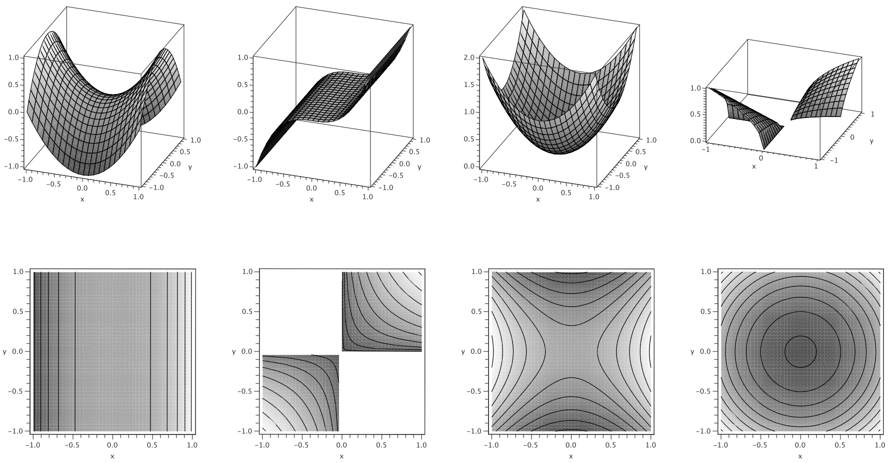
Chapter 50 Fonctions de deux variables réelles, limite, continuité

50.1 Applications de deux variables réelles

Exercice 50.1

Restituer à chaque fonction son graphe et ses courbes de niveau.

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f_2(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f_3(x,y) = x^3 \qquad f_4(x,y) = \sqrt{xy}$$



50.2 Limite en un point, continuité

Exercice 50.2

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Exercice 50.3

Les fonctions f et g données ci-dessous sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Exercice 50.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 50.5

Prouver que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Exercice 50.6

Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la valeur de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+5xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercice 50.7

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^6}{x^6+y^8} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}.$$

1. Étudier la continuité des applications partielles de f en $(0,0)$.

2. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

Exercice 50.8

Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^4(x) + (1-\cos y)^2}{4x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{4} & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Exercice 50.9

Prolonger par continuité la fonction

$$f : (x,y) \mapsto \frac{\cos x - \cos y}{x-y}$$

sur la diagonale Δ de $\mathbb{R}^2$.

50.3 Propriétés

Exercice 50.10

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 50.11

Soient I un intervalle de longueur > 0, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $a \in I$ tel que f admet un développement limité à l'ordre 2 en a.
Est-ce que

$$\frac{1}{xy}\left(f(a+x+y) - f(a+x) - f(a+y) + f(a)\right)$$

admet une limite quand $(x, y) \underset{xy \neq 0}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 50.12

On note $A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$ le premier quadrant fermé. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in A$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x_1 + x_2 + t + 1}\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que f est continue sur A. Déterminer la borne inférieure de la fonction f. Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 50.13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.