Chapter 36 Espaces vectoriels

36.1 Structure d'espace vectoriel

Solution 36.1

Solution 36.2

Le vecteur x est combinaison linéaire de a et b si, et seulement si il existe deux scalaires $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $x = sa + tb$. Or

$$\begin{aligned}
\exists s, t \in \mathbb{R} x = sa + tb &\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 7 \\ \alpha \\ -6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ -s + 3t &= \alpha \\ 3s + 7t &= -6 \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ 3s + 7t &= -6 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ 11t &= -33 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} s &= 5 \\ t &= -3 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \alpha = -5 - 9 = -14.
\end{aligned}$$

Conclusion

Le vecteur $x = (7, \alpha, -6)$ est combinaison linéaire de $a = (2, -1, 3)$ et $b = (1, 3, 7)$ si, et seulement si $\alpha = -14$.

Solution 36.3

Pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 = Q \\
\iff &\alpha X^3 + (\alpha + \beta) X^2 + (\alpha + \beta + \gamma) X + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 7X^3 - 5X^2 + 11 \\
\iff &\begin{cases} \alpha &= 7 \\ \alpha + \beta &= -5 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 11 \end{cases} \\
\iff &\alpha = 7 \text{ et } \beta = -12 \text{ et } \gamma = 5 \text{ et } \delta = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion

Le polynôme Q est combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3, P_4 car on a

$$Q = 7P_1 - 12P_2 + 5P_3 + P_4.$$

Solution 36.4

36.2 Sous-espaces vectoriels

Solution 36.5
Solution 36.6

1. *Avec la définition / caractérisation.*

   S_1 est un sous-espace vectoriel de E. En effet, on a bien $0_E = (0,0,0)^T \in S_1$ (car $0 = 0 = 3 \cdot 0$).
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z)^T$, $v = (x', y', z')^T \in S_1$, on a

$$z = y = 3x \quad (1)$$
$$z' = y' = 3x' \quad (2)$$
$$(3)$$

$$u + v = (x + x', y + y', z + z')^T \text{ et } (z + z') = (y + y') = 3x + 3x' = 3(x + x').$$

   Donc $u + v \in S_1$. De même,

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)^T \text{ et } \alpha z = \alpha y = \alpha(3x) = 3(\alpha x).$$

   donc $\alpha u \in S_1$.

   Conclusion

   S_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode. En remarquant que

$$z = y = 3x \iff 3x - y = 0 \text{ et } y - z = 0.$$

On a donc $S_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. S_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3ème méthode. *En écrivant S_1 sous la forme* Vect $\{ \dots \}$

Soit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 3x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi S_1 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 3, 3)^T$; c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. *Avec la définition / caractérisation.*

   On a

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z + y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x - y - z = 0 \right\}.$$

   On a bien $0_E = (0, 0, 0)^T \in S_2$ (car $3 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z)^T$, $v = (x', y', z')^T \in S_2$, on a

$$3x - y - z = 0 \text{ et } 3x' - y' - z' = 0. \tag{4}$$

Or

$$u+v = (x+x', y+y', z+z')^T \text{ et } 3(x+x')-(y+y')-(z+z') = (3x-y-z)+(3x'-y'-z') = 0+0 = 0.$$

Donc $u + v \in S_2$. De même,

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)^T \text{ et } 3(\alpha x) - (\alpha y) - (\alpha z) = \alpha(3x - y - z) = \alpha 0 = 0.$$

Donc $\alpha u \in S_2$.

Conclusion

S_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode. S_2 est le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode bis. On peut remarquer que S_2 est un plan passant par l'origine, c'est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4ème méthode. On écrit S_2 comme Vect $\{ (1, 0, 3)^T, (0, 1, -1)^T \}$.

3. L'ensemble S_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_3, \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \notin S_3$$

puisque ce dernier vecteur ne vérifie par la condition $zy = 3x$.

4. L'ensemble S_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple $(1, 1, 0)^T \in S_4$, $(0, 0, 1)^T \in S_4$ leur somme $(1, 1, 1)^T \notin S_4$.

Géométriquement, S_4 est l'union du plan (Oxy) (d'équation $z = 0$), du plan (Oxz) (d'équation $y = 0$) et du plan (Oyz) (d'équation $x = 0$.

Solution 36.7

$0_{\mathbb{R}^n} \in S$ car $A0 = 0 = \lambda 0$.
Soit $x, y \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y);$$

donc $x + y \in S$. De plus,

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x);$$

ce qui prouve que $\alpha x \in S$.

Conclusion

S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2ème méthode. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} x \in S &\iff Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \\ &\iff Ax - \lambda I_n x = 0 \iff (A - \lambda I_n)x = 0 \iff x \in \ker\left(A - \lambda I_n\right). \end{aligned}$$

L'ensemble S est donc le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Solution 36.8

Solution 36.9

1. La matrice nulle $(3,3)$, notée 0_3 est symétrique: $0_3^T = 0_3$. Soit $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \text{ et } (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A.$$

On a donc $A + B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$.

Conclusion

L'ensemble $\mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

2. La matrice nulle $(3,3)$, notée 0_3 est antisymétrique: $0_3^T = 0_3 = -0_3$. Soit $A, B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$(A+B)^T = A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A+B) \text{ et } (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -(\alpha A).$$

On a donc $A + B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$.

Conclusion

L'ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Solution 36.10

Solution 36.11

Solution 36.12

Le vecteur nul de $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la fonction $\tilde{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$.

1. S_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de F. Pour le montrer, il suffit d'utiliser *un seul* des arguments suivants:
   - Puisque $\tilde{0}(0) = 0 \neq 1$, alors $\tilde{0} \notin S_1$: S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.
   - On a $\exp \in S_1$ et $\cos \in S_1$ et pourtant $(\exp + \cos)(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$, donc $\exp + \cos \notin S_1$. S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.
   - On a $\exp \in S_1$ mais $2\exp \notin S_1$. S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.

★ On a $\tilde{0}(1) = 0$ donc $\tilde{0} \in S_2$. De plus, si $f, g \in S_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0;$$

donc $f + g \in S_2$. De plus,

$$(\alpha f)(1) = \alpha(f(1)) = \alpha \cdot 0 = 0;$$

donc $\alpha f \in S_2$.

Conclusion

L'espace S_2 est un sous-espace vectoriel de F.

2. La fonction nulle $\tilde{0}$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{0}'(x) - \tilde{0}(x) = 0 - 0 = 0;$$

donc $\tilde{0} \in S_3$. Soit $f, g \in S_3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $f + g$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(f+g)'(x) - (f+g)(x) = f'(x) + g'(x) - f(x) - g(x) = f'(x) - f(x) + g'(x) - g(x) = 0 + 0 = 0;$$

donc $f+g \in S_3$. Deplus,

$$(\alpha f)'(x) - (\alpha f)(x) = \alpha f'(x) - \alpha f(x) = \alpha \left(f'(x) - f(x)\right) = \alpha \cdot 0 = 0;$$

donc $\alpha f \in S_3$.

Conclusion

L'espace S_3 est un sous-espace vectoriel de F.

2ème méthode Les solutions de l'équation différentielle $f' - f = 0$ sont les application de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x \end{array} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit,

$$S_3 = \{ \lambda \exp \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect} \{ \exp \} .$$

S_3 est donc la droite vectorielle engendré par la fonction exp : c'est donc un sous-espace vectoriel de F.

Solution 36.13

Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
L'application nulle $\tilde{0}$ appartient clairement à F car $\tilde{0} = 0 \cos$ (prendre $A = 0$ et $\varphi = 0$).
Soit $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $A, B, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\varphi) \text{ et } g(x) = B\cos(x+\psi).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda A \cos(x+\varphi) + \mu B \cos(x+\psi) \\ &= (\lambda A \cos\varphi + \mu B \cos\psi)\cos x - (\lambda A \sin\varphi + \mu B \sin\psi)\sin x \\ &= A' \cos x + B' \sin x \end{aligned}$$

où l'on a posé $A' = \lambda A \cos\varphi + \mu B \cos\psi$ et $B' = \lambda A \sin\varphi + \mu B \sin\psi$. Si $A' = B' = 0$, alors $\lambda f + \mu g = \tilde{0} \in F$. Sinon, l'égalité

$$\left(\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)^2 + \left(\frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)^2 = 1$$

assure l'existence d'un réel α tel que

$$\cos\alpha = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(x) &= \sqrt{A'^2 + B'^2}\,(\cos\alpha \cos(x) - \sin\alpha \sin(x)) \\ &= \sqrt{A'^2 + B'^2} \cos(x+\alpha) . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda f + \mu g \in F$.

Solution 36.14

1. U et V sont des sous-espace vectoriel de E, donc

$$0_E \in U \text{ et } 0_E \in V,$$

c'est-à-dire $0_E \in U \cap V$. Soit $x, y \in U \cap V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Puisque U est un sous-espace vectoriel de E, il est stable par combinaison linéaire. On a donc $\alpha x + \beta y \in U$.

De même V est un sous-espace vectoriel de E, donc $\alpha x + \beta y \in V$. Finalement

$$\alpha x + \beta y \in U \text{ et } \alpha x + \beta y \in V,$$

c'est-à-dire $\alpha x + \beta y \in U \cap V$.

Conclusion

$U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si $U \subset V$, alors $U \cup V = V$ est un sous-espace vectoriel de E. De même si $V \subset U$, alors $U \cup V = U$ est un sous-espace vectoriel de E.

Réciproquement, on suppose que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Supposons que $U \not\subset V$, nous allons alors montrer que $V \subset U$. Puisque $U \not\subset V$, il existe un vecteur x tel que

$$x \in U \text{ et } x \notin V.$$

Soit $y \in V$. Alors $x, y \in U \cup V$ et puisque $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $x + y \in U \cup V$.

- Premier cas : si $x + y \in U$.
  Puisque $x \in U$ et que U est un sous-espace vectoriel de E, on a $y = (x + y) - (x) \in U$.
- Deuxième cas : si $x + y \in V$.
  Puisque V est un sous-espace vectoriel de E, on a $x = (x + y) - (y) \in V$, ce qui est faux.

Finalement, on a$y \in U$. Nous avons donc montré $V \subset U$.

Conclusion

$U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

3. Par exemple $U = \left\{ (x, y, z)^T \mid z = 0 \right\}$ et $V = \left\{ (x, y, z)^T \mid x = 0 \right\}$.

Solution 36.17

1. Le vecteur a est combinaison linéaire de u et v si, et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v = a$. Or

$$\alpha u + \beta v = a \iff \begin{cases} 2\alpha - \beta & = 3 \\ -\alpha + \beta & = -2 \\ \alpha + 3\beta & = 4 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} \ldots & = \ldots \\ 0 & = 1. \end{cases}$$

Ce système est incompatible: le vecteur a n'est donc pas combinaison linéaire de u et v.

2. On a trivialement $0u + 0v = b$: le vecteur b est combinaison linéaire de u et v.

3. Le vecteur c est combinaison linéaire de u et v si, et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v = a$. Or

$$\alpha u + \beta v = c \iff \begin{cases} 2\alpha - \beta &= 7 \\ -\alpha + \beta &= -5 \\ \alpha + 3\beta &= -7 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= -3 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Ce système est compatible: le vecteur c est combinaison linéaire de u et v et on a

$$2u - 3v = c.$$

Solution 36.18

Solution 36.19

1. Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = v \iff \begin{cases} -3\alpha + 4\beta - 5\gamma &= 1 \\ \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ 2\alpha + \beta + 7\gamma &= -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ -3\alpha + 4\beta - 5\gamma &= 1 \\ 2\alpha + \beta + 7\gamma &= -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ -2\beta - 2\gamma &= 4 \\ 5\beta + 5\gamma &= -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ \beta + \gamma &= -2 \\ 0 &= 5 \end{cases}$$

Ce dernier système n'étant pas compatible, le vecteur v n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3.

2. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = u_3 \iff \begin{cases} -3\alpha + 4\beta &= -5 \\ \alpha - 2\beta &= 1 \\ 2\alpha + \beta &= 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\beta &= -2 \\ \alpha - 2\beta &= 1 \\ 5\beta &= 5 \end{cases} \iff \beta = 1 \text{ et } \alpha = 3.$$

Ainsi $u_3 = 3u_1 + u_2 \in \text{Vect}\left\{ u_1, u_2 \right\}$. Puisque $\text{Vect}\left\{ u_1, u_2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a alors

$$\text{Vect}\{ u_3 \} \subset \text{Vect}\{ u_1, u_2 \}.$$

L'inclusion est stricte puisque, par exemple, $u_1 \in \text{Vect}\{ u_1, u_2 \}$ et n'est pas colinéaire à u_3, c'est-à-dire $u_1 \notin \text{Vect}\{ u_3 \}$.

Solution 36.20

Montrons que $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(u, v)$. Le vecteur a est combinaison linéaire de u et v puisque

$$a = \alpha u + \beta v \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ 2\alpha - \beta &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ -5\beta &= -2 \\ -5\beta &= -2 \end{cases}$$

D'où l'on déduit $a = \frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v$. Mutatis mutandis,

$$b = \alpha u + \beta v \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 2\alpha - \beta &= 1 \\ 3\alpha + \beta &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ -5\beta &= 1 \\ -5\beta &= 1 \end{cases}$$

et l'on a $b = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v$. Ainsi, $\{ a, b \} \subset \operatorname{Vect} \{ u, v \}$; et comme $\operatorname{Vect}(a, b)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant a et b et que $\operatorname{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on a bien $\operatorname{Vect}(a, b) \subset \operatorname{Vect}(u, v)$.

Réciproquement, on trouve rapidement (les zéros aidant)

$$a + 2b = (1, 0, 1) + (0, 2, 2) = (1, 2, 3) = u \text{ et } 2a - b = (2, 0, 2) - (0, 1, 1) = (2, -1, 1) = v.$$

Ainsi $\{ u, v \} \subset \operatorname{Vect}(a, b)$ et donc $\operatorname{Vect}(u, v) \subset \operatorname{Vect}(a, b)$.

Conclusion

Par double inclusion, $\operatorname{Vect}(a, b) = \operatorname{Vect}(u, v)$.

Solution 36.21

Solution partielle.

On détaille la forme forme $\operatorname{Im}(M) = \operatorname{Vect}\left(v_1, \dots, v_k\right)$.

Pour l'utilisation de la définition, voir l'exercice ???…

1. Avec la défintion…

V2 On a $F_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

V3 Pour $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \iff x + y - z = 0 \iff x = -y + z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F_1 = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Im}(M) \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a également $F_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On a directement,

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s + t \\ s - t \\ s + t \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Im}(M)$$

avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. On a $F_3 = \ker B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

V2 Pour $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, on a,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_3 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x - y + z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x - y + z & = 0 \\ 2y - 2z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $F_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et donc F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_3 est une droite vectorielle.

4. Pour $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_4 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x - y - 2z & = 0 \\ 3x - y - z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x - y - 2z & = 0 \\ 2y + 5z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -\frac{1}{2} z \\ y & = -\frac{5}{2} z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $F_4 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_4 est une droite vectorielle.

2è méth. On remarque que F_4 est le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; et on a

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Et on a donc, pour $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker A \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ -5t/2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve $F_4 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. On a directement

$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_5 est une droite vectorielle.

Chapter 37 Applications linéaires

37.1 Applications linéaires

Solution 37.2
Solution 37.3

1. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est donc dérivable est a fortiori continue, autrement dit $A(f) \in E$.

2. Soit $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer l'égalité entre fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
A(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^x (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \alpha f(t) + \beta g(t) dt \\
&= \alpha \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^x g(t) dt && \because \text{linéarité de } \int_{[0,x]} \\
&= \alpha A(f)(x) + \beta A(g)(x) \\
&= (\alpha A(f) + \beta A(g))(x).
\end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

L'application A est donc linéaire.

Solution 37.4

Fait en cours.

Solution 37.5

Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $w = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(v + w) &= f(x + x', y + y') \\
&= (x + x' + 3(y + y'), 4(x + x') - 2(y + y')) \\
&= (x + 3y + x' + 3y', 4x - 2y + 4x' - 2y') \\
&= (x + 3y, 4x - 2y) + (x' + 3y', 4x' - 2y') \\
&= f(v) + f(w), \\
\text{et } f(\alpha v) &= f(\alpha x, \alpha y) \\
&= (\alpha x + 3\alpha y, 4\alpha x - 2\alpha y) \\
&= \alpha(x + 3y, 4x - 2y) \\
&= \alpha f(v).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'application f est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que f est bijective, c'est-à-dire

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \exists! u \in \mathbb{R}^2 f(u) = v.$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f(u) = v \iff \begin{cases} x + 3y &= x' \\ 4x - 2y &= y' \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y &= x' \\ -14y &= -4x' + y' \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{7}x' + \frac{3}{14}y' \\ y &= \frac{2}{7}x' - \frac{1}{14}y' \end{cases}$$

Ce qui assure l'existence et l'unicité de u tel que $f(u) = v$. L'application f est donc bijective et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{1}{7}x + \frac{3}{14}y, \frac{2}{7}x - \frac{1}{14}y\right) \end{array}.$$

Il ne (*vous*) reste plus qu'a montrer que f^{-1} est bien linéaire.

Solution 37.6

Puisque f et Id_E sont linéaires,

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = f \circ f - \mathrm{Id}_E \circ f + f \circ (2\,\mathrm{Id}_E) - \mathrm{Id}_E \circ (2\,\mathrm{Id}_E) = f \circ f + f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0. \qquad (1)$$

Ainsi,

$$f \circ f + f = 2\,\mathrm{Id}_E$$

d'où

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)\right) = \mathrm{Id}_E \text{ et } \left(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)\right) \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

L'application f est donc bijective et $f^{-1} = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right)$.

37.2 Anatomie d'une application linéaire

Solution 37.7

1. Supposons $g \circ f = 0$, c'est-à-dire
$$\forall x \in E, g(f(x)) = 0.$$
Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors,
$$g(y) = g\left(f(x)\right) = 0$$
c'est-à-dire $y \in \ker g$.

   Conclusion. $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

   Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

   Soit $x \in E$,
$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$
Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $f(x) \in \ker g$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = 0$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in E$, on a bien $g \circ f = 0$.

2. Soit $x \in \ker f$. Alors
$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g(0) = 0,$$
donc $x \in \ker g \circ f$.

   On a montré $\ker f \subset \ker g \circ f$.

3. Soit $y \in \operatorname{Im} g \circ f$. Il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$. On a donc
$$y = g(f(x)) \quad \text{et} \quad f(x) \in F$$
d'où $y \in \operatorname{Im} g$.

On a montré $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Solution 37.8

C'est un cas particulier de l'exercie précédent…

Solution 37.9

Solution 37.11

Solution 37.12

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2.$$

Solution 37.13

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$u(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = u(P) + u(Q) \text{ et } u(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha u(P).$$
L'application u est donc linéaire.

Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$.
$$\begin{aligned} u(P) = 0 \iff P' = 0 \iff \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n = 0 \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = 0 \iff \forall n \geq 1, a_n = 0 \iff P = a_0. \end{aligned}$$
On a donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Soit $Q = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. En posant $P = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n+1} X^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{b_{n-1}}{n} X^n$, on a bien $P \in \mathbb{R}[X]$ et $u(P) = P' = Q$, et donc $Q \in \operatorname{Im}(u)$. Finalement, $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}[X]$.

L'application u est donc surjective, mais n'est pas injective.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$u(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = u(P) + u(Q) \text{ et } u(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha u(P).$$
L'application u est donc linéaire.

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.
$$u(P) = 0 \iff P' = 0 \iff a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 = 0 \iff a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \iff P = a_0.$$
On a donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Soit $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. On cherche s'il existe $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $u(P) = Q$.
$$u(P) = Q \iff a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 \iff \begin{cases} a_1 &= b_0 \\ 2a_2 &= b_1 \\ 3a_3 &= b_2 \\ 0 &= b_3. \end{cases}$$
Ce système, d'inconnues $a_0, \dots, a_3$ est compatible si, et seulement si, $b_3 = 0$, c'est-à-dire $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$, autrement dit, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a donc $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X]$.

L'application u est donc ni surjective, ni injective.

3. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P+Q) &= ((P+Q)(-1),(P+Q)(0),(P+Q)(1)) = (P(-1)+Q(-1), P(0)+Q(0), P(1)+Q(1)) \\ &= (P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) = u(P)+u(Q) \\ \text{et } u(\alpha P) &= ((\alpha P)(-1),(\alpha P)(0),(\alpha P)(1)) = (\alpha P(-1), \alpha P(0), \alpha P(1)) \\ &= \alpha\,(P(-1), P(0), P(1)) = \alpha u(P). \end{aligned}$$

L'application u est donc linéaire.

De plus,

$$P \in \ker(u) \iff P(-1)=0, P(0)=0, P(1)=0$$

on a donc

$$\ker u = \{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-1)=0 \text{ et } P(0)=0 \text{ et } P(1)=0\ \} = \{\ (X+1)X(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\ \}.$$

L'application linéaire u n'est donc pas injective.

On remarque que

$$u(X(X-1)) = (2,0,0) \quad u((X-1)(X+1)) = (0,-1,0) \quad u(X(X+1)) = (0,0,2)$$

Ainsi

$$\mathrm{Vect}\ \{\ (2,0,0),(0,-1,0),(0,0,2)\ \} \subset \mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3.$$

Et on vérifie facilement que $((2,0,0),(0,-1,0),(0,0,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$: l'application u est surjective.

4. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P+Q) &= (P+Q)-(X-2)(P+Q)' = P+Q-(X-2)(P'+Q') \\ &= P-(X-2)P'+Q-(X-2)Q' = u(P)+u(Q) \\ \text{et } u(\alpha P) &= \alpha P - (X-2)(\alpha P)' \\ &= \alpha P - (X-2)\alpha P' = \alpha(P-(X-2)P') = \alpha u(P). \end{aligned}$$

L'application u est donc linéaire.

Soit $P \in \ker(u)$, alors $u(P)=0$, c'est-à-dire, $P = (X-2)P'$. En dérivant cette relation, on obtient $P' = P' + (X-2)P''$ d'où $(X-2)P'' = 0$ et donc $P''=0$. Ainsi, $\deg(P) \leq 1$. On peut donc écrire $P = aX+b$ où $a, b \in R$. On a alors,

$$\begin{aligned} u(P)=0 &\iff P-(X-2)P'=0 \iff aX+b-(X-2)a=0 \\ &\iff b+2a=0 \iff b=-2a \iff P=a(X-2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(u) = \mathrm{Vect}\ \{\ X-2\ \}$ et l'application u n'est pas injective.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, on cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u(P) = Q$. Notons $Q = \sum_{n\geq 0} b_n (X-2)^n$ et $P = \sum_{n\geq 0} a_n (X-2)^n$ (cette écriture est possible, on peut par exemple invoqué la formule de Taylor).

Alors

$$u(P) = P-(X-2)P' = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n(1-n)(X-2)^n = a_0 + \sum_{n\geq 2} a_n(1-n)(X-2)^n.$$

Ainsi,

$$u(P) = Q \iff \begin{cases} a_0 = b_0 \\ 0 = b_1 \\ a_n = \frac{b_n}{1-n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi $Q \in \operatorname{Im}(u)$ si, et seulement si $b_1 = 0$. L'application u n'est donc pas surjective. De plus,

$$\operatorname{Im}(u) = \left\{ a_0 + (X-2)^2 A \;\middle|\; A \in \mathbb{R}[X] \right\}.$$

Solution 37.14

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$A(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = A(P) + A(Q) \text{ et } A(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha A(P).$$

L'application A est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

De plus,

$$B(P+Q) = X(P+Q) = XP + XQ = B(P) + B(Q) \text{ et } B(\alpha P) = X(\alpha P) = \alpha XP = \alpha B(P).$$

L'application B est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

2. Soit P un polynôme, $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On pose

$$R(X) = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} X^n + \cdots + a_0 X.$$

On a $A(R) = P$ donc $P \in \operatorname{Im} A$. Ainsi $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[x]$.

De plus, si Q est un polynôme constant, $A(Q) = 0$. Par conséquent $\ker A \neq \{ 0 \}$ (en fait $\ker A = \mathbb{R}_0[X]$).

3. Soit P un polynôme, $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On a

$$B(P) = XP(X) = a_n X^{n+1} + a_{n-1} X^n + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X.$$

Si $B(P) = 0$, alors $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $P = 0$. Ainsi $\ker B = \{ 0 \}$. Par ailleurs, B n'est pas surjective, puisqueles polynômes constants différents du polynôme nul n'ont pas d'antécédent. L'application B n'étant pas bijective, elle n'a pas d'application réciproque.

4. Avec les même notations que précédement, on a

$$(A \circ B - B \circ A)(P) = (XP)' - XP' = P + XP' - XP' = P = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}[X]}(P).$$

d'où $A \circ B - B \circ A = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.

5. On a déjà démontré la proposition pour $k = 1$ à la question précédente. On suppos qu'elle est vérifiée pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$. On a alors,

$$\begin{aligned} (k+1)A^k &= A \circ k A^{k-1} + A^k \\ &= A \circ (A^k \circ B - B \circ A^k) + A^k \\ &= A^{k+1} \circ B - \left(A \circ B - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}[X]} \right) \circ A^k \\ &= A^{k+1} \circ B - (B \circ A) \circ A^k \\ &= A^{k+1} \circ B - B \circ A^{k+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi établi par récurrence que $A^k \circ B - B \circ A^k = k A^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Solution 37.15

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Rappelons que la dérivation des polynômes est linéaire, on a donc

$$\begin{aligned}
T(\lambda P + \mu Q) &= (3X+8)(\lambda P + \mu Q) + (X^2-5X)(\lambda P + \mu Q)' - (X^3 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' \\
&= (3X+8)(\lambda P + \mu Q) + (X^2-5X)(\lambda P' + \mu Q') - (X^3 - X^2)(\lambda P'' + \mu Q'') \\
&= \lambda\left[(3X+8)P + (X^2-5X)P' - (X^3-X^2)P''\right] + \mu\left[(3X+8)Q + (X^2-5X)Q' - (X^3-X^2)Q''\right] \\
&= \lambda T(P) + \mu T(Q).
\end{aligned}$$

L'application T est donc linéaire.

2. $T(1) = 8 + 3X$, $T(X) = 3X + 4X^2$, $T(X^2) = 3X^3$, $T(X^3) = -X^3$.

3. Puisque $\deg P = n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, d'où

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \quad \text{et} \quad P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k X^{k-2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
T(P) &= (3X+8)\sum_{k=0}^n \left(a_k X^k\right) + (X^2+5X)\sum_{k=1}^n \left(k a_k X^{k-1}\right) - (X^3-X^2)\sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2} \\
&= (3X+8)\left[a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k X^k\right)\right] + (X^2+5X)\left[n a_n X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(k a_k X^{k-1}\right)\right] \\
&\quad - (X^3-X^2)\left[n(n-1)a_n X^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)a_k X^{k-2}\right] \\
&= (3a_n + n a_n - n(n-1)a_n)X^{n+1} + R \quad \text{où } \deg R \leq n.
\end{aligned}$$

D'où det $T(P) \leq n$ si et seulement si $a_n(n^2 - 2n - 3) = 0$. Or

$$a_n \neq 0 \text{ et } n^2 - 2n - 3 = 0 \iff (n = 3 \text{ ou } n = -1).$$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, on en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(T(P)) \leq \deg P$ est $\boxed{n = 3}$.

Remarque : On a montré que si $\deg P \neq 3$ et $P \neq 0$, alors $\deg T(P) = \deg P + 1$.

4. Soit $P \in \mathbb{C}_3[X]$. On écrit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors

$$\begin{aligned}
T(P) &= (3X+8)(a + bX + cX^2 + dX^3) + (X^2-5X)(b + 2cX + 3dX^2) - (X^3-X^2)(2c + 6dX) \\
&= 8a + (3a+3b)X + 4bX^2 + (3c-d)X^3 + 0X^4; \qquad (1)
\end{aligned}$$

donc $T(P) \in \mathbb{C}_3[X]$. Finalement $T\left(\mathbb{C}_3[X]\right) \subset \mathbb{C}_3[X]$.

5. Le résultat de la question **??** montre que si $\deg P \geq 4$, alors $\deg T(P) > 4$. Un élément de $\ker T$ est donc de degré au plus 3.

De plus, d'après le calcul (1),

$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \ker T \iff \begin{cases} 8a = 0 \\ 3a + 3b = 0 \\ 4b = 0 \\ 3c - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 3c \end{cases} \iff P = c(X^2 + 3X^3).$$

Conclusion : $\boxed{\ker T = \operatorname{Vect}\left\{ X^2 + 3X^3 \right\}}$. Puisque $\ker T \neq \{ 0 \}$, on en déduit que $\boxed{T \text{ n'est pas injective}}$.

6. D'après la question **??**, un antécédent P de X par T est de degré ≤ 3 (sinon $1 = \deg X = \deg(T(P)) > \deg P > 3$).

En notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, le calcul (1) de la question **??** montre que l'on a

$$\begin{cases} 8a = 0 \\ 3a + 3b = 1 \\ 4b = 0 \\ 3c - d = 0 \end{cases}$$

d'où $c = d = 0$ puis $3c + 3d = 0 = 1$; ce qui est toujours faux.

Ainsi, le polynôme X n'a donc pas d'antécédent par T.

7. (CN) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $T(P) = 8P$. On a donc $\deg(T(P)) = \deg(P)$ et d'après la question **??**, $P = 0$ ou $\deg(P) = 3$. Les polynômes solutions sont donc à chercher dans $\mathbb{C}_3[X]$.

(CS) Écrivons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, d'après le calcul (1) de la question **??**, on a

$$T(P) = 8P \iff \begin{cases} 8a = 8a \\ 3a + 3b = 8b \\ 4b = 8c \\ 3c - d = 8d \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = 5b \\ b = 2c \\ c = 3d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 10d \\ b = 6d \\ c = 3d \end{cases} \iff P = d(10 + 6X + 3X^2 + X^3).$$

Conclusion :

$$\{ P \in \mathbb{C}[X] \mid T(P) = 8P \} = \operatorname{Vect}\left\{ 10 + 6X + 3X^2 + X^3 \right\}.$$

8. Pour $\lambda = 0$, $T(P) = 0$ caractérise les vecteurs du noyau d'où la solution $X^3 + \frac{1}{3}X^2$.

Pour $\lambda \neq 0$ et $P \neq 0$, $T(P) = \lambda P$ implique $\deg T(P) = \deg P$, d'où $\deg P = 3$. Écrivons $P = a + bX + cX^2 + X^3$, d'après le calcul (1) de la question **??**, on a

$$T(P) = \lambda P \iff \begin{cases} 8a = \lambda a \\ 3a + 3b = \lambda b \\ 4b = \lambda c \\ 3c - 1 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 3c = 1 + \lambda \\ 4b = \lambda c \\ 3a = (\lambda - 3)b \\ (8 - \lambda)a = 0. \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$, alors $\lambda = 8$ puis la solution $Q_8 = 10 + 6X + 3X^2 + X^3$ vue au dessus.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $\lambda = 3$ et on obtient la solution $Q_3 = X + \frac{4}{3}X^2 + X^3$.
- Si $a = b = 0$, alors $c = 0$ et $\lambda = -1$ et on obtient la solution $Q_{-1} = X^3$ (voir **??**).

Solution 37.16

1. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(f + g) = (f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = \varphi(f) + \varphi(g) \text{ et } \varphi(\alpha f) = (\alpha f)'(1) = \alpha f'(1) = \alpha\varphi f.$$

L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est donc une forme linéaire.

2. $F = \ker \varphi$, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Solution 37.17

Soit $f, g \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)'' = \alpha f'' + \beta g'' = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g).$$

Donc φ est linéaire. Deplus,

$$\begin{aligned} f \in \ker \varphi \iff f'' = \tilde{0} \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha + \beta x \\ \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f = \alpha\tilde{1} + \beta \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

où $\tilde{1} : x \mapsto 1$ est la fonction constante égale à 1. On a donc

$$\ker \varphi = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha + \beta x \end{array} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \tilde{1}, \operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Montrons que φ est surjective, on aura donc $\operatorname{Im}\varphi = E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc continue, sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive f_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$. De même, la fonction f_1 admet une primitive F de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $F'' = f_1' = f$, c'est-à-dire

$$\varphi(F) = f \text{ avec } F \in E.$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "g_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "g_4"'] & A_5 \arrow[d, "g_5"'] \\ B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5 \end{tikzcd}$$

Solution 37.18 *Lemme des 5*

Solution 37.19

$$\ker f = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2.$$

f est surjective et n'est pas injective.

Solution 37.20

Solution 37.21

Solution 37.22

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \theta(P + Q) &= ((P + Q)(0), (P + Q)(1), (P + Q)(2)) \\ &= (P(0) + Q(0), P(0) + Q(1), P(2) + Q(2)) \\ &= (P(0), P(1), P(2)) + (Q(0), Q(1), Q(2)) \\ &= \theta(P) + \theta(Q) \\ \text{et } \theta(\alpha P) &= ((\alpha P)(0), (\alpha P)(1), (\alpha P)(2)) \\ &= (\alpha P(0), \alpha P(1), \alpha P(2)) \\ &= \alpha\,(P(0), P(1), P(2)). \end{aligned}$$

L'application θ est donc linéaire.

2. Soit $P \in \ker\theta$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Ainsi P a au moins 3 racines et $\deg P \leq 2$, le polynôme P est donc nul. Ainsi $\ker\theta = \{ 0 \}$ et l'application linéaire θ est injective.

Variante. (À la main). Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = aX^2 + bX + c$.

$$P \in \ker\theta \iff \begin{cases} P(0) &= 0 \\ P(1) &= 0 \\ P(2) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a+b+c &= 0 \\ 4a+2b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c &= 0 \\ a &= -b \\ -2b &= 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \iff P = 0.$$

Ainsi $\ker\theta = \{ 0 \}$ et l'application linéaire θ est injective.

Variante (à la main). Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\theta(P) = (x, y, z)$.

$$\theta(P) = (x, y, z) \iff \begin{cases} P(0) &= x \\ P(1) &= y \\ P(2) &= z \end{cases} \iff \begin{cases} c &= x \\ a+b+c &= y \\ 4a+2b+c &= z \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c &= y \\ -2b-3c &= z-4y \\ c &= x \end{cases}$$

Ce système est toujours compatible : $(x, y, z) \in \operatorname{Im}\theta$. Ainsi θ est une application surjective.

Solution 37.23

Solution 37.24

Solution 37.25

Chapter 38 Sommes et projecteurs

38.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Solution 38.1
Solution 38.2
Solution 38.3
Solution 38.4
Solution 38.5

Soit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. On cherche $u' \in \text{Vect}\{u\}$ et $v' \in \text{Vect}\{v\}$ tels que $(x, y)^T = u' + v'$. Cela revient à déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} -\alpha - 3\beta \\ 2\alpha + 5\beta \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta & = x \\ 2\alpha + 5\beta & = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha - 3\beta & = x \\ -\beta & = y + 2x \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 5x + 3y \\ \beta & = -2x - y \end{cases}$$

Ce qui assure l'existence et l'unicité de la décomposition de tout $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ dans $\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\}$. On a donc

$$R^2 = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{v\}.$$

Solution 38.6

Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$, $3x - y + z = 0$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (t, -t, t)$. En reportant dans l'équation, on obtient

$$3t - (-t) + t = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = 0.$$

Ainsi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$; On a donc $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. De plus, $\dim F = 2$ (on reconnait l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$) et $\dim G = 1$ (car $G = \text{Vect}\{(1, -1, 1)\}$). On a donc

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

d'où $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Solution 38.8
Solution 38.9

1. La fonction nulle $\tilde{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ est paire.

   Soit $f, g \in \mathcal{P}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

   $$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x).$$

   Ainsi, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   On effectue une démonstration analogue pour $\mathcal{I}$.

2. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

   et donc $f(x) = -f(x)$, c'est-à-dire $f(x) = 0$. On a donc $f = \tilde{0}$. Finalement $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{\tilde{0}\}$.

3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(CN) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} f(x) + f(-x) &= 2g(x) \\ f(x) - f(-x) &= 2h(x) \end{cases}$$

(CS) Posons

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}.$$

Alors on a clairemenent,

$$f = g + h, \quad g \in \mathcal{P} \text{ et } f \in \mathcal{I}.$$

4. On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{ \tilde{0} \}$ d'après la question **2** et $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ d'après la question 3. Finalement,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

38.2 Projecteurs

Solution 38.12

1.

2. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff x + y - z = 0 \iff \begin{cases} x &= x & & \\ y &= & & y \\ z &= x &+ & y \end{cases} \iff (x, y, z) \in \operatorname{Vect}\{ (1, 0, 1), (0, 1, 1) \}.$$

Ces deux vecteurs forment donc une famille génératrice de $\mathcal{P}$. Or ils sont non colinéaires , ils forment donc aussi une famille libre. Donc $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathcal{P}$ et $\dim \mathcal{P} = 2$. De plus $\dim \mathcal{D} = 1$ car $((1, 2, 0))$ est une base de $\mathcal{D}$. Ainsi

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D}.$$

Vérifions que $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

- Puisque $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 0)$.
- De plus $(x, y, z) \in \mathcal{P}$, on a donc $x + y - z = 0$.

On a donc $0 = x + y - z = \lambda + 2\lambda = 3\lambda$ et ceci entraîne $\lambda = 0$ donc $(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puis $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$. Ainsi, on a donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ et $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D}$, ce qui prouve

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}.$$

3. On note p cette projection. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à exprimer $p(x, y, z)$. Notons pour cela

$$(X, Y, Z) = p(x, y, z)$$

et cherchons (X, Y, Z) en fonction de x, y, z.

- On sait que $p(x, y, z) = (X, Y, Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ donc $X + Y - Z = 0$[1].
- De plus, $p(x, y, z) - (x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(X, Y, Z) - (x, y, z) = p(x, y, z) - (x, y, z) = \lambda(1, 2, 0)$. On a donc

$$X = x + \lambda, \quad Y = y + 2\lambda, \quad Z = z.$$

De $X + Y - Z = 0$, on déduit $(x + \lambda) + (y + 2\lambda) - z = 0$, ce qui donne

$$\lambda = -\frac{x + y - z}{3}.$$

On en déduit que

$$p(x, y, z) = (X, Y, Z) = \left(x - \frac{x + y - z}{3}, y - 2\frac{x + y - z}{3}, z\right) = \left(\frac{2x - y + z}{3}, \frac{-2x + y + 2z}{3}, z\right).$$

Solution 38.14

Solution 38.15

1. L'application $p + q$ est linéaire. De plus, $p^2 = p$ et $q^2 = q$, donc

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$$

Ainsi $p + q$ est un projecteur si, et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors $p \circ q + q \circ p = 0$ et donc $p + q$ est un projecteur.

$(\Longrightarrow)$ Réciporquement, supposons que $p + q$ soit un projecteur, alors $p \circ q = -q \circ p$. En composant cette relation à gauche par p, on obtient

$$p \circ (p \circ q) = p \circ (-q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ p = q \circ p^2 = q \circ p.$$

Et puisque $(p \circ p) \circ q = p \circ q$, on obtient

$$q \circ p = p \circ q.$$

De la relation $p \circ q + q \circ p = 0$, on déduit alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Si $x \in \ker p \cap \ker q$, alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où

$$(p + q)(x) = 0 \quad \text{et} \quad x \in \ker(p + q).$$

On a donc $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p + q)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(p + q)$. On remarque que $p \circ (p + q) = p^2 + \cancel{p \circ q} = p$, d'où

$$p(x) = p\left((p + q)(x)\right) = p(0) = 0 \quad \text{et} \quad x \in \ker p.$$

De même, $q \circ (p + q) = \cancel{q \circ p} + q^2 = q$, d'où

$$q(x) = q\left((p + q)(x)\right) = q(0) = 0 \quad \text{et} \quad x \in \ker q.$$

On a donc bien $x \in \ker p \cap \ker q$. Ainsi $\ker(p + q) \subset \ker p \cap \ker q$, et par double inclusion,

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q.$$

Montrons que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

[1] Puisque l'on a une base de $\mathcal{P}$, on peut également écrire $(X, Y, Z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1)$, mais cela rallonge un peu les calculs…

Tout d'abord, montrons que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im}(p+q)$. On a $(p+q)\circ p = p^2 + \cancel{q\circ p} = p$ donc Si $x \in \operatorname{Im}(p)$, alors

$$x = p(x) = (p+q)\,(p(x)) \in \operatorname{Im}(p+q);$$

d'où $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(p+q)$.

De même $(p+q)\circ q = q$ et l'on obtient $\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p+q)$.

Ainsi $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p+q)$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im}(p+q)$, alors il existe $v \in E$ tel que $x = (p+q)(v)$. Ainsi,

$$x = p(v) + q(v) \qquad p(v) \in \operatorname{Im} p \qquad q(v) \in \operatorname{Im} q.$$

On a donc $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$ et par double inclusion

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q).$$

Soit $x \in \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$. Puisque p et q sont des projecteurs, $p(x) = x$ et $q(x) = x$, d'où

$$p\circ q(x) = p\,(q(x)) = p(x) = x.$$

Or $p\circ q = 0$, d'où $x = 0$. On a donc $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) = \{\, 0 \,\}$.

Finalement,

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q).$$

Solution 38.17

1. p est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or

$$A^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

On a donc $p\circ p = p$: l'application p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

2. On a directement,

$$\ker(p) = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + y = 0 \,\right\} = \operatorname{Vect}\{\, (1,-2) \,\}$$
$$\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}\{\, (2,1) \,\} = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 0 \,\right\}..$$

marque On peut également utiliser le fait que $\operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$, et puisque $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -4/5 \end{pmatrix}$, on retrouve $\ker(p - \operatorname{Id}_E) = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 0 \,\right\}$.

3. En notant s la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ et suivant la direction $\ker p$, on a $s = 2p - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$, d'où

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, s(x,y) = \left(\frac{3x+4y}{5}, \frac{4x-3y}{5} \right).$$

Solution 38.18
Solution 38.19
Solution 38.20

Pour $(x_1, ..., x_n) \in E$, on pose $\phi((x_1, ..., x_n)) = x_1 + ... + x_n$. ϕ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de ϕ. H est donc bien un hyperplan de E.

Il est clair que, pour $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$. $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un espace vectoriel et donc, p est bien un endomorphisme de E.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\left(\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right)^2 = \sum_{(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'}.$$

Mais, $(S_n, \circ)$ est un groupe fini. Par suite, l'application $\begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\circ\sigma' \end{array}$, injective (même démarche que dans l'exercice **??**), est une permutation de S_n. On en déduit que, pour σ' donnée, $\sum_{\sigma\in S_n} f_{\sigma\circ\sigma'} = \sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$. Ainsi, en posant $q = n!p$.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}(\sum_{\sigma\in S_n} f_{\sigma\circ\sigma'}) = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n} q = \frac{1}{n!^2}.n!q = \frac{1}{n!}q = p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p. Soit $i \in \{1, ..., n\}$.

$$p(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a (bien sûr) autant de permuations σ telles que $\sigma(i) = 1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i) = 2$,... ou de permutations σ telles que $\sigma(i) = n$, à savoir $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Donc,

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ p(e_i) = \frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Posons $u = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(p(e_1), ..., p(e_n)) = \mathrm{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ est un élément de E,

$$p(x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k p(e_k) = 0 \iff (\sum_{k=1}^{n} x_k)u = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff x \in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H.

Solution 38.21

38.3 Symétries

Solution 38.22
Solution 38.23
Solution 38.24

38.4 Sommes et applications linéaires

Solution 38.25

1. Montrons $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$. [2] Soit $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, montrons que $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (v \circ u)(x)$, c'est-à-dire

$$y = v(t) \text{ avec } t = u(x) \in F.$$

Autrement dit, $y \in \operatorname{Im} v$; ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

Montrons $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$. Soit $x \in \ker u$. On a donc $u(x) = 0_F$ d'où

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_F) = 0_G;$$

c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$. Ceci montre l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.

2. ($\Longleftarrow$) Supposons $\operatorname{Im} u \subset \ker v$, montrons $v \circ u = \tilde{0}$ [3] c'est-à-dire

$$\forall x \in E, (v \circ u)(x) = 0_G.$$

Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$ or $\operatorname{Im} u \subset \ker v$ donc $u(x) \in \ker v$, c'est-à-dire $v(u(x)) = 0_G$, soit encore $(v \circ u)(x) = 0_G$.

($\Longrightarrow$) Supposons $v \circ u = \tilde{0}$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, montrons que $y \in \ker v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$ car $v \circ u = \tilde{0}$, autrement dit $y \in \ker v$; ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.

3. ($\Longrightarrow$) Supposons $\ker(v \circ u) = \ker u$ et montrons $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$. Soit $y \in \ker v \cap \operatorname{Im} u$. Puisque $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. De plus, $y \in \ker v$, c'est-à-dire $v(y) = 0_G$, on a donc

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(y) = 0_G,$$

c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$. Or on a supposé $\ker(v \circ u) = \ker u$, d'où $x \in \ker u$, d'où

$$y = u(x) = 0_F.$$

On donc $\ker v \cap \operatorname{Im} u \subset \{ 0_F \}$, l'inclusion réciproque étant évidente. [4]

($\Longleftarrow$) Supposons $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$. Montrons $\ker(v \circ u) \subset \ker u$. Soit $x \in \ker(v \circ u)$, on a donc $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0_G$, d'où

$$u(x) \in \ker v.$$

De plus, $u(x) \in \operatorname{Im} u$, d'où $u(x) \in \ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$, c'est-à-dire

$$u(x) = 0_F \text{ ou encore } x \in \ker u.$$

Nous avons montrer l'inclusion $\ker(v \circ u) \subset \ker u$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie d'après la question **??**, nous avons l'égalité $\ker(v \circ u) = \ker u$.

---

[2] Rien de nouveau ici, la linéarité de u et v ne sert à rien. On aurait pu également écrire $\operatorname{Im} u = u(E) \subset F$ donc

$$\operatorname{Im}(v \circ u) = (v \circ u)(E) = v(u(E)) \subset v(F) = \operatorname{Im} v.$$

[3] $\tilde{0}$ désigne l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,G)}$.

[4] L'inclusion $\{ 0_F \} \subset \ker v \cap \operatorname{Im} u$ est évidente, car $\ker v$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espace vectoriel de F.

4. ($\Longrightarrow$) Supposons que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ et montrons $\ker v + \operatorname{Im} u = F$. Soit $x \in F$. [5] On a $v(x) \in \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$, d'où l'existence de $t \in E$ tel que

$$v(x) = (v \circ u)(t).$$

Posons $y = u(t)$ et $z = x - y$, alors

$$v(z) = v(x) - v(y) = v(u(t)) - v(u(t)) = 0_G.$$

On a donc

$$x = y + z \qquad\qquad y = u(t) \in \operatorname{Im} u \qquad\qquad z \in \ker v;$$

ce qui montre que $x \in \operatorname{Im} u + \ker v$. Par conséquent, nous avons montrer $F \subset \operatorname{Im} u + \ker v$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie car $\operatorname{Im} u$ et $\ker v$ sont des sous-espace vectoriel de F, nous avons l'égalité annoncée.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\operatorname{Im} u + \ker v = F$ et montrons $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$. Soit $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe $x \in F$ tel que $y = v(x)$. Puisque $F = \operatorname{Im} u + \ker v$, il existe $t \in E$ et $z \in \ker v$ tels que

$$x = u(t) + z.$$

On a alors $y = v(x) = v(u(t)) + \cancel{v(z)} = (v \circ u)(t) \in \operatorname{Im}(v \circ u)$. Nous avons montré l'inclusion $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie d'après la question **??**, nous avons l'égalité $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

Solution 38.26
Solution 38.27
Solution 38.28
Solution 38.29

1. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g) = ((\lambda f + \mu g)(1), (\lambda f + \mu g)(2)) &= (\lambda f(1) + \mu g(1), \lambda f(2) + \mu g(2)) \\ &= \lambda\,(f(1), f(2)) + \mu\,(f(2), g(2)) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

F est le noyau de φ puisque l'on a l'équivalence pour $f \in E$,

$$f \in \ker \varphi \iff (f(1), f(2)) = (0,0) \iff f(1) = f(2) = 0 \iff f \in F.$$

Montrons que l'application φ est surjective. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(f) = (a, b)$, c'est-à-dire $f(1) = a$ et $f(2) = b$. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto b(x-1) - a(x-2)$.

2. Soit $G = \{\, f \in E \mid \exists p, q \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = px + q \,\}$ l'ensemble des fonctions affines. Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E.

L'application nulle $\tilde{0} : x \mapsto 0x + 0$ est affine.

[5] C'est la partie CS d'un raisonnement par CN et CS. Voici la partie CN : Supposons qu'il existe $y \in \operatorname{Im} u$ et $z \in \ker v$ tels que $x = y + z$. Ainsi, $y = u(t)$ avec $t \in E$, d'où nécessairement $v(x) = v(y) + v(z) = v((u(t))$. On doit donc choisir $t \in E$ tel que $v \circ u(t) = v(x)$, ce qui est toujours possible puisque $v(x) \in \operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

Soit $f : x \mapsto px + q$ et $g : x \mapsto p'x + q'$ deux éléments de G et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda p + \mu p')x + (\lambda q + \mu q');$$

l'application $\lambda f + \mu g$ appartient donc bien à G.

Le calcul de la question précédente montre que la restriction de φ à G,

$$\varphi_G : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (f(1), f(2)) \end{array},$$

est surjective. De plus, si $f \in \ker \varphi_G$, alors $f \in G$ et $f(1) = f(2) = 0$; or une application affine qui est nulle en deux point est l'application nulle (écrire un système pour ceux qui ne sont pas convaincus), d'où $\ker \varphi_G = \left\{ \tilde{0} \right\}$: l'application φ_G est injective.

Conclusion : l'application φ induit un isomorphisme entre G et $\mathbb{R}^2$.

Solution 38.30 *X MP*

Solution 38.31

Solution 38.32

Soit $x \in E$. On cherche $y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.

(CN) Si de tels y, z existent, on a $f(y) = 2y$ et $f(z) = 3z$, d'où $f(x) = f(y+z) = f(y) + f(z) = 2y + 3z$. Ainsi

$$\begin{cases} y + z &= x \\ 2y + 3z &= f(x) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} -y &= f(x) - 3x \\ z &= f(x) - 2x \end{cases}$$

Ce qui prouve l'unicité des y et z recherchés.

(CS) Réciproquement, si l'on pose

$$\begin{cases} y &= -f(x) + 3x \\ z &= f(x) - 2x \end{cases}$$

Alors $y + z = x$. De plus, $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$, d'où $f^2(x) = 5f(x) - 6x$, et donc

$$f(y) = f\left(-f(x) + 3x\right) = -f^2(x) + 3f(x) = -2f(x) + 6x = 2y$$
$$f(z) = f\left(f(x) - 2x\right) = f^2(x) - 2f(x) = 3f(x) - 6x = 3z.$$

Finalement,

$$x = y + z \qquad y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \qquad z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E).$$

ce qui montre l'existence des y et z recherchées.

Conclusion

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \times \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Autrement dit,

$$E = \ker\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right).$$

Solution 38.33

Solution 38.34

1. L'application u étant linéaire, la relation $u^2 - 2u - 3\,\mathrm{Id}_E = 0$ permet d'écrire

$$u \circ (u - 2\,\mathrm{Id}_E) = (u - 2\,\mathrm{Id}_E) \circ u = 3\,\mathrm{Id}_E,$$

soit, en utilisant encore la linéarité de u,

$$u\circ\left(\frac{1}{3}\left(u-2\,\mathrm{Id}_E\right)\right)=\mathrm{Id}_E \text{ et } \left(\frac{1}{3}\left(u-2\,\mathrm{Id}_E\right)\right)\circ u=\mathrm{Id}_E\,.$$

L'application u est donc bijective et $u^{-1}=\frac{1}{3}\left(u-2\,\mathrm{Id}_E\right)$.

2. [6] L'application u étant linéaire, la relation $u^2-2u-3\,\mathrm{Id}_E=0_{\mathcal{L}(E)}$ permet d'écrire

$$(u+\mathrm{Id}_E)\circ(u-3\,\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } (u-3\,\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)} \tag{1}$$

[7] Montrons que $\mathrm{Im}\left(u-3\,\mathrm{Id}_E\right)\subset\ker\left(u+\mathrm{Id}_E\right)$. Soit $y\in\mathrm{Im}(u-3\,\mathrm{Id}_E)$, il existe $x\in E$ tel que $y=(u-3\,\mathrm{Id}_E)(x)$. D'après (1), on a

$$(u+\mathrm{Id}_E)(y)=(u+\mathrm{Id}_E)\circ(u-3\,\mathrm{Id}_E)(x)=0_E;$$

c'est-à-dire, $y\in\ker(u+\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien $\mathrm{Im}\left(u-3\,\mathrm{Id}_E\right)\subset\ker\left(u+\mathrm{Id}_E\right)$.

Montrons que $\mathrm{Im}\left(u+\mathrm{Id}_E\right)\subset\ker\left(u-3\,\mathrm{Id}_E\right)$. Soit $y\in\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$, il existe $x\in E$ tel que $y=(u+\mathrm{Id}_E)(x)$. D'après (1), on a

$$(u-3\,\mathrm{Id}_E)(y)=(u-3\,\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E)(x)=0_E;$$

c'est-à-dire, $y\in\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)$. On a donc bien $\mathrm{Im}\left(u+\mathrm{Id}_E\right)\subset\ker\left(u-3\,\mathrm{Id}_E\right)$.

3. Soit $x\in\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\ker(u+\mathrm{Id}_E)$. On a donc $u(x)=3x$ et $u(x)=-x$, d'où la relation $3x=-x$ qui implique $x=0_E$.

On a donc $\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\ker(u+\mathrm{Id}_E)\subset\{\,0_E\,\}$. L'implication réciproque étant toujours vraie car $\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\ker(u+\mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a

$$\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\ker(u+\mathrm{Id}_E)=\{\,0_E\,\}\,.$$

Enfin,

$$\{\,0_E\,\}\subset\mathrm{Im}(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)\subset\ker(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\ker(u+\mathrm{Id}_E)=\{\,0_E\,\}\,.$$

Par double inclusion, on obtient

$$\mathrm{Im}(u-3\,\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)=\{\,0_E\,\}\,.$$

4. On a $(u+\mathrm{Id}_E)-(u-3\,\mathrm{Id}_E)=4\,\mathrm{Id}_E$, ou encore

$$\mathrm{Id}_E=\frac{1}{4}(u+\mathrm{Id}_E)-\frac{1}{4}(u-3\,\mathrm{Id}_E). \tag{2}$$

5. On a toujours $\mathrm{Im}(u-3\,\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)\subset E$ car $\mathrm{Im}(u-3\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrons l'inclusion réciproque. Pour $x\in E$, la relation (2) permet d'écrire

$$x=\mathrm{Id}_E(x)=\frac{1}{4}(u+\mathrm{Id}_E)(x)-\frac{1}{4}(u-3\,\mathrm{Id}_E)(x),$$

[6]C'est exactement le résultat ultra-classique

$$u\circ v=0 \iff \mathrm{Im}\,v\subset\ker u.$$

[7]Remarquez la décomposition primaire

$$X^2-2X-3=(X-3)(X+1).$$

ou encore, puisque u est linéaire,

$$x = (u + \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{4}x\right) + (u - 3\,\mathrm{Id}_E)\left(-\frac{1}{4}x\right),$$

D'où $x \in \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E)$. On a donc $E \subset \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E)$ et par double inclusion

$$E = \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E).$$

De plus, $\mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) = \{ 0_E \}$, d'où

$$E = \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E).$$

Enfin, les relations $\mathrm{Im}\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(u + \mathrm{Id}_E\right) \subset E$ et $\mathrm{Im}\left(u + \mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(u - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \subset E$ impliquent

$$E = \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) \subset \ker(u + \mathrm{Id}_E) + \ker(u - 3\,\mathrm{Id}_E).$$

On a donc $\ker(u + \mathrm{Id}_E) + \ker(u - 3\,\mathrm{Id}_E) = E$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(u - 3\,\mathrm{Id}_E) = \{ 0_E \}$, c'est-à-dire

$$E = \ker(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u - 3\,\mathrm{Id}_E).$$

Affinités vectorielles

Chapter 39 Génération et liberté

Avec une bouée

Solution 39.1

1. Le vecteur u est combinaison linéaire de v_1 et v_2 s'il existe des scalaire α, β tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$. Or

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha+\beta &= -1\\ 2\beta &= 2\\ \alpha+3\beta &= 5\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha+\beta &= -1\\ \beta &= 1\\ 4\beta &= 4\end{cases} \iff \beta = 1 \text{ et } \alpha = 2.$$

Ce système admet donc pour solution $(\alpha, \beta) = (2, 1)$: il est compatible. Ainsi, u est combinaison linéaire de v_1 et v_2. On peut d'ailleurs vérifier

$$2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

De manière analogue, pour w,

$$\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha+\beta &= 1\\ 2\beta &= 2\\ \alpha+3\beta &= 5\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha+\beta &= 1\\ \beta &= 1\\ 4\beta &= 6\end{cases} \implies \beta = 1 \text{ et } \beta = 3/2.$$

Ce système est donc incompatible : w n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Variante. Le même raisonnement pour u, mais en écrivant le système $\alpha v_1 + \beta v_2 = u$ matriciellement:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 4 & -4\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Le système $\alpha v_1 + \beta v_2 = u$ est donc compatible : u est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

2. Puisque $u = 2v_1 + v_2$, $u \in \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$ et donc $\{ v_1, v_2, u \} \subset \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$. Puisque $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, u \}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant v_1, v_2, u et que $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$ est un sous-espace vectoriel, on a $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, u \} \subset \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$.

On aurait également pu remarquer que tout vecteur $x = av_1 + bv_2 + cu$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 en substituant $2v_1 + v_2$ à u.

Réciproquement, on a trivialement $\{ v_1, v_2 \} \subset \operatorname{Vect}\left\{ u, v_1, v_2 \right\}$ et par un argument analogue au précédent, on a $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \} \subset \operatorname{Vect}\{ u, v_1, v_2 \}$.

Ainsi, par double inclusion, $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, u\}$.

Géométriquement, $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires ne $\mathbb{R}^3$: c'est un plan de $\mathbb{R}^3$.

De plus, $w \notin \text{Vect}\{v_1, v_2\}$, donc le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\{v_1, v_2, w\}$ est plus grand (au sens de l'inclusion) que le plan $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$. Nous allons montrer que c'est $\mathbb{R}^3$. L'inclusion $\text{Vect}\{v_1, v_2, w\}$ est triviale. Ainsi, pour montrer que $\text{Vect}\{v_1, v_2, w\} = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que tout vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire, $b = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma w$.

La matrice augmentée de ce système d'inconnues α, β, γ est

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 3 & 5 & b_3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & 6 & b_1 + b_3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 2 & b_1 + b_3 - 2b_2 \end{array}\right)$$

Ce système est toujours compatible. Ainsi $\text{Vect}\{v_1, v_2, w\} = \mathbb{R}^3$.

3. D'après la question précédente, on sait que $\{v_1, v_2, w\}$ engendre $\mathbb{R}^3$, et donc, *a fortiori*, $\{v_1, v_2, u, w\}$ également.

4. Nous allons montrer directement que $\{v_1, v_2, u, w\}$ engendre $\mathbb{R}^3$ et que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ s'écrit d'un infinité de façons comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w.

Cela revient à dire que l'équation $b = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u + \delta w$ admet une infinité de solution. Si B désigne la matrice obtenue avec ces quatres vecteurs comme colonnes, on a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisqu'il y a un pivot sur chaque ligne, le système $Bx = b$ est toujours compatible, ainsi, tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w. De plus, les solutions de ce système s'écrivent avec une variable libre (correspondant à la troisième colonne), ainsi, il y a une infinité de solutions au système $Bx = b$.

Solution 39.2

1. On trouve facilement $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Deplus,

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation (**??**) a pour unique solution $(\alpha, \beta) = (-1, 3)$.

2. Soit $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $b \in \text{Vect}\left(w_1, w_2\right)$, c'est-à-dire

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha w_1 + \beta w_2 = b.$$

Cette dernière équation équivaut succéssivement à

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/3 + b_2/3 \\ 2b_1/3 - b_2/3 \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve l'existence de α et β. On a d'ailleurs $\alpha = b_1/3 + b_2/3$ et $\beta = 2b_1/3 - b_2/3$.

Nous avons donc montrer que $\operatorname{Vect}\left(w_1, w_2\right) \subset \mathbb{R}^2$. L'inclusion réciproque est triviale car $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\operatorname{Vect}\left(w_1, w_2\right) = \mathbb{R}^2$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On remarque que $b \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v, w si, et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha v + \beta w = b \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b.$$

Puisque les vecteur v et w sont non nuls, $\operatorname{rg}(A) = 1$ ou $\operatorname{rg}(A) = 2$. La matrice A est une matrice carrée et caractérisation des matrices inversible permet d'affirmer que

- Si $\operatorname{rg}(A) = 2$, la matrice A est inversible et l'équation $\alpha v + \beta w = b$ admet une solution (d'ailleurs unique $A^{-1}b$). Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v et w, d'où

$$\operatorname{Vect}(v, w) = \mathbb{R}^2.$$

- Si $\operatorname{rg}(A) = 1$, alors A n'est pas inversible et il existe $b \in \mathbb{R}^2$ telle que l'équation $\alpha v + \beta w = b$ n'ait pas de solution, c'est-à-dire $b \notin \operatorname{Vect}(v, w)$ et donc $\operatorname{Vect}(v, w) \neq \mathbb{R}^2$.

Remarquons enfin qu'une matrice $(2, 2)$ n'est pas inversible si, et seulement si elle est de rang 0 ou 1, si, et seulement si l'une des ses colonne est colinéaire à l'autre, si, et seulement si son déterminant est nul. Ainsi

$$\operatorname{Vect}\{ v, w \} = \mathbb{R}^2 \iff \forall t \in \mathbb{R}, v \neq tw \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

39.1 Familles et parties génératrices

Solution 39.3

Solution 39.4

L'ensemble A ne contient que deux vecteurs : c'est un ensemble fini a deux éléments (éventuellement un seul si $v = w$).

L'ensemble B est le sous-espace vectoriel engendré par $\{ v, w \}$. Comme son nom l'indique, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et il contient les vecteurs v et w ; on a donc toujours $A \subset B$.

En général B contient une infinité de vecteurs. Plus précisément c'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de v et w.

Nous pouvons déjà observer dans $\mathbb{R}^3$.

- Si v et w ne sont pas colinéaires, alors B est un *plan vectoriel*. Il contient donc une infinité de vecteurs.
- Si v et w sont colinéaires mais au moins l'un des deux est non nuls, alors $B = \operatorname{Vect}\{ v \} = \operatorname{Vect}\{ w \}$ est une droite vectorielle. Donc B contient une infinité (mais une «plus petite infinité» que le cas précédent).
- Enfin, si $v = w = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $B = \left\{ 0_{\mathbb{R}^n} \right\} = A$. C'est le seul cas où B est un ensemble fini.

Ces résultats se généralisent à un espace vectoriel quelconque.

Solution 39.5

1. On a clairement $V \subset \mathbb{R}^4$ et $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)^T \in V$.

Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ et $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in V$. On a donc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Or $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^T$ et

$$\begin{aligned} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4) &= (x_1+x_2+x_3+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4) = 0+0 = 0 \\ (x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)-(x_4+y_4) &= (x_1-x_2+x_3-x_4)+(y_1-y_2+y_3-y_4) = 0+0 = 0 \end{aligned}$$

ainsi, $u + v \in V$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ et

$$\begin{aligned} (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + (\alpha x_4) &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (\alpha x_1) - (\alpha x_2) + (\alpha x_3) - (\alpha x_4) &= \alpha(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha u \in V$.

Conclusion

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$,

$$x \in V \iff \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & + & -2x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = -x_4 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$V = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.

$$V = \ker A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution 39.6

Solution 39.7

Solution 39.8

ue Il y a de nombreuse façons de présenter une solution. Vous trouverez d'autres variations dans les solutions des exercices suivants.

Soit $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$b = (x, y, z)^T \in V \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, b = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - \gamma &= x \\ -2\alpha + 3\beta - \gamma &= y \\ -6\alpha + 6\beta &= z \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - \gamma &= x \\ 3\beta - 3\gamma &= y + 2x \\ 6\beta - 6\gamma &= z + 6x \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - \gamma &= x \\ 3\beta - 3\gamma &= y + 2x \\ 0 &= z + 2x - 2y \end{aligned} \right.$$

Ce système échelonné est donc compatible si, et seulement si $2x - 2y + z = 0$, autrement dit

$$b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff 2x - 2y + z = 0.$$

L'espace V est donc le plan d'équation cartésienne $2x - 2y + z = 0$.

Solution 39.9

Soit $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$b = (x, y, z)^T \in V \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, b = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée $(A|b)$ de ce système est telle que

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & -4 & y \\ -6 & 12 & z \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & 0 & y - 2x \\ 0 & 0 & z + 6x \end{array} \right)$$

Le sytème $AX = b$ est donc compatible si, et seulement si $2x - y = 0$ et $6x + z = 0$. Autrement dit,

$$b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff 2x - y = 0 \text{ et } 6x + z = 0.$$

Un système d'équations cartésiennes de V est donc $2x - y = 0$ et $6x + z = 0$. On a donc

$$V = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y = 0 \text{ et } 6x + z = 0 \right\}.$$

Solution 39.10

On remarque que ces trois vecteurs sont colinéaires:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Ainsi, $V = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Or

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -2\alpha = -2x \end{cases} \iff y = -2x.$$

Finalement, V est la droite d'équation $2x + y = 0$.

Solution 39.11

V est le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(A|x) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ -2 & 3 & -1 & x_2 \\ 3 & -3 & 0 & x_3 \\ 2 & 0 & -2 & x_4 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & -3 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & -3 & +3 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & -3 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 3x_1 + (x_2 + 2x_1) \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & -3 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Finalement,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \operatorname{Im}(A) = V \iff x_3 - x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_4 - 2x_1 = 0.$$

On a donc,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x_1 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Solution 39.12

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &\iff A^T = A \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \iff a_{12} = a_{21} \text{ et } a_{13} = a_{31} \text{ et } a_{23} = a_{32} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}U_1 + a_{22}U_2 + a_{33}U_3 + a_{21}U_4 + a_{31}U_5 + a_{32}U_6, \end{aligned}$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\right)$.

De manière analogue, $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(V_1, V_2, V_3)$ avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 39.13

1. Les solution de l'équation différentielle $f' - 2f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2x} \end{array} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Autrement dit,

$$F_1 = \text{Vect}\,(g) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array}.$$

2. Les solution de l'équation différentielle $f'' - \omega^2 f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\omega x} + \mu e^{\omega x} \end{array} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_2 = \text{Vect}\,(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\omega x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\omega x} \end{array}.$$

3. Les solution de l'équation différentielle $f'' + 2f' + f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)\, e^{-x} \end{array} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_3 = \text{Vect}\,(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \end{array}.$$

4. Les solution de l'équation différentielle $f'' - 4f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x} \end{array} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_4 = \text{Vect}\,(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-2x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array}.$$

Solution 39.14

Solution 39.15

39.2 Liberté

Solution 39.18

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ un famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. On considère une sous famille $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ de $\mathcal{F}$, où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} = 0.$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\beta_i = \alpha_r$ si $i = i_r$ et $\beta_i = 0$ sinon. Alors

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = \sum_{i \in \{ i_1, \dots, i_k \}} \beta_i v_i + \sum_{i \notin \{ i_1, \dots, i_k \}} \cancel{\beta_i} v_i = \sum_{r=1}^{k} \alpha_r v_{i_r} + 0 = 0.$$

Puisque la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre, on a $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, et en particulier $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$: la famille $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ est donc également libre.

Solution 39.19

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0.$$

En multipliant cette égalité à gauche par la matrice A, on obtient

$$A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = \alpha_1 \cdot 2 v_1 + \alpha_2 \cdot 5 v_2 = 2\alpha_1 v_1 + 5\alpha_2 v_2 = 0.$$

puisque $A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) = A0 = 0$. En additionnant (-2) fois la relation $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ à cette dernière relation, on obtient

$$0 v_1 + 3\alpha_2 v_2 = 0,$$

et puisque $v_2 \neq 0$, on a $\alpha_2 = 0$, d'où $\alpha_1 v_1 = 0$ puis $\alpha_1 = 0$ car $v_1 \neq 0$.

Conclusion

La famille (v_1, v_2) est libre.

Généralisation possibles:

- Si $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$ où λ_1, λ_2 sont des scalaires fixés tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et v_1 et v_2 sont non nuls, alors la famille (v_1, v_2) est libre.
- Si $Av_1 = 2v_1, Av_2 = 5v_2, Av_3 = 11v_3$ et si v_1, v_2, v_3 sont tous non nuls, alors (v_1, v_2, v_3) est libre.
- Plus généralement, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires *distincts* fixés et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs non nuls tels que $Av_i = \lambda_i v_i$ et $v_i \neq 0$, alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Solution 39.21

- Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$. On a donc

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -5\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0 \\ 10\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -5\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0 \\ -11\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, par substitution, on a $\alpha_3 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$; la famille x_1, x_2, x_3 est libre.

Remarque On peut aussi montrer que la matrice $A = (x_1 x_2 x_3)$ est de rang 3 à l'aide d'opération élémentaires sur les lignes, ou en montrant que $\det(A) \neq 0$.

- Exprimer le vecteur v comme combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3 revient à résoudre l'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$.

  En notant A la matrice dont les colonnes sont x_1, x_2, x_3, on a

$$
\begin{aligned}
(A|v) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right) \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

  On trouve donc une unique solution

$$v = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Remarque Le calcul précédent montre que $A \underset{L}{\sim} I_3$. On peut donc se passer de la première partie pour montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est libre. En effet, la matrice A est de rang 3, donc la famille (x_1, x_2, x_3) est une famille de rang 3 avec 3 vecteurs : elle est libre.

Solution 39.22

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & -11 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les vecteurs donnés par l'énoncé. On a alors

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les coefficients des relations de dépendance linéaires entre ce quatre vecteurs sont exactement les éléments du noyau de A.

$$
\begin{aligned}
A &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -19 & -16 \\ 0 & 3 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & -9 & -21 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 19 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & -9 & -21 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 19 & 16 \\ 0 & 0 & -56 & -56 \\ 0 & 0 & -85 & -85 \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 19 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Les solution de $Ax = 0$ sont de la forme $(-5t, 3t, -t, t)^T$ où $t \in \mathbb{R}$. Par exemple, la solution $x = (5, -3, 1, -1)^T$ donne la relation de dépendance linéaire

$$5\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-11\\5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Solution 39.23

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ avec $n > m$ et A la matrice dont les colonnes sont $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Alors, la matrice A est de type (m, n) et la forme échelonnée réduite de A possède au plus m pivots. Il y a donc au moins $n - m \geq 1$ colonne sans pivot. Ainsi, le système d'équations $Ax = 0$ admet au moins une solution non triviale, et les colonnes de A sont donc linéairement dépendantes.

Solution 39.24

Les deux questions sont équivalentes puisque $\operatorname{card} \sigma = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$. Nous répondons aux deux «pour l'exercice».

1. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(X^2+1) + \beta(2X^2 - X + 1) + \gamma(-X^2 + X) = 0 \implies (\alpha + 2\beta - \gamma)X^2 + (-\beta + \gamma)\,X + \alpha + \beta = 0$$
$$\implies \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases} \underset{L_1 - L_3}{\implies} \begin{cases} \beta - \gamma &= 0 \\ -\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha &= -\gamma \\ \beta &= \gamma \end{cases}$$

On ne peut pas conclure directement car nous avons rédiger avec des implication. Néanmoins, on peut vérifier directement que la famille σ n'est pas libre, en effet

$$-(X^2+1) + (2X^2 - X + 1) + (-X^2 + X) = 0.$$

2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(X^2+1) + \beta(2X^2 - X + 1), +\gamma(-X^2 + X) = P$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= a_0 \\ -\beta + \gamma &= a_1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma &= a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= a_0 \\ -\beta + \gamma &= a_1 \\ \beta - \gamma &= a_2 - a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= a_0 \\ -\beta + \gamma &= a_1 \\ 0 &= a_2 + a_1 - a_0 \end{cases}$$

Ce système est compatible si, et seulement si $a_2 + a_1 - a_0 = 0$. Ainsi, la famille σ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution 39.26

Solution 39.28

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma e^x = 0. \tag{1}$$

En divisant cette égalité par e^x, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cos x e^{-x} + \beta \sin x e^{-x} + \gamma = 0.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient $\gamma = 0$. En spécialisant la relation $\alpha \cos x + \beta \sin x = 0$ pour $x = 0$ et $x = \pi/2$, on obtient

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = 0.$$

Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (f, g, h) est libre.

Solution 39.29

Solution 39.30

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = e^{x+2} = ee^{x+1} = ef_1(x).$$

Ainsi, $f_2 = ef_1$ et la famille (f_1, f_2) est liée, et *a fortiori*, la famille (f_1, f_2, f_3) également.

Solution 39.31

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0_E$$

où $0_E = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} : R \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Cela signifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3\right)(x) = 0_E(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0.$$

En spécialisant pour $x = 1, 2, 3$ on obtient successivement les relations

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

et l'on obtient facilement $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. La famille (g_1, g_2, g_3) est donc libre.

Solution 39.32

Solution 39.33

Solution 39.34

Solution 39.35

Puisque (x_1, x_2) est une famille libre, la famille (x_1, x_2, v) est liée si, et seulement si v est combinaison linéaire de x_1, x_2.

Soit A la matrice dont les colonnes sont x_1, x_2, v.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 3 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & -1/2 & b - 3a/2 \\ 0 & -1/2 & c - 5a/2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & -1/2 & b - 3a/2 \\ 0 & 0 & c - a - b \end{pmatrix}$$

Ainsi, les vecteurs x_1, x_2, v sont linéairement dépendants si, et seulement si les coefficients de v vérifient

$$a + b - c = 0.$$

Remarquez que l'on retrouve l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$: c'est le plan engendré par x_1 et x_2.

Ainsi, pour choisir un vecteur x_3 pour que la famille (x_1, x_2, x_3), il faut choisir un vecteur qui ne vérifie pas cette équation, par exemple $x_3 = (0, 1, 0)^T$.

39.3 Bases

Solution 39.36
Solution 39.37
Solution 39.38

Le plan $(0xz)$ de $\mathbb{R}^3$ est constitué des vecteurs de la forme $(x, 0, z)^T$. Ainsi (e_1, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ est une base de $(0xz)$.

Solution 39.39
Solution 39.40

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix} a + a' & 0 & c + c' \\ 0 & b + b' & 0 \\ c + c' & 0 & a + a' \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Solution 39.41

1. On a $F \subset E$. Deplus, $A0 = 0 = 0A$, donc $0 \in F$ (la matrice nulle). Soit $M, N \in F$, alors $AM = MA$ et $AN = NA$ et donc

$$A(M + N) = AM + AN = MA + NA = (M + N)A$$

d'où $M + N \in F$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha M) = \alpha AM = \alpha MA = (\alpha M)A,$$

donc $\alpha M \in F$.

Conclusion

F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$. Alors

$$AM = \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ x - z & y - t \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} x + y & -x - y \\ z + t & -z - t \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$M \in F \iff AM = MA \iff \begin{cases} x - z &= x + y \\ y - t &= -x - y \\ x - z &= z + t \\ y - t &= -z - t \end{cases} \iff \begin{cases} y + z &= 0 \\ x + 2y - t &= 0 \\ x - 2z - t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -2y + t \\ z &= -y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solution 39.42

Solution 39.43

Solutions partielles. Ici, on détermine seulement une famille génératrice. Il faut ensuite vérifier que la famille obtenue est bien libre.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\,\{ 1, X, X^2 \}$.

2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in F_2 \iff P(1) = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$$
$$\iff P = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$
$$\iff P = a_1(X - 1) + a_2(X^2 - 1) + a_3(X^3 - 1).$$

Ainsi

$$F_2 = \mathrm{Vect}\,\{ X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1 \}\,.$$

Variante. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in F_2 \iff P(1) = 0 \iff X - 1 | P \text{ et } \deg P \leq 3 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-1)Q \text{ et } \deg Q \leq 2$$
$$\iff \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = (X - 1)(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$$
$$\iff \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = a_0(X - 1) + a_1 X(X - 1) + a_2 X^2(X - 1).$$

Ainsi,

$$F_3 = \mathrm{Vect}\left\{ X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2 \right\}.$$

3. $F_3 = \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\,\{ 1, X, X^2, \dots, X^{n-1} \}$.

4. $F_4 = \mathrm{Vect}\,\{ X^3 - 1, X^2 - 2, X + 4 \}$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P \in F_5 \iff P(1) = P(2) = 0 \text{ et } \deg P \leq 4 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-1)(X-2)Q \text{ et } \deg Q \leq 2 \iff \exists (a, b, c$$

Ainsi,

$$F_5 = \mathrm{Vect}\,\{ (X - 1)(X - 2), X(X - 1)(X - 2), X^2(X - 1)(X - 2) \}\,.$$

6. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in F_6 \iff P' = 0 \iff b + 2cX = 0 \iff b = 0 \text{ et } 2c = 0 \iff P = a.$$

Ainsi, $F_6 = \operatorname{Vect}\{\,1\,\} = \mathbb{R}_0[X]$.

7. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in F_7 \iff P'' = 0 \iff 2c + 6dX = 0 \iff 2c = 0 \text{ et } 6d = 0 \iff P = a + bX.$$

Ainsi, $F_7 = \operatorname{Vect}\{\,1, X\,\} = \mathbb{R}_1[X]$.

8. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in F_8 &\iff \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \int_0^1 a + bt + ct^2\,\mathrm{d}t = 0\\
&\iff a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 0 \iff a = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c\\
&\iff P = b\left(X - \frac{1}{2}\right) + c\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $F_8 = \operatorname{Vect}\left\{\,X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3}\,\right\}$.

Solution 39.44

Solution 39.45 *Polynômes interpolateurs de Lagrange*

1. L_j est le produit de $n-1$ polynômes de degré 1, donc $\deg L_j = 1$.

2. Si $i \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq j$, alors $(X - a_i) \,\big|\, L_j$, en effet,

$$L_n = \frac{(X - a_i)}{a_j - a_i} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{n} \frac{(X - a_k}{a_j - a_k},$$

d'où $L_j(a_i) = 0$. Les réels $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ sont donc racines de L_j. Puisque $\deg L_j = n - 1$, ce sont les seules racines possibles.

3. $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} 1 = 1$.

4. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. En évaluant ces polynômes en a_k, $k = 1, \dots, n$, on obtient,

$$0 = \lambda_1 L_1(a_k) + \cdots + \lambda_n L_n(a_k) = \lambda_k L_k(a_k) = \lambda_k.$$

On a donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$: la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est libre.

5. (a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
Q(a_k) &= \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j(a_k)\\
&= P(a_k) L_k(a_k) && \because L_j(a_k) = 0 \text{ si } j \neq k\\
&= P(a_k).
\end{aligned}$$

(b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = P(a_k)$, c'est-à-dire P et Q coïncident sur n réels distincts. Or $\deg(P) \leq n-1$ et $\deg Q \leq \max \left\{ \deg L_j \;\middle|\; j \in [\![1, n]\!] \right\} = n-1$.

Les polynômes P et Q sont donc égaux.

6. D'après la question **??**, $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. La question **??** prouve que pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{j=1}^{n} P(a_j)L_j$; la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Conclusion : $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(P(a_1), \dots, P(a_n))$ sont les coordonnées de P dans cette base. [1]

7. Soit R le reste de la division euclidienne de X^q par Q. Il existe donc $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^q = AQ + R \text{ et } \deg R < \deg Q = n.$$

Puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $R = \sum_{j=1}^{n} R(a_j)L_j$. Or pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$a_j^q = A(a_j)Q(a_j) + R(a_j) \text{ et } Q(a_j) = 0$$

donc $R(a_j) = a_j^q$.

Conclusion : $R = \sum_{j=1}^{n} a_j^q L_j$.

8. On pose $P = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)L_j$. Le même calcul qu'en **??** montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P_n(a_k) = f(a_k).$$

Si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Q(a_k) = f(a_k),$$

alors P_n et Q coïncident sur n réels distincts $a_1, \dots, a_n$. Or $\deg P_n \leq n-1$ et $\deg Q \leq n-1$: P_n et Q sont donc égaux, d'où l'unicité du polynôme P_n.

Déterminer les relations de dépendance linéaire entre a, b, c, d, e et donner une base de $\operatorname{Vect}(a, b, c, d, e)$.

Solution 39.46

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 4 & 7 & -4 \\ 4 & -1 & 0 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs a, b, c, d, e.

On a

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d + \alpha_5 e = 0 \iff Ax = 0 \quad \text{où} \quad x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)^T.$$

[1] On peut également utiliser $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$...

Or

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 14 \\ 0 & -13 & 8 & 37 & -42 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 12 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 8 & 37 & -42 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 12 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\operatorname{rg}(a, b, c, d, e) = 3$. On peut également écrire les relations de dépendances linéaires

$$d = 2a - b + 3c \qquad \text{et} \qquad e = -a + 2b - 2c$$

Ainsi (a, b, c) est une base de $\operatorname{Vect}(a, b, c, d, e)$.

Solution 39.47

Soit

$$u = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \qquad \text{et} \qquad w = w_1v_1 + w_2v_2 + \cdots + w_nv_n,$$

ainsi

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w &= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) + \beta(w_1v_1 + w_2v_2 + \cdots + w_nv_n) \\ &= (\alpha u_1 + \beta w_1)v_1 + (\alpha u_2 + \beta w_2)v_2 + \cdots + (\alpha u_n + \beta w_n)v_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w) &= \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta w_1 \\ \alpha u_2 + \beta w_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta w_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \alpha \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w). \end{aligned}$$

Solution 39.49

Désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3 \\ \iff \begin{cases} y_1 + y_2 &= x_1 \\ y_1 + y_3 &= x_2 \\ y_2 + y_3 &= x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonées du vecteur $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ sont

$$[u]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

39.4 Généralisation aux familles quelconques

Chapter 40 Dimension

40.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Solution 40.1
Solution 40.2
Solution 40.3
Solution 40.4
Solution 40.6

La suite nulle est bien sûr nulle à partir du rang 3, donc $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in W$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de W, on a

$$\forall n \geq 3, u_n = 0 \text{ et } v_n = 0$$

donc

$$\forall n \geq 3, u_n + v_n = 0,$$

autrement dit, la suite $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 3: $u + v \in W$. Enfin, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall n \geq 3, \alpha u_n = \alpha 0 = 0,$$

donc $\alpha u = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$.

Conclusion

W est un sous-espace vectoriel de S.

Montrons que W est de dimension 3. On définit trois suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $a, b, c \in W$. De plus, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$, on a clairement de manière unique

$$u = u_0 a + u_1 b + u_2 c,$$

ainsi (a, b, c) est une base de W, donc $\dim W = 3$.

Solution 40.7
Solution 40.8

1. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0.$$

   On a alors

$$\begin{cases} \alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 &= -5\alpha_3 = 15\alpha_2 \\ \alpha_3 &= -3\alpha_2 \end{cases}$$

   et par substitution dans la première équation, $2\alpha_2 = 0$, d'où $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_3 = 0$.

   Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les coordonnées de w et e_1 relativement à la base $\mathcal{B}$ revient à résoudre les équations

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \quad \text{et} \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = e_1.$$

Notons P la matrices dont les colonnes sont formées des vecteurs v_1, v_2, v_3:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \iff P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = w.$

$$(P|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ansi

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \iff \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = (-3, 1, 2)$$

Autrement dit, les coordonnées de w relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Pour les coordonnées de e_1, la méthode est analogue $(P|e_1) \underset{L}{\sim}$ .... On trouve

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Solution 40.9

1. Notons

$$P = \begin{pmatrix} i & i & -1 \\ 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs u_1, u_2, u_3.

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1+i \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de rang 3, ayant 3 vecteurs de $\mathbb{C}^3$ qui est de dimension 3; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

2. Résolvons l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$ dont la matrice augmentée est

$$(P|w) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 1 & -1 & i & 1-i \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & -2 & 0 & 2i \\ 0 & 2 & 1+i & 3-3i \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1+i & 3-i \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i \end{array}\right)$$

Ainsi $w = (-1-3i)u_1 - iu_2 + (1-2i)u_3$, c'est-à-dire $[w]_{\mathcal{B}} = (-1-3i, -i, 1-2i)^T$.

Solution 40.10

1. On peut, par exemple, montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Puisque $\mathcal{B}$ contient 4 vecteurs et que $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de E.

2. On trouve $(-7, 11, -21, 30)$.

Solution 40.12

40.2 Dimension et sous-espace vectoriel

Solution 40.13

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \implies \alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) = 0 \implies \alpha e_1 + (2\alpha + \beta)e_2 + (2\alpha + \beta)e_3 = 0.$$

Or la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, donc

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \implies \begin{cases} \alpha &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \end{cases} \implies \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0.$$

Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre.

On souhaite compléter cette famille en une base. Puisque $\dim E = 3$, il suffit de lui ajouter un vecteur f_3 tel que la famille (f_1, f_2, f_3) soit libre. De plus, on peut choisir ce vecteur parmis une famille génératrice de E, prenons (e_1, e_2, e_3).

On remarque que $f_1 = e_1 + 2f_2$, ainsi, la famille (f_1, f_2, e_1) est liée.

Montrons que (f_1, f_2, e_3) est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma e_3 = 0.$$

Alors

$$\alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) + \gamma e_3 = 0 \text{ donc } \alpha e_1 + (2\alpha + \beta)e_2 + (2\alpha + \beta + \gamma e_3) = 0.$$

Or la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, d'où

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

Et l'on obtient par substitution $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. La famille (f_1, f_2, e_3) est donc libre. C'est de plus une famille de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

40.3 Sommes et dimension

Solution 40.14

Solution 40.15

Soit $z \in X \cap Y$. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$z = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \iff \begin{cases} \alpha - \delta & = 0 \\ -\gamma & = 0 \\ \alpha - \delta & = 0 \\ \beta + \delta & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = \delta \\ \beta & = -\delta \\ \gamma & = 0 \end{cases}$$

Ainsi $X \cap Y \neq \{ 0 \}$ (on a $X \cap Y = \operatorname{Vect}\left\{ (1,0,1,-1)^T \right\}$); la somme $X + Y$ n'est donc pas directe.

Remarque On peut également montrer que les quatre vecteurs forment une famille liée. Remarquez que cela abouti à peu près aux même calculs.

Le calcul précédent montre que

$$(1,0,1,-1)^T = (1,0,1,0)^T - (0,0,0,1)^T,$$

on a donc

$$X + Y = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ces trois vecteurs formant une famille libre (cf calculs précédents), il forment donc une base de $X + Y$.

Remarque On peut également exploiter la formule de Grassmann...

Solution 40.16 *Centrale PSI*

Solution 40.17

Solution 40.18

Solution 40.19

Solution 40.20

Solution 40.21

Solution 40.22

Solution 40.23 *Drapeaux*

Solution 40.25

40.4 Bases et dimension dans $\mathbb{K}^n$

Solution 40.27

Remarquons que U et W contiennent au moins deux vecteurs linéairement indépendants puisque aucun vecteur n'est un multiple scalaire d'un autre.

Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont formée des vecteurs de U et W. On a

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 3$, la matrice A est inversible, ses colonnes forment donc une base de $\mathbb{R}^3$, on a donc en particulier $\mathrm{Vect}(W) = \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

De plus, on a

$$B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B est de rang 2, ainsi, $\mathrm{Vect}(U) = \mathrm{Im}(B)$ est un plan vectoriel. Puisque $\mathrm{Vect}(U)$ est de dimension 2, n'importe quel couple de vecteurs indépendants de $\mathrm{Vect}(U)$ forment une base de $\mathrm{Vect}(U)$. Par exemple, on peut prendre les deux premiers vecteurs de U : $v_1 = (-1, 0, 1)^T$ et $v_2 = (1, 2, 3)^T$.

Pour déterminer une équation de $\mathrm{Vect}(U)$, on détermine les vecteur $v = (x, y, z)^T$ tel que v est combinaison linéaire de v_1 et v_2. On considère donc le système $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v$, dont la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 4 & z+x \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{pmatrix}$$

Ainsi, v est combinaison linéaire de v_1, v_2 si, et seulement si $x - 2y + z = 0$. Cette dernière équation est une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(U)$.

Solution 40.28

Esquisse. On trouve, par exemple, $v_3 = 2v_2 - v_1$ et $v_4 = 3v_2 - 2v_1$. De plus, (v_1, v_2) est une famille libre, et forment donc une base de $\mathrm{Vect}\left\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \right\}$ et $\dim V = 2$.

Solution 40.29

Solution 40.30

1. Puisque l'image de B^T est un plan de $\mathbb{R}^3$, les colonnes de B^T doivent être des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour, B cela signifie que B a trois colonnes : $k = 3$.

   On ne peut pas déterminer exactement m. Néanmoins, on peut affirmer que $m \geq 2$ car $\mathrm{rg}(B^T) = 2 \leq m$.

2. On peut déterminer le noyau de B. En effet,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(B^T) \iff 4x - 5y + 3z = 0 \iff 4x = 5y - 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les lignes de B (qui sont les colonnes de B^T) sont toutes combinaison linéaire des vecteurs $(5, 4, 0)$ et $(-3, 0, 4)$. Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker B \iff \left\{ \begin{array}{rl} 5x + 4y & = 0 \\ -3x + 4z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} y & = -\frac{5}{4}x \\ z & = \frac{3}{4}x \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de B est donc une droite vectorielle:

$$\ker B = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Solution 40.31

40.5 Bases de polynômes à degrés échelonnés

Chapter 41 Applications linéaires et dimension

Révisions

Solution 41.1

Si l'on utilise

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{x\in A} \lambda_x x \;\middle|\; (\lambda_x) \in \mathbb{K}^{(A)} \right\},$$

l'exercice est facile. Mais voici une démonstration qui n'utilise que la «définition» de $\text{Vect}(A)$ comme plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. On raisonne par double inclusion.

- Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$, on a immédiatement $f(A) \subset f(\text{Vect}(A))$ et comme $f(\text{Vect } A)$ est un sous-espace vectoriel de F qui contient $f(A)$, on a

$$\text{Vect } f(A) \subset f(\text{Vect } A).$$

- Pour $x \in A$, $f(x) \in f(A) \subset \text{Vect } f(A)$. Ainsi

$$A \subset f^{-1}(\text{Vect } f(A))$$

  Or $\text{Vect } f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F donc $f^{-1}(\text{Vect } f(A))$ est un sous-espace vectoriel de E. Puisque ce dernier contient A, on a donc

$$\text{Vect}(A) \subset f^{-1}(\text{Vect } f(A))$$

  qui est équivalent à l'inclusion $f(\text{Vect}(A)) \subset \text{Vect } f(A)$.

Solution 41.2

Solution 41.3

C'est un joli exercice. Au boulot!

Solution 41.4

Soit $v \in E$, $v \neq 0$. D'après l'hypothèse $(v, f(v))$ est liée et puisque $v \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$. Montrons

$$\forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Soit $x \in E$.

- Si x est colinéaire à v. Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha v$. On a donc

$$f(x) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\lambda v = \lambda\alpha v = \lambda x.$$

- Si x n'est pas colinéaire à v, alors $x \neq 0_E$ et $x + v \neq 0_E$, donc il existe $\mu, \eta \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \mu x$ et $f(x + v) = \eta(x + v)$. On a donc

$$f(x+v) = \eta x + \eta v \quad f(x+v) = f(x) + f(v) = \mu x + \lambda v.$$

  Étant donnée que la famille (x, v) est libre, et que l'on a l'égalité,

$$\eta x + \eta v = \mu x + \lambda v,$$

  on obtient $\eta = \mu = \lambda$. En particulier $f(x) = \lambda x$.

Conclusion

Pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$: l'application f est une homothétie.

Solution 41.6

1. Montrons que g est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}, g(u+v) = g(u) + g(v) \text{ et } g(\alpha u) = \alpha g(u).$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g(u+v) &= g(x+x', y+y', z+z') \\
&= \big(x + x' - (y+y') + 2(z+z'), 2(x+x') - (z+z')\big) \\
&= \big(x - y + 2z + x' - y' + 2z', 2x - z + 2x' - z'\big) \\
&= (x - y + 2z, 2x - z) + \big(x' - y' + 2z', 2x' - z'\big) \\
&= g(u) + g(v) \\
\text{et } \ g(\alpha u) &= g\left(\alpha x, \alpha y, \alpha z\right) \\
&= (\alpha x - \alpha y + 2\alpha z, 2\alpha x - \alpha z) \\
&= \alpha\left(x - y + 2z, 2x - z\right) \\
&= \alpha g(u).
\end{aligned}$$

L'application g est donc linéaire.

Variante. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{Avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2x - z \end{pmatrix}$$

Ainsi, g est l'application linéaire canoniquemenet associée à la matrice A.

2. Soit $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On cherche $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(u) = v$.

$$g(u) = v \iff \begin{cases} x - y + 2z &= x' \\ \quad 2x - z &= y' \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ z &= -y' \\ y &= x' + 2y' \end{cases}$$

Ainsi $g(0, x' + 2y', -y') = (x', y')$ et $(x', y') \in \operatorname{Im} g$.

On a donc $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} g$ et puisque l'on a toujours $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}^2$, on a finalement $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

Variante Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$g(x, y, z) = x(1, 2) + y(-1, 0) + z(2, -1).$$

Ainsi, $\operatorname{Im} g$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$(1, 2) \quad (-1, 0) \quad (2, -1).$$

Les deux premiers étant linéairement indépendants, il forme une base de $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2), et donc $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

Variante $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} A$ et (à faire) $\operatorname{rg} A = 2$, d'où $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \ker g \iff g(x,y,z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{2}z. \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\ker g = \mathrm{Vect}\ \{\ (1/2, 5/2, 1)\ \} = \mathrm{Vect}\ \{\ (1, 5, 2)\ \}\ .$$

Une base de $\ker g$ étant par exemple $((1, 5, 2))$.

41.1 Application linéaire en dimension finie

Solution 41.7

1. L'application nulle de $\mathcal{L}(E)$ est l'application $0 : E \to E, x \mapsto 0_E$. Si $g : E \to E$, on a

$$g = 0 \iff \forall x \in E, g(x) = 0(x) \iff \forall x \in E, g(x) = 0_E.$$

Ainsi, en prenant la négation,

$$g \neq 0 \iff \exists x_0 \in E, g(x_0) \neq 0_E.$$

Ce qui donne le résultat lorsque $g = f^2 = f \circ f$.

2. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E.$$

En composant par f^2 et en utilisant la linéarité de f^2, on obtient

$$\alpha f^2(x_0) + \beta f^2(f(x_0)) + \gamma f^2(f^2(x_0)) = 0_E.$$

Puisque $f^3 = 0$, on sait que

$$f^2(f(x_0)) = f^3(x_0) = 0_E \qquad \text{et } f^2(f^2(x_0)) \qquad = f^4(x_0) = f(f^3(x_0)) = 0_E.$$

d'où $\alpha f^2(x_0) = 0_E$. Puisque $f^2(x_0) \neq 0_E$, on a $\alpha = 0$. On a donc la relation

$$\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E.$$

En composant cette fois-ci par f, on obtient

$$\beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) = 0_E,$$

c'est-à-dire $\beta f^2(x_0) = 0_E$. Et comme $f^2(x_0) \neq 0_E$, on a $\beta = 0$. Finalement, on a $\gamma f^2(x_0) = 0_E$ et donc $\gamma = 0$.

La fammille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc une famille libre de E qui contient $3 = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.

3. On note C l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec f

$$C = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g \} .$$

Soit $g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2$, alors

$$\begin{aligned} f \circ g &= f \circ \left(\alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right) \\ &= \alpha f \circ \operatorname{Id}_E + \beta f \circ f + \gamma f \circ f^2 && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} g \circ f &= \left(\alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right) \circ f \\ &= \alpha \operatorname{Id}_E \circ f + \beta f \circ f + \gamma f^2 \circ f \\ &= \alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3 \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

Ainsi, g commute avec f. On a donc $\operatorname{Vect} \operatorname{Id}_E, f, f^2 \subset C$.

Réciproquement, soit $g \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec f. Puisque $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E, on peut écrire

$$g(x_0) = \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)$$

où α, β, γ sont les coordonnées de $g(x_0)$ dans cette base.

On considère maintenant l'application linéaire $h = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2$. Nous allons montrer que $g = h$. On a, trivialement, $h(x_0) = g(x_0)$. De plus, puisque g et f commutent

$$\begin{aligned} g(f(x_0)) &= f(g(x_0)) = f(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) \\ \text{et } \ h(f(x_0)) &= \alpha f(x_0) + \beta f(f(x_0)) + \gamma f^2(f(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi $g(f(x_0)) = h(f(x_0))$. De même,

$$\begin{aligned} g(f^2(x_0)) &= f^2(g(x_0)) = f^2(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)) \\ &= \alpha f^2(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) \\ \text{et } \ h(f^2(x_0)) &= \alpha f^2(x_0) + \beta f(f^2(x_0)) + \gamma f^2(f^2(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) \end{aligned}$$

Donc $g(f^2(x_0)) = h(f^2(x_0))$. Les applications linéaires g et h coïncident donc sur la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$, elles sont donc égales. On a donc

$$g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2 \in \operatorname{Vect} \{ \operatorname{Id}_E, f, f^2 \} .$$

Conclusion

L'ensemble des applications linéaires qui commutent avec f est le sous-espace vectoriel de E

$$C = \operatorname{Vect} \{ \operatorname{Id}_E, f, f^2 \} .$$

On vérifie facilement que (Id_E, f, f^2) est libre (ce qui en fait une base de C). En effet, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned}
\alpha \,\mathrm{Id}_E + \beta f + \gamma f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} &\implies \left(\alpha \,\mathrm{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right)(x_0) = 0_E \\
&\implies \alpha \,\mathrm{Id}_E(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E \\
&\implies \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E \\
&\implies \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

car $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une famille libre de E.

Solution 41.9

1. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut montrer que P est inversible, par exemple en montrant que $P \underset{L}{\sim} I_n$. Puisque l'on nous demande les coordonnées de u dans la base (v_1, v_2, v_3), nous allons traiter les deux questions simultanément.

$$\begin{aligned}
(P|u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

On a donc $P \underset{L}{\sim} I_3$, donc P est inversible et donc ses colonnes, (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, l'équation $Px = u$ a pour solution $(5, 4, -2)^T$, ce sont les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad u = 5v_1 + 4v_2 - 2v_3.$$

2. Puisque f est linéaire, on a

$$f(u) = f(5v_1 + 4v_2 - 2v_3) = 5f(v_1) + 4f(v_2) - 2f(v_3) = 5e1 + 4e2 - 2e3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Puisque (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, l'image de f est engendrée par $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ e_1, e_2, e_3 \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Ainsi f est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^3$, or $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, donc f est bijective. On a donc $\ker f = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ (ce que l'on peut également déduire du théorème du rang).

4. La réciproque de f est l'application linéaire g telle que $g(e_1) = v_1, g(e_2) = v_2, g(e_3) = v_3$.

Ainsi, g est l'application $g : x \mapsto Px$ et donc f est l'application $f : x \mapsto P^{-1}x$.

Solution 41.10

1. Ces relation caractérisent f car elle donne l'image d'une base de $\mathbb{R}^4$ (sa base canonique) par f. Ceci assure l'existence et l'unicité de f.

   En notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, t) = f\left(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4\right) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$$

   c'est-à-dire

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, -x - z - 2t, y + 2z + 3t).$$

2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in \ker f \iff \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ -x - z - 2t &= 0 \\ y + 2z + 3t &= 0. \end{cases}$$

   La résolution de ce sytème donne,

$$(x, y, z, t) \in \ker f \iff x = -3z, y = 4z, t = -z.$$

   On en déduit

$$\ker f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

   L'application f n'est donc pas injective.

3. Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et que f est linéaire, on a d'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 1 = 3.$$

   On a donc $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc f est surjective et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Solution 41.11 *Dual de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Solution 41.13

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(P+Q) &= \left((P+Q)(0), (P+Q)'(1), (P+Q)''(1), (P+Q)''(2)\right) \\ &= \left(P(0) + Q(0), P'(1) + Q'(1), P''(1) + Q''(1), P''(2) + Q''(2)\right) \\ &= \left(P(0), P'(1), P''(1), P''(2)\right) + \left(Q(0), Q'(1), Q''(1), Q''(2)\right) \\ &= \varphi(P) + \varphi(Q) \\ \text{et } \varphi(\alpha P) &= \left(\alpha P(0), \alpha P'(1), \alpha P''(1), \alpha P''(2)\right) \\ &= \alpha\left(P(0), P'(1), P''(1), P''(2)\right) \\ &= \alpha\varphi(P). \end{aligned}$$

   L'application φ est donc linéaire.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a alors $P' = 3ax^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$, d'où

$$\begin{aligned} P \in \ker\varphi &\iff P(0) = P'(1) = P''(1) = P''(2) = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rl} d & = 0 \\ 3a + 2b + c & = 0 \\ 6a + 2b & = 0 \\ 12a + 2b & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} d & = 0 & \\ a & = 0 & (L_4 - L_3) \\ b & = 0 & \text{(substitution)} \\ c & = 0 & \text{(substitution)} \end{array}\right. \iff P = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $ker\varphi = \{ 0 \}$ et l'application linéaire φ est injective. Or $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4 < \infty$, l'application linéaire φ est donc bijective.

2. L'application φ est bijective, c'est-à-dire

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \exists ! P \in \mathbb{R}_3[X], \varphi(P) = (a, b, c, d).$$

En particulier, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P) = (1, 2, -1, 1)$.

Solution 41.14

Montrons que l'application φ est linéaire. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(P+Q) &= ((P+Q)(0), (P+Q)(1), \dots, (P+Q)(n)) \\ &= (P(0) + Q(0), P(1) + Q(1), \dots, P(n) + Q(n)) \\ &= (P(0), P(1), \dots, P(n)) + (Q(0), Q(1), \dots, Q(n)) \\ &= \varphi(P) + \varphi(Q) \\ \text{et } \varphi(\alpha P) &= ((\alpha P)(0), (\alpha P)(1), \dots, (\alpha P)(n)) \\ &= (\alpha \cdot P(0), \alpha \cdot P(1), \dots, \alpha \cdot P(n)) \\ &= \alpha\, (P(0), P(1), \dots, P(n)) \\ &= \alpha \varphi(P). \end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

De plus,

$$P \in \ker\varphi \iff P(0) = 0, P(1) = 0, \dots, P(n) = 0.$$

Un polynôme $P \in \ker\varphi$ a au moins $n + 1$ racines et est de degré $\leq n$, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\ker\varphi = \{ 0 \}$ et l'application linéaire φ est injective.

Enfin, $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1 < \infty$ et φ est injective, elle est donc également surjective, et *a fortiori* bijective.

Solution 41.15

41.2 Rang d'une application linéaire

Solution 41.16

On a $\operatorname{rg} h = 2$ et

$$\ker h = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} h = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Solution 41.17

Solution 41.18

1. Par la formule $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, on sait que $\dim(F+G)\leqslant\dim(F)+\dim(G)$. Pour $F=\operatorname{Im}u$ et $G=\operatorname{Im}v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im}u+\operatorname{Im}v)\leq\dim\operatorname{Im}u+\dim\operatorname{Im}v$. Or $\operatorname{Im}u+\operatorname{Im}v\supset\operatorname{Im}(u+v)$. Donc $\operatorname{rg}(u+v)\leq\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.

2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v))\leq\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v)=\operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u)\leq\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(v)$. Soit $\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)\leq\operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leq\operatorname{rg}(u+v)$.

Solution 41.19 *Un théorème de factorisation, Banque PT 2010*

Ce sujet est extrait de la Banque PT 2010 Épreuve A, Partie III. C'est un résultat de factorisation classique. Remarquons que ce résultat reste vrai en dimension infinie, et qu'il est inutile d'utiliser des bases pour le démontrer. La démarche utilisée n'est d'ailleurs pas franchement la plus jolie ou la plus rapide mais permet de tester les candidats sur les bases et la dimension finie.

1. Soit $x\in\ker u$, alors $u(x)=0_F$ d'où

$$v(x)=w\circ u(x)=w(0_F)=0_G,$$

c'est-à-dire $x\in\ker v$.

Conclusion : $\forall x\in\ker u, x\in\ker v$, c'est-à-dire $\ker u\subset\ker v$.

2. $\ker u$ est de dimension $n-p$, il possède donc une base $(e_{p+1},\dots,e_n)$ (il y a bien $n-p$ vecteurs). La famille $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est donc une famille libre de vecteurs de E ; le théorème de la base incomplète assure l'existence de vecteurs $e_1,\dots,e_p\in E$ (il y a bien $p=n-(n-p)=\dim E-(n-p)$ vecteurs) tels que $(e_1,\dots,e_n)$ forme une base de E.

La formule du rang assure que l'on a $\dim E=\dim\ker u+\dim\operatorname{Im}u$, d'où $\dim\operatorname{Im}u=n-(n-p)=p$.

3. On a

$$\operatorname{Im}u=\operatorname{Vect}\left\{u(e_1),\dots,u(e_p),u(e_{p+1}),\dots,u(e_n)\right\}=\operatorname{Vect}\left\{f_1,\dots,f_p,0_F,\dots,0_F\right\}=\operatorname{Vect}\left\{f_1,\dots,f_p\right\}.$$

La famille $(f_1,\dots,f_p)$ engendre donc $\operatorname{Im}u$ et comporte $p=\dim\operatorname{Im}u$ vecteurs, c'est donc une base de $\operatorname{Im}u$.

Une autre idée... Soit $y\in\operatorname{Im}u$. Il existe $x\in E$ tel que $y=u(x)$ puis on décompose x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et on constate $u(x)=u(\sum_{i=1}^p x_if_i$ d'où $(f_1,\dots,f_p)$ engendre $\operatorname{Im}u$ et on conclut de la même manière...

Une autre idée... On montrer que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ et qu'elle a le «bon» nombre de vecteurs. Abréviativement,

$$\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_pf_p=0_F\implies\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_pe_p\in\ker u=\operatorname{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n).$$

Ce qui permet de montrer que les λ_i sont tous nuls car la famille $e_1,\dots,e_n$ est libre.

4. Supposons $\ker(u)\subset\ker(v)$, on a alors pour tout $i\in[\![p+1,n]\!]$, $v(e_i)=0_G$. Ainsi, si $i\in[\![p+1,n]\!]$,

$$w\circ u(e_i)w(u(e_i))=w(0_F)=0_G=v(e_i).$$

et si $i\in[\![1,p]\!]$,

$$w\circ u(e_i)=w(f_i)=v(e_i).$$

Ainsi, les application linéaire $w\circ u$ et v coïncident sur la base $(e_1,\dots,e_n)$ de E ; elles sont donc égales : $v=w\circ u$.

Solution 41.21

Pour $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Tx = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

L'application T est donc l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ce qui prouve au passage que T est bien linéaire). On a alors $\ker T = \ker A$ et $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$.

De plus,

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base du noyau de T ($\ker T = \ker A$) est $\left((-1, -1, 1)^T\right)$ et $\dim \ker T = 1$. Une base de l'image de T ($\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$) est donnée par les deux première colonnes de A, c'est-à-dire

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim \operatorname{Im} T = 2$. On vérifie bien

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

L'application T n'est pas bijective car A n'est pas inversible.

On peut aussi citer le fait que T n'est pas injective car $\ker T \neq \{ 0 \}$, non surjective car $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$, etc…

Solution 41.22

1. Si une telle application linéaire existe, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, alors

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = y = z \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s \in \mathbb{R} \right\},$$

   ainsi, une base de $\ker(g)$ est $\left((1, 1, 1)^T\right)$. De plus, $\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{rg}(g) = 2$. On a donc bien

$$\operatorname{rg}(g) + \dim \ker(g) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

   ce qui est cohérent avec le théorème du rang (mais cela ne prouve pas l'existence de g).

2. Puisque $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la matrice A doit être de type $(2, 3)$. Puisque $g(e_1) = \varepsilon_1$ et $g(e_2) = \varepsilon_2$, nous savons que les deux premières colonnes de A sont donc constituée des vecteurs ε_1 et ε_2.

   Enfin, puisque $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ on a $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, où c_1, c_2, c_3 désignent les colonnes de A, ainsi $c_3 = -c_1 - c_2 = (-1, -1)^T$, donc

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Solution 41.23

Il est plus simple de traiter les questions suivantes si l'on dispose de la matrice A canoniquement associée à T. Les colonnes de A sont l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$. Ceux-ci sont donnée par l'énoncé et on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -1 & x_3 \end{pmatrix}$$

On peut également obtenir une matrice échelonnée équivalente à A:

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 4 & 4 & x_3 + x_1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$$

1. D'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(T) + \dim\ker(T) = \dim\mathbb{R}^4 = 4$. Ainsi $\mathrm{rg}(T) = \dim\ker(T)$ si, et seulement si $\mathrm{rg}(T) = \dim\ker(T) = 2$. Or, en observant la matrice échelonnée obtenue précédemment, on a

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T) = 2 \iff x_1 - 4x_2 + x_3 = 0.$$

Lorsque c'est le cas, une base de $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A)$ est donnée par les colonnes de A où apparaissent les pivot dans la forme échelonnée, c'est-à-dire, les deux première colonnes. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(T)$ est (v_1, v_2).

2. Si $\dim\ker(T) = 1$, alors $\mathrm{rg}(T) = 3$ (et donc $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$), ainsi, la forme échelonnée de A doit avoir trois pivots. Ainsi

$$\dim\ker(T) = 1 \iff x_1 - 4x_2 + x_3 \neq 0.$$

Pour obtenir une base de $\ker(T)$, pour cela, on résout l'équation $Ax = 0$. En continuant la réduction de A (tout d'abord, on normalise le pivot de la dernière ligne en la multipliant par $1/(x_1 - 4x_2 + x_3)$), puis

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \ker(T) \iff \begin{cases} a & = -3c \\ b & = -c \\ d & = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de $\ker(T)$ est $\left((-3, -1, 1, 0)^T\right)$.

Solution 41.24

Solution 41.25

Solution 41.27

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(P+Q)(X) &= (P+Q)\circ(X+1) + (P+Q)\circ(X-1) - 2(P+Q)\circ(X)\\
&= P\circ(X+1) + Q\circ(X+1) + P\circ(X-1) + Q\circ(X-1) - 2P\circ(X) + Q\circ(X)\\
&= P\circ(X+1) + P\circ(X-1) - 2P\circ(X) + Q\circ(X+1) + Q\circ(X-1) - 2Q\circ(X)\\
&= f(P)(X) + f(Q)(X)\\
\text{et } f(\alpha P)(X) &= (\alpha P)\circ(X+1) + (\alpha P)\circ(X-1) - 2(\alpha P)\circ(X)\\
&= \alpha(P\circ(X+1)) + \alpha(P\circ(X-1)) - 2\alpha(P\circ(X))\\
&= \alpha\left(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\right)\\
&= \alpha f(P)(X).
\end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.

De plus, si $\deg P \leq n$, alors

$$\deg(P(X+1)) \leq n, \quad \deg(P(X-1)) \leq n, \quad \deg(P(X)) \leq n,$$

donc $\deg\left(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\right) \leq n$ et donc f est bien à valeurs dans E.

2. Si $p \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}
f(X^p) &= (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (1 + (-1)^{p-k}) X^k + X^p + X^p - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (1 + (-1)^{p-k}) X^k
\end{aligned}$$

Or si $k = p-1$, $(1 + (-1)^{p-k} = 0$. Finalement, le terme dominant de $f(X^p)$ et $2\binom{p}{p-2}X^{p-2}$ et donc $\deg f(X^p) = p-2$.

Si $p \in \{ 0, 1 \}$, on a immédiatement

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 0.$$

On remarque que si $p \in [\![0, n]\!]$, alors $\deg f(X^p) \leq n-2$ et l'on a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{ f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n) \} = \operatorname{Vect}\{ f(X^2), \dots, f(X^n) \} \subset \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

Or la famille, $\left(f(X^2), \dots, f(X^n)\right)$ est une famille de polynômes non nuls échelonés en degrés, cette famille est donc libre donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{card}\left(f(X^2), \dots, f(X^n)\right) = n-1$$

et puisuqe $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\dim \mathbb{R}_{n-2}[X] = n-1$, on a

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

De plus, le théorème du rang permet d'écrire

$$\dim\ker f = \dim E - \operatorname{rg} f = n + 1 - (n-1) = 2.$$

Or $f(1) = 0$, $f(X) = 0$ donc

$$\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}\{\, 1, X \,\} \subset \ker f$$

et puisque $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2 = \dim\ker f$, on a finalement

$$\ker f = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}\{\, 1, X \,\}.$$

3. Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Alors, il existe $P_1 \in E$ tel que $f(P_1) = Q$. Soit $P \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(P) = Q \iff f(P) = f(P_1) \iff f(P - P_1) = 0 \\ \iff P - P_1 \in \ker f \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, P = P_1 + \alpha X + \beta. \end{aligned}$$

Et en notant $P = P_1 + \alpha X + \beta$, on a

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0 \iff \beta = -P_1(0) \text{ et } \beta = -P_1'(0).$$

Ainsi, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $f(P) = Q$, $P(0) = P'(0) = 0$, c'est le polynôme

$$P = P_1 - P_1'(0)X - P_1(0).$$

41.3 Dualité

Solution 41.28
Solution 41.29
Solution 41.30

1. Calcul
2. $\mathrm{D}^j P_k = 0$ si $j > k$ et $\mathrm{D}^j P_k \circ (X + j) = P_{k-j}(X)$ donc $\varphi_j(P_k) = P_{k-j}(0)$.
3. On a donc, pour tout $P \in E$, $P(X) = \sum_{j=0}^{n} \left(\mathrm{D}^j P\right)(j) P_j$. En particulier, pour $P = (X+y)^n$, et en prenant l'égalité en x

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= y^n + \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} (j+y)^{n-j} \frac{x(x-j)^{j-1}}{j!} \\ &= y^n + x \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{n} (x-j)^{j-1} (y+j)^{n-j}. \end{aligned}$$

Solution 41.31
Solution 41.32

1.
   - Si $\operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 1$, $\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_1$ et $\varphi_3 = \lambda_3 \varphi_3$ (par exemple), $\dim H_1 \cap H_2 \cap H_3 = n - 1$.
   - Si $\operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2$, $\varphi_3 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ (par exemple), $\dim H_1 \cap H_2 \cap H_3 = n - 2$.
   - Si $\operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 3$, On considère $\varphi : x \mapsto \left(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)\right)$. Supposons que φ ne soit pas surjective, alors $\operatorname{Im}\varphi$ est inclus dans un plan d'équation $ax + by + cz = 0$, c'est-à-dire

     $$\forall x \in E, a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) + c\varphi_3(x) = 0$$

     où encore, $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 = 0$, ce qui contredit $\operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 3$. On a donc

     $$\dim\left(H_1 \cap H_2 \cap H_3\right) = \dim E - \operatorname{rg}\varphi = n - 3.$$

2. Notons $H_i = \ker \varphi_i$ où $1 \leq i \leq p$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont p formes linéaires non nulles. Comme précédement, on note φ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$ définie par

$$\varphi : x \mapsto \left(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)\right).$$

Manifestement, $\ker \varphi = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. Par conséquent, le théorème du rang fournit le résultat:

$$\dim\left(H_1 \cap \cdots \cap H_p\right) = n - \operatorname{rg} \varphi \geq n - p.$$

Solution 41.33

1. Soit $\varphi \in E^*$.

• $\Longrightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_n\varphi_n$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 + \ldots + 0 = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

• $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ un élément de E.

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0 \iff x \in \operatorname{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$$

(avec la convention usuelle $\operatorname{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i = \operatorname{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \operatorname{Ker}\varphi \implies \operatorname{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p) \subset \operatorname{Ker}\varphi \implies \forall j \in [\![n+1, p]\!],\ \varphi(e_j) = 0$$
$$\implies \forall j \in [\![n+1, p]\!],\ \lambda_j = 0 \implies \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Si tous les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i = E$ puis $\operatorname{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ génératrice de $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $\left(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}\right)$ de $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$, chaque $\operatorname{Ker}\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i$. Finalement,

$\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$ et donc des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \mathrm{Ker}\varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ et φ_2 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 2x + 3z$. Alors la famille (φ_1, φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u \in P \iff a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \iff 3a + 5b = 0.$$

Une équation de P est donc $5(x + y + z) - 3(2x + 3z) = 0$ ou encore $-x + 5y - 4z = 0$.

41.4 Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre deux

41.5 Exercices mélangés

Solution 41.34 *Centrale MP 2015*

Chapter 42 Représentation matricielle en algèbre linéaire

42.1 Famille de vecteurs

Solution 42.1

1. Puisque (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on peut calculer explicitement f_1, f_2, f_3, f_4, par exemple $f_1 = (1, -2, 0, 0)^T$. Il reste alors une foultitude de méthode pour montrer que la famille est une base de $\mathbb{R}^4$.

   Alternativement, voici une méthode qui reste valable lorsque (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base quelconque de $\mathbb{R}^4$ (et même d'un espace vectoriel quelconque). Pour montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base, il suffit de montrer que cette famille est libre puisqu'elle contient déjà $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha_1(e_1 - 2e_2) + \alpha_2(e_2 - 3e_3) + \alpha_3(e_3 - 4e_4) + \alpha_4(e_4) = 0$$

   c'est-à-dire

$$\alpha_1 e_1 + (-2\alpha_1 + \alpha_2)e_2 + (-3\alpha_2 + \alpha_3)e_3 + (-4\alpha_3 + \alpha_4)e_4 = 0.$$

   Puisque la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, on a donc

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \quad &= 0 \\ -3\alpha_2 + \alpha_3 \quad &= 0 \\ -4\alpha_3 + \alpha_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

   et par substitution $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$. La fammille (f_1, f_2, f_3, f_4) est donc libre, contient $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

2. La matrice de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{f}$, notée P, est la matrice des coordonées de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) relativement à la base $\boldsymbol{f}$, on a donc immédiatement

$$P = \mathrm{Pass}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice de passage de la base $\boldsymbol{f}$ à la base $\boldsymbol{e}$ est alors P^{-1}. On trouve (par exemple en réduisant la matrice $(P|I_4)$),

$$P^{-1} = \mathrm{Pass}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 24 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Variante. Pour déterminer la matrice de passage de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{e}$ est également la matrice des coordonées des vecteurs de $\boldsymbol{e}$ dans la base $\boldsymbol{f}$. par susbstitution (de bas en haut), on trouve immédiatement

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= e_1 - 2e_2 \\ f_2 &= e_2 - 3e_3 \\ f_3 &= e_3 - 4e_4 \\ f_4 &= e_4 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} e_4 &= f_4 \\ e_3 &= f_3 + 4f_4 \\ e_2 &= f_2 + 3f_3 + 12f_4 \\ e_1 &= f_1 + 2f_2 + 6f_3 + 24f_4 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

et on retrouve la matrice précédente.

Remarquez que l'équivalence (1) permet d'affirmer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) engendre $\mathbb{R}^4$ et que l'on peut traiter la première question simultanément.

Plus court. On peut traiter les deux questions, rapidement et simultanément. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la matrice des coordonnées de la fammile $\boldsymbol{f}$ relativement à la base $\boldsymbol{e}$ (ATTENTION: on ne peut pas encore l'appeler matrice de passage puisque l'on ne sait pas que $\boldsymbol{f}$ est une base de $\mathbb{R}^4$!).

On montre alors que P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 24 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Puisque P est inversible, $\boldsymbol{f}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et $P = \mathrm{Pass}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ et $P^{-1} = \mathrm{Pass}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e})$.

Solution 42.2

1. On note M la matrice formée dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3, (c'est aussi la matrice des coordonnées de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & \lambda + 10 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 6 & \lambda + 10 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = 3$ si, et seulement si $\lambda \neq 1$.

2. D'après la question précédente $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ (ce sont les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$).

Pour déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{S}$, nous devons déterminer les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, s relativement à la base (v_1, v_2, b). On a trivialement $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0b$ donc $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1) = (1, 0, 0)^T$. De même $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_2) = (0, 1, 0)^T$.

Pour déterminer les coordonnées de s dans la base $\mathcal{B}$, on résout l'équation d'inconnue $x = (a, b, c)$

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = s.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$(A|s) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ainsi $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Finalement, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{S}$ est

$$P = \big(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1), \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_2), \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(s)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Si $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(w) = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w) = P\,\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(w) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\0 & 1 & -3/2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}.$$

Remarque: on peut vérifier le résultat en calculant le vecteurs w à partir de ses coordonnées dans les deux bases, on trouve $w = (7, 1, 3)^T$.

Solution 42.3

En cours !

Solution 42.4

1. La matrice des coordonnée de la famille $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$U = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice U est inversible: la famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $U = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc la matrice

$$U^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\\-1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{B}$ sont $(5, -6, 3)^T$. Les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc

$$U^{-1}\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\9\\-20\end{pmatrix}.$$

Ce que l'on peut vérifier rapidement en calculant

$$14(X^2 + X + 1) + 9(X^2 - 1) - 20(X^2 + X) = 3X^2 - 6X + 5 = P.$$

42.2 Représentation d'une application linéaire par une matrice

Solution 42.5

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les bases canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. La matrice de l'application linéaire T dans les base $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-5 & 13\\-7 & 16\end{pmatrix}.$$

Les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sont respectivement les matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{B}'$.

Si l'on note $A' = \mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de T dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a donc

$$A' = Q^{-1}AP.$$

On trouve (à calculer par vous même)

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

marque

Pour déterminer A', on peut également calculer

$$T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

et décomposer ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$. Cela revient à résoudre les deux système $Qx = (1, -2, -5)^T$ et $Qx = (2, 1, -3)^T$. On trouve bien

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer également qu'il est possible de présenter la résolution simultanée des deux systèmes $Qx = v_1$ et $Qx = v_2$ à l'aide des notation matricielles:

$$(Q|v_1 v_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -5 & -3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \cdots$$

ce qui n'est vraiment pas loin de ressembler à une «inversion de matrice»...

Solution 42.6

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(P+Q)(X) &= (P+Q)\circ(X+1) + (P+Q)\circ(X+2) - 2(P+Q)\circ(X) \\ &= P\circ(X+1) + Q\circ(X+1) + P\circ(X+2) + Q\circ(X+2) - 2P\circ(X) + Q\circ(X) \\ &= P\circ(X+1) + P\circ(X+2) - 2P\circ(X) + Q\circ(X+1) + Q\circ(X+2) - 2Q\circ(X) \\ &= f(P)(X) + f(Q)(X) \\ \text{et } f(\alpha P)(X) &= (\alpha P)\circ(X+1) + (\alpha P)\circ(X+2) - 2(\alpha P)\circ(X) \\ &= \alpha(P\circ(X+1)) + \alpha(P\circ(X+2)) - 2\alpha(P\circ(X)) \\ &= \alpha\left(P(X+1) + P(X+2) - 2P(X)\right) \\ &= \alpha f(P)(X). \end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire. De plus, si $\deg P \leq 3$, alors

$$\deg(P(X+1)) \leq 3, \quad \deg(P(X-1)) \leq 3, \quad \deg(P(X)) \leq 3,$$

donc $\deg\left(P(X+1)+P(X-1)-2P(X)\right) \leq 3$ et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_3[X]$.

2. La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et celle de $\mathbb{R}_4[X]$ est $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$. On a

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0, \\
f(X) &= 0, \\
f(X^2) &= 2 \qquad\qquad\qquad (= 2\cdot 1 + 0X + 0X^2 + 0X^3 + 0X^4) \\
f(1) &= 6X \qquad\qquad\qquad (= 0\cdot 1 + 6X + 0X^2 + 0X^3)
\end{aligned}$$

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminons le noyau de f. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P = ax^3 + bX^2 + cX + d$. On a alors, $f(P) = 6aX + 2b$ et

$$P \in \ker f \iff 2b = 0 \text{ et } 6a = 0 \iff P = cX + d.$$

Ainsi $\ker f = \operatorname{Vect}\{1, X\} = \mathbb{R}_1[X]$.

Déterminons l'image de f. Le théorème du range donne

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \ker f = 4 - 2 = 2,$$

ainsi $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Or $f(P) = 6aX + 2b \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_1[X]$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_1[X]$, finalement,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}\{1, X\}.$$

4. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$. Alors Q est de la forme

$$Q = \alpha X + \beta.$$

On cherche un polynôme P de la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifiant

$$\begin{cases} f(P) &= Q \\ P(0) &= 0 \\ P'(0) &= 0 \end{cases}$$

Remarquons que

$$f(P) = f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) = 6aX + 2b + 0 + 0.$$

Ainsi

$$\begin{cases} f(P) &= Q \\ P(0) &= 0 \\ P'(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6aX+2b &= \alpha X+\beta \\ d &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{\alpha}{6}, \\ b &= \frac{\beta}{2}, \\ c &= 0, \\ d &= 0. \end{cases} \iff P = \frac{\alpha}{6}X^3 + \frac{\beta}{2}X^2.$$

D'où l'existence et l'unicité de P vérifiant $f(P) = Q$, $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$.

Solution 42.9

1. On peut, par exemple montrer que la famille $\boldsymbol{e}$ est libre. Étant que $\operatorname{card}(\boldsymbol{e}) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, cela suffit pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. On peut, par exemple montrer que la famille $\boldsymbol{f}$ est libre. Étant que $\operatorname{card}(\boldsymbol{f}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, cela suffit pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On calcule

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a directement $u(e_1) = f_1$, donc les coordonnées de $u(e_1)$ dans la base $\boldsymbol{f}$ sont $(1, 0, 0)$.

Calculons les coordonnées de $u(e_2)$ dans la base $\boldsymbol{f}$. Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = u(e_2) \iff \begin{cases} 4\alpha & +\beta & & = 5 \\ 2\alpha & +\beta & & = 1 \\ \alpha & -\beta & +\gamma & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha &= 4 \\ 2\alpha + \beta &= 1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= -3 \\ \gamma &= -6 \end{cases}$$

On a donc $u(e_2) = 2f_1 - 3f_2 - 6f_3$, donc les coordonnées de $u(e_2)$ dans la base $\boldsymbol{f}$ sont $(2, -3, -6)$.

Enfin, $u(e_3) = u(e_4) = 0$, qui a pour coordonnée dans la base $\boldsymbol{f}$, $(0, 0, 0)$.

Finalement, la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 42.10

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \big((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)(1), (\lambda P + \mu Q)'(0), (\lambda P + \mu Q)'(1)\big) \\ &= \big(\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P'(0) + \mu Q'(0), \lambda P'(1) + \mu Q'(1)\big) \\ &= \lambda \big(P(0), P(1), P'(0), P'(1)\big) + \mu \big(Q(0), Q(1), Q'(0), Q'(1)\big) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

On a $\lambda u + \mu v = \left(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t'\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
g\left(\lambda u + \mu v\right) &= \left(\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' + \lambda t + \mu t', \lambda x + \mu x' - \lambda t - \mu t'\right) \\
&= \left(\lambda(x+y+z+t) + \mu(x'+y'+z'+t'), \lambda(x-t) + \mu(x'-t')\right) \\
&= \lambda\left(x+y+z+t, x-t\right) + \mu\left(x'+y'+z'+t', x'-t'\right) \\
&= \lambda g(u) + \mu g(v).
\end{aligned}$$

Donc g est linéaire.

2. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$M_{\mathcal{B},\boldsymbol{e}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.

$$M_{\mathcal{B},\boldsymbol{f}}\left(g \circ f\right) = M_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(g) M_{\mathcal{B},\boldsymbol{e}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

42.3 Cas des endomorphismes

Solution 42.11 *CCINP MP 2022*
Solution 42.12

1. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On a alors,

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
X \in \ker \varphi &\iff \varphi(X) = 0 \iff AX = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+c &= 0 \\ b+d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -c \\ b &= -d \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a $\ker(\varphi) = \operatorname{Vect}\left\{ N_1, N_2 \right\}$. De plus, le calcul précédent montre que la famille (N_1, N_2) est libre, c'est donc une base de $\ker(\varphi)$ et $\dim \ker(\varphi) = 2$.

On peut remarquer que

$$\varphi(X) = (a+c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, en notant $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\operatorname{Im}(\varphi) \subset \operatorname{Vect}\left(Q_1, Q_2\right).$$

Or, d'après le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi) + \dim \ker(\varphi) = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) = 4.$$

donc $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = 2$, et puisque $\dim \operatorname{Vect}(Q_1, Q_2) \leq 2$ et $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \operatorname{Vect}(Q_1, Q_2)$, on a

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(Q_1, Q_2).$$

Remarque On peut aussi montrer l'inclusion réciproque en remarquant que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\alpha Q_1 + \beta Q_2 = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. Pour déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, on détermine les coordonnées de $\varphi(E_{1,1}), \varphi(E_{2,1}), \varphi(E_{1,2}), \varphi(E_{2,2})$ dans la base $\mathcal{B}$. Or

$$\varphi(E_{1,1}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$$
$$\varphi(E_{2,1}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$$
$$\varphi(E_{1,2}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$$
$$\varphi(E_{2,2}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$$

La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, est donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 42.13
Solution 42.14
Solution 42.15

Cela revient à résoudre le deux équations

$$f\left(v_1\right) = v_1 \quad \text{et} \quad f\left(v_2\right) = -v_2.$$

On peut choisir $v_1 = (2, 1)^T$ et $v_2 = (1, 1)^T$ (les autres solutions étants leurs multiples non nuls). La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 42.16

Cela revient à résoudre

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = 3v_2 \quad f(v_3) = 2v_3$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 42.17

Cela revient à résoudre trouver deux vecteurs linéairement indépendants (v_1, v_2) solutions de $f(v) = 4v$ et un vecteur v_3 tel que $f(v_3) = 3v_3$.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 42.17

On peut choisir $\mathcal{B}'$ formée des colonnes de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 42.18

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 42.19

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A, on a donc

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

On cherche une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ telle que B soit la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$, c'est-à-dire

$$f(v_1) = v_1 \text{ et } f(v_2) = 3v_2.$$

Soit $v = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$f(v) = v \iff \begin{cases} 2x + y &= x \\ x + 2y &= y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \iff x = -y.$$

En choisissant par exemple $v_1 = (-1, 1)^T$, on a alors $f(v_1) = v_1$. De plus,

$$f(v) = 3v \iff \begin{cases} 2x + y &= 3x \\ x + 2y &= 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \iff x = y.$$

En choisissant par exemple $v_2 = (1, 1)^T$, on a alors $f(v_2) = 3v_2$.

La famille (v_1, v_2) est libre et contient $2 = \dim \mathbb{R}^2$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Puisque $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = 3v_2$, la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Solution 42.20

Un calcul direct donne $A^2 = A$, d'où $f \circ f = f$ et donc f est un projecteur. Clairement, $\operatorname{rg}(A) = 1$ et on a directement,

$$\ker(f) = \ker(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y - z = 0 \right\}$$
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution 42.21

Un calcul direct donne $A^2 = I_3$, d'où $f \circ f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$; donc f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & -8 \\ -10 & 20 & 10 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\ker(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \ker(A - I_3) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y - z = 0 \right\}.$$

Enfin,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & -14 & -8 \\ -10 & 20 & 12 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow -L_1 + L_2}{\overset{}{\underset{L}{\sim}}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et l'on trouve finalement,

$$\ker(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \ker(A + I_3) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution 42.22 *d'après Ecricome ECE 2014*

1. (a) En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on observe que $C_2 = 2C_3$, ce qui montre que $(0, 1, -2)^T \in \ker(A)$. De plus, (C_1, C_3) forme une famille libre (C_1 n'est pas colinéaire à C_3), ainsi $\operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(f)$. D'après le théorème du rang, $\dim \ker(f) = 3 - 2 = 1$ et donc (u) est une base de $\ker(f)$. De plus, une base de l'image de f est donnée par les vecteurs de coordonnées C_1 et C_3 (relativement à la base e), c'est-à-dire

$$e_1 + e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v.$$

Conclusion

Une base de $\ker(f)$ est (u) et une base de $\operatorname{Im}(f)$ est $(e_1 + e_2, 2e_3, e_2 - e_3)$.

(b) Au choix : f n'est pas injective car $\ker f \neq \{ 0 \}$ ou f n'est pas surjective car $\operatorname{rg}(f) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$.

(c) Pour $t = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$f(t) = t + v \iff \begin{pmatrix} x \\ x + 2y + z \\ 2x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x &= x \\ x + y + z &= 1 \\ 2x - 2y - 2z &= -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y + z &= 1 \quad L_2 \\ 4x &= 1 \quad L_3 + 2L_2 \end{cases}$$
$$\iff t = \begin{pmatrix} 1/4 \\ y \\ 3/4 - y \end{pmatrix}.$$

Conclusion

Les vecteurs vérifiant l'équation $f(t) = t + v$ sont les vecteur de la forme $\left(\frac{1}{4}, s, \frac{3}{4} - s\right)$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Remarque Matriciellement, le système s'écrit $At = t + v$, c'est-à-dire $(A - I_3)t = v$. Celui-ci a pour matrice augmentée $\left(A - I_3 | v\right)$.

(d)
- On a bien $f(u) = 0$ et $f(v) = v$.
- D'après la matrice T donnée, on cherche donc un vecteur w tel que $f(w) = v + w$. Ainsi, w vérifie l'équation de la question précédente ; il est de la forme $\left(\frac{1}{4}, s, \frac{3}{4} - s\right)$. En choisissant la troisième coordonnée nulle, on obtient $w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$.
- Montrons que la famille $C = (u, v, w)$ est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $au + bv + cw = 0$, c'est-à-dire

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} \frac{1}{4}c &= 0 \\ a + b + \frac{3}{4}c &= 0 \\ -2a - b &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c &= 0 \\ a + b &= 0 \\ -2a - b &= 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0.$$

Ainsi, la famille $C = (u, v, w)$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion

La famille $C = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, on a $f(u) = 0$, $f(v) = v$ et $f(w) = v + w$. La matrice de f dans la base $C = (u, v, w)$ est donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Puisque $f = g \circ g$, on a par associativité de la composition

$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f.$$

Or on a vu que $f(u) = 0$, donc

$$f\,(g(u)) = g\,(f(u)) = 0.$$

De plus, $f(v) = v$, donc

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(v).$$

(b) D'après la question précédente, on a $f(g(u)) = 0$, c'est-à-dire $g(u) \in \ker(f)$. Or $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$ (question 1), donc $g(u)$ est multiple de u : il existe donc un réel a tel que $g(u) = au$.
D'après la question précédente, on a $f(g(v)) = g(v)$. Or pour $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(t) = t \iff \left\{ \begin{aligned} x &= x \\ x + 2y + z &= y \\ 2x - 2y - z &= z \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\iff x = 0 \text{ et } z = -y \iff t = yv.$$

Donc il existe un réel b tel que $g(v) = bv$.

Remarque Plutôt que de résoudre ce système, il est beaucoup plus rapide de dire que c'est l'équation homogène associé à $f(t) = t + v$ que l'on a déjà résolue.

(c) D'après la question précédente, on a $g(u) = au$ et $g(v) = bv$. De plus, en notant (c, d, e) les coordonnées de $g(w)$ dans la base C, on a $g(w) = cu + dv + ew$. D'après ces trois relations, la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ est bien

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

3. S'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g = f$, alors l'étude précédente montre que la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_C(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = N.$$

Comme $T = \mathrm{Mat}_C(f)$, la relation $g \circ g = f$ s'écrit $N^2 = T$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+e) \\ 0 & b^2 & d(b+e) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

qui équivaut successivement à

$$\left\{ \begin{aligned} a^2 &= 0 \\ c(a+e) &= 0 \\ b^2 &= 1 \\ d(b+e) &= 1 \\ e^2 &= 1 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \quad \text{car } e \neq 0 \\ b &= \pm 1 \\ d(b+e) &= 1 \\ e &= \pm 1 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} a = c &= 0 \\ b = e &= \pm 1 \quad \text{car } (b+e) \neq 0 \\ d &= \tfrac{1}{b+e} \quad \text{soit } \pm \tfrac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, s'il existe un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g = f$, alors sa matrice dans la base C est

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, soit g_1 (resp. g_2) l'endomorphisme dont la matrice dans la base C est N_1 (resp. N_2), alors

$$\mathrm{Mat}_C(g_1 \circ g_1) = N_1^2 = T = \mathrm{Mat}_C(f)$$

donc $g_1 \circ g_1 = f$. De même $g_2 \circ g_2 = f$.

Conclusion

Il existe deux endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$.

Solution 42.25

Solution 42.26

1. La famille (f_1, f_2) est libre puisqu'elle est constituée de seulement deux vecteurs, et ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Or $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, la famille $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour déterminer D, on calcule

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix},$$

d'où $u(f_1) = f_1$ et $u(f_2) = \frac{1}{3} f_2$. On a donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Variante. Soit P la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs f_1, f_2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ainsi P est inversible donc ses colonnes, (f_1, f_2), forment une base de $\mathbb{R}^2$. De plus, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc,

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de passage de la base $\boldsymbol{e}$ à la base $\boldsymbol{f}$ est $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$D = P^{-1}AP, \quad \text{d'où} \quad A = PDP^{-1}.$$

3. Par une récurrence immédiate (voir début d'année),

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}.$$

Or, D est une matrice diagonale, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \cdots = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{2}{3^{n-1}} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{5}{3^{n-1}} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -5/2 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

Donc, en notant $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = Au_n \quad \text{et par une récurrence immédiate} \quad u_n = A^n u_0.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{2}{3^{n-1}} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{5}{3^{n-1}} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les suites (x_n), (y_n) vérifiant la relation de récurrence (R) sont les suites de la forme

$$x_n = \frac{\alpha}{2}\left(5 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \beta\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$
$$y_n = \frac{\alpha}{4}\left(-15 + \frac{5}{3^{n-1}}\right) + \frac{\beta}{2}\left(-3 + \frac{5}{3^n}\right)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution 42.29

En cours!

Solution 42.30

1. Facile. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Classique récurrence : $X_n = A^n X_0$.

3. $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = \{ (y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ et donc la famille (a) avec $a = (1, 1)$ est une base de $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$.

$\ker(f - 3\,\mathrm{Id}) = \{ (2y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ et donc la famille (b) avec $b = (2, 1)$ est une base de $\ker(f - 3\,\mathrm{Id})$.

La famille (a, b) forme une base de $\mathbb{R}^2$ car la famille (a, b) est libre et contient $2 = \dim \mathbb{R}^2$ vecteurs. Puisque $a \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $b \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$, on a

$$f(a) = 2a \quad \text{et} \quad f(b) = 3b.$$

On en déduit que la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B} = (a, b)$ est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par formule de conjuguaison, on a alors

$$P^{-1}AP = D.$$

4. Classique récurrence : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Tout calculs faits, on trouve $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_n & = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \\ v_n & = 3 \times 2^n - 3^n. \end{cases}$$

Solution 42.31 *BanquePT 2009, épreuve A, partie A*
Solution 42.35 *Crochets de Lie de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Solution 42.36

Soit $B = \sum_{i=1}^{p} A_i$ et $S = \left\{ A_1, A_2, \dots, A_p \right\}$. Pour tout $i_0 \in [\![1, p]\!]$, l'application $\begin{array}{ccc} S & \to & S \\ A & \mapsto & A_{i_0}A \end{array}$ est bijective. On a alors $A_{i_0}B = B$. En additionnant ces p relation, on a

$$B^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} A_i \right) B = \sum_{i=1}^{p} (A_i B) = pB.$$

On a donc $\left(\frac{1}{p}B\right)^2 = \frac{1}{p}B$, c'est-à-dire que $\frac{1}{p}B$ est une matrice de projection. On a alors

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{p}B\right) = \operatorname{rg}\left(\frac{1}{p}B\right) = \operatorname{rg}(B),$$

d'où $\operatorname{Tr}(B) = p \operatorname{rg}(B)$.
Solution 42.37