# Dénombrement

# Aperçu

1. Partie finie de $\mathbb{N}$
2. Ensembles finis
3. Analyse combinatoire

**L 1** *Soient deux entiers $m, t$ tels que $m > 1$ et $1 \leq t \leq m$.*
*Alors il existe une bijection $\varphi$ de l'ensemble $T = [\![1, m]\!] \setminus \{ t \}$ sur $[\![1, m-1]\!]$.*

*Démonstration.* L'application $s : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!]$ définie par

$$s(t) = m, \qquad s(m) = t, \qquad s(k) = k \text{ si } k \notin \{ m, t \}$$

est une bijection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$ (c'est par exemple l'identité si $t = m$).
L'application $\varphi$ de $T$ dans $[\![1, m-1]\!]$ définie par $\varphi(k) = s(k)$ convient. ∎

**T 2** *Soient* $p, q \in \mathbb{N}^\star$.

1. *Il existe une injection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p \leq q$.
2. *Il existe une surjection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p \geq q$.
3. *Il existe une bijection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p = q$.

**D 3** Soit $X$ un ensemble. On dit que $X$ est **fini** si $X = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X$ soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Si un ensemble n'est pas fini, on dit qu'il est **infini**.

Autrement dit, $X$ est fini si l'on peut «numéroter» ses éléments, c'est-à-dire écrire

$$X = \{ x_1, \ldots, x_n \}.$$

Lorsque $X$ est fini, non vide, le résultat suivant permet de définir le cardinal de $X$.

**D 4** Si $X$ est un ensemble fini et non vide, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X$ soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$, on l'appelle **cardinal** de $X$ ou **nombre d'éléments** de $X$.

La cardinal de $X$ est noté $|X|$, $\mathrm{card}(X)$ ou $\#X$. Par convention, le cardinal de $\emptyset$ est $0$.

**P 5** *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles. On suppose qu'il existe une bijection de $X$ sur $Y$. Alors $X$ est fini si et seulement si $Y$ est fini et dans ce cas*

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y).$$

**E 6**

1. Tout singleton est fini et de cardinal $1$.
2. L'application $k \mapsto 2k$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur l'ensemble des entiers pairs de $[\![1, 2n]\!]$. Cet ensemble est donc fini et de cardinal $n$.
3. Si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \leq b$, alors $\operatorname{card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$.
4. Si $\operatorname{card}(X) = n \geq 1$ et si $x \in X$, alors $\operatorname{card}(X \setminus \{ x \}) = n - 1$.

**T 7** *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles finis.*

1. *Il existe une injection de $X$ dans $Y$ si, et seulement si,* $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$.
2. *Il existe une surjection de $X$ dans $Y$ si, et seulement si,* $\text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$.
3. *Il existe une bijection de $X$ dans $Y$ si, et seulement si,* $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

**C 8** **Principe des tiroirs et des chaussettes**

*Si $p$ chaussettes sont rangées dans $q$ tiroirs et $p > q$, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.*

**T 9**

## Toute partie d'un ensemble fini est finie

*Soient* $X$ *un ensemble fini et* $A$ *une partie de* $X$*. Alors l'ensemble* $A$ *est fini,*

$$\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(X).$$

*De plus,* $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(X)$ *si et seulement si* $A = X$*.*

**T 10** *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, et $f$ une application de $X$ dans $Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *$f$ est une injection ;*

(ii) *$f$ est une surjection ;*

(iii) *$f$ est une bijection.*

Ce théorème s'applique au cas d'une application $f$ d'un ensemble **fini** dans lui-même.

Ce théorème est faux pour les ensembles infinis.

**C 11** *$\mathbb{N}$ est infini.*

**T 15** *Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis et disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B).$$

*Démonstration.* Si $A$ ou $B$ est vide, le résultat est clair. Supposant $A$ et $B$ de cardinaux $p$ et $q$ strictement positifs, on possède deux bijections

$$\alpha : A \to [\![1, p]\!] \text{ et } \beta : B \to [\![1, q]\!].$$

On définit alors $\gamma : A \cup B \to [\![1, p+q]\!]$ par

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A \\ p + \beta(x) & x \in B. \end{cases}$$

Il ne vous reste plus qu'à montrer que $\gamma$ est bijective. ∎

**P 16** *Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis. Alors $A \setminus B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

*Démonstration.* Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Remarquons que $A \cap B$ et $A'$ sont finies car incluses dans $A$ qui est finie.
Or $A$ est l'union disjointe de $A'$ et $A \cap B$, donc

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') + \operatorname{card}(A \cap B).$$

∎

**T 18** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

*Démonstration.* Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ et $B' = B \setminus A$. Ce sont des parties finies car incluses dans $A$ et $B$ qui sont finies.
Puisque $A$ est réunion disjointe de $A \cap B$ et $A'$,

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A').$$

De même, $A \cup B$ est réunion disjointe de $B$ et de $A'$ donc

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A')$$

L'égalité annoncée en résulte:

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A') = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A').$$

∎

**P 19** *Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ est fini et*

$$\operatorname{card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p\right) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \cdots + \operatorname{card}(A_p)$$

*Démonstration.* Par récurrence sur $p$. ∎

**C 20** *Soit $E$ un ensemble et $\left(A_i\right)_{i \in I}$ un recouvrement disjoint de $A$. On supposes l'ensemble $I$ fini ainsi que chaque ensemble $A_i$ ($i \in I$). Alors $E$ est fini et*

$$\operatorname{card}(E) = \sum_{i \in I} \operatorname{card}(A_i).$$

Ce résultat s'applique en particulier lorsque $\left(A_i\right)_{i \in I}$ est une partition de $E$.

**L 21** **Lemme des bergers**

*Si un ensemble $X$ possède une partition en $p$ sous-ensembles ayant même cardinal $q$, alors $X$ est fini et* $\mathrm{card}(X) = p \times q$.

**T 22** **Principe des Bergers**

*Soient $X$, $Y$ deux ensembles et $f$ une surjection de $X$ sur $Y$. On suppose $Y$ fini et que les ensembles $f^{-1}(\{ y \})$, pour $y \in Y$, aient tous même cardinal $q$ (c'est-à-dire que tout élément de $Y$ possède exactement $q$ antécédents par $f$). Alors $X$ est fini et*

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \times q.$$

**E 23** Combien y-a-t-il de couples $(x, y) \in [\![1, 10]\!]$ tels que $x \neq y$?

**T 24** *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles finis. Alors l'ensemble $X \times Y$ est fini et*

$$\operatorname{card}(X \times Y) = (\operatorname{card} X)(\operatorname{card} Y).$$

*Démonstration.* Posons $m = \operatorname{card}(X)$ et $p = \operatorname{card}(Y)$. On considère l'application $f : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$. Si $x \in X$, $f^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ est une partie à $p$ éléments de $X \times Y$, car $y \mapsto (x, y)$ est une bijection de $Y$ sur $f^{-1}(\{x\})$. Le cardinal de $X \times Y$ est donc $\operatorname{card}(X) \times p$, c'est-à-dire $mp$. ∎

**C 25** *Soient $p \geq 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_p$ des ensembles finis. Alors l'ensemble produit $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$ est fini et l'on a*

$$\operatorname{card}\left(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p\right) = \operatorname{card}(X_1) \times \operatorname{card}(X_2) \times \cdots \times \operatorname{card}(X_p).$$

*En particulier, si $X$ est un ensemble fini,*

$$\operatorname{card}(X^p) = (\operatorname{card} X)^p.$$

**D 26** Soit $X$ un ensemble. Les éléments de $X^p$ sont appelés ***p*-listes** ou ***p*-uplets** d'éléments de $X$.

**R**

- Les $p$-listes sont aussi appelées **mots**, **listes** ou **suites** de longueur $p$.
- L'ordre des éléments de la $p$-liste est important.
- Une $p$-liste peu contenir plusieurs fois le même élément.
- Il y a $n^p$ $p$-listes d'un ensemble à $n$ éléments.

**E 27** Si $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

- $(1, 2, 2)$ et $(5, 3, 4)$ sont des 3-listes d'éléments de $X$.
- $(5, 3, 4)$ et $(3, 5, 4)$ sont des 3-listes différentes.

**R** Une **suite de $p$ éléments** de $X$

$$(x_1, \dots, x_p) = \left(x_i\right)_{i \in [\![1,p]\!]}$$

est aussi une famille d'éléments de $X$ indexée par $[\![1,p]\!]$, c'est-à-dire une application $f : [\![1,p]\!] \to X$ $\big(f(i) = x_i$ pour $i = 1 \dots p\big)$.

**T 28** *Soient $X, Y$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $n$ et $p$.*
*L'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ des applications de $X$ dans $Y$ est de cardinal $p^n$ :*

$$\operatorname{card}(\mathscr{F}(X, Y)) = (\operatorname{card} Y)^{\operatorname{card} X}.$$

*Démonstration.* Lorsque $X$ est vide, il existe une unique application de $X$ dans $Y$ : celle dont le graphe est vide. La formule est donc correcte, puisque $p^0 = 1$.
Dans le cas contraire, numérotons les éléments de $X$ : $x_1, \ldots, x_n$, ce qui revient à choisir une bijection $i \mapsto x_i$ de $[\![1, n]\!]$ sur $X$. On définit alors une application

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathscr{F}(X, Y) & \to & Y^n \\ & f & \mapsto & \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) \end{array}.$$

Soit $v = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$. Le seul antécédent de $v$ par $F$ est l'application $f : X \to Y$ définie par $f(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n$. Ainsi $F$ est bijective. Le cardinal de $Y^n$ étant $p^n$, on a la conclusion. ∎

**L 29** *Soit $X$ un ensemble. L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de $X$ sur $\mathscr{F}(X, \{ 0, 1 \})$.*

*Démonstration.* À toute fonction $f \in \mathscr{F}(X, \{ 0, 1 \})$, associons la partie $f^{-1}(\{ 1 \})$ de $X$.
Les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathscr{F}(X, \{ 0, 1 \}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(X, \{ 0, 1 \}) & \to & \mathcal{P}(X) \\ f & \mapsto & f^{-1}(\{ 1 \}) \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (regarder les composées dans les deux sens). ∎

**T 30** *Soit $X$ un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de $X$ est fini et*

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\operatorname{card}(X)}.$$

**T 31** *Soient $X$, $Y$ deux ensembles finis, $p = \mathrm{card}(X)$, $n = \mathrm{card}(Y)$.*

- *Si $p \leq n$, le cardinal de l'ensemble $I(X,Y)$ des injections de $X$ dans $Y$ est* [a]

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+2) \times (n-p+1)$$

- *Si $p > n$, il n'y a pas d'injection de $X$ dans $Y$.*

[a]31: Il y a $p$ termes dans ce produit.

**C 32** *Le nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal $n$ est $n!$.*

**R** Soit $X$ un ensemble et

$$\left(x_i\right)_{i\in[\![1,p]\!]} = (x_1, \ldots, x_p)$$

une **suite de $p$ éléments** de $X$, c'est-à-dire une famille d'éléments de $X$ indexée par $[\![1, p]\!]$, ou encore une application $f : [\![1, p]\!] \to X$ $(f(i) = x_i$ pour $i = 1 \ldots p)$.
Avec ces notations les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont distincts si, et seulement si, $f$ est *injective*.

**D 33** Soit $X$ un ensemble.

- Un **$p$-arrangement** d'éléments de $X$ est une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans $X$.
- On appelle aussi **$p$-arrangement** une *$p$-liste d'éléments distincts deux à deux*, c'est-à-dire sans répétition.

Si $\mathrm{card}(X) = n$ et $p \in [\![0, n]\!]$, il existe donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de $p$ éléments de $X$.

**R**

- On dit aussi un **arrangement de $p$ éléments** ou **$p$-liste d'éléments distincts** ou **$p$-uplet d'éléments distincts**.
- L'ordre des éléments d'un $p$-arrangement est important.

**D 34** Soit $X$ un ensemble.

- Une bijection de $X$ dans lui-même s'appelle une **permutation** de $X$.
- Lorsque $X$ est fini, on appelle aussi **permutation** de $X$ une liste formée des $\mathrm{card}(X)$ éléments de $X$.

**P 35** *Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal $n$ est $n!$.*

**D 36** Soit $X$ un ensemble. On appelle **combinaison de $p$ éléments** de $X$, ou $p$-combinaison, toute partie à $p$ éléments de $X$.

**R**

- Les éléments d'une combinaison de $p$ éléments de $E$ sont deux à deux distincts.
- L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

**E 37** Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

- $\{ 1, 2, 3 \}$ est une combinaison de 3 éléments de $X$.
- $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 2, 3, 1 \}$.
- $\{ 1, 2, 2 \}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de $X$.

**P 38** *Soit $X$ un ensemble fini de cardinal $n$. Étant donné un entier $p \in [\![0, n]\!]$, le nombre de parties à $p$ éléments de $X$ est*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p > n$. Avec cette convention, le nombre des parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments est $\binom{n}{p}$ pour *tout* entier naturel $p$.

*Esquisse.* Une $p$-liste d'éléments distincts de $X$ est une permutation d'une combinaison de $p$ éléments de $X$.
Pour chaque façon de choisir une combinaison de $p$ éléments de $X$, il y a $p!$ permutations de ses éléments. On a donc

$$\operatorname{card} I([\![1, p]\!], X) = p! \times \operatorname{card} \mathcal{P}_p(X).$$

$\blacksquare$

**R** Le nombre $\binom{n}{p}$ des parties à $p$ éléments de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est aussi le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

**P 39** *Soit* $(p, n) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
3. $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
4. $\displaystyle p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

**P 40** *Pour tout entier $n$, on a*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

*Démonstration.* Soit $X$ est un ensemble à $n$ éléments. Les $\mathcal{P}_p(X)$, $p = 0 \ldots n$, forment une partition de $\mathcal{P}(X)$. ∎

**P 41** **Relation de Pascal**

*Soient $n$ et $p$ des entiers ; on a*

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

*Démonstration.* Voici une démonstration sans calcul.
Soit $X$ un ensemble de cardinal $n+1$, $a$ un élément de $X$. On note $X' = X \setminus \{ a \}$.

Les parties à $p+1$ éléments de $X$ qui ne contiennent pas $a$ sont les parties à $p+1$ éléments de $X'$ : leur nombre est $\binom{n}{p+1}$.

Celles qui contiennent $a$ s'écrivent de manière unique $A \cup \{ a \}$ où $A$ est une partie à $p$ éléments de $X'$, et leur nombre est donc $\binom{n}{p}$.

∎

D'où la construction par récurrence du tableau des coefficients binomiaux, appelé **triangle de Pascal**

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & p=0 & p=1 & p=2 & \dots & p & p+1 & \dots & p=n & p=n+1 \\
n=0 & 1 & & & & & & & & \\
n=1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
n=2 & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\
n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \\
n & 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \boxed{\binom{n}{p}} & \boxed{\binom{n}{p+1}} & \dots & 1 & \\
n+1 & 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & & \boxed{\binom{n+1}{p+1}} & \dots & \binom{n+1}{n} & 1
\end{array}
$$

**E 42** Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. Par calcul avec la formule du capitaine.
2. Avec une sommation par partition.
3. Par application de la formule du binôme.
4. Par dénombrement.

*Démonstration.* 1. Par calcul. De $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, on tire $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$S = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

∎

2. Par dénombrement. Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. On calcule de deux manières différentes le nombre $B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A$.

On a

$$B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \operatorname{card}(A)=k}} \operatorname{card} A \right).$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les parties $A$ de $E$ de cardinal $k$ sont en nombre $\binom{n}{k}$, donc la somme de leurs cardinaux est $k\binom{n}{k}$. En faisant varier $k$, on trouve

$$B = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = S.$$

L'application $A \mapsto \complement A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$2B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A + \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} \complement A = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \left( \operatorname{card} A + \operatorname{card} \complement A \right) = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} n = n2^n.$$

D'où $S = n2^{n-1}$.

∎

3. Par application de la formule du binôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. En dérivant par rapport à $x$, il vient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

et pour $x = 1$, on obtient $S = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

∎

4. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couple $(A, x)$ avec $\{ x \} \subset A \subset [\![1, n]\!]$. On va calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F})$ de deux façons différentes.

- Tout d'abord, pour former un élément quelconque $(A, x)$ de $\mathcal{F}$, on peut
  Fixer $k$ dans $[\![1, n]\!]$ et choisir $A$ de cardinal $k$: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
  Choisir ensuite l'élément $x \in A$: il y a $k$ possibilités.
  En faisant varier $k$, on trouve alors

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = S.$$

- On peut aussi
  choisir $x \in [\![1, n]\!]$: il y a $n$ possibilités,
  poser $A = \{ x \} \cup A'$ avec $A' \subset [\![1, n]\!] \setminus \{ x \}$: il y a $2^{n-1}$ possibilités.
  par cette méthode, on trouve $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = n2^{n-1}$.

On a donc $S = n2^{n-1}$.