Espaces vectoriels

Aperçu

D 1

Axiomes d'espace vectoriel

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, d'éléments neutres $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$, on appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** un ensemble E muni d'une structure algébrique définie par la donnée

d'une loi de composition interne, appelée **addition**

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif, c'est-à-dire

1. La loi + est **associative**.
$$\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z.$$
2. E possède un **élément neutre** pour la loi +, noté 0_E.
$$\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$
3. Tout élément de E possède un **opposé** pour la loi + dans E.
$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = 0_E.$$
On note $-x$ l'opposé de x.
4. La loi + est **commutative**.
$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

D 1

Axiomes d'espace vectoriel

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, d'éléments neutres $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$, on appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** un ensemble E muni d'une structure algébrique définie par la donnée

D'une loi d'action appelée **multiplication externe**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

qui satisfait aux axiomes suivants [a]

5. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, x \in E, y \in E$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
6. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
7. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha.\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
8. Pour tout $x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

[a] Règle bien connue : pour économiser les parenthèses, on convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

P 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

$$\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque $0 + 0 = 0$ (dans $\mathbb{K}$), on a

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

En ajoutant $-(0 \cdot x)$, l'opposé de $0 \cdot x$, à chaque côté de l'égalité, on obtient

$$0_E = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + 0_E = 0 \cdot x.$$

∎

P 3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

$$\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x.$$

T 4 Montrer le avec un argument similaire avec $0 = 1 + (-1)$.
Pour les plus rapides, démontrer le résultat suivant.

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

P 5 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x, y \in E$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E$;
2. $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$;
3. $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha x - \beta x$;
4. $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$.
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$ *et* $(-n) \cdot x = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n}$.

P 6 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \cdot x_i\right).$$

P 6 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout vecteur $x \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$\alpha \cdot x = 0_E \implies \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

E 7 **Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$**

Si E est le corps $\mathbb{K}$ lui-même, alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; les deux opérations étant naturellement $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

E 8 **Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$**

Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations définies par

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \quad \text{et} \quad \lambda(a+ib) = (\lambda a)+i(\lambda b)$$

où a, b, a', b' et λ sont réels. Alors $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; ces deux structures sont différentes.

E 9 **Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est muni de addition et multiplication par un scalaire usuelle:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ étant le vecteur dont chaque composante est nulle, c'est-à-dire $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)^T$.

On peut également noter les éléments de $\mathbb{K}^n$ en lignes, les opérations sur $\mathbb{K}^n$ s'écrivant alors

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\text{et} \;\; \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

E 10 **Un espace vectoriel de fonctions**

L'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munie de l'addition point à point et de la multiplication par un scalaire usuelle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarquons que le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction identiquement nulle,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

T 11 Montrer que les axiomes d'espace vectoriel sont respectés pour F. En particulier, si la fonction f est un vecteur de F, décrire le vecteur $-f$.

E 12 **Espace vectoriel de matrices**

L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (\lambda \cdot A)[i,j] = \lambda A[i,j]$$

où $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Le vecteur nul de cet espace n'est autre que la matrice nulle notée $0_{n,p}$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.
- Chaque matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour matrice opposée la matrice $-A$ que l'on construit en posant

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (-A)[i,j] = -A[i,j].$$

E 13 **Espace vectoriel des suites**

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}};$$
$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

où $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le vecteur nul est la suite constante dont chaque terme égale zéro. L'opposé de la suite $u = \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $-u = \left(-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

T 14 Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'exemple suivant est une partie de $\mathbb{R}^3$.

E 15 Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le dernier coefficient est nul, c'est-à-dire

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Alors W est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni de l'addition et la multiplication par un scalaire usuelle. Pour cela, il suffit de vérifier que W contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, et que W est stable par addition et multiplication par un scalaire.
En effet, les axiomes $\mathbf{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}$ sont vérifiés pour tous vecteurs de W puisqu'ils sont vérifiés pour tous vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Reste à vérifier que si $u, v \in W$, alors $u + v \in W$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v \in W$, alors $\alpha v \in W$. Ce assure assure l'existence de l'addition et la multiplication externe pour W.

$$+ : W \times W \to W \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times W \to W.$$

On vérifie alors facilement l'axiome $\mathbf{3}$, l'opposé de $v \in W$ étant alors le même dans W que dans $\mathbb{R}^3$: $-v = (-1) \cdot v$.

T 16 Vérifier que $0_{\mathbb{R}^3} \in W$, et que pour $(u, v) \in W^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $u + v \in W$ et $\alpha v \in W$.

E 17 Espace vectoriel de polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k)X^k;$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0} \left(\lambda a_k\right) X^k.$$

T 18 **Espace vectoriel d'applications**

Soient X un ensemble non vide et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors $\mathscr{F}(X,V)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois naturelles définies par

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rccc} \lambda\cdot f: & X & \to & V \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

où $f,g \in \mathscr{F}(X,V)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'espace vectoriel des matrices est un cas particulier d'espace vectoriel d'applications $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathscr{F}\left(\llbracket 1,n\rrbracket \times \llbracket 1,p\rrbracket, \mathbb{K}\right)$. L'espace vectoriel des suites est un cas particulier d'un espace vectoriel d'applications $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

D 19 **Espace vectoriel produit**

Soient $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On munit naturellement l'ensemble $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \forall (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2).$$

L'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est appelé **espace vectoriel produit**.

Le vecteur nul de $E = E_1 \times E_2$ est $(0_{E_1}, 0_{E_2})$.
On peut généraliser cette notion en munissant, de manière naturelle, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, lorsque les E_i sont eux-même des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

D 20 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $v, v_1, , v_2, \ldots, v_n$ un nombre fini de vecteurs de E. On dit que v est une **combinaison linéaire** de $v_1, \ldots, v_n$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v.$$

P 21 *Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.*

E 22 Montrons que $w = (2, -5)^T$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1, 2)^T$ et $v_2 = (1, -1)^T$. Il nous faut donc exhiber des scalaires α, β tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = w$, c'est-à-dire

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité entre vecteurs s'écrit comme un système d'équations scalaires

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 2 \\ 2\alpha - \beta & = -5 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = -1$ et $\beta = 3$. Alors $w = -v_1 + 3v_2$, que l'on peut vérifie facilement

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

T 23 Dans le plan, tracer v_1 et v_2. Représenter w comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. Représenter également le vecteur $x = \frac{1}{2} v_1 + v_2$.
Peut-on représenter n'importe quel «point» de votre feuille avec une combinaison linéaire de v_1 et v_2?

E 24 Dans l'espace vectoriel $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 4$ est combinaison linéaire de trois fonctions simples, $f = 2g + 3h + 4k$, où

$$g : x \mapsto x^2 \qquad h : x \mapsto x \qquad k : x \mapsto 1.$$

En effet, une combinaison linéaire de g, h et k reste dans F; ainsi $2g + 3h + 4k$ ont même ensemble de départ et d'arrivée que f. De plus, pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(2g + 3h + 4k)(x) &= (2g)(x) + (3h)(x) + (4k)(x)\\ &= 2(g(x)) + 3(h(x)) + 4(k(x))\\ &= 2x^2 + 3x + 4\\ &= f(x).\end{aligned}$$

T 25 Dans $\mathbb{K}^n$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ k\text{-ème} \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \dots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quel est alors le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$?

R En notant

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

le **symbole de Kronecker**. On a $e_k = \left(\delta_{i,k}\right)_{i=1\dots n}$.

D 26 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. On dit que V est un **sous-espace vectoriel** de E si

- $0_E \in V$.
- V est stable par addition:

$$\forall (u, v) \in V^2, u + v \in V$$

- et V est stable par multiplication externe

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \alpha v \in V.$$

T 27 Montrer que l'un de ces ensemble et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que l'autre ne l'est pas:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

T 28 *Un sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel pour les lois induites*

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, v) & \mapsto & \alpha v \end{array}.$$

T 29 Démontrer ce théorème. S'inspirer de l'exemple $W = \left\{ (x, y, 0)^T \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

E 30 Si E est un espace vectoriel, alors E est un sous-espace vectoriel de E.

E 31 Si E est un espace vectoriel, alors $\{ 0_E \}$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle parfois **sous-espace nul**.

E 32 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n

$$\mathbb{K}_n[X] = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

E 33 L'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites réelles à support fini est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

P 34 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. Alors V est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si*

- $0_E \in V$.
- *V est stable par combinaison linéaire*

$$\forall (u, v) \in V^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha u + \beta v \in V.$$

T 35 Si cela n'est pas encore évident, montrer le!

P 36 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$W = \bigcap_{i\in I} W_i$$

est un sous-espace vectoriel de E.

E 37 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors l'ensemble

$$S = \mathbb{K}x = \{ \alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

T 38 Montrer le!

E 39 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y \in E$. Alors l'ensemble

$$V = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

D 40 Soit $x \in E$. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par x le sous-espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}\{\, x \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}x = \{\, \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \,\}.$$

Lorsque $x \neq 0_E$, on dit que $\mathbb{K}x$ est une **droite vectorielle**.

D 41 Soit $x, y \in E$. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par x et y le sous-espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}\{\, x, y \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{\, \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,\}.$$

Lorsque x et y ne sont pas colinéaires, on dit que $\operatorname{Vect}\{\, x, y \,\}$ est un **plan vectoriel**

P 42 *Soit $x, y \in E$. Alors $\operatorname{Vect}\{\, x \,\}$ et $\operatorname{Vect}\{\, x, y \,\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*

T 43 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. À faire en exercice. ∎

E 44 L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, on a

$$S = \ker(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

R Le noyau de A est l'ensemble des solution du système linéaire *homogène* $Ax = 0$. Si on considère l'ensemble S des solutions du système $Ax = b$, alors S *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ lorsque $b \neq 0$ (c'est-à-dire lorsque le système n'est pas homogène). En effet, $0 \notin S$. Il y a néanmoins un lien entre S et $\ker(A)$: si x_0 est une solution de $Ax = b$, alors

$$S = \left\{ x_0 + z \;\middle|\; z \in \ker(A) \right\},$$

on dit que S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ de direction $\ker(A)$.

E 45

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble définit par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 3x+y &= 5 \end{cases}$ est un sous-espace affine réduit à un point :

$$\mathscr{V} = (2,-1) + \left\{ 0_E \right\} = \{ (2,-1) \}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, $x+y+z=1$ est l'équation d'un plan affine

$$\mathcal{P} = (1,0,0) + \left\{ (x,y,z)^T \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}.$$

T 46 *Soit* $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, *alors* $\mathrm{Im}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^m$.

Démonstration. À faire en exercice. ∎

E 47 On considère l'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}.$$

Alors pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S &\iff 3x - 2y + z = 0 \\ &\iff x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S = \left\{ sv_1 + tv_2 \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2.$$

où $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$.

On peut donc écrire

$$S = \mathrm{Im}(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Bien sûr, on peut le montrer également avec la définition ou écrire S comme le noyau d'une matrice.

D 48 Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs x_1, x_2, x_3 est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) de E contenant les vecteurs x_1, x_2, x_3. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par** x_1, x_2, x_3 et on le note

$$F = \mathrm{Vect}\left\{ x_1, x_2, x_3 \right\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3, x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \right\}.$$

On dit que (x_1, x_2, x_3) **engendre** F ou que c'est une **famille génératrice** de F.

On peut aménager un texte analogue dans le cas d'un vecteur, d'un couple, d'un quadruplet,. . .

E 49 ▶ Soit $x \in E, x \neq 0_E$. Alors $\mathrm{Vect}\left\{ x \right\} = \left\{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}x$ est une droite vectorielle de E.

T 50 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$ mais que (e_1, e_2) engendre un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^3$.

T 51 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, trouver un couple générateur de F. Y-a-t-il unicité d'un tel couple ?
2. Soit $X = (2, 2, -1)$. Montrer que $X \in F$ mais que $\mathrm{Vect}\,\{ X \} = \mathbb{R}X \subsetneq F$.
3. Un couple (X_1, X_2) générateur de F étant choisi, y-a-t-il unicité de la décomposition $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$?

T 52 Soit $E = \mathbb{R}^2$, $X_1 = (1, 2), X_2 = (1, 1), X_3 = (2, -1), X = (3, -5)$.

1. Montrer que $X \in \operatorname{Vect}\{ X_1, X_2, X_3 \}$. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
2. Montrer que $\operatorname{Vect}\{ X_1, X_2, X_3 \} = E$. Extraire du triplet (X_1, X_2, X_3) un couple générateur de E.

T 53 Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Montrer que

1. $1 + 2X^2 \in \text{Vect}\,\{\, 1 - 2X, X^2 + X, X^3 \,\}$,
2. $X^3 \notin \text{Vect}\,\{\, 1, X, X^2 \,\}$,
3. $X^3 \in \text{Vect}\,\{\, 1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3 \,\}$.

D'une part, il est évident que si x_4 est un nouvel individu de E, on a

$$\operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} \subset \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

D'autre part, on a vu dans les exercices précédents que cette inclusion pouvait être stricte ou large. Plus précisément, on a

P 54

$$x_4 \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} \iff \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} = \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

D 55

- On appelle **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs x_1, x_2, x_3 de E toute relation du type $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_E$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des scalaires non tous nuls (ce qui ne veut pas dire qu'ils sont tous non nuls !).
- S'il existe une relation de dépendance linéaire, on dit que le triplet (x_1, x_2, x_3) est **lié**, ou que les vecteurs x_1, x_2, x_3 sont **linéairement dépendants**.
- Dans le cas contraire, on dit que le triplet (x_1, x_2, x_3) est **libre**, ou que les vecteurs x_1, x_2, x_3 sont **linéairement indépendants**.

T 56 Étudier l'indépendance linéaire des triplets (x_1, x_2, x_3) suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et donner, s'il y a lieu les relations de dépendance linéaire.

1. $((1,3),(4,-1),(-5,1))$.
2. $((1,8,1),(-9,-3,1),(2,2,-3))$.
3. $((2,3,-1),(8,8,1),(4,2,3))$.

T 57 Montrer que si (x_1, x_2, x_3) est un triplet libre de E, il en est de même du triplet $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$.

P 58 *Soit* (x_1, x_2, x_3) *un triplet de* E.

- *Le triplet* (x_1, x_2, x_3) *est lié si et seulement si l'un au moins des vecteurs* x_1, x_2, x_3 *est combinaison linéaire des deux autres.*
- *Le triplet* (x_1, x_2, x_3) *est libre si et seulement si aucun des vecteurs du triplet est combinaison linéaire des deux autres.*

P 59 *Soit* (x_1, x_2, x_3) *un triplet libre de* E *et* x *un vecteur de* E. *On a*

$$(x_1, x_2, x_3, x) \text{ liée} \iff x \in \operatorname{Vect}\{ x_1, x_2, x_3 \}.$$

Démonstration. Soit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda x = 0_E$ une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs x_1, x_2, x_3, x. Alors $\lambda \neq 0$, car sinon le triplet (x_1, x_2, x_3) serait lié, donc λ est inversible et l'on a

$$x = (-\lambda^{-1}\lambda_1)x_1 + (-\lambda^{-1}\lambda_2)x_2 + (-\lambda^{-1}\lambda_3)x_3.$$

La réciproque a déjà été vue. ∎

P 60 *Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. (x_1, x_2, x_3) *est libre.*
2. *tout vecteur x appartenant à $\operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$ admet un unique décomposition de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.*

Démonstration. $1 \implies 2$: Soit $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ deux décompositions de x. Par soustraction, on obtient

$$(\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + (\lambda_3 - \mu_3)x_3 = 0_E.$$

Mais puisque (x_1, x_2, x_3) est libre, on en déduit $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$. Les deux décompositions sont donc identiques.
$2 \implies 1$: En effet, (1) ne fait qu'exprimer (2) pour $x = 0_E$. ∎

D 61 Soit (x_1, x_2, x_3) un triplet libre de vecteurs de E et posons $F = \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. (x_1, x_2, x_3) s'appelle une **base** de F. C'est donc un triplet libre engendrant F.

T 62 Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$ et $F = \mathrm{Vect}\{\,x\,\} = \mathbb{K}x$. Montrer que tout couple (x_1, x_2) d'éléments de F est lié. En déduire toutes les bases de F.

T 63 Soit (x_1, x_2) un couple libre de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}\{\,x_1, x_2\,\}$. Montrer que tout triplet de vecteurs de F est lié. En déduire que les bases de F sont les couples libres de vecteurs de F.