Chapter 22 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

22.1 Théorème de la borne supérieure

Exercice 22.1

Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0,1[$,
2. $[0,1[$,
3. $]1,+\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,
7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Exercice 22.2

On considère

$$E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{p} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure ? Si oui, les déterminer.

Exercice 22.3

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 22.4

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

Exercice 22.5

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de $\mathbb{R}$; on définit

$$C = A + B = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y \} ;$$

Prouver que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercice 22.6

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de $\mathbb{R}_+$; on définit

$$D = AB = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = xy \} ;$$

Déterminer $\sup(D)$.

Exercice 22.7

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B, a \leq b.$$

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 22.8

Soit A une partie bornée non-vide de $\mathbb{R}$. Montrer

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} |x-y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 22.9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 22.10 *Un théorème de point fixe*

Soit une application croissante $f : [0,1] \to [0,1]$. On se propose de montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in [0,1], f(\alpha) = \alpha.$$

On considère l'ensemble

$$A = \{ x \in [0,1] \mid f(x) \leq x \}.$$

1. Montrer que l'ensemble A est non vide et qu'il admet une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$.
2. Démontrer que si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

   En déduire que $f(\alpha) \leq \alpha$.
3. Démontrer que si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

   En déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.
4. Conclure.

22.2 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

Exercice 22.11

Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

22.3 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$