Diagonalisation

Aperçu

D 1 Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, u un endomorphisme de E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre** de u si l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif. Dans ce cas, le noyau de $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est appelé **sous-espace propre** de u relatif à λ. On note
$$E_\lambda(u) = \ker\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right) = \{\ x \in E \mid u(x) = \lambda x\ \}.$$
- On dit qu'un vecteur $x \neq 0_E$ de E est un **vecteur propre** de u si $u(x)$ est colinéaire à x, c'est-à-dire
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x.$$
On dit que x est un **vecteur propre de u associé à la valeur propre** λ.
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u s'appelle le **spectre** de u et se note $\operatorname{Sp}(u)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $E_\lambda = \ker\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$.

R Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Alors, E_λ est stable par u:

$$u\left(E_\lambda\right) \subset E_\lambda.$$

De plus,

$$E_0 = \ker(u).$$

et si $\lambda \neq 0$,

$$E_\lambda \subset \mathrm{Im}(f).$$

E 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Une homothétie n'a qu'une valeur propre, son rapport α, et on a
$$E = E_\alpha.$$
2. Un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ a deux valeurs propres, 1 et 0, et on a
$$E = E_1 \oplus E_0.$$
3. Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ a deux valeurs propres, 1 et -1, et on a
$$E = E_1 \oplus E_{-1}.$$

E 3 Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ l'endomorphisme de dérivation. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$. Alors, pour tout réel x, on a

$$(\mathrm{D}\, f_\alpha)(x) = f_\alpha'(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x} = \alpha f_\alpha(x).$$

Autrement dit, $\mathrm{D}\, f_\alpha = \alpha f_\alpha$. Tout réel α est donc valeur propre de D. De plus le sous-espace propre de D relatif à la valeur propre α est

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{ f \in E \mid \mathrm{D}\, f = \alpha f \} \\ &= \left\{ f \in E \;\middle|\; f' = \alpha f \right\} \\ &= \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $E_\alpha = \mathrm{Vect}\left\{ f_\alpha \right\}$.

T 4 *Soit u un endomorphisme de E, et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs propres de u associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ deux à deux distinctes. Alors la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.*

C 5 *Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.*

Dans tout ce paragraphe, on étudie un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = \left(a_{i,j}\right)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

P 6 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Un scalaire λ est valeur propre de u si, et seulement si*

$$\det\left(\lambda \operatorname{Id}_E - u\right) = 0.$$

D 7 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On appelle **polynôme caractéristique de u** le polynôme χ_u défini par la relation

$$\chi_u(\lambda) = \det\left(\lambda \operatorname{Id}_E - u\right).$$

L'ordre de multiplicité d'une racine λ de χ_u est dit **multiplicité de la valeur propre λ** de u.

En dimension finie, les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

D 8 Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de A** le polynôme χ_A défini par la relation

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - A\right).$$

P 9 *Les polynômes caractéristiques de deux matrices semblables sont égaux.*

P 10 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices.*

D 11 Par extension, **les valeurs propres**, **vecteurs propres**, **sous-espaces propres** d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui est canoniquement associé à A.

E 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda I_2 - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 7 & 15 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est

$$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 7)(\lambda + 4) + 30 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A (et de u) sont les solutions de $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

Pour trouver les vecteurs propres associées à la valeur propre 1, on détermine les solutions du système $(A - I_2)x = 0$, on a

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_1(u) = \operatorname{Vect}\left\{ 5e_1 + 2e_2 \right\}.$$

De manière analogue, on trouve

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_2(u) = \operatorname{Vect}\left\{ 3e_1 + e_2 \right\}.$$

T 13 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

D 14 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.
La **multiplicité d'une valeur propre** λ de u est l'ordre de multiplicité de la racine λ de χ_u.

T 15 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité k et E_λ le sous-espace propre associé. Alors*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k.$$

T 16 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On suppose χ_u scindé et on note note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines listées avec leur multiplicité. Alors*

1. *Le déterminant de u est égal au produit de ses valeurs propres.*
2. *La trace de u est égal à la somme de ses valeurs propres.*

R Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, χ_u est toujours scindé.

E 17 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice sachant que -1 l'une des valeurs propres.

D 18

- Un endomorphisme u de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Dans ce cas, la matrice de u dans cette base est diagonale.
- Une matrice carrée A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit, s'il existe une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

E 19 On reprend l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable, car si l'on considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

T 20 Vérifier les calculs précédents.

Un endomorphisme n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais diagonalisable : en effet une matrice diagonale nilpotente est nécessairement nulle !

E 21 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

T 22 *Soit u endomorphisme de E. Si u possède $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

T 23 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

E 24 La matrice $(3,3)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a trois valeurs propres, 0, 4 et 12 : elle est donc diagonalisable.

T 25 Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

E 26 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ mais est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

L 27 *Soit u un endomorphisme de E, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors,*

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \dots E_{\lambda_p},$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = 0_E, x_2 = 0_E, \dots, x_p = 0_E.$$

On dira que les sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en ***somme directe****.*

T 28 *Soit u un endomorphisme de E. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si*

- *le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$,*
- *pour toute valeur propre de u, sa multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.*

C 29 *Soit u un endomorphisme de E. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim(E).$$

C 30 *Soit u un endomorphisme de E et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de u. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si*

$$E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \left(E_\lambda(u)\right) = E.$$

E 31 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

n'a que deux valeurs propres, 2 et 4, mais est diagonalisable.

E 32 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a que deux valeurs propres, -1 et -2, mais n'est pas diagonalisable.

E 33

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 6 \cdot 2^n & 15 - 15 \cdot 2^n \\ -2 + 2 \cdot 2^n & 6 - 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

E 34 Soit (x_n) et (y_n) deux suites telles que $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = 7x_n - 15y_n,$$
$$y_{n+1} = 2x_n - 4y_n.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = 10 - 9 \cdot 2^n, \qquad y_n = 4 - 3 \cdot 2^n.$$

E 35 On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 7y_1(t) - 15y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) - 4y_2(t) \end{aligned}$$

d'inconnues $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors...

T 36 *Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.*

$$\chi_u(X) = \det\left(X \operatorname{Id}_E - u\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Alors $\chi_u(u) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$ est l'endomorphisme nul de E.

T 37 *Soient M une matrice carrée d'ordre n et*

$$\chi_M(X) = \det\left(X I_n - M\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Alors $\chi_M(M) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k M^k$ est la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Non exigible.
Désignons par $C(X)$ le polynôme à coefficients dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour $x \in \mathbb{K}$, $C(x)$ est la transposée de la comatrice de la matrice $xI_n - M$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\left(xI_n - M\right) C(x) = \left(\det(xI_n - M\right) I_n = \chi_M(x) I_n.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$X^k I_n - M^k = \left(X I_n - M\right) \left(X^{k-1} I_n + X^{k-2} M + \cdots + M^{k-1}\right),$$

et puisque $\chi_M(X) I_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k I_n$ et $\chi_M(M) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k M^k$, on obtient après combinaison linéaire

$$\chi_M(X) I_n - \chi_M(M) = \left(X I_n - M\right) Q(X)$$

où $Q(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit

$$\chi_M(M) = \left(X I_n - M\right) (C(X) - Q(X)) = \left(X I_n - M\right) \left(\sum_{k=0}^{n} X^k B_k\right) \quad \text{avec} \quad B_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Supposons que l'une des matrices B_k soit non nulle. On pose alors $r = \max\{\, k \in [\![1, n]\!] \mid B_k \neq 0 \,\}$, alors

$$\chi_M(M) = X^{r+1} B_r + \sum_{k=0}^{r-1} X^{k+1} B_k - \sum_{k=0}^{r} X^k M B_k.$$

Ainsi, parmi les coefficients de la matrice $\chi_M(M)$ figurerait au moins un terme en X^{r+1}, ce qui est contradictoire avec $\chi_M(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices B_k sont donc toutes nulles et $\chi_M(M) = 0$. ∎

E 38 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, alors

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A).$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)I_2.$$