Vocabulaire relatif aux applications

Aperçu

D 1 Étant donné deux ensembles A et B, une **application** de A dans B est un triplet $f = (A, B, G)$ où G est une partie de $A \times B$ telle que

$$\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in G.$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de f,
- B est **l'ensemble d'arrivée** de f. On dit que la fonction f **prend ses valeurs dans** B ou est **à image dans** B.
- Pour $x \in A$, l'unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in G$ s'appelle **l'image** de x par f, et se désigne par $f(x)$. On dit encore que $f(x)$ est la **valeur** de f pour l'élément x de A.
- Pour $y \in B$, en cas d'existence, tout $x \in A$ tel que $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f.
- G est le **graphe** de f. On a

$$G = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \} = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}.$$

N L'ensemble des applications de A vers B se note $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
Une application $f \in \mathscr{F}(A, B)$ se note

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ou} \quad f : A \to B$$

E 2

- L'application dont l'ensemble de définition ainsi que celui d'arrivée est $\mathbb{N}$; qui a chaque naturel n fait correspondre $n^2 + 1$ se note

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}.$$

  Par exemple, on a $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la relation $y = \frac{1}{x^2-1}$ définit une application de $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

N

- Soient A et B deux ensembles et b un élément de B. L'application $f : A \to B$ définie par
$$\forall x \in A, f(x) = b$$
est une **application constante**. On la note parfois $\tilde{b}$ ou simplement b lorsqu'aucune confusion n'est possible.
- Soit A un ensemble. L'application $\mathrm{Id}_A : A \to A$ définie par
$$\forall x \in A, \mathrm{Id}_A(x) = x$$
est l'**application identique** de A, ou **identité** de A.

P 3 *Deux applications $f : A \to B$ et $g : A' \to B'$ sont* ***égales*** *si et seulement si*

- *elles ont même ensemble de départ : $A = A'$,*
- *elles ont même ensemble d'arrivée : $B = B'$,*
- *et si pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$.*

On écrit alors $f = g$.

E 4 Une fonction f est définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Évaluer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et représenter le graphe de f.

E 5 Voici un extrait des tarifs courrier pour la France métropolitaine.

Lettre verte	
Poids jusqu'à	Tarifs nets
20g	0.58€
50g	0.97€
100g	1.45€
250g	2.35€
500g	3.15€
1kg	4.15€
2kg	5.40€
3kg	6.25€

Définir la fonction coût C en fonction du poids. Représenter le graphe de C.

Voici une notion qui permet de créer un lien entre les parties d'un ensemble E et des fonctions.

D 6 Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A (dans E), et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{\,0, 1\,\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

D 7 Soit A un ensemble. On appelle **famille** d'éléments de A **indexée** par l'ensemble I toute application de I dans A notée

$$\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & A \\ i & \mapsto & x_i \end{array}.$$

L'ensemble I qui est appelé **ensemble des indices**. On utilise généralement la notation $\left(x_i\right)_{i\in I}$ pour désigner une telle famille.

E 8

- Une suite est une famille dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ (ou $\left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \right\}$).
- Si $I = \{ 1, 2, 3 \}$, alors l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par I est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) où x, y, z sont trois éléments quelconques de A.

$$f(x, y).$$

D 9 On dit que deux fonctions f et g **coïncident dans un ensemble** E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

$g : A' \to B'$ est un prolongement de $f : A \to B$ si et seulement si

$$A \subset A' \text{ et } B \subset B' \text{ et } (\forall x \in A, f(x) = g(x)).$$

D 11 Soient $f : A \to B$ une application et X une partie de l'ensemble de définition A de f. L'application dont l'ensemble de définition est X, qui a le même ensemble d'arrivée que f est la **restriction** de f à X, et on la note $f|_X$

$$f|_X : \begin{array}{rcl} X & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

D 12 Soit A, B et C trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, C)$. L'application définie sur A et à valeurs dans C qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **composée** des applications g et f ; on la note

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut représenter la situation précédente ainsi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

P 13 *Soient quatre ensembles A, B, C, D et trois applications définies par le diagramme*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \quad .$$

On a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in \mathscr{F}(A, D).$$

On dit que l'opération $\circ$ est associative.

D 14 Soient $f : A \to B$ une application, et X une partie de A.

- L'ensemble des éléments de B qui possèdent un antécédent dans X s'appelle l'**image** de X par f et se désigne par $f(X)$ ou $f_*(X)$.

$$f(X) = \{ \, y \in B \mid \exists x \in X, y = f(x) \, \} = \{ \, f(x) \mid x \in X \, \} \, .$$

  Autrement dit, $f(X)$ est décrit par $f(x)$ quand x décrit X.

- En particulier, $f(A)$ est appelée l'**image** de f, on la note

$$\operatorname{Im}(f) = \{ \, y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \, \} = \{ \, f(x) \mid x \in A \, \}$$

  c'est un abus de langage pour «image de l'ensemble de départ de f par f».

Étant donnés $f : A \to B$ et $X \subset A$,

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X, y = f(x).$$
$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

T 15 Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer

1. $f(4)$
2. $f(\{ 4 \})$
3. $f(\{ 1, 3, 5 \})$
4. $f(\{ -1, 1 \})$
5. $f([0, 2])$
6. $f([-3, 1])$
7. $f(\mathbb{R})$
8. $\operatorname{Im} f$

Lorsque $A \subset B$, certaines circonstances peuvent se produire.

D 16 Soient $f : A \to B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie de A.

- Si $f(X) \subset X$, on dira que X est une **partie stable** par f.
- Si $f(X) = X$, on dira que X est une **partie invariante** par f.
- Un élément $x \in A$ tel que $f(x) = x$ est dit **invariant** par f. On dit aussi que x est un **point fixe** de f.

D 17 Soit $f : A \to B$ une application, et Y une partie de B. L'ensemble des éléments de A dont l'image est dans Y s'appelle l'**image réciproque** de Y par f et se désigne par $f^{-1}(Y)$ ou $f^{*}(Y)$.

$$f^{-1}(Y) = \{\ x \in A \mid f(x) \in Y\ \}\,.$$

Étant donnés $f : A \to B$ et $Y \subset B$,

$$x \in f^{-1}(Y) \iff x \in A \text{ et } f(x) \in Y.$$

T 18 Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer

1. $f^{-1}(\{4\})$.
2. $f^{-1}(\{1, 9, 25\})$.
3. $f^{-1}(\{-2\})$.
4. $f^{-1}([0, 4])$.
5. $f^{-1}([-5, -3])$.
6. $f^{-1}([-4, 4])$.
7. $f^{-1}(f([0, 2]))$.
8. $f\left(f^{-1}([-4, 4])\right)$.
9. $f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}_-\right)\right)$.

D 19 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **injection**, ou que f est une application **injective**, si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ou de manière équivalente, f est injective si, et seulement si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x');$$

autrement dit, si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f.

C 20 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est injective.*

(ii) *Pour tout* $y \in B$, *l'équation* $f(x) = y$, *d'inconnue* $x \in A$, *admet au plus une solution.*

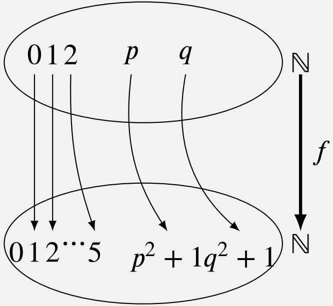
(iii) *Tout élément de* B *a au plus un antécédent par* f.

E 21 Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$ est injective.

Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n) = f(n')$. On a donc $n^2 + 1 = n'^2 + 1$, alors $n^2 = n'^2$ et donc $n = \pm n'$. Puisque n et n' sont positifs, on en déduit $n = n'$.

Nous avons montré : $\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, f(n) = f(n') \implies n = n'$. L'application f est donc injective.

Si on s'intéresse à la représentation sagittale[a] de cette application f, cela signifie que les flèches qui partent de deux points distincts arrivent à deux points distincts, ou encore qu'un point de l'ensemble d'arrivée est l'extrémité d'au plus une flèche.



[a]**sagittal** signifie en forme de flèche.

E 22 Montrons que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$ est injective.

Soient $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $u' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(u) = f(u')$, c'est-à-dire (égalité de deux couples)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x_1' + x_2' \\ x_1 + 2x_2 & = & x_1' + 2x_2' \end{array} \right. .$$

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient $x_1 = x_1'$ puis que $x_2 = x_2'$. On a donc $u = (x_1, x_2) = (x_1', x_2') = u'$.

T 23 On reprend l'exemple de l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f^{-1}(\{ (a, b, c) \})$.
2. En déduire $f\left(\mathbb{R}^2\right)$ l'image de f. L'application f est-elle surjective?
3. L'application f est-elle injective?

T 24 *La composée de deux injections est une injection.*

[1]24: Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par se donner des objets sur lesquels on peut travailler. Ici nous avons besoin de deux injections que l'on peut composer ; notons les $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

D 25 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **surjection**, ou que f est une application **surjective** si

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

C 26 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est surjective.*

(ii) $f(A) = B$ *(ou encore* $\operatorname{Im} f = B$*).*

(iii) *Pour tout* $y \in B$*, l'équation* $f(x) = y$*, d'inconnue* $x \in A$*, admet au moins une solution.*

(iv) *Tout élément de* B *a au moins un antécédent par* f*.*

E 27 Montrons que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_2 + x_3, 2x_1 - x_3) \end{array}$ est surjective.

T 28 *La composée de deux surjections est une surjection.*

[2]28: Rappelons que dans les assertions quantifiées, les «variables» sont muettes. Il sera ici un peu plus pratique d'utiliser z plutôt que y.

D 29 Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **bijection**, ou que f est une application **bijective**, si

$$\forall y \in B, \exists ! x \in A, y = f(x).$$

C 30 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est bijective.*

(ii) *f est à la fois injective et surjective.*

(iii) *Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet une et une seule solution.*

E 31 Montrer à l'aide de la définition que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$ est bijective.

(Analyse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ x + 2y & = & b \end{array} \right.$$

En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient $y = b - a$. Puis, par substitution, $x = a - y = 2a - b$. Ainsi, $v \in \mathbb{R}^2$ admet au plus un antécédent par f qui ne peut être que $u = (2a - b, b - a)$. Ceci montre que f est injective et

$$f^{-1}(\{ (a, b) \}) \subset \{ (2a - b, b - a) \}.$$

(Synthèse) Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = (2a - b, b - a)$. Alors

$$u \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad f(u) = (2a - b + b - a, 2a - b + 2(b - a)) = (a, b) = v.$$

Ainsi, tout $v \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par f: l'application f est surjective.

(Conclusion) Tout élément $v \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f : l'application f est donc bijective.

D 32 L'ensemble des bijections de A dans B se note $\mathcal{B}\mathrm{ij}(A, B)$. Lorsque $A = B$, on note plus simplement $\mathfrak{S}(A) = \mathcal{B}\mathrm{ij}(A, A)$. Une bijection de A dans A est également appelée une **permutation** de E.

T 33 **et définition**

Soient A et B deux ensembles. Soit f une bijection de A vers B.
Il existe une application unique g de B vers A qui est une bijection telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B .$$

L'application g est appelée ***application réciproque*** *de l'application f et on la note f^{-1}.*

C 34 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

1. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
2. $\forall y \in B, f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

C 35 *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \left(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\right)$$

Bien remarquer que f^{-1} ne définit une application que si f est une bijection.

Se rappeler également que $f^{-1}(Y)$ désigne un ensemble si Y est une partie de l'ensemble d'arrivée de f, et ce même si f n'est pas bijective.

Si $f : A \to B$ est bijective et Y est une partie de B, on peut vérifier que l'image directe de Y par f^{-1} est égale à l'image réciproque de Y par f. Autrement dit, $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y)\ldots$

E 36 L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$$

est bijective et sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (2a - b, b - a) \end{array}$$

qui s'écrit aussi

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (2x_1 - x_2, x_2 - x_1) \end{array}$$

Remarquez que l'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ x + 2y & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ y & = & b - a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2a - b \\ y & = & b - a \end{array} \right. .$$

P 37 *Soient A et B deux ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans A. Si*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B,$$

alors f et g sont bijectives et on a $g = f^{-1}$.

T 38 *Soit trois ensembles A, B, C et deux applications bijective définies par*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \; .$$

Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_B \circ f = f^{-1} \circ \left(\mathrm{Id}_B \circ f\right) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

et

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_B \circ g^{-1} = \left(g \circ \mathrm{Id}_B\right) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_C \, .$$

∎

D 39 Deux ensembles A et B sont **équipotents** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On dit aussi que A est équipotent à B (ou B est équipotent à A).

R Il existe une bijection de $\emptyset$ sur lui même.

P 40 *Deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents.*

P 41 *Soit $f : A \to B$ une application. Si f est injective, alors les ensemble A et $f(A)$ sont équipotents.*

D 42 Un ensemble E est dit **dénombrable** quand il est équipotent à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

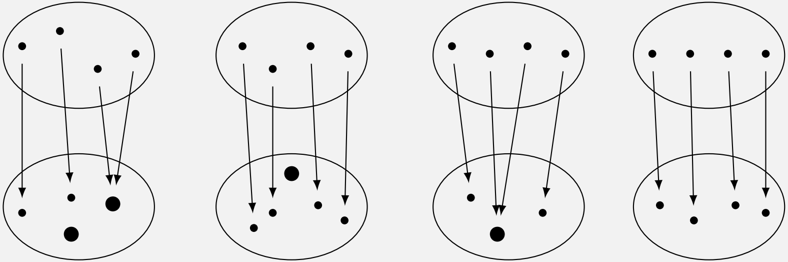
E 43

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini mais n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ est infini mais n'est pas dénombrable.

T 44 Montrer que A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont jamais équipotents. Pour cela, considérer une bijection $f : A \to \mathcal{P}(A)$ et

$$W = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}.$$

E 45



Ni injective ni surjective	Injection non surjective	surjection non injective	bijection

E 46

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni injective, ni surjective.
2. $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective mais n'est pas surjective.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective mais n'est pas injective.
4. $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

On dit que l'application f est **minorée** (resp. **majorée**, **bornée**) si l'ensemble $f(E)$ est minoré (resp. majoré, borné) dans F.

D 47

- La fonction f est dite **majorée** lorsqu'il existe $M \in F$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) \preceq_F M.$$

- La fonction f est dite **minorée** lorsqu'il existe $m \in F$ tel que

$$\forall x \in A, m \preceq_F f(x).$$

- La fonction f est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

D 48

- Le **maximum** d'une fonction f, s'il existe, est le plus grand élément de son ensemble image $f(E)$. On le note $\max(f)$ ou $\max_{x \in E} f(x)$.

$$M = \max(f) \iff \left\{ \begin{array}{rl} & \forall x \in E, f(x) \preceq_F M \\ \text{et} & \exists x_0 \in E, f(x_0) = M. \end{array} \right.$$

C'est un majorant de f qui est atteint, c'est-à-dire qu'il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \max(f)$.

- Le **minimum** d'une fonction f, s'il existe, est le plus petit élément de son ensemble image $f(E)$. On le note $\min(f)$ ou $\min_{x \in E} f(x)$.

$$m = \min(f) \iff \left\{ \begin{array}{rl} & \forall x \in E, m \preceq_F f(x) \\ \text{et} & \exists x_0 \in E, f(x_0) = m. \end{array} \right.$$

C'est un minorant de f qui est atteint, c'est-à-dire qu'il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \min(f)$.

D 49

- La **borne supérieure** de la fonction f, si elle existe, est le plus petit des majorants de son ensemble image $f(E)$. On la note $\sup(f)$ ou $\sup_{x\in E} f(x)$.

$$S = \sup(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, f(x) \preceq_F S \\ \text{et} & \forall M \in F, (\forall x \in E, f(x) \preceq_F M) \implies S \preceq_F M. \end{cases}$$

- La **borne inférieure** de la fonction f, si elle existe, est le plus grand des minorants de son ensemble image $f(E)$. On la note $\inf(f)$ ou $\inf_{x\in E} f(x)$.

$$I = \inf(f) \iff \begin{cases} & \forall x \in E, I \preceq_F f(x) \\ \text{et} & \forall m \in F, (\forall x \in E, m \preceq_F f(x)) \implies m \preceq_F I). \end{cases}$$

E 50 L'application $f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan x \end{array}$

- a pour minorant tout élément de $]-\infty, 0]$,
- a pour majorant tout élément de $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$,
- a pour minimum 0,
- ne possède pas de maximum,
- a pour borne inférieure 0,
- a pour borne supérieure $\frac{\pi}{2}$.

Remarquez que $f\left([0,+\infty[\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

D 51

- La fonction f est dite **croissante** si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \preceq_E x_2 \implies f(x_1) \preceq_F f(x_2).$$

- La fonction f est dite **décroissante** si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \preceq_E x_2 \implies f(x_2) \preceq_F f(x_1).$$