Chapter 49 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

49.1 Généralités sur les fonctions vectorielles

49.2 Limite et continuité d'une fonction vectorielle

49.3 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

Exercice 49.1
Soit $F = \mathbb{R}^p$. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(I, F)$, ne s'annulant pas sur I, vérifient

$$\forall t \in I, f'(t) \in \operatorname{Vect}\{ f(t) \}.$$

Exercice 49.2 *Mouvement à accélération centrale*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$. Pour $t \in I$, on note $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$.

1. Montrer que la fonction vectorielle σ est constante.
2. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(f(t_0), f'(t_0))$ soit libre, alors $f(I)$ est inclus dans un plan.

Exercice 49.3

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$ et $a, b \in I$. On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont non colinéaires. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f'(c) \in \operatorname{Vect}\{ f(a), f(b) \}$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ et $a, b \in I$. On suppose que $f(a)$ et $f'(a)$ sont non colinéaires et que $f(b) \in \operatorname{Vect}\{ f(a), f'(a) \}$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) \in \operatorname{Vect}\{ f(a), f'(a) \}$.

Exercice 49.4 *Wronskien*
Soient $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On note C la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \det_C (f(t), g(t)) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}} \left(f'(t), g(t) \right) + \det_{\mathcal{B}} \left(f(t), g'(t) \right).$$

2. Soient $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonction continues. On considère deux solutions $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t).$$

Montrer que la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

est solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 49.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.
3. Montrer que l'application $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.