Chapter 3 Notions sur les fonctions en analyse

Exercice 3.1

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

Exercice 3.2

Déterminer l'ensemble de définitions de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)(x-7)}$.

Exercice 3.3

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1+2x^2-x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

Solution 3.3

Solutions à justifier!

1. Dom $f = \mathbb{R}$.
2. Dom $f =]-\infty, 1]$.
3. Dom $f = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.
4. Dom $f = \emptyset$.
5. Dom $f = [0, 1[$.
6. Dom $f = \{ -1 \} \cup \mathbb{R}_+$.
7. Dom $f = \{ -1, 1 \}$.
8. Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$.
9. Dom $f = [1, +\infty[$.
10. Dom $f = \mathbb{R}^\star$.
11. Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{ -2, -1, 1, 2 \}$.

Exercice 3.4

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

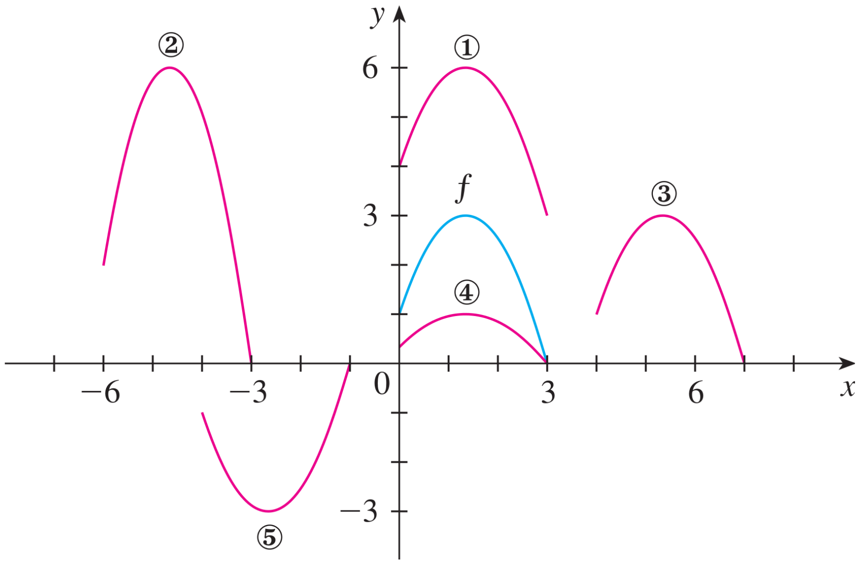
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x) + 3$

(e) $y = -f(x+4)$



Solution 3.4

a3, b4, c2, d1, e5.

Exercice 3.5 (*)

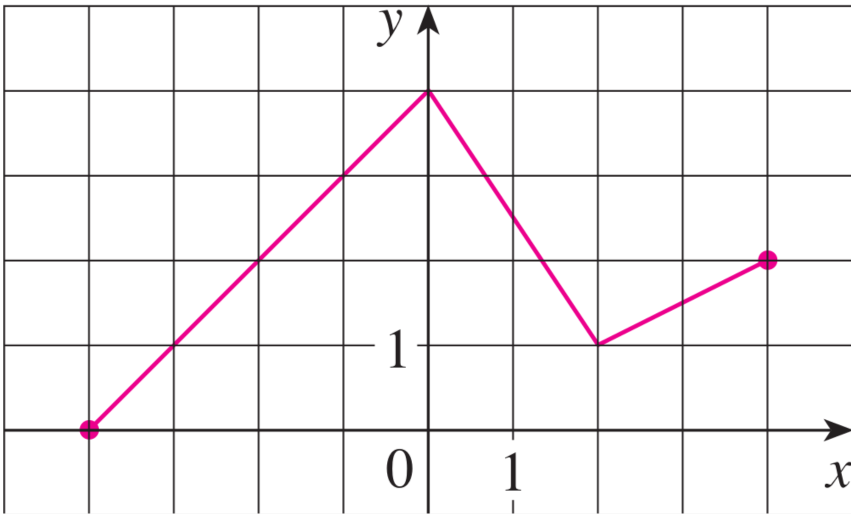
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

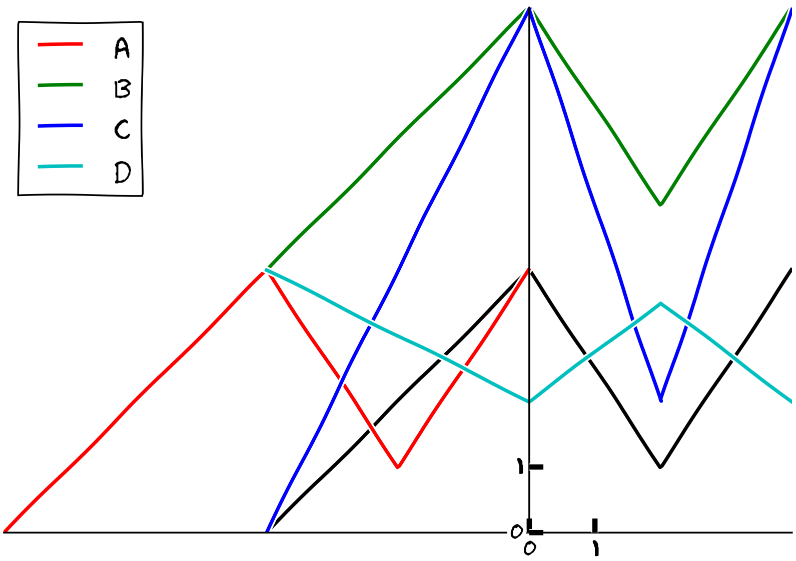
(b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 4$



Solution 3.5



Exercice 3.6 (*)

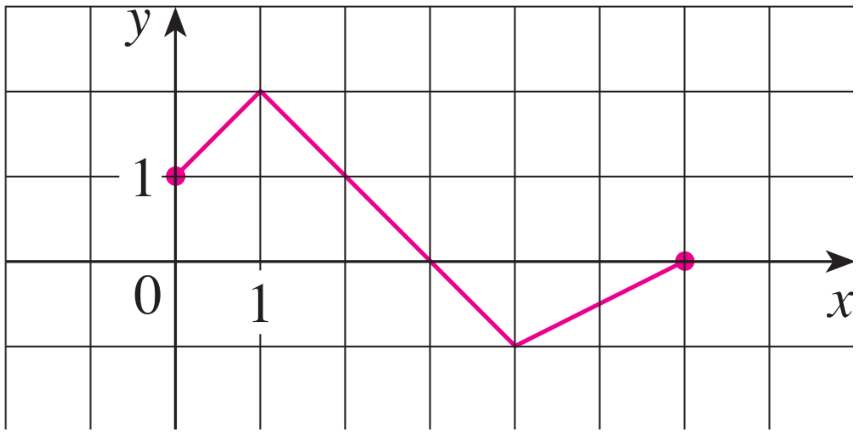
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

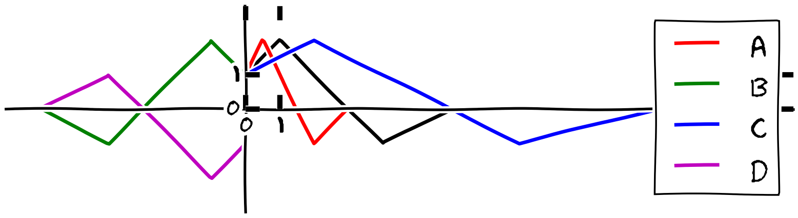
(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $y = -f(-x)$



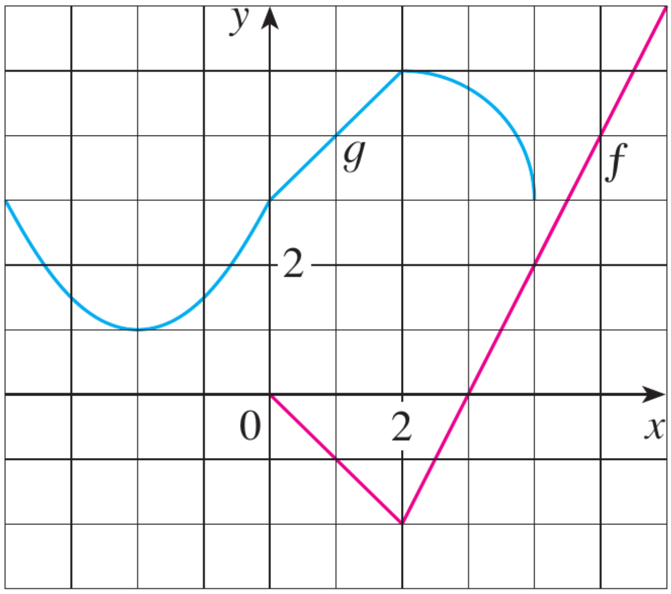
Solution 3.6



Exercice 3.7

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

1. $f(g(2))$.
2. $(g \circ f)(6)$.
3. $g(f(0))$.
4. $(g \circ g)(-2)$.
5. $(f \circ g)(0)$.
6. $(f \circ f)(4)$.



Solution 3.7

Exercice 3.8

Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Solution 3.8

Solutions à justifier!

1. Ni paire ni impaire.
2. Paire et non impaire.
3. Impaire et non paire.
4. Paire et impaire.
5. Ni paire ni impaire.
6. Ni paire ni impaire.
7. Ni paire ni impaire.
8. Paire et non impaire.
9. Impaire et non paire.
10. Ni paire ni impaire.
11. Impaire et non paire.
12. Impaire et non paire.
13. Ni paire ni impaire.
14. Impaire et non paire.

Exercice 3.9

Parmi les fonction suivantes, déterminer celles qui sont elles paires ou impaires. Justifiez.

1. $f : x \mapsto 2x^5 - 3x^2 + 2$.
2. $f : x \mapsto x^3 - x^7$.
3. $f : x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$.
4. $f : x \mapsto 1 + \sin x$.

Solution 3.9

Exercice 3.10

Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?

Solution 3.10

Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par prendre des notations. Soit A, B, C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

Supposons f impaire et g impaire. Soit $x \in A$, alors $-x \in A$ car f est impaire, donc définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0. Deplus,

$$g\circ f(-x) = g\left(f(-x)\right) = g\left(-f(x)\right) = -g\left(f(x)\right) = -\left(g\circ f(x)\right).$$

L'application $g\circ f$ est donc impaire.

De manière analogue, on montre que

- si f est paire et g est paire, alors $g\circ f$ est paire;
- si f est impaire et g est paire, alors $g\circ f$ est paire;
- si f est paire et g est impaire, alors $g\circ f$ est paire.

Exercice 3.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(6-x) = 4 - f(x)$. Trouver une symétrie de C_f.

Solution 3.11

Exercice 3.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$. Trouver un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Solution 3.12

Exercice 3.13

Montrer que la fonction $f\ :\ \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \to &]-\infty,-2[\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{3-x} \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution 3.13

Soit $y \in]-\infty,-2[$ et $x \in]3,+\infty[$.

$$y = f(x) \iff y = \frac{2x}{3-x} \iff 3y - yx = 2x \iff 3y = 2x + yx \iff x = \frac{3y}{2+y}$$

De plus, on vérifie que si $y < -2$, on a bien

$$\frac{3y}{2+y} = 3\frac{y+2-2}{2+y} = 3 - \frac{6}{2+y} > 3.$$

On a donc

$$\forall y \in]-\infty,-2[, \exists! x \in]3,+\infty[, y = f(x)$$

ainsi, f est bijective. De plus,

$$f^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc}]-\infty,-2[& \to &]3,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{3x}{2+x} \end{array}.$$

Exercice 3.14

Considérons la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.

Montrer que f est bijective et expliciter sa fonction réciproque.

Solution 3.14

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2yX - 1$ a pour discriminant $4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$ et pour racines

$$y - \sqrt{y^2 + 1} \text{ et } y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Remarquons que la première est < 0. Finalement,

$$y = f(x) \iff \cancel{e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}} \text{ ou } e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Conclusion

La fonction f est bijective et pour $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. Autrement dit

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{array}.$$

Remarquez que $f = \text{sh}$ et que sa réciproque f^{-1} est notée argsh.

Exercice 3.15 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

2. On note $g : \mathbb{R} \to]-1,1[, x \mapsto f(x)$. Donner une expression de g^{-1}.

Solution 3.15

1. On peut étudier la fonction f en remarquant que f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions continues. De plus, f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x < 0, f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

et

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on pourrait vérifier qu'elle est aussi dérivable en 0, mais c'est inutile). La fonction f est donc injective. On a de plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$$

Puisque f est continue, l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ est un intervalle et puisque f est strictement croissante, on en déduit

$$f(\mathbb{R}) =]-1,1[\,.$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

marque Cette question peut en fait se déduire de la suivante. Néanmoins, il est alors plus difficile de deviner l'intervalle image $]-1,1[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$.

$$y = g(x) \iff y = \frac{x}{1+|x|} \iff (1+|x|)y = x$$

On constate que dans la dernière relation, que x et y on nécessairement le même signe. Si $y \in [0,1[$,

$$y = g(x) \iff (1+x)y = x \iff y = x(1-y) \iff x = \frac{y}{1-y}.$$

Et si $y \in]-1,0[$,

$$y = g(x) \iff (1-x)y = x \iff y = x(1+y) \iff x = \frac{y}{1+y}.$$

Finalement,

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y} & \text{si } y \in [0,1[, \\ \frac{y}{1+y} & \text{si } y \in]-1,0]. \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-|x|} \end{array}.$$

Exercice 3.16

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leurs fonctions réciproques.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+1$.

2. $f : [0,2] \to [0,2], x \mapsto \sqrt{4-x^2}$.

3. $f : [-4,0] \to [0,4], x \mapsto \sqrt{16-x^2}$.

4. $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[, x \mapsto \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

À l'aide d'une calculatrice (ou autre), tracer dans la même fenêtre la courbe de f et f^{-1}. Décrire la relation entre les deux courbes.

Solution 3.16

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = y \iff 2x+1 = y \iff x = \frac{y-1}{2}.$$

Conclusion

L'application f est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y-1}{2}$. Ce qui s'écrit également (le y est muet)

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{2} \end{array}.$$

2. Soit $x \in [0,2]$ et $y \in [0,2]$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt{4-x^2} \\ &\iff y^2 = 4-x^2 && \because y \geq 0 \\ &\iff x^2 = 4-y^2 \\ &\iff x = \sqrt{4-y^2} && \because x \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion

L'application f est bijective et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array}.$$

3. Soit $x \in [-4,0]$ et $y \in [0,4]$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt{16-x^2} \\ &\iff y^2 = 16-x^2 && \because y \geq 0 \\ &\iff x^2 = 16-y^2 \\ &\iff x = -\sqrt{16-y^2} && \because x \leq 0. \end{aligned}$$

Conclusion

L'application f est bijective et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,4] & \to & [-4,0] \\ x & \mapsto & -\sqrt{16-x^2} \end{array}.$$

4. Soit $x \in]0,+\infty[$ et $y \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff y = \frac{6}{\sqrt{x}} &\iff y^2 = \frac{36}{x} && \because x > 0 \\ &\iff x = \frac{36}{y^2} && \because y \neq 0 \text{ et } x \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion

L'application f est bijective et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & \frac{36}{x^2} \end{array}.$$

Exercice 3.17 (*)
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

1. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.
2. Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.
3. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{ a \}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{ b \}$ à l'arrivée:

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{ a \} & \to & \mathbb{R} \setminus \{ b \} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

   Montrer que g est bijective et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

Solution 3.17

1. Clairement $a = 2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = y \iff \frac{3x-1}{x-2} = y \iff 3x - 1 = xy - 2y$$
$$\iff 3x - xy = 1 - 2y \iff x(3-y) = 1 - 2y.$$

   Ainsi, si $y \neq 3$, $f(x) = y \iff x = \frac{1-2y}{3-y}$. Donc y admet un antécédent et un seul par f qui est $\frac{1-2y}{3-y}$.
   Si $y = 3$, alors $f(x) = y \iff 0x = 5$, donc y n'a pas d'antécédent par f.

   Conclusion

   Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

3. On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{ 3 \}$,

$$g(x) = y \iff \frac{3x-1}{x-2} = y \iff x = \frac{2y-1}{y-3}$$

   Conclusion

   Ainsi, tout élément y de l'espace d'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est

$$g^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{ 3 \} & \to & \mathbb{R} \setminus \{ 2 \} \\ y & \mapsto & \frac{2y-1}{y-3} \end{array}.$$

Exercice 3.18 (**)

Soit $\begin{array}{rccc} f: & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x+8} \end{array}$.

1. Prouver que f réalise une bijection de $I = [2,+\infty[$ sur son image que l'on précisera.

2. Prouver que la bijection réciproque de f est continue.

3. Déterminer cette bijection réciproque.

Solution 3.18

1. La fonction polynnomiale $u : x \mapsto x^2 - 4x + 8$ a pour discriminant -16, on a donc

$$\forall x \in [2,+\infty[, x^2 - 4x + 8 > 0.$$

De plus, u est dérivable sur $[2,+\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et

$$\forall x \in [2,+\infty[, f'(x) = (2x-4)\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x+8}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}} > 0.$$

La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ donc continue sur $[2,+\infty[$; de plus elle est strictement croissante sur cet intervalle, elle réalise donc une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [2,+\infty[$.

2. La fonction $f : [2,+\infty[\to [2,+\infty[$ est continue, strictement monotone sur un intervalleet $[2,+\infty[= f([2,+\infty[)$. Sa fonction réciproque $f^{-1} : [2,+\infty[\to [2,+\infty[$ est donc continue.

3. Soit $x \in [2,+\infty[$ et $y \in [2,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \sqrt{x^2-4x+8} = y \\ &\iff x^2 - 4x + 8 = y^2 && : y > 0 \\ &\iff x^2 - 4x + 8 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier polynôme du second degré (en x) a pour discriminant $\Delta = 16 - 4(8 - y^2) = 4y^2 - 16 = 4(y^2 - 4)$. Or $y \geq 2$, donc $\Delta \geq 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x = \frac{4 - 2\sqrt{y^2-4}}{2} \text{ ou } x = \frac{4 + 2\sqrt{y^2-4}}{2} \\ &\iff x = 2 - \sqrt{y^2-4} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{y^2-4}. \end{aligned}$$

Or $x \geq 2$, donc

$$f(x) = y \iff x = 2 + \sqrt{y^2-4}.$$

La réciproque de f est définie par $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y^2-4}$.

Exercice 3.19

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice 3.20

La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?
2. Croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?
3. Croissante ?
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$?
5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$?
6. Strictement croissante ?

Solution 3.20

1. f est croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ car pour $x, y \in \mathbb{R}_-^\star$,

$$x \leq y < 0 \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$

2. f est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ car pour $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$0 < x \leq y \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$

3. f n'est pas croissante car

$$-1 \leq 3 \text{ et non} \left(f(-1) = 1 \leq f(3) = -\frac{1}{3} \right).$$

4. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
5. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
6. f n'est pas strictement croissante car elle n'est pas croissante.

Exercice 3.21

Vrai ou Faux ?

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.

2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.

3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.

4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.

5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.

6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.

7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.

8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Solution 3.21

1. Vrai. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Soit $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$. Puisque f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leq f(x') \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(x').$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x') = (f+g)(x').$$

Conclusion

On a montré

$$\forall x, x' \in A, x \leq x' \implies (f+g)(x) \leq (f+g)(x');$$

c'est-à-dire $f+g$ est croissante.

2. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $f - g : x \mapsto -2x$ n'est pas croissante.

3. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $fg : x \mapsto 3x^2$ n'est pas croissante.

4. Vrai. Supposons f croissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est croissante.

   Ainsi $g \circ f$ est croissante.

5. Faux. Remarquons tout d'abord que l'inverse d'une fonction n'est pas toujours définie (il faut que la fonction ne s'annule pas). Comme contre exemple, on peut prendre $\exp : x \mapsto e^x$. Cette fonction est croissante, et sont inverse $\frac{1}{\exp} : x \mapsto e^{-x}$ n'est pas croissante.

6. Vrai. Soit $f : A \to B$ une bijection croissante. Remarquons d'abord que f étant croissante et injective, elle est donc strictement croissante,

Nous allons montrer que sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ est aussi croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in B^2, x \leq x' \implies f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

Soient $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$. On peut réécrire cette inégalité

$$f\left(f^{-1}(x)\right) \leq f\left(f^{-1}(x')\right).$$

et puisque f est strictement croissante, cela équivaut à la relation

$$f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

Conclusion

La récirpoque d'une bijection croissante est croissante.

7. Faux. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto x$ qui est croissante, et la constante -3. Alors $-3f : x \mapsto -3x$ n'est pas croissante.

8. Vrai. Ce sont les fonctions constante.

Exercice 3.22

Soient A,B,C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g\circ f$ croissante	$g\circ f$ décroissante
g décroissante	$g\circ f$ décroissante	$g\circ f$ croissante

Solution 3.22

1. Supposons f croissante et g croissante.

marque

On doit montrer que $g\circ f$ est croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x,x') \in A^2, x \le x' \implies g\circ f(x) \le g\circ f(x').$$

Le «$\forall (x,x') \in A^2$ suggére de commencer la preuve par «Soient $x, x' \in A$». Pour montrer l'implication, on suppose $x \le x'$ et on se débrouille pour arriver à $g(f(x)) \le g(f(x'))$. Pour y arriver, nous avons le droit (en fait nous n'avons trop le choix) d'utiliser les hypothèses : f et g sont croissantes.

Soient $x, x' \in A$ tels que $x \le x'$, alors $f(x) \le f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \le g(f(x'))$ car g est croissante.

2. Supposons f croissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \le x'$, alors $f(x) \le f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \ge g(f(x'))$ car g est décroissante.

3. Supposons f décroissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \le x'$, alors $f(x) \ge f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \ge g(f(x'))$ car g est croissante.

4. Supposons f décroissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \le x'$, alors $f(x) \ge f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \le g(f(x'))$ car g est décroissante.

Exercice 3.23 (*)

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3$ au point $A(1,4)$.
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ au point $A(-2,2)$.
3. $f(x) = x^3$ au point $A(2,8)$.
4. $f(x) = x^3 + 1$ au point $A(1,2)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(1,1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x-1}$ au point $A(5,2)$.
7. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ au point $A(4,5)$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ au point $A(0,1)$.

Pour s'entrainer. Utiliser `Python` et `matplotlib` pour représenter la courbe et sa tangente.

Solution 3.23

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ d'où $f'(1) = 2$ et la tangente recherchée admet pour équation cartésienne
$$y = 2(x-1) + 4 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = 2x + 2.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x+3$ d'où $f'(-2) = -1$ et la tangente recherchée admet pour équation cartésienne
$$y = -(x+2) + 2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = -x.$$

5. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(1) = \frac{1}{2}$ et la tangente au point d'abscisse 1 admet pour équation cartésienne
$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

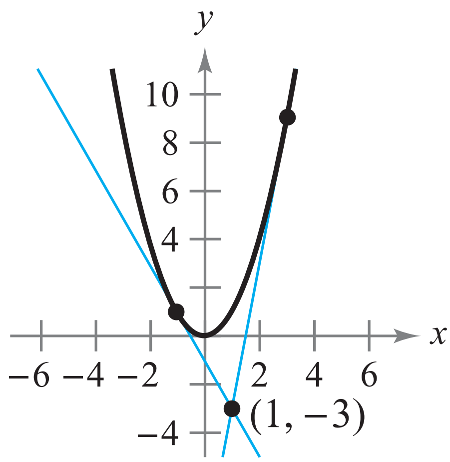
6. Pour $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ d'où $f'(5) = \frac{1}{4}$ et la tangente au point d'abscisse 5 admet pour équation cartésienne
$$y = \frac{1}{4}(x-5) + 2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Exercice 3.24

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(0, 2)$.

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

Exercice 3.25 (**)



Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.

Solution 3.25

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$. La tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation cartésienne

$$y = 2a(x-a) + a^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad T_a : y = 2ax - a^2.$$

Enfin

$$A \in T_a \iff -3 = 2a \times 1 - a^2 \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a = -1 \text{ ou } a = 3)$$

Conclusion

Il y a deux tangente à la courbe de f passant par le point $A(1, -3)$:

$$T_1 : y = -2x + 1 \qquad \text{et} \qquad T_3 : y = 6x - 9.$$

Exercice 3.26

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$

2. $x^{-1/\sqrt{2}}$

3. $(x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. $\dfrac{1+x}{1-x}$

5. $\dfrac{7x-3}{x+2}$

6. $\log x$

7. $\dfrac{3x^4-5x^3+1}{2x^2+x-3}$

Solution 3.26

1. La fonction $f : x \mapsto 4x^5 + 5x^3 - 3x + 4$ est une fonction polynômiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 20x^4 + 15x^2 - 3.$$

2. La fonction $f : x \mapsto x^{-1/\sqrt{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est une fonction usuelle) et

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{-1}{\sqrt{2}}-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}.$$

3. La fonction $f : x \mapsto (x-a)(x^2-b^2)(x^3-c^3)$ est une fonction polynômiale ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2-b^2)(x^3-c^3) + 2x(x-a)(x^3-c^3) + 3x^2(x-a)(x^2-b^2).$$

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}, f'(x) = \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

5. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-3}{x+2}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}, f'(x) = \frac{7(x+2)-(7x-3)(1)}{(x+2)^2} = \frac{17}{(x+2)^2}.$$

6. La fonction $f : x \mapsto \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est une fonction usuelle) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

7. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^4-5x^3+1}{2x^2+x-3}$ est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{3}{2}, 1 \right\}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in D, f'(x) &= \frac{(12x^3-15x^2)(2x^2+x-3)-(3x^4-5x^3+1)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2} \\ &= \frac{12x^5-x^4-46x^3+45x^2-4x-1}{(2x^2+x-3)^2}\end{aligned}$$

Exercice 3.27

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\ln(\sin x)$
2. $\arctan(\ln x)$
3. $e^{\cos x}$
4. $\tan^3 x$
5. $\arcsin(e^x)$
6. $\sin(\ln x)$
7. $\sin(\sin x)$
8. $\arctan(\tan x)$
9. e^{e^x}
10. $\arcsin(\cos x)$

Solution 3.27

1. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\sin x > 0 \iff x \in D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[.$$

De plus, la fonction sin est dérivable sur D. La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \sin'(x)\ln'(\sin x) = \cos(x)\frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction f : $x \mapsto \arctan(\ln x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f'(x) = \arctan'(\ln x)\ln'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

3. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto e^{\cos x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \exp'(\cos x)\cos'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}.$$

4. La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction tan est dérivable sur $D = \mathbb{R}\setminus\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

La fonction $f : x \mapsto \tan^3 x$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = 3\tan'(x)\tan^2(x) = 3(1+\tan^2(x))\tan^2(x) = 3\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}.$$

5. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et

$$e^x \in [-1,1] \iff -1 \leq e^x \leq 1 \iff x \leq 0.$$

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(e^x)$ est donc définie sur $]-\infty, 0]$.

Néanmoins, la fonction arcsin n'est dérivable que sur $]-1, 1[$ et

$$e^x \in]-1,1[\iff x < 0.$$

Le théorème de dérivation d'une composée n'assure donc la dérivabilité de f que sur $]-\infty, 0[$ et alors

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f'(x) = \arcsin'(e^x)e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure. Il faudrait donc revenir à la définition, mais lever l'indétermination est pour l'instant un peu compliqué.

6. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = \sin'(\ln x) \ln'(x) = \cos(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

7. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles). La fonction $f : x \mapsto \sin(\sin x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sin'(\sin x) \sin'(x) = \cos(\sin x) \cos(x).$$

8. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction tan est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan x)$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \arctan'(\tan x) \tan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} 1 + \tan^2 x = 1.$$

9. La fonction $f : x \mapsto e^{e^x}$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{e^x} e^x = e^{x+e^x}.$$

10. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1, 1].$$

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(\cos x)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\cos x = \pm 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} x = k\pi.$$

Le théorème de dérivation d'une composée assure donc la dérivabilité de f sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ et on a

$$\forall x \in D, f'(x) = \arcsin'(\cos x) \cos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

On a donc,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\\ +1 & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Lorsque $x \equiv 0 \pmod{\pi}$, les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure. On peut revenir à la définition, mais l'indétermination est un peu compliquée à lever pour l'instant.

Exercice 3.28

Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $\sin(\sin(\sin x))$
2. $\ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $e^{e^{e^{e^{e^x}}}}$.

Exercice 3.29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Après avoir précisé le domaine de dérivabilité, dériver les fonctions définies par $x \mapsto$

1. $f\left(x^2\right)$
2. $f(\sin x)$
3. $f\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$
4. $\sin(f(x))$
5. $\dfrac{1}{f(x)^{3/2}}$
6. $\ln(f(e^x))$.

Solution 3.29

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$) et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xf'(x^2).$$
2. La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$) et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f(\sin x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos x f'(\sin x).$$
3. La fonction $u : x \mapsto \frac{3x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ son ensemble de définition et
$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}.$$
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $g : x \mapsto f\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = u'(x)f'(u(x)) = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2} \times f'\left(\frac{3x}{x^2+1}\right).$$
4. L'application sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images réelles), donc $g : x \mapsto \sin(f(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)\sin'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x)).$$
5. La fonction $h : x \mapsto x^{-3/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, h'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}.$$
Notons $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \}$. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur D et
$$\forall x \in D, f(x) > 0.$$
La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{f(x)^{3/2}}$ est donc dérivable sur D et
$$\forall x \in D, g'(x) = f'(x) \times \frac{-3}{2} f(x)^{-5/2} = \frac{-3f'(x)}{2f(x)^{5/2}}.$$

6. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Notons $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(e^x) > 0 \}$. La fonction exp est dérivable sur D, à images dans $\mathbb{R}$ et la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g : x \mapsto f(e^x)$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, g'(x) = e^x f'(e^x).$$

De plus, ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x \in D, g(x) = f(e^x) > 0$; la fonction $h : x \mapsto \ln(f(e^x))$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, h'(x) = g'(x)\ln'(g(x)) = e^x f'(e^x)\frac{1}{g(x)} = \frac{e^x f'(e^x)}{g(x)}.$$

Exercice 3.30

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1+x^2\right)$.
3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution 3.30

1. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x^2+1 \in \left]0,+\infty\right[.$$

La fonction $f = g \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(u(x))\,u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}$. La fonction $g_1 = \sin \circ u : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1'(x) = \sin'(u(x))\,u'(x) = \cos\left(x^2\right) \times 2x.$$

De plus, la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $v : x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $[1,+\infty] \subset]0,+\infty[$. La fonction $g_2 : x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_2'(x) = \ln'(v(x))\,v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $g_3 : x \mapsto xg_2(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_3'(x) = \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Conclusion

La fonction $g = g_1 + g_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x\cos\left(x^2\right) + \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

3. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $h_1 : x \mapsto \exp\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_1'(x) = 2x\exp\left(x^2\right).$$

La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1+x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à images dans $]0,+\infty[$. La fonction $h_2 : x \mapsto \ln\left(1+x^4\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_2'(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}.$$

Ainsi, la fonction $h_3 = h_1 h_2 : x \mapsto \exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_3'(x) = 2x \exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right) + \exp\left(x^2\right) \frac{4x^3}{1 + x^4} = \exp\left(x^2\right) \left(2x \ln\left(1 + x^4\right) + \frac{4x^3}{1 + x^4}\right).$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'application $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. La fonction $h_4 : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_4'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Remarquons que h_4 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $h = h_3/h_4$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \frac{h_3'(x)h_4(x) - h_3(x)h_4'(x)}{h_4(x)^2} \\ &= \frac{\exp\left(x^2\right)\left(2x \ln\left(1 + x^4\right) + \frac{4x^3}{1+x^4}\right)}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{x\left(\exp\left(x^2\right) \ln\left(1 + x^4\right)\right)}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Exercice 3.31

- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire?
- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable impaire?
- Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable périodique?

Solution 3.31

Exercice 3.32

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \, \mathrm{e}^x \end{array}$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.

2. On note $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to &]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \, \mathrm{e}^x \end{array}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.

3. Déterminer $\left(g^{-1}\right)' (1 - e)$.

Exercice 3.33

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est bijective. On note alors g son application réciproque.

2. Sans calculer g, justifier que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

Solution 3.33

1. La fonction f est clairement définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^x > 0.$$
De plus
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$, on note $a = f^{-1}(b) = g(b)$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$; de plus, f est dérivable en a et $f'(f^{-1}(b)) = f'(a) = 1 + e^a \neq 0$. La fonction g est donc dérivable en $b = f(a)$ et on a
$$g'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(b)}} = \frac{1}{1 + e^{g(b)}}.$$
On constate que $f(0) = 1$ donc $g(1) = 0$, d'où
$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonctin exp également donc $x \mapsto 1 + e^{g(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\forall y \in \mathbb{R}, 1 + e^{g(y)} \neq 0.$$
La fonction $g' : x \mapsto \frac{1}{1+e^{g(x)}} = \frac{1}{f'(g(x))}$ et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x)))^2}.$$
En particulier,
$$g''(1) = -\frac{f''(g(1))g'(1)}{(f'(g(1)))^2} = -\frac{f''(0) \times \frac{1}{2}}{(f'(0))^2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2^2} = -\frac{1}{8}.$$

Exercice 3.34

Étudier la convexité / concavité de la fonction

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 3}.$$

Solution 3.34

Exercice 3.35

Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$;

2. $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;

3. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Solution 3.35

1. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi) - \sin(3x+6\pi) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x) - \sin(-3x) = -\sin(x) + \sin(3x) = -f(x) \\ f(\pi - x) &= \sin(\pi - x) - \sin(3\pi - 3x) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x). \end{aligned}$$

[1] Nous pouvons donc

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$;
- effectuer une symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la courbe sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie par rapport à l'origine, on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $k2\pi\vec{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x/2+\pi)\sin(3x/2+3\pi) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x/2) - \sin(-3x/2) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \end{aligned}$$

[2] Nous pouvons donc

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie d'axe (Oy), on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $2k\pi\vec{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

3. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-\frac{2}{3} - x) &= -x^3 - 2x^2 - \cancel{\frac{4}{3}x} - \frac{8}{27} + x^2 + \cancel{\frac{4}{3}x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - x \\ &= -\left(x^3 + x^2 + x\right) - \frac{14}{9} \\ &= -f(x) - \frac{14}{27}. \end{aligned}$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport au point $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{27}\right)$. Il suffit donc d'étudier f sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (ou $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$) et d'effectuer cette symétrie.

[1] On peut également utiliser la π-antipériodicité.

[2] On a également $f(2\pi - x) = f(x)$, mais cela n'apporte rien de plus que la périodicité et la parité.

Exercice 3.36 (**)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

3. Quel est le minimum de f sur $]0,+\infty[$.

4. En déduire que, pour tous réels $a>0$ et $b>0$, on a

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Solution 3.36

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}\forall x>0, f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x+1}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}\\ &= \frac{x\sqrt{x}+x-(x+1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{x\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x)\geq 0 \iff x\sqrt{x}\geq 1 \iff x^{3/2}\geq 1 \iff x\geq 1.$$

Avec égalité si, et seulement si $x=1$. D'où le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que le minimum de f sur $]0,+\infty[$ est $f(1)=2\sqrt{2}$.

Soit $a>0$ et $b>0$, alors

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a/b+1}\sqrt{b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a/b+1}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+1\right)=f\left(a/b\right)\geq 2\sqrt{2}.$$

Exercice 3.37

Tracer la courbe d'équation $y = 2x^3 - 6x - 4$.

Solution 3.37

Exercice 3.38

Tracer la courbe d'équation $y = -2x^4 + x^2 + 3$.

Solution 3.38

Exercice 3.39

Tracer la courbe d'équation $y = x + 1 - \dfrac{2}{x}$.

Solution 3.39

Exercice 3.40

Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Solution 3.40

Exercice 3.41 (*)

Étudier les fonctions f définies ci-dessous

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$ sur $D =]0, 4[$.
4. $f(x) = x^2 \ln x$ sur $D =]0, +\infty[$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^x$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ sur $D = \mathbb{R}^\star$.

Solution 3.41

Exercice 3.42

Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^\star, ab \leq b \ln b + e^{a-1}.$$

À quelle condition a-t-on l'égalité ?

Solution 3.42

Considèrons la fonction $f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_b(x) = e^{x-1} - bx + b \ln b$. La fonctions f_b est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_b'(x) = e^{x-1} - b.$$

De plus,

$$\begin{aligned} f_b'(x) \geq 0 \iff e^{x-1} - b \geq 0 &\iff e^{x-1} \geq b \\ &\iff x - 1 \geq \ln b \qquad\qquad \because \text{ln strictement croissante} \\ &\iff x \geq 1 + \ln b. \end{aligned}$$

De plus, $f_b(1 + \ln b) = e^{lnb} - b = 0$. D'où le tableau de variation de f_b

x	$-\infty$		$1 + \ln b$		$+\infty$
$f_b'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_b		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_b(a) \geq 0$, c'est-à-dire $e^{a-1} - ab + b \ln b \geq 0$.

Conclusion :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^\star, e^{a-1} - ab + b \ln b \geq 0.$$

Exercice 3.43

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.

2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$

suivant les valeurs du paramètre m.

Solution 3.43

1. La fonction f est polynômiale. Elle est donc définie, continue et dérivable pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. Sa dérivée,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

est nulle pour $x = -\frac{4}{3}$, positive pour $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > 0$, négative pour $-\frac{4}{3} < x < 0$.

Enfin, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Tous ces résultats permettent de dresser le tableau suivant,

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow$	$-\frac{76}{27}$	$\downarrow$	-4	$\uparrow$	$+\infty$

À faire : faire un tableau plus joli et tracer la courbe (c'est à vous!).

2. Les racines de l'équation $x^3 + 2x^2 - 4 = m$, lorsqu'elles existent, ne sont autres que les abscisses des points communs à l acourbe précédente et à la droite (Δ) parallèle à $x'x$ et d'ordonnée égale à m.

Un simple examen du graphique conduit alors aux conclusions suivantes:

- $m < -4$: une racine (négative);
- $m = 4$: un racine négative et une racine double, $x = 0$;
- $-4 < m < -\frac{76}{27}$: trois racines (deux négatives et une positive);
- $m = -\frac{76}{27}$: une racine double, $x = -\frac{4}{3}$, et une racine positive;
- $m > -\frac{76}{27}$: un racine (positive).

Exercice 3.44

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Solution 3.44

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x}{x^2 - 9} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. Nous effectuons donc l'étude de f sur $A = D \cap \mathbb{R}_+ = [0, 3[\cup]3, +\infty[$ et compléterons le tracé de la courbe à l'aide d'une symétrie de centre O.

On peut écrire $f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour x au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \times 1 = 0.$$

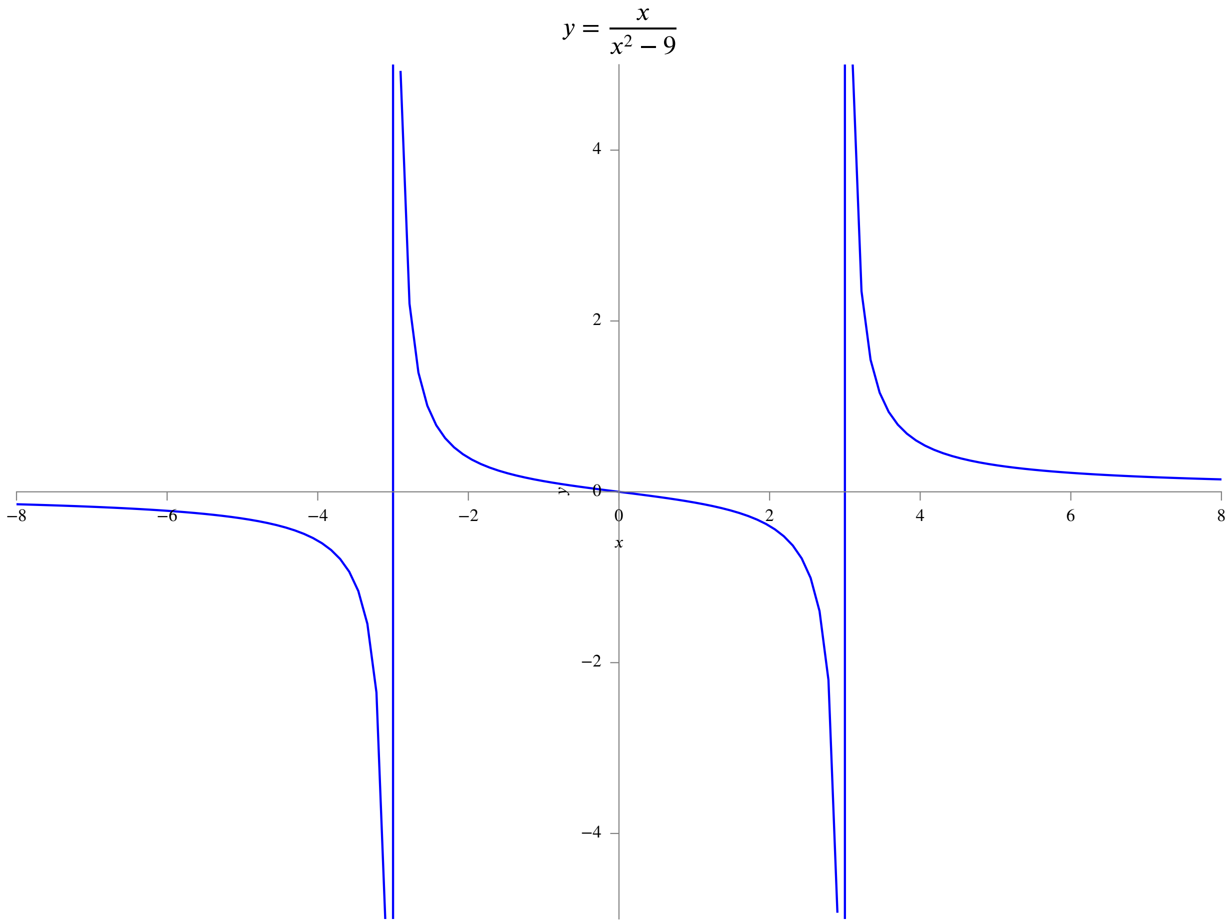
La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur A et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{(1)(x^2 - 9) - (x)(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} < 0.$$

On en déduit le tableau de variations

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{9}$	$-$	$\|$	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

La courbe de f possède une asymptote verticale $\mathcal{A}_1$ d'équation $x = 3$ et une asymptote horizontale $\mathcal{A}_2$ d'équation $y = 0$. Le tableau de variations nous permet de préciser que la courbe de f est au dessus de $\mathcal{A}_2$ au voisinage de $+\infty$.


$y = \frac{x}{x^2 - 9}$
4
2
0
−2
−4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
x
y

Exercice 3.45

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse -1 et 1.

Solution 3.45

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

La fonction f est définie au point x si, et seulement si

$$1 - x^2 \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

Donc f est définie sur $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire Nous effectuons donc l'étude de f sur $A = D \cap \mathbb{R}_+ =]0, 1]$ et compléterons le tracé de la courbe à l'aide d'une symétrie de centre O.

On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe de f.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $u : x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $[0, 1[$ et pour $x \in]0, 1]$,

$$u(x) \in]0, +\infty[\iff 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x < 1.$$

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est donc dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall x \in]0, 1[, v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin, f est dérivable sur $]0, 1[$ en tant que quotient définit de fonction dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{v'(x)x - v(x)}{x^2} = \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 1 + x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

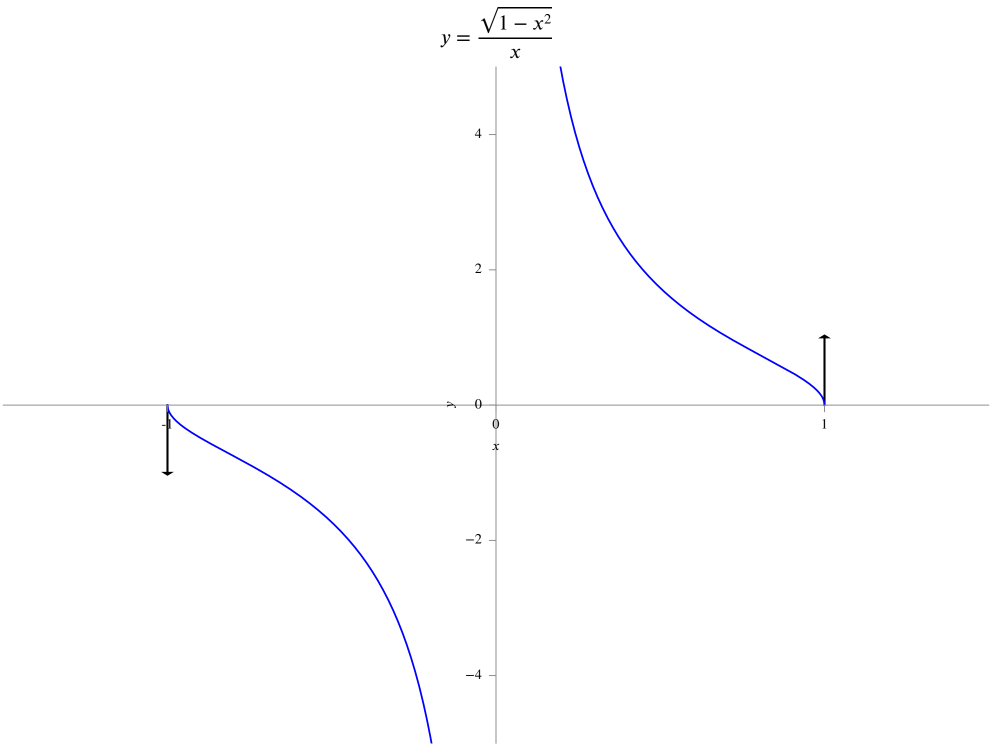
On en déduit le tableau de variations

x	0		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
Variations de f	‖	$+\infty \searrow 0$	

Étudions le taux d'accroissement de f en 1.

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}{x - 1} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x(x - 1)} = -\frac{\sqrt{1 + x}}{x\sqrt{1 - x}} \xrightarrow[x \to 1]{} -\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Néanmoins, la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.



Exercice 3.46

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Solution 3.46

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1$. La fonction f est donc définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous l'étudions sur $A =]1, +\infty[$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O.

On a clairement

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f. De plus, pour x au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

La droite $\mathcal{A}_2$ d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur A. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x \in A$, $x^2 - 1 \in \mathbb{R}_+^\star$. La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ et donc dérivable sur A et

$$\forall x \in A, u'(x) = 2x \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

La fonction f est donc dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivable et

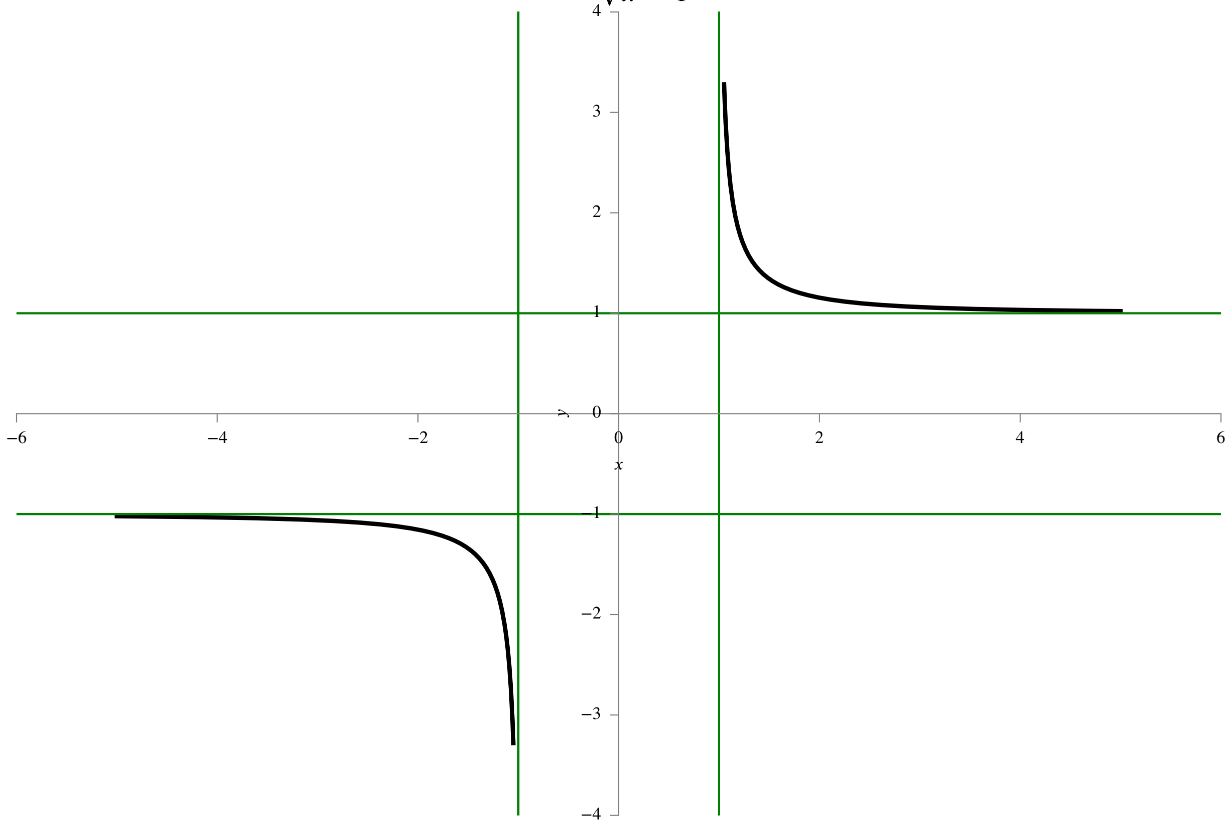
$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{3/2}} < 0.$$

On en déduit le tableau de variations

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖	$+\infty$ ↘	1

La courbe de f est donc au-dessus de $\mathcal{A}_2$ au voisinage de $+\infty$.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$



Exercice 3.47 *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

1. Justifier que l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ équivaut à l'équation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ sur un certain ensemble D à préciser.
2. Pressentir graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ sur $[0, +\infty[$.
3. Prouver qu'en tout point M_0 d'intersection des deux courbes d'équation $y = \cos(x)$ et $y = x\sin(x)$, les tangentes en M_0 à ces deux courbes sont perpendiculaires.

Rappel. Les deux droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et $y = \alpha x + \beta$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\alpha a = -1$.

Solution 3.47 *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

Exercice 3.48

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Solution 3.48

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \cos x = 0 \iff x \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} = \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Pour $x \in D$, $x \pm 2\pi \in D$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique. De plus, pour $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous étudions donc f sur $A = D \cap [0, \pi] = [0, \pi[$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O puis des translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $x \in A$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \xrightarrow[x \underset{<}{\to} \pi]{} +\infty.$$

La droite $\mathcal{A}$ d'équation $x = \pi$ est asymptote verticale à la courbe de f.

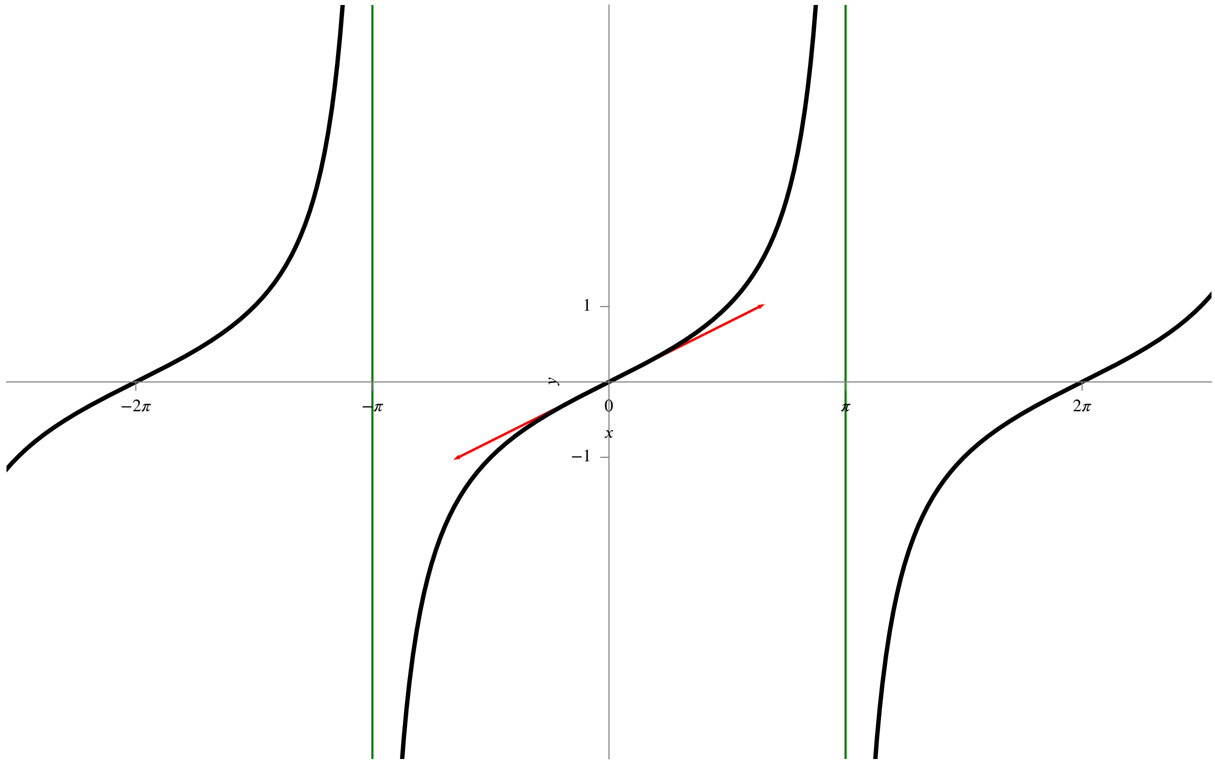
La fonction f est dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivables sur A et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

De plus, pour $x \in A = [0, \pi[$, $\cos x > -1$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations

x	0		π
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\|$
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$



Exercice 3.49

Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Solution 3.49

Pour $x \in \mathbb{R}$, $2 + \cos x \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x).$$

La fonction f est impaire. Nous étudions donc f sur $A = [0, \pi]$ et compléterons la courbe de f avec une symétrie de centre O puis des translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f est dérivable sur A en tant que quotient défini de fonction dérivables sur A et

$$\forall x \in A, f'(x) = \frac{(\cos x)(2 + \cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

De plus, pour $x \in A = [0, \pi]$,

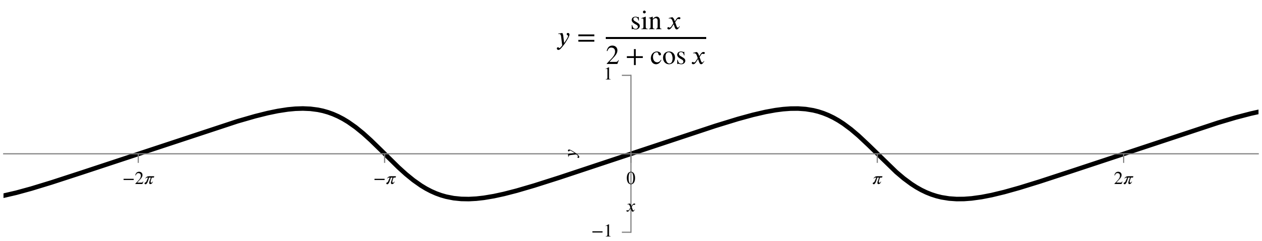
$$f'(x) = 0 \iff 2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}.$$

De plus, cos est décroissante sur $A = [0, \pi]$ d'où

$$f'(x) \geq 0 \iff 2\cos x + 1 \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit le tableau de variations

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$	-1
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$



Exercice 3.50

Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0.$
2. $y = x^3 + x,\ x = 2,\ y = 0.$
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}, x = 0, x = 8, y = 0.$
4. $y = (3 - x)\sqrt{x}, y = 0.$
5. $y = -x^2 + 4x, y = 0.$
6. $y = 1 - x^4, y = 0.$
7. $y = \dfrac{4}{x}, x = 1, x = e, y = 0.$
8. $y = e^x, x = 0, x = 2, y = 0.$

Solution 3.50

1. $52/3$
2.
3. 20
4.
5. $32/3$
6.
7. 4
8.

Exercice 3.51 *Intégration par parties*

Les fonctions suivantes sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$. Utiliser l'intégration par parties pour donner une nouvelle écriture de celle proposée.

1. $\int_2^6 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_2^6 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $[u(x)v(x)]_{-3}^4 - \int_{-3}^4 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $u(3)v(3) - u(1)v(1) - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution 3.51 *Intégration par parties*

Exercice 3.52 *Intégration par parties*

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 -xe^x \,\mathrm{d}x$.
2. $\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} \,\mathrm{d}x$.

Solution 3.52 *Intégration par parties*

Exercice 3.53 (**)

On fait semblant de ne pas connaître la fonction logarithme. Montrer que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$

$$\int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Solution 3.53

Exercice 3.54

Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x^2\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_0^1 e^x\sin x\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(4+x^2\right)\,\mathrm{d}x.$

Solution 3.54

1. $2e^{3/2}+4$
2.
3. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.
4.
5. $\left(\pi-3\sqrt{3}+6\right)/6$.
6.
7. $\frac{1}{2}\left(e(\sin 1-\cos 1)+1\right)$.
8.
9. $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2-\frac{8}{9}\sqrt{2}+\frac{4}{9}$.
10.

Exercice 3.55

Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
6. $f(x) = -\dfrac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.
17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Solution 3.55

Ajouter une constante pour obtenir toutes les primitives (I est un intervalle).

1. $x^3 + x^5$.
2. $\frac{1}{3}x^3 - \cos x$.
3. $\frac{3}{2}\sin(2x)$.
4. $\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.
5. $-\frac{1}{2x^2}$.
6. $\frac{3}{4x^4}$.
7. $-\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$.
8. $\frac{1}{16}\left(x^2+1\right)^8$.
9. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$.
10. $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}$.
11. $\frac{1}{3}\sin^3 x$.
12. $-\frac{1}{4}\cos^4 x$.
13. $\ln|x^2+3x| = \ln\left(x^2+3x\right)$.
14. $-\frac{1}{x^2+x+2}$.
15. $\ln|x^2+2x+2| = \ln\left(x^2+2x+2\right)$.
16. $-2\sqrt{3-x}$.
17. $-e^{1/x}$.
18. $\frac{1}{4}e^{x^4+4x+1}$.

Exercice 3.56

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t.$

5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t.$

8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t.$

Indications :

1. $u = t^3$

2. $u = \sqrt{t}$

3. $u = 1 + t^2$

4. $u = \ln t$

5. $u = \ln t$

6. $u = \sqrt{t}$

7. $u = \cos t$

8. $u = \sin t$

Solution 3.56

1. La fonction $u : t \mapsto t^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = 3t^2\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{3}\arctan 1 = \frac{\pi}{12}.$$

2. La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1/3, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = [2\arctan u]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

3. La fonction $u : t \mapsto 1 + t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on a $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{3/2}}{3}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

4. La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2, e]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_2^e \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^1 \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{4u^4}\right]_{\ln 2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\ln^4 2}.$$

5. La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 2]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t(\ln t)^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} e^u u^2\,\mathrm{d}u.$$

On peut chercher une primitive de $e^u u^2$ sous la forme $(au^2 + bu + c)e^u$ ou faire une triple intégration par parties donne

$$\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = \left[\left(u^2 - 2u + 2\right) e^u\right]_0^{\ln 2} = 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 2) - 2 = 2 + 2\ln^2 2 - 2\ln 2.$$

6. La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 2]$ et on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{t}+1}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

$$= [2\ln(u+1)]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - 2\ln(2) = 2\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

7. La fonction $u : t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$ et on a $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}/2} u^5(-\,\mathrm{d}u) = \int_{\sqrt{2}/2}^1 u^5\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^6}{6}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}.$$

8. La fonction $u : t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi/6, \pi/3]$ et on a $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t. = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t. = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$