Représentation matricielle en algèbre linéaire

Aperçu

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes

1. Famille de vecteurs
1.1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base
1.2 Matrice de passage

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes

1. Famille de vecteurs
1.1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base
1.2 Matrice de passage

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes

D 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{S} = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle **matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{S}$ relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice de type (n, p) dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur w_j relativement à la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \begin{pmatrix} \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1) & \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2) & \dots & \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m) \end{pmatrix}$$

T 2 On reprend les bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{S}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer $Q = \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(\mathcal{B})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}$ relativement à la base $\mathcal{S}$.
Calculer les produits PQ et QP.

T 3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors*

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(S) &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1), \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2), \dots, \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m)\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m)\right). \end{aligned}$$

1. Famille de vecteurs
1.1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base
1.2 Matrice de passage

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes

D 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et deux bases de E

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur v_j relativement à la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice carrée d'ordre n, qui sera notée $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$\text{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \begin{pmatrix} \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1) & \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_2) & \ldots & \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Aucune nouveauté ici! Mais le terme «matrice de passage» rappelle que les deux familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même espace vectoriel.

T 5 *Soit v un vecteur de E. Alors*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(v).$$

En général, on note X et X' les coordonnées du vecteurs x relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ «l'ancienne base» à $\mathcal{B}'$ la nouvelle base. On a alors

$$X = PX'.$$

La matrice P donne $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$, mais la formule $X = PX'$ donne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

E 6 Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, nous écrivons d'abord la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}$ relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3, en effet

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice P est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Connaissant les coordonnées d'un vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}$, par exemple

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

on peut déterminer les coefficients de v qui sont ses coordonnées dans la base canonique de deux manières, directement en utilisant la définition des coordonnées,

$$v = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

ou avec la matrice de passage

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(v) = P \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

qui donne évidement le même résultat.

Pour déterminer les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur x, par exemple $x = (5,7,-3)^T$, nous devons trouver les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut pour cela résoudre le système $Pa = x$ avec $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, ou en utilisant la matrice inverse de P, pour trouver finalement

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x) = P^{-1} \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(x) = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier ce résultat avec le calcul suivant

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = x.$$

T 7 Vérifier les calculs précédents. Déterminer P^{-1} et en déduire $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$.

T 8 En reprenant les même notations. Quelles sont les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ des vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

E 9 On considère l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{E} \, : \, 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 2.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base obtenue à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ après une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

T 10 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice
2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases
2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice
2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
2.4 Changement de bases
2.5 Matrices équivalentes et rang
2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice
2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases
2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice
2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
2.4 Changement de bases
2.5 Matrices équivalentes et rang
2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

D 11 Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de F.
On appelle **matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(v_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$. C'est une matrice de type (m, n) que l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_1)\right) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_2)\right) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_n)\right)\right)$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donc la matrice des coordonnées de la famille $\left(f(v_1), \dots, f(v_n)\right)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Les coefficients de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ sont donc caractérisés par

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f(v_j) = a_{1,j} w_1 + a_{2,j} w_2 + \cdots + a_{m,j} w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i.$$

Notation Il n'y a pas de notation fixée par le programme. Je note parfois $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans le poly d'exercices.

T 12 *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\left(f\right) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(x\right).$$

Autrement dit, en notant X les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, Y les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, on a

$$Y = AX.$$

E 13 Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x+y \\ 3x+y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ et soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

E 13 Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x+y \\ 3x+y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ et soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2f_1 + f_2 \qquad\qquad u(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f.

E 13 Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x+y \\ 3x+y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ et soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2f_1 + f_2 \qquad\qquad u(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f. On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

T 14 Matrice de $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(1) - P(0), P''(1)) \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

T 15 Matrice de $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

T 16 Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+y \\ 3y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

T 16 Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+y \\ 3y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Démonstration. On a

$$u(e_1) = u((1,0)) = (-1,0,1) = -f_1 + f_3$$
$$u(e_2) = u((0,1)) = (1,3,-2) = f_1 + 3f_2 - 2f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f. On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

On retrouve donc la matrice canoniquement associée à $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. ∎

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice
2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases
2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice
2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
2.4 Changement de bases
2.5 Matrices équivalentes et rang
2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

P 17 *Soit A une matrice de type (m, n). Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est une application linéaire.

D 18 L'application linéaire T est appelée l'**application linéaire canoniquement associée** à la matrice A.

T 19 *Soit $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit A la matrice dont les colonnes sont $T(e_1), \ldots, T(e_n)$, c'est-à-dire*

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \ldots & T(e_n) \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax$.

D 20 La matrice A est appelée la **matrice canoniquement associée** à l'application linéaire $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Autrement dit, A est la matrice associée à T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$

E 21 Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'image du vecteur $u = (1,2,3)^T$ par l'application T, il suffit de substituer $(1,2,3)$ dans l'expression de T. On obtient $T(u) = (6,-1,-4)^T$.
Pour trouver la matrice A, telle que $T(x) = Ax$, on détermine les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Et l'on pose donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarquez bien que les coefficients de A sont exactement les coefficients de x, y, z dans la définition de T.

T 22 Calculer Au avec $u = (1,2,3)^T$ et vérifier que l'on obtient bien $T(u)$.

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice
2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases
2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice
2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
2.4 Changement de bases
2.5 Matrices équivalentes et rang
2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

T 23 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et m munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. L'application*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}: & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f)\right).$$

C 24 *En particulier, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(g) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f),$$

et on a l'équivalence

$$f = g \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

De plus, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = \dim E \times \dim F.$$

T 25 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Pour toutes applications linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Ainsi la *composition des applications linéaires se traduit par la multiplication matricielle*. Bien noter l'ordre dans lequel est fait le produit matriciel.

Une démonstration. Soient $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $m = \dim(G)$. Posons $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$ de sorte que U, V, R sont des matrices de type (n,p), (m,n) et (m,p). Il s'agit de montrer que $R = VU$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. La matrice U est la matrice dont les colonnes sont

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_1)\right) & \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_2)\right) & \dots & \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_p)\right) \end{pmatrix}$$

La matrice VU est donc la matrice dont les colonnes sont

$$\begin{pmatrix} V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_1)\right) & V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_2)\right) & \dots & V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_p)\right) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_1)\right) & \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_2)\right) & \dots & \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_p)\right) \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que la matrice R. ∎

Les applications linéaires *bijectives* se reconnaissent à leurs matrices.

T 26 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ un base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f : E \to F$ une application linéaire et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors f est un isomorphisme si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1}.$$

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice
2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases
2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice
2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
2.4 Changement de bases
2.5 Matrices équivalentes et rang
2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

L 27 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, alors*

$$\operatorname{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\operatorname{Id}_E\right).$$

T 28 **Formule de changement de bases**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Considérons $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux base de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \operatorname{Pass}(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \qquad A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \qquad P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \qquad Q = \operatorname{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

on a la relation

$$A' = Q^{-1} A P.$$

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice

2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

2.4 Changement de bases

2.5 Matrices équivalentes et rang

2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

T 29 *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r si, et seulement si, il existe un couple de bases dans lequel f a pour matrice*

$$J_r = \left(\alpha_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D 30 On dit que deux matrices A et A' de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** lorsque

$$\exists Q \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), A' = QAP.$$

Une matrice A' est équivalente à la matrice A représentant une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F si, et seulement si, elle représente u dans des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ de E et F. Par conséquent, deux matrices équivalentes ont même rang.

T 31 *Une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice*

$$J_r = \left(\alpha_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C 32 *Deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si elles ont même rang.*

C 33 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\left(A^T\right) = \mathrm{rg}\,(A)$.*

R

- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.
- Les opérations élémentaires conservent le rang.

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

2.1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

2.2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice

2.3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

2.4 Changement de bases

2.5 Matrices équivalentes et rang

2.6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

3. Cas des endomorphismes

D 34 Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de A, toute matrice B obtenue en ne conservant que certaines lignes et colonnes de A.
Plus précisément, en notant $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ et

$$1 \leq i_1 < \dots i_p \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j_1 < \dots j_q \leq n,$$

la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & \cdots & a_{i_p,j_q} \end{pmatrix}$$

est une matrice extraite de A de type (p,q).

T 35 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

1. *Pour toute matrice extraite B de A, on a $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.*
2. *Le rang de A est l'ordre maximal des matrices inversibles que l'on peut extraire de A.*

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes
3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base
3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
3.3 Changement de base
3.4 Matrice semblables et trace

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes

3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base

3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

3.3 Changement de base

3.4 Matrice semblables et trace

D 36 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E. On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée. Cette matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Nous dirons aussi que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$. Notant $a_{i,j}$ les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f\left(v_j\right) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \cdots + a_{n,j}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}v_i.$$

T 37 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes
3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base
3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
3.3 Changement de base
3.4 Matrice semblables et trace

T 38 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.

P 39 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

P 40 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est un automorphisme de E (i.e. f est bijectif) si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right).$$

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes
3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base
3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
3.3 Changement de base
3.4 Matrice semblables et trace

T 41 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Considérons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \qquad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

on a la relation

$$A' = P^{-1} A P.$$

E 42 On considère l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + 5y \end{pmatrix}.$$

On cherche à décrire géométriquement cet endomorphisme. À priori, on ne peut pas en dire grand chose...

Supposons donc que l'on nous propose d'effectuer un changement de base. On considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note M la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$. Nous avons $M = P^{-1}AP$, où A est la matrice de T relativement à $\mathcal{C}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$M = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

T 43 Vérifier ces calculs.

Par définition de M, on a

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_1)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_2)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$T(v_1) = 4v_1 \quad \text{et} \quad T(v_2) = 2v_2.$$

Ainsi, l'application T s'apparente à une «dilatation» d'un facteur 4 dans la direction v_1 et d'un facteur 2 dans la direction v_2.

Remarquons que l'effet de T est le même quelque soit la base où on exprime sa matrice. Ainsi, on doit également avoir

$$Av_1 = 4v_1 \quad \text{et} \quad Av_2 = 2v_2.$$

T 44 Vérifier que $Av_1 = 4v_1$ et $Av_2 = 2v_2$.

1. Famille de vecteurs

2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

3. Cas des endomorphismes
3.1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base
3.2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
3.3 Changement de base
3.4 Matrice semblables et trace

D 45 On dit que deux matrices A et A' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), A' = PAP^{-1}.$$

R

- Deux matrices semblables sont équivalentes.
- Une matrice A' est semblable à la matrice A représentant un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ de E si, et seulement si, elle représente f dans une base $\mathcal{B}'$ de E.
- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

D 46 On appelle **trace** d'une matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

P 47 *L'application* $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*.*

P 48 *Pour toutes matrices* $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*, on a*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$*,*

$$\mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(A\right).$$

T 49 **et définition**

Il existe une unique forme linéaire $\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ *telle que pour toute base* $\mathcal{B}$ *de* E*, on ait*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f\right).$$

On appelle alors ***trace*** *d'un endomorphisme* f *de* E *le scalaire* $\mathrm{Tr}(f)$*.*

P 50 *Pour tous* $u, v \in \mathcal{L}(E)$*, on a* $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u)$*.*

P 51 *Soit* p *un projecteur de* E*, alors* $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$*.*