Applications linéaires

Aperçu

D 1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que pour tous $u, v \in E$, et tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

Si l'on veut préciser le corps de base, on pourra dire que f est $\mathbb{K}$-linéaire.

P 2 *Soit f une application de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Alors f est linéaire si, et seulement si*

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

T 3 Montrer le!

T 4 Plus généralement, montrer que les applications linéaires préservent les combinaisons linéaires, autrement dit, pour tous $v_1, v_2, \ldots, v_p \in E$, et tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$,

$$f\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p\right) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_p f(v_p).$$

c'est-à-dire

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f\left(v_i\right).$$

P 5 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors*

$$f\left(0_E\right) = 0_F.$$

T 6 Montrer le! En remarquant par exemple que $0_E + 0_E = 0_E$.

D 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $f : E \to E$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme** de l'espace vectoriel E.
  L'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ se note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \to \mathbb{K}$ est une application linéaire, on dit que f est une **forme linéaire** sur E.
  L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note également E^*.

E 8 Soit $p \in \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto px$. Alors f_1 est linéaire car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f_1(\alpha x + \beta y) = p(\alpha x + \beta y) = \alpha(px) + \beta(py) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y).$$

T 9 Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto px + q$ (avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$) et $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
Montrer que ni f_2, ni f_3, ne sont des applications linéaires puisqu'elles ne vérifient pas l'assertion

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

T 10 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x) \end{array}$. Montrer que f est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

E 11 On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables une infinité de fois.
L'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' - f \end{array}$$

est une application linéaire.

T 12 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}.$$

Montrer que S est une application linéaire.

E 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

est un endomorphisme de E appelé **homothétie de rapport** λ.

E 16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application identique de E, $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est linéaire.

E 17 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'**application nulle**

$$\widetilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

est une application linéaire.

P 18 *Soit A une matrice de type (m,n). Alors l'application*

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est une application linéaire.

L'application T est la **multiplication à gauche par A**.

Démonstration. C'est une conséquence de la «bilinéarité» du produit matriciel. Pour $(u,v) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T(u+v) &= A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v) \\ \text{et } \; T(\alpha u) &= A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha T(u). \end{aligned}$$

∎

T 19 L'application $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y)^T & \mapsto & (2x+y, x)^T \end{array}$ vu précédemment est la multiplication à gauche par une matrice A. Déterminer A.

P 20 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, T une application linéaire de E dans F, S une application linéaire de F dans G. Alors l'application composée $S \circ T$ est linéaire.*

T 21 Montrer le!

T 22 Lorsque

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Bx \end{array} \quad \text{et} \quad S : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^m & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & Ax \end{array},$$

de quels types sont les matrices A et B? Pour quelle matrice C a-t-on

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, (S \circ T)(x) = Cx \quad ?$$

P 23 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

En particulier si $S, T : E \to F$ sont des applications linéaires, alors $S + T$ et αS, $\alpha \in \mathbb{K}$, sont linéaires.

P 24 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

$$S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

$$(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$$

$$(\alpha S) \circ T = S \circ (\alpha T) = \alpha (S \circ T)$$

P 25 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $T : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors $T^{-1} : F \to E$ est linéaire.*

D 26 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, on dit que f est un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de E dans F.
- On dit que les espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre E et F.

P 27 *Soit $T : E \to F$ et $S : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $S \circ T : E \to G$ est un isomorphisme et*

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

E 28 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Notons S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \to & \mathbb{R}^2 \\ & y & \mapsto & \big(y(0), y'(0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

T 29 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.*

1. *Muni de l'addition et de la multiplication externe, l'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Muni de l'addition et de la composition, l'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

R Le programme suggère la notation vu pour la composée $v \circ u$ et u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

D 30 Si $f : E \to E$ est un endomorphisme bijectif de E, on dit que f est un **automorphisme** de E.
L'ensemble des automorphismes de E est le **groupe linéaire** de E et se note $\mathbf{GL}(E)$: c'est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

E 31 Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

L'application T est-elle bijective? Si oui, déterminer sa réciproque.

T 32 Soit $u = (1,2,3)^T$. Vérifier que $T^{-1}(w) = u$ lorsque $w = T(u) = (6,-1,-4)^T$.
Vérifier plus généralement que $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

D 33 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau** de f, noté $\ker f$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est 0_F, c'est-à-dire

$$\ker f = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = 0_F \right\}.$$

- On appelle **image** de f, noté $\operatorname{Im} f$, l'ensemble $f(E)$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in E \} = \{ y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y \}.$$

T 34 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors le noyau $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E

T 35 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'image $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

E 36 Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ x-y \\ y \end{pmatrix}.$$

T 37 Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix}.$$

E 38 L'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admet pour noyau le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Celui-ci est engendré par la fonction constante $\widetilde{1} : x \mapsto 1$, c'est donc une droite vectorielle.

T 39 Déterminer le noyau de l'application linéaire $\sigma : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\sigma(f) = f'' - 4f.$$

T 40 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
2. $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant avec

$$\ker f = f^{-1}(\{ 0_F \}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\, f = f(E).$$

T 41 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Si W un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si V un sous-espace vectoriel de E, alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

T 42 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Alors l'application f est injective si, et seulement si $\ker(f) = \{ 0_E \}$.

L'inclusion, $\{ 0_E \} \subset \ker(f)$ étant triviale, montrer $\ker(f) = \{ 0_E \}$ revient à montrer

$$\forall x \in E, f(x) = 0_F \implies x = 0_E.$$

E 43 L'endomorphisme M qui, à la fonction f de $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $x \mapsto x f(x)$, est injectif. Soit en effet un élément f du noyau; on a alors $x f(x) = 0$ pour tout réel x, donc $f(x) = 0$ pour tout réel non nul x. Par continuité, f est l'application constante nulle: $f = \widetilde{0}$. Le noyau de l'endomorphisme M est donc $\left\{ \widetilde{0} \right\}$ et M est injectif.

T 44 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Alors l'application f est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

L'inclusion, $\mathrm{Im}(f) \subset F$ étant triviale, montrer $\mathrm{Im}(f) = F$ revient à montrer

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Ce qui est bien sûr la définition d'une fonction surjective, la linéarité ne joue aucun rôle ici.

D 45 Une **équation linéaire** est une équation de la forme $u(x) = b$ où

- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
- $b \in F$ est fixé,
- l'inconnue est $x \in E$.

T 46 *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = b$.*

- *Si $b \notin \operatorname{Im} u$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.*
- *Si $b \in \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire si il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$, alors*

$$\mathcal{S} = x_0 + \ker u = \left\{ x_0 + y \mid u(y) = 0_F \right\}.$$

D 47 On dit que x_0 est une **solution particulière**, et y est une **solution générale** de l'équation homogène associée (c'est-à-dire l'équation $u(x) = 0_F$).

E 48 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) - 4y(t) = \cos(t)$.

D 49 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, x_0 un point de E, et W un sous-espace vectoriel de E. On note $x_0 + W$, et on appelle **sous-espace affine** passant par x_0 et dirigé par W l'ensemble

$$\mathscr{W} = x_0 + W = \left\{ x_0 + w \;\middle|\; w \in W \right\}.$$

L'espace W est appelé la **direction** du sous-espace affine $\mathscr{W}$.

Si W est une droite vectorielle, $x_0 + W$ est appelé **droite affine**.

D 50 On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un quadruplet $(A, +, *, \cdot)$ tel que

- $(A, +, *)$ est un anneau.
- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A^2, (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x * y)$.

D 51 Soit $(A, +, *, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une **sous-algèbre** de A est une partie V qui est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de A.

T 52 *Soit $(A, +, *, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et V une sous-algèbre de A. Alors, V est une algèbre pour les lois induites*

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad * : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

E 53 Les endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.

E 54 Les matrices carrées de taille n sur le corps $\mathbb{K}$ forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 55 Les polynômes sur le corps $\mathbb{K}$ forment la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

E 56 Soit I une partie de $\mathbb{R}$.

- Les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ forment la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
- Les fonctions continues forment la sous-algèbre $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$; et l'on a de même la sous-algèbre des fonctions dérivables, des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$,*etc*.

D 57 Soient $(A, +, *, \cdot)$ et $(B, \oplus, \circledast, \odot)$ deux algèbres sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle **morphisme d'algèbre** de A dans B toute application $f : A \to B$ telle que pour tous $u, v \in A$, et tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(u + v) = f(u) \oplus f(v)$$
$$f(\alpha \cdot u) = \alpha \odot f(u)$$
$$f\left(1_A\right) = 1_B$$
$$f(u * v) = f(u) \circledast f(v)$$