Chapter 12 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

12.1 Ensemble des solutions

12.2 Résolution d'une équation d'ordre 1

Exercice 12.1

Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) - 2y(t) = \mathrm{ch}(2t). \tag{E}$$

Exercice 12.2

Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = 8\sin(2x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 12.3

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = 4$.
2. $y'(t) + y(t) = 2t + 3$.
3. $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t)$.
4. $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$.
5. $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t)$.

Exercice 12.4

Soit f une fonction non nulle et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, f(t+u) = f(t)f(u). \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f : t \mapsto e^{at}$.

arque L'équation (1) est une **équation fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'inconnue est une fonction.

12.3 Résolution d'une équation d'ordre 2

Exercice 12.5

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 12.6

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Exercice 12.7

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0. \tag{H}$$
2. Trouver une solution $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle
$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{it}. \tag{E_1}$$
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2\cos(t) - \sin(t). \tag{E}$$
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

Exercice 12.8

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t + \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer sous la forme $y_1 : t \mapsto (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, une solution particulière réelle de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t \tag{E_1}$$
3. Déterminer une solution particulière complexe y_2 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{it} \tag{E_2}$$
4. En déduire une solution particulière réelle y_3 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E_3}$$
5. Utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution particulière réelle y_0 de (E).
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 12.9

Résoudre le problème de Cauchy, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(x) \tag{E}$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0.$$

Exercice 12.10

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Exercice 12.11

Résoudre les équations différentielles

1. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t)$;

2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(2t)$.

3. $y''(t) + y(t) = \cos^3(t)$;

Exercice 12.12
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes

1. $y''(t) - y(t) = t^3 + t^2$.

2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$.

3. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(mt)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.13
Résoudre l'équation

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 12.14
Déterminer les solutions réelles du système

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}.$$

Exercice 12.15
On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{E}$$

1. On pose $z(t) = y(t)^2$. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle simple (E').

2. Résoudre l'équation (E).

12.4 Cas d'un second membre polynôme-exponentielle

Exercice 12.16 *Équations différentielles avec second membre polynôme-exponetielle*
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}(t^2 + 2t + 1)$.
2. $y'(t) - 2y(t) = -e^{-t}(3t^2 + t + 2)$.
3. $y'(t) - y(t) = e^{2t}(3t + 2)$.
4. $y'(t) - y(t) = 2e^{-t}(-t^2 + t + 2)$.
5. $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}(2t + 1)$.