

CORPS DES NOMBRES
COMPLEXES

L'esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative.

Gottfried Leibniz

On résout des équations du premier et du second degré au moins depuis les Babyloniens, au début du deuxième millénaire avant notre ère, mais ce n'est que depuis les XVI^e et surtout XVII^e siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres positifs. Ainsi il y avait avant une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour $x^2 + ax = b$, a et b étant supposés positifs.

Au début du IX^e siècle Al Khawarizmi (dont le nom a donné algorithme) décrit la méthode de résolution des équations du second degré, pratiquement telle que vous la connaissez (mais en supposant que le discriminant est positif ou nul). Il faudra attendre sept siècles et une belle bagarre avant que l'on sache résoudre les équations de degrés 3 et 4. Elle mit aux prises essentiellement deux mathématiciens italiens de la renaissance, Niccolò Fontana, dit

Tartaglia (1499-1557) et Girolamo Cardano (1501-1576) (l'inventeur du joint de Cardan) : si vous êtes sages, nous vous la raconterons dans un autre chapitre.

Voici ce que l'on appelle de manière assez injuste les «formules de Cardan». Considérons l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (E)$$

avec $a \neq 0$. En divisant par a puis en posant $z = x + b/(3a)$, on obtient l'équation

$$z^3 + pz + q = 0, \quad (E')$$

où

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}.$$

Si $4p^3 + 27q^2 \geq 0$, La formule suivante donne une solution réelle en z :

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}. \quad (S)$$

Tartaglia et Cardan n'utilisaient leurs formules que pour des équations dont on savait à l'avance qu'elles avaient des solutions réelles. Quand tout se passait bien, (S) donnait cette solution réelle. En factorisant par $(z - z_0)$, on se ramenait à une équation de degré 2 que l'on savait résoudre.

Cardan, puis Bombelli furent intrigués par l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, dont 4 est racine. Pourtant, la formule de Cardan donne comme solution

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

En fait dans le cas général (S) définit six nombres complexes, parmi lesquels seulement trois sont solutions de l'équation (E') . En effet, si u est tel que $u^3 = z$, les deux autres racines cubiques de z sont ju et $\bar{j}u$, où $j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{4i\pi/3}$ sont les deux racines cubiques de l'unité différentes de 1. Voici la solution complète de (E') .

1. Si $4p^3 + 27q^2 \geq 0$, soient u et v les deux réels tels que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}$$

Les trois solutions de (E') sont

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = ju + \bar{j}v, \quad z_3 = \bar{j}u + jv.$$

L'équation (E') a une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées.

2. Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u un des complexes tels que :

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{-4p^3 - 27q^2}{27}}.$$

Les trois solutions de (E') sont :

$$z_1 = u + \bar{u}, \quad z_2 = ju + \bar{j}\bar{u}, \quad z_3 = \bar{j}u + j\bar{u}.$$

L'équation (E') a trois solutions réelles, même s'il faut passer par les complexes pour les écrire.

En 1540, un élève de Cardan, Ludovico Ferrari donne des expressions explicites pour les solutions d'équations de degré 4, mais le problème des solutions non réelles demeure. En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion à l'égard des racines carrées de nombres négatifs et écrit le nombre «più di meno», c'est-à-dire i , puis définit les règles que vous connaissez, en particulier «più di meno via più di meno fa meno» : $i \times i = -1$. On constata bientôt qu'en acceptant les racines complexes et en comptant ces racines avec leur multiplicité, toute équation de degré 2 avait 2 racines, toute équation de degré 3 en avait 3 et toute équation de degré 4 en avait 4. Ceci fut énoncé par Girard en 1629, puis Descartes en 1637.

Et les équations de degré 5 ? On chercha longtemps une «résolution par radicaux» : une formule générale ne faisant intervenir que les opérations de \mathbb{C} et l'extraction de racines. Le mémoire sur la résolution algébrique des équations que Joseph Louis Lagrange (1736-1813) publia en 1772 était une avancée importante. Il proposait une théorie ramenant le problème à l'étude des différentes valeurs que peuvent prendre certaines fonctions des racines lorsque l'on permute ces racines entre elles. Il y montrait aussi que les méthodes qui avaient conduit à la résolution des équations de degrés 2 3 et 4 ne pouvaient pas fonctionner sur une équation de degré 5 générale. Il s'écoula encore 60 ans avant qu'Evariste Galois (1811-1832) ne comprenne que la résolubilité par radicaux était liée aux propriétés du groupe des permutations des racines. Une conséquence de la théorie de Galois était la démonstration du fait que les équations de degré 5 n'étaient pas résolubles par radicaux en général. Ce n'est qu'en 1870, avec la parution du «Traité des substitutions et des équations algébriques» de Camille Jordan (1838-1922) que l'ampleur des conceptions de Galois fut pleinement comprise.

Il faut dire que Galois avait exposé ses idées dans des articles plutôt mal écrits, souvent incomplets, ainsi que dans une lettre à un ami, fébrilement écrite dans la nuit du 29 mai 1832. Elle se terminait par ces mots : «Après cela, il y aura j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis. Je t'embrasse avec effusion». Le lendemain matin, il mourait des suites d'un duel ; il avait 21 ans.

9.1 DÉFINITION DES NOMBRES COMPLEXES

§1 Approche axiomatique

Théorème 1

Définition de \mathbb{C}

Il existe un ensemble, noté \mathbb{C} , muni de deux opérations $+$ et \cdot , tel que

1. \mathbb{C} contient \mathbb{R} .
2. Il existe un élément i de \mathbb{C} tel que $i^2 = i \cdot i = -1$.
3. Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + i \cdot y$ où x et y sont réels.
4. Les opérations $+$ et \cdot coïncident sur \mathbb{R} avec l'addition et la multiplication usuelles.
5. Les règles habituelles d'usage de ces opérations restent valables dans \mathbb{C} , c'est-à-dire
 - $+$ et \cdot sont associatives et commutatives.
 - \cdot est distributive par rapport à $+$.
 - tout élément z de \mathbb{C} possède un opposé, noté $-z$.
 - tout élément z de \mathbb{C} différent de 0 possède un inverse, noté z^{-1} .

On dit que $+$ et \cdot sont des **lois de compositions internes** et que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un **corps**. Afin d'alléger les notations, nous noterons les produits zw au lieu de $z \cdot w$.

Test 2

Calculer $(1 + 2i)(8 - 3i)$.

§2 Forme algébrique

Définition 3

Soit z un nombre complexe, de la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- L'écriture $z = x + iy$ est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique** du nombre complexe z .
- Les réels x et y sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z . Ils sont notés respectivement $\Re z$ et $\Im z$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z = \Re z + i \Im z.$$

- Les nombres complexes de la forme iy , avec $y \in \mathbb{R}$, sont dits **imaginaires purs**. On note leur ensemble

$$i\mathbb{R} = \{ iy \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Remarquons que 0 est un réel et un imaginaire pur.

Proposition 4

Soient z et w deux nombres complexes, alors

$$z = w \iff \Re z = \Re w \text{ et } \Im z = \Im w$$

Autrement dit, pour tous réels x, y, x', y' , on a

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Proposition 5**Règles de calcul dans \mathbb{C}**

Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$, avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

1. La somme des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe

$$z + w = (x + x') + i(y + y')$$

autrement dit, $\Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w)$ et $\Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w)$.

2. Le produit des complexes $z = x + iy$ et $w = x' + iy'$ est le complexe

$$z \times w = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Remarque

Plus généralement, on peut écrire

$$\Re\left(\sum_{k=p}^q a_k\right) = \sum_{k=p}^q \Re(a_k); \quad \Im\left(\sum_{k=p}^q a_k\right) = \sum_{k=p}^q \Im(a_k);$$

Remarque

Pour tout réel λ et tout complexe $z = x + iy$, on a $\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$, d'où

$$\Re(\lambda z) = \lambda \Re(z) \quad \text{et} \quad \Im(\lambda z) = \lambda \Im(z).$$

Proposition 6

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z \neq 0$ si, et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$; et dans ce cas l'inverse de z est donnée par

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

§3 Règles d'exponentiation

On notera \mathbb{C}^* l'ensemble des nombres complexes non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nous utiliserons la convention usuelle d'exponentiation : pour tout nombre complexe z , z^0 sera par convention égal à 1 ; pour tout $n \geq 1$, z^n désignera le nombre $z \cdot \dots \cdot z$ (n fois). Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note z^{-n} le nombre complexe $(1/z)^n$.

Exemple 7

$$\begin{aligned} i^{-1} &= -i, & i^0 &= 1, & i^1 &= i, & i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1. \\ \text{Pour } k \in \mathbb{Z}, & i^{4k} &= 1, & i^{4k+1} &= i, & i^{4k+2} &= -1, & i^{4k+3} &= -i. \end{aligned}$$

Remarque**Règles d'exponentiation**

Les propriétés des puissances sont les mêmes que sur \mathbb{R} . Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$1. \ z^n z^m = z^{m+n}. \quad | \quad 2. \ (z^n)^m = z^{nm}. \quad | \quad 3. \ z^n w^n = (zw)^n.$$

On retrouve également les identités remarquables bien connues, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\text{Binome de Newton})$$

par exemple,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Test 8

Développer et simplifier $(2 + 3i)^2$ et $(3 - 4i)^2$.

Test 9

Développer et simplifier $(2 + 3i)^7$.

Test 10

Développer et simplifier

$$s = (1 + i)^7 + (1 + i)^9 + (1 + i)^{11} + \dots + (1 + i)^{17}.$$

§4 Nombres complexes et équations algébriques

Les nombres complexes sont nés de la résolution des équations algébriques. Par exemple, $z^2 = -1$ équivaut à $z^2 - i^2 = 0$, c'est-à-dire $(z - i)(z + i) = 0$. Arrivés à ce stade de la résolution nous appliquons la propriété ci-dessous pour affirmer que les seules solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont $\pm i$.

Proposition 11

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ ou } w = 0.$$

Test 12

Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

9.2 CONJUGUÉ, MODULE

§1 Conjugaison

Définition 13

Le **conjugué** du complexe $z \in \mathbb{C}$ est le complexe $\bar{z} = \Re z - i \Im z$. En représentation algébrique

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overline{x + iy} = x - iy.$$

Lemme 14

Pour tout nombre complexe z ,

$$z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2,$$

en particulier $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$.

Test 15

Vérifier le lemme précédent.

Proposition 16

Si $z, w \in \mathbb{C}$ et $w \neq 0$, alors

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}.$$

Remarquez que $w\bar{w}$ est un réel.

Test 17

Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{2+3i}$ et $\frac{1-5i}{2+i}$.

Proposition 18

Propriétés de la conjugaison

Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $z + \bar{z} = 2 \Re(z)$ est un réel.
2. $z - \bar{z} = 2i \Im(z)$ est un imaginaire pur.
3. $\overline{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
5. $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$.
6. Si $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
7. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Test 19

Soit $z = a + ib$ et $w = c + id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vérifier les propriétés précédentes.

Remarque

Plus généralement, on peut écrire

$$\overline{\sum_{k=p}^q a_k} = \sum_{k=p}^q \bar{a}_k.$$

§2 Module

Définition 20

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le **module** de z , noté $|z|$, est le nombre réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rappelons que pour tout nombre réel a , on a

$$\sqrt{a^2 + 0} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Si z est réel, alors le module de z est égal à la valeur absolue de z , il n'y a donc pas conflit de notations.

Proposition 21

Propriétés du module

Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

1. $z\bar{z} = |z|^2$.
2. $z = 0 \iff |z| = 0$.
3. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
4. $|zw| = |z||w|$.
5. Si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Corollaire 22

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Théorème 23

Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes.

1. $\Re z \leq |\Re z| \leq |z|$,
2. $\Im z \leq |\Im z| \leq |z|$.
3. L'inégalité triangulaire :

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

de plus, il y a égalité si et seulement si $w = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda w$.

4. Plus généralement, on a l'encadrement

$$\left| |z| - |w| \right| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

§3 Le plan d'Argand-Cauchy

Soit \mathcal{P} le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Définition 24

Soit \vec{u} un vecteur du plan \mathcal{P} de coordonnées (x, y) , c'est-à-dire tel que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

On appelle **affixe** de \vec{u} le complexe $z = x + iy$.

Réciproquement, \vec{u} est appelé **(vecteur) image** du complexe z .

On notera de manière condensée $\vec{u}(z)$ le vecteur d'affixe z .

Proposition 25

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathcal{P} d'affixe z et w et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + w$.
2. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz .
3. On a $\|\vec{u}\| = |z|$.

Définition 26

Soit M un point du plan \mathcal{P} de coordonnées (x, y) , c'est-à-dire tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

On appelle **affixe** de M le complexe $z = x + iy$. Réciproquement, on dit que M est le **(point) image** du complexe z .

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M , alors l'abscisse de M est $\Re(z)$ et son ordonnée est $\Im(z)$.

Proposition 27

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A l'affixe de A et z_B l'affixe de B . Alors, l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$.

Remarque

Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathcal{P} d'affixe z et w . Puisque $|z + w| \leq |z| + |w|$, on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

Remarque

Interprétation de l'inégalité triangulaire avec des points

Soit A, B et C trois points d'affixes z_A, z_B et z_C . Alors

$$AC = |z_C - z_A| = |z_C - z_B + z_B - z_A| \leq |z_C - z_B| + |z_B - z_A| = AB + BC$$

De plus, il y a égalité si et seulement si A, B et C sont alignés dans cet ordre.

Remarque

Soit A un point du plan d'affixe z_A et R un réel > 0 .

- Le **cercle** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = R$.
- Le **disque ouvert** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| < R$.

- Le **disque fermé** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - z_A| \leq R$.

La distance de A à B est $d(A, B) = AB = |z_B - z_A|$.

Test 28

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie

$$|z - 1| = |z + 1 + 3i|.$$

9.3 ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

§1 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 29**d'Alembert-Gauß**

Tout polynôme non constant à coefficient dans \mathbb{C} admet au moins une racine dans \mathbb{C} .

Démonstration. Admise. ■

Remarque

Si z est racine d'un polynôme à coefficient réel, alors \bar{z} aussi.

Méthode

Si un polynôme P admet une racine $a \in \mathbb{C}$, il est alors possible de factoriser $(X - a)$ dans P . Par exemple, 3 est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ et on a

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 3)(X^2 - 3X + 2).$$

Pour déterminer cette factorisation, on peut par exemple utiliser des «coefficients inconnus»:

$$(X - 3)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 3a)X^2 + (c - 3b)X - 3c,$$

et «par identification»,

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b - 3a = -6 \\ c - 3b = 11 \\ -3c = -6 \end{array} \right. \text{ et par substitution } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 + 3 = -3 \\ c = 11 - 9 = 2 \\ c = 2 \quad (\text{pour vérification}) \end{array} \right.$$

On peut également «poser» la division (voir le chapitre «Polynômes»).

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & X - 3 \\ \hline & \end{array}$$

§2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 30

On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine carrée** de $a \in \mathbb{C}$ si $z^2 = a$.

Théorème 31

Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes opposées.



Pour un réel positif, on parle de *la* racine carrée pour désigner celle des deux racines qui est positive. Dans le cas d'un complexe quelconque, on ne dispose pas de moyen satisfaisant pour particulariser l'une des deux racines (même problème que la notation $\sqrt{-1}$). On parle donc toujours d'*une* racine carrée. Pour la même raison, on s'interdit d'utiliser le symbole déterministe \sqrt{z} , qui reste réservé aux réels positifs (attention aux variations sur vos calculatrices, python, etc...).

Méthode

Extraction des racines carrées sous forme algébrique

On cherche les racines carrées d'un nombre complexe $w = u + iv$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 = w &\iff z^2 = w \text{ et } |z|^2 = |w| \\ &\iff (x + iy)^2 = u + iv \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \\ x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} . \end{aligned}$$

Des deux première lignes, on déduit x^2 et y^2 , puis x et y au signe près. La troisième donne le signe du produit xy , donc les deux racines recherchées.

Remarque



On se gardera d'appliquer cette méthode dans le cas où w est un nombre réel. Les racines carrées de w sont alors évidentes, égales à $\pm\sqrt{w}$ si w est positif et à $\pm i\sqrt{|w|}$ si w est négatif.

Test 32

Déterminer les racines carrées de $1 + i$ sous forme algébrique.

§3 Résolution algébrique d'une équation du second degré dans \mathbb{C}

Théorème 33

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes données par :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } \frac{-b + \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

On dit que ces nombres sont **racines simples** du trinôme $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution : $\frac{-b}{2a}$. On dit qu'elle est **racine double** du trinôme $az^2 + bz + c$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et notons δ une racine carrée de Δ . Puisque $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \\ &\iff z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \\ &\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a}. \end{aligned}$$

■

Remarque

En particulier, si a, b et c sont des réels et que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, une racine carrée de Δ est donnée par $\delta = i\sqrt{-\Delta}$. Le polynôme $aX^2 + bX + c$ a donc deux racines complexes conjuguées

$$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Test 34

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.

Test 35

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (1 - i)z - i = 0$.

§4 Relations coefficients-racines

Proposition 36

Relations coefficients-racines

Soit z_1 et z_2 les deux solutions (éventuellement confondues) de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (\text{E})$$

On a alors les relations

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Corollaire 37

Soit S et P deux nombres complexes. Alors, les seuls nombres complexes z_1 et z_2 , éventuellement égaux, qui vérifient

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

sont les deux racines du trinôme $z^2 - Sz + P$.

9.4 REPRÉSENTATION TRIGONOMÉTRIQUE

§1 Groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1

Définition 38

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

Proposition 39

L'ensemble \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) , c'est-à-dire

1. $1 \in \mathbb{U}$.
2. $\forall (z, w) \in \mathbb{U}^2, zw \in \mathbb{U}$.
3. $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} = \bar{z} \in \mathbb{U}$.

Remarque

L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication dans \mathbb{C} est un groupe commutatif.

Proposition 40

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists t \in \mathbb{R}, z = \cos(t) + i \sin(t).$$

Définition 41

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

Test 42

$$1. e^{i0} = \quad \quad \quad | \quad 2. e^{i\pi} = \quad \quad \quad | \quad 3. e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

Proposition 43

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} 1. \overline{e^{ia}} = e^{-ia}. & 3. \frac{1}{e^{ia}} = e^{-ia} = \overline{e^{ia}}. \\ 2. e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}. & \end{array}$$

Test 44

Démontrer ces propriétés.

Théorème 45



Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ia} = e^{ib} \iff \cos a = \cos b \text{ et } \sin a = \sin b \iff a \equiv b \pmod{2\pi}.$$

§2 Forme trigonométrique, arguments d'un nombre complexe non nul

Définition 46

Si z est un nombre complexe non nul, le complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est-à-dire

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Une telle écriture est **une forme trigonométrique**. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé **un argument** de z .

Remarque

Géométriquement, si $z \in \mathbb{C}^*$ est l'affixe d'un point M , alors un argument de z est une mesure de l'angle orienté (\vec{e}_1, \vec{OM}) .

Pour mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, on commence par factoriser son module.

Test 47

Mettre sous forme trigonométrique.

1. $1 + i$.

2. $1 - i\sqrt{3}$.

3. $1 + 7i$.

Proposition 48



Soient $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\varphi}$ deux nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique. Alors

$$z = w \iff (|z| = |w| \text{ et } \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}).$$

Ainsi, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et les mêmes arguments.

Lemme 49

Soient z et w deux complexes non nuls dont on donne une forme trigonométrique

$$z = |z|e^{i\theta}$$

et

$$w = |w|e^{i\varphi}.$$

Alors, on a les formes trigonométriques suivantes

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\varphi)}$$

et

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Notation

Pour dire que θ est un argument de z , on note

$$\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

La notation est cohérente en raison de la transitivité de la relation modulo 2π .

Remarque

Tout nombre complexe non nul possède un argument unique dans $] -\pi, \pi]$ (ou $[0, 2\pi[$).

Corollaire 50

Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

1. $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$

2. $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$

3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
4. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}$
5. $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$.

§3 Application à la trigonométrie

Propriétés liées à l'écriture trigonométrique

Proposition 51

Formules d'Euler

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \quad (\text{Euler})$$

Proposition 52

Formule de (De) Moivre

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{it})^n = e^{int}$, c'est-à-dire

$$(\cos(t) + i \sin(t))^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Test 53

Soit $t \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(5t)$ et $\sin(5t)$ en un polynôme en $\sin(t)$ et $\cos(t)$. En déduire une expression sympathique de $\tan(5t)$.

Proposition 54

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos(nt) =$$

$$\text{et } \sin(nt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).

Savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ est dans la partie «capacités» du programme. Connaître la formule ne me semble pas une exigence du programme. Par contre, vous devez savoir retrouver le résultat rapidement. ■

Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est la transformer en une combinaison linéaire de $\sin(at)$ et $\cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$ (il n'y a donc pas de carré, cube, ...).

On utilise pour cela les formules d'Euler ainsi que la formule du binôme de Newton

Test 55

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\sin^3(t)$.
2. Linéariser $\cos^4(t)$.

Délinéarisation**Lemme 56**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + e^{it} = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - e^{it} = -2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}.$$

Test 57

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}$. En factorisant «par l'angle moitié» $e^{ip} + e^{iq}$, retrouver les formules de Simpson.

On peut utiliser le même type d'idée que pour $1 + e^{it}$ pour des sommes plus générales. On peut calculer un grande variété de sommes trigonométriques de cette façon.

Proposition 58

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Alors

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) =$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^n \sin(kt) =$$

Démonstration. À faire (voir les exercices).

Le calcul de ces sommes est dans la partie «capacités» du programme, connaître la formule ne me semble pas une exigence du programme. Par contre, vous devez savoir retrouver le résultat rapidement. ■

§4 Exponentielle d'un nombre complexe

On a défini le symbole e^z dans deux cas : z est réel et z est imaginaire pur. On veut prolonger sa définition à tout $z \in \mathbb{C}$ tout en conservant sa propriété fondamentale $e^{z+w} = e^z e^w$.

Définition 59

Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On note également $e^z = \exp(z)$.

Proposition 60

Soient $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\exp(z) \neq 0$.
2. $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.
3. $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
5. $|\exp(z)| = e^{\Re(z)}$.
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, (\exp(z))^n = \exp(nz)$.

On dit que l'application $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
 $z \mapsto e^z$

Proposition 61

Soient $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$$\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = w + 2ik\pi.$$

Méthode

Résolution de l'équation $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $a \neq 0$, on écrit a sous forme trigonométrique $a = |a| e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \exp(z) = a &\iff e^x e^{iy} = |a| e^{i\theta} \\ &\iff \begin{cases} e^x = |a| \\ y \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln|a| + i(\theta + 2k\pi) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^z = a$ sont les complexes $\ln|a| + i(\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Test 62

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $e^z = 1 + i$.

9.5 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE PLANE

§1 Interprétation géométrique

Proposition 63

Interprétation géométrique du module et de l'argument

Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors :

1. $\|\overrightarrow{OM}\| = |z|$.
2. si $M \neq O$, alors $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Proposition 64

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, z_A et z_B les affixes respectives de A et B .

1. $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.
2. Si $A \neq B$, $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

Corollaire 65

Soit A, B, C et D quatre points du plan \mathcal{P} tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On note z_A, z_B, z_C et z_D leurs affixes respectives. Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}.$$

En particulier,

- $(AB) \parallel (CD) \iff \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- $(AB) \perp (CD) \iff \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

§2 Représentation analytique complexe

Définition 66

Si $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une application du plan \mathcal{P} dans lui-même, on appelle **représentation analytique complexe** de F l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de $M' = F(M)$.

Exemple 67

1. La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe $(O\vec{e}_1)$ est

$$z' = \bar{z}$$

2. La représentation complexe de la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b est

$$z' = z + b$$

3. La représentation complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est

$$z' - \omega = \lambda(z - \omega) \text{ soit } z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega.$$

4. La représentation complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \text{ soit } z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

§3 Similitude directe

Définition 68

On appelle **similitude directe** toute application du plan \mathcal{P} dans lui-même qui admet une représentation complexe de la forme

$$z \mapsto az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

Proposition 69

Soit s la similitude directe de représentation complexe

$$z \mapsto az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

1. Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur \vec{t} d'affixe b .
2. Si $a \neq 1$, alors s possède un unique point fixe Ω^a . Alors s est la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$. On dit que s est la similitude directe de **centre** Ω , de **rapport** λ et d'**angle** θ .

^aSi ω désigne l'affixe de Ω , on a $\omega = a\omega + b$.

Remarque

Cette similitude directe conserve les angles orientés et multiplie les distances par $|a|$.

Remarque

Une **similitude indirecte** est une application du plan \mathcal{P} dans lui-même qui admet une représentation complexe de la forme

$$z \mapsto a\bar{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

9.6 RACINE n -IÈME D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Remarque

Soit a un nombre complexe non nul. Écrivons a sous forme polaire $a = |a|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

De même, pour $z \in \mathbb{C}$, écrivons $z = |z|e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^2 = a \iff |z|^2 e^{2i\varphi} = |a|e^{i\theta} \iff \left(|z| = \sqrt{|a|} \text{ et } 2\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi} \right).$$

On trouve alors facilement *une* racine carrée de a car

$$\left(\sqrt{|a|}e^{i\theta/2} \right)^2 = |a|e^{i\theta} = a.$$

Puisque les racines carrées de a sont opposées, on a

$$z^2 = a \iff z = \sqrt{|a|}e^{i\theta/2} \text{ ou } z = -\sqrt{|a|}e^{i\theta/2}.$$

Corollaire 70 **Racines carrées sous forme trigonométrique**
 Soit $a = |a|e^{i\theta}$, avec θ réel. Les racines carrées de a sont

$$\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } -\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Test 71 Déterminer les racines carrées de $w = 1 + i$ sous forme trigonométrique. En déduire une expression de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

§1 Notion de racine n -ième

Définition 72 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n -ième** de a est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = a.$$

Lorsque $n = 2$, on dit que z est une **racine carrée** de a . Lorsque $n = 3$, on dit que z est une **racine cubique** de a .

Certains nombres ont plus d'une racine n -ième. Par exemple, 5 et -5 sont tout deux racine carrée de 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 possède une unique racine n -ième, c'est 0.

Lemme 73 Si $a = |a|e^{i\theta}$, alors

$$|a|^{1/n}e^{i\theta/n}$$

est une racine n -ième de a .

Exemple 74 Déterminons les racines cubiques de 1, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$z^3 = 1.$$

Il y a une solution apparente qui est $z = 1$. Ainsi,

$$z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0.$$

On trouve alors, trois solutions,

$$1 \qquad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§2 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 75

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n -ième** de l'unité est un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$z^n = 1.$$

Les racines n -ièmes de l'unité sont donc les racines n -ièmes de 1.

Théorème 76

Racines n -ièmes de 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n -ième de l'unité. Ce sont les complexes $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$ c'est-à-dire les nombres complexes

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Notation

On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Théorème 77

L'ensemble des racines n -ième de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif à n éléments.

Test 78

Déterminer \mathbb{U}_2 , \mathbb{U}_3 et \mathbb{U}_4 .

Proposition 79

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

1. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.
2. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \omega_k = \omega_1^k$.
3. Si $n \geq 2$, alors la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Par exemple, on a $1 + j + j^2 = 0$.

Remarque

Les images des racines n -ièmes de l'unité ω_k sont réparties régulièrement sur le cercle unité. Les images des racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'affixe 1.

§3 Résolution de l'équation $z^n = a$

Théorème 80

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Alors a admet exactement n racines n -ièmes. Si z_0 désigne l'une d'entre elles, alors les racines n -ièmes de a sont les complexes

$$z_0 \times \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \text{où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Méthode

Si on écrit a sous forme trigonométrique : $a = |a|e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, les racines n -ième de a sont les complexes

$$z_k = |a|^{1/n} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

On peut également choisir $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ou parmi n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.

Remarque

Les points d'affixes z_0, z_1, \dots, z_{n-1} sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O , de côté $|z_1 - z_0| = 2\sqrt[n]{r} \sin \frac{\pi}{n}$.

Test 81

Résoudre l'équation $z^5 = -1 + i\sqrt{3}$.

9.7 SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE PORTANT SUR DEUX TERMES

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ où \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (\star)$$

Proposition 82

Une suite géométrique de raison q vérifie la relation (\star) si et seulement si q est zéro du polynôme du second degré $X^2 - aX - b$.

Définition 83

Le polynôme $X^2 - aX - b$ s'appelle le **polynôme caractéristique** de $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Il s'agit donc de discuter une équation du second degré. Pour écarter les trivialités, nous supposons $(a, b) \neq (0, 0)$ et nous poserons $\Delta = a^2 + 4b$.

§1 Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 84

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et (u_n) une suite complexe vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. Si le polynôme P admet deux racines distinctes q_1 et q_2 , alors

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. Si le polynôme P admet une racine double $q = a/2$, alors

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) q^n.$$

Exemple 85

Réolvons la récurrence

$$u_0 = 1, u_1 = -1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2iu_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2iX - 1$, son discriminant est $\Delta = -4 + 4 = 0$. On est dans la seconde situation avec $q = i$ – on peut vérifier que $X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$. On a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)i^n,$$

λ et μ étant à déterminer ; mais par définition de (u_n) ,

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = (\lambda + \mu)i = -1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = i - 1 \end{cases};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n + ni)i^n.$$

§2 Résolution pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **Théorème 86**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $P = X^2 - aX - b$.

1. Si le polynôme P admet deux racines réelles q_1 et q_2 , alors

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

2. Si le polynôme P admet une racine double $q = a/2$, alors

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)q^n.$$

3. Si le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $q_1 = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $q_2 = \rho(\cos \alpha - i \sin \alpha)$, alors

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \rho^n \cos(n\alpha) + \mu \rho^n \sin(n\alpha).$$

Exemple 87

Soit u la suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, son discriminant est $\Delta = 5 > 0$ et ses racines sont $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a pour tout entier n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

λ et μ étant à déterminer d'après les conditions initiales ;

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \text{ d'où } \lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Remarquons (ce qui n'est pas évident sur la formule !) que u_n est un nombre entier et qu'il représente le nombre de façon de payer la somme de n € en utilisant uniquement des pièces de 1€ et 2€, avec ordre.

Exemple 88

Soit u la suite définie par

$$u_0 = 2, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4$, son discriminant est $\Delta = 0$ et la racine double est $q = 2$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n,$$

où λ et μ sont à trouver. Tous calculs faits, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2 - n)2^n.$$

Exemple 89

Soit u la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 4$, son discriminant est $-12 < 0$ et les racines complexes sont $-1 \pm i\sqrt{3}$. On a donc

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \\ \text{et } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\varrho} &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n \cos \frac{2n\pi}{3} + \mu 2^n \sin \frac{2n\pi}{3},$$

où λ et μ sont à trouver avec

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1 \\ u_1 = -\lambda + \mu\sqrt{3} = 2 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \sqrt{3} \end{cases};$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{2n\pi}{3} \right).$$

9.8 CONSTRUCTION DE \mathbb{C} À PARTIR DE \mathbb{R}

§1 La structure de corps

Définition 90

Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne** sur E une application

$$\varphi : E \times E \rightarrow E.$$

La valeur $\varphi(x, y)$ de φ pour un couple $(x, y) \in E \times E$ s'appelle le **composé** de x et de y pour cette loi. Le plus souvent, $\varphi(x, y)$ se notera $x \star y$ ou $x \cdot y$ ou xy ou xTy ou $x + y$ ou...

Définition 91

Soit E un ensemble et \star une loi de composition interne sur E . On dit que $(E, \star)^a$ est un groupe si

1. La loi \star est associative, *i.e.*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

2. Il existe un élément $e \in E$, appelé élément neutre de \star tel que

$$\forall x \in E, x \star e = e \star x = x.$$

3. On a

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x \star x' = x' \star x = e.$$

On dit que x' est le **symétrique de x pour \star** .

^alire E muni de la loi \star

Exemple 92

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe d'élément neutre 0 et le symétrique de x par $+$ est $-x$.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe d'élément neutre 0 et le symétrique de x par $+$ est $-x$.
3. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car, par exemple, 1 n'a pas de symétrique.

Remarque

- Si \star admet un élément neutre, il est unique.
- Si x admet un symétrique pour \star , il est unique.

Définition 93

Soit E un ensemble, $+$ et \times deux lois de composition interne sur E . On dit que $(E, +, \times)$ est un corps si

1. $(E, +)$ est un groupe.
2. La loi $+$ est commutative, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

On dit alors que $(E, +)$ est un groupe commutatif ou abélien. On note (souvent) 0 (ou 0_E) l'élément neutre de la loi $+$.

3. La loi \times est commutative.
4. La loi \times est associative.
5. Il existe un élément neutre pour la loi \times (noté souvent 1 ou 1_E).
6. Tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ admet un symétrique pour la loi \times .
7. La loi \times est distributive par rapport à la loi $+$, *i.e.*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

§2 Construction de \mathbb{C} (hors-programme)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (xx' - yy', xy' + x'y)\end{aligned}$$

On définit ainsi sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deux lois de composition interne $+$ et \cdot .

Théorème 94

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un corps.
- $(0, 0)$ est l'élément neutre de $+$, noté $0_{\mathbb{C}}$ ou 0.
- $(1, 0)$ est l'élément neutre de \cdot , noté $1_{\mathbb{C}}$ ou 1.
- Tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a pour symétrique par la loi $+$ $(-x, -y)$ que l'on note $-(x, y)$.
- Tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a pour symétrique par la loi \cdot $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

Notation

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se note $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ appelé **corps des nombres complexes**.

Remarque

En toute rigueur, \mathbb{C} ne contient pas \mathbb{R} , mais on identifie l'ensemble \mathbb{R} avec

$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En ce sens, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 95

On pose $i = (0, 1)$. Alors $i^2 = -1$.

9.9 FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE À VALEURS DANS \mathbb{C}

§1 Notations

Définition 96

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On définit les fonctions suivantes de I dans \mathbb{C} :

$$\Re(f) : x \mapsto \Re(f(x))$$

$$\Im(f) : x \mapsto \Im(f(x))$$

$$\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$$

$$|f| : x \mapsto |f(x)|.$$

§2 Fonctions bornées

Définition 97

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est **bornée** si $|f|$ est bornée.

La propriété suivante servira de «pont».

Proposition 98

f est bornée si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont bornées.

§3 Limites

Définition 99

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, a un point adhérent à I et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f **tend vers ℓ en a** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ signifie $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$.

Proposition 100**Pont**

$\lim_a f = \ell$ si et seulement si $\lim_a \Re(f) = \Re(\ell)$ et $\lim_a \Im(f) = \Im(\ell)$.

Grâce aux deux ponts précédents, on montre, comme pour les suites, que, si $\lim_a f = \ell$, alors f est bornée au voisinage de a . On obtient aussi les propriétés algébriques sur les limites.

Remarque

Les limites à gauche et à droite des fonctions de I dans \mathbb{C} se définissent comme pour les fonctions de I dans \mathbb{R} .

§4 Continuité**Définition 101**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue en a** si $\lim_a f = f(a)$. Si f est continue en tout point de I , on dit que f est **continue sur I** .

Proposition 102**Pont**

f est continue en a si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues en a .

Corollaire 103

1. L'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{C} est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.
2. Toute fonction continue d'un segment de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est bornée.

§5 Dérivation**Définition 104**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Dans ce cas, on note $f'(a) = \ell$. Si f est dérivable en tout point de I , on dit que f est **dérivable sur I** .

Proposition 105**Pont**

f est dérivable en a si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a . Dans ce cas

$$f'(a) = (\Re(f))'(a) + i(\Im(f))'(a).$$

Corollaire 106

On retrouve les théorèmes opératoires sur les dérivées.

Corollaire 107

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur un intervalle I . Alors f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Proposition 108

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $m = a + ib$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{mx}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = me^{mt}.$$

Démonstration. En exercice. ■

On retrouve souvent ce résultat en physique sous la forme

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \frac{de^{i\omega x}}{dx} = i\omega e^{i\omega x}.$$

Plus généralement, on démontre

Proposition 109 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . Alors la fonction

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{\varphi(x)} \end{aligned}$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

On définit, comme pour les fonctions à valeurs réelles, la notion de fonction de I dans \mathbb{C} de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Proposition 110 **Pont**

f est de classe \mathcal{C}^n si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont de classe \mathcal{C}^n .

Corollaire 111

L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n de I dans \mathbb{C} est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.

9.10 INTÉGRATION

§1 Intégration sur un segment

Définition 112

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,
- f a une limite finie à gauche en x_{i+1} ,
- f a une limite finie à droite en x_i .

Proposition 113 **Pont**

f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

Définition 114

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. On définit

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f).$$

Proposition 115

Soit f, g deux fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{C} , continues par morceaux sur $[a, b]$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition 116 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration. Pour une fois, la preuve n'est pas immédiate, le recours aux ponts n'étant pas suffisant. On peut le montrer en utilisant les sommes de Riemann. On donne ici une autre preuve, moins longue mais plus astucieuse.

Si $\int_a^b f = 0$, le résultat est évident. Sinon, on pose $\int_a^b f = \varrho e^{i\theta}$ avec $\varrho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left| \int_a^b f \right| = \varrho = e^{-i\theta} \int_a^b f = \int_a^b e^{-i\theta} f.$$

La fonction $e^{-i\theta} f$ a une intégrale sur $[a, b]$ qui est réelle ; donc

$$\int_a^b e^{-i\theta} f = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} f).$$

Finalement,

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} f) \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f| = \int_a^b |f|.$$

■

Théorème 117 **Théorème fondamental**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_a^x f \end{aligned}.$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $F' = f$.

Démonstration. ponts...

■

Corollaire 118 **Inégalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \cdot |b - a|.$$

Démonstration.

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f' \right| \leq \int_a^b |f'|.$$

D'où le résultat.

■

Remarque



Le théorème de Rolle (et donc l'égalité des accroissements finis) ne s'étend pas aux fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{C} . En effet, dans le plan, on peut «revenir au point de départ» sans s'arrêter.

Contre exemple : $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$

§2 Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 119 Soit I un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On dit que f est **intégrable sur I** si $|f|$ est intégrable sur I .

Proposition 120 Pont
 f est intégrable sur I si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

Démonstration. (\implies) Conséquence de $\Re(f) \leq |f|$ et $\Im(f) \leq |f|$.

(\impliedby) Conséquence de $|f| \leq |\Re(f)| + |\Im(f)|$. ■

Définition 121 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. On définit

$$\int_I f = \int_I \Re(f) + i \int_I \Im(f).$$

Cette définition est possible d'après la proposition précédente.

Proposition 122 Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f = \int_a^{+\infty} f.$$

On a des propriétés analogues pour les autres types d'intervalles.