

Chapter 29 Dérivées

29.1 Dérivées

Exercice 29.1

En utilisant la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1. $f(x) = 7.$ | 6. $f(x) = \frac{1}{x-1}.$ | 11. $f(x) = 2 - x^2.$ |
| 2. $f(x) = -5x.$ | 7. $f(x) = \sqrt{x+4}.$ | 12. $f(x) = x^3 + x^2.$ |
| 3. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s.$ | 8. $g(x) = -3.$ | 13. $f(x) = \frac{1}{x^2}.$ |
| 4. $f(x) = x^2 + x - 3.$ | 9. $f(x) = 3x + 2.$ | 14. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}.$ |
| 5. $f(x) = x^3 - 12x.$ | 10. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x.$ | |

Exercice 29.2

Étudier la dérivabilité en 0 des applications suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ | 2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x}{1+ x }$ |
|---|---|

Exercice 29.3

Soient V un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies sur V et dérivables en x_0 .

Montrer que si : $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ et $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Application : $f(x) = x \cos x$; calculer $f'(k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

Exercice 29.4

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1 + \exp(1/x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est continue sur D .
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Vérifier que f , ainsi prolongée, est dérivable à gauche et à droite en 0. Est-elle dérivable en 0?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0.
5. Préciser un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de l'infini.
6. Cela vous permet-il d'obtenir une asymptote oblique de f ?

29.2 Opérations sur les dérivées

Exercice 29.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.
2. En utilisant la relation $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 29.6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. *Vrai ou Faux ?*

1. Si f est périodique, alors f' est périodique.
2. Si f' est périodique, alors f est périodique.
3. Si f est paire, alors f' est impaire.
4. Si f est impaire, alors f' est paire.
5. Si f' est paire, alors f est impaire.

Exercice 29.7 *Calcul de dérivées*

Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que la fonction dérivée.

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$. 2. $f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x) \ln(1+x^2)}{x \tan(x)}$. 3. $f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$. 4. $f_4 : x \mapsto \frac{x^2-1}{\ln(x)}$. 5. $f_5 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 6. $f_6 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. 7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$. 8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. 9. $f_9 : x \mapsto \frac{\sin(x/3)}{1 - \cos(x/3)}$. 10. $f_{10} : x \mapsto x^2 \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$. 11. $f_{11} : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. 12. $f_{12} : x \mapsto x ^3$. 13. $f_{13} : x \mapsto x^2 \sqrt{ \ln(x) }$. 14. $f_{14} : x \mapsto x + \frac{\ln(x)}{ x }$. 15. $f_{15} : x \mapsto \frac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$. 16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x) - \cos(5x)}$. | <ol style="list-style-type: none"> 17. $f_{17} : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. 18. $f_{18} : x \mapsto \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$. 19. $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x) \sin(x^2)$. 20. $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left \frac{x}{ x } + \frac{x-1}{ x-1 }\right \right)$. 21. $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$. 22. $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left \frac{x}{x+1}\right \right)$. 23. $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$. 24. $f_{24} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$. 25. $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right)$. 26. $f_{26} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}$. 27. $f_{27} : x \mapsto \frac{x}{1 + x }$. 28. $f_{28} : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x})$. 29. $f_{29} : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$. 30. $f_{30} : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)}$. 31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$. |
|---|--|

Exercice 29.8

Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{x-a}{x} \right)^x.$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

29.3 Étude globale des fonctions dérivables**Exercice 29.9 (*)**

Déterminer les extrémums globaux pour chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = 3 - x$ sur $[-1, 2]$.
2. $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0, 4]$.
3. $g(t) = \frac{t^2}{t^2 + 3}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 29.10

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable s'annulant en -1 , 0 et 1 . On note

$$\begin{aligned} g : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 + x + f(x) \end{aligned}.$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 29.11 (*)

Montrer que l'équation algébrique $x^n - ax - b = 0$, où $n \geq 2$ ne peut avoir plus de 2 racines réelles si n est pair, ni plus de 3 si n est impair.

Exercice 29.12 ()**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 29.13 (*)**

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels distincts x_1, x_2, \dots, x_n dans $]0, 1[$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

Exercice 29.14

Soit $f : [0, +\infty[$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 29.15

Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Exercice 29.16

Montrer

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x \ln x}.$$

Exercice 29.17

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En déduire le comportement de la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 29.18

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 29.19

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 29.20

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq 1$.
2. Établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 29.21 *Le théorème de Darboux*

Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de Darboux :

Une fonction dérivée sur un intervalle, bien que non nécessairement continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit I un intervalle véritable de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Considérons $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

On considère les applications φ et ψ définie par

$$\begin{aligned} \varphi :]a, b] &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \quad \psi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & x &\mapsto \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{aligned}$$

1. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore φ ce prolongement.
2. Montrer que ψ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ψ ce prolongement.

3. Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\varphi(c) = \lambda \text{ ou } \psi(c) = \lambda.$$

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

Exercice 29.22 La règle de l'Hospital

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ce résultat porte parfois le nom de théorème de Cauchy ou formule des accroissements finis généralisée.

2. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

(a) Montrer que si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

(b) Vérifier que la réciproque est fautive en considérant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x.$$

3. Applications : Calculer les limites suivantes

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}, \quad \text{et} \quad c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

La règle de l'Hospital est hors programme. Il est d'ailleurs amusant et surprenant de constater qu'il existe une espèce d'aura maléfique autour de cette règle, pourtant fort simple et performante, si bien que son utilisateur est souvent considéré comme ayant commis un sacrilège.

Exercice 29.23

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. On note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Montrer

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 M.$$

Exercice 29.24

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}.$$

Exercice 29.25

On considère l'application f et la suite (u_n) définies par

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{x+2} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que l'intervalle $]0, 1[$ est stable par f .
2. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$

5. Conclure.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 29.26

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos \sqrt{x} \end{aligned}.$$

1. En revenant à la définition.
2. En utilisant le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 29.27

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = e^{|t|}. \quad (\text{E})$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
3. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E).

29.4 Fonction de classe \mathcal{C}^n

Exercice 29.28

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer les dérivées successives de f .

$$x \mapsto xe^{-x}$$

Exercice 29.29

Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$1. f(x) = (3x^2 + x - 5)e^{-x}. \quad \quad \quad 2. g(x) = e^x \cos x.$$

Exercice 29.30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n -ième de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$$

Exercice 29.31

Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0. \quad (E_1)$$

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0. \quad (E)$$

On considère une fonction $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose

$$\begin{aligned} z :]0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto y(\cos(t)) \end{aligned}$$

- Indiquer pourquoi la fonction z est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ puis exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y' , y'' et de t .
- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0, \pi[$ lorsque y vérifie l'équation (E) sur $] -1, 1[$?
- En déduire la solution générale de l'équation (E) .

Exercice 29.32

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Montrer que f est continue en 0.
- Montrer que f est dérivable en 0.
- f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 29.33

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ la fonction suivante est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in]0, b[, \\ x^2 + 12 & : x \in [b, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 29.34 Centrale PSI

Soient $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $] -\infty, a[$, $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $]a, +\infty[$. On suppose que (x_n) et (y_n) ont pour limite a . Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}.$$

- On suppose f de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de a . La suite (u_n) a-t-elle une limite ?
- On suppose simplement que f dérivable au voisinage de a . La suite (u_n) a-t-elle une limite ?