

# Fonctions circulaires

# Aperçu

1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

## 1. Fonctions trigonométriques

### 1.1 Le cercle trigonométrique

### 1.2 Signe et valeurs remarquables

## 2. Formulaire de Trigonométrie

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

# 1. Fonctions trigonométriques

## 1.1 Le cercle trigonométrique

## 1.2 Signe et valeurs remarquables

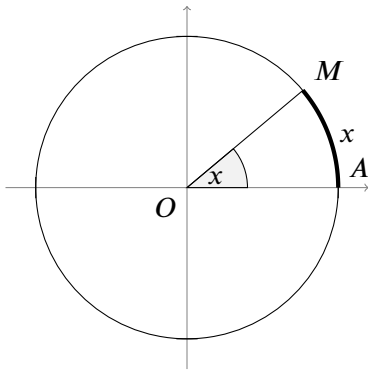
## 2. Formulaire de Trigonométrie

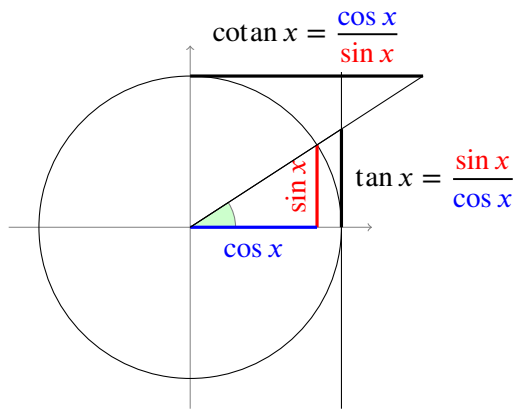
## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

On utilisera souvent les fonctions **trigonométriques**, appelées fonctions **cosinus**, **sinus**, **tangente** et **cotangente**, abrégées par cos, sin, tan et cotan.





T

Résoudre l'équation  $5x + \pi/2 \equiv 0 \pmod{\pi}$ .

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Par le théorème de Pythagore

**P** *Pour tout réel  $x$ ,*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**R** Pour les fonctions trigonométrique, l'habitude est de noter

$$\sin^2(x) = (\sin x)^2$$

$$\cos^2(x) = (\cos x)^2$$

$$\tan^2(x) = (\tan x)^2.$$

On fait de même pour les autres puissances, même pour  $-1$ :

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan x},$$

et ceci n'a rien à voir avec une quelconque fonction réciproque (qui n'existe pas pour les fonctions  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ).



Par le théorème de Thalès,

P

1. Si  $x - \frac{\pi}{2}$  n'est pas multiple de  $\pi$ , alors

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

2. Si  $x$  n'est pas multiple de  $\pi$ , alors

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

3. Si  $x$  n'est pas un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ , alors

$$\cotan x = \frac{1}{\tan x}.$$

*C'est pour cela que cotangente est peu utilisé.*

4. Si  $x - \frac{\pi}{2}$  n'est pas multiple de  $\pi$ , alors

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

P

*Si on donne deux réels  $u$  et  $v$  vérifiant  $u^2 + v^2 = 1$ , alors le point de coordonnées  $(u, v)$  se trouve sur le cercle trigonométrique, et il existe un réel  $x$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que*

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

P

*Si  $x$  et  $y$  sont deux réels*

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi \iff x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

# 1. Fonctions trigonométriques

## 1.1 Le cercle trigonométrique

## 1.2 Signe et valeurs remarquables



## 2. Formulaire de Trigonométrie

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

	Quadrants			
$x$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	+	−
$\cotan x$	+	−	+	−

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cotan x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Ces égalités sont, de préférence, à mémoriser visuellement, sur le cercle trigonométrique ou sur les courbes des fonctions circulaires.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$



## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Lorsque  $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ,  $y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  et  $x + y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Lorsque  $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$  et  $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

En posant  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , lorsque  $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Si de plus,  $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ,

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$



## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)).$$

## 1. Fonctions trigonométriques

## 2. Formulaire de Trigonométrie

### 2.1 Angles associés

### 2.2 Formules d'addition

### 2.3 Formules de duplication

### 2.4 Formules de Carnot

### 2.5 Formules de l'angle moitié

### 2.6 Formules de Simpson inverses

### 2.7 Formules de Simpson

## 3. Équations trigonométriques

## 4. Étude des fonctions trigonométriques

## 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

1. Fonctions trigonométriques

2. Formulaire de Trigonométrie

3. Équations trigonométriques

3.1 Résolution d'équations trigonométriques

3.2 Principe de superposition des sinusoïdes

4. Étude des fonctions trigonométriques

5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1. Fonctions trigonométriques

2. Formulaire de Trigonométrie

3. Équations trigonométriques

3.1 Résolution d'équations trigonométriques

3.2 Principe de superposition des sinusoides

4. Étude des fonctions trigonométriques

5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

T

*Si  $x$  et  $y$  sont deux réels, alors*

$$\cos x = \cos y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi})$$

$$\sin x = \sin y \iff (x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi})$$

*Si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ , on a*

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}$$

1. Fonctions trigonométriques

2. Formulaire de Trigonométrie

3. Équations trigonométriques

3.1 Résolution d'équations trigonométriques

3.2 Principe de superposition des sinusoïdes

4. Étude des fonctions trigonométriques

5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires



P

## Superposition des sinusoïdes

*Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , alors, il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

*Si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors  $\varphi$  est unique modulo  $2\pi$ .*

1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
  - 4.1 Étude des fonctions cosinus et sinus
  - 4.2 Étude de la fonction tangente
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
  - 4.1 Étude des fonctions cosinus et sinus
  - 4.2 Étude de la fonction tangente
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

P

1. Pour tout réel  $x$ ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

2. Les fonctions cosinus et sinus sont  $2\pi$ -périodiques. Pour tout réel  $x$  et tout entier  $k$ ,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

3. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire. Pour tout réel  $x$ ,

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Le lemme suivant, relativement clair sur le dessin, ne se démontre pas si facilement géométriquement.

## L Admis

Pour tout réel  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin(x) \leq |x|.$$

## L Continuité du sinus et du cosinus en 0

Les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Des premier et second lemmes, nous déduisons la limite du rapport  $\sin(x)/x$  lorsque  $x$  tend vers 0 ; cette quantité n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0. Ce résultat prouve donc la dérivabilité de la fonctions sinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du sinus en 0 :  $\sin'(0) = 1$ .

Le second résultat prouve la dérivabilité du cosinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du cosinus en 0 :  $\cos'(0) = 0$ .

- L**
1. *Le rapport  $\frac{\sin x}{x}$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 0.*
  2. *Le rapport  $\frac{\cos x - 1}{x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0.*

T

## Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus

*Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont définies et dérivables (donc continues) sur  $\mathbb{R}$  et on a*

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos .$$

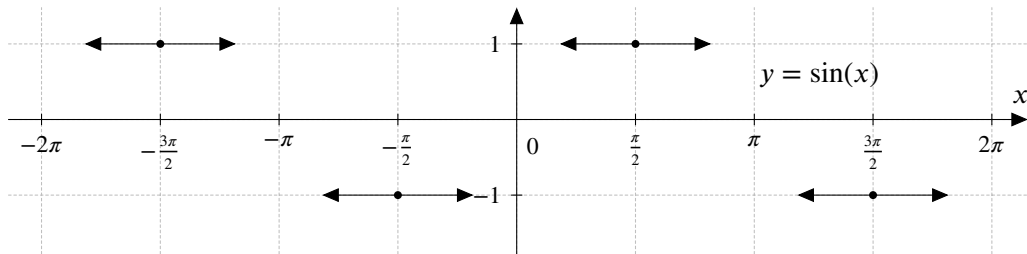
*Démonstration.* Soit  $x, h \in \mathbb{R}$ . Puisque

$$\sin(x + h) = \sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h),$$

la fonction sinus est dérivable en  $x$  de dérivée  $\sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \cos(x)$ .

On raisonne de la même façon pour la fonction cosinus. ■

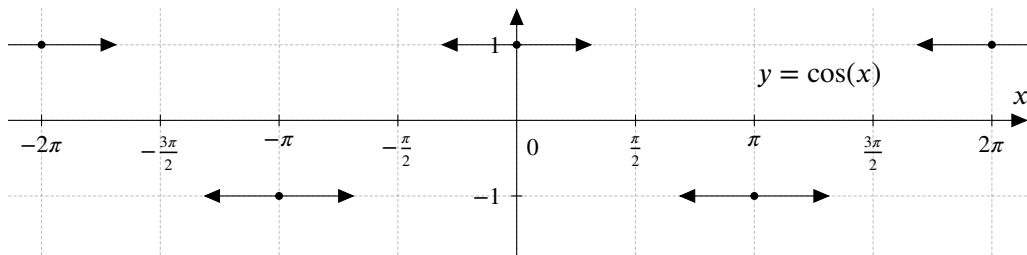
La fonction sinus est impaire et  $2\pi$ -périodique ; il suffit de l'étudier sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .<sup>1</sup> La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin' = \cos$ . Le sinus est donc croissant sur  $[0, \pi/2]$  (de 0 à 1) puis décroissant sur  $[\pi/2, \pi]$  (de 1 à 0). La courbe représentative du sinus admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses  $x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ . La tangente à l'origine est d'équation  $y = x$  (il s'agit de la première bissectrice du repère). On en déduit la courbe représentative de la fonction sinus.



<sup>1</sup>On pourrait encore réduire l'intervalle d'étude car pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ . La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = \pi/2$ .



On peut faire une étude similaire pour le cosinus, mais la relation  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ , valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , montre que la courbe de la fonction cosinus s'obtient en translatant celle du sinus du vecteur  $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{e}_1$ .



1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
  - 4.1 Étude des fonctions cosinus et sinus
  - 4.2 Étude de la fonction tangente
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires

P

1. La fonction  $\tan$  est définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right).$$

par la relation  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ .

2. La fonction  $\tan$  est  $\pi$ -périodique. Pour tout réel  $x$  tel que  $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  et tout entier  $k$ ,

$$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

3. La fonction  $\tan$  est impaire. Pour tout réel  $x$  tel que  $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ,

$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

T

## Dérivabilité de la fonction tangente

*La fonction  $\tan$  est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition et on a*

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

*Démonstration.* Puisque le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire là où le dénominateur ne s'annule pas, la fonction tangente est dérivable et pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ ,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$



P

On a les limites suivantes au bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \searrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty.$$

Les droites d'équations  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  sont donc asymptotes verticales à la courbe de la fonction  $\tan$ .

*Démonstration.* On rappelle que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0, \pi/2[$ , on a  $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ , or,

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \sin(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \nearrow \pi/2} \cos(x) = 0+$$

d'où  $\lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$ .

On a un résultat analogue en  $-\pi/2$  car  $\tan$  est une fonction impaire. ■

La fonction tangente est définie sur l'ensemble

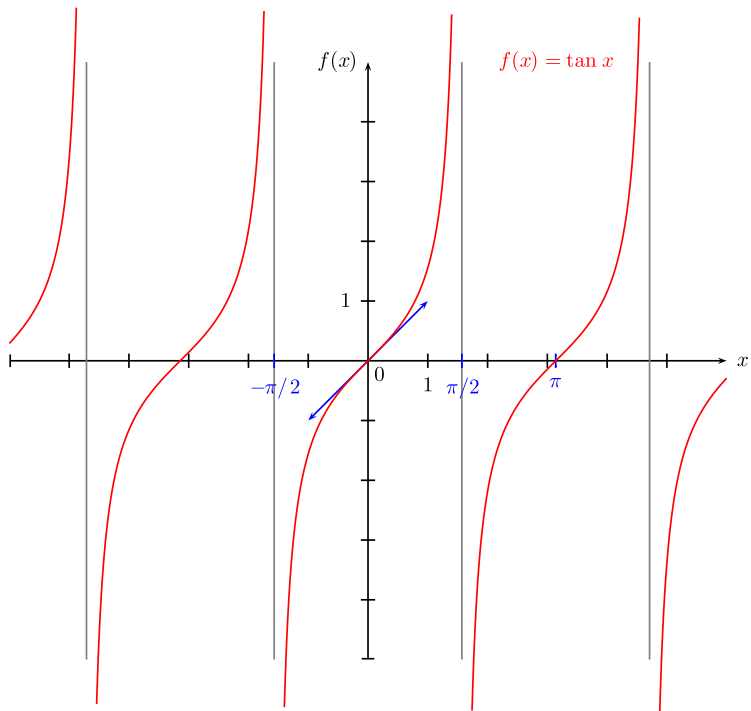
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

La tangente est une fonction impaire et  $\pi$ -périodique : il suffit de l'étudier sur l'intervalle  $[0, \pi/2[$  pour tracer sa courbe représentative sur  $\mathcal{D}$ . Enfin, pour  $x \in [0, \pi/2[$ ,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

La fonction tangente est donc strictement croissante sur  $[0, \pi/2[$ . De plus,  $\tan'(0) = 1$  ; la droite d'équation  $y = x$  est donc tangente à la courbe représentative de  $\tan$ .

Remarquez que la fonction tangente réalise une bijection de  $[0, \pi/2[$  sur  $[0, +\infty[$ .



1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires
  - 5.1 La fonction arcsin
  - 5.2 La fonction arccos
  - 5.3 La fonction arctan



1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
- 5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires**
  - 5.1 La fonction arcsin**
  - 5.2 La fonction arccos
  - 5.3 La fonction arctan

D

La restriction  $\widetilde{\sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  de la fonction sinus réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ . La bijection réciproque de la fonction  $\widetilde{\sin}$  est appelée l'**arcsinus** et notée

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \widetilde{\sin}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction arcsin est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arcsin x) \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

La fonction arcsinus *n'est pas* la réciproque de sin, mais celle d'une restriction bien choisie.

E

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

T

Calculus.

$$1. \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right). \quad \left| \quad 2. \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right). \quad \left| \quad 3. \arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

## Propriétés de l'arcsinus

1.  $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$  et  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .
2.  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x$ .
3. *Plus généralement, on a l'équivalence pour  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$\arcsin(\sin x) = x \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

## Étude de l'arcsinus

1. *L'application arcsin est impaire et continue sur  $[-1, 1]$ .*
2. *L'arcsinus est dérivable sur  $] - 1, 1[$  avec*

$$\forall x \in ] - 1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. *L'arcsinus n'est pas dérivable en  $\pm 1$ , sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.*

*Démonstration.* 1. La fonction  $\sin$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\cos$ , qui est positive sur l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ , ne s'annulant sur cet intervalle qu'en  $\pm\pi/2$ . La fonction sinus réalise donc une bijection strictement croissante de  $[-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[-1, 1]$ . De plus, ces deux ensembles étant des intervalles et  $\sin$  étant continue sa bijection réciproque  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  est continue. De plus, l'arcsinus est une fonction impaire ; en effet, pour  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin x) = -x \text{ et } -\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

c'est-à-dire  $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$ .<sup>2</sup>

2. Soit  $y \in [-1, 1]$ . D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction arcsinus est dérivable en  $y$  si et seulement si

$$\sin'(\arcsin(y)) = \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2} \neq 0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si  $y \neq \pm 1$ . La fonction arcsin est donc dérivable sur  $] -1, 1[$ , avec sur cet intervalle  $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ .

3. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, le calcul de  $\sin'(\arcsin y)$  montre que la courbe représentative de la fonction arcsin admet une tangente verticale aux points d'abscisses  $\pm 1$ .

---

<sup>2</sup>De manière générale, on peut montrer que la réciproque d'une bijection impaire est impaire. ▶

1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires
  - 5.1 La fonction  $\arcsin$
  - 5.2 La fonction  $\arccos$
  - 5.3 La fonction  $\arctan$

D

La restriction  $\widetilde{\cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  de la fonction cosinus réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . La bijection réciproque de la fonction  $\widetilde{\cos}$  est appelée l'**arccosinus** et notée

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \widetilde{\cos}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction arccos est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arccos x) \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}.$$



E

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos(1) = 0$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

T

Calculer

$$1. \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right). \quad \left| \quad 2. \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right). \quad \left| \quad 3. \arccos\left(\cos\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

## P Propriétés de l'arccosinus

1.  $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$  et  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .
2.  $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$ .
3. *Plus généralement, on a l'équivalence pour  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leq x \leq \pi.$$

T Démontrer la proposition précédente.

P

## Étude de l'arccosinus

1. L'application arccos n'est ni paire ni impaire. Elle est continue sur  $[-1, 1]$ .
2. L'arccosinus est dérivable sur  $] - 1, 1[$  avec

$$\forall x \in ] - 1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

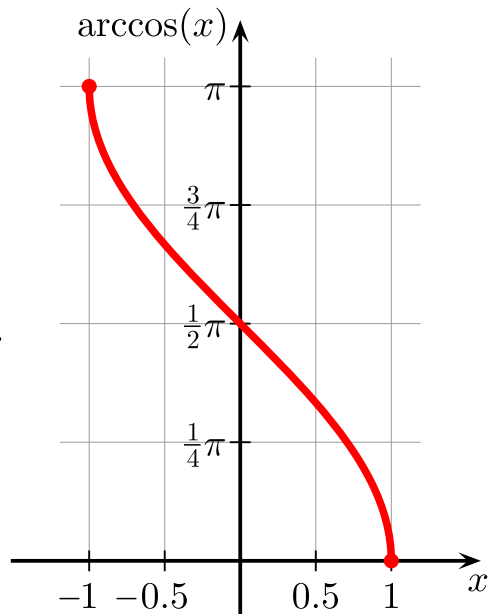
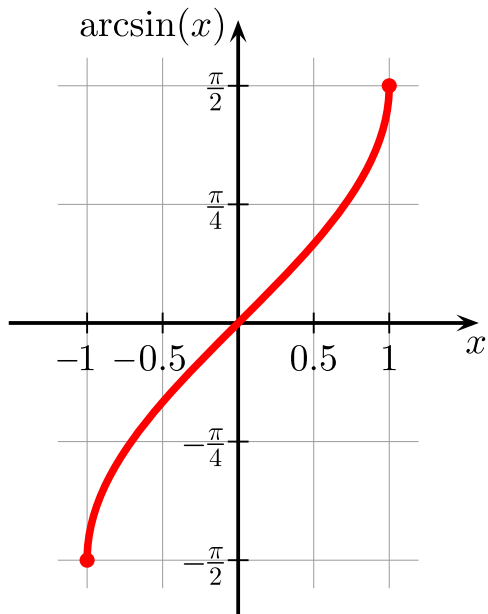
3. L'arccos n'est pas dérivable en  $\pm 1$ , sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.

Démonstration.



R

Soit  $x \in [-1, 1]$ . On a  $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ . La courbe représentative de la fonction arccos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .



1. Fonctions trigonométriques
2. Formulaire de Trigonométrie
3. Équations trigonométriques
4. Étude des fonctions trigonométriques
5. Fonctions réciproques des fonctions circulaires
  - 5.1 La fonction arcsin
  - 5.2 La fonction arccos
  - 5.3 La fonction arctan

D

La restriction  $\widetilde{\tan} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  de la fonction tangente réalise une bijection  
$$x \mapsto \tan x$$

de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ . La bijection réciproque de la fonction  $\widetilde{\tan}$  est appelée l'**arctangente** et notée

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x &\mapsto \widetilde{\tan}^{-1}(x) \end{aligned}$$

La fonction  $\arctan$  est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arctan x) \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

E

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

T

Calculus

$$1. \arctan\left(\tan\left(\frac{33\pi}{7}\right)\right). \quad \left| \quad 2. \arctan\left(\tan\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right). \quad \left| \quad 3. \arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right).$$

## Propriétés de l'arctangente

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$
2.  $\forall x \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \arctan(\tan x) = x.$
3. *Plus généralement, on a l'équivalence*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right), \arctan(\tan x) = x \iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$



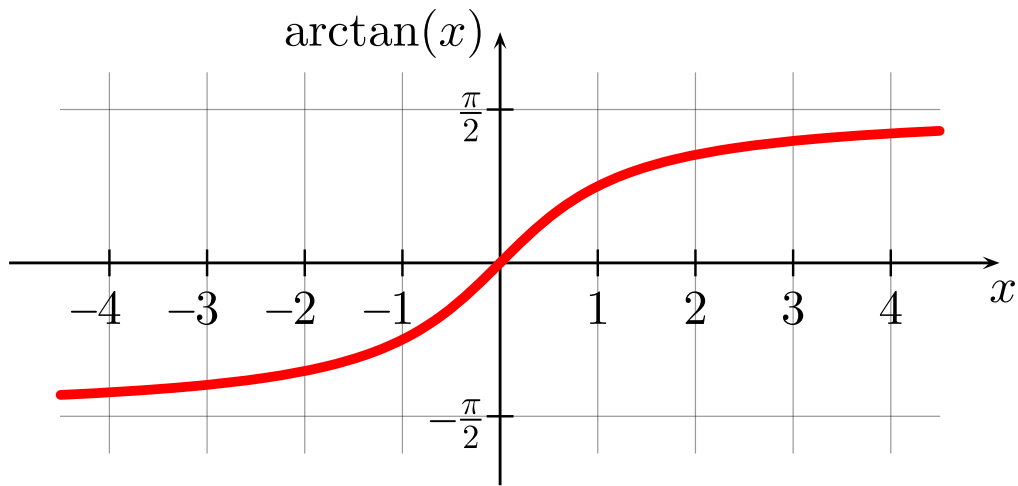
## P Étude de l'arctan

1. L'application  $\arctan$  est impaire et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. L'arctangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.  $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$ .

*Démonstration.* Les limites en  $\pm\infty$  sont admises en début d'année. ■



T

Montrer que  $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$ .