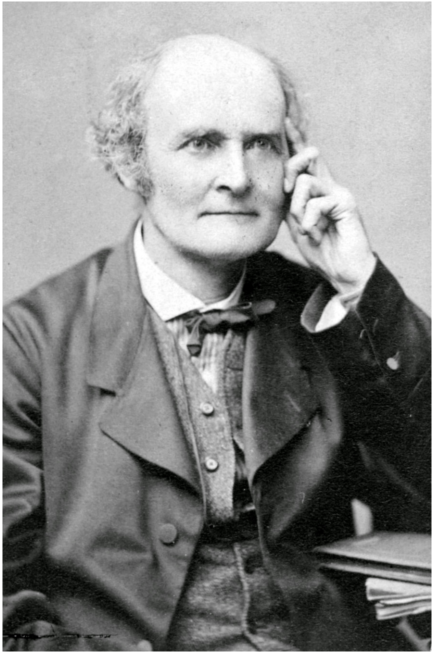
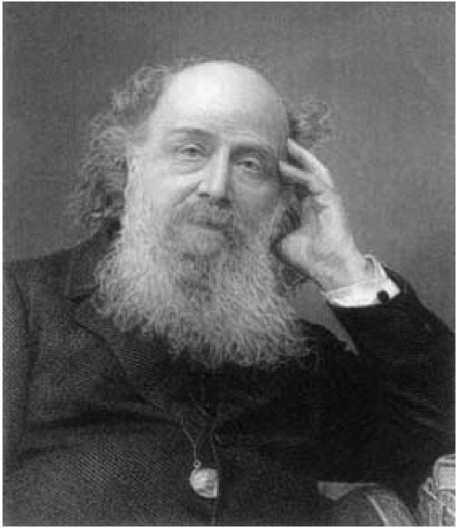
Calcul matriciel élémentaire

Aperçu

Calcul matriciel élémentaire



Arthur Cayley



James Joseph Sylvester

D 1 Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une **matrice de type (m,n)** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$.
L'image de (i,j) est appelé **coefficient** de A indexé par (i,j).

P 2 *Deux matrices sont égales si elle ont même type et mêmes coefficients. C'est-à-dire, si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont toutes deux des matrices de type (m,n), alors*

$$A = B \iff \forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = b_{i,j}.$$

- Le plus souvent, le coefficient d'indice (i, j) sera noté $a_{i,j}$ ou $A[i, j]$,[1] et s'il n'y a pas d'ambiguïté possible a_{ij}[2]

[1] C'est une notation classique un informatique, où l'on définit les matrices comme des tableaux à deux dimensions.

[2] Il n'y a aucune notation officielle dans le programme. On trouve parfois également $(A)_{i,j}$, mais ça ne me plaît pas vraiment.

- On dispose souvent ces matrices sous la forme d'un tableau rectangulaire

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  en convenant que l'image du couple (i, j) est l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.
- On dit aussi que la matrice A est une matrice de type $m \times n$ ou encore que A est une matrice à m lignes et n colonnes.

---

[1] C'est une notation classique un informatique, où l'on définit les matrices comme des tableaux à deux dimensions.

[2] Il n'y a aucune notation officielle dans le programme. On trouve parfois également $(A)_{i,j}$, mais ça ne me plaît pas vraiment.

E 3 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de type $(3,4)$ dont les coefficients sont réels. Pour cette matrice, $a_{2,3} = A[2,3] = 5$.

T 4 Dans l'exemple 3, que représentent $a_{3,2}$ et $A[3,4]$?
Que représente $a_{i,j}$? Et $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 4}}$? Et $\left(a_{1,3}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 4}}$?

D 5

- On appelle **matrice carrée** une matrice de type (n, n). On dit alors que c'est une matrice carrée d'**ordre** $\boldsymbol{n}$.
- Les **termes diagonaux** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.
- On dit que $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice **diagonale** si A est une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

On écrira alors $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Un matrice diagonale ressemble donc à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

D 5

- On appelle **matrice carrée** une matrice de type (n, n). On dit alors que c'est une matrice carrée d'**ordre n**.
- Les **termes diagonaux** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont les coefficients $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
- On dit que $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice **diagonale** si A est une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

On écrira alors $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

T 6

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont diagonales ?

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N L'ensemble des matrices (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices carrées (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

D 7 Si $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux matrices de type (m,n) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme** des matrices A et B et l'on note $A+B$, la matrice $C=(c_{ij})$ de type (m,n) définie par

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

  La somme de deux matrices n'est donc définie que si elles ont même type.

- On appelle **produit** de la matrice A par le scalaire λ et l'on note λA la matrice $(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ de type (m,n) obtenue en multipliant **tous** les éléments de A par le scalaire λ.

E 8

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 0 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

D 7 Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de type (m, n) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme** des matrices A et B et l'on note $A + B$, la matrice $C = (c_{ij})$ de type (m, n) définie par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

  La somme de deux matrices n'est donc définie que si elles ont même type.

- On appelle **produit** de la matrice A par le scalaire λ et l'on note λA la matrice $(\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de type (m, n) obtenue en multipliant **tous** les éléments de A par le scalaire λ.

R On peut donc écrire pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(A + B)[i, j] = A[i, j] + B[i, j]$$
$$\text{et } (\lambda A)[i, j] = \lambda (A[i, j]) = \lambda A[i, j].$$

N Le **symbole delta de Kronecker**, également appelé **symbole de Kronecker** ou delta de Kronecker est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

D 9 Les **matrices élémentaires** de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices $E_{i,j}^{(m,n)}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ainsi définies : le coefficient d'indices (i, j) de $E_{i,j}^{(m,n)}$ est égal à 1, tous ses autres coefficients sont nuls. On a donc, pour $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq \ell \leq n$,

$$\left(E_{i,j}^{(m,n)}\right)[k, l] = \delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

Lorsque que le type des matrices est clair, on note simplement $E_{i,j}$.

P 10 *Toute matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrice élémentaires.*

D 11 **Produit de Cayley de deux matrices**

Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, A une matrice de type (m, n) et B une matrice de type (n, p).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On appelle **produit de Cayley** (ou simplement **produit**) des matrices A et B la matrice $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

La matrice AB est donc de type (m, p).

R

- On peut également écrire la formule

$$(AB)[i, j] = \sum_{k=1}^{n} A[i, k] B[k, j].$$

La notation $(AB)[i, j]$ signifiant bien «le terme d'indice (i, j) de la matrice AB.

D 11 **Produit de Cayley de deux matrices**

Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, A une matrice de type (m, n) et B une matrice de type (n, p).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

On appelle **produit de Cayley** (ou simplement **produit**) des matrices A et B la matrice $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq p}}$ définie par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

La matrice AB est donc de type (m, p).

- La formule a bien un sens car le nombre de colonnes de la première matrice du produit est le même que le nombre de lignes de la seconde matrice. L'expression de $c_{i,j}$ se traduit en disant que l'on fait le produit « vecteur ligne par vecteur colonne ».

D 11 **Produit de Cayley de deux matrices**

Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, A une matrice de type (m, n) et B une matrice de type (n, p).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On appelle **produit de Cayley** (ou simplement **produit**) des matrices A et B la matrice $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

La matrice AB est donc de type (m, p).

- Insistons sur le fait que si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit AB n'a aucun sens.
- Lorsque l'on peut multiplier A par B, ont dit que A et B sont **conformables**.

E 12 Dans le produit suivant, le coefficient d'indice $(2,1)$ du produit (en gras) est obtenu comme indiqué ci-dessus, en utilisant les lignes et colonnes en gras.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 3 \\ 1 & 14 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Le coefficient est bien 5 car

$$(2)(3) + (0)(1) + (1)(-1) = 5.$$

Remarquez la cohérence pour le type des matrices. A est $(4,3)$, B est $(3,2)$, et le produit AB est $(4,2)$.

R Nous ne pouvons inverser l'ordre des deux matrices dans le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

car le produit d'un matrice $(3,4)$ par une matrice $(2,3)$ n'est pas définit.

Maintenant, si l'on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les deux produits AB et BA sont définis, mais on des tailles différentes, ainsi, elle ne peuvent être égales.

T 13 Quelles sont les tailles des matrices AB et BA. Calculer ces deux produits.

Même lorsque les produits AB et BA sont définis et ont même dimension, on a généralement $AB \neq BA$.

T 14 Étudier l'assertion précédente. Écrire deux matrices $(2,2)$, A et B, et calculer AB et BA.
Par exemple, vous pouvez utiliser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais choisissez plutôt au hasard.

Disposition pratique du calcul

Une bonne astuce pour calculer un produit de matrices, en limitant les risques d'erreur, consiste à disposer le calcul comme suit :

$$c_{23} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{k3}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$a_{21} \times b_{13}$

$a_{22} \times b_{23}$

$a_{23} \times b_{33}$

$a_{2n} \times b_{n3}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Cette disposition est de plus parfaitement adaptée à l'itération du produit.

Nous pouvons calculer avec les matrices, de nombreuses règles algébrique restant vérifiées. Par exemple, si l'on considère l'équation

$$3A + 2B = 2(B - A + C)$$

où l'inconnue est une matrice C, nous pouvons résoudre cette équation avec les règles algébrique usuelles. Il faut néanmoins se rappeler que les opérations doivent être bien définies. Dans notre exemple, il faut que les matrices A, B et C est même type (m, n).

P 16 *Soit trois matrices A, B, C et un scalaire λ. Sous réserve d'existence des expressions, on a*

1. *L'addition est commutative :*

$$A + B = B + A.$$

2. *L'addition est associative :*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

3. *La multiplication est associative :*

$$(AB)C = A(BC).$$

4. *Et enfin, on a une «associativité mixte» :*

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

T 17 Dans la proposition précédente quelles sont les types de chaque matrice ?

P 18 *Sous réserve d'existence des expressions, on a*

1. *La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition :* [a]

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{et} \qquad (B+C)A = BA + CA.$$

2. *La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition :*

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$$

[a] Puisque la multiplication matricielle n'est pas commutative, nous devons écrire deux relations pour la distributivité (distributivité à gauche, et distributivité à droite).

T 19 Dans la proposition précédente quelles sont les types de chaque matrice ?

D 20 Pour $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC \qquad \text{et} \qquad (\lambda B + \mu C)D = \lambda BD + \mu CD.$$

On résume ces propriétés en disant que le produit matriciel est **bilinéaire**.

D 21 On appelle **matrice nulle** une matrice dont tous les coefficient sont nuls

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{0}_{m,n}$ la matrice nulle de type (m, n), ou simplement $\mathbf{0}$.

Cette matrice est élément neutre pour l'addition.

P 22 *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors*

1. $A + 0 = A$,
2. $A - A = 0$,
3. $0A = 0$ *et* $A0 = 0$,

où le type des matrices nulles doivent être compatible avec le type de A.

E 23 Résoudre l'équation

$$3A + 2B = 2(B - A + C)$$

d'inconnue C, en détaillant les propriétés utilisées.

D 24

- La **matrice unité d'ordre n** (ou **matrice identité**) est la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

- Les **matrices scalaires** sont les matrices diagonales dont tous les termes diagonaux sont égaux. Les matrices scalaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont donc les matrices proportionnelles à I_n.

P 25

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a

$$AI_n = A \quad \text{et} \quad I_m A = A.$$

P 26 *Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est diagonale et les coefficients diagonaux de AB s'obtiennent en multipliant les coefficients diagonaux correspondants de A et B.*

On un résultat analogue pour l'addition, la démonstration étant triviale dans ce cas.

Si $AB = AC$, a-t-on $B = C$? En général, non !

E 27

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors, les matrices B et C sont distinctes et on a

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

T 28 Vérifier l'assertion précédente.

Existe-t-il un inverse pour la multiplication matricielle ? La réponse est «parfois».

Contrairement au calcul dans un corps, le produit de deux matrices non nulles peut donner la matrice nulle. On appelle de telles matrices des **diviseurs de zéro.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D 29

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

  Si un tel B existe, il est unique et est noté A^{-1}. On l'appelle l'**inverse** de A.
- Le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles s'appelle **groupe linéaire d'ordre n** et on le note $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

T 30 *Muni de la multiplication matricielle, le sous-ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.*

E 31 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible et son inverse est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

T 32 Montrer le !

Certaines matrices ne sont pas inversibles, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible. En effet, on ne peut pas trouver une matrice vérifiant

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car le coefficient d'indice $(1, 1)$ du produit est 0 et $0 \neq 1$.
De manière générale, une matrice dont une colonne (ou une ligne) est nulle n'est jamais inversible (mais il y en a d'autres).

P 33 *Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, on a*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

P 34 *La matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$. *Dans ce cas*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

T 35 Retrouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ à l'aide de ce résultat.

T 36 Vérifier la formule de proposition précédente, c'est-à-dire que la matrice proposée est bien l'inverse de A.

Démonstration. Reste à montrer l'équivalence! ∎

N

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

P 37 *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors*

$$AB = AC \implies B = C$$

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$BA = CA \implies B = C$$

Si A est inversible et $AB = CA$, alors on ne peut pas conclure que $B = C$, mais uniquement

$$B = A^{-1}CA.$$

Il n'est pas possible de «diviser» par une matrice. Même lorsque celle-ci est inversible, on peut uniquement multiplier à droite ou à gauche par la matrice inverse.

T 38 *Soit A une matrice inversible.*

1. *La matrice A^{-1} est inversible et*
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$
2. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et*
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

Esquisse. Revenir à la définition de matrice inversible. ∎

T 39 *Soit A, B deux matrices (n, n) inversibles, alors AB est inversible et*
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

D 40 Si A est une matrice carrée (n, n), on pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^{p+1} = A^p A.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A^p \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$A^p = \underbrace{AA \dots A}_{p \text{ termes}}$$

Si de plus A est inversible, alors pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$$

et l'on note donc $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p$.

L 41 *Soit A une matrice carrée, $r, s \in \mathbb{N}$, alors*

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Si A est inversible, ces résultats restent valables avec $r, s \in \mathbb{Z}$.

T 42 Vérifier le lemme précédent.

T 43 Les matrices A et B étant de type convenables (c'est-à-dire?), développer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= \\ (AB)^2 &= \\ (A-B)(A+B) &= \end{aligned}$$

T 43 Les matrices A et B étant de type convenables (c'est-à-dire?), développer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= \\ (AB)^2 &= \\ (A-B)(A+B) &= \end{aligned}$$

P 44 *Soit A, B deux matrices carrées (n, n) telles que $AB = BA$, alors*

$$\forall r, s \in \mathbb{N}, A^r B^s = B^s A^r, \qquad \forall r \in \mathbb{N}, (AB)^r = A^r B^r.$$

Lorsque A, B sont inversibles, ces résultats restent valables avec $r, s \in \mathbb{Z}$.

P 45 **Binome de Newton**

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $AB = BA$ *et* $p \in \mathbb{N}$*, alors*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Esquisse. Par récurrence sur r. On développe, on découpe en deux, on fait un changement d'indice pour retrouver des termes en $A^{p+1-k}B^k$, on regroupe en mettant de côté les morceaux qui dépassent, on utilise la formule de Pascal, on recolle tout. Bien faire attention à l'utilité de l'hypothèse $AB = BA$. ∎

P 46 *Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}^\star$, alors*

$$A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k.$$

Démonstration. En exercice. ∎

On exprime l'hypothèse $AB = BA$ en disant que A et B **commutent**. Cette hypothèse est fondamentale, comme le montrent les calculs

$$\begin{aligned}
(AB)^2 &= ABAB \\
(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\
(A-B)(A+B) &= A^2 + AB - BA - B^2.
\end{aligned}$$

D 47 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice (m, n). La **transposée** de A est la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ de type (n, m), telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], b_{ij} = a_{ji}.$$

La transposée de A est notée A^T.On peut donc écrire

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \left(A^T\right)[i, j] = A[j, i].$$

Ainsi, les colonnes de A^T sont les lignes de A.

E 48 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les coefficient diagonaux d'une matrice carré sont invariants par transposition : $a_{i,i}$ reste $a_{i,i}$. Ainsi, si D est une matrice diagonale, $D^T = D$.

P 49 *Pour* $A, B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

On dit que la transposée est *involutive* et *linéaire*.

T 50 Si A est une matrice (m, n) et B est une matrice (n, p), quels sont les types des matrices $(AB)^T$, A^T, B^T ? Montrer que seul le produit $B^T A^T$ est toujours défini. Montrer également qu'il a même type que $(AB)^T$.

P 51 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^T A^T$.*

Esquisse. D'après le test 50, nous savons que $(AB)^T$ et $B^T A^T$ ont même type. Pour montrer que $(AB)^T = B^T A^T$, on doit montrer que leurs coefficients d'indice (i, j) sont égaux. Un calcul avec la notation $\left((AB)^T\right)[i, j]$ et $\left(B^T A^T\right)[i, j]$ est conseillé. ∎

P 52 *Soit A une matrice carrée inversible, alors A^T est inversible et*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T .$$

Esquisse. Revenir à la définition d'inverse. ∎

D 53 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** si $A^T = A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques (n, n).

T 54 Déterminer A sachant qu'elle est symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \\ & 2 & \\ 5 & & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & -7 \\ & & \end{pmatrix}$$

R Les matrices diagonales sont des matrices symétriques.

D 55 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **antisymétrique** si $A^T = -A$.

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (n, n).

T 56 Montrer que les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

D 57

- Les matrices de type $(n, 1)$ sont appelés **matrices colonnes** ou **vecteurs colonnes**.
- Les matrices de type $(1, p)$ sont appelés **matrices lignes** ou **vecteurs lignes**

Dans la suite,

- Le terme **vecteur** désignera un vecteur colonne.
- Pour distinguer les vecteurs des scalaires on utilisera dans la mesure du possible des lettres grecques pour les scalaires, des lettres latines pour les vecteurs.
- Nous écrirons souvent les vecteurs colonnes comme la transposée d'un vecteur ligne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T,$$

  Nous écrirons même généralement $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, avec des virgules séparant les coefficients. Il n'y a pas virgules dans la notation matricielle, mais celles-ci améliorent la lisibilité.
- Comme les deux sont des n-uplets, il est fréquent d'identifier l'espace $\mathbb{K}^n$ à $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ ou encore à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que nous écrivons les n-uplets de $\mathbb{K}^n$ en ligne ou en colonne, selon nos besoins.

R Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- La **somme** des vecteurs u et v est le vecteur

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Sous forme de matrices colonnes, cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

R Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, le **produit du vecteur u par le scalaire λ** est le vecteur

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$

ou encore, en colonnes,

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

D 58 Soit $v_1, v_2, \ldots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'un vecteur v est **combinaison linéaire** de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

D 59 Un vecteur dont tous les coefficients sont nuls est appelé **vecteur nul**. On le note 0 ou $\mathbf{0}$ ou $\overrightarrow{0}$.

Il y a un vecteur nul dans chaque espace $\mathbb{K}^n$.

Soit A une matrice (m, n), alors les colonnes de A sont des vecteurs (colonnes). En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, les colonnes de A sont les vecteurs $c_1, c_2, \dots, c_n$ avec

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si $x \in \mathscr{M}_{n1}$ est un vecteur colonne, alors le produit Ax est une matrice $(m, 1)$, c'est donc également un vecteur colonne.

T 60 *Soit A un matrice (m, n). On note $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les colonnes de A. Alors si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$,*

$$Ax = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n.$$

Le théorème affirme que le produit Ax, qui est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, est un combinaison linéaire des colonnes de A.

T 61 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer Ax de deux manières différentes.