♫ 14 Suites de nombres réels et complexes

14.1 L'ensemble des suites

Exercice 14.1 (**)

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

14.2 Limite d'une suite

Exercice 14.2 (*)

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 14.3 (*)

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 14.4 (*)

On donne la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$.

1. Montrer que cette suite est majorée.

2. Démontrer, en utilisant la définition que la suite précédente est convergente.

Exercice 14.5 (*)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 14.7 (*)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14.8 (**)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14.10 (***)

En utilisant la définition d'une suite convergente, prouver que la suite (u_n) est convergente dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

2. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

3. $u_n = \frac{n+(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 14.12 (**)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers ℓ.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2025\varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \varepsilon.$

4. $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \varepsilon.$

5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}.$

Exercice 14.13 (***)
Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice 14.14 (****)
Montrer que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

14.3 Suite et relations d'ordres

Exercice 14.15 (**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Exercice 14.16 (***)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Exercice 14.18 (*)
Étudier la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 14.19 (**)
Étudier la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 14.20 (****)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 14.22 (**)
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 14.23 (*)

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq k u_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 14.24 (**)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 14.25 (***)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 14.27 (**)

Soit u et v deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 14.29 (***)

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

14.4 Opérations algébriques

Exercice 14.30 (*)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Exercice 14.31 (**)

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;
5. $u_n = (-1)^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}$.

Exercice 14.32 (*)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Exercice 14.33 (**)

On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique.

2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 14.34 (***)
Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$.

2. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$.

3. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$.

4. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$.

5. $u_n = \dfrac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos(\frac{n\pi}{5})}$.

6. $u_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$.

Exercice 14.35 (***)
Calculer les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$, $(w_n)_{n\geq 1}$, définies par

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n-1)!}, \qquad v_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}, \qquad w_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!}.$$

Exercice 14.36 (**)
Soit $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$. La suite $\left(u_n\right)$ est-elle convergente?

Exercice 14.40 (****) *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

3. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

4. Conclure.

Exercice 14.41 (****) *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a
$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$
   (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne
$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (d) Conclure.
2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
   On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
   On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
   (c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
   Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.

Exercice 14.42 (*****)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$, avec $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.
   (a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ avec $\ell \in [0, +\infty]$, alors
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \ell.$$
   (b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

14.5 Comparaison des suites de référence

14.6 Suite extraites

Exercice 14.43 (****)
Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{3p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 14.44 (***)

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a
$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

Remarque Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 14.45 (***)
Montrer que la suite de terme général $u_n = n\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

Exercice 14.46 (****)
Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 14.47 (**)
Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 14.48 (****) *Des (contre-)exemples utiles*
Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. la suite (u_n) possède exactement k valeurs d'adhérence, pour $k = 0, 1, 2, 3$.

2. la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence, et est divergente.

3. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\mathbb{N}$.

4. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[0, 1]$.

Exercice 14.50 (****) $\limsup$ *et* $\liminf$
Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = \inf\left\{ u_k \mid k \geq n \right\} \qquad \text{et} \qquad b_n = \sup\left\{ u_k \mid k \geq n \right\}$$

1. Montrer que les suite (a_n) et (b_n) convergent. On note $\liminf u_n$ la limite de (a_n) et $\limsup u_n$ la limite de (b_n).

2. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n), alors

$$\liminf u_n \leq a \leq \limsup u_n.$$

3. Montrer que $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si, et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$.

4. Montrer que cette notion coïncide avec

$$\limsup u_n = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n \right\}.$$

Exercice 14.51 (*****) *Un intervalle de valeurs d'adhérence*

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle.

Exercice 14.53 (***)

Soit (x_n) une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de (x_n) convergeant vers des limites distinctes.

Exercice 14.54 (****)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_n + b_n \to 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \to 2$. Montrer que les deux suites convergent.

14.7 Suites monotones

Exercice 14.55 (*)

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 14.57 (***)

Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.

3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 14.58 (**)

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 14.60 (***)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite u est croissante et majorée.

2. Vérifier que pour $x > 0$, on a

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3. En déduire un encadrement de u_n et la limite de la suite u.

Exercice 14.62 (******)

L'objet de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la restriction de f à tout intervalle non trivial soit surjective.

À cette fin, posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ la limite finie de la suite $(\tan(n!\pi x))_{n\in\mathbb{N}}$ si celle-ci existe, 0 sinon.

1. (a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, la fonction f est r-périodique.
   (b) En déduire la restriction de f à $\mathbb{Q}$.

2. Le but de cette question est de montrer que f est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in [0,1[$ tel que $y = \tan(\pi x)$.
   (b) Notons, pour tout n,
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k!}.$$
   Justifier que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de cette suite.
   (c) Établir que $n!\left(\ell - u_n\right) \to x$ lorsque $n \to +\infty$.
   (d) En déduire que $f(\ell) = y$.
   On admettra que $\tan$ *est continue et donc que si une suite x_n tend vers $x \in \mathbb{R}\backslash\{\ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\ \}$, alors* $\tan(x_n)$ *tend vers* $\tan(x)$.

3. Montrer le résultat annoncé.

Exercice 14.63 (**)
Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \ \text{ et } \ v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 14.64 (**)
Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 14.65 (**)
Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 14.66 (***)
Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.

4. Calculer $u_n v_n$. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Exercice 14.68 (****) *Suites de Cauchy*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \left(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \implies \left| u_n - u_p \right| \leq \varepsilon \right). \tag{1}$$

1. Montrer que la suite est bornée.

2. Montrer qu'elle est convergente.

Exercice 14.69 (***)
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $\left(S_{2n}\right)$ et $\left(S_{2n+1}\right)$ sont adjacentes.

2. Déduire que $\left(S_n\right)$ est convergente.

Exemples de suites complexes