Chapter 4 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

4.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

4.2 Logarithmes, exponentielles

Exercice 4.1
Résoudre
$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Exercice 4.2
Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 4.3
Déterminer le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation
$$x\ln(x) = 1.$$

Exercice 4.4
Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1|-3\ln(x^2+1)}$.

Exercice 4.5
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Exercice 4.6
Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation
$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{1}$$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.

Exercice 4.7
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Exercice 4.8
Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation
$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Exercice 4.9

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\varphi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.10

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 4.11
Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \leq 2^x$.

2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.

3. $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$.

Exercice 4.12
Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

4.3 Fonctions puissances

Exercice 4.13
Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Exercice 4.14
Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x.$$

Exercice 4.15

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^x$.

2. En déduire que

$$\forall x > -1, (1 + x)^x \geq 1.$$

4.4 Fonctions hyperboliques

Exercice 4.16
Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Exercice 4.17
Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{25}{12} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \operatorname{ch} b \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = a \operatorname{sh} b \end{cases}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4.18

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \sqrt{3}$.

2. $\operatorname{ch}^2 x + 3 \operatorname{ch} x - 4 = 0$.

Exercice 4.19

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Exercice 4.20 (**) *Fonction argument tangent hyperbolique*

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \tanh(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.

2. On note argth sa bijection réciproque appelée *argument tangente hyperbolique*.

   Montrer que la fonction argth est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.

3. En étudiant l'équation $y = \tanh(x)$ d'inconnue x réelle, exprimer $\operatorname{argth}(t)$ à l'aide des fonctions usuelles. Retrouver ainsi l'expression de sa dérivée.

4.5 Fonctions hyperboliques réciproques