① On a les implications

$$\boxed{\lfloor x \rfloor > n \underset{①}{\Longrightarrow} x > n \underset{②}{\Longrightarrow} x \geqslant n \underset{③}{\Longleftrightarrow} \lfloor x \rfloor \geqslant n}$$

- ① Si $\lfloor x \rfloor > n$ on a $\lfloor x \rfloor \geqslant n+1$ $(\lfloor x \rfloor, n \in \mathbb{Z})$
Or $x \geqslant \lfloor x \rfloor$ donc $x \geqslant n+1$ et à fortiori $x > n$.
La réciproque est fausse. ($3,5 > 3$ mais non$(\lfloor 3,5 \rfloor > 3)$).
- ② et ③ sont usuelles

② On a par contraposées $\boxed{\lfloor x \rfloor < n \Longleftrightarrow x < n \Rightarrow x \leqslant n \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant n}$

③ On a $\boxed{\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor \underset{①}{\Rightarrow} x > y \underset{②}{\Rightarrow} x \geqslant y \underset{③}{\Rightarrow} \lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor}$

Les réciproques sont toutes fausses (en général).

① : Si $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor$, alors $\lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor + 1$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$
d'où $x \geqslant \lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor + 1 > y$

② est usuelle

③ Si $x \geqslant y$ alors $x \geqslant \lfloor y \rfloor$ car $\lfloor y \rfloor \leqslant y$
Or $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor$.

(4a) On sait que $\lfloor xy \rfloor \leqslant xy < \lfloor xy \rfloor + 1$.

d'où $\frac{1}{y} \lfloor xy \rfloor \leqslant x$ car $y > 0$

Par croissance de la partie entière (question 3),

on a bien $\boxed{f(x,y) = \left\lfloor \frac{1}{y} \lfloor xy \rfloor \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor}$

(4b) On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y > 0$

donc $\lfloor x \rfloor y \leq xy < \lfloor x \rfloor y + y$.

Or $y \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor y \in \mathbb{Z}$ d'où $\lfloor x \rfloor y \leq \lfloor xy \rfloor$
et $\lfloor x \rfloor y + y \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor xy \rfloor < \lfloor x \rfloor y + y$

et puisque $y > 0$: $\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{y} \lfloor xy \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$

Or $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\left\lfloor \frac{1}{y} \lfloor xy \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(5) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$, on a $0 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
et $1 \leq \lfloor y \rfloor \leq y$

d'où $0 \leq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq xy$

Or $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$

De plus $\lfloor y \rfloor > 0$ donc $\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{\lfloor y \rfloor} \lfloor xy \rfloor$

et puisque $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a finalement

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{1}{\lfloor y \rfloor} \lfloor xy \rfloor \right\rfloor = g(x,y)}$$

(6) On peut choisir $\boxed{x = 2 \text{ et } y = 1.51}$

alors $f(x,y) = 1$ et $g(x,y) = 3$.

On peut choisir $\boxed{x' = -2 \text{ et } y = 1.51}$

alors $f(x', y') = -3$ et $g(x', y') = -4$.

(7) On itère le résultat de la question 4b.

$$\left\lfloor \frac{x}{abc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{x}{abc} \times a \right\rfloor \right\rfloor = f\left(\frac{x}{abc}, a\right) \quad \text{car } a \in \mathbb{Z}$$

$$= \left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{x}{bc} \right\rfloor \right\rfloor$$

De m̂, $\left\lfloor \frac{x}{bc} \right\rfloor \underset{(b \in \mathbb{Z})}{=} f\left(\frac{x}{bc}, b\right) = \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{bc} \times b \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{c} \right\rfloor \right\rfloor$

Finalement $\boxed{\left\lfloor \frac{x}{abc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{c} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor}$

(8) ~~Posons~~ Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 1 > 0$

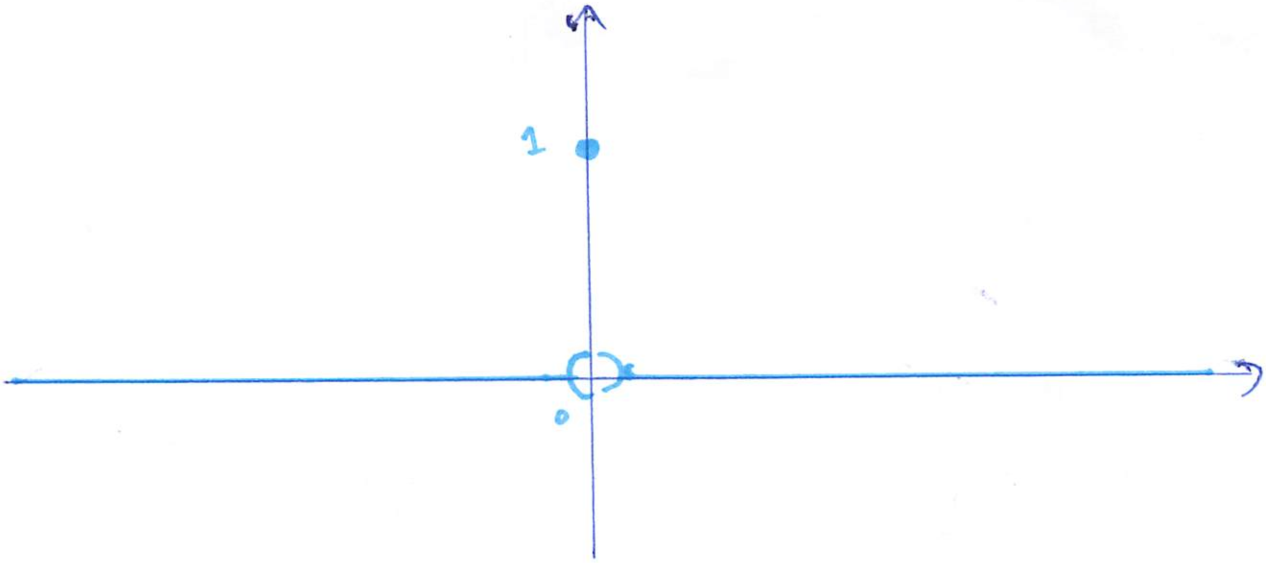
les deux foncO δ et ω sont donc définie sur $\mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ car $x^2 + 1 \geqslant 1$

et $\quad \frac{1}{x^2+1} = 1 \iff x = 0$

Ainsi

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $0 \leq x < 1$, alors $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq x < 1$.

Si $x > 1$, alors $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} < 1$

Si $x = 1$, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$

Ainsi, lorsque $x \geq 0$, on a $0 \leq \frac{x}{x^2+1} < 1$

donc $\omega(x) = 0$

Lorsque $x < 0$, on a $-1 < \frac{x}{x^2+1} < 0$ et donc

$$\omega(x) = -1$$

ccl :

$$\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$