Groupe symétrique

Aperçu

T 1 $(\mathscr{S}(X), \circ)$ *est un groupe.*

Le groupe $\mathscr{S}(X)$ s'appelle le **groupe des permutations** de l'ensemble X ou **groupe symétrique** de X.

D 2 Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

- On appelle **permutation** de $[\![1, n]\!]$ toute bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
- Le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.

R

1. $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}\left([\![1, n]\!]\right)$.
2. $\left(\mathcal{S}_n, \circ\right)$ est un groupe.
3. $\operatorname{card}\left(\mathcal{S}_n\right) = n!$.

N Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

E 3 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\sigma' \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

D 4 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $x \in [\![1, n]\!]$.

- L'**orbite** de $x \in [\![1, n]\!]$ pour σ est l'ensemble

$$\operatorname{orb}(x) = \left\{ \sigma^k(x) \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

- On dit que x est un **point fixe** pour σ si $\sigma(x) = x$.
- Le **support** de σ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas fixes pour σ:

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{ i \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(i) \neq i \}.$$

- L'**ordre** de σ est le plus petit entier k tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$. C'est aussi l'ordre du sous-groupe monogène engendré par σ.

E 5 Le support de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.
Cette permutation a trois orbites : celle du point fixe $\{ 6 \}$ et deux autres $\{ 1, 2, 3 \}$ et $\{ 4, 5 \}$.
Cette permutation est d'ordre 6.

D 6 Soit $p \in [\![2, n]\!]$. Un **cycle de longueur p** est un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel qu'il existe p éléments distincts de $x_1, x_2, \dots, x_p \in [\![1, n]\!]$ vérifiant

$$\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$$

$$\text{et } \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{ x_1, \dots, x_p \}, \sigma(j) = j.$$

- L'ensemble $\{ x_1, \dots, x_p \}$ est le **support** du cycle σ.
- Ce cycle se note également $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$.
- Un cycle de longueur 2 est une **transposition**.

E 7 On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La permutation σ est un cycle de longueur 4. On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mais aussi $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
On a aussi

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{[\![1,5]\!]}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

P 9 *Deux cycles à supports disjoints commutent.*

T 10 *Toute permutation de* $[\![1, n]\!]$ *distincte de* $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ *peut s'écrire comme composée de cycles de supports deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près.*

Démonstration. Non exigible. ∎

E 11

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

R Cette décomposition permet de calculer facilement les puissance d'une permutation.

T 12 *Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut s'écrire comme composée de transposition. Cette décomposition n'est pas unique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout cycle est composée de transposition. Soit $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ un cycle de longueur p, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix} \circ \dots \circ \begin{pmatrix} x_{p-1} & x_p \end{pmatrix}.$$

∎

R

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D 13 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ $(n \geq 2)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On dit que (i, j) est une **inversion** pour σ si

$$i < j \qquad \text{et} \qquad \sigma(i) > \sigma(j).$$

La **signature** de σ est $(-1)^p$ où p est le nombre d'inversions de σ. On la note $\varepsilon(\sigma)$.

- Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, on dit que σ est une **permutation paire**.
- Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, on dit que σ est une **permutation impaire**.

E 14 Avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$1 < 2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(1) = 5 > \sigma(2) = 1.$$

Donc le couple $(1, 2)$ est une inversion pour σ.

E 15 On a $\varepsilon\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right) = (-1)^0 = 1$.

P 16 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i},$$

où la notation $\prod_{\{i,j\}}$ *est le produit sur toutes les paires* $\{i, j\} \subset [\![1, n]\!]$ *(donc avec $i \neq j$).*

Démonstration. Une paire $\{ i, j \}$ est une inversion si, et seulement si $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{i-j} < 0$. On a donc

$$\prod_{\{ i,j \}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^p \prod_{\{ i,j \}} \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|},$$

où p désigne le nombre d'inversion de σ.
Or σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ donc $\{ \sigma(i), \sigma(j) \}$ décrit l'ensemble des paires de $[\![1,n]\!]$ lorsque $\{ i, j \}$ décrit l'ensemble des paires de $[\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\prod_{\{ i,j \}} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{\{ i,j \}} |j-i|$$

et donc

$$\prod_{\{ i,j \}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^p = \varepsilon(\sigma).$$

∎

T 17 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2$. Alors*

$$\varepsilon\left(\sigma \circ \sigma'\right) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma').$$

En d'autres termes,

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \left(\mathcal{S}_n, \circ\right) & \to & (\{-1, 1\}, \times) \\ & \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

- *C'est le seul morphisme non identiquement égal à 1.*
- *C'est le seul morphisme envoyant toute transposition sur -1.*

Démonstration. Non exigible. ∎

P 18 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.*

1. *La signature d'une transposition est toujours -1.*
2. *On peut écrire $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q$ où les τ_i sont des transpositions. Alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^q$.*
3. *La signature d'une cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$.*