Chapitre

36

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera un corps.
Le programme se limite au cas où ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

36.1 Structure d'espace vectoriel

§1 Les axiomes d'espace vectoriel

Définition 1 **Axiomes d'espace vectoriel**

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, d'éléments neutres $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$, on appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ un ensemble E muni d'une structure algébrique définie par la donnée d'une loi de composition interne, appelée **addition**

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif, c'est-à-dire

1. La loi $+$ est **associative**.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z.$$

2. E possède un **élément neutre** pour la loi $+$, noté 0_E.

$$\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

3. Tout élément de E possède un **opposé** pour la loi $+$ dans E.

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = 0_E.$$

On note $-x$ l'opposé de x.

4. La loi $+$ est **commutative**.

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

D'une loi d'action appelée **multiplication externe**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

qui satisfait aux axiomes suivants [a]

5. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, x \in E, y \in E$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
6. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
7. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha.\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
8. Pour tout $x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

[a] Règle bien connue : pour économiser les parenthèses, on convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

En toute rigueur, on dit que $(E, +, \cdot)$, lire «E muni des lois $+$ et $\cdot$», est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique, on dit simplement que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que E est un **espace vectoriel réel**. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que E est un **espace vectoriel complexe**. Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments du corps de base $\mathbb{K}$ sont les **scalaires**. Le neutre pour l'addition dans E est appelé **vecteur nul** tandis que le neutre pour l'addition dans $\mathbb{K}$ est appelé **zéro**. On peut les noter tous les deux 0, pour ne pas les confondre, nous noterons plutôt le vecteur nul 0_E ou $\overrightarrow{0}$.

On s'efforce de mettre le scalaire à gauche, et le vecteur à droite, le point pouvant être omis (on écrira αx).

Afin d'alléger les notations, nous ne mettons pas de flèches sur les lettres représentant les vecteurs. Pour éviter de confondre vecteurs et scalaires, nous utiliserons plutôt des lettres latines pour les vecteurs $(u, v, x, y, z, \dots)$ et des lettres grecques pour les scalaires $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots)$, sans toutefois en faire une règle trop absolue, ce qui risquerait de compliquer inutilement les notations.

La courte liste des propriétés précédentes, appelées axiomes, est minimale si l'on souhaite qu'un espace vectoriel se comporte «comme nous le souhaitons», c'est-à-dire comme $\mathbb{R}^n$. D'autres propriétés, que l'on s'attend à être vraies, découlent des axiomes. Par exemple,

Proposition 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

$$\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque $0 + 0 = 0$ (dans $\mathbb{K}$), on a

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

En ajoutant $-(0 \cdot x)$, l'opposé de $0 \cdot x$, à chaque côté de l'égalité, on obtient

$$0_E = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + 0_E = 0 \cdot x.$$

∎

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x.$$

Test 4

Montrer le avec un argument similaire avec $0 = 1 + (-1)$.
Pour les plus rapides, démontrer le résultat suivant.

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x, y \in E$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E$;
2. $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$;
3. $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha x - \beta x$;
4. $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$.
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$ *et* $(-n) \cdot x = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n}$.

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot x_i).$$

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout vecteur $x \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot x = 0_E \implies \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

Il est important de différencier les scalaires et les vecteurs, pour ne pas écrire d'incorrections ; ainsi, il se peut que E ne soit pas muni de multiplication interne ou de produit scalaire.
De même, le quotient de deux vecteurs n'a pas de sens ; ainsi, si $y = \alpha x$ (avec x, y des vecteurs et α un scalaire), on n'écrira pas $\alpha = \frac{y}{x}$.

§2 Exemples

L'ensemble des vecteurs de l'espace (ou du plan) de la géométrie élémentaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles $\vec{x}+\vec{y}$ et $\lambda\vec{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). C'est là l'origine du mot «espace vectoriel».

Exemple 7

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$
Si E est le corps $\mathbb{K}$ lui-même, alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; les deux opérations étant naturellement $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Exemple 8

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$
Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations définies par

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \qquad \text{et} \qquad \lambda(a+ib) = (\lambda a)+i(\lambda b)$$

où a, b, a', b' et λ sont réels. Alors $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; ces deux structures sont différentes.

Exemple 9

Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$
L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est muni de addition et multiplication par un scalaire usuelle:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ étant le vecteur dont chaque composante est nulle, c'est-à-dire $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)^T$.

On peut également noter les éléments de $\mathbb{K}^n$ en lignes, les opérations sur $\mathbb{K}^n$ s'écrivant alors

$$\begin{gathered} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \\ \text{et } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{gathered}$$

Exemple 10

Un espace vectoriel de fonctions
L'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munie de l'addition point à point et de la multiplication par un scalaire usuelle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Remarquons que le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction identiquement nulle,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Test 11

Montrer que les axiomes d'espace vectoriel sont respectés pour F. En particulier, si la fonction f est un vecteur de F, décrire le vecteur $-f$.

Exemple 12

Espace vectoriel de matrices
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (A+B)\,[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (\lambda \cdot A)\,[i,j] = \lambda A[i,j]$$

où $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Le vecteur nul de cet espace n'est autre que la matrice nulle notée $0_{n,p}$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.
- Chaque matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour matrice opposée la matrice $-A$ que l'on construit en posant

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (-A)\,[i,j] = -A[i,j].$$

Exemple 13

Espace vectoriel des suites
L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}};$$
$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

où $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le vecteur nul est la suite constante dont chaque terme égale zéro. L'opposé de la suite $u = \big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $-u = \big(-u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Test 14

Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'exemple suivant est une partie de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 15

Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le dernier coefficient est nul, c'est-à-dire

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Alors W est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni de l'addition et la multiplication par un scalaire usuelle. Pour cela, il suffit de vérifier que W contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, et que W est stable par addition et multiplication par un scalaire.
En effet, les axiomes **1**, **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** sont vérifiés pour tous vecteurs de W puisqu'ils sont vérifiés pour tous vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Reste à vérifier que si $u, v \in W$, alors $u + v \in W$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v \in W$, alors $\alpha v \in W$.
Ce assure assure l'existence de l'addition et la multiplication externe pour W.

$$+ : W \times W \to W \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times W \to W.$$

On vérifie alors facilement l'axiome **3**, l'opposé de $v \in W$ étant alors le même dans W que dans $\mathbb{R}^3$: $-v = (-1) \cdot v$.

Test 16

Vérifier que $0_{\mathbb{R}^3} \in W$, et que pour $(u, v) \in W^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $u + v \in W$ et $\alpha v \in W$.

Exemple 17

Espace vectoriel de polynômes
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k)X^k;$$
$$\lambda \cdot \left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0} \left(\lambda a_k\right) X^k.$$

Théorème 18

Espace vectoriel d'applications
Soient X un ensemble non vide et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors $\mathscr{F}(X, V)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois naturelles définies par

$$f+g: \begin{array}{rcl} X & \to & V \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad ; \quad \lambda \cdot f: \begin{array}{rcl} X & \to & V \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

où $f, g \in \mathscr{F}(X, V)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'espace vectoriel des matrices est un cas particulier d'espace vectoriel d'applications $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathscr{F}(\llbracket 1, n\rrbracket \times \llbracket 1, p\rrbracket, \mathbb{K})$. L'espace vectoriel des suites est un cas particulier d'un espace vectoriel d'applications $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Définition 19

Espace vectoriel produit
Soient $(E_1, {\color{red}+}, {\color{red}\cdot})$ et $(E_2, {\color{blue}+}, {\color{blue}\cdot})$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On munit naturellement l'ensemble $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \forall (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 {\color{red}+} y_1, x_2 {\color{blue}+} y_2)$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha {\color{red}\cdot} x_1, \alpha {\color{blue}\cdot} x_2).$$

L'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est appelé **espace vectoriel produit**.

Le vecteur nul de $E = E_1 \times E_2$ est $(0_{E_1}, 0_{E_2})$.

On peut généraliser cette notion en munissant, de manière naturelle, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, lorsque les E_i sont eux-même des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

§3 Combinaisons linéaires

Lorsque v, w sont des vecteurs, et α, β des scalaires, alors $\alpha v + \beta w$ est encore un vecteur: on dit qu'il est combinaison linéaire de v et w. On généralise cette notion en parlant de combinaison linéaire d'un nombre **fini** de vecteurs.

Définition 20

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $v, v_1, , v_2, \dots, v_n$ un nombre fini de vecteurs de E. On dit que v est une **combinaison linéaire** de $v_1, \dots, v_n$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v.$$

Proposition 21

Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

Exemple 22

Montrons que $w = (2, -5)^T$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1, 2)^T$ et $v_2 = (1, -1)^T$. Il nous faut donc exhiber des scalaires α, β tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = w$, c'est-à-dire

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité entre vecteurs s'écrit comme un système d'équations scalaires

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 2 \\ 2\alpha - \beta &= -5 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = -1$ et $\beta = 3$. Alors $w = -v_1 + 3v_2$, que l'on peut vérifie facilement

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Test 23

Dans le plan, tracer v_1 et v_2. Représenter w comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. Représenter également le vecteur $x = \frac{1}{2}v_1 + v_2$.
Peut-on représenter n'importe quel «point» de votre feuille avec une combinaison linéaire de v_1 et v_2?

Exemple 24

Dans l'espace vectoriel $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 4$ est combinaison linéaire de trois fonctions simples, $f = 2g + 3h + 4k$, où

$$g : x \mapsto x^2 \qquad h : x \mapsto x \qquad k : x \mapsto 1.$$

En effet, une combinaison linéaire de g, h et k reste dans F; ainsi $2g + 3h + 4k$ ont même ensemble de départ et d'arrivée que f. De plus, pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(2g + 3h + 4k)(x) &= (2g)(x) + (3h)(x) + (4k)(x) \\
&= 2(g(x)) + 3(h(x)) + 4(k(x)) \\
&= 2x^2 + 3x + 4 \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Test 25

Dans $\mathbb{K}^n$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \dots \qquad e_k = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \begin{array}{l}\\\\\\k\text{-ème}\\\\\\\\\end{array} \qquad \dots \qquad e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Quel est alors le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$?

Remarque

En notant

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

le **symbole de Kronecker**. On a $e_k = \left(\delta_{i,k}\right)_{i=1\dots n}$.

36.2 Sous-espaces vectoriels

§1 Définition

Définition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. On dit que V est un **sous-espace vectoriel** de E si

- $0_E \in V$.
- V est stable par addition:

$$\forall (u, v) \in V^2, u + v \in V$$

- et V est stable par multiplication externe

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \alpha v \in V.$$

Test 27

Montrer que l'un de ces ensemble et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que l'autre ne l'est pas:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 28

Un sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel pour les lois induites

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\alpha, v) & \mapsto & \alpha v \end{array} .$$

Test 29 Démontrer ce théorème. S'inspirer de l'exemple $W = \left\{ (x, y, 0)^T \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exemple 30 Si E est un espace vectoriel, alors E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 31 Si E est un espace vectoriel, alors $\left\{ 0_E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle parfois **sous-espace nul**.

Exemple 32 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n

$$\mathbb{K}_n[X] = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 33 L'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites réelles à support fini est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

§2 Caractérisation

Proposition 34 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. Alors V est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si*

- $0_E \in V$.
- *V est stable par combinaison linéaire*

$$\forall (u, v) \in V^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha u + \beta v \in V.$$

Test 35 Si cela n'est pas encore évident, montrer le!

§3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 36 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$W = \bigcap_{i\in I} W_i$$

est un sous-espace vectoriel de E.

§4 Droites et plans vectoriels

Exemple 37 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors l'ensemble

$$S = \mathbb{K}x = \{ \alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Test 38 Montrer le!

Exemple 39 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y \in E$. Alors l'ensemble

$$V = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 40 Soit $x \in E$. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par x le sous-espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}\{ x \} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{K}x = \{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

Lorsque $x \neq 0_E$, on dit que $\mathbb{K}x$ est une **droite vectorielle**.

Définition 41 Soit $x, y \in E$. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par x et y le sous-espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}\{ x, y \} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \}.$$

Lorsque x et y ne sont pas colinéaires, on dit que $\operatorname{Vect}\{ x, y \}$ est un **plan vectoriel**

Proposition 42 *Soit $x, y \in E$. Alors $\operatorname{Vect}\{ x \}$ et $\operatorname{Vect}\{ x, y \}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*

§5 Noyau et image d'une matrice

Théorème 43 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. À faire en exercice. ∎

Exemple 44 L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, on a

$$S = \ker(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Le noyau de A est l'ensemble des solution du système linéaire *homogène* $Ax = 0$. Si on considère l'ensemble S des solutions du système $Ax = b$, alors S *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ lorsque $b \neq 0$ (c'est-à-dire lorsque le système n'est pas homogène). En effet, $0 \notin S$. Il y a néanmoins un lien entre S et $\ker(A)$: si x_0 est une solution de $Ax = b$, alors

$$S = \left\{ x_0 + z \mid z \in \ker(A) \right\},$$

on dit que S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ de direction $\ker(A)$.

Exemple 45

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble définit par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 3x+y &= 5 \end{cases}$ est un sous-espace affine réduit à un point :

$$\mathscr{V} = (2,-1) + \left\{ 0_E \right\} = \{ (2,-1) \}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, $x+y+z=1$ est l'équation d'un plan affine

$$\mathcal{P} = (1,0,0) + \left\{ (x,y,z)^T \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}.$$

Théorème 46 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.*

Démonstration. À faire en exercice. ∎

Exemple 47

On considère l'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x - 2y + z = 0 \right\}.$$

Alors pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S &\iff 3x - 2y + z = 0 \\
&\iff x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S = \left\{ sv_1 + tv_2 \,\middle|\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2.$$

où $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$.
On peut donc écrire

$$S = \mathrm{Im}(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Bien sûr, on peut le montrer également avec la définition ou écrire S comme le noyau d'une matrice.

Chapitre 36

Compléments

36.3 Génération et liberté : avec une bouée

Les deux notions présentées ici, l'indépendance linéaire et la génération, sont deux pôles de la théorie des espaces vectoriels. Ces deux notions ne sont pas simples et les liens qui les relient sont loin d'être évidents. Si de surcroit on cherche à tout exprimer en termes de familles, les énoncés s'alourdissent, les démonstrations s'allongent et le niveau d'abstraction s'élève ! En conséquence, il est indispensable, pour tirer quelque profit de l'étude théorique générale, de commencer par les situations les plus simples décrites par un petit nombre de vecteurs, sans lésiner sur les calculs explicites.

Dans cette version, l'essentiel sera décrit pour un triplet de vecteurs. Pourquoi 3 vecteurs ? tout d'abord parce que 3 c'est plusieurs et que donc la généralisation à n quelconque demanderait peu d'efforts et ensuite, parce que 3 permet les calculs explicites.

Ainsi, celui ou celle qui aura appris à nager dans les eaux calmes de la dimension 2 ou 3 pourra, après un rapide passage sur les préliminaires, se lancer directement dans le grand bain. En cas de difficultés, on pourra toujours reprendre l'entraînement sur les mouvements de base.

§1 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 48

Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs x_1, x_2, x_3 est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) de E contenant les vecteurs x_1, x_2, x_3. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par** x_1, x_2, x_3 et on le note

$$F = \operatorname{Vect}\{\, x_1, x_2, x_3 \,\} = \left\{\, x \in E \;\middle|\; \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3, x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \,\right\}.$$

On dit que (x_1, x_2, x_3) **engendre** F ou que c'est une **famille génératrice** de F.

On peut aménager un texte analogue dans le cas d'un vecteur, d'un couple, d'un quadruplet,...

Exemple 49

- Soit $x \in E, x \neq 0_E$. Alors $\operatorname{Vect}\{x\} = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x$ est une droite vectorielle de E.

Test 50

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$ mais que (e_1, e_2) engendre un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^3$.

Test 51

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y + 2z = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, trouver un couple générateur de F. Y-a-t-il unicité d'un tel couple ?
2. Soit $X = (2,2,-1)$. Montrer que $X \in F$ mais que $\operatorname{Vect}\{X\} = \mathbb{R}X \subsetneq F$.
3. Un couple (X_1, X_2) générateur de F étant choisi, y-a-t-il unicité de la décomposition $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$?

Test 52

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $X_1 = (1,2)$, $X_2 = (1,1)$, $X_3 = (2,-1)$, $X = (3,-5)$.

1. Montrer que $X \in \operatorname{Vect}\{X_1, X_2, X_3\}$. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
2. Montrer que $\operatorname{Vect}\{X_1, X_2, X_3\} = E$. Extraire du triplet (X_1, X_2, X_3) un couple générateur de E.

Test 53

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Montrer que

1. $1 + 2X^2 \in \operatorname{Vect}\{1 - 2X, X^2 + X, X^3\}$,
2. $X^3 \notin \operatorname{Vect}\{1, X, X^2\}$,
3. $X^3 \in \operatorname{Vect}\{1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$.

D'une part, il est évident que si x_4 est un nouvel individu de E, on a

$$\operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} \subset \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

D'autre part, on a vu dans les exercices précédents que cette inclusion pouvait être stricte ou large. Plus précisément, on a

Proposition 54

$$x_4 \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} \iff \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} = \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Plus généralement, si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E. Chaque fois que dans le lot il en existe un qui est combinaison linéaire des autres, on peut l'ôter sans dommage pour le sous-espace vectoriel F engendré par $(x_1, \dots, x_n)$. Lorsque cela ne sera plus possible nous disposerons d'une famille génératrice «minimale». A une telle famille, nous donnerons bientôt un nom.

§2 Indépendance linéaire

Définition 55

- On appelle **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs x_1, x_2, x_3 de E toute relation du type $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_E$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des scalaires non tous nuls (ce qui ne veut pas dire qu'ils sont tous non nuls !).
- S'il existe une relation de dépendance linéaire, on dit que le triplet (x_1, x_2, x_3) est **lié**, ou que les vecteurs x_1, x_2, x_3 sont **linéairement dépendants**.
- Dans le cas contraire, on dit que le triplet (x_1, x_2, x_3) est **libre**, ou que les vecteurs x_1, x_2, x_3 sont **linéairement indépendants**.

Remarque En résumé, étudier l'indépendance linéaire des vecteurs x_1, x_2, x_3 revient à résoudre l'équation en $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_E.$$

Si la seule solution est la solution triviale $(0,0,0)$, le triplet (x_1, x_2, x_3) est libre, sinon, il est lié.

Test 56 Étudier l'indépendance linéaire des triplets (x_1, x_2, x_3) suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et donner, s'il y a lieu les relations de dépendance linéaire.

1. $((1,3),(4,-1),(-5,1))$.
2. $((1,8,1),(-9,-3,1),(2,2,-3))$.
3. $((2,3,-1),(8,8,1),(4,2,3))$.

Test 57 Montrer que si (x_1, x_2, x_3) est un triplet libre de E, il en est de même du triplet $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$.

§3 Lien entre famille libre et famille génératrice

Proposition 58 *Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de E.*

- *Le triplet (x_1, x_2, x_3) est lié si et seulement si l'un au moins des vecteurs x_1, x_2, x_3 est combinaison linéaire des deux autres.*
- *Le triplet (x_1, x_2, x_3) est libre si et seulement si aucun des vecteurs du triplet est combinaison linéaire des deux autres.*

Proposition 59 *Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet libre de E et x un vecteur de E. On a*

$$(x_1, x_2, x_3, x) \text{ liée} \iff x \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}.$$

Démonstration. Soit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda x = 0_E$ une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs x_1, x_2, x_3, x. Alors $\lambda \neq 0$, car sinon le triplet (x_1, x_2, x_3) serait lié, donc λ est inversible et l'on a

$$x = (-\lambda^{-1}\lambda_1)x_1 + (-\lambda^{-1}\lambda_2)x_2 + (-\lambda^{-1}\lambda_3)x_3.$$

La réciproque a déjà été vue. ∎

Proposition 60 *Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. (x_1, x_2, x_3) *est libre.*
2. *tout vecteur x appartenant à* $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$ *admet un unique décomposition de la forme* $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.

Démonstration. $1 \implies 2$: Soit $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ deux décompositions de x. Par soustraction, on obtient

$$(\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + (\lambda_3 - \mu_3)x_3 = 0_E.$$

Mais puisque (x_1, x_2, x_3) est libre, on en déduit $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$. Les deux décompositions sont donc identiques.

$2 \implies 1$: En effet, (1) ne fait qu'exprimer (2) pour $x = 0_E$. ∎

Définition 61 Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet libre de vecteurs de E et posons $F = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. (x_1, x_2, x_3) s'appelle une **base** de F. C'est donc un triplet libre engendrant F.

Remarque

- D'après ce qu'on a vu précédemment, si (x_1, x_2, x_3) est une base de F, (x_1, x_2) n'engendre pas F. Sinon $x_3 \in \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$ et le triplet initial ne pourrait pas être libre. De même pour (x_1, x_3) et (x_2, x_3). Une base apparaît donc comme une famille génératrice minimale.
- De même une base de F apparaît comme une famille libre maximale car une sur-famille stricte d'une famille génératrice est nécessairement liée.

Test 62 Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$ et $F = \mathrm{Vect}\{x\} = \mathbb{K}x$. Montrer que tout couple (x_1, x_2) d'éléments de F est lié. En déduire toutes les bases de F.

Test 63 Soit (x_1, x_2) un couple libre de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$. Montrer que tout triplet de vecteurs de F est lié. En déduire que les bases de F sont les couples libres de vecteurs de F.