Chapitre 48

Espaces préhilbertiens réels, Espaces vectoriels euclidiens

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels en jeu sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

48.1 Produit scalaire

§1 Définition

Définition 1 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$. On dit que φ est un **produit scalaire** sur E si φ vérifie les conditions que voici :

1. φ est **bilinéaire**, c'est-à-dire,
   - pour tout $b \in E$, l'application $f(*, b) : x \mapsto f(x, b)$ est linéaire,
   - pour tout $a \in E$, l'application $f(a, *) : y \mapsto f(a, y)$ est linéaire.
2. φ est **symétrique**, c'est-à-dire
$$\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \varphi(x, y).$$
3. φ est **définie positive**, c'est-à-dire
$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies \varphi(x, x) > 0.$$

En pratique, pour montrer la bilinéarité d'une application symétrique, il suffit de montrer la linéarité à droite. Montrer que φ est définie positive revient à montrer

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \text{ et } (\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0).$$

Définition 2

On appelle **espace préhilbertien réel** tout couple (E, φ) où E est un espace vectoriel réel et φ est un produit scalaire sur E.
On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Notation

Les produits scalaires sont souvent notés de façon infixe : $\langle x, y\rangle$ pour $\varphi(x, y)$. On utilise également les notations suivantes

$$(x, y), \qquad < x|y >, \qquad (x|y), \qquad < x, y >, \qquad x \cdot y.$$

Exemple 3

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2.$$

On vérifie que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4

Premières propriétés
Soit $(E, \langle *, * \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. $\forall x \in E, \langle x, 0_E\rangle = 0$ *et* $\langle 0_E, x\rangle = 0$.
2. *Si x est un vecteur tel que*
$$\forall y \in E, \langle x, y\rangle = 0$$
on a alors $x = 0_E$.
3. *Si x et y sont deux vecteurs tels que*
$$\forall z \in E, \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$$
on a alors $x = y$.

§2 Norme euclidienne

Dans la suite, On considère un espace préhilbertien réel non nul $(E, \langle *, * \rangle)$.

Définition 5

On définit la **norme euclidienne** d'un vecteur x de E associée au produit scalaire par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

On dit qu'un vecteur est **unitaire** lorsque sa norme est 1.

Si $x \neq 0$, alors

$$u = \frac{x}{\|x\|}$$

est un vecteur unitaire ayant même direction que x. On dit que l'on a «normalisé» le vecteur x.

§3 Exemples fondamentaux

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Il s'agit de la forme bilinéaire définie en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

et la norme de x est donc le réel

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Cela montre que $\langle x, x \rangle$ est positif et que $\langle x, x \rangle$ est nul si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Si l'on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a avec $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i = X^T Y$$

La norme de X est donc le réel

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{X^T X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$$

Produit scalaire sur les matrices

Sur $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{np}$; il est donc naturel de prendre comme produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} b_{i,j}.$$

où $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Test 6

Vérifier que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} b_{i,j} = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right).$$

Produits scalaires sur les polynômes

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p_i q_i \qquad \text{où } P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^{n} q_i X^i. \tag{48.1}$$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \tag{48.2}$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t. \tag{48.3}$$

Test 7 Justifier que nous avons bien défini des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Produit scalaire fonctionnel

On peut définir sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ un produit scalaire en posant

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La linéarité, symétrie et positivité ne pose aucun problème. Le seul point non trivial est le caractère défini de cette forme bilinéaire (donc celui sur lequel on vous attend) ; on a *absolument* besoin de la continuité des fonctions en jeu.

Si $\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, la fonction f^2, continue et à priori positive, est nécessairement nulle sur $[a, b]$; il en est donc de même de f.

Cet exemple est fondamental. En effet, il montre qu'il est possible de faire travailler les concepts de la géométrie «classique» sur des espaces qui à priori n'ont rien de géométrique. Le produit scalaire précédent se généralise à ceux de la forme

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\varrho(t)\,\mathrm{d}t,$$

où ϱ est une application continue sur $[a, b]$, à valeurs positives, et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points (par exemple $t \mapsto \sin nt$). Cette généralisation est très riche.

Produit scalaire associé à une base

E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, la donnée d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ permet de définir un produit scalaire noté $\langle *, * \rangle_{\mathscr{B}}$ en posant pour tout couple de vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_1 e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$\langle x, y \rangle_{\mathscr{B}} = \sum_{x=1}^{n} x_i y_i.$$

Ainsi, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'un produit scalaire.

§4 Identité remarquables

Proposition 8 *Soient $(E, \langle *, * \rangle)$ un espace préhilbertien réel, x, y des vecteurs de E et λ, μ des nombres réels.*

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
4. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
5. $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y\rangle$.
6. *Identité du parallélogramme :*
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$
7. *Identité de polarisation :*
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).\end{aligned}$$

Remarques

- Si x est un vecteur non nul de E, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire.
- Toute droite vectorielle contient exactement deux vecteurs unitaires : u et $-u$.

§5 Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Théorème 9 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soit x et y deux vecteurs de E, alors $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, soit
$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\| \, \|y\|,$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.
De plus, on a l'égalité $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

Démonstration. Les résultats demandés sont évidents si $y = 0_E$. Si $y \neq 0_E$, on considère la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$p(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$
La fonction polynômiale p est de degré 2 car $\|y\| \neq 0$; étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, son discriminant est ≤ 0, c'est-à-dire
$$\langle x, y\rangle^2 - \|x\|\|y\| \leq 0,$$
d'où encore l'inégalité voulue.

L'égalité $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ signifie que p a un discriminant nul, donc p s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un nombre réel t_0 tel que $p(t_0) = 0$, c'est-à-dire tel que $\|x + t_0 y\| = 0$, ou encore tel que $x + t_0 y = 0_E$. Cela prouve l'avant dernier résultat.

Enfin, si $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, on vient de voir que $x = -t_0 y$; donc

$$\|x\|\|y\| = \langle x, y\rangle = -t_0\|y\|^2;$$

or ce nombre est positif si et seulement si t_0 est ≤ 0 ; cela prouve que x et y sont colinéaires et de même sens. La réciproque est immédiate. ∎

Théorème 10 **Inégalité de Minkowski**

Quels que soient les vecteurs x et y de E,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Théorème 11

Quels que soient les vecteurs x et y de E,

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Plus généralement, on a

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

§6 Distance associée à un produit scalaire

Définition 12

On définit la **distance euclidienne** de deux vecteurs x, y (ou de deux points…) de E en posant

$$\mathrm{d}(x, y) = \|y - x\|.$$

Proposition 13

Quels que soient les vecteurs x, y, z de E,

1. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
2. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.
3. $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
4. $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

48.2 Familles orthogonales

§1 Vecteurs orthogonaux

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'autre part de définir l'**angle non orienté** de deux vecteurs non nuls x et y, comme étant égal au nombre réel θ de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta.$$

La notion d'angle telle que nous l'introduisons dépend donc du produit scalaire. On retrouve ainsi l'expression «classique» du produit scalaire vue au collège.

Définition 14 Les vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** pour $\langle *, *\rangle$, et on note $x \perp y$, lorsque

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Cela revient à dire que leur angle géométrique est égal à $\pi/2$.

Théorème 15 **Égalité de Pythagore**
Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Proposition 16 *Soient x et y deux vecteurs de E.*

1. *Propriété des losanges :*

$$\|x\| = \|y\| \iff x + y \perp x - y.$$

2. *Propriété des rectangles :*

$$\|x + y\| = \|x - y\| \iff x \perp y.$$

§2 Famille orthogonale

Définition 17 Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E est **orthogonale** si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies \langle x_i, x_j\rangle = 0$$

Si de plus, les vecteurs x_i sont unitaires, on dit que la famille est **orthonormale** (ou **orthonormée**), ce qui revient à écrire

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Cette définition s'étend de manière naturelle aux familles quelconques de vecteurs de E.

L'égalité de Pythagore se généralise aux familles orthogonales finies.

Proposition 18 *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale,*

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Toutefois, la réciproque est fausse.

Test 19 Trouver une famille de trois vecteurs x, y, z non orthogonale telle que

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Théorème 20 *Toute famille orthogonale de E constituée de vecteurs non nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.*

§3 Bases orthogonales — Bases orthonormales

Définition 21 On appelle **base orthogonale** de E toute base de E qui est aussi une famille orthogonale. On appelle **base orthonormale** de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormale.

Proposition 22 *Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de n vecteurs, alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.*

48.3 Orthogonalité

§1 Orthogonal d'une partie ; sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 23 Soient A et B deux parties de E. On dit que A et B sont **orthogonales** si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B c'est-à-dire

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0.$$

Définition 24 Soit A une partie de E, on appelle **sous-espace orthogonal** de A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

$$A^\perp = \{\, x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0 \,\}$$

Exemple 25 Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul, alors $\{\, a \,\}^\perp$ est le plan vectoriel d'équation $\langle a, (x, y, z) \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$P : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Pour $a \in A$, il est usuel de noter $a^\perp$ au lieu de $\{\, a \,\}^\perp$. On a alors $a^\perp = \ker\langle a, * \rangle$.

Proposition 26 *Soient A et B deux parties de E.*

1. $E^{\perp} = \{ 0_E \}$ *et* $\{ 0_E \}^{\perp} = E$.
2. $A \perp B \iff A \subset B^{\perp} \iff B \subset A^{\perp}$.
3. $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. [a]
4. $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
5. $A \cap A^{\perp} = \{ 0_E \}$.

[a] Il n'y a pas forcément égalité, même lorsque A est un sous-espace vectoriel.

Théorème 27 *Pour toute partie $A \subset E$, $A^{\perp}$ est un* sous-espace vectoriel *de E égal à* $(\text{Vect } A)^{\perp}$.

Corollaire 28 *Soit $F = \text{Vect}\left\{ x_1, \dots, x_p \right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{ y_1, \dots, y_q \right\}$ deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$F \perp G \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, q]\!], \langle x_i, y_j \rangle = 0.$$

Exemple 29 Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $u = (1, 2, -1)$ et $v = (1, 0, 1)$. On pose $S = \text{Vect}(u, v)$. Pour $a = (x, y, z) \in E$,

$$\begin{aligned}
a \in S^{\perp} &\iff \langle a, u \rangle = 0 \text{ et } \langle a, v \rangle = 0 \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ -2y + 2z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= z \end{cases} \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R}, (x, y, z) = t(-1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$S^{\perp} = \text{Vect}\left\{ (-1, 1, 1) \right\}.$$

Test 30 Soient E est un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

1. $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
3. Donner un exemple où l'inclusion réciproque est fausse.

§2 Supplémentaire orthogonal

Théorème 31 et définition

Soient E est un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. S'il existe un sous-espace vectoriel $G \subset E$ tel que

$$E = F \oplus G \qquad \text{et} \qquad F \perp G,$$

*alors $G = F^{\perp}$; on l'appelle **supplémentaire orthogonal** de F.*

On note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$; le symbole d'orthogonalité au dessus de l'opération de somme directe signifie que l'on a une décomposition orthogonale de l'espace E.

Démonstration. Supposons $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Alors $G \subset F^{\perp}$. Inversement, soit $x \in F^{\perp}$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$, alors $y = x - z \in F \cap F^{\perp}$, donc $y = 0_E$ et $F^{\perp} \subset G$. ∎

§3 Projecteurs et symétries orthogonales

Définition 32

Soient E un espace préhilbertien réel.

- Un projecteur p de E est dit **orthogonal** si son image et son noyau sont orthogonaux. Dans ces conditions, on dira que p est le **projecteur orthogonal** de E sur le sous-espace $F = \operatorname{Im} p$.
- Une symétrie s de E est dite **orthogonale** si $\ker\left(s - \mathrm{Id}_E\right)$ et $\ker\left(s + \mathrm{Id}_E\right)$ sont orthogonaux.

Remarque

1. Si p est un projecteur orthogonal, $E = \ker p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} p$.
2. Si p est un projecteur, la symétrie $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est orthogonale si, et seulement si p l'est. (On a $\ker\left(s - \mathrm{Id}_E\right) = \operatorname{Im} p$ et $\ker\left(s + \mathrm{Id}_E\right) = \ker p$.)
3. Si p est un projecteur, $q = \mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur, il est orthogonal si, et seulement si p l'est : $\ker q = \operatorname{Im} p$ et $\ker p = \operatorname{Im} q$.

Les propriétés suivantes sont celles des projections et des symétries.

Proposition 33

Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$. Notons p_F le projecteur orthogonal sur F et s_F la symétrie orthogonal par rapport à F. Alors

1. $p_F(x) = y \iff \big(y \in F$ *et* $x - y \in F^\perp\big)$.

2. $\operatorname{Im} p_F = F$ *et* $\ker p_F = F^\perp$.

3. $p_F(x) = x \iff x \in F$.

4. $p_F(x) = 0_E \iff x \in F^\perp$.

5. $s_F(x) = x \iff x \in F$.

6. $s_F(x) = -x \iff x \in F^\perp$.

7. $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.

8. $s_F + \mathrm{Id}_E = 2p_F$.

9. $p_F \circ p_F = p_F$.

10. $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$.

11. $s_{F^\perp} = -s_F$, *c'est-à-dire* $s_F \circ s_{F^\perp} = s_{F^\perp} \circ s_F = -\mathrm{Id}_E$.

§4 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Définition 34 Soient A une partie non vide d'un espace euclidien E et $x \in E$. On définit la **distance de x à A** en posant

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf \{\ \mathrm{d}(x, y) \mid y \in A\ \} = \inf \{\ \|x - y\| \mid y \in A\ \}.$$

Souvent, on cherche s'il existe un point $a \in A$ réalisant le minimum de ces distances, c'est-à-dire tel que

$$\|x - a\| = \mathrm{d}\,(x, A)\,.$$

En général, la réponse à cette question est négative. Lorsqu'un tel a existe, il constitue une **meilleure approximation** de x dans A.

Théorème 35 *Soient E un espace préhilbertien réel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire orthogonal. Pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{d}\,(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2},$$

p_F étant le projecteur orthogonal sur F ; de plus

$$\forall y \in F,\ \mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(x, y) \iff y = p_F(x).$$

Autrement dit, il existe un unique vecteur $y \in F$ tel que $\mathrm{d}(x, F) = \|x - y\|$, à savoir $y = p_F(x)$.

Nous verrons que se résultat s'applique dès que F est de dimension finie.

48.4 ALGORITHME DE GRAM-SCHMIDT

§1 Algorithme de Gram-Schmidt

Théorème 36 *Soient E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille* ***libre*** *de vecteurs de E. Il existe une et une seule famille* orthonormale *$(u_1, \dots, u_p)$ telle que*

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) \qquad et \qquad \langle u_k, v_k \rangle > 0.$$

Cette famille peut être construite de proche en proche par l'algorithme de Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

puis pour $i \geq 1$,

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle u_k, v_{i+1} \rangle u_k$$
$$u_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{\|w_{i+1}\|}.$$

Définition 37 La famille $(u_1, \dots, u_p)$ obtenue par ce procédé est appelée **orthonormalisée de Gram-Schmidt** de la famille $(v_1, \dots, v_p)$.

Exemple 38 Dans $E = \mathbb{R}^4$, déterminer une base orthonormale pour le sous-espace vectoriel engendré par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le fait d'imposer aux vecteurs de la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'être unitaires oblige à chaque étape à diviser chaque vecteur w_i par sa norme, qui s'exprime comme racine carrée d'un carré scalaire, et oblige souvent à traîner des radicaux dans les calculs. On peut préférer l'orthogonalisation de Schmidt, en conservant la famille $(w_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui est cette fois orthogonale, triangulaire par rapport à $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ (et vérifie $\langle w_i, v_i \rangle > 0$ pour tout i). L'algorithme d'obtention s'écrit alors (ne pas oublier de diviser par les carrés des normes)

$$w_1 = v_1 \text{ et } \forall i \geq 2, w_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle w_k, v_i \rangle \frac{w_k}{\|w_k\|^2}.$$

§2 Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien

Remarque Dans l'algorithme de Gram-Schmidt, si l'on part d'une base $(v_1, \dots, v_n)$, on obtient une base orthonormale $(v_1, \dots, v_n)$.

Théorème 39 *Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.*

Théorème 40 **Théorème de la base orthonormale incomplète**
Soient E est un espace vectoriel euclidien et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille orthonormale de E. Il existe des vecteurs $v_{p+1}, \dots, v_n$ dans E tels que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ soit une base orthonormale de E.

Remarque Ainsi, lorsque E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire orthogonal. Nous généraliserons ce résultat un peu plus tard.

Démonstration. La famille $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre, donc, d'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver de vecteurs $v_{p+1}, \dots, v_n$ dans E tels que la famille $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ soit une base de E. On peut alors appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à $\mathscr{B}$ pour obtenir une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de E. Remarquons simplement que par ce procédé, les premiers vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathscr{B}$ restent inchangés puisqu'ils forment déjà une famille orthonormale. ∎

48.5 Calculs en base orthonormale

§1 Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Théorème 41 *Soient E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour x et y, on note ici x_i et y_i les i-ièmes coordonnées dans $\mathscr{B}$ de x et y. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.*
2. *$\forall x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \langle e_i, x \rangle$.*
3. *$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.*
4. *$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

Corollaire 42 *Soient E est un espace vectoriel euclidien $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Étant donnés deux vecteurs x et y de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, on a*

$$\langle x, y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \textit{en particulier,} \quad \|x\| = X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Corollaire 43 *Soient E est un espace vectoriel euclidien $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Pour tout vecteur $x \in E$,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i.$$

On en déduit l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2. \tag{Parseval}$$

§2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Théorème 44 *Soient E est un espace préhilbertien réel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de* dimension finie. *Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires:*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \qquad \text{et} \qquad \left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale *de F, le projeté orthogonal de x sur F est donnée par*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Corollaire 45 *Sous les même hypothèses, la projection orthogonale de x sur $F^\perp$ est donnée par*

$$p_{F^\perp}(x) = x - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Corollaire 46 *Soient E est un espace vectoriel* euclidien *et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp, \qquad \dim F + \dim F^\perp = \dim E, \qquad \left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $F^\perp$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exemples 47 Soient E un espace euclidien, ω un vecteur *unitaire* et H l'hyperplan orthogonal à ω.

1. La projection orthogonale sur $D = \mathbb{R}\omega$ est l'endomorphisme de E
$$p_D : x \mapsto \langle \omega, x \rangle \omega.$$
2. La projection orthogonale sur H est l'endomorphisme de E
$$p_H : x \mapsto x - \langle \omega, x \rangle \omega.$$
3. La symétrie orthogonale par rapport à $D = \mathbb{R}\omega$ est l'endomorphisme de E
$$s_D : x \mapsto 2\langle \omega, x \rangle \omega - x.$$
4. La symétrie orthogonale par rapport à H est l'endomorphisme de E
$$s_H : x \mapsto x - 2\langle \omega, x \rangle \omega.$$

Définition 48

- La symétrie orthogonale par rapport à la droite D s'appelle encore **retournement** d'axe D ou **demi-tour** d'axe D.
- La symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H s'appelle encore **réflexion** d'hyperplan H.

Pour les curieux, une affinité dont la base est un hyperplan s'appelle une **transvection**.

Remarque Les matrices des projections et des symétries orthogonales relativement à une *base orthonormale* sont symétriques. Cela peut s'expliquer.

Remarque Dans l'algorithme de Gram-Schmidt,

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle u_k, v_{i+1} \rangle u_k$$

est en fait le projeté orthogonal de v_{i+1} sur l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\,\{\, v_1, \dots, v_i \,\} = \mathrm{Vect}\,\{\, u_1, \dots, u_i \,\}$ dans $\mathrm{Vect}\,\{\, v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \,\}$. On a donc

$$w_{i+1} = v_{i+1} - p_{\mathrm{Vect}\{\, v_1,\dots,v_i \,\}}(v_{i+1}).$$

§3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Corollaire 49 *Soient E un espace préhilbertien réel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors*

$$\mathrm{d}\,(x, F)^2 = \left\| x - p_F(x) \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| p_F(x) \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle^2. \tag{48.4}$$

$$\textit{et}\ \ \mathrm{d}\left(x, F^{\perp}\right)^2 = \left\| p_F(x) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle^2. \tag{48.5}$$

Exemples 50 Soient E un espace euclidien, ω un vecteur *unitaire*, $D = \mathbb{R}\omega$ et H l'hyperplan orthogonal à ω.

$$\mathrm{d}(x, H) = |\langle \omega, x \rangle| \ \text{ et } \ \mathrm{d}(x, D)^2 = \|x\|^2 - \langle \omega, x \rangle^2$$

48.6 Matrices orthogonales

§1 Définition

Définition 51 Soit P une matrice carrée d'ordre n. On dit que P est un **matrice orthogonale** lorsque

$$P^T P = P P^T = I_n,$$

c'est-à-dire, si P a pour inverse P^T.

Notation L'ensemble des matrices orthogonales de type (n, n) est noté $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{O}(n)$ et est appelé **groupe orthogonal réel de degré n**.

Proposition 52 *$\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 53 La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Test 54 Vérifiez !

§2 Caractérisations des matrice orthogonales

Lemme 55 *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $M^T M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est la matrice dont le terme général d'indice (i, j) est le produit scalaire canonique des colonnes de M d'indices i et j. En notant $M = (C_1, \dots, C_p)$, on a*

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], (M^T M)[i, j] = C_i^T C_j = \langle C_i, C_j \rangle.$$

Théorème 56 *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *M est orthogonale.*
2. *M^T est orthogonale.*
3. *Les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.*
4. *$M^T M = I_n$.*
5. *M est inversible et $M^{-1} = M^T$.*
6. *$M M^T = I_n$.*
7. *Les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.*

⚠On prendra garde au fait que si les colonnes (ou les lignes) d'une matrice forment une famille orthogonale, la matrice n'est pas forcément orthogonale !

Exemple 57 Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

§3 Matrice de changement de base orthonormée

Théorème 58 *Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. La matrice des coordonnées de la famille S relativement à la base $\mathcal{B}$ est donnée par*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p) = \begin{pmatrix} \langle e_1, w_1\rangle & \langle e_1, w_2\rangle & \dots & \langle e_1, w_p\rangle \\ \langle e_2, w_1\rangle & \langle e_2, w_2\rangle & \dots & \langle e_2, w_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, w_1\rangle & \langle e_n, w_2\rangle & \dots & \langle e_n, w_p\rangle \end{pmatrix} = \big(\langle e_i, w_j\rangle\big)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}.$$

Théorème 59 *Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ est orthonormée si, et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.*

Définition 60

- Deux matrices carrées $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont **orthogonalement semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = D$.
- Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = D$.

CHAPITRE 48

COMPLÉMENTS

48.7 ORTHOGONAL DES NOYAUX ET IMAGES DE MATRICES

Des résultats qui n'apparaissent pas dans le programme, mais à savoir redémontrer rapidement.

Théorème 61

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\ker\left(M^T\right) = \operatorname{Im}(M)^{\perp} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}\left(M^T\right) = \ker(M)^{\perp}.$$

Théorème 62

Pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

1. $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2. $\ker\left(A^T A\right) = \ker(A)$.
3. $\operatorname{rg}\left(A^T A\right) = \operatorname{rg}(A)$.
4. $\operatorname{Im}\left(A^T A\right) = \ker(A)^{\perp}$.

Théorème 63

Soit A une matrice (n, p) de rang p. Alors la matrice $P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ est la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im}(A)$.

48.8 Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème 64 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Étant donnée une forme linéaire f sur E, c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un vecteur ω et un seul dans E tel que $f = \langle \omega, * \rangle$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E, f(x) = \langle \omega, x \rangle.$$

Plus précisément, l'application

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ \omega & \mapsto & \varphi_\omega : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle \omega, x \rangle \end{array} \end{array}$$

est un isomorphisme.

⚠ Ce théorème est faux lorsque E est un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension infinie.

Lorsque ω est non nul, le noyau de $\varphi_\omega = \langle \omega, * \rangle$ est un hyperplan qui coïncide avec l'orthogonal de $\{ \omega \}$ (ou de la droite $\mathbb{R}\omega$).

Inversement, soit H un hyperplan d'un espace euclidien E. On sait qu'il existe une forme linéaire non nulle f, unique à un scalaire multiplicatif non nul près, tel que

$$H = \ker f.$$

Comme il existe un vecteur non nul $\omega \in E$ tel que $f = \langle \omega, * \rangle$, on a alors

$$H = \omega^\perp.$$

Le vecteur ω engendre une droite vectorielle, appelée **normale** à l'hyperplan H. Comme $\omega \notin H$, on a la décomposition de l'espace

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Vect} \{ \omega \}.$$

48.9 Exemples de familles orthogonales de polynômes

48.10 Inégalité de Bessel

Proposition 65 **Inégalité de Bessel.**
Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de vecteurs de E. Pour tout $x \in E$, la suite $\big(\langle e_n, x\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} \langle e_n, x\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$