Fonctions de deux variables réelles, limite, continuité

Aperçu

1. Applications de deux variables réelles
2. Limite en un point, continuité
3. Champs de vecteurs
4. Propriétés
5. Aspects topologiques
6. Topologie de l'espace $\mathbb{R}^2$
7. Notion d'homéomorphisme

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Rappelons que pour toutes applications f et g de $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les lois naturelles

- $f+g$ est la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)+g(x,y)$,
- $f \times g = fg$ est la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)g(x,y)$,
- $\lambda \cdot f$ est la fonction $(x,y) \mapsto \lambda f(x,y)$,
- Si g ne s'annule pas sur A, f/g est la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)/g(x,y)$.

Muni de ces lois, nous connaissons déjà le résultat suivant

P 1

1. *L'ensemble $(\mathscr{F}(A,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif.* [a]
2. *L'ensemble $(\mathscr{F}(A,\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

[a] 1. $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ n'est pas un anneau intègre si $\operatorname{card} A \geq 2$.

E 2

1. Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax+by \end{array}, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

   sont des fonctions réelles de deux variables réelles.

2. Les **fonctions polynomiales de deux variables réelles**, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\substack{p=0\dots n \\ q=0\dots m}} a_{p,q} x^p y^q \end{array}, \quad \text{où} a_{p,q} \in \mathbb{R}.$$

3. Les **fonctions rationnelles de deux variables réelles**, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \end{array},$$

   où P et Q sont des fonctions polynomiales de deux variables et
   $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) \neq 0 \right\}$.

D 3 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, et $a = (x_0, y_0) \in A$. Les **applications partielles de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$** sont les fonctions d'une seule variable réelle

$$f(*, y_0) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array} \qquad \text{où } I = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x, y_0) \in A \right\},$$

et

$$f(x_0, *) : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array} \qquad \text{où } J = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x_0, y) \in A \right\}.$$

On a une définition analogue lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, notamment avec les valeurs numériques ou les applications coordonnées, on note ces applications simplement f_{y_0} et f_{x_0}.

E 4 Soit

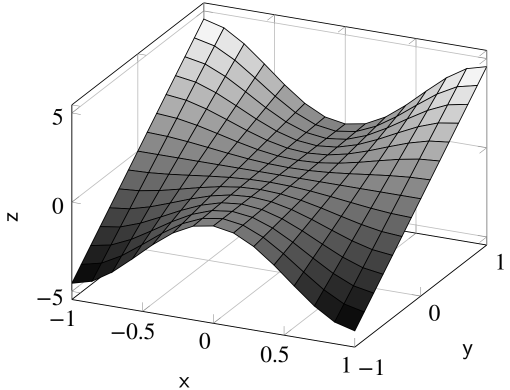
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{(y-4)\sin(x)}{x^2+y^2+1}. \end{array}$$

1. La première application partielle en $a = (\pi, 1)$ est $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-3\sin(x)}{x^2+2} \end{array}$.
2. La seconde application partielle en $a = (\pi, 1)$ est $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 0 \end{array}$.

Une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ admet une représentation graphique, qui est une surface représentative, à savoir

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y) \right\}.$$

Figure: $z = 5xy\sin(2x)$.



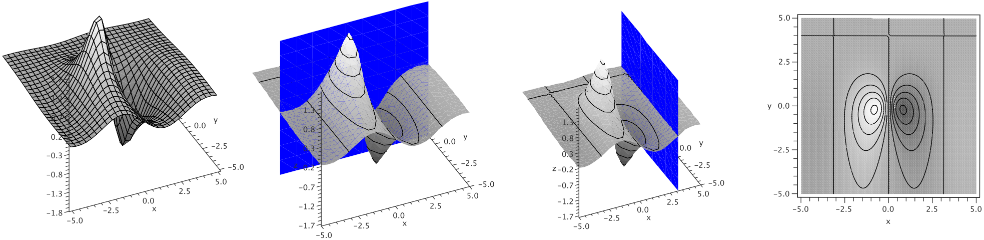
Les courbes représentatives des fonctions partielles $t \mapsto f(t, y_0)$ s'interprètent comme l'intersection du plan $y = y_0$ et de la surface représentative de f. De même, les courbes représentatives des fonctions partielles $t \mapsto f(x_0, t)$ sont les intersections de la surface représentative de f avec le plan $x = x_0$.

D 5 La **courbe de niveau** λ de l'application f est l'ensemble

$$C_\lambda = \{\ (x,y) \in A \mid f(x,y) = \lambda\ \} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est l'intersection de la surface représentative de f avec le plan $z = \lambda$. Dans une représentation graphique, pour une meilleure lisibilité, on colore souvent les zones entre les courbes de niveau dans différents tons. En physique, on parle de courbe équipotentielle.

$$z = \frac{(y-4)\sin(x)}{x^2+y^2+1}$$



R

Définition générale de limite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (par exemple deux espaces vectoriels euclidiens). Soit A une partie de E, a un point adhérent à A et $b \in F$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| \leq \delta \implies \|f(z) - b\| \leq \varepsilon.$$

Lorsque cette limite existe, elle est unique. On note cette propriété

$$\lim_a f = b \quad \text{ou} \quad \lim_{z \to a} f(z) = b.$$

D 6 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A et $b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| \leq \delta \implies |f(z) - b| \leq \varepsilon.$$

Lorsque cette limite existe, elle est unique. On note cette propriété

$$\lim_{a} f = b, \quad \lim_{z \to a} f(z) = b, \quad \text{ou} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b \text{ si } a = (x_0, y_0).$$

⚠ Faire tendre $z = (x, y)$ vers $a = (x_0, y_0)$ *ne revient pas* à faire tendre x vers x_0 puis y vers y_0 ou le contraire ou toute autre invention malsaine.

D 7 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.
- Soit X une partie de A. On dit que f est **continue sur X** si f est continue en tout point de X.
- Lorsque f est continue sur son ensemble de définition A, on dit simplement que f est **continue**.

Formellement, $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

P 8 *L'application $\|*\|$ et les projections canoniques*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\| \end{array} , \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} , \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array} ,$$

sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

T 9 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et f une application de A dans $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que,*

- *pour $z \in A$ au voisinage de a, $|f(z) - b| \leq g(z)$,*
- $\lim\limits_{z \to a} g(z) = 0$

Alors $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b$.

On pourrait également énoncer un théorème de convergence par encadrement.

E 10 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|x| \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

L'application f est donc continue en $(0, 0)$.

D 11 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, une partie $X \subset A$, a un point adhérent à X et $b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet b pour **limite** en a **suivant** X si la fonction $f|_X$ admet b pour limite en a, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in X, \|z - a\| < \delta \implies |f(z) - b| < \varepsilon.$$

On a une définition analogue pour $f : A \to \mathbb{R}^2$.

On note cette propriété $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in X}} f(z) = b$.

P 12 *Avec les notations de la définition. Si* $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b$*, alors* $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in X}} f(z) = b$.

La réciproque est bien sûr totalement fausse.

E 13 Considérons l'application $f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pour $y \neq 0$, on a $f(0,y) = 0$. Autrement dit, la restriction de f à la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par la droite Δ d'équation $x = 0$ est identiquement nulle ; sa limite au point $(0,0)$ est 0. La seule limite *possible* pour f en $(0,0)$ est donc 0. Montrons que c'est bien le cas !
Pour tout $(x,y) \in A$, on a

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{3x^2}{\|(x,y)\|} + \frac{|xy|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{3\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} + \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} \leq 4\|(x,y)\|.$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4\|(x,y)\| = 0$, d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
On peut également utiliser les coordonnées polaires [a] En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ de coordonnées polaires (r,θ) où $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$, on a

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0$.

On retrouve néanmoins le caractère *local* des notions de limite et de continuité.

P 14 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A et V un voisinage de a. Alors*

1. $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell \iff \lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in V \cap A}} f(z) = \ell$.
2. *f est continue en a si et seulement si la restriction de f à $V \cap A$ est continue en a.*

Le plus souvent, on utilise pour V une boule centrée en a et de rayon $r > 0$.

T 15 Soient A et A' deux parties de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et à A', f une fonction de définie sur $A \cup A'$.

Montrer que pour que $\ell = \lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in A \cup A'}} f(z)$ il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$\ell = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in A}} f(z) \qquad \text{et} \qquad \ell = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in A'}} f(z)$$

P 16 *La restriction d'une application continue reste continue.*

P 17 *Soit* $A \subset \mathbb{R}^2$ *et* $f : A \to \mathbb{R}$. *Si* f *est continue en* $a = (x_0, y_0) \in A$ *alors* $f(*, y_0)$ *est continue en* x_0 *et* $f(x_0, *)$ *est continue en* y_0. *Autrement dit, la continuité de* f *entraîne la continuité des applications partielles.*

E 18 La réciproque est fausse !

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit $y_0 \neq 0$. La première application partielle en (x_0, y_0) est la fonction $x \mapsto \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$.
Si maintenant $y_0 = 0$, la première application partielle est $x \mapsto 0$. En particulier, les premières applications partielles sont continues. De même, les deuxièmes applications partielles sont aussi continues.
Mais, considérons maintenant la restriction g de la fonction f à la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par la droite Δ d'équation $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Pour tout point $(x,y) \in \Delta$ on a

$$g(x,y) = f(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

La fonction g est constante sur Δ, sa limite au point $(0,0)$ est le nombre $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, différent de 0, donc différent de $g(0,0)$. La fonction g, et par suite la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.

E 18 La réciproque est fausse !

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

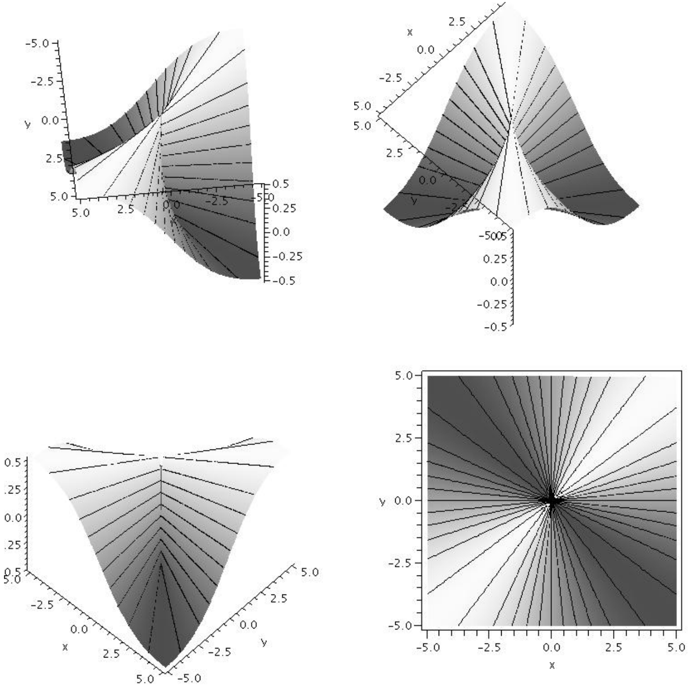
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ce résultat se visualise assez bien en utilisant les coordonnées polaires. Soit $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ de coordonnées polaires (r,θ), $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

D'où il résulte que sur tout cercle ayant pour centre $(0,0)$, la fonction prend toutes les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; elle n'admet pas 0 pour limite au point $(0,0)$.
La valeur de $f(a)$ ne dépend donc que de θ et non de r. On peut donc construire le graphe de f comme un faisceau de demi-droites passant par l'axe (Oz).

Figure: $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.



La donnée d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est équivalente à la donnée de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

D 19 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}^2$. On peut écrire

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f_1(x, y) \cdot e_1 + f_2(x, y) \cdot e_2 = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) \end{array}.$$

Les applications f_1 et f_2 (définie sur A) sont les **applications coordonnées** de f. On note $f = (f_1, f_2)$.

E 20

1. Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$.
2. Le passage en coordonnées polaires : $(\varrho, \theta) \mapsto (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta)$.

R En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, l'application $f = (f_1, f_2)$ s'identifie à l'application

$$x + iy \mapsto f_1(x, y) + i f_2(x, y).$$

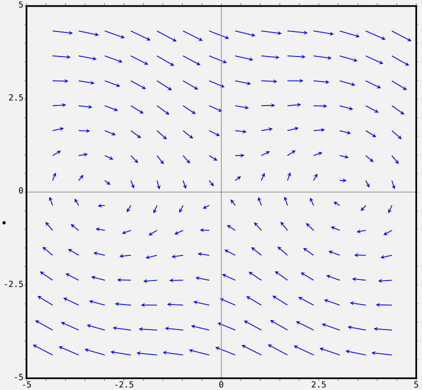
Par exemple l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$ s'identifie à l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}.$$

D 21 Dans un langage géométrique, les applications de $A \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont appelées **champs de vecteurs** et les applications de A dans $\mathbb{R}$ sont appelés **champs de scalaires**

E 22

$$f(x, y) = (y, \sin(x) - y/3)\,.$$



Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour toutes applications f et g de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les lois naturelles

- $f + g$ est la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) + g(x, y)$,
- $\lambda \cdot f$ est la fonction $(x, y) \mapsto \lambda f(x, y)$,
- Il n'y a pas produit naturel sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2)$. On peut toutefois considérer le produit scalaire de deux telles applications défini par

$$(f \cdot g)(x) = \langle f(x), g(x) \rangle.$$

- Si $\alpha : A \to \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{array}{rccl} \alpha f : & A & \to & \mathbb{R}^2 \\ & a & \mapsto & \alpha(a) f(a) \end{array}.$$

P 23 *L'ensemble $(\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

D 24 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et $b \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies \|f(z) - b\| < \varepsilon.$$

Cette limite est alors unique et on note cette propriété

$$\lim_a f = b, \quad \lim_{z \to a} f(z) = b, \quad \text{ou} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b \text{ si } a = (x_0, y_0).$$

P 25 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées (f_1, f_2), a un point adhérent à A et $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{z\to a} \|f(z) - b\| = 0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{z\to a} f_1(z) = b_1 \\ \lim\limits_{z\to a} f_2(z) = b_2. \end{cases}$$

On retrouve à partir de ce résultat les théorèmes de domination et de restriction.

D 26 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ et $a \in A$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.
- Soit X une partie de A. On dit que f est **continue sur X** si f est continue en tout point de X.
- Lorsque f est continue sur son ensemble de définition A, on dit simplement que f est **continue**.

Formellement, $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies \|f(z) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

P 27 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées (f_1, f_2) et $a \in A$.* [a] *Alors*

1. *f est continue en a si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.*
2. *f est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.*

---

[a] ⚠ Ne pas confondre fonctions coordonnées et application partielles

Dans cette section, n, p et q appartiennent à $\{ 1, 2 \}$.

T 28 *Soit A est une partie de $\mathbb{R}^n$, B une partie de $\mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens.*

1. *Si $f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} b$, alors b est un point adhérent à B.*
2. *Si $f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} b$ et si $g(w) \underset{w \to b}{\longrightarrow} \ell$,*

$$g \circ f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

T 29 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et f et g des applications de A dans $\mathbb{R}$. On suppose*

$$f(z) \xrightarrow[z \to a]{} \ell \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ g(z) \xrightarrow[z \to a]{} m \in \mathbb{R}.$$

Alors

1. $\lambda f(z) \xrightarrow[z \to a]{} \lambda \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $f(z) + g(z) \xrightarrow[z \to a]{} \ell + m$.
3. $f(z)g(z) \xrightarrow[z \to a]{} \ell m$.
4. *Si* $\ell \neq 0$, *alors* f *est non nulle au voisinage de* a *et* $\frac{1}{f(z)} \xrightarrow[z \to a]{} \frac{1}{\ell}$.

Les deux premières propriétés se généralisent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

«La composée de deux applications continues est une application continue».

T 30 *Soit A est une partie de $\mathbb{R}^n$, B une partie de $\mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens. Si f est continue en a_0 et g est continue en $b_0 = f(a_0)$, alors $g \circ f$ est continue en a_0.*

C 31 *Soit $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ et $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens. Alors $g \circ f$ est continue sur A.*

C 32 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Alors f est continue sur $I \times \mathbb{R}$. On a un résultat similaire avec $g : (x, y) \mapsto \varphi(y)$.

E 33 Les applications $(x,y)\mapsto \cos y$, $(x,y)\mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $(x,y)\mapsto(\cos x,\cos y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

M Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en (x_0,y_0), on utilise souvent une limite de la forme $\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+\alpha t^p, y_0+\beta t^q)$ (les applications partielles en sont un exemple). Si deux telles limites sont différentes, la fonction n'est pas continue.

E 34 On reprend l'exemple de l'application définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Pour $t\neq 0$,

$$f(t,t)=\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

alors que $(t,t)\xrightarrow[t\to 0]{}(0,0)$. L'application f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

P 36 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, f et g des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ et a un point de A où f et g sont continues. Alors les fonctions*

$$f+g : x \mapsto f(x)+g(x) \qquad \text{et} \qquad fg : x \mapsto f(x)g(x)$$

sont continues en a. Si $g(a) \neq 0$, on a $g(z) \neq 0$ pour z au voisinage de a et la fonction

$$f/g : x \mapsto f(x)/g(x),$$

définie pour $g(x) \neq 0$, est continue en a.

C 37 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.*

1. *$\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$.*
2. *$\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ est un sous-anneau de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$.*
3. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas, alors $1/f$ est continue.*

C 38 *Les fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables sont continues sur leur domaine de définition.*

T 39 *Soit* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p, q \in \{1, 2\}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. f *est continue.*
2. *Pour tout ouvert* Y *de* $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(Y)$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^p$.
3. *Pour tout fermé* Y *de* $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(Y)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^p$.

C 40 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors l'ensemble*

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) > \lambda \right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. *Les ensembles*

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = \lambda \right\} \text{ et } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) \geq \lambda \right\}$$

sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

T 41 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et $X \subset A$ une partie fermée bornée. Alors f est bornée sur X et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

Une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est une **partie compacte** (la réciproque est fausse en dimension infinie).

Démonstration. Admis, c'est un théorème de seconde année. ∎

1. Applications de deux variables réelles
2. Limite en un point, continuité
3. Champs de vecteurs
4. Propriétés
5. Aspects topologiques
6. Topologie de l'espace $\mathbb{R}^2$
7. Notion d'homéomorphisme