Chapitre 49

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Un élément $x \in \mathbb{R}^p$ s'écrit donc indifféremment x, $(x_1, \dots, x_p)$ ou $x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$.

Rappelons que si $\vec{u} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\vec{v} = (y_1, \dots, y_p)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \quad \text{et} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p.$$

49.1 Généralités sur les fonctions vectorielles

Définition 1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}^p$. On peut écrire

$$f : \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f_1(t) \cdot e_1 + \dots + f_p(t) \cdot e_p = \big(f_1(t), \dots, f_p(t)\big) \end{array}.$$

Les applications $f_1, \dots, f_p$ (définie sur X) sont les **applications coordonnées** de f.

Exemple 2

Dans un langage géométrique, les application de $X \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ sont appelées **courbes paramétrées**.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut noter $M(t) = (x(t), y(t))$. L'image Γ de cette fonction est une courbe de $\mathbb{R}^2$. En physique, on dit que Γ est la trajectoire (du point, de la particule, de...). On dit aussi que M est un paramétrage de la courbe Γ.

$$\begin{cases} x(t) &= 3\cos(t) \\ y(t) &= 2\sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

est le paramétrage d'une ellipse.

49.2 Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition 3

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à $X \subset \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}^p$. On dit que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^2$ **admet une limite** ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in X, |t-a| \leq \delta \implies \|f(t) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 4

Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ au point a, celle-ci est unique.

On note alors

$$\lim_a f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{t\to a} f(t) = \ell.$$

Proposition 5

La fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ au point a si, et seulement si

$$\lim_{t\to a} \|f(t) - \ell\| = 0.$$

Cette propriété permet donc de se ramener à une fonction à valeurs réels et utiliser, par exemple, les théorèmes d'existence de limite par domination.

Proposition 6

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à $X \subset \mathbb{R}$ On note $(f_1, \dots, f_p)$ les applications coordonnées de f :

$$\forall t \in X, f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_p(t)\big)$$

Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$.
Alors f admet une limite ℓ au point a si, et seulement si

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \lim_{t\to a} f_j(t) = \ell_j.$$

Exemple 7

On a $\lim_{t\to 0} \big(\cos(t), t^2 - 1, \sin(t)\big) = (1, -1, 0)$.

Définition 8

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ et $a \in X \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^2$ est **continue au point a** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in X, |t-a| \leq \delta \implies \|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a).$$

On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Proposition 9

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ et $a \in X$. Alors f est continue au point a si, et seulement si chaque application coordonnées f_j est continue au point a.

Exemple 10

L'application $f : t \mapsto \big(\cos(t), t^2 - 1, \sin(t)\big)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune de ses fonctions coordonnées l'est.

49.3 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

§1 Vecteur dérivé

Définition 11

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ et $a \in X \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^2$ est **dérivable au point a** si le taux d'accroissement

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite finie lorsque $t \to a$. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le **vecteur dérivé** de f au point a.

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

On dit que f est dérivable sur X si f est dérivable en tout point de X.

Proposition 12

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ et $a \in X$. Alors f est dérivable au point a si, et seulement si chaque application coordonnées f_j est dérivable au point a. Dans ce cas,

$$f'(a) = \Big(f_1'(a), \dots, f_p'(a)\Big).$$

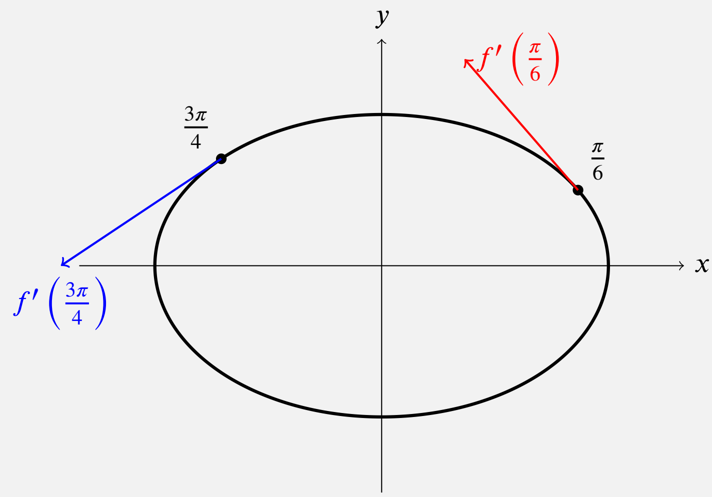
Exemple 13

La fonction vectorielle définie par

$$f(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = (-3\sin(t), 2\cos(t)).$$



§2 Opérations sur les fonctions dérivables

Généralisation Les proposition ci-dessous restent vraies en remplaçant «dérivable» par «de classe $\mathscr{C}^1$» ou « de classe $\mathscr{C}^k$ ».

Proposition 14 **Dérivation du produit par une fonction scalaire**

Soient $f = (f_1, \dots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur X. Alors, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \lambda f : & X & \to & \mathbb{R}^p \\ & t & \mapsto & \lambda(t) f(t) = \left(\lambda(t) f_1(t), \dots, \lambda(t) f_p(t)\right) \end{array}$$

est dérivable sur X et on a

$$\forall t \in X, (\lambda f)'(t) = \lambda'(t) f(t) + \lambda(t) f'(t).$$

Proposition 15 **Dérivation d'une composée**

Soient $f : X \to \mathbb{R}^p$ et $s : I \subset \mathbb{R} \to X$ deux fonctions dérivables Alors, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f \circ s : & X & \to & \mathbb{R}^p \\ & t & \mapsto & \left(f_1(s(t)), \dots, f_p(s(t))\right) \end{array}$$

est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, (f \circ s)'(t) = s'(t) \cdot f'(s(t)).$$

Proposition 16 **Composition avec une application linéaire**

Soient $f : X \to \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Alors, la fonction

$$\begin{array}{rccl} u \circ f : & X & \to & \mathbb{R}^q \\ & t & \mapsto & u\left(f_1(t), \dots, f_p(t)\right) \end{array}$$

est dérivable sur X et on a

$$\forall t \in I, (u \circ f)'(t) = u\left(f'(t)\right).$$

Démonstration. Admis pour l'instant. Cela se démontre avec la continuité des applications linéaires en dimension finie. ∎

Proposition 17 **Dérivation du produit scalaire et produit vectoriel**

Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}^p$ dérivables sur X.

1. *La fonction*
$$\begin{array}{rccl} \langle f,g\rangle : & X & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \langle f(t),g(t)\rangle \end{array}$$
est dérivable sur X et
$$\forall t\in X, \langle f,g\rangle'(t) = \langle f'(t),g(t)\rangle + \langle f(t),g'(t)\rangle.$$
2. *Lorsque $p=3$, la fonction*
$$\begin{array}{rccl} f\wedge g : & X & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & f(t)\wedge g(t) \end{array}$$
est dérivable sur X et
$$\forall t\in X, (f\wedge g)'(t) = f'(t)\wedge g(t) + f(t)\wedge g'(t).$$

Remarque Si $f : X\to\mathbb{R}^p$ et $g : X\to\mathbb{R}^q$ sont deux fonction dérivable et $\varphi : \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^n$ est une application bilinéaire, alors la fonction
$$\begin{array}{rccl} \varphi(f,g) : & X & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & \varphi(f(t),g(t)) \end{array}$$
est dérivable sur X et
$$\forall t\in X, (\varphi(f,g))'(t) = \varphi\left(f'(t),g(t)\right) + \varphi\left(f(t),g'(t)\right).$$

Proposition 18 **Dérivation de la norme**

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}^p$ dérivable sur X et ne s'annulant en aucun point de X. Alors, la fonction
$$\begin{array}{rccl} \|f\| : & X & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$$
est dérivable sur X et on a
$$\forall t\in X, \|f\|'(t) = \frac{\langle f(t),f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}.$$

§3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 19

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$. On définit par récurrence l'application dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$.

- Pour $n = 0$, on pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. On suppose $f^{(n-1)} : X \to \mathbb{R}^p$ est dérivable au point $a \in X$. Dans on dit que f admet une dérivée n-ième au point a et on note

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

On dit que f est **n-fois dérivable** sur X si f admet une dérivée n-ième en tout point de X.

Définition 20

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$.

- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur X si f est continue sur X.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur X si f est n-fois dérivable sur X et si $f^{(n)}$ est continue sur X.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X si f est dérivable n-fois pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 21

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$ et $a \in X$. Alors f est n-fois dérivable au point a si, et seulement si chaque application coordonnées f_j est n-fois dérivable au point a. Dans ce cas,

$$f^{(n)}(a) = \left(f_1^{(n)}(a), \ldots, f_p^{(n)}(a)\right).$$

De plus, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur X si, et seulement si chaque application coordonnées f_j est de classe $\mathscr{C}^n$ sur X.

Proposition 22

Formule de Leibniz
Soient $f : X \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions n-fois dérivables sur X. Alors, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \lambda f : & X & \to & \mathbb{R}^p \\ & t & \mapsto & \lambda(t)f(t) = \left(\lambda(t)f_1(t), \ldots, \lambda(t)f_p(t)\right) \end{array}$$

est n-fois dérivable sur X et on a

$$\forall t \in X, (\lambda f)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t).$$

§4 Développement limité

Définition 23 Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle et $\lambda : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. La relation

$$f(t) = o(\lambda(t)) \quad \text{lorsque} \quad t \to a$$

signifie

- lorsque a un point adhérent à X:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in X, |t - a| \leq \delta \implies \|f(t)\| \leq \varepsilon |\lambda(t)|.$$

- lorsque X n'est pas majorée et $a = +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in X, t \geq t_0 \implies \|f(t)\| \leq \varepsilon |\lambda(t)|.$$

- lorsque X n'est pas minorée et $a = -\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in X, t \leq t_0 \implies \|f(t)\| \leq \varepsilon |\lambda(t)|.$$

On dit que f est **négligeable** devant λ au voisinage de a.

Proposition 24 *Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle et $\lambda : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.*
Alors f est négligeable devant λ au voisinage de a si, et seulement si chaque application coordonnées f_j est négligeable devant λ au point a.

Lorsque λ ne s'annule pas au voisinage de a, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- $f(t) = o(\lambda(t))$ lorsque $t \to a$;
- $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{\|f(t)\|}{\lambda(t)} = 0$;
- $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)}{\lambda(t)} = 0_{\mathbb{R}^p}$.

Définition 25 Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle. On dit que la fonction f admet un développement limité au point $a \in X$ à l'ordre n s'il existe des vecteurs $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$f(a + t) = v_0 + t v_1 + t^2 v_2 + \cdots + t^n v_n + o(t^n) \quad \text{lorsque} \quad t \to 0.$$

Proposition 26 *La fonction $f = (f_1, \dots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ admet un développement limité au point a à l'ordre n si, et seulement si chaque application coordonnées f_j admet un développement limité au point a à l'ordre n.*
Dans ce cas, le développement limité de f se calcule coordonnée par coordonée.

Exemple 27

Lorsque $t \to 0$,

$$f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + o\left(t^3\right).$$

Proposition 28

Formule de Taylor-Young

Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur X et $a \in X$. Lorsque $t \to 0$,

$$f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}f^{(k)}(a).$$

CHAPITRE 49

COMPLÉMENTS

Dans la suite Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

49.4 NOTION D'ARC PARAMÉTRÉ

§1 Définitions

Définition 29 Une application de D dans $\mathcal{P}$ est appelée une **courbe paramétrée**.

$$M : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathcal{P} \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}.$$

Le choix d'une base permettant d'identifier les vecteurs du plan à $\mathbb{R}^2$, la donnée d'une courbe paramétrée revient donc à celle d'une **fonction vectorielle**

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \qquad \text{où } \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2}.$$

On dira que M est continue (resp. de classe $\mathscr{C}^k$,...) si f est continue (resp. de classe $\mathscr{C}^k$,...).

Définition 30

- La variable t s'appelle le **paramètre**.
- Le point $M(t)$, est le **point de paramètre t**.
- Le vecteur
$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2}$$
est le **vecteur position** à l'instant t.
- L'ensemble $\Gamma = \{\ M(t) \mid t \in D\ \}$ est le **support** de la courbe paramétrée.

- On dit que f est un **paramétrage** de Γ.

Lorsque D est un intervalle réel, on dit également que f est un **arc paramétrée**.

Remarque Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on peut identifier naturellement les couples de réels, les points et les vecteurs. On peut donc confondre (abusivement) dans ce chapitre $f(t) = ((x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $M(t) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{OM}(t) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Selon le contexte, nous penserons $f(t)$ tantôt comme un point, tantôt comme un vecteur. Nous identifierons également le support de l'arc Γ avec l'image directe de D par l'application f : $f(D) = \{ f(t) \mid t \in D \}$.

§2 Exemples

Exemple 31 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La courbe Γ représentée paramétriquement par le système

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est la droite passant par le point $A(a, b)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Exemple 32 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. La courbe Γ représentée paramétriquement par le système

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R.

Exemple 33 Soit $\varphi : D \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. La représentation graphique de φ peut toujours être définie paramétriquement : il suffit de prendre l'abscisse x comme paramètre.

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}, t \in D.$$

Remarque Une courbe peut avoir plusieurs paramétrages.

$$f : \begin{array}{rcl}]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \end{array}$$

Décrivent le cercle trigonométrique privé du point $(-1, 0)$ (qui correspond à l'angle π). Alors $f \neq g$ mais $f(]-\pi, \pi[) = g(\mathbb{R})$.

§3 Interprétation cinématique

Définition 34

Soient I un intervalle réel et $M : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^2$.
En cinématique, lorsque t est le temps,

- l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ est le **mouvement** d'un point M (c'est une fonction).
- Le support de l'arc $M(I)$ est appelé **trajectoire** de M.
- Le **vecteur vitesse** de M à l'instant t est le vecteur $\vec{v}(t) = M'(t)$.
- Le réel $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ s'appelle la **vitesse algébrique** de M à l'instant t.
- Le **vecteur accélération** de M à l'instant t est le vecteur $\vec{a}(t) = M''(t)$.
- Le réel $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$ s'appelle l'**accélération algébrique** de M à l'instant t.

Remarque

En physique, quand on dérive par rapport au temps, on utilise plutôt les notations $\dot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots$ (pour les fonctions à valeurs réelles) et $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}, \dots$.
Si $M(t) = (x(t), y(t))$ alors

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{e_1} + y'(t)\vec{e_2} \qquad v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$
$$\vec{a}(t) = x''(t)\vec{e_1} + y''(t)\vec{e_2} \qquad a(t) = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2}$$

Définition 35

Le mouvement de M est dit :

- **uniforme** si v est constante.
- **accéléré** si v est croissante.
- **retardé** si v est décroissante.
- **rectiligne** lorsque sa trajectoire est incluse dans une droite c'est-à-dire s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall t \in I, ax(t) + by(t) = c.$$
- à **accélération centrale** de centre $A \in \mathbb{R}^2$ si, pour tout $t \in I$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}(t)$ et $\vec{a}(t)$ sont colinéaires.

Exemple 36

Soit $M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$. Le support de M est le cercle de centre O et de rayon 1 et le mouvement de M est :

- *uniforme* puisque v est constante (bien que $\vec{v}$ ne le soit pas).
$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{v}(t) = f'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ et } v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$
- *à accélération centrale de centre O* car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.
$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{a}(t) = f''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\overrightarrow{OM}(t)$$

Remarquons également que

$$\forall t \in \mathbb{R}, a(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = 1 \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = 0.$$