Nombres entiers, itérations

Aperçu

D 1 On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} .$$

P 2 *L'addition des entiers possède les propriétés suivantes:*

1. *L'addition est une loi de composition interne dans* $\mathbb{N}$. *Si* m *et* n *sont deux entiers naturels; on sait que leur somme est une entier* $m+n \in \mathbb{N}$.
2. *L'addition étant associative dans* $\mathbb{R}$, *elle est a fortiori associative dans* $\mathbb{N}$.

   $$\forall(x,y,z) \in \mathbb{N}^3, (x+y)+z = x+(y+z).$$

   On note simplement $x+y+z$.
3. *L'addition dans* $\mathbb{R}$ *admet le nombre* 0 *comme élément neutre; puisque* 0 *est une entier naturel, il est l'élément neutre pour l'addition dans* $\mathbb{N}$.
4. *L'addition dans* $\mathbb{N}$ *est commutative puisque, dans* $\mathbb{R}$, *elle est commutative.*

La multiplication des entiers possède les propriétés suivantes:

1. *La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$. Si m et n sont deux entiers naturels; on sait que leur produit est une entier $m \times n \in \mathbb{N}$.*
2. *La multiplication étant associative dans $\mathbb{R}$, elle est a fortiori associative dans $\mathbb{N}$.*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, (xy)z = x(yz).$$

   On note simplement xyz.

3. *La multiplication dans $\mathbb{R}$ admet le nombre 1 comme élément neutre; puisque 1 est une entier naturel, il est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.*
4. *La multiplication dans $\mathbb{N}$ est commutative puisque, dans $\mathbb{R}$, elle est commutative.*
5. *La multiplication dans $\mathbb{N}$ est distributive par rapport à l'addition, puisqu'elle l'est dans $\mathbb{R}$*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x.(y+z) = x.y + x.z \text{ et } (x+y).z = x.z + y.z.$$

R L'opposé d'un nombre réel x est le le nombre $-x$. Soit n un entier naturel non nul; le nombre $-n$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ possède donc des éléments (par exemple le nombre 2) qui n'admettent pas d'opposé dans $\mathbb{N}$.

P 3

1. *Le seul élément ayant un opposé pour l'addition dans* $\mathbb{N}$ *est* 0.
2. *Le seul élément ayant un inverse pour la multiplication dans* $\mathbb{N}$ *est* 1.

N $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

T 4

Axiomatique

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes

1. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
2. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*
3. *$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.*

N

Si p et q sont des entiers, on note

$$[\![p, q]\!] = \{ n \in \mathbb{N} \mid p \leq n \leq q \}.$$

R

Si p et q sont des entiers,

$$p \leq q \iff p < q + 1.$$

On rappelle qu'un **prédicat** ou une **propriété** sur $\mathbb{N}$ est une relation contenant une variable $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{B} = \{\ \mathrm{Vrai}, \mathrm{Faux}\ \}$. Si R est un tel prédicat, on écrit «on a $R(n)$» ou plus simplement «$R(n)$» pour exprimer que la valeur de $R(n)$ est Vrai. Par exemple, si $R(n)$ est «$2n \geq n^2$», on a $R(1)$ et $R(2)$ mais on n'a pas $R(3)$.

T 5 **Principe de récurrence**

Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

- $R(0)$ *est vraie,*
- $\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1)$.

Dans ces conditions, la propriété $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Utiliser ces propriétés, c'est faire un **raisonnement par récurrence**.

Démonstration non exigible. Effectuons un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est faux ; autrement dit, l'ensemble

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{non } R(n) \} .$$

n'est pas vide. Or $A \subset \mathbb{N}$ donc A admet un plus petit élément, noté a.
$R(0)$ est vraie, donc $a \geq 1$. Par définition de a, on a $a - 1 \notin A$, c'est-à-dire que l'assertion $R(a-1)$ est vraie. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1);$$

donc $R(a)$ est vraie, c'est absurde.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$.

E 6 Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion

$$R(n) : 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

- L'assertion $R(0)$ est vraie[1] puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$.
- Soit un entier $n \geq 0$. On suppose que $R(n)$ est vraie, c'est-à-dire $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$. Ainsi[2]

$$\begin{aligned} 5^{n+3} &= 5 \times 5^{n+2} \\ &\geq 5 \times \left(4^{n+2} + 3^{n+2}\right) && \text{d'après } R(n). \end{aligned}$$

  Or $5 \times 4^{n+2} \geq 4^{n+3}$ et $5 \times 3^{n+2} \geq 3^{n+3}$; on peut donc affirmer

$$5^{n+3} \geq 4^{n+3} + 3^{n+3},$$

  d'où $R(n+1)$.
- D'après le principe de récurrence, [3] l'assertion $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

∎

[1] Initialisation : $R(0)$.

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

C 7 Récurrence à deux pas

Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

$$R(0) \qquad \textit{et} \qquad R(1) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (R(n) \ \textit{ et } \ R(n+1)) \implies R(n+2).$$

Dans ces conditions,

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Ce résultat peut se généraliser à la récurrence à trois pas, quatre pas. . .

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

C 8 **Récurrence à partir du rang k**

Soit R un prédicat sur $[\![k, +\infty[\![$. On suppose que

$$R(k) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \geq k, R(n) \implies R(n+1).$$

Dans ces conditions,

$$\forall n \geq k,\ R(n).$$

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

C 9 Récurrence limitée à un intervalle

Soit a, b deux entiers tels que $a \leq b$, et soit R un prédicat sur $[\![a, b]\!]$ tel que l'on ait

$$R(a) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in [\![a, b-1]\!], R(n) \implies R(n+1).$$

Alors

$$\forall n \in [\![a, b]\!], R(n).$$

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

C 10 Récurrence avec prédécesseurs

Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

$$R(0) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (R(0) \ \textit{et} \ R(1) \ \textit{et} \ \dots \ \textit{et} \ R(n)) \implies R(n+1).$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

D 11 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre complexe r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Ce nombre r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

P 12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement,

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p + (q-p)r.$$

D 13 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre complexe r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n.$$

Ce nombre r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

P 14 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 r^n.$$

Plus généralement, si $r \neq 0$.

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p r^{q-p}.$$

D 15 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = ax + b$. On considère la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n).$$

On suppose $a \neq 1$, (sinon (u_n) est une suite arithmétique).

- Déterminons le(s) point(s) fixe(s) de f: pour $x \in \mathbb{C}$,

$$f(x) = x \iff ax + b = x \iff (a-1)x = -b \iff x = \frac{b}{1-a}.$$

L'application f a donc un unique point fixe $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = ax + b$. On considère la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n).$$

On suppose $a \neq 1$, (sinon (u_n) est une suite arithmétique).

- Introduisons la suite (v_n) définie par

  $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell = u_n - \frac{b}{1-a},$$

  alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

  $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell = av_n + \cancel{f(\ell)} - \cancel{\ell} = av_n. \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison a:

  $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0.$$

  d'où

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \ell = a^n(u_0 - \ell) + \ell = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

T 16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 9u_n + 56$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les premiers termes de la suites, u_0, u_1, u_2.
2. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique? une suite géométrique?
3. Exprimer u_n en fonction de n.

P 17 **Formule hors-Programme**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmético-géométrique vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Alors, si $a \neq 1$*, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Programme Le programme officiel stipule que vous devez connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique. Le résultat ci-dessus, en plus d'être plutôt indigeste, est donc hors-programme.

On admet le résultat suivant:

T 18 *Soit E un ensemble, f une application de E dans E, a un élément de E. Il existe une et une seule suite $\left(x_n\right)_n \in \mathbb{N}$ de E telle que*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

C'est ainsi, par exemple, que l'on définira les suites arithmétiques et géométriques.

On peut aussi définir une suite par des relations de récurrence plus compliquées.

T 19 *Soit E un ensemble, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de E dans E, a un élément de E. Il existe une et une seule suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_n(x_n). \end{cases}$$

E 20 Avec $E = \mathbb{N}$, $f_n(x) = (n+1)x$, et $a = 1$. On définit ainsi par récurrence la suite

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

(pour $n > 0$). Ce nombre, qui est le produit des n premiers entiers > 0 s'appelle **factorielle** de n. On convient que $0! = 1$.
$n!$ intervient dans de nombreuses formules; $n!$ prend rapidement de «grandes valeurs»: $10! = 3\,628\,800$; $50!$ est un nombre de 65 chiffres en base 10 ; $100!$ est un nombre à 158 chiffres en base 10.

On peut aussi définir une suite par des relations de récurrence plus compliquées.

T 19 *Soit E un ensemble, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de E dans E, a un élément de E. Il existe une et une seule suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_n(x_n). \end{cases}$$

E 21 Avec $E = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \sqrt{x+n}$, et $a = 1$. On définit ainsi par récurrence une suite (x_n) telle que

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{2}+2}, \quad x_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+3}, \ldots$$

R On définit aussi des suites par récurrence d'ordre k où k est un entier naturel non nul. Il s'agit de suites (x_n) de E définies à l'aide d'une suite d'applications de (f_n) de E^k dans E, pour lesquelles on se donne les k premières valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ et pour tout n

$$x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\right).$$

Étant donnés $\left(a_0, \ldots, a_{k-1}\right) \in E^k$, il y a encore existence et unicité de la suite $\left(x_n\right)$ de E telle que

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\right). \end{cases}$$

E 22 La suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Il arrive même que l'on définisse une suite par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme se calcule à l'aide de tous les précédents. Là aussi on admet l'existence et l'unicité.

R On définit aussi des suites par récurrence d'ordre k où k est un entier naturel non nul. Il s'agit de suites (x_n) de E définies à l'aide d'une suite d'applications de (f_n) de E^k dans E, pour lesquelles on se donne les k premières valeurs $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ et pour tout n

$$x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}\right).$$

Étant donnés $\left(a_0, \dots, a_{k-1}\right) \in E^k$, il y a encore existence et unicité de la suite $\left(x_n\right)$ de E telle que

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}\right). \end{cases}$$

E 23 Dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n) telle que

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 3x_n - 2x_{n+1} - n. \end{cases}$$

Il arrive même que l'on définisse une suite par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme se calcule à l'aide de tous les précédents. Là aussi on admet l'existence et l'unicité.

D 24 On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, -3, \dots \,\}\,.$$

P 25 *L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif.*

1. *L'addition est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$.*
2. *L'addition est associative dans $\mathbb{Z}$.*
3. *L'addition admet 0, élément de $\mathbb{Z}$ comme élément neutre.*
4. *L'addition est commutative dans $\mathbb{Z}$.*
5. *Tout entier relatif admet pour opposé un entier relatif.*
6. *La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$.*
7. *La multiplication est associative dans $\mathbb{Z}$.*
8. *La multiplication admet 1, élément de $\mathbb{Z}$ comme élément neutre.*
9. *La multiplication est commutative dans $\mathbb{Z}$.*
10. *La multiplication dans $\mathbb{Z}$ est distributive par rapport à l'addition.*

P 26 *Les seuls éléments ayant un inverse pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1.*

T 27 *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes*

1. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*
2. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.*

D 28 **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$. Alors il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vérifiant

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r < b.$$

- q est le **quotient** de la division euclidienne de a par b.
- r est le **reste** de la division euclidienne de a par b.

Démonstration.

- Commençons prouver l'unicité d'un couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Supposons l'existence de deux couples (q, r) et (q', r') vérifiant ces conditions. Alors $a = qb + r = q'b + r'$, d'où

$$r - r' = b(q' - q).$$

Puisque $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$, on en déduit $-b < r - r' < b$, c'est-à-dire $0 \leq |r - r'| = b|q - q'| < b$. Puisque $b > 0$ on a $|q - q'| < 1$ et comme $|q - q'| \in \mathbb{N}$: on a donc $q = q'$. Par conséquent, $r - r' = b(q - q') = 0$.

- Soit $E = \{ k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a \}$. Cet ensemble est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$. En effet, si $a \geq 0$, $0 \in E$ et a majore E (car $b \geq 1$). Si $a < 0$, alors 0 majore E. L'ensemble E admet donc un plus grand élément q. On a donc $qb \leq a < (q + 1)b$ (sinon $q + 1 \in E$) et en posant $r = a - bq$, on a bien $0 \leq r < b$.

∎

E 29

$$\begin{array}{r|l} 543 & 17 \\ \cline{2-2} 33 & 31 \\ 16 & \end{array}$$

Ici $a = 543, b = 17, q = 31, r = 16$.

L'opération inverse de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ (division) n'est pas toujours définie : $\frac{2}{3}$ n'a pas de sens dans $\mathbb{Z}$. L'introduction des nombres rationnels pallie ce défaut.
La *construction* de $\mathbb{Q}$ n'est pas au programme, l'important est de garder à l'esprit les principales propriétés de $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est donc supposé connu (ou construit), il contient $\mathbb{Z}$, et ses éléments sont appelés **nombres rationnels**.

D 30 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des nombres réels x représentés par $\frac{p}{q}$, avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \} \right\}.$$

N $\mathbb{Q}^\star = \mathbb{Q} \setminus \{ 0 \}$.

À tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ correspond un nombre rationnel écrit sous la forme de **fraction** $\frac{a}{b}$, et tout nombre rationnel s'écrit de cette manière. Une telle écriture n'est pas unique, vu la propriété suivante :

P 31 *Si $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^\star$,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

P 32

1. *L'addition dans* $\mathbb{Q}$ *est une loi de composition interne. On a*

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

2. *L'addition est associative, commutative dans* $\mathbb{Q}$*.*
3. *Le nombre* 0 *appartient à* $\mathbb{Q}$ *est élément neutre pour l'addition.*
4. *Le nombre rationnel* $\frac{p}{q}$ *a pour opposé* $\frac{-p}{q}$*.*
5. *La multiplication dans* $\mathbb{Q}$ *est une loi de composition interne. On a*

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

6. *La multiplication est associative, commutative dans* $\mathbb{Q}$*.*
7. *Le nombre* 1 *appartient à* $\mathbb{Q}$ *est élément neutre pour la multiplication.*
8. *Tout nombre rationnel non nul a un inverse dans* $\mathbb{Q}$*. Si* $p \neq 0$, $\frac{p}{q}$ *a pour inverse* $\frac{q}{p}$*.*

R On calcule dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{R}$.

E 33 Il existe des nombres réels non rationnels, appelés **irrationnels** : $\sqrt{2}$, e, π sont irrationnels. Ces exemples seront développés ultérieurement.