Chapter 29 Dérivées

29.1 Dérivées

Solution 29.1

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0 \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$
L'application f est donc dérivable et au point a et $f'(a) = 0$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-5x + 5a}{x - a} = -5 \xrightarrow[x \to a]{} -5.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = -5$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $s \neq a$,
$$\frac{h(s) - f(a)}{s - a} = \frac{3 + \frac{2}{3}s - 3 - \frac{2}{3}a}{s - a} = \frac{\frac{2}{3}s - \frac{2}{3}a}{s - a} = \frac{2}{3} \xrightarrow[s \to a]{} \frac{2}{3}.$$
L'application h est donc dérivable au point a et $h'(a) = -\frac{2}{3}$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + x - 3 - a^2 - a + 3}{x - a} = \frac{x^2 - a^2 + x - a}{x - a} = x + a + 1 \xrightarrow[x \to a]{} 2a + 1.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = 2a + 1$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - 12x - a^3 + 12a}{x - a} = \frac{x^3 - a^3 - 12(x - a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2 - 12 \xrightarrow[x \to a]{} 3a^2 - 12.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = 3a^2 - 12$.

6. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$. Pour $x \neq a$ au voisinage de a,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{a-1}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{(x-1)(a-1)}}{x - a} = -\frac{1}{(x - 1)(a - 1)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-1}{(a - 1)^2}.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$.

7. L'application f et définie sur $[-4, +\infty[$. Soit $a \geq -4$. Pour $x \in [-4, +\infty[$ avec $x \neq a$, on a
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{a + 4}}{x - a} = \frac{x + 4 - a - 4}{(x - a)(\sqrt{x + 4} + \sqrt{a + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x + 4} + \sqrt{a + 4}}.$$
Or $\lim_{x \to a} \sqrt{x + 4} + \sqrt{a + 4} = 2\sqrt{a + 4}$. On a donc
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a + 4}} & : a > -4 \\ +\infty & : a = -4. \end{cases}$$

L'application f est donc dérivable en a si $a > -4$ et alors $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a+4}}$.

L'application f n'est pas dérivable en -4.

13. L'application f est définie sur $\mathbb{R}^\star$. Soit $a \in \mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq a$ au voisinage de a, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \frac{a^2 - x^2}{(x-a)x^2a^2} = -\frac{a+x}{x^2a^2} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{2a}{a^4} = \frac{-2}{a^3}.$$

L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-2}{a^3}$.

14. L'application f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Soit $a > 0$. Pour $x > 0$ avec $x \neq a$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{a}}}{x - a} = 4\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{(x-a)\sqrt{x}\sqrt{a}} &= 4\frac{a - x}{(x-a)\sqrt{x}\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{a}\sqrt{x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-4}{\sqrt{a}\sqrt{a} \times 2\sqrt{a}} = \frac{-2}{a^{3/2}}.\end{aligned}$$

L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-2}{a^{3/2}}$.

Solution 29.3

Si $x \in V$, $x > x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x0}.$$

Par compatibilité de la relation $\leq$ avec la limite, on obtient lorsque $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$

$$f'_d(x_0) \leq g'_d(x_0).$$

Si $x \in V$, $x < x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x0}.$$

et lorsque $x \underset{<}{\rightarrow} x_0$

$$f'_g(x_0) \geq g'_g(x_0).$$

Les fonctions f et g étant dérivables en x_0, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ et $g'(x_0) = g'_g(x_0) = g'_d(x_0)$, d'où

$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

Application : Si k est pair, on peut utiliser la fonction $g : x \mapsto x$. On a alors

$$f(k\pi) = k\pi = g(k\pi) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f(x) \leq g(x) & : x \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) & : x \leq 0 \end{cases}$$

D'où $f'(k\pi) = g'(k\pi) = 1$ (inverser le rôle de f et g si $k < 0$).

Si k est impair, on peut utiliser la fonction $g : x \mapsto -x$.

Solution 29.4

29.2 Opérations sur les dérivées

Solution 29.5

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, et donc

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

et en évaluant en 1,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2. Le premier terme de la somme étant nul, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}$$

Or,

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} 1^{n-p} 1^p = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}.$$

Finalement, $A_n = n2^{n-1}$.

Solution 29.6

1. Vrai. En notant T une période de f, on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Les fonctions $x \mapsto f(x+T)$ et $x \mapsto f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont même dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+T) = f'(x).$$

2. Faux. Contre exemple $f : x \mapsto x$ ou $f : x \mapsto x + \sin x, \ldots$

3. Vrai. On a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

Les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont même dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x).$$

La fonction f' est donc impaire.

4. Vrai. Mutatis mutandis la relation $f(-x) = -f(x)$ donne $-f'(-x) = -f'(x)$.

5. Faux. Prendre $f : x \mapsto 5$ ou $f : x \mapsto \cos(x) + 23$. Par contre, si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

Solution 29.7 *Calcul de dérivées*

Les réponses sont données ci-après, j'espère sans coquille. Bien sûr, la dérivabilité doit être parfaitement justifiée.

1. $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$ est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_1'(x) = e^x \left(x \ln(x) + \ln(x) + 1\right).$$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x) \ln\left(1 + x^2\right)}{x \tan(x)}$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_2'(x) = \frac{2x^2 \cos(x) - (\cos(x) + x\sin(x))\left(1 + x^2\right) \ln\left(1 + x^2\right)}{x^2\left(1 + x^2\right)}.$$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1} e^{1/x}$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_3'(x) = \frac{2x - x^2 - 2}{x(x-1)^2} e^{1/x}.$$

4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{\ln(x)}$ est définie, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_4'(x) = \frac{2x^2 \ln(x) + 1 - x^2}{x \ln^2(x)}.$$

5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_5'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

6. $f_6 : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. est définie sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_6'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. est définie, dérivable sur $]1, 1[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_7'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. est définie, dérivable sur $D = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ et sur D, on a

$$f_8'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$. est définie, dérivable sur $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]6k\pi, 6\pi + 6k\pi[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_9'(x) = -\frac{1}{3\,(1-\cos(x/3))}.$$

10. $f_{10} : x \mapsto x^2 \exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$. est définie, dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$ et sur D, on a

$$f_{10}'(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}\left(\frac{2x^4-x^3-4x^2-x+2}{\left(x^2-1\right)^2}\right).$$

11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$. est définie, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{11}'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)}.$$

12. $f_{12} : x \mapsto |x|^3$. est définie sur $\mathbb{R}$. Par les théorème calculatoires, f_{12} est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et on a

$$f_{12}'(x) = \begin{cases} -3x^2 & : x < 0 \\ 3x^2 & : x > 0 \end{cases}.$$

Si on étudie le taux d'accroissement de f entre x et 0, on remarque que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \pm\frac{x^3}{x} = \pm x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

ce qui signifie que f_{12} est aussi dérivable en 0 et que $f_{12}'(0) = 0$.

13. $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$. est définie sur $]0,+\infty[$, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0,1[, f_{13}'(x) = -x\frac{4\ln(x)+1}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$
$$\forall x \in]1,+\infty[, f_{13}'(x) = x\frac{4\ln(x)+1}{2\sqrt{\ln(x)}}.$$

14. $f_{14} : x \mapsto x + \dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{14}'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1+\ln(-x)}{x^2} & : x < 0 \\ \dfrac{x^2+1-\ln(x)}{x^2} & : x > 0. \end{cases}$$

15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$. est définie, dérivable sur $]0,+\infty[\setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{N} \}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{15}'(x) = \frac{\cos(x)+x\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x) - \cos(5x)}$. est définie, dérivable sur l'union des intervalles du type

$$\left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[, \quad \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[, \quad \left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[.$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et sur chacun de ces intervalles, on a

$$f_{16}'(x) = \frac{5\sin(5x) - 3\sin(3x)}{\sqrt{\cos(3x) - \cos(5x)}}.$$

17. $f_{17} : x \mapsto \left|x^2 - 3x + 2\right|$. est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1, 2 \}$ et on a

$$\forall x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[, f_{17}'(x) = 2x - 3$$
$$\forall x \in]1, 2[, f_{17}'(x) = 3 - 2x.$$

18. $f_{18} : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - 3e^x + 2\right)$. est définie, dérivable sur $]-\infty, 0[\cup] \ln(2), +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{18}'(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}.$$

19. $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{19}'(x) = \sin(2x)\sin\left(x^2\right) + 2x\sin^2(x)\cos\left(x^2\right).$$

20. $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{x}{|x|} + \frac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$. est définie, dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et sur cet ensemble, sa dérivée est nulle.

21. $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$. est définie sur $]0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]0, 1[$, on a

$$f_{21}'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}.$$

22. $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1, 0 \}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{22}'(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

23. $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$. est définie, dérivable sur $D =]-1, 1[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{23}'(x) = \frac{-4x}{1 - x^4}.$$

24. $f_{24} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$. est définie, dérivable sur $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{24}'(x) = \frac{2}{\cos^3(x)}.$$

25. $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$. est définie, dérivable sur $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{25}'(x) = \frac{2}{\cos(2x)}.$$

26. $f_{26} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$. est définie, dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{26}'(x) = \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}.$$

27. $f_{27} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{27}'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}.$$

28. $f_{28} : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x})$. est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{28}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

29. $f_{29} : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$. est définie, dérivable sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{29}'(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

30. $f_{30} : x \mapsto \frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$. est définie, dérivable sur $]1,2[\cup]2,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{30}'(x) = \frac{2x(x-1)\ln(x-1) - x^2 + 4}{(x-1)\ln^2(x-1)}.$$

31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$. est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_{31}'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Solution 29.8

On écrit
$$f(x) = e^{x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right)},$$
cette écriture n'ayant de sens que si $x \neq 0$ et $\frac{x-a}{x} > 0$. Un tableau de signes permet d'obtenir l'ensemble de définition de f
$$D = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]a, +\infty\right[\,.$$

La fonction $u\ :\ x \mapsto \frac{x-a}{x}$ est dérivable sur D et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus, pour $x \in D, u(x) \in \mathbb{R}_+^\star$. La fonction $g\ :\ \ln \circ u\ :\ x \mapsto \ln\left(\frac{x-a}{x}\right)$ est donc dérivable sur D et
$$\forall x \in D, g'(x) = \ln'(u(x))\, u'(x) = \frac{x}{x-a}\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x(x-a)}.$$
La fonction $x \mapsto x$ est également dérivable sur D, donc le produit $h\ :\ x \mapsto x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right)$ est dérivable sur D et
$$\forall x \in D, h'(x) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + xg'(x) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}.$$
De plus, pour $x \in D$, $h(x) \in \mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur D et
$$\forall x \in D, f'(x) = \exp(h(x))\, h'(x) = \left(\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}\right)\exp\left(x\ln\frac{x-a}{x}\right).$$

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{-a}{x} \to 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc
$$\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\frac{a}{x}.$$
Ainsi,
$$x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -a \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = -a;$$
et puisque la fonction exp est continue en $-a$,
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{-a}.$$
(Attention, on peut composer les limites, pas les équivalents…)

29.3 Étude globale des fonctions dérivables

Solution 29.9

1. La fonction f est dérivable sur $]-1,2[$ et $f'(x) = -1$. La fonction f n'a donc aucun point critique ; Les extrémums sont donc à rechercher au bornes de l'intervalle. On a

x	-1	2
$f(x)$	4	1

Donc $\min f = 1$ et ce minimum est atteint en 2 et $\max f = 4$ et ce maximum est atteint en -1.

2. La fonction g est dérivable sur $]0,4[$ et $g'(x) = 2x - 2$. La fonction g a donc un seul point critique en 1. Les extrémums de g sont à rechercher au points $0, 1, 4$.

x	0	1	4
$g(x)$	0	-1	8

La fonction g a donc un minimum global en 1 et $\min g = -1 = g(1)$. La fonction g a donc un maximum global en 4 et $\max g = 8 = g(4)$.

Remarque g admet un maximum local en 0.

3. La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$g'(t) = \frac{2t(t^2+3) - t^2(2t)}{(t^2+3)^2} = \frac{6t}{(t^2+3)^2}$$
$$\text{et } g'(t) = 0 \iff t = 0.$$

Les extrémums de g sont à rechercher au points $-1, 0, 1$.

t	-1	0	1
$g(t)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

La fonction g a donc un minimum global en 0 et $\min g = 0 = g(1)$.
De plus, $\max g = \frac{1}{4}$; ce maximum est atteint en -1 et en 1.

Solution 29.12

La fonction f est dérivable en 0, donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}f'(0).$$

Nous allons appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire h définie sur $[0,1]$ par

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & : x\in]0,1]\\ f'(0) & : x=0.\end{cases}$$

La remarque précédente montrer que h est continue en 0, de plus, f est continue sur $]0,1]$ en tant que quotient de fonction continue sur $]0,1]$.

La fonction f est donc continue sur $[0,1]$. De plus, f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que quotient définit de fonctions dérivables sur $]0,1[$ et

$$\forall x\in]0,1[, h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}.$$

Enfin, $h(0)=f'(0)=f(1)=\frac{f(1)}{1}=h(1)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,1[$ tel que $h'(c)=0$, c'est-à-dire

$$f'(c)c-f(c)=0 \qquad \text{ou encore} \qquad f'(c)=\frac{f(c)}{c}.$$

Solution 29.13

.

Solution 29.14

Idée: On reprend l'idée de la démonstration du théorème de Rolle en cherchant un extremum local.

Si la fonction f est constante, le résultat est trivial. Supposons maintenant que f n'est pas constante. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose donc l'existence d'un $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) > 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x)| \leq f(a)/2.$$

Or f est continue sur le segment $[0, A]$, ainsi l'image de $[0, A]$ par f est un segment:

$$f([0, A]) = [m, M], \quad m \leq f(0) = 0 \leq M.$$

Il existe donc $c \in [0, A]$ tel que $f(c) = M$. Remarquons que l'inégalité $f(a) > f(a)/2$ assure que $a \in]0, A[$ et donc $f(c) \geq f(a) > f(A)$. Ainsi f admet un maximum local au point c et $c \in]0, A[$; puisque f est dérivable sur $]0, A[$, on a $f'(c) = 0$.

Variante. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire sur $[a, A]$, on obtient $c > a$ tel que $f(c) = f(a)/2$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire sur $[0, a]$, on obtient $d < a$ tel que $f(d) = f(a)/2$. On applique alors le théorème de Rolle sur $[c, d]$...

ue Ce résultat reste vrai en supposant uniquement f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Il suffit de remplacer f par $f - f(0)$ pour se ramener au cas de l'exercice.

Solution 29.15

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[10000, 10001]$, dérivable sur $]10000, 10001[$; nous pouvons donc appliquer l'égalité des accroissements finis à f sur $[10000, 10001]$: il existe $c \in]10000, 10001[$ tel que

$$\sqrt{10001} - 100 = f(10001) - f(10000) = f'(c)(10001 - 10000) = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Or $10000 < c < 10001$, d'où

$$0 < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}.$$

L'érreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100 est majorée par $\frac{1}{200} = 0.005$.

Solution 29.16

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}.$$

Soit $x \in]1, +\infty[$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, l'égalité des accroissements finis assure l'existence de $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) = (x+1-x)f'(c) = \frac{1}{c\ln c}.$$

Or $1 < x < c$ donc $c\ln c > x\ln x > 0$ et $\frac{1}{c\ln c} < \frac{1}{x\ln x}$ d'où

$$\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x\ln x}.$$

Solution 29.17

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction ln est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Puis que $k < c < k+1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k).$$

D'où, par telescopage,

$$S_n \geq \ln(n+1)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on a donc par comparaison

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Solution 29.18

Solution 29.19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Soit $x > 0$, appliquons l'égalité des accroissements finis à f sur $[x, x+1]$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$; il existe donc $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = (x+1-x) f'(c_x) = -\frac{1}{c_x^2} e^{1/c_x}.$$

On en déduit

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = -\frac{x^2}{c_x^2} e^{1/c_x}.$$

Or $x < c_x < x+1$ donc

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} < \frac{x}{c_x} < 1;$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{c_x} = 1$ par encadrement. De plus, $c_x > x$ on a donc $\lim_{x \to +\infty} c_x = +\infty$ puis

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{c_x} = 0 \qquad \text{or } \lim_{y \to 0} e^y = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{1/c_x} = 1.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to +\infty} -\left(\frac{x}{c_x} \right)^2 e^{1/c_x} = -1^2 \times 1 = -1.}$$

Solution 29.20

1. Nous savons que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in R, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \implies f'(x) \geq M.$$

Exploitons la définition avec $M = 1$: il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \geq A, f'(x) \geq 1.$$

Quitte a remplacer A par $\max(A, 222)$, on peut supposer $A > 0$.

2. Soit $x > A$. La fonction f est continue sur $[A, x]$, dérivable sur $]A, x[$; l'égalité des accroissements finis assure l'existence de $c \in]A, x[$ tel que

$$f(x) - f(A) = f'(c)(x - A).$$

Or $c > A$, donc $f'(c) \geq 1$, de plus $x - A > 0$, on a donc

$$f(x) = f(A) + f'(c)(x - A) \geq f(A) + x - A.$$

Or $\lim_{x \to +\infty} f(A) + x - A = +\infty$, et par comparaison

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Solution 29.21 *Le théorème de Darboux*

1. La fonction φ est continue sur $]a,b]$ en tant que quotient défini de fonction continue sur $]a,b]$.

   De plus, f étant dérivable au point a,

   $$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

   L'application φ se prolonge donc par continuité en a en posant $\varphi(a)=f'(a)$. Ce prolongement est continue en a et a fortiori sur $[a,b]$.

2. Même chose en prolongeant avec $\psi(b)=f'(b)$.

3. On remarque que $\varphi(b)=\psi(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   Ainsi λ est nécessairement compris entre $\varphi(a)=f'(a)$ et $\varphi(b)$ ou est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b)=f'(b)$.

   Si λ compris entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Puisque φ est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c\in[a,b]$ tel que $\varphi(c)=\lambda$.

   Sinon, λ est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b)=f'(b)$. Puisque ψ est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c\in[a,b]$ tel que $\psi(c)=\lambda$.

Conclusion

Il existe $c\in[a,b]$ tel que $\varphi(c)=\lambda$ ou $\psi(c)=\lambda$.

4. *Premier cas.* Si $\lambda=f'(a)$ ou $\lambda=f'(b)$, on peut choisir $\alpha=a$ ou $\alpha=b$. Sinon, on a nécessairement $c\in]a,b[$.

   Deuxième cas. Si $c\in]a,b[$ et $\varphi(c)=\lambda$, c'est-à-dire

   $$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\lambda$$

   La fonction f est continue sur $[a,c]$ et dérivable sur $]a,c[$. D'après l'égalité des accroissement fini, il existe $\alpha\in]a,c[$ tel que

   $$f(c)-f(a)=(c-a)f'(\alpha)\quad\text{c'est-à-dire}\quad f'(\alpha)=\varphi(c)=\lambda.$$

   Troisième cas. Sinon, on a $c\in]a,b[$ et $\psi(c)=\lambda$. De manière analogue au cas précédent, la fonction f est continue sur $[c,b]$, dérivable sur $]c,b[$, donc il existe $\alpha\in]c,b[$ tel que

   $$f(c)-f(b)=(c-b)f'(\alpha)\quad\text{c'est-à-dire}\quad f'(\alpha)=\psi(c)=\lambda.$$

Conclusion

Il existe $\alpha\in[a,b]$ tel que $f'(\alpha)=\lambda$.

Solution 29.22 *La règle de l'Hospital*

Remarquons que lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des acroissements finis pour le première question, et le théorème de prolongement des dérivée pour la seconde. Les solutions proposées ici s'inspire directement des démonstration de cours de ces théorèmes.

1. On définit une fonction auxiliaire h par

$$\forall x \in [a,b], h(x) = (f(x) - f(a))\, A - (g(x) - g(a))\, B,$$

où les constantes A et B sont choisies de manière à avoir $h(a) = h(b) = 0$. Or, on a toujours $h(a) = 0$ et

$$h(b) = (f(b) - f(a))\, A - (g(b) - g(a))\, B.$$

On choisit par exemple $A = g(b) - g(a)$ et $B = f(b) - f(a)$ de sorte à avoir $h(b) = 0$.

La fonction h est une combinaison linéaire des fonctions f, g et $\tilde{1}$, elle est donc continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $h(a) = h(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$Af'(c) - Bg'(c) = 0$$

ou encore

$$(g(b) - g(a))\, f'(c) - (f(b) - f(a))\, g'(c) = 0.$$

2. (a) Soit $x \in]a,b[$. Le résultat de la question 1 reste valable sur $[a,x]$. Ainsi, f et g sont deux fonctions continues sur $[a,x]$, dérivables sur $]a,x[$, donc il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$(f(x) - f(a))\, g'(c_x) = (g(x) - g(a))\, f'(c_x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'\left(c_x\right)}{g'\left(c_x\right)}.$$

Or $a < c_x < x$, on a donc

$$\lim_{x \to a} c_x = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

et par composition de limites

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$

Solution 29.23

Solution 29.24

Solution 29.25

Solution 29.26

Soit $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{-2\left(\sin\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2.$$

Or

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \text{ et } \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ainsi

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \times 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

Solution 29.27

1. Pour $t \in I_1$,
$$(\mathbf{??}) \iff y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de polynôme caractéristique $X + 1$ et second membre de la forme «polynôme-exponentielle».
Les solution de $y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}$.
Une solution particulière (à chercher sous la forme $t \mapsto ate^{-t}$ car -1 est racine de $X + 1$) est $t \mapsto te^{-t}$
Les solution de l'équation (**??**) sur I_1 sont donc les fonctions
$$\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t+\lambda)e^{-t} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $t \in I_2$,
$$(\mathbf{??}) \iff y'(t) + y(t) = e^{t}.$$
Les solution de $y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}$.
Une solution particulière (à chercher sous la forme $t \mapsto ae^{t}$ car 1 n'est pas racine de $X + 1$) est $t \mapsto \frac{1}{2}e^{t}$.
Les solution de l'équation (**??**) sur I_2 sont donc les fonctions
$$\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}e^{t} + \mu e^{-t} \end{array}, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Supposons f solution de (**??**) sur $\mathbb{R}$ alors f est solution sur I_1 et I_2. Il existe donc des réels λ, μ, α tels que
$$f : x \mapsto \begin{cases} (t+\lambda)e^{-t} & t < 0 \\ \alpha & t = 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + \mu e^{-t} & t > 0. \end{cases}$$
Or f est continue en 0 si et seulement si [1]
$$\lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu.$$
Ceci étant vérifié, f est dérivable en 0 si et seulement si [2]
$$1 - \lambda = \frac{1}{2} - \mu.$$
On obtient donc la condition $\lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu$. Dans ce cas, $f'(0) = 1 - \lambda$.
Réciproquement, soit
$$f : t \mapsto \begin{cases} (t+\lambda)e^{-t} & t < 0 \\ \lambda & t = 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + (\lambda - \frac{1}{2})e^{-t} & t > 0. \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$
D'après les questions précédentes, une telle fonction f est solution de (**??**) sur $\mathbb{R}^\star$. De plus, elle est dérivable d'après les calculs précédent et $f'(0) = 1 - \lambda$ et on a alors
$$f'(0) + f(0) = 1 - \lambda + \lambda = 1 = e^{|0|}.$$
Donc f est solution de (**??**) sur $\mathbb{R}$.

[1] $\lim_{0^-} f = f(0) = \lim_{0^+} f = f(0) = \lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu$.
[2] $f'_g(0) = f'_d(0) = 1 - \lambda = \frac{1}{2} - \mu$.

29.4 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

Solution 29.28

Solution 29.29

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $u(x) = 3x^2 + x - 5$ et $v(x) = e^{-x}$. Les fonction u et v sont clairement dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et

$$u'(x) = 6x + 1 \qquad u''(x) = 6 \qquad u^{(k)}(x) = 0 \qquad (k \geq 3).$$

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$v^{(k)}(x) = \begin{cases} e^{-x} & : \text{k est pair} \\ -e^{-x} & : \text{k est impair} \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \quad v^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}.$$

La formule de Leibniz permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) + \cancel{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0} v^{(n-k)}(x)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0}(3x^2 + x - 5)(-1)^n e^{-x} + \binom{n}{1}(6x+1)(-1)^{n-1} e^{-x} + \binom{n}{2} 6 (-1)^{n-2} e^{-x} \\
&= (-1)^n e^{-x} \left(3x^2 + x - 5 - n(6x+1) + \frac{n(n-1)}{2} 6\right) \\
&= \boxed{(-1)^n e^{-x} \left(3x^2 + (1-6n)x + 3n^2 - 4n - 5\right)}.
\end{aligned}$$

Solution 29.30

Solution 29.31

1. Le polynôme caractéristique de (**??**) est $P = X^2 + n^2$ et admet pour racines $-in$ et in.

Les solutions de l'équation (**??**) sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. (a) y est deux fois dérivable sur $]-1,1[$, cos est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et $\cos(]0,\pi[) \subset]-1,1[$ donc z est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\sin t\, y'(\cos t) \\ z''(t) &= -\cos t\, y'(\cos t) + \sin^2 t\, y''(\cos t) \\ &= (1-\cos^2 t)y''(\cos t) - \cos t\, y'(\cos t). \end{aligned}$$

(b) Lorsque y est solution de (**??**),

$$\forall x \in]-1,1[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0.$$

Or, pour $t \in]0,\pi[$, $\cos t \in]-1,1[$, d'où

$$(1-\cos^2 t)y''(\cos t) - \cos t\, y'(\cos t) + n^2 y(\cos t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0.$$

L'application z est alors solution de (**??**).

(c) Si y est solution de (**??**), alors $z : t \mapsto y(\cos t)$ est solution de (**??**), donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]0,\pi[, z(t) = \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt).$$

Soit $x \in]-1,1[$ et $t = \arccos x \in]0,\pi[$, alors

$$y(x) = z(\arccos x) = \lambda\cos(n\arccos x) + \mu\sin(\arccos x).$$

Réciproquement, si

$$y : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(n\arccos x) + \mu\sin(n\arccos x) \end{array}$$

alors y est dérivable deux fois et (*faites le calcul*)

$$y'(x) = \dots\dots \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \dots\dots$$

d'où (*faites le calcul*)

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = \cdots\cdots = 0.$$

Conclusion : Les solutions de (**??**) sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(n\arccos x) + \mu\sin(n\arccos x) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 29.32

1. Pour $x \neq 0$, $|\sin 1/x| \leq 1$, on a
$$|f(x)| \leq x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Par domination, f tend vers $0 = f(0)$ quand $x \to 0$: la fonction f est continue en 0.
2. Le taux d'accroissement de f en 0 est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
La limite étant obtenue par encadrement comme ci-dessus. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable (Justifiez) et $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin(1/x) = 0$ et $-\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (sinon, cos aurait une limite en $+\infty$). Ainsi, $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0, c'est-à-dire f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Solution 29.33

La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,b[$ et sur $]b,+\infty[$ et on a

$$\forall x\in]0,b[,\ f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}\qquad\text{et}\qquad\forall x\in]b,+\infty[,\ f'(x)=2x$$

(CN) Supposons f de classe $\mathscr{C}^1$, elle est nécessairement continue au point b. Or

$$\lim_{\substack{x\to b\\<}} f(x)=a\sqrt{b}\qquad\text{et}\qquad\lim_{\substack{x\to b\\>}} f(x)=b^2+12\qquad\text{et}\qquad f(b)=b^2+12.$$

Ainsi, la fonction f est continue en b si, et seulement si $a\sqrt{b}=b^2+12$.

De plus, Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a de plus $\lim_{\substack{x\to b\\<}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to b\\>}} f'(x)=f'(b)$. Or

$$\lim_{\substack{x\to b\\<}} f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{b}}\qquad\text{et}\qquad\lim_{\substack{x\to b\\>}} f'(x)=2b.$$

On a donc $\frac{a}{2\sqrt{b}}=2b$, c'est-à-dire $a=4b\sqrt{b}$. D'où

$$\begin{cases}a\sqrt{b}=b^2+12\\ a=4b\sqrt{b}\end{cases}\iff\begin{cases}4b^2=b^2+12\\ a=4b\sqrt{b}\end{cases}\overset{b>0}{\iff}\begin{cases}b=2\\ a=8\sqrt{2}\end{cases}$$

(CS) Réciproquement, si $a=8\sqrt{2}$ et $b=2$. Pour $x\in]0,2[$,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{8\sqrt{2x}-16}{x-2}=16\frac{\sqrt{2x}-2}{2x-4}=\frac{16}{\sqrt{2x}+2}\xrightarrow[\substack{x\to 2\\<}]{}4;$$

et pour $x\in]2,+\infty[$,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2+12-16}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2\xrightarrow[\substack{x\to 2\\<}]{}4.$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4,$$

la fonction f est donc dérivable en 2 et $f'(2)=4$.

On a de manière imédiate

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=4\quad\text{et}\quad\lim_{\substack{x\to 2\\>}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}} 2x=4,$$

donc $\lim_{x\to 2} f'(x)=f'(2)$. La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ au point $b=2$.

Variante pour la (CS). En utilisant le théorème de prolongement de la dérivée qui sera vu ultérieurement.

En supposant $a=8\sqrt{2}$ et $b=2$. On a

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=16=f(2).$$

Donc f est continue en 2. De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}} f'(x)=4$$

donc $\lim_{x \to 2} f'(x) = 4$ et f est continue. D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$. Puisque $\lim_{x \to 2} f'(x) = f'(2)$, f est de classe $\mathscr{C}1$.

Conclusion

La fonction f est de classe $\mathscr{C}1$ si, et seulement si $a = 8\sqrt{2}$ et $b = 2$.

Solution 29.34 *Centrale PSI*