# Calculs algébriques

# Aperçu

1. Le symbole somme $\sum$
2. Sommes usuelles
3. Généralisation de la notation $\sum$
4. Le symbole produit $\prod$

**D** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. La somme des termes de $u_p$ à $u_q$ est notée

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme $\sum_{k=p}^{q} u_k$ se note aussi $\sum_{p\leq k\leq q} u_k$.

Pour tous entiers naturels $p \leq q$, la somme $\sum_{k=p}^{q}$ comporte $q - p + 1$ termes.

**E**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des $n$ premier entiers non nuls est
$$1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

**R** L'indice $k$ est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre indice. Il convient de ne jamais confondre $k$ et $n$. Ainsi

$$\underbrace{n+n+n\cdots+n}_{n} = \sum_{k=1}^{n} n \neq \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n.$$

**T**

Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

**T** Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

____________________________________________________________

________________________________________________

**T** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 775 + 777$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

**T** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 775 + 777$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

**P**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes et* $p \leq q < n$ *trois entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k$$

**P**

*Pour tous nombres complexes $\lambda$ et $\mu$, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a*

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad \sum_{k=p}^{q}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$$

*On dit que $\sum_{k=p}^{q}$ est linéaire.*

On peut écrire directement,

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k + \mu \sum_{k=p}^{q} b_k.$$

**P** *Pour toutes suites de nombres complexes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et tous entiers naturels* $p \leq q$*, on a*

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Re}(a_k); \quad \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Im}(a_k); \quad \overline{\sum_{k=p}^{q} a_k} = \sum_{k=p}^{q} \overline{a_k}.$$

La somme $S = 6 + 8 + 10 + \cdots + 26 + 28$ possède de nombreuses écritures

$$S = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13} (2k+2) = \sum_{k=4}^{15} (2k-2)$$

Plus généralement, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

**M** Effectuons le changement de variable $l = k + 1$ dans la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \{ 0, 1, \dots, n \} & \to & \{ 1, 2, \dots, n+1 \} \\ k & \mapsto & k+1 \end{array}$$

est une bijection : lorsque $k$ décrit l'ensemble $\{ 0, 1, \dots, n \}$, $l = k + 1$ décrit l'ensemble $\{ 1, 2, \dots, n+1 \}$, d'où

$$S_n = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$$

L'indice $l$ étant muet, on préfère écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$

Pour certain changement d'indice, il faut faire attention à l'ordre des bornes : $\displaystyle\sum_{l=n}^{0}$ n'a pas de sens si $0 < n$. On aura par exemple,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} u_{n-l}.$$

P

## Changements d'indices utiles (à savoir retrouver)

1. *Par translation :*
$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+m} = \sum_{k'=p+m}^{q+m} u_{k'} = \sum_{k=p+m}^{q+m} u_k$$
*car* $p \leq k \leq q$ *équivaut à* $p + m \leq k + m \leq q + m$.
2. *Par symétrie :*
$$\sum_{k=p}^{q} a_{p+q-k} = \sum_{k'=p}^{q} u_{k'} = \sum_{k=p}^{q} u_k$$
*car* $p + q - k$ *est le symétrique de* $k$ *par rapport à* $\frac{p+q}{2}$ *et* $p \leq k \leq q$ *équivaut à* $p \leq p + q - k \leq q$.

**P**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

**T**

En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

**P** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

**T** En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

**P**

*Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Démonstration.* Notons $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = 2S + (n+1).$$

D'où $2S = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1-1)(n+1) = n(n+1)$. ∎

**P**

*Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**T** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $p \leq q$ deux entiers naturels alors*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$$

*Démonstration.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 + kr = u_0 + pr + (k-p)r = u_p + (k-p)r$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} u_k &= \sum_{k=p}^{q} u_p + (k-p)r \\
&= (q-p+1)u_p + \sum_{k'=0}^{q-p} k'r && (k' = k-p) \\
&= (q-p+1)u_p + \frac{(q-p+1)(q-p)}{2}r \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_p + (q-p)r\right) \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_q\right).
\end{aligned}$$

∎

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

**E**

$$\sum_{k=p}^{q} k = (q - p + 1)\frac{p + q}{2}.$$

**T**

*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

On peut également écrire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{k}b^{n-k}.$$

T

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

**T**

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

*Démonstration.*

- $a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + ab^5 + b^6)$
- $a^7 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6)$
- $a^{n+1} - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$.

∎

**C** *Soit* $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, *et* $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

**T**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $r$, $p \leq q$ *deux entiers naturels alors*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ (q - p + 1)u_p & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

**T**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

**M** Soit $(u_n)$ une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a\left(u_{n+1} - u_n\right) = av_n.$$

Ainsi, $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $a$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_n = v_0 \frac{1-a^n}{1-a} = \left((a-1)u_0 + b\right) \frac{1-a^n}{1-a} = u_0\left(a^n - 1\right) + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Par télescopage, on a également,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right)$$

et après simplification,

$$u_n = u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

D

- Soit $n$ un entier ; on note $n!$, qui se lit **factorielle n**, l'entier défini par

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

  On a donc $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

- Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices $n$ et $p$** le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

  On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p < 0$ ou $p > n$.

**T**

- Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

T

- Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

**P**

1. *Pour tout* $n, p \in \mathbb{N}$ , $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
3. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ *(formule de Pascal).*
4. *Pour tous* $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p}$ *est un entier naturel.*

T

**Formule du binôme de Newton**

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut également écrire

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Esquisse de démonstration.* Démonstration par récurrence sur $n$. Pour l'hérédité, on utilise $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$. On développe et on effectue le changement de variable adéquat pour retrouver des termes en $a^{n+1-k} b^k$. On découpe les indices qui dépassent, on regroupe les autres grâce à la formule de Pascal. ∎

Si on rajoute une condition sous le symbole $\sum$, cela signifie qu'on se limite aux indices qui vérifient la condition.

**E**

La somme $u_{2p} + u_{2p+2} + \cdots + u_{2q-2} + u_{2q}$ peut être notée $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_{2k}$, mais également

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2q} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{k=2p \\ k \in 2\mathbb{N}}}^{2q} u_k.$$

**E**

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{10} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$$

**N** Soit $I = \{ i_1, \dots, i_n \}$ un ensemble fini et $u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ des complexes alors on note

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \cdots + u_{i_n}$$

**E** Si $I = \{ 0, 2, \dots, 2n \}$,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k$$

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}}$ une famille de nombres complexes. Une telle famille peut être rangée dans un tableau que nous appellerons **matrice** à $p$ lignes et $q$ colonnes. Par exemple, dans le cas où $p=3$ et $q=5$ :

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{matrix}$$

T

## Permutation des $\sum$

*La somme des nombre $a_{i,j}$ est*

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

Lorsque $i$ et $j$ décrivent le même ensemble d'indices, on écrit abréviativement

$$\sum_{1\le i\,,\,j\le n} a_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} a_{i,j}.$$

**T** *Soient* $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ *et* $(b_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ *deux familles finies de nombres complexes. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_i b_j.$$

**T**

*Soit* $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *une famille de nombres complexes*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

*et*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

**E**

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

**T**

*Si $\Omega$ est la réunion disjointe de plusieurs parties $\Omega_1$, $\Omega_2$,...,$\Omega_n$, on a*

$$\sum_{i\in\Omega} x_i = \sum_{i\in\Omega_1} x_i + \sum_{i\in\Omega_2} x_i + \cdots + \sum_{i\in\Omega_n} x_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in\Omega_k} x_i.$$

**E**

Si $\Omega = [\![m, n]\!]^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} &= \sum_{m\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} + \sum_{m\leq j<i\leq n} x_{i,j} \\ &= \sum_{i=m}^{n} x_{i,i} + \sum_{m\leq i<j\leq n} x_{i,j} + \sum_{m\leq j<i\leq n} x_{i,j}.\end{aligned}$$

E

## Découpage en diagonale

Il est possible de décrire une zone triangulaire par des parallèles aux diagonales. Par exemple (en faisant un dessin) :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq j\leq i\leq n} x_{i,j} &= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{\substack{0\leq j\leq i\leq n\\ i-j=d}} x_{i,j}\right)\\
&= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{i=d}^{n} x_{i,i-d}\right)\\
&= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-d} x_{j+d,j}\right).
\end{aligned}$$

**D**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Le produit des termes $u_p$ à $u_q$ est notée

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

**E**

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \leq q$ deux entiers naturels, $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \alpha = \alpha^{q-p+1}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

P

*Pour tout nombre complexe $\lambda$, tout entier $n$, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a*

1. $\displaystyle\prod_{k=p}^{q}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right).$
2. $\displaystyle\prod_{k=p}^{q}(\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k.$
3. $\displaystyle\prod_{k=p}^{q}(a_k^n) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^n.$

P

**Simplification télescopique**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors*

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$