Chapter 2 Corps des nombres réels

Exercice 2.1

Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.

3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.

4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

5. $5 + (-5) = 0$.

6. $18 \cdot 1 = 18$.

7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.

8. $23 + 6 = 6 + 23$.

9. $3 + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Solution 2.1

Exercice 2.2

Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.
2. $5 + 0 = 5$.
3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.
4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.
5. $8\,(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

Solution 2.2

Exercice 2.3

Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Solution 2.3

Exercice 2.4

Encadrer $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

Solution 2.4

- En additionnant les deux inégalités : $\boxed{-1 \leq x+y \leq 4}$.
- On a $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En additionnant les deux inégalités, on a $\boxed{5 \leq x-y \leq 10}$.
- Il y a de nombreuses façons d'encadrer, mais il faut faire attention au signe de y. Par exemple, puisque $x \geq 0$, on a $-4x \leq xy \leq -2x$. Ensuite, $3 \leq x \leq 6$ d'où $-24 \leq -4x \leq -12$ et $-12 \leq -2x \leq -6$. Par transitivité, on a
$$\boxed{-24 \leq xy \leq -6.}$$
- On a $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4}$ et $x \geq 0$ d'où $-\frac{x}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{4}$. Ensuite $3 \leq x \leq 6$ d'où $-3 \leq -\frac{x}{2} \leq -\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} \leq -\frac{x}{4} \leq -\frac{3}{4}$. Enfin,
$$\boxed{-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}.}$$

Exercice 2.5

Comparer $\dfrac{a+n}{b+n}$ et $\dfrac{a}{b}$, où a, b, n sont des entiers naturels non nuls.

Solution 2.5

Puisque $n > 0$, $b > 0$ et donc $b + n > 0$, on peut écrire

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b} \iff b(a+n) > a(b+n) \iff ab + bn > ab + an \iff bn > an \underset{n>0}{\iff} b > a.$$

Ainsi,

- Si $a = b$, alors $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b} = 1$.
- Si $a < b$, alors $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$.
- Si $a > b$, alors $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$.

Exercice 2.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-1| < |x-2|$. Donner une interprétation géométrique.

Solution 2.6

Comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés.

$$|x-1| < |x-2| \iff (x-1)^2 < (x-2)^2 \iff x^2 - 2x + 1 < x^2 - 4x + 4 \iff 2x < 3 \iff \boxed{x < \frac{3}{2}}.$$

Géométriquement, $|x-1|$ et $|x-2|$ représente la distance de x à 1 et 2 sur la droite réelle. Ainsi x est solution de l'inéquation si, et seulement si x est (strictement) plus proche de 1 que de 2.

Variante: On utilise une disjonction de cas.

- Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et $x - 2 < 0$, donc

  $$|x-1| < |x-2| \iff 1 - x < 2 - x \iff 1 < 2.$$

  Cette dernière relation étant toujours vraie, il en est de même de $|x-1| < |x-2|$ (sous la condition $x < 1$). D'où un premier ensemble solution : $]-\infty, 1[$.

- Si $1 \leq x \leq 2$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 < 0$, donc

  $$|x-1| < |x-2| \iff x - 1 < 2 - x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}.$$

  D'où un second ensemble solution $\left[1, 3/2\right[$.

- Si $2 < x$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \geq 0$, donc

  $$|x-1| < |x-2| \iff x - 1 < x - 2 \iff -1 < -2.$$

  Cette dernière relation étant toujours fausse, il n'y a pas de solution dans le cas $x > 2$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de $|x-1| < |x-2|$ est $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.

Exercice 2.7

Résoudre l'inéquation

$$3|x-2|-2|x-1| \geq |x-4| - \frac{1}{4}(2x-11). \tag{E}$$

Solution 2.7

- Si $x \geq 4$,

  $$\text{(E)} \iff 3(x-2)-2(x-1) \geq (x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} \geq 0 \iff x \geq \frac{11}{2}.$$

  D'où un premier ensemble de solutions : $\mathscr{S}_1 = \left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$.

- Si $2 \leq x > 4$:

  $$\text{(E)} \iff 3(x-2)-2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 10x \geq 43 \iff x \geq \frac{43}{10};$$

  ce cas ne fournit donc pas de solution.

- Si $1 \leq x < 2$:

  $$\text{(E)} \iff -3(x-2)-2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff -16x+16 \geq 11-2x \iff -14x \geq -5 \iff x \leq \frac{5}{14};$$

  ce cas ne founit donc pas de solution également.

- Si $x < 1$:

  $$\text{(E)} \iff -3(x-2)+2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 0 \geq -\frac{1}{4}(2x-11) \iff x \geq \frac{11}{2};$$

  il n'y a donc pas non plus de solution dans ce dernier cas.

L'ensemble des solution de l'équation (E) est alors la réunion des différents cas

$$\mathscr{S} = \left[\frac{11}{2}; +\infty\right[.$$

Exercice 2.8

Résoudre les équations

1. $|x+1| = 3$;
2. $|x+5| = |x+7|$;
3. $|x+3| = x-1$;
4. $|x| = x-1$;
5. $x+4 = 3|x|$;
6. $|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10|$;
7. $|1-x| = x-1$.

Solution 2.8

1. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|x+1| = 3 \iff x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3 \iff x \in \{ 2; -4 \} .$$

2. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x+5| = |x+7| &\iff x+5 = x+7 \text{ ou } x+5 = -x-7 \\ &\iff \underbrace{0 = 2}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } 2x = -12 \iff x = -6. \end{aligned}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x+3| = x-1 \iff \begin{cases} x+3 = x-1 \text{ ou } x+3 = -x+1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = -1 \text{ ou } 2x = -2 \\ x \geq 1 \end{cases} .$$

L'équation $|x+3| = x-1$ n'a donc pas de solution.

4. Réponse : $\mathcal{S} = \emptyset$.

5. Réponse : $\mathcal{S} = \{ -1, 2 \}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x^2+x-6| = |-x^2-3x+10| &\iff x^2+x-6 = -x^2-3x+10 \text{ ou } x^2+x-6 = x^2+3x-10 \\ &\iff 2x^2+4x-16 = 0 \text{ ou } 2x = 4. \end{aligned}$$

L'équation $2x^2+4x+4 = 0$ a pour discriminant $16+128 = 144$ et pour solutions $\frac{-4-12}{4} = -4$ et $\frac{-4+12}{4} = 2$. Finalement

$$|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10| \iff x = -4 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 2.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10|$ est donc $\{ -4; 2 \}$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |1-x| = x-1 &\iff \begin{cases} 1-x = x-1 \text{ ou } 1-x = -x+1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 2 \text{ ou } 0 = 0 \text{ (toujours vrai)} \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 1. \end{aligned}$$

Exercice 2.9

Trouver n, entier naturel, pour que $\dfrac{n}{13} < \dfrac{110}{17} < \dfrac{n+1}{13}$.

Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\dfrac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Solution 2.9

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{13} < \frac{110}{17} < \frac{n+1}{13} \iff n < \frac{110 \times 13}{17} < n+1.$$

D'après la définition de la partie entière, il existe un unique entier n vérifiant l'inégalité $n \leq \frac{1430}{17} < n+1$, c'est $n = \left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor$. Or $1430/17 \notin \mathbb{N}$, donc $\left\lfloor \frac{1300}{17} \right\rfloor \neq \frac{1430}{17}$ et $\left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor = 84$ convient.

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{84}{13} < \frac{110}{p} < \frac{85}{13} \iff 84p < 13 < 85p \iff \frac{13}{85} < p < \frac{13}{84}.$$

Or $0 < 13/85 < 13/84 < 1$ et l'intervalle $]0,1[$ ne contient aucun entier. Il n'existe donc aucun $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\dfrac{84}{13} < \dfrac{110}{p} < \dfrac{85}{13}$.

Exercice 2.10

Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π.

On rappelle que $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971\ldots$.

Solution 2.10

On a $\lfloor 113 * \pi \rfloor = 354$, ainsi $355/113$ approche π à l'ordre 6.

Exercice 2.11

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$.

3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Solution 2.11

1. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

En additionnant ces deux inégalité, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Par définition de la partie entière de $x+y$, la première inégalité montre que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$$

étant donné que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$.
En tenant compte de $\lfloor x+y \rfloor \leq x+y$, la seconde inégalité prouve que

$$\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Ces deux quantités étant entières, cela revient à $\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. On peut prendre par exemple $x = 3.1$ et $y = 5.2$.

3. On peut prendre par exemple $x = 4.7$ et $y = 2.8$.

Exercice 2.12

Soit $k \in]0, +\infty[$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Solution 2.12

L'équation (1) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \frac{1}{k}$.

Une condition nécessaire pour que $\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2$ est $\frac{x}{1-kx} > 0$, c'est-à-dire $x \in \left]0, \frac{1}{k}\right[$.

Soit $x \in \left]0, \frac{1}{k}\right[$.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2 &\iff 2 \leq \frac{x}{1-kx} < 3 \\
&\iff 2(1-kx) \leq x < 3(1-kx) && \because 1-kx > 0 \\
&\iff (1+2k)x \geq 2 \text{ et } (1+3k)x < 3 \\
&\iff \frac{2}{1+2k} \leq x < \frac{3}{1+3k}.
\end{aligned}$$

On remarque enfin que $0 \leq \frac{2}{1+2k} \leq \frac{3}{1+3k} < \frac{3}{3k} = \frac{1}{k}$.

Conclusion

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \iff x \in \left[\frac{2}{1+2k}, \frac{3}{1+3k}\right[.$$

Exercice 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution 2.13

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguerons deux cas : $\lfloor x \rfloor$ est un entier pair ou $\lfloor x \rfloor$ est un entier impair.

Premier cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $2p \leq x < 2p+1$, d'où

$$p \leq \frac{x}{2} < p + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < p+1,$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p = \lfloor x \rfloor.$$

Deuxième cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $2p+1 \leq x < 2p+2$, d'où

$$p + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1 \quad \text{et} \quad p+1 \leq \frac{x+1}{2} < p + \frac{3}{2},$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p+1$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p+1 = \lfloor x \rfloor.$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.14

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution 2.14

On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où
$$2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2.$$
L'entier $2\lfloor x \rfloor$ minore donc $2x$, d'où $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$. De plus $\lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et l'on obtient par transitivivé,
$$2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor < 2\lfloor x \rfloor + 2,$$
c'est-à-dire
$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1.$$
Par définition de la partie entière de $\frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor$, on a donc
$$\boxed{\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Exercice 2.15

Il paraît peu vraisemblable que $\mathbb{N}$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que $\mathbb{N}$ est majoré.

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n+1$ majore n ; puisque chaque élément de $\mathbb{N}$ est majoré, nous pouvons conclure que $\mathbb{N}$ est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Solution 2.15

Pour que $\mathbb{N}$ soit majoré, il faudrait qu'il existe un réel M tel que, quel que soit n naturel, $n \leq M$; il faudrait donc que ce soit *le même réel* qui majore *chaque* naturel ; or dans le texte, on a changé de majorant pour chaque naturel.

Exercice 2.16

Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

1. $]-4,6]$.
2. $[-1,0[$.
3. $[3,+\infty[$.
4. $\mathbb{R}^\star$.
5. $\mathbb{Z}$.
6. $\mathbb{N}$.
7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\}$.
8. $[0,\pi] \cap \mathbb{Q}$.
9. $]0,\pi[\cap\mathbb{Q}$.

Solution 2.16

1. $]-4,6]$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par -35, majorée par 212. Elle a pour plus grand élément 6 mais n'a pas de plus petit élément.
2. $[-1,0[$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par -35, majorée par 212. Elle n'a pas de plus grand élément; son plus petit élément est -1.
3. $[3,+\infty[$ est minorée, non majorée, $\min([3,+\infty[) = 3$.
4. $\mathbb{R}^\star$ n'est ni majorée, ni minorée.
5. $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée, ni minorée.
6. $\mathbb{N}$ n'est pas majorée. Elle est minorée et a pour plus petit élément 0.
7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Cette partie de $\mathbb{R}$ est bornée, son plus grand élément est $\sqrt{2}$, son plus petit élément est $-\sqrt{2}$.
8. $[0,\pi] \cap \mathbb{Q}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par 0, qui est sont plus petit élément. Elle est majorée par π, mais n'a pas de plus grand élément.
9. $]0,\pi[\cap\mathbb{Q}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par -35, majorée par 212. Elle n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.

Exercice 2.17

Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 4x + 7y = 52 \\ 28x + 49y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y = 68 + 3(x - 1) \end{cases}$.

Exercice 2.18

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x + (m - 5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}$.

3. $\begin{cases} (m - 1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}$.

Exercice 2.19

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}$.

Solution 2.19

Exercice 2.20

Écrire chacun des produits suivants en utilisant des puissances.

1. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

3. $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$.

4. $7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$.

5. $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$.

6. $3 \cdot w \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.

7. $8 \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

8. $\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}t$.

Solution 2.20

Exercice 2.21

Développer chaque expression afin de supprimer les puissances.

1. x^3.
2. y^4.
3. $(2b)^3$.
4. $(8c)^2$.
5. $10y^5$.
6. x^2y^3.
7. $2wz^2$.
8. $3a^3b$.

Solution 2.21

Exercice 2.22

Simplifier les expressions suivantes.

1. 5^2.
2. 4^3.
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^2$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
5. $(0.25)^3$.
6. $(0.8)^2$.
7. 2^6.
8. 13^2.

Solution 2.22

Exercice 2.23
Effectuer les calculs indiqués.

1. $(-7)^2$.
2. $(9)^2$.
3. $(-10)^3$.
4. $(+8)^3$.
5. $(-11)^2$.
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.
7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.
8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.
9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$.
10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.
13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$.
14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.
15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$.
16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1}$.
17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.
18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.
19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$.

Solution 2.23

1. $(-7)^2 = 7^2 = 49$.
2. $(9)^2 = 81$.
3. $(-10)^3 = -10^3 = -1000$.
4. $(+8)^3 = 512$.
5. $(-11)^2 = 11^2 = 121$.
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.
7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$.
9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3 = -\frac{10^3}{3^3} = -\frac{1000}{27}$.
10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$.
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2 \times 3^2}{3 \times 4^2} = \frac{2 \times 3}{4^2} = \frac{3}{8}$.

12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2 = \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 \times 4^2} = \frac{1}{4}.$

13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{7^2 \times 2^2 \times 7}{8^3 \times 7^2 \times 14} = \frac{2}{8^3} = \frac{1}{256}.$

14. $(-3)^4 \times (-3)^5 = -3^9.$

15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1} = (-3)^2 = 9.$

17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1} = (-2 \times (-3) \times (-1))^{-1} = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}.$

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1} = 3^2 \times (-2) = -18.$

19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}} = -7^{-1+4+4-16+24} \times 11^{-1+2+4+3} = -7^{15} \times 11^8.$

Exercice 2.24

Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.
2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.
3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.
4. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.
5. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.
6. $\dfrac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Solution 2.24

1. $2 \times 3^{n-1}$.
2. $2^2 \times 3^7$.
3. $8 \times 3^{2n} + (2^n - 2) \times 3^n - 1$.
4. $\dfrac{2^{n+2}}{3}$.
5. $\dfrac{1}{3^2 \times 2^n}$.
6. 3×2^n.

Exercice 2.25

Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.

3. $2^x + 4^x = 20$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2$.

Solution 2.25

Toutes les équations sont définies pour $x \in \mathbb{Z}$.

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2 \iff 4^{(x^2)} = 4^{16} \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25} \iff 10^{x+2} = 10^{50-15x} \iff x + 2 = 50 - 15x \iff x = 3$.

3. $2^x + 4^x = 20 \iff 2^x + (2^x)^2 = 20 \iff (2^x)^2 + 2^x - 20 = 0$. Or, les racines du polynôme $X^2 + X - 20$ sont 4 et -5. Enfin

$$2^x = 4 \iff x = 2 \quad \text{et} \quad 2^x = -5 \text{ est impossible.}$$

Finalement, l'équation $2^x + 4^x = 20$ a pour unique solution $x = 2$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \iff 9\,(3^x)^2 + 9\,(3^x) - 810 = 0 \iff (3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$. Or, le polynôme $X^2 + X - 90$ a pour discriminant $361 = 19^2$ et pour racines -10 et 9. Enfin,

$$3^x = -10 \text{ est impossible} \quad \text{et} \quad 3^x = 9 \iff x = 2.$$

Finalement, l'équation $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ a pour unique solution $x = 2$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1 \iff 4^{(2+x)(3-x)} = 1 \iff (2+x)(3-x) = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 3$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2 \iff 10^{(x-1)(x-4)} = 10^4 \iff x^2 - 5x + 4 = 4 \iff x^2 - 5x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$.

Exercice 2.26

Simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{81}$.
2. $\sqrt{64}$.
3. $\sqrt{4}$.
4. $\sqrt{9}$.
5. $\sqrt{100}$.
6. $\sqrt{49}$.
7. $\sqrt{16}$.
8. $\sqrt{36}$.
9. $\sqrt{\dfrac{1}{9}}$.
10. $\sqrt{\dfrac{1}{64}}$.
11. $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$.
12. $\sqrt{\dfrac{49}{100}}$.

Solution 2.26

Exercice 2.27

On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Solution 2.27

Montrons

$$0 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \sqrt{b} < b < b^2 < b^3.$$

En multipliant l'inégalité $a < 1$ par a ou a^2 (qui sont > 0), on obtient $a^2 < a$ et $a^3 < a^2$.

Puisque $a < 1$, on a $\sqrt{a} < 1$ et donc $a < \sqrt{a}$.

Le raisonnement pour b est analogue...

Exercice 2.28

Simplifier les expression suivantes.

1. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{10}\times\sqrt{12}$.
2. $\sqrt{\frac{7}{5}}-\sqrt{\frac{125}{49}}+\sqrt{\frac{25}{7}}$.
3. $\sqrt{4(1-x)^2}$.
4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}$.
5. $\sqrt{32(x+4)^2}$.
6. $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})}$.
7. $\sqrt{1-2\sqrt{x}+x}$.

Solution 2.28

1. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{10}\times\sqrt{12}=\sqrt{2^7\times3^2\times5}=2^3\times3\times\sqrt{2\times5}=24\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{\frac{7}{5}}-\sqrt{\frac{125}{49}}+\sqrt{\frac{25}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}-\frac{5\sqrt{5}}{7}+\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{7}-25+5\sqrt{35}}{7\sqrt{5}}$.
3. Pour $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{4(1-x)^2}=2|1-x|$.
4. $\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}=3\left(\sqrt{3}-1\right)$.
5. Pour $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{32(x+4)^2}=4\sqrt{2}|x+4|$.
6. Éventuellement $\sqrt{3(4-2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
7. Pour $x>0$, $\sqrt{1-2\sqrt{x}+x}=\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\left|1-\sqrt{x}\right|$.

Exercice 2.29

Après avoir simplifié chaque radical, calculer les sommes.

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$.
2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$.
3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$.
4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$.

Solution 2.29

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 0$.
3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$.
4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98} = 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

Exercice 2.30

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Solution 2.30

Afin de comparer des réels positifs, il suffit de comparer leur carrés. Ainsi

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \iff x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \iff 0 \leq \sqrt{xy}.$$

Cette dernière relation étant toujours vraie, la première l'est également.

Exercice 2.31

Déterminer m paramètre réel pour que l'équation suivante ait deux racines inférieures ou égales à 1 :

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0.$$

Solution 2.31

Exercice 2.32

Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Solution 2.32

Multiplions chaque membre de l'inégalité par xy. Puisque $x > 0$ et $y > 0$, il vient

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff (x - y)^2 \geq 0.$$

Or la dernière assertion est toujours vraie, et elle est équivalente à l'inéquation $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Cette dernière est donc également toujours vraie (sous l'hypothèse $x > 0$ et $y > 0$).

Exercice 2.33

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$;
2. $2x^2 + 8x + 8 = 0$;
3. $(x-1)^2 = \frac{1}{4}$;
4. $x^2 + x + 1 = 0$;
5. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$.

Solution 2.33

1. Le discriminant de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ est $16 > 0$ et ses solutions sont donc

$$\boxed{\frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } \frac{2+4}{2} = 3.}$$

2. Une racine double : $\boxed{-2}$.
3. Inutile de développer :

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4} \iff \left(x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ou } x - 1 = -\frac{1}{2}\right) \iff \left(\boxed{x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}}\right).$$

4. Il n'y a pas de solution réelle.
5. On trouve deux solutions $\boxed{0 \text{ et } 2}$. Encore une fois, il n'est pas utile de développer.

Exercice 2.34 *Équation bicarrée*

Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.
2. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.
3. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$.
4. $3x^4 - x^2 + 5 = 0$.

Solution 2.34 *Équation bicarrée*

Exercice 2.35

Pour quels réels x le trinome $x^2 - 8x + 15$ est-il compris entre 0 et 3 ?

Solution 2.35

Le trinome $x^2 - 8x + 15$ est compris entre 0 et 3 si, et seulement si $x \in [2; 3] \cup [5; 6]$.

Exercice 2.36

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Solution 2.36

Exercice 2.37

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Solution 2.37

Si $m = 0$, $mx^2 + (m-1)x + m - 1 = -x - 1$ n'est pas de signe constant.

Si $m \neq 0$. Alors, le trinôme $mx^2 + (m-1)x + m - 1$ est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si $m < 0$ et son discriminant $\Delta \leq 0$. Ici

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m(m-1) = -3m^2 + 2m + 1.$$

On retrouve un trinôme du second degré en m de discriminant $\delta = 4+12 = 16 \geq 0$ ayant pour racines $\frac{-2-4}{-6} = 1$ et $\frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3}$. D'où

$$\Delta \leq 0 \iff -3m^2 + 2m + 1 \leq 0 \iff \left(m \geq 1 \text{ ou } m \leq -\frac{1}{3}\right).$$

Finalement,

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, mx^2 + (m-1)x + m - 1 \leq 0\right) \iff (\Delta \leq 0 \text{ et } m < 0) \iff \boxed{m \leq -\frac{1}{3}}.$$

Exercice 2.38

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4-x| = x$.
2. $|x^2+x-3| = |x|$.
3. $|x+2|+|3x-1| = 4$.
4. $\sqrt{1-2x} = |x-7|$.
5. $x|x| = 3x+2$.
6. $x+5 = \sqrt{x+11}$.
7. $x = 1+\sqrt{x^2-2}$.
8. $x+|x| = \dfrac{2}{x}$.

Solution 2.38

1. L'équation $|4-x| = x$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

   Si $x > 4$, alors

   $$|4-x| = x \iff x-4 = x \iff -4 = 0.$$

   Ce cas n'apporte aucune solution.

   Si $x \leq 4$, alors

   $$|4-x| = x \iff 4-x = x \iff x = 2.$$

Conclusion

L'équation $|4-x| = x$ a pour unique solution $x = 2$.

2. L'équation $|x^2+x-3| = |x|$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

   $$|x^2+x-3| = |x| \iff x^2+x-3 = x \text{ ou } x^2+x-3 = -x. \iff x^2-3 = 0 \text{ ou } x^2+2x-3 = 0.$$

   La première équation a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. La seconde a pour solutions 1 et -3. Finalement

   $$|x^2+x-3| = |x| \iff x \in \left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, -3 \right\}.$$

3. On fait trois cas et l'on trouve deux solutions : $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$.

4. L'équation $\sqrt{1-2x} = |x-7|$ est définie pour $x \leq \frac{1}{2}$. Comparer des nombre positifs revient à comparer leurs carrés, ainsi

   $$\sqrt{1-2x} = |x-7| \iff 1-2x = x^2-14x+49 \iff x^2-12x+48 = 0.$$

   Cette équation n'a pas de solution réelle.

5. L'équation $x|x| = 3x+2$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

   - Si $x \geq 0$,

     $$x|x| = 3x+2 \iff x^2 = 3x+2 \iff x^2-3x-2 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

     En tenant compte de la condition $x \geq 0$,

     $$x|x| = 3x+2 \iff x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

- Si $x < 0$,

$$x|x| = 3x+2 \iff -x^2 = 3x+2 \iff x^2+3x+2 = 0 \iff x \in \{-2,-1\}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x|x| = 3x+2$ est

$$\left\{ \frac{3+\sqrt{17}}{2}, -2, -1 \right\}.$$

6. L'équation $x+5 = \sqrt{x+11}$ est définie pour $x \geq -11$. On a

$$x+5 = \sqrt{x+11} \iff \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ (x+5)^2 = x+11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2+10x+25 = x+11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2+9x+14 = 0 \end{cases}$$

Or le polynôme $X^2+9X+14$ a pour discriminant 25 et pour racines -7 et -2. Tenant compte de la condition $x \geq -5$ et $x \geq -11$, on a

$$x+5 = \sqrt{x+11} \iff x = -2.$$

7. L'équation $x = 1+\sqrt{x^2-2}$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \backslash]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Dans ce cas,

$$x = 1+\sqrt{x^2-2} \iff x-1 = \sqrt{x^2-2} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1 = x^2-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ -2x = -3 \end{cases} \iff x = \frac{3}{2}.$$

8. L'équation $x+|x| = \frac{2}{x}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^\star$.

- Si $x > 0$,

$$x+|x| = \frac{2}{x} \iff 2x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 1 \underset{x>0}{\iff} x = 1.$$

- Si $x < 0$,

$$x+|x| = \frac{2}{x} \iff 0 = \frac{2}{x} \text{ (impossible)}.$$

Conclusion

L'équation $x+|x| = \frac{2}{x}$ a pour unique solution $x = 1$.

Exercice 2.39

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

Solution 2.39

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq \sqrt{x^2+1} < 3$$
$$\iff 4 \leq x^2+1 < 9 \iff 3 \leq x^2 < 8 \iff \sqrt{3} \leq |x| < 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$ est $\left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[$.

Exercice 2.40 ♨

Dans cet exercice, on n'utilisera pas la calculatrice et on supposera qu'on ne connaît de $\sqrt{2}$ que sa définition, *i.e.* que $\sqrt{2}$ est l'unique réel strictement positif dont le carré est égal à 2.

1. Montre que 1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $1/2$.

2. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ et $\varepsilon > 0$. On pose $r_1 = \frac{p}{q}$ et $r_2 = \frac{p+2q}{p+q}$.

(a) Exprimer $r_2 - \sqrt{2}$ en fonction de $r_1 - \sqrt{2}$.

(b) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision ε. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $\varepsilon/5$.

(c) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision ε. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision $\varepsilon/2$.

3. En déduire une fraction qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2 que $\sqrt{2}$.

Solution 2.40 ♨

1. Comme $1 \le 2 \le 9/4$, et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, nous obtenons $1 \le \sqrt{2} \le 3/2$.

2. (a) On a

$$r_2 - \sqrt{2} = \frac{p+2q}{p+q} - \sqrt{2} = \frac{p/q+2}{p/q+1} - \sqrt{2} = \frac{r_1+2}{r_1+1} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{r_1\left(1-\sqrt{2}\right)+2-\sqrt{2}}{r_1+1} = \frac{\left(r_1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{r_1+1}.$$

(b) On suppose $\sqrt{2} \le r_1 \le \sqrt{2} + \varepsilon$. Comme $r_1 \ge \sqrt{2} \ge 1$, on a

$$0 \le \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \le \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \le \frac{1}{5}$$

Puisque $\sqrt{2} \le r_1 \le \sqrt{2} + \varepsilon$, nous obtenons

$$0 \le \sqrt{2} - r_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1}\left(r_1 - \sqrt{2}\right) \le \frac{1}{5}\varepsilon.$$

(c) On suppose $\sqrt{2} - \varepsilon \le r_1 \le \sqrt{2}$. Comme $r_1 > 0$ et $\sqrt{2} \le 3/2$, on a

$$0 \le \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \le \sqrt{2} - 1 \le \frac{1}{2}.$$

Et puisque $\sqrt{2} - \varepsilon \le r_1$, nous obtenons

$$0 \le r_2 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1}\left(\sqrt{2} - r_1\right) \le \frac{1}{2}\varepsilon.$$

3. Utilisons les résultats précédent cinq fois de suite

- $1/1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $1/2$ près;
- $3/2$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $1/4$ près;
- $7/5$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{4\times 5}$ près;
- $17/12$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $\frac{1}{20\times 2}$ près;
- $41/29$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{40\times 5}$ près.

Ainsi, $41/29$ et $\sqrt{2}$ ont même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2.

Exercice 2.41

L'assertion suivante est-elle vraie en général ?

$$x \equiv y \pmod{\varphi} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{\varphi}.$$

Solution 2.41

Non. Par exemple $\sqrt{2} \equiv 0 \pmod{\sqrt{2}}$ alors que $2 \not\equiv 0 \pmod{\sqrt{2}}$ (sinon on pourrait écrire $2 = k\sqrt{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ nécessairement non nul, et $\sqrt{2} = \frac{2}{k}$ serait donc rationnel).

Exercice 2.42

Démêler le nécessaire et le suffisant entre les trois propositions suivantes

$$x \equiv y \pmod{\pi}, \quad x \equiv y \pmod{2\pi}, \quad x \equiv y \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Solution 2.42

$$x \equiv y \pmod{2\pi} \implies x \equiv y \pmod{\pi} \implies x \equiv y \pmod{\pi/2}.$$

Les implications réciproques sont en général fausses, en effet

$$0 \equiv \pi \pmod{\pi} \text{ mais } 0 \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$$
$$0 \equiv 3\pi/2 \pmod{\pi/2} \text{ mais } 0 \not\equiv 3\pi/2 \pmod{\pi}.$$