CHAPITRE 40

DIMENSION

40.1 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

§1 Dimension d'un espace vectoriel

Le point fondamental concernant les espaces vectoriels de dimension finie est que toute base possède le même nombre d'éléments. Cela va nous permettre de définir la dimension d'un espace vectoriel.

Nous devons tout d'abord démontrer le résultat suivant

Théorème 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E ayant n vecteurs. Alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S} = \left(w_1, w_2, \dots, w_{n+1}\right)$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. Chaque vecteur w_i se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n$$

Considérons maintenant une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs - $w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}$:

$$b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n + b_{n+1}w_{n+1} = 0, \quad b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} \in \mathbb{K}.$$

Substituons maintenant w_j par son expression en $v_1, v_2, \dots, v_n$. On a

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_jw_j = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left(b_ja_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} \left(b_ja_{ij}v_i\right);$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j a_{ij}\right) v_i = 0.$$

Autrement dit, on obtient la relation de dépendance linéaire

$$\left(b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + \cdots + b_{n+1} a_{1,n+1}\right) v_1 + \cdots + \left(b_1 a_{n1} + b_2 a_{n2} + \cdots + b_{n+1} a_{n,n+1}\right) v_n = 0$$

La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ étant une famille libre, les coefficients de cette relation de dépendance linéaire sont tous nuls. Cela s'écrit[1]

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1,n+1}b_{n+1} & = 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2,n+1}b_{n+1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{n,n+1}b_{n+1} & = 0 \end{cases}$$

Ainsi $b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n + b_{n+1} w_{n+1} = 0$ si, et seulement si $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$ est solution d'un système homogène de n équations avec $n+1$ inconnues. Ce système admet donc une solution non nulle, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, non tous nuls tels que

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n + b_{n+1} w_{n+1} = 0$$

La famille S est donc une famille liée. ∎

Corollaire 2 *Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de m vecteurs avec $m > n$ est une famille liée.*

Théorème 3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*

Définition 4

Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Il existe un entier n tel que toutes les bases de E possèdent n éléments. On dit que n est la **dimension de E sur le corps** $\mathbb{K}$, ou que E **est de dimension n sur** $\mathbb{K}$.
La dimensions de E sur $\mathbb{K}$ se désigne par la notation $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou simplement par $\dim(E)$ si aucune ambigüité n'est possible sur le corps de base.
Par convention, l'espace vectoriel nul $E = \{ 0 \}$ est de dimension 0.

Exemple 5 La base canonique de $\mathbb{K}^n$ contient n vecteurs.

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est donc de dimension n sur $\mathbb{R}$,
- l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est donc de dimension n sur $\mathbb{C}$.

Exemple 6 L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + yi$$

[1] On peut écrire simplement $Mb = 0$ où $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})^T$ et $M = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(S)$.

signifie que la famille $(1, i)$, formée de deux vecteurs de $\mathbb{C}$, est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemples 7

- Un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2. En effet, il est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants.
- Une droite dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.
- Un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $(n-1)$.

Exemple 8

L'**espace-temps** des physiciens est l'ensemble des couples (v, t) où v est un vecteur d'origine donnée O dans l'espace usuel, et t un nombre réel qu'on appelle le temps. C'est donc le produit cartésien $E \times \mathbb{R}$ où E est l'espace usuel. Celui-ci s'identifie à $\mathbb{R}^4$. Par suite, regardé comme espace vectoriel réel, l'espace-temps est de dimension 4.

Exemple 9

L'espace vectoriel des matrice de type (m, n), $E = \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension $m \times n$. Une base de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est donnée par les matrices ayant tous leur coefficients nuls, sauf un égal à 1.
Par exemple, une base de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ est formée par les matrices

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 10

L'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles $F = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie. Il n'admet donc aucune base finie.
De même, l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

§2 Caractérisation des bases et de la dimension

Lorsque l'on connait par avance la dimension d'un espace vectoriel V, alors nous connaissons le nombre de vecteurs nécessaires pour former une base. Si une famille possède déjà le bon nombre de vecteurs ($\dim V$), alors il *suffit* de montrer que cette famille est libre *ou* montrer que cette famille engendre V pour conclure que c'est une base de V.[2]

[2] Le plus souvent, on montre que la famille est libre et contient $\dim(V)$ vecteurs.

Théorème 11

Caractérisation des bases en dimension finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. *La famille $\left(v_1, v_2, \dots, v_n\right)$ est une base de E.*
2. *La famille $\left(v_1, v_2, \dots, v_n\right)$ est libre et n est la dimension de E.*
3. *La famille $\left(v_1, v_2, \dots, v_n\right)$ est une famille génératrice de E et n est la dimension de E.*

Théorème 12

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et n un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *E est de dimension n.*
2. *n est le plus grand entier tel qu'on puisse extraire de E une famille libre de n vecteurs.*
3. *n est le plus petit entier tel qu'on puisse extraire de E une famille de n vecteurs engendrant E.*

Exemple 13

Reprenons l'exemple du plan W de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\}.$$

La dimension de W est 2 car nous avons déterminer une base contenant deux vecteurs. Si nous choisissons deux vecteurs linéairement indépendant dans W, c'est automatiquement une base de W. Par exemple $v_1 = (1, 2, 1)^T$ et $v_2 = (3, 0, 1)^T$ sont linéairement indépendant (justifier), et le théorème 11 assure donc que $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ est une base de W.

§3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Théorème 14

Soit U et V deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'espace vectoriel produit $U \times V$ est de dimension finie et

$$\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V).$$

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de U et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de V. On pose $E = U \times V$ et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], e_i = (u_i, 0_V) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, p]\!], e_{n+j} = (0_U, v_j).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la famille de $n + p$ vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n+p})$ est une base de E. ∎

40.2 Dimension et sous-espace vectoriel

§1 Théorème de la base incomplète

Test 15 Soit W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors toute famille libre de vecteurs de W est une famille libre de vecteurs de E.

Théorème 16 **Théorème de la base incomplète**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L} = \left(w_1, w_2, \dots, w_r\right) \in E^r$ une famille libre de vecteurs de E, $\mathcal{G} \subset E$ une partie génératrice de E.
Alors il existe des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathcal{G}$ tels que la famille

$$\mathcal{B} = \left(w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_s\right)$$

soit une base de E.

Démonstration. On considère les ensembles

$$A = \left\{ \sigma = (w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_s) \;\middle|\; s \in \mathbb{N} \text{ et } v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathcal{G} \text{ et } \sigma \text{ est libre} \right\}$$
$$\text{et } X = \{ \operatorname{card}(\sigma) \mid \sigma \in A \}.$$

Alors X est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car $\mathcal{L} \in A$ et $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = r \in X$. De plus X est majorée par $\dim(E)$ puisqu'une famille libre de E possède au plus $\dim(E)$ éléments. Ainsi X est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément n. Il existe donc une famille $\mathcal{B} = \left(w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_s\right) \in A$ telle que $r + s = n$. La famille $\mathcal{B}$ est libre, par définition de A.

Montrons que $\mathcal{B}$ engendre E. Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{G}$ tel que $v \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$, alors la famille $\left(w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_s, v\right)$ est une famille libre de E contenant $n+1$ vecteurs. Ainsi $r + s + 1 = n + 1 \in X$, ce qui contredit $n = \max(X)$. Ainsi tout vecteur $v \in \mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$. Autrement dit $\mathcal{G} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{B}$. Or $\operatorname{Vect} \mathcal{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{G}$, donc

$$E = \operatorname{Vect} \mathcal{G} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{B} \subset E.$$

Par double inclusion, $\operatorname{Vect} \mathcal{B} = E$: la famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de E. ∎

Corollaire 17 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Toute famille libre de E peut-être complétée en une base.*
2. *De toute partie génératrice de E, on peut extraire une base.*

§2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 18 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de E. Alors W est de dimension finie et l'on a*

$$\dim(W) \leq \dim(E).$$

De plus $W = E$ si, et seulement si $\dim(W) = \dim(E)$.

Corollaire 19 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V, W deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On suppose $V \subset W$ et* $\dim(V) = \dim(W)$, *alors $V = W$.*

Test 20 Le plan W de $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\}$$

admet pour base (v_1, v_2) où $v_1 = (1, 2, 1)^T$ et $v_2 = (3, 0, 1)^T$.
Soit v_3 un vecteur n'appartenant pas à ce plan. Par exemple on peut choisir $v_3 = (1, 0, 0)^T$, qui n'appartient pas à W puisque ses coefficients ne vérifient pas l'équation $x + y - 3z = 0$. Alors $S = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pourquoi ?

Définition 21

- On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel de dimension 1.
- On appelle **plan vectoriel** un espace vectoriel de dimension 2.
- Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan de E** est un sous-espace vectoriel de E dimension $(n - 1)$.

§3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 22 Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **rang de la famille $\mathcal{F}$** la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les v_i. On a donc

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\,\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}\,\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right).$$

Théorème 23 *Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. alors*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq p \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E).$$

De plus,

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$ *si, et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre.*
2. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ *si, et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.*
3. *Si $\mathcal{F}'$ est une sous famille de $\mathcal{F}$, alors* $\mathrm{rg}\,\left(\mathcal{F}'\right) \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F})$.

40.3 Sommes et dimension

§1 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème 24

Soit $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}\{ v_1, \ldots, v_k \}$ *et* $\operatorname{Vect}\{ v_{k+1}, \ldots, v_n \}$ *sont en somme directe. Autrement dit*

$$\operatorname{Vect}\left\{ v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \right\} = \operatorname{Vect}\{ v_1, \ldots, v_k \} \oplus \operatorname{Vect}\{ v_{k+1}, \ldots, v_n \}.$$

Théorème 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que la somme $U + V$ est directe.
Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ est une base de U et $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ est une base de V. Alors $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ est une base de $U \oplus V$. En particulier

$$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V).$$

La base $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ obtenue par **juxtaposition** des bases de U et V est dite **adaptée** à la décomposition en somme directe $U \oplus V$.

Théorème 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

Ce résultat reste vrai en dimension infinie en admettant l'axiome du choix.

En général, ce supplémentaire n'est pas unique.

§2 Formule de Grassmann

Théorème 27

Formule de Grassmann
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $U + V$ est de dimension finie et

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

§3 Caractérisation dimensionnelle des sous-espaces supplémentaires

Théorème 28

Caractérisation en dimension finie
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = U \oplus V$.
2. $E = U + V$ *et* $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.
3. $U \cap V = \{ 0 \}$ *et* $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.

Exemple 29 Soit D et D' deux droites vectorielles distinctes du plan $E = \mathbb{R}^2$. Alors $E = D \oplus D'$.

Exemple 30 Dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$. Soient respectivement D une droite vectorielle et P un plan vectoriel ne contenant pas D. Alors $V = D \oplus P$.

40.4 Bases et dimension dans $\mathbb{K}^n$

§1 Sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice

Soit $S = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et A la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_p$. La matrice A est donc de type (n, p).

Pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$, on a

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p.$$

Proposition 31 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, l'image de A est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Si, l'on note $c_1, c_2, \dots, c_p$ les colonnes de A, on a donc*

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_p c_p \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Ainsi, S engendre $\mathbb{K}^n$ si le système $Ax = v$ a une solution pour tout $v \in \mathbb{R}^n$; c'est-à-dire si le système $Ax = v$ est compatible pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Remarque Le sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A (considérée comme des vecteur de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire transposée) porte parfois le nom (en python, etc...) de *row space*.

§2 Indépendance linéaire dans $\mathbb{K}^n$

Soit $S = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et A la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_p$. Pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$, on a

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0.$$

Nous pouvons savoir si S est libre en considérant le noyau de A.

Proposition 32 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $v_1, v_2, \dots, v_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ formant les colonnes de A. Alors, la famille $S = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est libre si, et seulement si le système $Ax = 0$ a pour unique solution $x = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si* $\ker(A) = 0$.

Exemple 33 $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, -1)$, $v_3 = (2, -5)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il y a une variable libre, la sol générale est $x = (t, -3t, t)$ en particulier, avec la relation

$$Ax = tv_1 - 3tv_2 + tv_3 = 0,$$

on a $v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$.

§3 Bases de $\mathbb{K}^n$

Théorème 34 *Soit A une matrice carrée (n, n). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible,*
2. $\mathrm{rg}(A) = n$*,*
3. *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,*
4. *Les lignes de A (écrites en colonnes) forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

§4 Image et noyau d'une matrice

Soit A la matrice $(4, 5)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de A est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La forme échelonnée réduite (par ligne) de la matrice A est donnée par

$$A \underset{L}{\sim} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Test 35 Effectuer ce calcul.

Le noyau de A est l'ensemble des solution de $Ax = 0$ avec $x = (x_1, \dots, x_5)^T$. En observant R, on peut utiliser les variables libres $x_3 = s$ et $x_5 = t$, les solutions sont de $Ax = 0$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+3t \\ -2s-t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = sv_1 + tv_2, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Test 36

Vérifier les calculs. Vérifier que $Av_1 = 0$ et $Av_2 = 0$.

Alors (v_1, v_2) est une base de $\ker(A)$. Dans cet exemple $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension 2. Ici, $\dim(\ker A) = 2 = n - r$, où $n = 5$ est le nombre de colonnes de A et $r = 3$ est son rang.

Déterminons maintenant une base de $\mathrm{Im}(A)$.

L'équivalence

$$Ax = 0 \iff Rx = 0$$

s'interprète en disant que les colonnes de A et les colonnes de R vérifient les même relation de dépendance linéaire.

Par exemple, notons c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 les colonnes de A.

- Les colonnes 1, 2 et 4 de la matrice R sont linéairement indépendantes (ce sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$). Les colonnes c_1, c_2, c_4 de la matrice A forment donc également une famille libre.

- La troisième colonne de R est clairement combinaison linéaire des deux première, on retrouve la même relation pour les colonnes de A:

$$-3c_1 + 2c_2 = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = c_3.$$

- De manière analogue, $c_5 = -3c_1 + c_2 + 3c_4$.

Test 37

Il faut examiner cela minutieusement.

Alors, si nous choisissons les colonnes de A correspondant aux positions des pivots dans la forme échelonnée réduite, c'est-à-dire c_1, c_2, c_4, alors, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants.

Car si l'on effectue les même opération que sur A, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous avons un pivot dans chaque colonne.... : la famille c_1, c_2, c_4 est libre.

Si l'on ajoute un des vecteurs c_3 ou c_5, ce n'est plus le cas, et la famille est liée. Puisque c_3 et c_5 sont combinaison linéaire de c_1, c_2, c_4, on a

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left\{ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ c_1, c_2, c_4 \right\}.$$

De plus, la famille (c_1, c_2, c_4) est libre: nous avons trouvé une base de $\operatorname{Im}(A)$. Donc $\operatorname{Im}(A)$ est de dimension 3.

Méthode

Si A est une matrice (m, n) dont les colonnes sont $c_1, \dots, c_n$ et que dans la forme échelonnée réduite par ligne de A, les pivots sont dans les colonnes $i_1, i_2, \dots, i_r$. Alors une base de $\operatorname{Im}(A)$ est

$$B = \left(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}\right).$$

Cette base de $\operatorname{Im}(A)$ est constitué de colonnes de A, *non pas* des colonnes de la matrice échelonnée réduite.

Exemple 38

Soit B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La forme échelonné réduite de B est (vérifiez!)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquez encore que les colonnes de B et E satisfont les même relation de dépendance linéaire:

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2, \text{ et } c_4 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2.$$

Test 39

Vérifier le calcul précédent. Justifier qu'une base de $\operatorname{Im}(B)$ est donc $(1, 2, 9)^T, (1, 0, -1)^T$.

Théorème 40

Si A est une matrice (n, p), alors $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$.

§5 Théorème du rang pour les matrices

Théorème 41

Théorème du rang pour les matrices
Si A est une matrice (m, n), alors

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\ker A) = n.$$

Test 42

Utiliser les relations de dépendance linéaire entre les colonnes de B pour déterminer deux vecteurs du noyau de B linéairement indépendants.
Utilise le théorème du rang pour conclure qu'ils forment une base de $\ker(B)$.

§6 Le rang des lignes est égal au rang des colonnes

Les lignes d'une matrice de type (m, n) engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et, de même, ses colonnes engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$. Ces deux sous-espaces vectoriels ne sont pas comparables si $m \neq n$ car ils sont contenus dans deux espaces disjoints. Nous allons démontrer maintenant une chose étonnante : ils ont la même dimension.

Proposition 43 *Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ une matrice. Alors le rang de ses vecteurs lignes est égal au rang de ses vecteurs colonnes.*

Démonstration. Notons $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes de sorte que

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$

Notons r le rang de la famille $(L_1, L_2, \dots, L_m)$ dans $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^n$. Il existe donc une base $(b_1, \dots, b_r)$ de $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, \dots, L_m)$. Les lignes sont des combinaisons linéaires des vecteurs de cette base. Ainsi

$$\begin{cases} L_1 = \lambda_{11} b_1 + \lambda_{12} b_2 + \cdots + \lambda_{1r} b_r \\ L_2 = \lambda_{21} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \cdots + \lambda_{2r} b_r \\ \quad \vdots \\ L_m = \lambda_{m1} b_1 + \lambda_{m2} b_2 + \cdots + \lambda_{mr} b_r \end{cases} \tag{40.1}$$

Chacune de ces équations est une égalité entre n-uplets, que l'on peut donc écrire composante par composante. Notons

$$b_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n}), \qquad b_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2n}), \qquad \dots \qquad b_r = (\beta_{r1}, \beta_{r2}, \dots, \beta_{rn}).$$

La première composante de chaque équation du système (40.1) donne

$$C_1 = \beta_{11} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + \beta_{21} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_{r1} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}.$$

De même, pour $k \in [\![1, p]\!]$, la k-ième composante du système donne

$$C_k = \beta_{1k} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + \beta_{2k} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_{rk} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, les colonnes de A sont de combinaisons linéaires des r vecteurs

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}.$$

Donc le rang des colonnes de A est majoré par r, c'est-à-dire par le rang des lignes. Que le rang des lignes soit majoré par le rang des colonnes se démontre de manière analogue, d'où l'égalité de ces deux rangs. ∎

Théorème 44

Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ une matrice. Alors

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^T\right).$$

Exemples 45

1. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1.$
2. $\operatorname{rg} A = 0$ si et seulement si $A = 0_{n,p}$.
3. Pour mieux apprécier ce qu'il y a d'étonnant dans le résultat précédent, on a

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

   Ainsi, il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes et cela ne saute pas aux yeux!

40.5 Bases de polynômes à degrés échelonnés

Théorème 46

et définition
L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

- *La famille $(1, X, \dots, X^n)$ en forme la **base canonique**.*
- *La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est donc $n+1$.*

L'ensemble des polynômes de degré exactement n *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

Définition 47

Famille de polynômes de degrés échelonnés
Soient $n \in \mathbb{N}$. Une famille de polynômes $\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$ est dite de **degrés échelonnés** (ou **degrés étagés**) si

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n).$$

Proposition 48

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, non nuls *et de dégrés échelonnés. Alors $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.*

Théorème 49

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \deg\left(P_k\right) = k.$$

Alors $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque

Avec des arguments analogues, on prouve :

- Si les polynômes P_k sont non nuls et si $\deg P_0, \dots, \deg P_n$ sont deux à deux distincts, alors la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.
- Si $\deg P_0, \dots, \deg P_n$ prennent toutes les valeurs de 0 à d, alors $P_0, \dots, P_n$ engendre $\mathbb{K}_d[X]$.

Exemple 50

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors la famille

$$\left(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.