Chapter 7 Calculs algébriques

7.1 Le symbole somme $\sum$

Exercice 7.1

Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Exercice 7.2 (**)

Démontrer par récurrence l'assertion suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 7.3 (***)

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2. Soit $(a_i)_{i=1..n}$ une famille de n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^\star$), montrer

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Exercice 7.4

Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$

8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Exercice 7.5 *Écriture en base b*

Soit $b \geq 2$ un entier. On souhaite démontrer que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k$$

avec $p \geq 0$, $a_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $a_p \geq 1$.

1. Existence: démontrer l'existence en procédant par récurrence forte. Pour l'hérédité, on pourra utiliser la division euclidienne de n par b.

2. Unicité: on suppose que n admet deux décompositions distinctes

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k = \sum_{k=0}^{p'} a'_k b^k.$$

On peut supposer $p \geq p'$. Quitte à compléter la suite a'_k par $a'_{p+1} = \cdots = a'_p = 0$, on peut supposer que $p = p'$.

Soit $\ell \in [\![0, p]\!]$ le plus grand possible tel que $a_\ell \neq a'_\ell$.

(a) Vérifier que $\left(a_\ell - a'_\ell\right) b^\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(a'_k - a_k\right) b^k$.

(b) Démontrer que, pour toute suite finie $c_0, \ldots, c_{\ell-1}$ avec $0 \leq c_k \leq b-1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k b^k < b^\ell.$$

(c) Conclure.

3. Donner l'écriture de 37 écrit en base 10) en base 2, puis en base 3.

Exercice 7.6 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 7.7

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer par récurrence (avec prédécesseurs) que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 7.8

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 7.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 7.10
Calculer
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 7.11

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Exercice 7.12

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

3. En déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

7.2 Sommes usuelles

Exercice 7.13
Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} k.$
2. $\sum_{i=1}^{n} k.$
3. $\sum_{k=1}^{n} i.$
4. $\sum_{k=1}^{n} n.$

Exercice 7.14
Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l;$
2. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1);$
3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1);$
4. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$

Exercice 7.15

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 7.16

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.

2. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer
$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \tag{1}$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{2}$$

Exercice 7.17 (*)

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.

Exercice 7.18

Soit une suite arithmétique (u_n), on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$;
2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$;
3. $r = 6$ et $s_5 = 36$;
4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$;
5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$;
6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

Exercice 7.19

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}$.

2. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx).$$

   On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh.

Exercice 7.20

Définissons une suite par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, u_n est positif. En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $u_n \geq n-2$. En déduire la limite de la suite.

2. Définissons maintenant la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Remarquer que u_n est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de l'entier n.

Exercice 7.21 (*)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

Exercice 7.22
Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Exercice 7.23
Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Exercice 7.24
Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.

2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.

3. Le terme en x^6 du développement de $(3-4x^2)^5$.

4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{14}$.

Exercice 7.25
Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4, dans le développement de

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

Exercice 7.26
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Exercice 7.27
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Exercice 7.28
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.

2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 7.29

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$. Déterminer les dérivées successives de f.

Exercice 7.30

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}\ln(x) \end{array}$.

Exercice 7.31 *BanqueCCINP 2023 Exercice 3 analyse*

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

7.3 Généralisation de la notation $\sum$

Exercice 7.32

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j}$.

2. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2$.

Exercice 7.33

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^{i+j}.$$

Exercice 7.34 (***)

On se donne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j a_k}{j+k}\right) \ge 0.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 7.35

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} ij.$$

Exercice 7.36

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$.

2. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)$.

4. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j}$.

Exercice 7.37

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i + j$.

2. Calculer la somme
$$S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j).$$
On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$.

ue

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note
$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i,j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

7.4 Le symbole produit $\prod$

Exercice 7.38

Calculer

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} k$.

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} i$.

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n$.

Exercice 7.39

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}u_n.$$