Chapitre 46

Déterminants

Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera un corps. Le programme se limite au cas où ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

46.1 Déterminant d'une matrice carrée

Le **déterminant** d'une matrice carrée A est un scalaire, noté $\det A$. Ce scalaire permet de déterminer rapidement si une matrice est inversible. Par exemple, si A est une matrice $(2, 2)$, et que l'on souhaite déterminer A^{-1} en utilisant des opération élémentaire sur les lignes. On forme la matrice $(A|I)$ et on cherche sa forme échelonnée réduite. Supposons $a \neq 0$, quitte à permuter les deux lignes.

$$\begin{aligned}
(A|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) & & \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) & & L_1 \leftarrow (1/a)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - cb/a & -c/a & 1 \end{array}\right) & & L_2 \leftarrow L_2 - cL_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right). & & L_2 \leftarrow aL_2
\end{aligned}$$

et donc A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.

§1 Définition

Définition 1

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** A le scalaire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Exemple 2

Étant donnée une matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Remarquez l'utilisation de barres verticales pour le déterminant.

Exemple 3

Il y a $3! = 6$ permutations dans $\mathcal{S}_3$:

- trois permutations paires

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- et trois permutations impaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1.$$

On observera que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

§2 Propriétés élémentaires

Théorème 4

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det\left(A^T\right) = \det\left(A\right),$$

ce qui s'écrit également

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}.$$

Démonstration. On remarque que pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et

$$a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

∎

Proposition 5

- *Si une colonne de A est nulle, alors* $\det(A) = 0$.
- *Si une ligne de A est nulle, alors* $\det(A) = 0$.

Proposition 6

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si chaque coefficient de la colonne j s'écrit comme somme de deux scalaire $a_{ij} = \lambda b_{ij} + \mu c_{ij}$ pour $1 \le i \le n$, alors

$$\det(A) = \lambda \det(B) + \mu \det(C),$$

où B se déduit de la matrice A en substituant la colonne j par $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$, et C se déduit de la matrice A en substituant la colonne j par $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$.

Proposition 7

Le résultat précédent reste valable lorsque l'on remplace le mot «colonne» par «ligne».

Remarque ⚠

On dit que $\det(A)$ dépend linéairement de la colonne C_j (resp. ligne L_i) lorsque les autres colonnes (resp. lignes) sont fixées.

L'application $A \mapsto \det A$ *n'est pas linéaire* ! En effet, $\det(\lambda A) = \lambda^n A$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (chaque colonne est multipliée par λ).

Exemple 8

Illustrons le résultat pour une matrice $(3, 3)$. La proposition affirme que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b+p & c \\ d & e+q & f \\ g & h+r & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix} = \det(B) + \det(C).$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & \lambda b & c \\ d & \lambda e & f \\ g & \lambda h & i \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \lambda \det(B).$$

§3 Déterminant et cofacteurs

Définition 9

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. Le **mineur** d'indice (i, j) de A, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice $(n-1, n-1)$ extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
2. Le **cofacteur** d'indice (i, j) de la matrice A est
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ainsi le cofacteur est égale au mineur si $i + j$ est pair, et son opposé si $i + j$ est impair. On peut retrouver rapidement ce signe en suivant le schéma

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 10

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alors le mineur M_{23} et le cofacteur C_{23} sont
$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -5.$$

Test 11

Déterminer le cofacteur C_{13} pour la matrice précédente.

§4 Développement selon une ligne ou une colonne

Théorème 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. On désigne par C_{ij} le cofacteur d'indice (i, j) de A.

1. *Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a*
$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$
(Développement par rapport à la i-ème ligne).
2. *Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, on a*
$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$
(Développement par rapport à la j-ème colonne).

Démonstration. Donnons une esquisse de démonstration dans le cas où $j = n$ (développement par rapport à la dernière colonne).

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \sigma(i)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{i-1,\sigma(i-1)} a_{i+1,\sigma(i+1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \sigma(i)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma'(1)} a_{2,\sigma'(2)} \dots a_{i-1,\sigma'(i-1)} a_{i+1,\sigma'(i)} \dots a_{n,\sigma'(n-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} (-1)^{n-i} M_{i,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} C_{i,n}.
\end{aligned}$$

Où pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma(i) = n$, on note σ' la permutation de $[\![1, n-1]\!]$ telle que

$$\sigma'(1) = \sigma(1) \quad \dots \quad \sigma'(i-1) = \sigma(i-1) \quad \sigma'(i) = \sigma(i+1) \quad \dots \quad \sigma'(n-1) = \sigma(n).$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-i}\varepsilon(\sigma')$ car σ compte $n-i$ inversions supplémentaires par rapport à σ' puisque $\sigma(i) = n > \sigma(k)$ pour $k \in [\![i+1, n]\!]$. ∎

Remarquer que le développement selon la ligne i de $\det\left(A^T\right)$ est le même que le développement selon la colonne i de $\det(A)$.

Exemple 13

On reprend l'exemple 10, où l'on développe le déterminant par rapport à la première ligne.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(1) + 3(13) = 34.$$

Test 14

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 15

On reprend l'exemple 10, mais en effectuant un développement selon la troisième ligne ou troisième colonne. Ceci réduit le nombre de calculs puisque $a_{33} = 0$. Par exemple, en développant le déterminant selon la troisième colonne,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 3 \cdot 13 - 5 = 34.$$

Test 16

Vérifier le déterminant obtenu pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

en utilisant un développement selon une autre ligne ou colonne. Choisir celle avec le moins de calculs à effectuer.

Remarque Étant donnée une matrice carrée d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \\ &= g \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si C_1, C_2 et C_3 désigne les colonnes de A, on a $\det A = \left(C_1 \wedge C_2\right) \cdot C_3$, les produits scalaires et vectoriels étant donnés par les formules usuelles...

Pour de grandes matrices, développer brutalement avec les cofacteurs est peu pratique. Par exemple,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -10 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 1C_{11} + (-4)C_{12} + 3C_{13} + 2C_{14}$$

nécessite le calcul de quatre déterminants 3×3.

Heureusement, il y a une méthode plus efficace. Pour simplifier les calculs, nous allons nous tourner encore une fois vers les opérations élémentaires. Mais tout d'abord, nous devons démontrer quelques résultats sur les déterminants.

§5 Déterminant d'une matrice triangulaire

Lemme 17 *Si A est une matrice carrée de la forme*

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = \lambda \det(A')$.

Définition 18

- On dit que $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, i>j \implies a_{ij}=0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- On dit que $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, i<j \implies a_{ij}=0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposition 19

Si $A=(a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, ou diagonale, alors

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

§6 Opérations sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant

Une matrice carrée échelonnée par ligne est triangulaire supérieure. Si nous savons comment le déterminant est affecté par les opérations élémentaires, nous obtenons un moyen simple de calculer les déterminants.

Théorème 20

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si B se déduit de A en multipliant une ligne par un scalaire α, alors*

$$\det B = \alpha \det A.$$

2. *Si B se déduit de A en permutant deux lignes, alors*

$$\det B = -\det A.$$

3. *Si B se déduit de A en ajoutant à une ligne un multiple d'une* autre *ligne, alors*

$$\det B = \det A.$$

Ces résultats restent valables en substituant le mot «colonne» au mot «ligne».

Corollaire 21 *Si A contient deux lignes égales ou deux colonnes égales, alors* $\det(A)=0$.

Exemple 22 À l'aide d'opération élémentaire sur les lignes, calculer

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Test 23 On peut raccourcir la rédaction précédente en développant le déterminant aussitôt que l'on a obtenue des zéros sous un pivot. On est alors ramener au calcul d'un déterminant $(3,3)$. Utiliser cette stratégie pour calculer à nouveau

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

§7 Déterminant de Vandermonde

Définition 24 Étant donnée des scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on appelle **matrice de Vandermonde** de taille n la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Théorème 25 *Le déterminant de Vandermonde*

$$V_n = V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i\right).$$

Démonstration. Pour j allant de n à 2, on effectue l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$:

$$\begin{aligned}
V_n &= V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Puis, on développe par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned}
V_n &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \right) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Puis, par récurrence, on obtient

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i \right).$$

∎

46.2 Applications bilinéaires

§1 Définition

Définition 26 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$f : E \times E \to F$$

est **bilinéaire** si

- $f(*, b) : x \mapsto f(x, b)$ est une application linéaire pour tout $b \in E$,
- $f(a, *) : y \mapsto f(a, y)$ est une application linéaire pour tout $a \in E$.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme bilinéaire** sur E^2.

Cela signifie donc que l'on a les identités

$$\begin{aligned} f(x+x',y) &= f(x,y)+f(x',y), & f(\lambda x,y) &= \lambda f(x,y), \\ f(x,y+y') &= f(x,y)+f(x,y'), & f(x,\lambda y) &= \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Notation L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times E$ dans F se note $\mathcal{L}_2(E,F)$.

Proposition 27 *$\mathcal{L}_2(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E \times E, F)$.*

Définition 28 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E \times E \to F$.

- On dit que l'application f est **symétrique** lorsque

$$\forall (x,y) \in E^2, f(y,x) = f(x,y).$$

- On dit que l'application f est **antisymétrique** lorsque

$$\forall (x,y) \in E^2, f(y,x) = -f(x,y).$$

- On dit que l'application f est **alternée** lorsque

$$\forall x \in E, f(x,x) = 0.$$

Proposition 29 *Soit $f \in \mathcal{L}_2(E,F)$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors l'application bilinéaire f est alternée si, et seulement si f est antisymétrique.*

Démonstration. Si f est alternée, alors quels que soient $x, y \in E$, on a

$$0 = f(x+y,x+y) = f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y) = f(x,y)+f(y,x).$$

Si f est antisymétrique, alors quel que soit $x \in E$, on a

$$f(x,x) = -f(x,x).$$

∎

Exemple 30 Soit $E = \mathbb{R}^q$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_q);(y_1,\dots,y_q)\big) & \mapsto & x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_qy_q \end{array}.$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 31

Soit $E = \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$\psi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & F \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b fg \end{array}.$$

Alors ψ est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 32

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1,x_2);(y_1,y_2)\big) & \mapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}.$$

Alors f est une forme bilinéaire antisymétrique et alternée.

§2 Formes bilinéaires en dimension 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E, x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans la base $\mathcal{B}$. Si $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire**, alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1f(e_1,e_1) + x_1y_2f(e_1,e_2) + x_2y_1f(e_2,e_1) + x_2y_2f(e_2,e_2). \end{aligned}$$

En notant $a = f(e_1,e_1)$, $b = f(e_1,e_2)$, $c = f(e_2,e_1)$ et $d = f(e_2,e_2)$, on a

$$f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- l'application f est symétrique si, et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique, c'est-à-dire lorsque $c = b$.
- l'application f est alternée si, et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est antisymétrique, c'est-à-dire lorsque $a = d = 0$ et $c = -b$.

Exemple 33

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ une base de E, x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^2 \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire alternée.

Cela signifie donc que pour tout $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2), (y_1, y_2), (y'_1, y'_2) \in \mathbb{K}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x'_1 & y_1 \\ \lambda x_2 + \mu x'_2 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 \\ x'_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda y_1 + \mu y'_1 \\ x_2 & \lambda y_2 + \mu y'_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x_1 & y'_1 \\ x_2 & y'_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Proposition 34 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $f : E^2 \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée, alors*

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = f(e_1, e_2) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x, y).$$

Toute forme bilinéaire alternée f sur E^2 est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$ et il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

46.3 Applications multilinéaires

§1 Applications multilinéaires

Définition 35 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \geq 2$. On dit qu'une application

$$f : E^n \to F$$

est ***n*-linéaire** si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $a_k \in E$ avec $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{ j \}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & x_j & \mapsto & f\left(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n\right) \end{array}$$

est linéaire.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire.

Exemple 36 Dire que f est une application trilinéaire signifie donc que l'on a les identités

$$\begin{aligned} f(x + x', y, z) &= f(x, y, z) + f(x', y, z), & f(\lambda x, y, z) &= \lambda f(x, y, z), \\ f(x, y + y', z) &= f(x, y, z) + f(x, y', z), & f(x, \lambda y, z) &= \lambda f(x, y, z), \\ f(x, y, z + z') &= f(x, y, z) + f(x, y, z'), & f(x, y, \lambda z) &= \lambda f(x, y, z). \end{aligned}$$

Exemple 37 Soit $E = F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{array}{rcl} E^n & \to & E \\ (f_1, \dots, f_n) & \mapsto & 3 f_1 \times \cdots \times f_n \end{array}$$

est une application n-linéaire.

Notation L'ensemble des applications n-linéaire de E^n dans F se note $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Proposition 38 *$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^n, F)$.*

Remarque Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. S'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j = 0$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Proposition 39 **Expression d'une application n-linéaire en dimension finie**
Soit f une application n-linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i,$$

alors on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq p \\ 1 \leq i_2 \leq p \\ \vdots \\ 1 \leq i_n \leq p}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}).$$

Définition 40 Soit $f \in \mathcal{F}(E^n, F)$.

- On dit que f est **symétrique** lorsque

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = f\left(x_1, \dots, x_n\right).$$

- On dit que f est **antisymétrique** lorsque

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \dots, x_n\right).$$

- On dit que f est **alternée** lorsque

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \left(i \neq j \text{ et } x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0\right).$$

Proposition 41 *Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$. Alors f est antisymétrique si, et seulement si f est alternée.*

Remarque Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, seule l'implication f est n-linéaire alternée implique f est antisymétrique est vraie en général.

§2 Expression d'une application n-linéaire alternée en dimension n

Proposition 42

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$ un application n-linéaire alternée.

1. *La valeurs $f(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des x_j une combinaison linéaire des autres.*
2. *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Proposition 43

Soit f une application n-linéaire alternée de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = \sum_{i=1} a_{i,j} e_i,$$

alors on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \right) f(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Théorème 44

L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est de dimension 1.

46.4 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

§1 Définition

Définition 45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = a_{1,j} e_1 + a_{2,j} e_2 + \dots + a_{n,j} e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

on appelle **déterminant de la famille** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Remarque

Le déterminant de la matrice de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est aussi le déterminant de la matrice des coordonnées de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)\right)$$

Réciproquement, en notant $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors

$$\det(A) = \det_{\varepsilon}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Exemples 46

1. Si $n = 2$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Si $n = 3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Si $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ désigne la base de E définie par

$$e'_1 = e_1 + 2e_2, \qquad e'_2 = 2e_1 - e_2,$$

alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \det_{\mathcal{B}'}(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Théorème 47

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. $\det_{\mathcal{B}}$ *est une forme n-linéaire alternée.*

2. *Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme n-linéaire alternée, alors*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

3. $\det_{\mathcal{B}}$ *est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui prend la valeur* 1 *en* $(e_1, \dots, e_n)$.

§2 Caractérisation des bases

Remarque Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 48 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors S est une base de E si, et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \neq 0$.

Exemple 49 On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 et les polynômes

$$P_0 = (X-1)^2, \qquad P_1 = X(X-1), \qquad P_2 = X^2.$$

Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, nous avons

$$\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 50 Le déterminant de Vandermonde

$$V_n = V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_j - x_i\right).$$

Démonstration. Avec des polynômes! En exercice. ∎

46.5 Déterminant d'un endomorphisme

§1 Définition

Définition 51 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Il existe un unique élément de $\mathbb{K}$, noté $\det(f)$, tel que, pour *toute* base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, on a

$$\forall \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}\left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\right) = \det(f) \cdot \det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right).$$

Ce scalaire $\det(f)$ est appelé *déterminant* de f.

Proposition 52 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Pour* toute *base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, l'égalité suivante est vérifiée*

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}} \left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right).$$

Proposition 53 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f).$$

Le déterminant n'est pas une application linéaire.

§2 Déterminant d'une composée

Théorème 54 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$,*

$$\det(g \circ f) = \det(g) \det(f).$$

Théorème 55 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Pour que f soit bijectif (i.e. soit un automorphisme de E), il faut, et il suffit que son déterminant soit non nul. Lorsque c'est le cas, on a*

$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det(f))^{-1}.$$

Théorème 56 *L'application* det *induit un morphisme de* $\mathbf{GL}(E)$ *sur* $\mathbb{K}^\star$.

46.6 Applications aux déterminants de matrices

§1 Déterminant d'un produit

Remarque Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}} \left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).$$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\det(A) = \det(f)$.

Théorème 57 *Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \textit{et} \qquad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Test 58 Vérifier le théorème sur un exemple. Montrer que si E_2 est une matrice élémentaire qui permute deux lignes, alors $\det(E_2B) = \det(E_2)\det(B)$. Faire de même avec une matrice élémentaire E_3 qui ajoute un multiple d'une ligne à une autre ligne.

§2 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Proposition 59 *Soient $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possédant un bloc rectangulaire de zéros en bas à gauche:*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \quad \text{avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Alors

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D).$$

Démonstration. On écrit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a alors

- $\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$ par développements successifs selon la première colonne (ou première ligne),
- $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = 1$ car c'est une matrice triangulaire supérieure,
- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A)$ par développements successifs selon la dernière colonne (ou dernière ligne).

∎

Exemple 60 Ce résultat se généralise immédiatement au déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-10) \cdot (-2) = 60.$$

Comme le déterminant est invariant par transposition, on peut aussi calculer des déterminant «triangulaires inférieurs par blocs».

§3 Matrice inversible et déterminant

Théorème 61 *Soit A une matrice (n, n), alors A est inversible si, et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas, on a*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Théorème 62 *L'application* $\det$ *induit un morphisme de* $\mathbf{GL}(E)$ *sur* $\mathbb{K}^\star$.

Théorème 63 *Pour toute matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$,*

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même déterminant.

Corollaire 64 *Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si ses coefficient diagonaux sont tous non nuls.*

Exemple 65 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice V soit inversible.

§4 Bases de $\mathbb{K}^n$

Théorème 66 *Soit A une matrice carrée (n, n). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible,*
2. *Pour tout b, le système $Ax = b$ admet une unique solution,*
3. *Pour tout b, le système $Ax = b$ admet une solution,*
4. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle,*
5. $A \underset{L}{\sim} I_n$,
6. $\det(A) \neq 0$,
7. $\mathrm{rg}(A) = n$,
8. *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,*
9. *Les lignes de A (écrites en colonnes) forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 67

L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

est $\mathbb{R}^3$, et la famille (v_1, v_2, v_3) en est une base. En effet, la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3 est inversible puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Exemple 68

Que penser de $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La famille (v_1, v_2) est libre, donc $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, et (v_1, v_2) est une base de U.

Une représentation paramétrique est $v = sv_1 + tv_2$ et on peut obtenir une équation en cherchant si ce système est compatible pour un vecteur $v = (x, y, z)^T$… Mais il y a plus simple!

En effet, le vecteur $v \in U$ si, et seulement si v est combinaison linéaire de v_1, v_2, si, et seulement si (v_1, v_2, v) est liée, si, et seulement si

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 5 & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on obtient

$$7x + y - 3z = 0.$$

Test 69

Calculer le déterminant. Vérifier que $7x + y - 3z = 0$ est une équation de U en vérifiant que v_1, v_2, v_3 vérifient l'équation.

46.7 Comatrice

Définition 70 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A.

Théorème 71 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a*

$$A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T.$$

Corollaire 72 *La combinaison linéaire formé des cofacteur d'une ligne avec les coefficients d'une autre ligne est nulle. Plus précisément, si $i \neq j$, alors*

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \cdots + a_{jn}C_{in} = 0.$$

Exemple 73 Étant donnée une matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Remarquez l'utilisation de barres verticales pour le déterminant.

CHAPITRE

46

COMPLÉMENTS

46.8 FORMULES DE CRAMER

Lorsque la matrice d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ est inversible, on dit que c'est un **système de Cramer**.

Théorème 74

Soient $n \geq 2$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'unique solution du système de Cramer $Ax = b$, alors

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne de A par le vecteur colonne b.

Exemple 75

Pour $n = 2$, le système

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

est un système de Cramer si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans ce cas, la solution du système est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$