Chapter 3 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

3.1 Majorant, minorant

Exercice 3.1 (**)

Il paraît peu vraisemblable que $\mathbb{N}$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, soit majoré. Et pourtant, voici une démonstration *forcement fausse*, de ce que $\mathbb{N}$ est majoré.

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $n+1$ majore n ; puisque chaque élément de $\mathbb{N}$ est majoré, nous pouvons conclure que $\mathbb{N}$ est majoré.

D'où vient cet apparent paradoxe ?

Exercice 3.2 (**)

Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées? Ont-elles un plus grand élément, un plus petit élément?

1. $]-4,6]$.
2. $[-1,0[$.
3. $[3,+\infty[$.
4. $\mathbb{R}^\star$.
5. $\mathbb{Z}$.
6. $\mathbb{N}$.
7. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 \right\}$.
8. $[0,\pi] \cap \mathbb{Q}$.
9. $]0,\pi[\cap\mathbb{Q}$.

Exercice 3.3 (***)

Soit

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \Big|3|x| - 6\Big| > 2|x| - x \right\}.$$

Déterminer l'ensemble $A^\uparrow$ de ses majorant et l'ensemble $A^\downarrow$ de ses minorants.

3.2 Théorème de la borne supérieure

Exercice 3.4 (**)

Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0,1[$,
2. $[0,1[$,
3. $]1,+\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,
7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Exercice 3.5 (***)

On considère

$$E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{p} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure ? Si oui, les déterminer.

Exercice 3.6 (***)

Soit $x > 0$ un réel, écrit en décimal sous la forme $n_0, \alpha_1\alpha_2 \dots$. Notons x_k sa troncature à la k-ème décimale, c'est-à-dire le nombre décimal

$$x_k \stackrel{\text{def}}{=} n_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$$

et X l'ensemble de toutes ces troncatures, sous-ensemble de l'ensemble des décimaux. Montrer que x est la borne supérieure de X. Dans quels cas est-il le maximum?

Que peut-on dire dans le cas où $x < 0$?

Exercice 3.7 (**)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 3.8 (**)

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$.

2. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

Exercice 3.9 (***)

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de $\mathbb{R}$; on définit

$$C = A + B = \{\, z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y \,\} ;$$

Prouver que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercice 3.11 (****)

Soient A et B deux parties non vides, majorées, de $\mathbb{R}_+$; on définit

$$D = AB = \{\, z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = xy \,\} ;$$

Déterminer $\sup(D)$.

Exercice 3.12 (***)

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b.$$

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 3.13 (****)

Soit A une partie bornée non-vide de $\mathbb{R}$. Montrer

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} |x - y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 3.14 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.

2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 3.15 (***)

Soient f une fonction majorée et g une fonction bornée définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer

$$\sup_X f + \inf_X g \leq \sup_X (f + g)\,. \tag{1}$$

Exercice 3.17 (****) *Un théorème de point fixe*

Soit une application croissante $f : [0,1] \to [0,1]$, c'est-à-dire

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, u \leq v \implies f(u) \leq f(v).$$

On se propose de montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in [0,1], f(\alpha) = \alpha.$$

On considère l'ensemble

$$A = \{ \ x \in [0,1] \mid f(x) \leq x \ \}.$$

1. Montrer que l'ensemble A est non vide et qu'il admet une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$.

2. Démontrer que si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

En déduire que $f(\alpha) \leq \alpha$.

3. Démontrer que si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

En déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.

4. Conclure.

3.3 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

Exercice 3.18 (*)
Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

3.4 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$