CHAPITRE 9

RELATIONS BINAIRES SUR UN ENSEMBLE

Nous allons considérer des propriétés $\mathcal{R}(x, y)$ mettant en jeu *deux* objets inconnus x et y, par exemple $x < y$, $x \in y$, $x \subset y$, $x \equiv y \pmod{11}$, $y = f(x)$... Nous appellerons ces propriétés des **relations binaires**.

9.1 PROPRIÉTÉS D'UNE RELATION

Les relations binaires les plus utile en mathématiques portent sur des éléments x, y d'un même ensemble E. On parle alors de **relation binaire sur E**. Pour une relation binaire $\mathcal{R}(x, y)$ sur un ensemble E, l'usage veut que l'on emploie très souvent la notation infixe $x\mathcal{R}y$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$, ce que nous ferons désormais.

Définition 1

Soit E un ensemble. Définir une **relation binaire** $\mathcal{R}$ dans E, c'est se donner une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$. On écrit alors $x\mathcal{R}y$ pour exprimer que $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Dans ce cas, on dit que x **est en relation avec** y. L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est appelé le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Une relation binaire est donc une application $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \{\,\text{Vrai}, \text{Faux}\,\} \\ (x, y) & \mapsto & x\mathcal{R}y \end{array}$. Dans la suite, on parlera simplement de **relation** dans un ensemble E.

Définition 2

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** si
$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$

- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x;$$
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y;$$
- $\mathcal{R}$ est **transitive** si
$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemples 3

1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
3. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la relation en x et y
$$x\mathcal{R}y \iff y - x \in 5\mathbb{Z}$$
est la relation de congruence modulo 5. Cette relation est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.
4. Dans l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à trois éléments, la relation $\mathcal{R}$ définie par
$$A\mathcal{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$$
est réflexive et symétrique, non antisymétrique, non transitive.
5. Sur tout ensemble E, la relation d'égalité $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On peut d'ailleurs vérifier que c'est la seule.
6. Soient $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E et A une partie de E. En convenant que $x\mathcal{R}_A y$ signifie $x\mathcal{R}y$, nous définissons une relation $\mathcal{R}_A$ sur A qui est dite **induite** par $\mathcal{R}$. Nous constatons que si $\mathcal{R}$ est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), il en est de même pour $\mathcal{R}_A$. La réciproque n'est pas vraie.

9.2 Relation d'ordre

§1 Petits et grands

Définition 4

- Une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- On dit que $(E, \preceq)$ est un **ensemble ordonné**.
- Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** si
$$x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

- On dit que $\preceq$ est un **ordre total** sur E si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

- Si $\preceq$ n'est pas total, c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables, on dit que $\preceq$ est un **ordre partiel** sur E.

$\preceq$ se lit « précède » ou « inférieur ou égal à ».

Exemple 5 Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ l'ordre usuel, $\leq$, est un ordre total.

Exemple 6 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathcal{E}$. En effet, elle est réflexive (pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $A \subset A$) anti-symétrique (c'est le principe de double inclusion) et transitive ($A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$). C'est pour cette raison qu'on écrit, de façon abrégée,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

au lieu d'écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ et } \dots$$

Par exemple, notons T l'ensemble $\{ 1, 2, 3 \}$. On pourra représenter l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(T)$, c'est-à-dire sur l'ensemble d'ensembles

$$\Big\{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 2, 3 \}, T \Big\},$$

par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \{ 1 \} \arrow[r, hook, no head] \arrow[dr, hook, no head] & \{ 1, 2 \} \arrow[dr, hook, no head] & \\
\emptyset \arrow[ur, hook, no head] \arrow[r, hook, no head] \arrow[dr, hook, no head] & \{ 2 \} \arrow[ur, hook, no head] \arrow[dr, hook, no head] & \{ 1, 3 \} \arrow[r, hook, no head] & T \\
 & \{ 3 \} \arrow[r, hook, no head] \arrow[ur, hook, no head] & \{ 2, 3 \} \arrow[ur, hook, no head] &
\end{tikzcd}$$

On peut y lire que $\{ 2 \} \subset \{ 2, 3 \}$ car un trait va de gauche à droite, de $\{ 2 \}$ vers $\{ 2, 3 \}$; de même, $\{ 2, 3 \} \subset T$. On y lit aussi aisément que $\{ 2 \} \subset T$, car une succession de traits permet de joindre $\{ 2 \}$ à T en allant constamment de la gauche vers la droite. Pour la raison inverse, on peut y lire que $\{ 1 \} \not\subset \{ 2, 3 \}$ et $\{ 2, 3 \} \not\subset \{ 1 \}$: l'ordre n'est donc pas total.

Exemple 7 Soit $E = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 < a \leq b \leq c \right\}$. On définit une relation d'ordre sur E par

$$(a, b, c) \preceq (a', b', c') \iff a \leq a' \text{ et } b \leq b' \text{ et } c \leq c'.$$

Autrement dit, E est un ensemble de boîtes et on écrit $(a, b, c) \preceq (a', b', c')$ si la boîte (a', b', c') peut contenir la boîte (a, b, c). La relation $\preceq$ est réflexive car pour tout $(a, b, c) \in E$,

$$a \leq a \text{ et } b \leq b \text{ et } c \leq c,$$

c'est-à-dire $(a,b,c) \preceq (a,b,c)$. La relation $\preceq$ est antisymétrique car pour tout $(a,b,c),(a',b',c') \in E$, si $(a,b,c) \preceq (a',b',c')$ et $(a',b',c') \preceq (a,b,c)$, alors

$$\begin{array}{ccc} a \leq a' & b \leq b' & c \leq c' \\ a' \leq a & b' \leq b & c' \leq c \end{array}$$

On a donc $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, c'est-à-dire $(a,b,c) = (a,b,c)$. Enfin, la relation $\preceq$ est transitive car pour tout $(a,b,c),(a',b',c'),(a'',b'',c'') \in E$, si $(a,b,c) \preceq (a',b',c')$ et $(a',b',c') \preceq (a'',b'',c'')$, alors

$$\begin{aligned} a \leq a' \text{ et } a' \leq a'' \text{d' où } a \leq a'', \\ b \leq b' \text{ et } b' \leq b'' \text{d' où } b \leq b'', \\ c \leq c' \text{ et } c' \leq c'' \text{d' où } c \leq c'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(a,b,c) \preceq (a',b',c')$.
La relation $\preceq$ est donc une relation d'ordre sur E. Cette relation est une relation d'ordre partielle car $(2,2,2)$ et $(1,2,3)$ ne sont pas comparables :

$$\text{non}\,((2,2,2) \preceq (1,2,3)) \text{ car } 2 \leq 1 \text{ est faux}$$

et

$$\text{non}\,((1,2,3) \preceq (2,2,2)) \text{ car } 3 \leq 2 \text{ est faux.}$$

Définition 8

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit

- La relation $\succeq$ par :
$$x \succeq y \iff y \preceq x.$$
La relation $\succeq$ est une relation d'ordre sur E appelée **relation d'ordre opposée** à $\preceq$.

- La relation $\prec$ par :
$$x \prec y \iff (x \preceq y \text{ et } x \neq y).$$

Exemples 9

1. Dans $\mathbb{R}$, on note $x < y$ la relation $x \leq y$ et $x \neq y$.
2. Pour les ensembles, on note $A \subsetneq B$ la relation $A \subset B$ et $A \neq B$.

La relation $\prec$ n'est pas une relation d'ordre sur E. En effet, elle est antisymétrique et transitive mais n'est pas réflexive. On l'appelle parfois « ordre strict » !

En général, la négation de $x \preceq y$ n'est pas $y \prec x$. Par exemple, dans $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, on a ni $\{1,3\} \subset \{1,2\}$ ni $\{1,2\} \subsetneq \{1,3\}$. Néanmoins, si l'ordre $\preceq$ est total, alors la négation de $x \preceq y$ est bien $y \prec x$.

Proposition 10

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et x, y, z des éléments de E.

1. $x \preceq y \iff (x \prec y \text{ ou } x = y)$.
2. $(x \preceq y \text{ et } y \prec z) \implies x \prec z$.

3. $(x \prec y \text{ et } y \preceq z) \implies x \prec z$.

§2 Majorants, minorants

Définition 11

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si M, élément de E, est tel que $x \preceq M$, on dit que M est un **majorant** de x, ou encore qu'il **majore** x.
- Soit A un sous-ensemble de E. On dit que M, élément de E, est un **majorant** de A si M est un majorant de chaque élément de A, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, x \preceq M.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des majorants est non vide est dite **majorée**.

- Lorsque M majore A, tout élément $M' \in E$ tel que $M \preceq M'$ majore aussi A.
- Un majorant de A est aussi majorant de toute partie de A donc, lorsque A est majorée, toute partie de A est majorée.

Définition 12

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

- Soit $x \in E$. Si m, élément de E, est tel que $m \preceq x$, on dit que m est un **minorant** de x, ou encore qu'il **minore** x.
- Soit A un sous-ensemble de E. On dit que m, élément de E, est un **minorant** de A si m est un minorant de chaque élément de A, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, m \preceq x.$$

- Une partie de E dont l'ensemble des minorants est non vide est dite **minorée**.

- Lorsque m minore A, tout élément $m' \in E$ tel que $m' \preceq m$ minore aussi A.
- Un minorant de A est aussi minorant de toute partie de A donc, lorsque A est minorée, toute partie de A est minorée.

Définition 13

Une partie de E à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

§3 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 14

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A si
$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, x \preceq a.$$
Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.
- a est **le plus petit élément** de A si
$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, a \preceq x.$$
Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément. Néanmoins, si il existe, c'est le **seul** élément de A ayant cette propriété ; car si on a aussi $x \preceq b$ pour tout $x \in A$, alors $a \preceq b$ et $b \preceq a$, d'où $b = a$.

§4 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 15

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit qu'un élément de E est la **borne inférieure** de A dans E si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E. Lorsque cette borne existe, on la note $\inf A$.
- On dit qu'un élément de E est la **borne supérieure** de A dans E si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E. Lorsque cette borne existe, on la note $\sup A$.

Contrairement au plus grand élément, la borne supérieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

Notation

La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ se note (lorsqu'elle existe) $\sup(x, y)$ (resp. $\inf(x, y)$) ; notations analogues pour les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble à trois éléments, etc.

Méthode

Pour prouver que M est la borne supérieure de A, on procède en deux étapes :

1. on vérifie que M est un majorant de A (pour tout $x \in A$, $x \preceq M$);
2. pour tout majorant M' de A, on vérifie que $M \preceq M'$.

Exemples 16

1. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'intervalle $[0, 1]$
   - a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
   - a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
   - a pour plus petit élément 0,

- a pour plus grand élément 1,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure 1.

2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'intervalle $[0, 1[$

- a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
- a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
- a pour plus petit élément 0,
- ne possède pas de plus grand élément,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure 1.

Exemple 17

Dans $E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre d'ordre «divise» :

$$a \,\Big|\, b \iff \exists q \in \mathbb{N}, aq = b.$$

L'ensemble $A = \{ 15, 21 \}$

- a pour minorant les entiers 1 et 3,
- a pour majorant 0, 105, 210 et les autres multiples de 105,
- n'a pas de plus petit élément,
- n'a pas de plus grand élément,
- a pour borne inférieure 3,
- a pour borne supérieure 105.

Exemple 18

Soit E un ensemble ayant plus de deux éléments. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, l'ensemble des parties non vides de E, $\mathcal{P}(E) \setminus \{ \emptyset \}$

- a pour minorant $\emptyset$,
- a pour majorant E,
- ne possède pas de plus petit élément dès lors que E possède au moins deux éléments,
- a pour plus grand élément E,
- a pour borne inférieure $\emptyset$,
- a pour borne supérieure E.

Proposition 19

1. Si une partie A de E admet un plus grand élément a, a est borne supérieure de A dans E.

2. *Si une partie A de E admet une borne supérieure et si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le plus grand élément de A.*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

Proposition 20 *Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E, non vide, admettant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure dans E. Alors $\inf(A) \preceq \sup(A)$.*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

Proposition 21 *Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, A et B deux parties de E, admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E ; si $A \subset B$, on a $\sup(A) \preceq \sup(B)$ (resp. $\inf(B) \preceq \inf(A)$).*

Démonstration. Laissée en exercice! ∎

9.3 Relation d'équivalence

Définition 22 Une relation sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 23 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo α pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

x et y sont congrus modulo α si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha$.

On note $x \equiv y[\alpha]$. Cette relation est une relation d'équivalence.

Définition 24 Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle **classe** d'équivalence de $x \in E$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \}.$$

- Il n'y a pas de notation au programme, on notera ici $\bar{x}$ ou $\mathrm{Classe}(x)$ la classe de x.
- La notation usuelle, mais hors programme, pour l'ensemble des classes d'équivalences est $E/\mathcal{R}$.

Proposition 25 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Alors pour tout $x, y \in E$, on a*

$$(x\mathcal{R}y) \iff y \in \mathrm{Classe}(x) \iff x \in \mathrm{Classe}(y) \iff \mathrm{Classe(x)} = \mathrm{Classe}(y).$$

Ainsi, deux classes d'équivalence sont ou bien égales, ou bien d'intersection vide.

Exemple 26

Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation «être congru modulo 5». Il y a cinq classes d'équivalence qui forment une partition de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \text{Classe}(0) = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots \} \\
\bar{1} &= \text{Classe}(1) = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \} \\
\bar{2} &= \text{Classe}(2) = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots \} \\
\bar{3} &= \text{Classe}(3) = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \} \\
\bar{4} &= \text{Classe}(4) = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \} .
\end{aligned}$$

On a par exemple Classe(11) = Classe(6) = Classe(1).
On note l'ensemble des classe d'équivalence modulo 5

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ \text{Classe}(0), \text{Classe}(1), \text{Classe}(2), \text{Classe}(3), \text{Classe}(4) \}$$

Théorème 27

1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. La famille des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment une partition de E.*
2. *Réciproquement, si une famille $\left(A_i\right)_{i\in I}$ constitue une partition de E, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par*

$$(x\mathcal{R}y) \iff \left(\exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i\right)$$

est une relation d'équivalence. Les classe d'équivalence pour cette relation sont les ensembles $\left(A_i\right)_{i\in I}$.