Chapitre 23

Suites de nombres réels et complexes

Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'Analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent, et ce qui pis est, elle est absolument dépourvue de rigueur.

Niels Henrik Abel 1826

Dans ce chapitre $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

23.1 L'ensemble des suites

§1 Vocabulaire et notations

Définition 1 Un ensemble E étant donné, on appelle **suite de E** toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans E.
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **suite réelle**, et si $E \subset \mathbb{C}$, de **suite complexe**; ces deux cas constituent les **suites numériques**.

Notation

Si u est une suite de E, on devrait normalement noter $u(n)$ l'image par u de $n \in \mathbb{N}$ (et qui est donc un élément de E). L'usage veut que l'on écrive u_n à la place ; cette notation se révèle plus pratique, surtout quand on en vient à mélanger les concepts de suites et de fonctions. On remarquera que u_n est simplement l'une des valeurs de la suite, c'est le **terme d'indice *n***. La suite elle-même est u ; on peut aussi écrire la suite complète sous la forme $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, en abrégé, $\left(u_n\right)$; dans cette notation les parenthèses servent à indiquer que l'on désigne toute la suite, et non un terme en particulier. En particulier, on écrira $u_n \in E$ («u_n est un élément de E ») mais $\left(u_n\right) \in E^{\mathbb{N}}$ («la suite (u_n) est à valeurs dans E).

La notion d'égalité des suites est un cas particulier de la notion d'égalité des applications.

Définition 2

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **égales**, et on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

On appelle également suite une famille de réels dont l'ensemble d'indices est une partie A de $\mathbb{N}$. Une suite est dite **infinie** ou **finie** suivant que l'ensemble des indices est une partie infinie ou finie de $\mathbb{N}$.

Exemples 3

Par exemple, une suite définie **à partir du rang *k*** est une application de $[\![k, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite $u = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est définie à partir du rang 1.
2. La suite $\left(1/\sqrt{n-4}\right)_{n\geq 5}$ est définie à partir du rang 5.

On écrit alors la suite sous la forme $\left(u_n\right)_{n\geq p}$ et on utilise le terme **suite tronquée**.

Les suites finies ne sont pas d'un grand intérêt en analyse. Aussi supposerons nous que A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe alors une bijection strictement croissante de A sur $\mathbb{N}$ (au plus petit élément de A on associe 0, au suivant on associe 1,...). Par conséquent, nous ne considérerons dans la théorie, sauf indication contraire, que des suites définies sur $\mathbb{N}$, une suite de réels est donc un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

§2 Quelques exemples

Suites récurrentes

Revoir les suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique. Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Séries

Définition 4

Étant donné une suite numérique (a_n), on appelle **somme partielle** d'indice n associé à la suite (a_n) la somme des termes d'indices au plus n :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Nous appellerons **série** de **terme général** a_n le couple des deux suites (a_n) et (A_n). L'étude de la série de terme général a_n sera, par définition, l'étude de la suite (A_n).

Exemple 5

Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(somme des termes d'une progression géométrique)

Suites définies de manière implicite

Exemple 6

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Il existe «donc» un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
Par exemple, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Cette suite $\left(u_n\right)$ est un exemple de **suite définie de manière implicite**.

§3 Variations d'une suite réelle

Définition 7

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

- **constante** si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda.$$
- **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang
$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies u_n = \lambda.$$
- **croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

- **strictement croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$
- **décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$
- **strictement décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

Remarque

On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante si et seulement si
$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \implies u_p \leq u_q.$$
Ceci est cohérent avec la définition de fonction croissante. On a un résultat similaire pour les suites décroissante ou strictement croissante/décroissante.

Exemples 8

1. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
2. Étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n = \frac{n^n}{n!}$

Test 9

Voici un exemple important de suite monotone. Soit (a_n) une suites de nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$
1. Si pour tout naturel k, $a_k \geq 0$, alors la suite de terme général A_n est croissante.
2. Si pour tout naturel k, $a_k \leq 0$, alors la suite de terme général A_n est décroissante.

§4 Suites bornées

Définition 10

- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'il existe $\mu \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mu$.
- On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
  - **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
  - **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

Proposition 11 *Une suite* réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.*

Remarque Une suite réelle bornée est évidemment minorée et majorée (par $\pm\mu$), et inversement une suite minorée et majorée est bornée (prendre $\mu = \max\{\,|m|, |M|\,\}$). Mais la notion suite bornée est utile aussi pour les suites à valeurs complexes, pour lesquelles la notion de minoré/majoré n'a pas de sens.

§5 Opérations algébriques sur les suites numériques

Définition 12 Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme des suites *u* et *v*** la suite $w = \left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u + v$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n.$$
- On appelle **produit des suites *u* et *v*** la suite $p = \left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u.v$ ou uv, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n.v_n.$$
- On appelle **produit externe de la suite *u* par le réel** λ la suite $q = \left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\lambda \cdot u$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda u_n.$$

Résumons

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.(v_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Lorsque $\lambda \in \mathbb{K}$, on confond simplement λ et la suite constante égale à λ, c'est-à-dire $\lambda = (\lambda)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda)$. La suite constante dont les termes sont nuls s'appelle la **suite nulle**, on la note $\mathbf{0}$.

Remarque

- La suite nulle, que l'on peut noter $\tilde{0}$, est l'élément neutre pour l'addition.
- De même, la suite $\tilde{1}$, dont tous les termes valent 1, est élément neutre pour la multiplication.
- Le produit externe par $\lambda \in \mathbb{R}$ et le produit interne avec la suite constante (λ) donne le même résultat : $\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda)_{n\in\mathbb{N}}.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites de nombres réels n'est évidemment pas un corps, par exemple, la suite définie par $u_{2n} = 1, u_{2n+1} = 0$ est différente de la suite $\tilde{0}$ et n'a pas d'inverse pour la multiplication.
- Les suites (u_n) qui admettent un inverse pour la multiplication sont les suites qui ne s'annulent jamais. Dans ce cas, on a
$$\frac{1}{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Proposition 13 *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif. Cet anneau n'est pas intègre.*

Remarque L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une $\mathbb{K}$-algèbre.

Test 14

- La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes,etc...) est croissante (resp. décroissantes,etc...).
- Le produit de deux suites croissantes à termes positifs ou nuls est croissante.
- Le produit d'une suite croissante par un réel positif ou nul (resp. négatif ou nul) est une suite croissante (resp. décroissante).

Test 15

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques bornées, alors leur somme, différence et produit sont des suites bornées.

Remarque

Le quotient n'est pas borné en général : considérer le cas $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^2$.

§6 Produit de Cauchy

Définition 16

Produit de Cauchy
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Le **produit de Cauchy** de ces suites est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

23.2 Limite d'une suite

§1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

On parlera souvent non seulement de suites définies à partir d'un certain rang mais aussi des suites vérifiant une propriété P *à partir d'un certain rang* :

Définition 17

Soit (u_n) un suite dans un ensemble E et, pour tout $x \in E$, $P(x)$ une assertion sur x. On dit que (u_n) **vérifie la propriété** P si $P(u_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que (u_n) vérifie la propriété P **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies P(u_n).$$

Exemple 18

La suite $\left(n^2 - 23580\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. En effet, si $n \geq 1000$, on a $n^2 - 23580 \geq 1000000 - 23580 \geq 0$.

Remarque

Si (u_n) est une suite qui satisfait une propriété P à partir d'un certain rang, alors chacune de ses suites tronquées la satisfait aussi à partir d'un certain rang.

§2 Suites convergentes

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$. Lorsque n prend les valeurs entières successives, u_n prend des valeurs de plus en plus voisines de 1. Par exemple, pour que 1 et u_n soient à une distance moindre que 10^{-6}, il suffit que $n \geq 10^6$. L'intervalle ouvert $]0.999\,999; 1.000\,001[$, qui est centré sur 1, contient tous les termes u_n de la suite pour lesquels $n \geq 10^6$.

Précisons : à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $|u_n - 1| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$.

En effet, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel n_0 tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et pour tout entier naturel n, tel que $n \geq n_0$ on a $n+1 \geq n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ ou $|u_n - 1| \leq \varepsilon$, ce qui peut encore s'écrire $1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$. Cette inégalité signifie que pour $n \geq n_0$, tous les termes u_n de la suite appartiennent à l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Nous traduirons ce fait en disant que la suite (u_n) étudiée est convergente et admet 1 pour limite. D'une façon générale, nous donnerons la définition suivante.

Définition 19 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** ℓ, ou **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

Il faut bien comprendre qu'ici ε est choisi *a priori*.
De façon imagée, il faut considérer «qu'on» nous impose un certain ε, sans aucune bienveillance particulière, et que nous n'avons aucun droit sur cet ε ; il faut nous en accommoder, et trouver un entier naturel n_0 qui lui convienne. On peut souligner ce point en écrivant $n_0(\varepsilon)$ ou n_ε.
Il n'est ni nécessaire ni en général utile de donner le plus petit entier naturel n_0 convenable : dans la démonstration ci-dessus, on aurait aussi bien pu proposer un entier $n_0 > \dfrac{11}{\varepsilon} + 4$.

Exemple 20 La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ admet pour limite 1.

Exemple 21 La suite (v_n), définie par $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ est-elle convergente ?

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ ou encore $2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
Remarquons que pour tout entier naturel n, on a $2^n \geq n$ (démonstration par récurrence, ou utiliser que $[\![1,n]\!] \to \mathcal{P}([\![1,n]\!]), x \mapsto \{x\}$ est injective).
Soit donc n_0 un entier naturel $\geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

La suite (v_n) est donc convergente et admet 0 pour limite. ∎

Théorème 22 **Unicité de la limite éventuelle**

La limite d'une suite convergente est unique.

Autrement dit, si (u_n) admet ℓ_1 et ℓ_2 comme limites, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons qu'une suite $u = (u_n)$ possède deux limites ℓ_1 et ℓ_2 et que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Posons $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3$; on a bien $\varepsilon > 0$ car nous avons supposé $\ell_1 \neq \ell_2$. Puisque ℓ_1 est une limite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$; De même, puisque ℓ_2 est une limite, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_2$, $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout entier $n \geq n_0$, on a à la fois $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$, et donc

$$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Choisissons un entier $n \geq n_0$, et, pour un tel entier écrivons

$$\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + u_n - \ell_2,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$3\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon,$$

Le nombre réel ε vérifie donc à la fois $\varepsilon > 0$ et $3\varepsilon \leq 2\varepsilon$ par cette inégalité, ce qui est absurde. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$. ∎

Notation

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell; \quad \lim_{+\infty} u = \ell; \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell;$$

ou même plus simplement

$$\lim u_n = \ell; \quad \lim u = \ell; \quad u_n \to \ell; \quad u \to \ell.$$

Proposition 23

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

L'emploi de «lim» implique bien l'existence de la limite, et pas seulement la valeur de cette dernière.

Démonstration. Comparez leur écriture avec des quantificateurs ! ∎

Exemple 24

Nous avons vu que pour la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, la somme partielle d'ordre n est $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. On a donc $|A_n - 2| = \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$.

Nous dirons que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est **convergente** et a pour **somme** 2 et nous écrirons alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Ou encore, en mettant de côté le terme correspondant à $k = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \underbrace{+ \cdots}_{\text{ne pas oublier !}} = 1.$$

Ce résultat est apparu très mystérieux aux anciens qui appréhendaient peu les notions d'infini et de limite — voir Achille et sa tortue, Zenon et sa flèche.

Exemple 25

Considérons la suite u définie par $u_n = (-1)^n$. Démontrer que cette suite n'est pas convergente.

Démonstration. En prenant la négation de la définition 19

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

En effet, quel que soit le choix de ℓ, choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$; l'un au moins des deux nombres $|1 - \ell|$ et $|-1 - \ell|$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme pour tout entier n_0, il existe des nombres pairs et des nombres impairs supérieurs à n_0, il existe donc un entier $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geq \frac{1}{2}$; la conclusion en résulte. ∎

Nous retrouverons plus loin cet exemple et nous donnerons alors une démonstration plus élégante de sa divergence.

§3 Suites réelles divergeant vers l'infini

Définition 26

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) **tend** vers $+\infty$, ou **diverge vers** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) **tend** vers $-\infty$, ou **diverge vers** $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

Notation

On écrira

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{+\infty} u = +\infty, \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \quad \ldots$$

On remarquera que si $\lim_{+\infty} u = \pm\infty$, on *ne* dit *pas* que la suite u est convergente, mais au contraire qu'elle est divergente.

Exemple 27

On considère la suite de terme général $u_n = 2^n$. Montrons qu'elle tend vers $+\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ assure l'existence d'un entier naturel $n_0 > A$.
Pour $n \geq n_0$, on a $u_n = 2^n \geq n \geq n_0$ et donc $u_n \geq A$. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

§4 Modification d'un nombre fini de termes

Théorème 28

Caractère asymptotique de la notion de limite
Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques égales à partir d'un certain rang. Alors les suites (u_n) et (v_n) ont même nature ; si celles-ci ont une limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Le caractère asymptotique signifie que la notion de limite d'une suite est une notion qui ne dépend pas des premiers termes, en ce sens que si on change un nombre fini de termes d'une suite, on ne change pas son comportement à l'infini.

Proposition 29

Une suite (u_n) converge si, et seulement si, ses suites tronquées convergent ; et dans ce cas, toutes ont la même limite.

On a un résultat analogue avec les limites infinies.

§5 Exemple fondamental : suites géométriques

Théorème 30

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1-ier cas : $q > 1$.

On peut alors écrire $q = 1 + h$ avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton montre alors que l'on a pour $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.

Soit $A > 0$ et n_0 un entier tel que $n_0 > \frac{A-1}{h}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $1 + nh \geq 1 + n_0 h > A$ et donc *a fortiori* $q^n > A$. Ce qui montre que l'on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2-ième cas : $0 < |q| < 1$.

On peut alors écrire $|q| = \frac{1}{q'}$, avec $q' > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ et l'étude faite au premier cas montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\left(q'\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $|q^n| < \varepsilon$. Ce qui montre que la suite converge vers 0.

3-ième cas : $q < -1$.

La suite (q^n) ne peut pas avoir de limite finie car la suite $(|q^n|)$ tend vers $+\infty$ (2-ième cas).

De plus, (q^n) ne peut pas tendre vers $+\infty$, car pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq 1 \implies u_{n+1} < -1 \implies u_{n+1} < 1.$$

Ainsi, on ne peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $q^n \geq 1$.

De manière analogue, (q^n) ne peut pas tendre vers $-\infty$.

4-ième cas : les scories.

- $q = 1$: la suite est constante et égale à 1.
- $q = -1$: ce cas a déjà été vu et on sait que cette suite est bornée et n'est pas convergente, elle n'a donc pas de limite.
- $q = 0$: la suite est constante et égale à 0.

∎

23.3 Suite et relations d'ordres

§1 Convergence et caractère borné

Théorème 31 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse ! Il suffit de regarder par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, qui est une suite bornée mais ne converge pas.

Corollaire 32 *Si une suite n'est pas bornée, elle est divergente.*

Corollaire 33 *Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.*

Remarque La même propriété vaut pour les suites réelles «minorées» ou «majorées».

Proposition 34 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in]a, b[$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in \,]a, b[\,.$$

Ce résultat devient faux avec un segment $[a, b]$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

§2 Limite et signes

Proposition 35 *Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\ell > 0$, alors il existe $c > 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n > c$.*
2. *Si $\ell < 0$, alors il existe $c < 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n < c$.*
3. *Si $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$.*

§3 Limite infinie et caractère borné

Proposition 36 *Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*

1. *Si $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = +\infty$ alors $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et n'est pas majorée.*
2. *Si $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = -\infty$ alors $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et n'est pas minorée.*

§4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

Proposition 37 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. Suivant l'hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, $u_n \leq v_n$.

Notons a la limite de u et b celle de v. Montrons par l'absurde que $a \leq b$. Supposons donc que $a > b$.

Posons $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$. On a alors,

$$b - \varepsilon < b < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon.$$

Puisque la suite (u_n) converge vers a, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$a - \varepsilon \leq u_n \leq a + \varepsilon.$$

Puisque la suite (v_n) converge vers b, il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$b - \varepsilon \leq v_n \leq b + \varepsilon.$$

Soit n le plus grand des entiers k, n_1 et n_2, alors on a à la fois

$$a - \varepsilon \leq u_n \qquad u_n \leq v_n \qquad v_n \leq b + \varepsilon.$$

Ainsi $a - \varepsilon \leq b + \varepsilon$, d'où la contradiction. ∎

Corollaire 38 *Supposons $m \leq u_n \leq M$ à partir d'un certain rang et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite (finie ou infinie). Alors*

$$m \leq \lim_{n\to\infty} (u_n) \leq M$$

Ces propriétés ne sont pas vraies si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout entier n, mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

§5 Convergence par domination

Théorème 39

Existence de limite par domination
Soient (u_n) une suite numérique, $\ell \in \mathbb{K}$ et (α_n) une suite réelle.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et qu'à partir d'un certain rang

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (α_n) converge vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \leq \varepsilon$. Donc pour $n \geq n_0$, on a également

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim_{+\infty} u = \ell$. ∎

Corollaire 40 *On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq \big|u_n - \ell\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où le résultat par domination. ∎

§6 Convergence par encadrement

Théorème 41

Existence de limite par encadrement
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est une suite satisfaisant

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons que l'on a l'équivalence

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon;$$

et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq k$, on a $a_n \leq u_n \leq b_n$.

Puisque (a_n) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$ on ait $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$. De même, puisque (b_n) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$ on ait $|b_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(k, n_1, n_2)$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a à la fois

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq u_n \qquad \text{et} \qquad u_n \leq b_n \leq \ell + \varepsilon;$$

donc $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. ∎

Exemple 42

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité

$$x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor x \times 10^n \rfloor}{10^n} \leq x.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{1}{10^n} - x \right| = \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et par domination $\lim\limits_{n\to+\infty} x - \frac{1}{10^n} = x$. On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} x = x$ d'où, par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = x.$$

Ainsi, on a montré que tout réel est limite d'une suite de nombres décimaux.

§7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 43

Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant *de A.*
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *M est la borne supérieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.*
3. *Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.*

Démonstration. Voir exercices. ∎

Exemple 44

On retrouve $\sup([0,1[) = 1$.
En effet 1 est un majorant de $[0,1[$:

$$\forall x \in [0,1[, x \leq 1,$$

et la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ vérifie

$$u_n \in [0,1[\quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

On a un résultat analogue pour la borne inférieure.

Théorème 45

Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$ et m un minorant *de A.*
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *m est la borne inférieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers m.*
3. *Il existe une suite décroissante d'éléments de A convergente vers m.*

§8 Divergence par minoration ou majoration

Théorème 46 **Théorèmes de divergence par minoration ou majoration**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *; alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *; alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

23.4 Opérations algébriques

§1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

Proposition 47 *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n v_n| \leq \varepsilon.$$

Puisque la suite (v_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$$

De plus, la suite (u_n) tend vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon;$$

d'où le résultat. ∎

Exemple 48 La suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ converge vers 0.

En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et la suite $(\sin(n\theta))$ est bornée:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n\theta) \leq 1.$$

§2 Opérations algébriques sur les limites finies

Théorème 49

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors les suites $\left(u_n+v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+v_n\right)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)+\lim_{n\to+\infty}(v_n)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)=\lambda\lim_{n\to+\infty}(u_n)+\mu\lim_{n\to+\infty}(v_n).$$

Théorème 50

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, alors la suite $\left(u_nv_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_nv_n\right)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)\lim_{n\to+\infty}(v_n)$$

Théorème 51

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes telles que $\lim_{n\to+\infty}(v_n)\neq 0$. Alors les suites $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ sont définies à partir d'un certain rang et sont convergentes et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}(v_n)};\qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}(u_n)}{\lim_{n\to+\infty}(v_n)}.$$

Proposition 52

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n, on note x_n la partie réelle de u_n et y_n sa partie imaginaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) (u_n) tend vers $\ell\in\mathbb{C}$.

(ii) (x_n) tend vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et (y_n) tend vers $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Exemple 53

Théorème de Cesàro
Soit $\left(a_n\right)$ une suite réelle indexée par $\mathbb{N}^\star$. On lui associe la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des moyennes arithmétiques de ses n premiers termes:

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star, b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Si la suite $\left(a_n\right)$ tend vers ℓ, alors la suite $\left(b_n\right)$ tend aussi vers ℓ.

§3 Opérations avec limites infinies

On présente les résultats sous forme de tableau. Par commodité, on rappelle les résultats avec les limites finies.

Somme

Lemme 54 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.*

1. *Si (u_n) est minorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.*
2. *Si (u_n) est majorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.*

On en déduit

Théorème 55 *Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $u_n + v_n$ tend vers*
ℓ	m	$\ell + m$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*«F.I.»*
$+\infty$	$-\infty$	*«F.I.»*

- Les cas «F.I.» représentent ce qu'il est convenu d'appeler des « Formes indéterminées ». Celles-ci ne signifient pas que la limite n'existe pas, mais juste que l'on ne peut pas énoncer de résultat général concernant cette opération.
- Ces conditions ne sont que des conditions suffisantes pour l'existence de $\lim u+v$. La somme de deux suites ne possédant pas de limites peut en posséder une.

Produit interne

Théorème 56 *Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $u_n \cdot v_n$ tend vers*
ℓ	m	ℓm
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	*«F.I.»*

Produit externe

Théorème 57

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels et* $\lambda, \ell \in \mathbb{R}$.

Si	*et si* u_n *tend vers*	*alors* λu_n *tend vers*
$\lambda \in \mathbb{R}$	ℓ	$\lambda\ell$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$+\infty$

Si $\lambda = 0$, *alors* $\left(\lambda u_n\right)$ *est la suite nulle et converge vers* 0.

Inverse

Définition 58

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs supérieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell + .$$
- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs inférieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n < \ell$ à partir d'un certain rang, on note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell - .$$

Lemme 59

Soit (u_n) *est une suite de réels strictement positifs, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0+ \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0+$$

Pour une suite (u_n) quelconque, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang.

Théorème 60

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang et* $\ell \in \mathbb{R}$.

Si u_n *tend vers*	*alors* $\frac{1}{u_n}$ *tend vers*
$\ell \neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
$0-$	$-\infty$
$0+$	$+\infty$
$+\infty$	$0+$
$-\infty$	$0-$
0	*«F.I.»*

Quotient

Proposition 61 *Si la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.*

Théorème 62 *Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers*
ℓ	$m \neq 0$	$\frac{\ell}{m}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$-\infty$	$m < 0$	$+\infty$
$-\infty$	$m > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m > 0$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*«F.I.»*
$\pm\infty$ *ou* ℓ	0	*«F.I.»*

De manière générale, la limite d'une suite de la forme $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est indéterminée dès que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Cette suite n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang. Néanmoins, en distinguant limite par valeur supérieure et inférieure, on obtient les précisions suivantes.

Théorème 63 *Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$; de sorte que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ soit définie à partir de ce rang. Alors*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers*
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0-$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0+$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0-$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0+$	$+\infty$
$0\pm$	$0\pm$	*«F.I.»*

§4 Résumé des «formes indéterminées»

Les «formes indéterminées» sont les mêmes que pour les opérations algébriques dans $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$.

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad \pm\infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad , \frac{0}{0} \qquad \text{et plus généralement } \frac{\ell}{0} \text{ pour } \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Néanmoins, pour $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, $\ell \neq 0$, on peut lever les indéterminations $\frac{\ell}{0^+}$ et $\frac{\ell}{0^-}$ en utilisant la « règle des signes ».

Exemple 64 Quelle est la limite de $\frac{n^3}{n^2+1}$?

23.5 Comparaison des suites de référence

Proposition 65 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. Alors*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0+$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0+$. *En particulier* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{\alpha n}} = 0$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0+$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0+$.

23.6 Suites monotones

§1 Convergence et divergence des suites monotones

Théorème 66 *Soit $u = (u_n)$ une suite croissante.*

1. *Si la suite (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers*
$$\sup \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$
2. *Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Théorème 67 *Soit $u = (u_n)$ une suite décroissante.*

1. *Si la suite (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers*
$$\inf \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$
2. *Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.*

Corollaire 68 *Toute suite monotone admet une limite.*

Exemple 69 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_0 = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$
Montrer que (u_n) converge.

Exemple 70

On considère la suite de terme général

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Montrer que (S_n) est convergente.

Démonstration. Pour $k \geq 1$, on a $k! \geq 2^{k-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}};$$

on a donc $S_n \leq u_n$. Or la suite (u_n) est croissante et converge vers $1 + 2 = 3$, elle est donc majorée par 3. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq u_n \leq 3$. La suite (S_n) est donc majorée ; de plus elle est croissante. La suite (S_n) est donc convergente. On peut même affirmer que $\lim_{n\to+\infty} S_n \leq 3$.

En fait, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}$. ∎

§2 Suites adjacentes

Définition 71

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- la suite (a_n) est croissante,
- la suite (b_n) est décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Exemple 72

$a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 73

Théorème des suites adjacentes
Deux suites adjacentes sont convergentes et ont une limite commune ℓ. Ce réel ℓ est l'unique réel qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n.$$

23.7 Suites extraites

§1 Suites extraites et limite

Définition 74 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On appelle **suite extraite** de (u_n) selon φ, ou **sous-suite** de (u_n), la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite extraite est donc une suite obtenue en ne gardant qu'un certain nombre de termes de la suite initiale. Mais les termes conservés ont toujours un indice croissant (dans la suite de départ).

Exemples 75

1. Le décalage de k indices remplace (u_n) par $(v_n) = (u_{n+k})$. Ici $\varphi(n) = n + k$.
2. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de (u_n) constituée par ses termes d'indices pairs.
3. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+11})_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites extraites de (u_n).
4. $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de (u_n) car le terme u_0 est répété pour $n = 0$ et $n = 1$.

Lemme 76 *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration. Récurrence immédiate. ∎

Théorème 77 *Si une suite (u_n) possède une limite (finie ou infinie) ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. Soit u une suite numérique qui admet pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ et v une suite extraite de u : il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Dès lors, si $n \geq n_0$, $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, donc

$$|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le cas $\ell = \pm\infty$ est analogue. ∎

Exemple 78 Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$.
Si $\left(u_n\right)$ converge vers une limite ℓ, alors la suite extraite $\left(u_{n+1}\right)$ également. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \qquad \lim_{n\to+\infty} au_n + b = a\ell + b.$$

On a donc nécessairement $\ell = a\ell + b$, c'est-à-dire $(1 - a)\ell = b$. La seule limite *éventuelle* de la suite (u_n) est donc $\frac{b}{1-a}$.

Théorème 79

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ. Alors u tend vers ℓ.

Démonstration. Il convient de distinguer trois cas : $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Puisque (u_{2n}) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$ on ait $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.

Puisque (u_{2n+1}) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_2$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Soit un entier $n \geq n_0$. Si n est pair, on écrit $n = 2p$ où $p \geq \frac{n_0}{2} \geq n_1$, donc $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$. Si n est impair, on écrit $n = 2p+1$ où $p \geq \frac{n_0-1}{2} \geq n_2$, donc $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas on a

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

∎

Méthode

Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, il peut être commode d'exhiber deux suites extraites admettant des limites différentes ou une suite extraite n'admettant pas de limite.

Exemples 80

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car $(u_{2n}) = (1)$ et $(u_{2n+1}) = (-1)$ ont pour limites respectives 1 et -1.

  Ceci montre que la réciproque de la propriété est inexacte, c'est-à-dire qu'il existe des suites n'ayant pas de limite dont on peut extraire des suites ayant une limite.

- La suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ n'a pas de limite. En effet, $u_{6n+3} = (-1)^n$: la suite extraite $\left(u_{6n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite donc la suite (u_n) aussi.

§2 Valeur d'adhérence

Définition 81

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.

Une suite convergente admet donc une unique valeur d'adhérence.

Proposition 82

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors $\ell \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 83

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : -1 et 1.

Exemple 84

La suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, car pour tout fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim |u_{\varphi(n)}| = +\infty$.

Exemple 85

La suite $((1+(-1)^n)\,n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une seule valeur d'adhérence 0. Néanmoins, cette suite n'est pas convergente.

§3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 86

Bolzano-Weierstrass
Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique bornée. Alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge.

Ou de manière équivalente

Théorème 87

Bolzano-Weierstrass
Toute suite numérique bornée admet une valeur d'adhérence.