Sujet d'étude

Arccosinus complexe

Pour tout nombre complexe z, on définit le cosinus de z par

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Avant de définir une fonction «Arccosinus complexe», revenons sur la construction de la fonction arccos usuelle. Nous avons d'abord trouvé un intervalle sur lequel cos est injective (à savoir $[0, \pi]$) puis déterminé l'image de cet intervalle par cos (à savoir $[-1, 1]$). Ainsi, la fonction cos réalise ujne bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et on peut définir sa réciproque, notée arccos. Remarquons que le choix de $[0, \pi]$ était arbitraire : on aurait pu choisir $[-\pi, 0]$ ou $[0, \pi/2]$, etc.

Soit Φ la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z)$. Étant donnée une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et une partie A de $\mathbb{C}$, on note f_A la fonction

$$f_A : \begin{array}{ccc} A & \to & f(A) \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}.$$

Définir une (ou des) fonction «Arccosinus complexe» revient donc à déterminer des parties A de $\mathbb{C}$, non vides et telles que la fonction Φ_A soit bijective. On dira d'une telle partie A qu'elle est convenable.

On remarquera que A est convenable si, et seulement si

$$\forall \left(z, z'\right) \in A^2, \cos(z) = \cos(z') \implies z = z'.$$

Partie A Préliminaires

A1. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x + iy) = \cos(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\,\mathrm{sh}(y).$$

A2. Les parties de $\mathbb{C}$ suivantes sont-elles convenables : $\mathbb{C}$? $\mathbb{R}$? $\left\{ z_0 \right\}$ avec $z_0 \in \mathbb{C}$?

A3. Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

A4. Soit la fonction $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -z$ et A une partie convenable de $\mathbb{C}$. Montrer que $S(A)$ est convenable.

A5. Soit la fonction $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + 2\pi$ et A une partie convenable de $\mathbb{C}$. Montrer que $T(A)$ est convenable.

A6. Soit A et A' deux parties convenables de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\Phi(A) \cap \Phi(A') = \emptyset$, alors $A \cup A'$ est convenable.

Partie B Exemples de parties convenables

Étant donnée une partie B de $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in B \text{ et } \mathfrak{Im}(z) = 0 \}$$

sera noté également B.

B1. Soit $A_1 =]0, \pi[$. Déterminer $\Phi(A_1)$, montrer que A_1 est convenable et déterminer $\Phi_{A_1}^{-1}$.

B2. Soit $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = 0 et\, \mathfrak{Im}(z) \geq 0 \}$. Déterminer $\Phi(A_2)$, montrer que A_2 est convenable et déterminer $\Phi_{A_2}^{-1}$.

B3. Soit $A_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = \pi \text{ et } \mathrm{Im}(z) \leq 0 \}$. Déterminer $\Phi(A_3)$, montrer que A_3 est convenable et déterminer $\Phi_{A_3}^{-1}$.

B4. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Montrer que A_4 est convenable. Déterminer $\Phi(A_4)$ et $\Phi_{A_4}^{-1}$.

Partie C Résolution de l'équation $\cos(z) = a$

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$.

C1. Soit $\varrho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \varrho e^{i\theta}. \tag{1}$$

C2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\cos(z) = a$ si, et seulement si e^{iz} est solution d'une équation de degré 2 que l'on notera (1).

C3. Montrer que l'équation (1) admet deux racines distinctes Z_1 et Z_2 non nulles et que

$$|Z_2| = \frac{1}{|Z_1|} \qquad \text{et } \arg(Z_2) \equiv \arg(Z_1)\ [2\pi] \qquad \text{et } Z_1 + Z_2 \notin \mathbb{R}.$$

C4. En déduire qu'il existe un unique $\theta_a \in]0, \pi[$ et un unique $\varrho_a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tel que $\varrho_a e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{\varrho_a} e^{-i\theta_a}$ soient solutions de (1).

C5. Soit $A_5 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in]0, \pi[et\, \mathfrak{Im}(z) \neq 0 \}$. Montrer que A_5 contient exactement une solution de l'équation $\cos(z) = a$, que l'on notera $\Psi(a)$. Exprimer $\Psi(a)$ en fonction de ϱ_a et θ_a

C6. En déduire qu'il existe un unique $\theta_a \in]0, \pi[$ et un unique $\varrho_a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tel que $\varrho_a e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{\varrho_a} e^{-i\theta_a}$ soient solutions de (1).

C7. Soit $A_5 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in]0, \pi[et\, \mathfrak{Im}(z) \neq 0 \}$. Montrer que A_5 contient exactement une solution de l'équation $\cos(z) = a$, que l'on notera $\Psi(a)$. Exprimer $\Psi(a)$ en fonction de ϱ_a et θ_a

C8. Calculer $\Psi(i)$.

C9. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Im}(b) \neq 0$. Exprimer $\Psi(-b)$ en fonction de $\Psi(b)$.

Partie D Une partie convenable maximale

D1. Montrer que si $z \in A_5$, alors $\mathfrak{Im}(\cos(z)) \neq 0$. En déduire que A_5 est convenable.

D2. Soit $A_6 = A_4 \cup A_5$. Représenter l'ensemble des points du plan dont l'affixe est dans A_6. Montrer que $\Phi(A_6) = \mathbb{C}$, puis que A_6 est convenable.

D3. On notera désormais Γ la réciproque de Φ_{A_6} (Γ est une fonction Arccosinus complexe «intéressante»). Déterminer $\Gamma(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

D4. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{C}, \Gamma(z) + \Gamma(-z) = \pi.$$

D5. Montrer que A_6 est une partie convenable maximale, c'est-à-dire qu'aucune partie de $\mathbb{C}$ contenant A_6 et différente de A_6 n'est convenable.

D6. Donner d'autres exemples de parties convenables maximales.