Chapter 8 Corps des nombres complexes

8.1 Définition des nombres complexes

Exercice 8.1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1 - 2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2 + i)^3$.
6. $z_6 = (1 + i)^2 - (2 - i)^2$.

Exercice 8.2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3 + i)(2 - 3i)(4 + 5i)$.
2. $z_2 = (1 + i)^{10}$.
3. $z_3 = (2 - i)^4$.

Exercice 8.3

Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Exercice 8.4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1 + 4i)z + (1 - 2i) = iz + 3$
2. $\dfrac{1 + 3iz}{1 + 3z} = i\dfrac{z + 2}{z - 5}$

8.2 Conjugué, module

Exercice 8.5

À tout nombre complexe z différent de 0 et -1, on associe

$$u = \frac{z^2}{z + 1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{z(z + 1)}.$$

1. Déterminer z pour que u et v soient tous deux réels.
2. Calculer les valeurs correspondantes de u et v.

Exercice 8.6

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 8.7 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 8.8

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z-2|=3$.
2. $|2z-1+i|=4$.
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$.
4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right|=1$.

Exercice 8.9 *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 8.10

Soit $z\in\mathbb{C}$, montrer

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0 \implies |z|\leq 1.$$

Exercice 8.11

Soit z un nombre complexe différent de -1 et M le point du plan d'affixe z. On pose $z'=\frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. z' soit réel ;
2. z' soit imaginaire pur ;
3. z' soit de module 2.

8.3 Racines d'un polynôme

Exercice 8.12

Calculer les racines carrées des complexes suivants.

1. $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
2. $\dfrac{1+i}{1-i}$.
3. $3-4i$.
4. $-8+6i$.
5. $5+12i$.

Exercice 8.13

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. $z^2+3z+3-i=0$.
2. $z^2-4z+5=0$.
3. $z^2-z-iz+5i=0$.
4. $z^2-(7+i)z+12+3i=0$.

Exercice 8.14

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. $4z^2-16z+11-12i=0$.
2. $z^2+5z+7-i=0$.
3. $z^2-5z+4+10i=0$.

Exercice 8.15

Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2-(3+2i)z+5+i=0$$

d'inconnue complexe z.

Exercice 8.16

Résoudre l'équation

$$(1+i)z^2 - 2(1+4i)z + 5(1+3i) = 0,$$

d'inconnue complexe z.

Exercice 8.17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2\,(1+i)\,z - 5\,(1+2i) = 0. \qquad (1)$$

Exercice 8.18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \qquad (1)$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Exercice 8.19

Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Exercice 8.20

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

8.4 Représentation trigonométrique

Exercice 8.21

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de modules 1. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ existe bien et $f(\theta) \in \mathbb{U}$.

2. f est-elle injective ?

3. f est-elle surjective ?

Exercice 8.22

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1 + i$;

2. $1 - i\sqrt{3}$;

3. i ;

4. $-2\sqrt{3} + 2i$;

5. $2 + i$;

6. 17 ;

7. $-3i$;

8. $-\pi$;

9. $-12 - 5i$;

10. $-5 + 4i$.

Exercice 8.23

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\varrho e^{i\theta}$ où ϱ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

2. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

3. $1 + i\tan\alpha$.

4. $\cos\alpha + i(1 + \sin\alpha)$.

5. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

6. $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\beta+i\sin\beta}$.

7. $e^{i\beta}-e^{i\alpha}$.

8. $e^{i\beta}+e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Exercice 8.24

Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 8.25

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 8.26

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega+\omega^4$ et $\beta = \omega^2+\omega^3$.

1. Calculer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$.
2. En déduire α et β.
3. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.
4. Déterminer $\sin\frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

Exercice 8.27

Calculer le module et un argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\le 2p\le n}} (-1)^p \binom{n}{2p} = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\le 2p+1\le n}} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$$

Exercice 8.28

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Exercice 8.29

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n\in\mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x\sin^3 x$.
5. $\cos^2 x\sin^4 x$.

Exercice 8.30

Linéariser les expressions suivantes où $x\in\mathbb{R}$.

1. $\cos^2 x \sin x$.
2. $\sin^3 x \cos^3 x$.
3. $\sin^4 x \cos^2 x$.
4. $\cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 8.31

À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$ et en déduire

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x \;\text{ et }\; J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.32

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$
2. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \;\text{ et }\; \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$
3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta).$$

Exercice 8.33 *IMT PSI 2022*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 8.34 *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 8.35

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

8.5 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 8.36

1. Quels sont les complexes z non nuls tels que $z + \frac{1}{z}$ est réel ?
2. Quels sont les complexes z tels que les points d'affixes 1, z, z^3 sont alignés.

Exercice 8.37

Dans le plan complexe, soit I le point d'affixe i. À tout point M d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe iz.

1. On suppose que $z \neq 0$. Calculer la partie imaginaire de $\frac{z-i}{z-iz}$ en fonction de x et y.

2. On suppose toujours que $z \neq 0$. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\frac{z-i}{z-iz}$ pour que les trois points I, M et M' soient alignés. Exprimer cette condition en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

8.6 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

Exercice 8.38

Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 8.39

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

2. $(z^2 - 2z)\cos^2\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.40

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

2. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.

3. $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

Exercice 8.41

On considère le polynôme $P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

1. (Cours) Donner la définition et les expressions des racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

2. À l'aide de ces racines cinquièmes de l'unité, déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Vérifier qu'elles sont toutes réelles.

3. Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec a, b, c des réels que l'on calculera.

   Déterminer alors une autre écriture des racines de P.

4. Comparer les résultats obtenus et en déduire une expression algébrique de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 8.42

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{2}$$

3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,
$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{3}$$

4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,
$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{4}$$

5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.

6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$

7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 8.43

Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 8.44

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha. \tag{1}$$

Exercice 8.45 *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

8.7 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Exercice 8.46

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.

2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.

4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.