# Chapter 23 Suites de nombres réels et complexes

## 23.1 L'ensemble des suites

**Exercice 23.1**

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

## 23.2 Limite d'une suite

**Exercice 23.2**

Soit $(u_n)$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite $(u_n)$ est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite $(u_n)$ ne converge pas vers 0.
4. La suite $(u_n)$ n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

**Exercice 23.3**

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

**Exercice 23.4**

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

**Exercice 23.5**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \frac{3n}{2n^2-1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ donné.

**Exercice 23.6**

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 23.7**

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 23.8**

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et $\ell$ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers $\ell$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2025\varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon \in ]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}$.

**Exercice 23.9**

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

## 23.3 Suite et relations d'ordres

**Exercice 23.10**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$$

**1.** Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

**2.** En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

**Exercice 23.11**

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

**Exercice 23.12**

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

**Exercice 23.13**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

**Exercice 23.14**

Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

**Exercice 23.15**

Soit $(u_n)$ une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} \geq k u_n$ ; $k$ désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Exercice 23.16**

Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel $\alpha$ et une nombre $k$, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Exercice 23.17**

Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Exercice 23.18**

Soit $u$ et $v$ deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

**Exercice 23.19**

Soit $A$ une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et $M$ un *majorant* de $A$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $M$ est la borne supérieure de $A$.

(ii) Il existe une suite d'éléments de $A$ convergente vers $M$.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de $A$ convergente vers $M$.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

## 23.4 Opérations algébriques

**Exercice 23.20**

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}.$$

**Exercice 23.21**

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$ ;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$ ;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$ ;
5. $u_n = (-1)^n$ ;
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

**Exercice 23.22**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

**Exercice 23.23**

On considère la suite positive $(u_n)$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et $(v_n)$ la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de la suite $(v_n)$, puis celle de $(u_n)$.

**Exercice 23.24**

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(u_n)$ définie par

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$.

2. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$.

3. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$.

4. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^\star)^2$.

5. $u_n = \dfrac{5n^2+\sin n}{3(n+2)^2\cos(\frac{n\pi}{5})}$.

6. $u_n = \sqrt{n+\cos(n)}-\sqrt{n}$.

**Exercice 23.25** (***) *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses $n$ premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel $\ell$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\ell$. Soit $\varepsilon>0$.

   (a) Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$ entraîne $|u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) Montrer que pour tout entier $n>n_0$ on a
   $$|a_n-\ell| \leq \frac{|u_1-\ell|+|u_2-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n}+\frac{|u_{n_0+1}-\ell|+\cdots+|u_n-\ell|}{n}.$$

   (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1>n_0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n>n_1$ entraîne
   $$\frac{|u_1-\ell|+|u_2-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel $\ell$. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
   On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
   On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n=p^3 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

   (c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
   Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par $\ell$. Conclure.

**Exercice 23.26**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$, avec $\ell\in[-\infty,+\infty]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=\ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

   (a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\ell$ avec $\ell\in[0,+\infty]$, alors
   $$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}=\ell.$$

   (b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

## 23.5 Comparaison des suites de référence

## 23.6 Suites monotones

**Exercice 23.27**

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

**Exercice 23.28**

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n>0}$ est convergente.

**Exercice 23.29**

Soit $(u_n)$ une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante.
2. Montrer que $(v_n)$ est majorée et en déduire que $(v_n)$ est convergente vers un réel $L \leq \ell$.
3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\ell = L$.

La suite $(v_n)$ s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite $(u_n)$ et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite $(u_n)$ est croissante.

**Exercice 23.30**

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

**Exercice 23.31**

L'objet de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la restriction de $f$ à tout intervalle non trivial soit surjective.

À cette fin, posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ la limite finie de la suite $(\tan(n!\pi x))_{n\in\mathbb{N}}$ si celle-ci existe, 0 sinon.

1. (a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, la fonction $f$ est $r$-périodique.
   (b) En déduire la restriction de $f$ à $\mathbb{Q}$.
2. Le but de cette question est de montrer que $f$ est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $y = \tan(\pi x)$.
   (b) Notons, pour tout $n$,
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k!}.$$
   Justifier que la suite $(u_n)$ converge. Soit $\ell$ la limite de cette suite.

(c) Établir que $n!\left(\ell-u_n\right)\to x$ lorsque $n\to+\infty$.

(d) En déduire que $f(\ell)=y$.

*On admettra que* $\tan$ *est continue et donc que si une suite* $x_n$ *tend vers* $x\in\mathbb{R}\backslash\{\,\pi/2+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\,\}$, *alors* $\tan(x_n)$ *tend vers* $\tan(x)$.

**3.** Montrer le résultat annoncé.

**Exercice 23.32** (**)

Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n\geq 2, u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}\ \text{ et }\ v_n=u_n+\frac{1}{3n^2}.$$

**Exercice 23.33**

Montrer que les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n!}\qquad w_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

**Exercice 23.34**

Soient $a_0$ et $b_0$ deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}\qquad\text{et}\qquad b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}.$$

**1.** Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

**2.** En calculant $a_{n+1}+b_{n+1}$, montrer que $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers $\dfrac{a_0+b_0}{2}$.

**Exercice 23.35**

Soient $a,b$ deux réels vérifiant $0<a<b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0=a$, $v_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n};\qquad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

**1.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n>u_n$.

**2.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

**3.** Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note $\ell$ leur limite commune.

**4.** Calculer $u_nv_n$. En déduire $\ell$ en fonction de $a$ et $b$.

**Exercice 23.36** *Suites de Cauchy*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\left(n\geq n_0\ \text{ et }\ p\geq n_0\implies\left|u_n-u_p\right|\leq\varepsilon\right).\tag{1}$$

**1.** Montrer que la suite est bornée.

**2.** Montrer qu'elle est convergente.

## 23.7 Suite extraites

**Exercice 23.37**

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{3p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 23.38**

1. Montrer que pour tout $x, y$ réels, on a
$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$
2. Soit $a$ et $b$ réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par
$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$
Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.
4. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont même limite.

ue Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

**Exercice 23.39**

Montrer que la suite de terme général $u_n = n\sin^2\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

**Exercice 23.40**

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

**Exercice 23.41** (**)

Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par
$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $v$ diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

**Exercice 23.42** *Des (contre-)exemples utiles*

Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. la suite $(u_n)$ possède exactement $k$ valeurs d'adhérence, pour $k = 0, 1, 2, 3$.
2. la suite $(u_n)$ possède une seule valeur d'adhérence, et est divergente.
3. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est $\mathbb{N}$.
4. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est $[0, 1]$.

**Exercice 23.43** $\limsup$ *et* $\liminf$

Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par
$$a_n = \inf\left\{ u_k \;\middle|\; k \geq n \right\} \quad \text{et} \quad b_n = \sup\left\{ u_k \;\middle|\; k \geq n \right\}$$

1. Montrer que les suite $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent. On note $\liminf u_n$ la limite de $(a_n)$ et $\limsup u_n$ la limite de $(b_n)$.

2. Montrer que si $a$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)$, alors

$$\liminf u_n \leq a \leq \limsup u_n.$$

3. Montrer que $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$. Montrer que $(u_n)$ converge si, et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$.

4. Montrer que cette notion coïncide avec

$$\limsup u_n = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n \right\}.$$

**Exercice 23.44** (****) *Un intervalle de valeurs d'adhérence*

Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est un intervalle.

**Exercice 23.45**

Soit $(x_n)$ une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de $(x_n)$ convergeant vers des limites distinctes.

## 23.8 Exemples de suites complexes