Chapter 5 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

5.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

5.2 Logarithmes, exponentielles

Solution 5.1

Cette équation est définie pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2\}$.

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\iff \ln|x+1| \leq \ln|2x+1| + \ln 2 \\
&\iff \ln|x+1| \leq \ln(2|2x+1|) \\
&\iff |x+1| \leq 2|2x+1| && \text{car ln est strictement croissante} \\
&\iff (x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2 \\
&\iff 15x^2 + 14x + 3 \geq 0 && \text{en développant.}
\end{aligned}$$

Le polynôme $15X^2 + 14X + 3$ a pour discriminant 16 et pour racines $-3/5$ et $-1/3$. Son coefficient dominant étant positif, il est à valeurs positive «à l'exterieur des racines».

Conclusion

En prenant en considération l'ensemble de définition D, l'inéquation

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

a pour ensemble de solutions

$$S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

Solution 5.2

Solution 5.3

Solution 5.4

1. $e^{3\ln 5} = 5^3 = 125$.
2. $e^{-2\ln 3} = 3^{-2} = 1/9$.
3. Pour $x > 0$, $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)} = 2\frac{x}{2} - 2\frac{x}{2} = 0$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x > 0$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Pour $x \neq 1$, $e^{2\ln|x-1| - 3\ln(x^2+1)} = \dfrac{(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^3}$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x \neq 1$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 5.5

Solution 5.6

Compte tenu du fait que l'on a $e^{2x} = (e^x)^2$ et que e^x est positif quel que soit x, il apparait que l'équation proposée admet autant de solutions que le système suivant:

$$\begin{cases} e^x = u \\ f(u) = u^2 - 4mu + 2m + 2 = 0 \\ u > 0. \end{cases}$$

Pour que l'équation $f(u) = 0$ ait des racines, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} \Delta &= 16m^2 - 8m - 2 = 8(2m^2 - m - 1) \\ &= 8(m-1)(2m+1) \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$m \leq -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m \geq 1.$$

Comme, d'autre part, le produit et la somme des racines, u_1 et u_2, de cette équation (en supposant la condition précédente remplie) ont respectivement pour valeur $P = 2(m+1)$ et $S = 4m$, on voit immédiatement apparaître les conclusions suivantes, relatives à l'équation proposée:

- Pour $m < -1$, on a $u_1 < 0 < u_2$ (quitte à échanger u_1 et u_2) ; seule u_2 est acceptable et donne $e^x = u_2$, d'où $x = \ln u_2$.

- Pour $-1 \leq m < 1$, l'équation $f(u) = 0$ a deux racines négatives (si $-1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$) ou n'en a aucune (si $-\frac{1}{2} < m < 1$); dans les deux cas, l'équation proposée n'a pas de solution.

- Pour $m > 1$, on a $0 < u_1 < u_2$; donc deux valeurs pour x sont solutions de l'équation proposée, à savoir $x_1 = \ln u_1$ et $x_2 = \ln u_2$.

- Lorsque $m = 1$, on a $u_1 = u_2 = 2$ et l'équation proposée admet une seule soltion : $x = \ln 2$.

Solution 5.7

La fonction f est clairement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

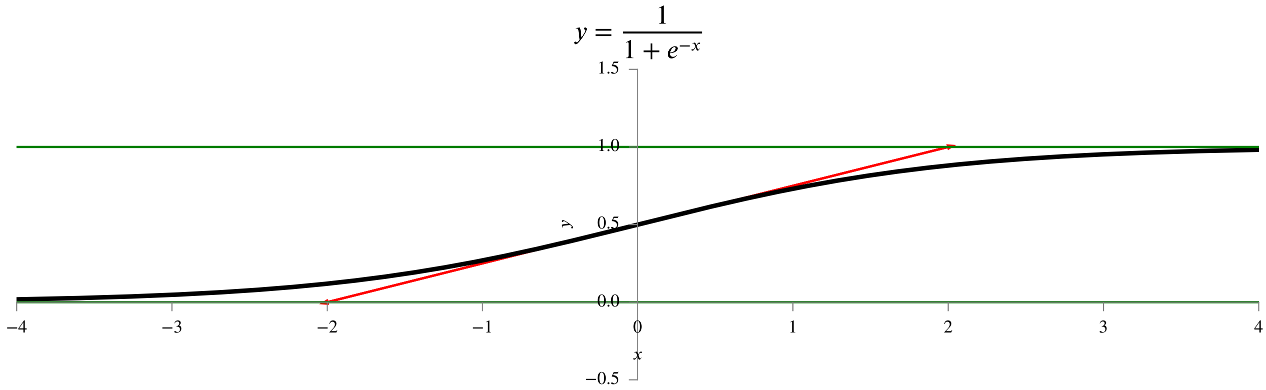
donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Les droites

$$\mathcal{A}_1 : y = 0 \text{ et } \mathcal{A}_2 : y = 1$$

sont asymptote à la courbe de f.



Solution 5.8

L'équation $(E)\,:\,8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff \left(8^{3x}\right)^2 - 3\left(8^{3x}\right) - 4 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 3X - 4$ a pour discriminant $25 = 5^2$, et pour $X \in \mathbb{R}$,

$$X^2 - 3X - 4 = 0 \iff X = -1 \text{ ou } X = 4.$$

Finalement,

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff 8^{3x} = -1 \text{ ou } 8^{3x} = 4$$

La première relation est impossible ; et puisque ln est injective,

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0 \iff 8^{3x} = 4 \iff 3x \ln 8 = \ln 4 \iff 9x \ln 2 = 2 \ln 2 \iff x = \frac{2}{9}.$$

Conclusion

L'équation $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ admet une unique solution qui est $\frac{2}{9}$.

Solution 5.9

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \iff \left(x^2 - x\right)\ln a \leq x - 1 \iff (\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1 \leq 0.$$

- Si $a = 1$, $(E) \iff x \geq 1$. L'ensemble solution de (E) est alors $\mathcal{S} = [1, +\infty[$.
- Si $a \neq 1$, le trinôme du second degré $(\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1$ a pour discriminant $(\ln a)^2 + 2\ln a + 1 - 4\ln a = (\ln a)^2 - 2\ln a + 1 = (\ln a - 1)^2$; ses racines sont donc

$$\frac{\ln a + 1 - \ln a + 1}{2\ln a} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln a + 1 + \ln a - 1}{2\ln a} = 1.$$

  - Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathcal{S} =]-\infty, 1/\ln a] \cup [1, +\infty[$.
  - Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathcal{S} = [1, 1/\ln a]$ si $1 < a < e$ et $\mathcal{S} = [1/\ln a, 1]$ si $a > e$.

Solution 5.10

1. En fait, c'est une question de cours!!!

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\varphi_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est dérivable et on a

$$\varphi_a'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

qui est du signe de $\ln a$. Nous distinguons alors trois cas.

- Si $a = 1$, φ_a est constante égale à 1.
- Si $a > 1$, φ_a est strictement croissante et

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi_a'(x)$		$+$	$\ln a$	$+$	
$\varphi_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$, φ_a est strictement décroissante et

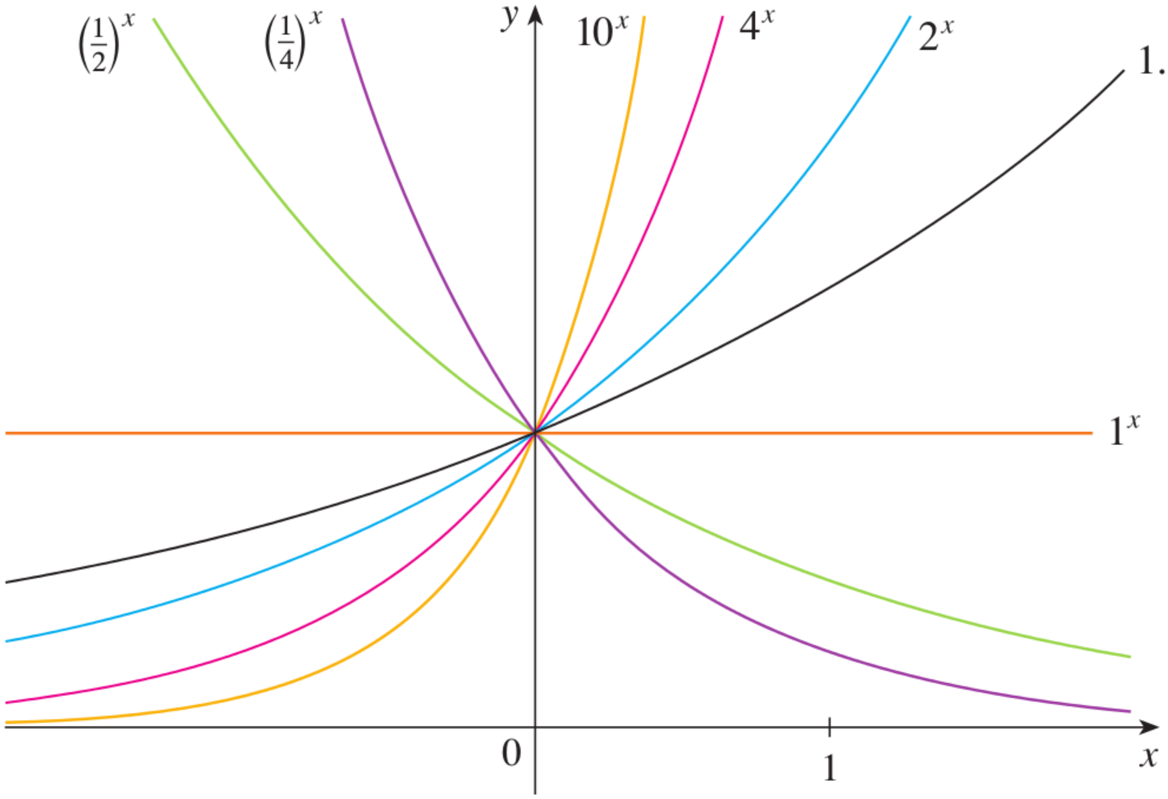
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0.$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi_a'(x)$		$-$	$\ln a$	$-$	
$\varphi_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



2. L'étude précédente montre que l'application $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; l'application f est donc injective. Or $f(1) = 2^1 + 3^1 = 5$, donc

$$2^x + 3^x = 5 \iff f(x) = 5 \iff f(x) = f(1) \iff x = 1.$$

Conclusion

L'équation $2^x + 3^x = 1$ admet pour ensemble solution $\mathcal{S} = \{ 1 \}$.

Solution 5.11

1. f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

   variations:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$-\infty$

2. Puisque ln est injective,

$$a^b = b^a \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \iff f(a) = f(b).$$

   D'après le tableau de variation, f ne peut prendre qu'au plus deux fois la même valeur et, si c'est le cas, une fois sur $]1, e[$ et l'autre fois sur $]e, +\infty[$.

   Nécessairement $1 < a < e < b$ et comme a est entiers, il ne peut valoir que 2.

   Reste à trouver b tel que $f(b) = \ln(2)/2$: on trouve facilement $b = 4$.

Solution 5.13

1. L'équation est définie pour $x > -1/3$. Alors

$$\begin{aligned}
& 2\log_4(x+1)+\log_4(x+3) = \log_4(6x+2)+1/2 \\
\iff\ & 4^{2\log_4(x+1)+\log_4(x+3)} = 4^{\log_4(6x+2)+1/2} && \because x \mapsto 4^x \text{ est injective} \\
\iff\ & (x+1)^2(x+3) = (6x+2)\times 2 \\
\iff\ & x^3+5x^2+7x+3 = 12x+4 \\
\iff\ & x^3+5x^2-5x-1 = 0 \\
\iff\ & (x-1)(x^2+6x+1) = 0 && \because 1 \text{ est solution apparente} \\
\iff\ & x=1 \text{ ou } x=-3-2\sqrt{2} \text{ ou } x=-3+2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Or $-3-2\sqrt{2} \leq -1/3$, donc l'ensemble-solution est

$$\mathcal{S} = \left\{ 1, 2\sqrt{2}-3 \right\}.$$

2. L'équation est définie pour $x > 0$. Posons $X = \ln x$. Nous cherchons tout d'abord à résoudre l'équation $2X^3 - 9X^2 - 2X + 9 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

Une solution apparente est $X = 1$, on peut écrire

$$2X^3 - 9X^2 - 2X + 9 = (X-1)(2X^2 - 7X - 9).$$

Le discriminant de $2X^2 - 7X - 9$ est $121 = 11^2$, ses racines sont donc $\frac{7-11}{4} = -1$ et $\frac{7+11}{2} = \frac{9}{2}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
2\ln^3 x - 9\ln^2 x - 2\ln x + 9 = 0 &\iff \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = -1 \text{ ou } \ln x = \frac{9}{2} \\
&\iff x = e \text{ ou } x = e^{-1} \text{ ou } x = e^{9/2}.
\end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble solution de l'équation $2\ln^3 x - 9\ln^2 x - 2\ln x + 9 = 0$ est $\mathcal{S} = \left\{ 1/e, e, e^{9/2} \right\}$.

3. L'équation est définie si $1 - x > 0$ et $4 - 2x > 0$, c'est-à-dire pour $x < 1$.

Soit $x < 1$. Puisque ln est injective

$$\ln(1-x) = \ln(4-x) \iff 1 - x = 4 - 2x \iff x = 3.$$

La dernière assertion étant toujours fausse (on a $x < 1$), l'équation n'admet pas de solution.

Solution 5.14

1. L'inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Puisque ln est strictement croissante

$$3^x \leq 2^x \iff x\ln 3 \leq x \ln 2 \iff x(\ln 3 - \ln 2) \leq 0 \iff x \leq 0.$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]-\infty, 0]$.

2. L'inéquation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on a $2^x+1 \geq 1$). L'application $x \mapsto 2^x = e^{x\ln 2}$ est strictement croissante car $\ln 2 > 0$. D'où

$$\log_2(2^x+1) < x+1 \iff 2^x+1 < 2^{x+1} \iff 1 < 2\times 2^x - 2^x$$
$$\iff 1 < 2^x \iff 0 < x\ln 2 \iff 0 < x.$$

L'inéquation $\log_2(2^x+1) < x+1$ a pour ensemble solution $\mathscr{S} =]0, +\infty[$.

3. L'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est définie pour $x > 0$ ($x^{(x^2)} = \exp(x^2 \ln x)$). On a alors,

$$\begin{aligned} x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x &\iff x^2\ln x \leq x\ln x^2 && \because \ln \text{ est strictement croissante}\\ &\iff x^2 \ln x \leq 2x\ln x\\ &\iff x\ln x \leq 2\ln x && \because x>0\\ &\iff (x-2)\ln x \leq 0.\end{aligned}$$

Résumons à l'aide d'un tableau de signes :

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est donc $\mathscr{S} = [1, 2]$.

Solution 5.15

1. On a $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, $7^6 = 117649$, $7^7 = 823543, \ldots$
Ainsi,
$$50^0 < 7^p < 50^1 \iff 1 < 7^p < 50 \iff p \in \{\, 0, 1, 2 \,\}$$
d'où $I_0 = 3$.
De même,
$$50^1 < 7^p < 50^2 \iff 50 < 7^p < 2500 \iff p \in \{\, 3, 4 \,\}$$
d'où $I_1 = 2$.
Enfin,
$$50^2 < 7^p < 50^3 \iff 2500 < 7^p < 125000 \iff p \in \{\, 5, 6 \,\}$$
d'où $I_2 = 2$.

2. Supposons $50^n < 7^p < 50^{n+1}$. La fonction ln est strictement croissante, on a donc
$$n\ln 50 < p\ln 7 < (n+1)\ln 50$$
d'où
$$n\frac{\ln 50}{\ln 7} < p < (n+1)\frac{\ln 50}{\ln 7}$$
Or l'intervalle $\left[n\frac{\ln 50}{\ln 7}, (n+1)\frac{\ln 50}{\ln 7}\right]$ a pour longueur $\frac{\ln 50}{\ln 7}$ et $2 < \frac{\ln 50}{\ln 7} < 3$; il contient donc 2 ou 3 entiers. C'est-à-dire $I_n = 2$ ou $I_n = 3$.

5.3 Fonctions puissances

Solution 5.17

Cette équation est définie pour $x \in]0, +\infty[$.

On peut penser à passer sous forme exponentielle, mais cela ne simplifie par grand chose. Ou alors faire un changement d'inconnue ($X = x^{1/12}$ par exemple) mais on ne sait par résoudre l'équation $X^3 + 2X^{20} - 3 = 0$.

Néanmoins, ce permet de remarquer que $x = 1$ est une solution apparente de l'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} = 3$. Nous allons montrer que c'est la seule solution.

Pour $x > 0$, posons $f(x) = x^{1/4} + 2x^{5/3}$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions (usuelles) strictement croissantes (on peut également dériver f et trouver $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} + \frac{10}{3}x^{2/3} > 0$).

La fonction f est donc injective : l'équation $f(x) = 3$ a donc zéro ou une solution. Puisque $f(1) = 3$, on en déduit.

Conclusion

L'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0$ a pour unique solution $x = 1$.

Solution 5.18

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
x^{(x^x)} = (x^x)^x &\iff x^x \ln(x) = x \ln(x^x) && \because \ln \text{ est injective}\\
&\iff x^x \ln(x) = x^2 \ln(x)\\
&\iff x^x = x^2 \text{ ou } \ln(x) = 0\\
&\iff x\ln(x) = 2\ln(x) \text{ ou } x = 1 && \because \ln \text{ est injective}\\
&\iff x = 2 \text{ ou } x = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ dans $]0, +\infty[$ sont est

$$\mathscr{S} = \{ 1, 2 \}.$$

Solution 5.19

1. L'équation (E) : $\mathrm{e}^{3x} - 5\,\mathrm{e}^{2x} - 6\,\mathrm{e}^{x} = 0$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Puisque $e^x \neq 0$, $(E) \iff e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$.

   L'équation $X^2 - 5X - 6 = 0$ a pour discriminant 49 et pour solutions $X = -1$ et $X = 6$. Finalement,

   $$\begin{aligned}
   (E) &\iff e^x = -1 \text{ ou } e^x = 6\\
   &\iff x = \ln 6 && \because e^x > 0.
   \end{aligned}$$

   Conclusion

   L'équation (E) a pour unique solution 6.

2. L'inéquation (E) : $\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{6}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

   Puisque exp est strictement croissante,

   $$(E) \iff e^{x^2+x} < e^6 \iff x^2 + x < 6 \iff x^2 + x - 6 < 0.$$

Or le trinôme x^2+x-6 a pour racine -3 et 2 et pour coefficient dominant 1. Il prend donc des valeurs <0 si, et seulement si $x \in]-3,2[$.

Conclusion

L'ensemble solution de l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{6}$ est $]-3,2[$.

3. L'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ est définie pour $x>0$.

Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} && \because \ln \text{ est injective}\\
&\iff \sqrt{x}\ln x = \frac{1}{2}x\ln x\\
&\iff \ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{1}{2}x\\
&\iff \ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 2 = \sqrt{x}\\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = -4 \text{ ou } x = 4\\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 && \because x>0
\end{aligned}$$

Conclusion

Les solution de (E) sont 1 et 4 .

4. L'équation $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$ est définie pour $x\in\mathbb{R}$. Chaque membre est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ et la fonction ln est injective, d'où

$$2^{(x^3)} = 3^{(x^2)} \iff x^3\ln 2 = x^2\ln 3 \iff x^2 = 0 \text{ ou } x\ln 2 = \ln 3 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Conclusion

Lest solutions de l'équation $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$ sont 0 et $\log_2(3)$.

5. La fonction $\log_a$ n'a de sens que pour $a>0$ avec $a\neq 1$; dans ce cas, elle est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.

L'équation $\log_a x = \log_x a$ est donc définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\log_a x = \log_x a &\iff \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x}\\
&\iff (\ln x)^2 = (\ln a)^2 \iff \ln x = \ln a \text{ ou } \ln x = -\ln a \iff x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Conclusion

Les solutions de l'équation $\log_a x = \log xa$ sont a et $\frac{1}{a}$.

6. L'équation $\log_3 x - \log_2 x = 1$ est définie pour $x>0$.

$$\begin{aligned}
\log_3 x - \log_2 x = 1 &\iff \frac{\ln x}{\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 2} = 1\\
&\iff \frac{\ln 2\ln x - \ln 3\ln x}{\ln 3\ln 2} = 1 \iff \ln\frac{2}{3}\ln x = \ln 3\ln 2 \iff x = e^{\frac{\ln 3\ln 2}{\ln(2/3)}}.
\end{aligned}$$

Conclusion

L'équation $\log_3 x - \log_2 x = 1$ admet une unique solution qui est $\boxed{e^{\frac{\ln 3 \ln 2}{\ln(2/3)}}}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation $(E)\ :\ 2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots 3^{x+n}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 2^x \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^x \left(2^{n+1} - 1\right) \qquad (1)$$

$$\text{et } 3^x + 3^{x+1} + \cdots 3^{x+n} = 3^x \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 3^x \frac{3^{n+1}-1}{2}. \qquad (2)$$

Puisque ln est injective,

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 2^x \left(2^{n+1} - 1\right) = 3^x \frac{3^{n+1}-1}{2} \\
&\iff x \ln 2 + \ln\left(2^{n+1} - 1\right) = x \ln 3 + \ln(3^{n+1} - 1) - \ln 2 \\
&\iff \ln\left(2^{n+2} - 2\right) - \ln\left(3^{n+1} - 1\right) = x(\ln 3 - \ln 2) \\
&\iff x = \boxed{\frac{\ln(2^{n+2} - 2) - \ln(3^{n+1} - 1)}{\ln 3 - \ln 2}}.
\end{aligned}$$

Solution 5.20
Solution 5.21

5.4 Fonctions hyperboliques

Solution 5.23

Mettre le membre de droite sous forme exponentielle et développer brutalement...

Solution 5.29

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh} x = m \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x - e^{-x} = 2m \iff e^x - 2m - e^{-x} = 0$$

Or $e^x \neq 0$, d'où, en multipliant par e^x la dernière égalité,

$$\operatorname{sh} x = m \iff e^{2x} - 2me^x - 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2mX - 1$ a pour discriminant $4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1) > 0$ et pour racine

$$m - \sqrt{m^2+1} < 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2+1} > 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x = m &\iff e^x = \underbrace{m - \sqrt{m^2+1}}_{<0} \text{ ou } e^x = m + \sqrt{m^2+1} \\
&\iff \boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $\operatorname{sh} x = m$ admet pour unique solution $x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$. L'application sh est donc bijective et

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sh}^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x = m \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = m \iff e^x + e^{-x} = 2m$$
$$\iff e^x - 2m + e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 2me^x + 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour discriminant $4m^2 - 4 = 4(m^2-1)$.

  - Si $m < 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = m$ n'a pas de solution (on le savait).
  - Si $m = 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = 1$ a une seule solution $x = 0$ (on le savait aussi).
  - Si $m > 1$, alors le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour racine

$$m - \sqrt{m^2-1} > 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2-1} > 0.$$

On a donc

$$\operatorname{ch} x = m \iff e^x = m - \sqrt{m^2-1} \text{ ou } e^x = m + \sqrt{m^2-1}$$
$$\iff x = \ln\left(m - \sqrt{m^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(m + \sqrt{m^2-1}\right).$$

L'équation $\operatorname{ch} x = m$ admet deux solutions si $m > 1$, qui sont $x = \ln\left(m \pm \sqrt{m^2-1}\right)$.

Conclusion

L'application ch n'est donc pas bijective.

Solution 5.30 *Fonction argument tangent hyperbolique*

5.5 Fonctions hyperboliques réciproques