectorielles.
3. Si $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice carrée
$$\operatorname{Jac}_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne est la matrice $(1, 1)$: $\operatorname{Jac}_a f = (f'(a))$ qui s'identifie avec le nombre dérivé de f en a.

E 41 Avec $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$\operatorname{Jac}_{(r,\theta)}\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

P 42 *La matrice jacobienne* $\operatorname{Jac}_a f$ *est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire* $\mathrm{d}f(a)$.

P 43 *Soient* $n, p, q \in \{1, 2\}$, $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$ *deux ouverts et* $f : U \to \mathbb{R}^q$ *et* $g : V \to \mathbb{R}^n$ *deux applications de classe* $\mathscr{C}^1$ *telles que* $f(U) \subset V$. *Alors* $g \circ f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et si* $a \in U$, *on a*

$$\operatorname{Jac}_a(g \circ f) = (\operatorname{Jac}_{f(a)} g) \times (\operatorname{Jac}_a f).$$

D 44 Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Une application $f : U \to V$ est un **difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$** si f est bijective, et si f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

P 45 *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tout $a \in U$,*

$$\mathrm{Jac}_{f(a)}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Jac}_a f\right)^{-1}.$$

R

- Cet énoncé est l'exact analogue de l'énoncé équivalent pour une fonction d'une seule variable : $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.
- Si f est un difféomorphisme, on a pas besoin de déterminer f^{-1} pour déterminer ses dérivées partielles. Il suffit d'inverser la matrice jacobienne de f.

P 46 *Soit* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \leq 0 \}$, $V =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. *On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & V & \to & U \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \psi: & U & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

Alors φ *et* ψ *sont deux difféomorphismes de classe* $\mathscr{C}^1$ *réciproques l'un de l'autre.*

R Pour le physicien, une fonction f (penser à T une température ou P une pression) désigne une grandeur physique, qui a une existence indépendante du choix des variables utilisées pour la décrire. Par exemple, un physicien désignera de la même lettre la température en un point d'une plaque infinie exprimée en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires. Si par exemple la température est inversement proportionnelle à la distance à $(0,0)$, on aura

$$T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{mais} \quad T(r,\theta) = \frac{k}{r}.$$

Mais que désigne alors $T(2,3)$? C'est pour cela qu'un mathématicien n'utilisera pas le même symbole pour ces deux fonctions. On écrira préférentiellement $T(x,y)$ et
$\tilde{T}(r,\theta) = T(r\cos\theta, r\sin\theta)$ afin de les distinguer. [1]
Le physicien écrira donc quant à lui

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

---

[1] L'histoire se complique encore avec le gradient ou les matrices jacobiennes. On a bien

$$\nabla\tilde{T} = \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}, \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}\right),$$

expression différente du gradient (en coordonnées cartésiennes) de T exprimé en coordonnées polaires donnée par la formule (1).

P 47 **Un calcul à savoir refaire**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$*. On définit une application*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}.$$

Alors g *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

C 48

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\vec{u}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\vec{v}(\theta). \tag{1}$$

E 49 Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy. \tag{E}$$

On utilisera le changement de variable $\begin{cases} u = \dfrac{x}{2} \\ v = y - \dfrac{3x}{2} \end{cases}$.

D 50 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de qui admet des dérivées partielles premières sur U. On dit que f admet des **dérivées partielles d'ordre 2** sur U si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles sur U, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

sont définies. On note alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si ces quatre fonctions sont continues sur U, on dit que f est de **classe $\mathscr{C}^2$** sur U.

D 51 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$ est un champ de vecteurs. On dit que F est **de classe $\mathscr{C}^2$** sur U si f_1 et f_2 le sont.

R

- L'application f est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, autrement dit, si et seulement si le champ de vecteurs ∇f est de classe $\mathscr{C}^1$.
- On définit de manière analogue, par récurrence, les dérivées partielles d'ordre $k \geq 3$ et les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Les combinaisons linéaires, produits et composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sont de classe $\mathscr{C}^2$:

P 52 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, noté $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

P 53 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, noté $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau. De plus, si f et g sont deux fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Alors*

- *l'application fg est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si f ne s'annule pas sur U, l'application $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(U) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g(J) \subset U$, alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur J.*

E 54 Les fonctions polynomiales et rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur domaine de définition.

T 55 Calculer les dérivées partielles secondes de l'application f et vérifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 3x^5 y + \sin x \cos y \end{array}$$

T 56 **de Schwarz**

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : U \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathscr{C}^2$. *Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Démonstration. Non exigible. ∎

Si on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles secondes, le résultat est faux en général.

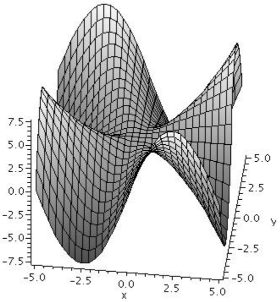
E 57 **Fonction f telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont différentes.**

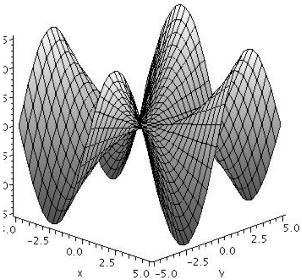
Soit

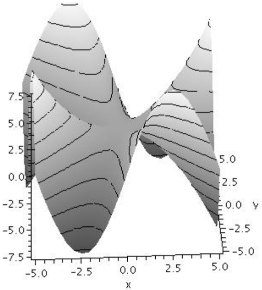
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

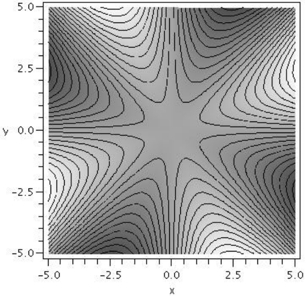
Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont différentes.

$$z = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$









E 58 Soit $c > 0$. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{E}$$

appelée équation des cordes vibrantes.

D 59 Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

- On dit que f a un **maximum local** en $a \in U$ si il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in U, \|z - a\| < r \implies f(a) \geq f(z).$$

- On dit que f a un **minimum local** en $a \in U$ si il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in U, \|z - a\| < r \implies f(a) \leq f(z).$$

- On dit que f a un **extrémum local** en $a \in U$ si f admet en a un minimum local ou un maximum local.

E 60 **Très simple**

L'application définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ a un minimum local (et même global) en $(0, 0)$.

P 61 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si f admet un extrémum local au point $a \in U$ alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

ou de manière équivalente $\mathrm{d}f(a) = 0$ ou encore $\nabla f(a) = \vec{0}$.

D 62 Un point a vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ est appelé un **point critique** de f.

E 63 **Très simple**

Avec $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

E 64 On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-2x+xy+y^2 \end{array}$.
Déterminer les extrémums locaux de f.

Démonstration. La fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'*ouvert* $\mathbb{R}^2$.

1. On commence par chercher les point critiques de f. Ici, le seul point critique de f est le point $a = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.
2. On vérifie à la main, au cas par cas, si les points critiques sont bien des extrémums locaux. Pour cela, on étudie le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ pour (x,y) proche de $a = (x_0, y_0)$. On peut pour cela regarder le signe de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour h,k assez proche de 0.
   Pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$, on a
   $$f\left(\frac{4}{3}+h, -\frac{2}{3}+k\right) + \frac{4}{3} = h^2+hk+k^2 = \left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0.$$
   Donc f admet un minimum local (et même global) en $a = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

∎

R

- La propriété donne seulement une condition nécessaire pour qu'il y ait un extrémum local en a. Par exemple $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ a un unique point critique $(0, 0)$ mais f n'a pas d'extrémum local en ce point car pour tout $r > 0$, et pour tout $t \neq 0$,

$$f(t, 0) = t^2 > 0 \text{ et } f(0, t) = -t^2 < 0,$$

  et $(t, 0), (0, t) \in B((0, 0), r)$ dès lors que $|t| < r$.

  Ici, on dit que $(0, 0)$ est un **point selle** ou **point col** de f.

- L'hypothèse U ouvert est fondamentale. Par exemple, l'application

$$f : \begin{array}{rcl} [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

  a un maximum en $(1, 1)$ alors que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \neq 0$.

- Plus généralement, si $U \subset \mathbb{R}^2$ est quelconque et si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrémum local au point a, alors a est un point appartenant à la «frontière» de U ou alors a est intérieur à U et est donc un point critique.

E 65 **G. Peano, 1884. Application qui n'admet pas de minimum relatif en $(0,0)$ alors que sa restriction à chaque droite affine passant par $(0,0)$ admet un minimum relatif strict.**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x^4 - 4x^2y + y^2 \end{array}$$

T 66 **Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en a, c'est-à-dire que pour $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ assez petit

$$\begin{aligned} f(a+v) = f(x_0+h, y_0+k) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot k^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right). \end{aligned}$$

N On note $H_f(a)$ la matrice

$$H_f(a) = \left(\partial_i \partial_j f(a)\right)_{1\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 devient

$$f(a+v) = f(a) + \langle v, \nabla f(a)\rangle + \frac{1}{2}\langle v, H_f(a)\cdot v\rangle + o\left(\|v\|^2\right)$$

ou encore

$$f(a+v) = f(a) + \nabla f(a)^T v + \frac{1}{2} v^T H_f(a)\cdot v + o\left(\|v\|^2\right).$$

P 67 **Théorème spectral en dimension 2**

Soit $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ *une matrice symétrique réelle. Alors* H *est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire*

1. *Il existe* $P \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ *et* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tels que*

$$P^T H P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2. *Il existe une base orthonormée de* $\mathbb{R}^2$ *formée de vecteurs propres de* H.

T 68 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a) = 0$. Posons*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \text{ avec } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a),$$

de sorte que d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(a+v) = f(a) + Q(v)/2 + o\left(\|v\|^2\right)$$

où

$$Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

Notons λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de $H_f(a)$, (qui sont réelles car $H_f(a)$ est symétrique).

1. *Si f admet un minimum local en a, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, +\infty[$.*
2. *Si f admet un maximum local en a, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in]-\infty, 0]$.*
3. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in]-\infty, 0[$, alors f admet un minimum local (strict) en a.*
4. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, +\infty[$, alors f admet un maximum local (strict) en a.*
5. *Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a.*

M Avec les notation précédentes,

$$\lambda_1\lambda_2 = \det H_f(a) = rt - s^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = r + t.$$

Alors, d'après le théorème

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: f admet un minimum local en a.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: f admet un maximum local en a.
3. Si $rt - s^2 < 0$, alors $\lambda_1\lambda_2 < 0$: f n'admet pas d'extremum local en a.
4. Si $rt - s^2 = 0$, alors l'une des valeurs propres est nulle : on ne peut pas conclure.

D 69 Soit f un champ continu de vecteurs défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On dit que f **dérive d'un potentiel scalaire** lorsqu'il existe une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f = \nabla F$$

On dit alors que F est un **potentiel** de f.

En physique, une force $\vec{F}$ est conservative s'il existe une fonction E telle que $\vec{F} = -\nabla(E) = \nabla(-E)$.

Si $f = (f_1, f_2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et dérive d'un potentiel F alors F est de classe $\mathscr{C}^2$ et le théorème de Schwarz affirme que [2]

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

La réciproque est vraie sous certaines conditions.

[2] Cette condition correspond à $\mathrm{rot}\,\vec{f} = \vec{0}$ en dimension 3.

D 70 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est **étoilé** s'il existe un point $a \in U$ tel que

$$\forall z \in U, [a, z] \subset U$$

où $[a, z] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda z \mid \lambda \in [0, 1] \}$ est le segment joignant les points a et z. On dit alors que U est **étoilé par rapport à $\boldsymbol{a}$**.

T 71 **Lemme de Poincaré**

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Alors f dérive d'un potentiel scalaire F. Les autres potentiels de f sont les fonctions $F + k$ avec k constante.

Démonstration. Non exigible. ∎

1. Calcul différentiel
2. Composition
3. Changements de variables
4. Dérivées partielles d'ordre supérieur
5. Extrémums locaux
6. Potentiel scalaire
7. Brève extension aux fonctions de trois variables