

# Chapter 7 Nombres entiers, itérations

## 7.1 Nombres entiers

Solution 7.1

Solution 7.2

Solution 7.3

Solution 7.4

Solution 7.5

Solution 7.6

Solution 7.7

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $R(n)$  la relation

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

L'assertion  $R(0)$  est vérifiée puisque

$$(1+a)^0 = 1 = 1 + 0a + 0a^2.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$ , alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a) \times (1+a)^n \\ &\geq (1+a)\left(1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right) \\ &\geq 1 + a + na + na^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^3 \\ &\geq 1 + (n+1)a + \frac{n^2 - n + 2n}{2}a^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}a^2,\end{aligned}$$

d'où  $R(n+1)$ .

### Conclusion

D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En appliquant le résultat précédent avec  $a = 2$ .

$$(1+2)^n = 3^n \geq 1 + 2n + 2n(n-1) = 1 + 2n^2.$$

Et donc  $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2n^2+1}$ . En multipliant cette relation par  $3n$  (positif), on obtient alors l'inégalité demandée

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2+1}.$$

Solution 7.8

Solution 7.10

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $R(n) : \ll n < 2^n \gg$ .

- Initialisation : on a  $2^0 = 1 > 0$  d'où  $R(0)$ .
- Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $R(n)$  vraie. On a donc  $n < 2^n$  d'après  $R(n)$  et  $1 \leq 2^n$  d'où

$$n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

D'où  $R(n + 1)$ .

- Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$ .

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R(n) : \ll n! \leq n^n \gg$ .

- On a  $1! = 1$  et  $1^1 = 1$  d'où  $1! \leq 1^1$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $R(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $n! \leq n^n$ . On a donc

$$(n + 1)! = n! \times (n + 1) \leq n^n \times (n + 1).$$

Or  $n \leq n + 1$  donc  $n^n \leq (n + 1)^n$ . Finalement

$$(n + 1)! \leq (n + 1)^n \times (n + 1) = (n + 1)^{n+1}$$

d'où  $R(n + 1)$ .

- Conclusion : Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n! \leq n^n$ .

### Solution 7.11

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R(n) : \ll 9^n - 1$  est multiple de 8  $\gg$ .

- On a  $9^1 - 1 = 8$  qui est un multiple de 8 d'où  $R(1)$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $9^n - 1$  est multiple de 8. Il existe donc  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $9^n - 1 = 8k$ , ou encore  $9^n = 8k + 1$ . D'où

$$9^{n+1} = 9 \times 9^n = 9 \times (8k + 1) = 8 \times 9k + 9.$$

Finalement,

$$9^{n+1} - 1 = 8 \times (9k + 1)$$

est un multiple de 8.

- Conclusion : par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

### Solution 7.12

On souhaite essayer de démontrer ce résultat par récurrence. Commençons par établir un lien entre  $\alpha^n + 1/\alpha^n$  et  $\alpha^{n+1} + 1/\alpha^{n+1}$ . On a

$$\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

Ce qui fait également apparaître  $\alpha^{n-1}$ . On a alors

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Ce qui suggère d'utiliser plutôt une récurrence à deux pas.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $R(n)$  l'assertion « $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}$ ».

L'assertion  $R(0)$ , c'est-à-dire  $1 + 1 \in \mathbb{Q}$ , est vraie. L'assertion  $R(1)$  est également vraie par hypothèse sur  $\alpha$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $R(n)$  et  $R(n-1)$ . Puisque  $R(1)$  est également vraie, on peut écrire

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Q}.$$

Or, on a vu que

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \underbrace{\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{\left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)}_{\in \mathbb{Q}}.$$

Puisque le produit de deux rationnel est un rationnel, et que la somme de deux rationnels est un rationnel, on en déduit que  $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Q}$ , c'est-à-dire  $R(n+1)$ .

Ainsi, on a montré que si  $R(n)$  et  $R(n-1)$  sont vraies, alors  $R(n+1)$  est vraie. De plus,  $R(0)$  et  $R(1)$  sont vraies.

### Conclusion

D'après le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

### Solution 7.16

### Solution 7.17

### Solution 7.18

### Solution 7.19

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R(n)$  l'assertion  $|u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

On a bien  $|u_0| = 7 \leq 7 \cdot \frac{1}{2^0}$  et  $|u_1| = \frac{1}{10} \leq \frac{7}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2^1}$ . Donc  $R(0)$  et  $R(1)$  sont vraies.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$  et  $R(n+1)$  soient vraies. Nous allons montrer  $R(n+2)$ . On a

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \left| \frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n \right| \\ &\leq \frac{1}{10}|u_{n+1}| + \frac{1}{5}|u_n| && \because \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1}{10} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^n} && \because R(n) \text{ et } R(n+1) \\ &= \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{28}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\ &= 7 \cdot \frac{1}{2^{n+2}}; \end{aligned}$$

D'où  $R(n+2)$ .

### Conclusion

Par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$ .

### Solution 7.20

### Solution 7.21

### Solution 7.22

Récurrence double.

### Solution 7.23

### Solution 7.24

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R(n)$ : «il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $n = 2^p(2q + 1)$ .

On a  $1 = 2^0(0 + 1)$ , d'où  $R(1)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $R(1), R(2), \dots, R(n)$ . Montrons  $R(n + 1)$ .

- Si  $n + 1$  est impair, alors  $n$  est pair. Il existe donc  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2q$  et on a donc  $n + 1 = 2^0(2q + 1)$ , d'où  $R(n + 1)$ .
- Si  $n + 1$  est pair, alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n + 1 = 2m$ . Or  $m < n + 1$ , donc  $R(m)$  est vraie : il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tel que  $m = 2^p(2q + 1)$ . On a donc  $n + 1 = 2 \times 2^p(2q + 1) = 2^{p+1}(2q + 1)$ , d'où  $R(n + 1)$ .

Dans chaque cas,  $R(n + 1)$  est vraie. Par récurrence forte, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R(n + 1).$$

## 7.2 Suites définies par une relation de récurrence

### Solution 7.25

1. On a  $u_6 = q^6 u_0 = 2^6 u_0 = 64 u_0$ , d'où  $u_0 = 96/64 = 3/2$ .

2. On a  $u_1 = q u_0$  et  $u_4 = q^4 u_0$ , d'où

$$\frac{u_4}{u_1} = q^3 = \frac{-8}{3 \times 72} = -\frac{1}{27}.$$

On a donc  $q = -1/3$  et  $u_0 = -216$ .

3. On a  $u_7 = u_0 q^7$  et  $u_3 = u_0 q^3$ , d'où

$$\frac{u_7}{u_3} = q^4 = 16 = 2^4,$$

d'où  $q = \pm 2$  puis  $u_0 = u_3/q^3 = \pm 5$  (du même signe que  $q$ ).

### Solution 7.27

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3a_n+2}{a_n+4} - 1}{\frac{3a_n+2}{a_n+4} + 2} = \frac{2a_n - 2}{5a_n + 10} = \frac{2}{5} \frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \frac{2}{5} b_n.$$

#### Conclusion

La suite  $(b_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ .

2. On a  $b_0 = \frac{a_0-1}{a_0+2} = \frac{1}{2}$ , d'où

#### Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} \right)^n.$$

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2} &\implies b_n(a_n + 2) = a_n - 1 \\
 &\implies 1 + 2b_n = a_n(1 - b_n) \\
 &\implies a_n = \frac{1 + 2b_n}{1 - b_n} \\
 &\implies a_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}.
 \end{aligned}$$

**Conclusion**

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2 \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^{n-1}}.$$

### Solution 7.28

On trouve  $u_n = 2^n - 1$ .

### Solution 7.30

On a une suite arithmético-géométrique:  $p_{n+1} = \frac{3}{2}p_n - 1000$ . On cherche  $r$  le point fixe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{3}{2}x - 1000$ , on trouve  $r = 2000$ . On introduit  $y_n = p_n - r$ , alors

$$y_{n+1} = p_{n+1} - 2000 = \frac{3}{2}p_n - 1000 - 2000 = \frac{3}{2}(p_n - 2000) = \frac{3}{2}y_n.$$

Ainsi, la suite  $(y_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{2}$ , donc

$$y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n y_0 = 8000 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

En particulier,  $p_{50} = 8000 \left(\frac{3}{2}\right)^{50} + 2000$ , qui est de l'ordre de  $5.1 \times 10^{12}$ .

### Solution 7.31

1. Montrons par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n > 3$ . Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition  $\mathcal{H}_0$  est vraie car  $x_0 = 4 > 3$ .
- Soit  $n \geq 0$ , supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est alors vraie. On a alors

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence  $x_n > 3$ , donc  $x_n + 2 > 0$  et  $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$  (ceci par étude de la fonction  $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$  pour  $x > 3$ ). Donc  $x_{n+1} - 3 > 0$  et  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

- Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme  $\mathcal{H}_0$  est vraie alors  $\mathcal{H}_n$  est vraie quelque soit  $n$ . Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que  $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$  est positif. On a

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2} = \frac{x_n(x_n - 3)}{2(x_n + 2)}$$

Ce dernier terme est positif car  $x_n > 3$ .

3. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ . Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}_n : x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition  $\mathcal{H}_0$  est vraie.

- Soit  $n \geq 0$ , supposons que  $\mathcal{H}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.

D'après la question précédente  $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$  et par hypothèse de récurrence  $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

; en réunissant ces deux inégalités nous avons  $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ .

- Nous concluons en résumant la situation :

$\mathcal{H}_0$  est vraie, et quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$ . Donc  $\mathcal{H}_n$  est toujours vraie.

4. La suite  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$  et n'est donc pas convergente.

## 7.3 Entiers relatifs

### Solution 7.33

On a  $842 = 256 \times 3 + 74$ , d'où

$$96842 = 256 \times 375 + 256 \times 3 + 74 = 256 \times 378 + 74 \text{ et } 0 \leq 74 < 256.$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne de 96842 par 256 sont respectivement 378 et 74.

De manière analogue, on On a  $842 = 2 \times 375 + 92$ , d'où

$$96842 = 256 \times 375 + 2 \times 375 + 92 = 258 \times 375 + 92 \text{ et } 0 \leq 92 < 375.$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne de 96842 par 375 sont respectivement 258 et 92.

## 7.4 Les nombres rationnels