# Limite, continuité

# Aperçu

**D 1** Soient $P(y)$ une propriété portant sur un réel $y$ et une application $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ vérifie $P$ **au voisinage de $a$** s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que

$$\forall x \in V \cap X, P\left(f(x)\right).$$

Cette condition s'écrit de manière équivalente

- Si $a \in \mathbb{R}$ :
$$\exists \eta > 0, \forall x \in X \cap ]a-\eta, a+\eta[, P\left(f(x)\right).$$
- Si $a = +\infty$ :
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X \cap ]\omega, +\infty[, P\left(f(x)\right).$$
- Si $a = -\infty$ :
$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X \cap ]-\infty, \omega[, P\left(f(x)\right).$$

**E 2** « $f(x) \geq 0$ pour $x$ au voisinage de $a$ » signifie

- Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies f(x) \geq 0.$$

- Si $a = +\infty$,

$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \omega \implies f(x) \geq 0.$$

On dira aussi dans ce cas « $f \geq 0$ au voisinage de $a$ ».

**E 3** Si $a \in \mathbb{R}$, « $f$ est bornée au voisinage de $a$ » signifie

$$\exists \eta > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq k.$$

Le point fondamental qu'il faut retenir dans ces modes d'expression est que, si l'en a des assertions $P_1(x), \dots, P_n(x)$ *en nombre fini*, et si chacune de ces assertions, prise séparément, est vraie au voisinage de $a$, alors il en est de même de la conjonction logique des relations données ; autrement dit, elles sont *simultanément* vraies au voisinage de $a$.

D 4 **Limite en un point adhérent**

Soient $f : X \to \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $X$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f$ **admet une limite $\ell$ au point $a$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $+\infty$ au point $a$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $-\infty$ au point $a$** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq m.$$

Noter en passant que nous ne supposons pas $a \in X$ : on peut avoir $X = ]0, 1[$ et $a = 0$.

E 5 La fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ a pour limite $10$ au point $2$.

**R** La définition de $f$ admet pour limite $\ell$ en $a$, s'écrit alors de manière générale :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \exists U \in \mathscr{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies f(x) \in V.$$

ou encore,

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \exists U \in \mathscr{V}(a), f(X \cap U) \subset V.$$

Ici $\mathscr{V}(\ell)$ désigne l'ensemble des voisinages de $\ell$ dans $\mathbb{R}$.

D 6

## Limite en $+\infty$

Soient $X$ une partie de $\mathbb{R}$ non majorée, $f : X \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f$ **admet une limite $\ell$ en $+\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq \alpha \implies f(x) \leq m.$$

D 7 **Limite en $-\infty$**

Soient $X$ une partie de $\mathbb{R}$ non minorée, $f : X \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f$ **admet une limite $\ell$ en $-\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $+\infty$ en $-\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que $f$ **a pour limite $-\infty$ en $-\infty$** si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq \alpha \implies f(x) \leq m.$$

**T 8**

## Unicité de la limite

*Si $f$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $a$, alors celle-ci est unique.*

On note alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = \ell$$

ou lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \qquad \lim_{a} f = \ell, \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell, \qquad f \xrightarrow[a]{} \ell.$$

**E 9**

- $\lim_{x \to a} x = a.$
- $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = 10.$

**P 10** *Lorsque* $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$

*En particulier,* $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0.$

**P 11** *Lorsque* $a \neq \pm\infty$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{h \to 0} f(a+h) = \ell.$$

**D 12** Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $I \subset X$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $I$. On dit que $f$ admet une **limite $\ell$ au point $a$ selon $I$** si la restriction de $f$ à $I$ admet une limite $\ell$ en $a$.

On note alors,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \ell \qquad\qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in I}]{} \ell.$$

N

- Lorsque $I = X \cap \,]-\infty, a[$, on parle de **limite à gauche** et on note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \ell \, .$$

- Lorsque $I = X \cap \,]a, +\infty[$, on parle de **limite à droite** et on note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell \, .$$

- Lorsque $I = X \setminus \{ \, a \, \}$, on parle de **limite par valeurs distinctes** et on note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = \ell \, .$$

**E 13** On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$.

**R**

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \ell.$$

**D 14** Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Une partie de $\mathbb{R}$ est un **voisinage à droite** de $a$ si elle contient un intervalle semi-ouvert $[a, a+r[$, avec $r > 0$.
- Une partie de $\mathbb{R}$ est un **voisinage à gauche** de $a$ si elle contient un intervalle semi-ouvert $]a-r, a]$, avec $r > 0$.

**P 15** *Si pour un certain voisinage $V$ de $a$, la restriction de $f$ à $A = X \cap V$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a$, alors $f$ admet pour limite $\ell$ en $a$.*

1. *Si pour un certain $\eta > 0$, la restriction de $f$ à $A = X \cap ]a-\eta, a+\eta[$ admet une limite $\ell$ en $a$, alors $f$ admet une limite $\ell$ en $a$.*
2. *Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, la restriction de $f$ à $A = X \cap ]\alpha, +\infty[$ admet une limite $\ell$ en $+\infty$, alors $f$ admet une limite $\ell$ en $+\infty$.*
3. *Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, la restriction de $f$ à $A = X \cap ]-\infty, \alpha[$ admet une limite $\ell$ en $-\infty$, alors $f$ admet une limite $\ell$ en $-\infty$.*

Ce théorème signifie que pour étudier la limite en un point, il suffit de se placer sur un «petit» voisinage entourant ce point. On dit pour cela que la limite d'une fonction en un point est une **notion locale**.

**E 16** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

- Si $a \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 = \lfloor a \rfloor - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a = \lfloor a \rfloor.$$

  Par conséquent, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet pas de limite au point $a$.

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

  Par conséquent,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

**T 17** **Caractérisation séquentielle des limites d'application**

*Soit* $f : X \to \mathbb{R}$, *a un point adhérent à* $X$ *et* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

*Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. *Pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $X$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \implies \lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right) = \ell.$$

*Ce résultat reste valable avec* $X$ *non majorée (resp. non minorée) et* $a = +\infty$ *(resp.* $a = -\infty$*).*

**C 18** *Si* $a$ *est un point adhérent à* $X$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell$ *est un point adhérent à* $f(X)$.

**E 19** La **fonction de Dirichlet** définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{Dir}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'a de limite en aucun point.

**E 20** Les fonctions $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ admettant une limite finie $\ell$ en $+\infty$ et vérifiant

$$\forall x \in ]0, +\infty[\,, f(x) = f(2x)$$

sont les fonctions constantes.

**T 21** *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
*Si $f$ admet une limite finie $\ell$ en $a$, alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f$ est bornée sur $X \cap V$.*
*Autrement dit, $f$ est bornée au voisinage de $a$.*

**R** Si $a \in \mathbb{R}$, cette propriété s'écrit

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq \mu.$$

Et si $a = +\infty$,

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x > \alpha \implies |f(x)| \leq \mu.$$

**T 24** *Soient $f$ et $g$ deux applications de $X$ dans $\mathbb{R}$. On suppose,*

- *pour $x$ au voisinage de $a$, $f(x) \leq g(x)$,*
- $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$,
- $\lim_a g = m \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$.

*Alors $\ell \leq m$.*

**T 25** **Existence de limite par encadrement**

*Soient* $f, u, v$ *des applications de* $X$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$. *On suppose,*

- *pour* $x$ *au voisinage de* $a$, *on a* $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$,
- $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$.

*Alors* $f$ *admet une limite finie en* $a$ *et* $\lim\limits_{a} f = \ell$.

**R** Ce théorème ne fait pas que donner la limite de $f$ en $a$ : il en assure l'existence.

**T 26** **Existence de limite par domination**

*Soient* $f, g$ *des applications de* $X$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$. *On suppose,*

- *pour* $x$ *au voisinage de* $a$, *on a* $|f(x) - \ell| \leq g(x)$,
- $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

*Alors* $f$ *admet une limite finie en* $a$ *et* $\lim_a f = \ell$.

**C 27** *Si* $\lim_a f = \ell$ *alors* $\lim_a |f| = |\ell|$.

La réciproque est fausse en général.

**T 28** **Existence de limite infinie par comparaison**

*Soient $f, g$ des applications de $X$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour $x$ au voisinage de $a$, on a*

$$f(x) \leq g(x).$$

1. *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2. *Si* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**T 29** **de la limite monotone au bord d'un intervalle**

*Soit $f$ une application croissante définie sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*

1. *Si $f$ est minorée sur $]a,b[$, alors $f$ admet une limite fine en $a$ et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf_{x \in ]a,b[} f(x).$$

   *Si $f$ n'est pas minorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.*

2. *Si $f$ est majorée sur $]a,b[$, alors $f$ admet une limite finie en $b$ et*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f = \sup_{x \in ]a,b[} f(x).$$

   *Si $f$ n'est pas majorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.*

*On a bien sûr un résultat analogue lorsque $f$ est décroissante.*

## T 30 de la limite monotone en un point intérieur

*Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone. Pour tout point $a$ intérieur à $I$, $f$ admet des limites à gauche et à droite en $a$. Plus précisement,*

- *Si $f$ est croissante :*

$$\sup_{\substack{x\in I\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \inf_{\substack{x\in I\\ x>a}} f(x).$$

- *Si $f$ est décroissante :*

$$\inf_{\substack{x\in I\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \sup_{\substack{x\in I\\ x>a}} f(x).$$

**T 31** *Soient $X$ et $Y$ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $X$. On suppose $f(X) \subset Y$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens.*

1. *Si $f$ possède une limite $b$ en $a$, alors $b$ est un point adhérent à $Y$.*
2. *Si de plus $g$ possède une limite $\ell$ (finie ou infinie) en $b$, alors $g \circ f$ admet la limite $\ell$ en $a$.*

*On a un résultat analogue lorsque $a = \pm\infty$ ou $b = \pm\infty$.*

En résumé,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_a f & = & b \\ \lim\limits_b g & = & \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a g \circ f = \ell$$

**T 32** *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a$ un point adhérent à $X$ ou $a = \pm\infty$. On suppose que $f$ et $g$ admette une limite finie au point $a$. Alors $f + g$ admet une limite finie au point $a$ et*

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g.$$

**L 33** *Soient $X$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a$ un point adhérent à $X$ ou $a = \pm\infty$. Le produit d'une application $f : X \to \mathbb{R}$ admettant $0$ pour limite en $a$ et d'une application $g : X \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de $a$ admet pour limite $0$ en $a$.*

**T 34** *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a$ un point adhérent à $X$ ou $a = \pm\infty$. On suppose que $f$ et $g$ admette une limite finie au point $a$.*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f$ admet une limite finie en $a$ et*

$$\lim_a (\lambda f) = \lambda \lim_a (f)\,.$$

2. *La fonction $f \cdot g$ admet une limite finie en $a$ et*

$$\lim_a (f \cdot g) = \left(\lim_a f\right) \cdot \left(\lim_a g\right).$$

3. *Si $\lim_a g \neq 0$, alors $g(x)$ est non nul au voisinage de $x = a$ et*

$$\lim_a \left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{\lim_a g} \qquad \text{et} \qquad \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}.$$

**E 35** Déterminer

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3|x| - 10}{x^2 - 5x + 6}.$$

**L 36** *On suppose* $\lim_a f = +\infty$.

1. *Si* $g$ *est minorée au voisinage de* $a$, *alors* $\lim_a (f+g) = +\infty$.
2. *Si* $g$ *est minorée au voisinage de* $a$ *par un réel* $> 0$, *alors* $\lim_a (f \times g) = +\infty$.

**T 37** *On suppose* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors*

1. *Si* $\ell + m$ *n'est pas une forme indéterminée, alors* $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + m$.
2. *Si* $\ell m$ *n'est pas une forme indéterminée, alors* $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell m$.

**P 38** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

1. *Si $f$ tend vers $\pm\infty$ en $a$, alors au voisinage de $a$, l'application $f$ ne s'annule pas et*
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
2. *Si la restriction de $f$ à $A \setminus \{a\}$ est strictement positive au voisinage de $a$ et si $\lim_a f = 0$, alors*
$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

**N** Si la restriction de $f$ à $A \setminus \{a\}$ est strictement positive au voisinage de $a$ et si $\lim_a f = 0$, on dit que $f$ tend vers $0$ par valeurs supérieures lorsque $x$ tend vers $a$. On note alors traditionnellement $\lim_a f = 0+$.

**T 39** **Croissances comparée en $+\infty$**

*Soit* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et* $a > 1$.

1. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\alpha} = +\infty.$
2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty.$

**T 40** **Croissances comparée en $0$**

*Soit* $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

**P 41**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$$

**D 42** Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. On dit que $f$ est **continue en un point $a$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

ou de manière équivalente $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

**D 43** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

- Si $I \subset X$, on dit que $f$ **est continue sur $I$** si $f$ est continue en tout point de $I$.
- Si $f$ est continue en tout point de $X$, on dit simplement que $f$ **est continue**.

**N** L'ensemble des fonctions continues sur $I$ se note $\mathscr{C}(I)$,$\mathscr{C}^0(I)$ ou encore $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

**E 44** Toute application polynômiale réelle est continue sur $\mathbb{R}$.

**E 45** Les fonctions $\cos$, $\sin$, $\tan$, polynômes, puissances, exponentielles, logarithmes sont continues sur leur domaine de définition.

**E 46** Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est ***k*-lipschitzienne** si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \left| f(x_2) - f(x_1) \right| \leq k \left| x_2 - x_1 \right|.$$

Alors $f$ est continue sur $I$.
En revanche, la réciproque est fausse, par exemple $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas lipschitzienne. Si elle l'était, on aurait entre $0$ et $x > 0$ l'inégalité $x^2 \leq kx$ ce qui devient contradictoire lorsque $x > k$.

**P 47** *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.*

1. *Soit $a$ un point de $I$. Si $f$ est continue en $a$, alors la restriction de $f$ à $I$ est continue en $a$.*
2. *Si $f$ est continue sur $X$, $f$ est continue sur $I$.*

**P 48** *Soient* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $a \in X$. *Si pour un certain* $\eta > 0$, *la restriction de* $f$ *à* $X \cap \,]a-\eta, a+\eta[$ *est continue en* $a$, *alors* $f$ *est continue en* $a$.

**D 49** Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.

1. On dit que $f$ est **continue à gauche** en $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a - \delta \leq x < a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

   ou de manière équivalente

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a).$$

2. On dit que $f$ est **continue à droite** en $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, a < x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

   ou de manière équivalente

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a).$$

**E 50** La fonction partie entière est continue à droite en tout point $a \in \mathbb{R}$.

La fonction partie entière est continue à gauche en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La fonction partie entière n'est pas continue à gauche au point $a$ si $a \in \mathbb{Z}$.

**P 51** *Soit $f$ une application définie au moins sur $X \setminus \{ a \}$ où $a$ est un point intérieur à $X$. On suppose que $f$ admet en $a$ une limite à gauche et une limite à droite égales à un certain $\ell$.*

- *Si $f$ n'est pas définie en $a$, $f$ admet $\ell$ comme limite en $a$.*
- *Si $f$ est définie en $a$, $f$ est continue en $a$ si et seulement si $\ell = f(a)$.*

$$
\begin{aligned}
f \text{ continue en } a &\iff \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a) \\
&\iff f \text{ continue à gauche en } a \text{ et } f \text{ continue à droite en } a
\end{aligned}
$$

**T 52** *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application non définie en $a \in \mathbb{R}$ qui admet une limite finie en $a$, alors en notant $\ell$ cette limite, l'application*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & X \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & x \in X \\ \ell & x = a \end{cases} \end{array}$$

*est continue en $a$. Cette application est appelée* ***prolongement par continuité*** *en $a$ de l'application $f$.*

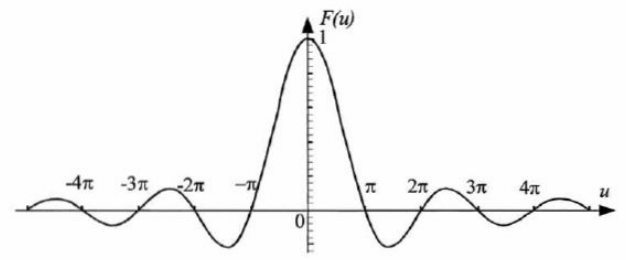
**E 53** L'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

admet pour limite $1$ au point $0$ : elle est donc prolongeable par continuité en une fonction appelée **sinus cardinal**

$$\begin{array}{rccl} \text{sinc} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction apparait fréquemment dans des problèmes de physique ondulatoire.



**T 54** **Caractérisation séquentielle de la continuité**

*L'application $f : X \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ qui converge vers $a$, la suite $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

**E 55** L'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

n'est pas prolongeable par continuité en $0$.

**P 56** *Si une suite $(u_n)$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point $\ell$ et si $f$ admet une limite au point $\ell$, alors nécessairement*

$$\lim_{x\to\ell} f(x) = \ell.$$

*En particulier, si $f$ est continue au point $\ell \in \mathrm{Dom}(f)$, alors nécessairement $\ell$ vérifie l'égalité*

$$\ell = f(\ell).$$

*On dit que $\ell$ est un* ***point fixe*** *de $f$.*

**E 57** Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en $0$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$$

sont les fonctions constantes.

**E 58** **Équation de Cauchy**

Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires.

**T 59** *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f(X) \subset Y$ de sorte que la composée $g \circ f$ ait un sens.*
*Étant donnée $a \in X$, supposons $f$ continue au point $a$ et $g$ continue au point $b = f(a)$, alors la fonction composée*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

*est continue en $a$.*

**T 61** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues au point $a$. Alors $f+g$, $f-g$, $fg$ sont continues au point $a$, ainsi que $f/g$ si $g(a) \neq 0$.*

**C 62** *Les combinaisons linéaires et produits d'applications continues en $a$ sont des applications continues en $a$.*

**T 63** **Opérations dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$**

*Soit $f$ et $g$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{R}$. Alors*

1. *$f+g$ est continue sur $I$.*
2. *Pour tout réel $\lambda$, $\lambda f$ est continue sur $I$.*
3. *$fg$ est continue sur $I$.*
4. *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $I$.*

**C 64** *Soit $f$ et $g$ des applications continues de $A$ dans $\mathbb{R}$. Alors les applications $|f|$, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur $A$.*

**R** La plupart du temps, pour montrer la continuité d'une application sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles, on utilise les opérations sur les applications continues et le catalogue des applications continues classiques et usuelles. Mais en général, quelques points échappent à ces arguments habituels et nécessitent l'étude détaillée de l'expression $|f(x) - f(a)|$ au voisinage d'un tel point $a$. Par exemple : soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $|x| = 0 \iff x = 0$. De plus, l'application $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donc, par composition, $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.

- Pour le point $0$ qui échappe à ces considérations, il est connu que l'on a $\lim_{u \to 0+} u \ln u = 0$ et par suite

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} |x| \ln|x| = 0, \qquad \lim_{x \to 0, x \neq 0} |x \ln|x|| = 0, \qquad \lim_{x \to 0, x \neq 0} f(x) = 0 = f(0)$$

  Par conséquent $f$ possède une limite en $0$ qui n'est autre que $f(0)$ : $f$ est continue en $0$.

*Conclusion :* $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**L 66** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. On suppose que la fonction $f$ prend des valeurs $< 0$ et des valeurs $> 0$.*
*Alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.*

**T 67** **Bolzano 1817 : Théorème des valeurs intermédiaires**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur $\lambda$ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

**T 68** **TVI2 : Image continue d'un intervalle**
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction continue sur $I$. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, de bornes $\inf_I f$ et $\sup_I f$ (éventuellement infinies).*

P 69 **Rappel**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors*

1. *$f$ est injective.*
2. *L'application induite*
$$\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
*est bijective. Sa réciproque est aussi strictement monotone, avec le même sens de monotonie.*
3. *Si $\widetilde{f}$ est impaire, sa réciproque est également impaire.*

$f$ monotone n'entraîne pas $f$ continue.

**R** Les courbes représentatives de $f$ et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

**P 70** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et monotone sur un intervalle $I$. L'image par $f$ du segment d'extrémités $u$ et $v$ est le segment d'extrémités $f(u)$ et $f(v)$.*

**C 71** *Soit $f$ un application continue définie sur $[a, b]$ (avec $a < b$) à valeurs réelles.*

- *Si $f$ est strictement croissante, alors $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
- *Si $f$ est strictement décroissante, alors $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*

**T 72** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Si $f$ est injective, alors $f$ est strictement monotone.*

*Démonstration non exigible.* En exercice. ∎

**T 73** *Soient $f$ une fonction définie, continue, strictement monotone sur un intervalle $I$ et $J = f(I)$ l'image de $I$ par $f$. Alors*

1. *$J$ est un intervalle*
2. *l'application $g : J \to I$, réciproque de l'application $\begin{array}{rcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, est continue et strictement monotone, et de même monotonie que $f$.*

D'après le théorème 72, on peut remplacer l'hypothèse « $f$ strictement monotone» par « $f$ injective».

Ce résultat est faux si l'on ne suppose pas que $I$ est un intervalle.

*Démonstration non exigible.* Traitons le cas où $f$ est croissante.
Soit $b \in J$ et $a = g(b) \in I$. On doit montrer que $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$. Rien n'assure l'existence de cette limite, mais $g$ étant monotone nous allons pouvoir utiliser les limites à gauche et à droite.
Supposons que $b \neq \inf J$ (éventuellement $-\infty$). Comme $g$ est croissante, elle admet une limite à gauche en $b$. De plus, il existe donc $b' \in J$ tel que $\inf J < b' < b$. On a donc [1]

$$g(b') \leq \lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) \leq g(b).$$

Puisque $I$ est un intervalle et $g(b') \in I$ et $g(b) \in I$, on s'assure donc que $\lim\limits_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) \in I$. De plus, $f$ est continue, donc

$$f\left(\lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y)\right) = \lim_{\substack{y \to b \\ <}} f(g(y)) = \lim_{\substack{y \to b \\ <}} y = b = f(a).$$

Puisque $f$ est injective, on en déduit

$$\lim_{\substack{y \to b \\ <}} g(y) = a = g(b).$$

De manière analogue $\lim\limits_{\substack{y \to b \\ >}} g(y) = g(b)$ (lorsque $b \neq \sup J$). Ainsi, on a montré, pour tout $b \in J$,

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b).$$

∎

[1] Dans le cas $g$ est décroissante, il suffit de renverser ces inégalités.

**E 74**

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue, strictement croissante et bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On retrouve ainsi la continuité de son application réciproque $\sqrt{\ }$.
2. Posons $f(x) = x^5 + x$ pour tout $x$ de $[0, 1]$. Cette application est strictement croissante et continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$, l'image de $[0, 1]$ par $f$ est le segment $[0, 2]$. Il existe donc une application continue $\varphi$ de $[0, 2]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $y$ de $[0, 2]$,

$$\varphi^5(y) + \varphi(y) = y.$$

**T 75** **Théorème des bornes atteintes**

*Soient $f$ une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $I$=[a,b]. Alors $f$ est bornée et on peut poser*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

*Alors, il existe des points $u, v \in [a,b]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$. En particulier $f([a,b]) = [m, M]$.*

Autrement dit, $f$ est bornée sur $[a,b]$, elle atteint ses bornes ainsi que toute valeur comprise entre ses bornes. On a donc

$$f([a,b]) = [m, M]$$
$$\text{avec } m = \inf_I f = \min_I f = f(u)$$
$$\text{et } M = \sup_I f = \max_I f = f(v).$$

**T 76** **Image continue d'un segment**

*Soient $f$ une application à valeurs réelles continue sur un segment $I = [a, b]$. Alors l'image $f(I)$ de $I$ par $f$ est un segment.*

**D 77** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est uniformément continue sur $I$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, x_2) \in I^2, |x_1 - x_2| \leq \delta \implies \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \leq \varepsilon.$$

**E 78** Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**P 79** *Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $I$, alors elle est continue sur $I$.*

**T 80** **Théorème de Heine**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ est uniformément continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $I$.*

*Démonstration.* ∎