Chapter 16 Calcul matriciel élémentaire

16.1 Matrices

16.2 Addition et multiplication par un scalaire

16.3 Multiplication matricielle

Exercice 16.1

Effectuer les produits des matrices.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16.2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont définies ? Calculer les.

1. Ad
2. $AB + C$
3. $A + C^T$
4. $C^T C$
5. BC
6. $d^T B$
7. Cd
8. $d^T d$
9. dd^T.

Exercice 16.3

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel ABC.

Exercice 16.4

Déterminer, si possible, une matrice A et un scalaire x tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix}$$

Exercice 16.5

Soit $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer aa^T et $a^T a$.

Exercice 16.6

1. Trouver les $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_2$.

2. Trouver les $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = B$.

Exercice 16.7

On note $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indices (i,j) et (k,ℓ) convenable. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$.

Exercice 16.8

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\sigma(A)$ la somme des termes de A.

Vérifier $JAJ = \sigma(A)J$.

16.4 Algèbre des matrices

Exercice 16.9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice $(2,2)$ telle que,

$$\forall B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K}), AB = BA.$$

Montrer que $a = d$, $b = 0$, $c = 0$. En déduire que les seules matrices vérifiant cette propriété sont les multiples scalaires de la matrice unité I_2.

Pouvez-vous généraliser ce résultat aux matrices $(3,3)$? Aux matrices (n,n) ?

Exercice 16.10

Pour toute matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Calculer $\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

On dit que la trace est linéaire.

3. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

4. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

5. Trouver trois matrices A, B, C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(BAC)$.

Exercice 16.11

Résoudre

$$A(X+B) - (C+D)X = A(A-X) - C(B+X)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.12

Résoudre

$$\begin{cases} AX & +BY & = C \\ DX & +BY & = A \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.13

L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd $\delta > 0$ de deux entiers $u \geq v > 0$, peut être décrit ainsi. On définit, par récurrence à deux pas, une suite $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et, tant que $x_i > 0$, $x_{i+1} = x_{i-1} \bmod x_i$ (le reste de la division euclidienne de x_{i-1} par x_i) :

$$x_{i-1} = q_i x_i + x_{i+1}.$$

Il existe alors un entier k tel que $x_k \neq 0$ et $x_{k+1} = 0$; le pgcd de u et v est alors $\delta = x_k$. Démontrer que, pour $i \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{bmatrix}.$$

En déduire que $x_i = a_i u + b_i v$, où

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix}.$$

Que valent les $*$ de la deuxième ligne ? Donner une définition par récurrence mutuelle des suite $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$, puis une méthode de calcul des coefficients de Bézout $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \delta$.

16.5 Matrices inversibles

Exercice 16.14

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice unité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16.15 (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 16.16

Soit A et B deux matrices (n, n) inversibles. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 16.17

Soit A, J, K et I les quatre matrices carrées d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer K^2 et K^3.

(b) Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

2. (a) Exprimer A en fonction de I et K.

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction des matrices I, K, K^2 et de n.

(c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.

(d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

3. *Une première façon de calculer* A^{-1}.

(a) Calculer J^2, et pour tout entier k supérieur ou égal à 3, calculer J^k.

(b) Exprimer A en fonction des matrices I, J et J^2.

(c) Calculer $\left(I + 2J + 3J^2\right)\left(I - 2J + J^2\right)$.

(d) En déduire la matrice A^{-1}.

4. *Une deuxième façon de calculer* A^{-1}.

(a) Calculer les matrices A^2 et A^3.

(b) Quelle est la matrice $A^3 - 3A^2 + 3A$?

(c) En déduire l'écriture de A^{-1} en fonction de I, A et A^2.

(d) Vérifier que ce dernier résultat est cohérent avec celui établi à la question **3.**d

Exercice 16.18

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système de quatre équations donné par l'équation matricielle $BC = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier alors que B est inversible en utilisant la définition de matrice inverse.

3. Vérifier à nouveau votre solution en calculant B^{-1} à l'aide du déterminant.

Exercice 16.19

Soit deux matrices A et B telles que A et AB soient inversibles. On suppose

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}. \tag{1}$$

Déterminer B.

Exercice 16.20

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et en déduire que J n'est pas inversible.

Exercice 16.21

A étant une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe α et β de $\mathbb{K}$ tels que

$$A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0.$$

Quel est l'inverse de A si A est inversible ?

Exercice 16.22

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que G est un groupe multiplicatif.

Exercice 16.23

Pour la multiplication usuelle des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes.

1. $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.
2. $\left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \det M = 1 \right\}$.

Exercice 16.24

Montrer que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in]-1, 1[\right\}$$

est un groupe pour la multiplication matricielle.

Exercice 16.25

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathcal{G} = \left\{ M_{a,b} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \right\} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \to & \mathbb{R}^\star \\ M_{a,b} & \mapsto & a^2 + b^2 \end{array}.$$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathcal{G}, \times)$ dans le groupe $\left(\mathbb{R}^\star, \times\right)$.

Exercice 16.26

Montrer que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

est un groupe (pour la multiplication usuelle) isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

16.6 Puissances d'une matrice

Exercice 16.27

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.28

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = I_3 + B$, calculer les puissances de A.

Exercice 16.29

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible, que A et B commutent et que $B^4 = 0$. Montrer que la matrice $A - B$ est inversible et donner une expression de son inverse en fonction des matrices A, B et A^{-1}.

Exercice 16.30

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que M est inversible et calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16.31

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_p$.

1. Démontrer qu'il existe deux suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_nA + b_nI_p$.

2. En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, vérifier que $X_{n+1} = BX_n$ pour une certaine matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

   On suppose que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1}BP$ est diagonale ; les coefficients de cette dernière seront exprimés uniquement en fonction de r_1 et r_2.

4. En déduire une expression simple de a_n et b_n en fonction de n, r_1 et r_2.

Exercice 16.32

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $U = (A - I_3)(2A + I_3)$, $V = (2A + I_3)^2$, AU et AV.

2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $A = aU + bV + cI_3$.

3. En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, une expression de A^k comme combinaison linéaire de U, V et A^{k-1}.

4. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, $B^k - B^{k-1} = \frac{2}{3}U + \frac{(-2)^k}{6}V$, où $B = -2A$.

5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de B^n, puis de A^n, comme combinaison linéaire de U, V et I_3.

Exercice 16.33

Sur le plan d'une ville, on a n carrefours $C_1, \dots, C_n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$). On définit une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $V[i,j] = 1$ si une rue mène directement du carrefour C_i au carrefour C_j en automobile, sans passer par un autre carrefour ; $V[i,j] = 0$ sinon. On convient $V[i,i] = 0$.

1. Que dire de V si toutes les rues sont à double sens ?

2. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $V^k[i,j]$ – le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de V^k – est le nombre d'itinéraires de C_i à C_j empruntant k rues, distinctes ou non. On appelle *k-chemins* ces itinéraires.

3. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $V^N = 0$. Montrer que, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, le nombre total $\gamma_{i,j}$ de chemins de C_i à C_j est fini. On pose $\Gamma = \left(\gamma_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer $\left(I_n + \Gamma\right) = \left(I_n - V\right)^{-1}$.

Exercice 16.34

Soit $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 16.35

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A \in \mathscr{M}_n\mathbb{C}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. On note

$$e(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

appelée *exponentielle de A* (la somme est en fait «finie»).

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $A + B$ est nilpotente et

$$e(A + B) = e(A)e(B).$$

2. En déduire que, pour toute matrice A nilpotente, $e(A)$ est inversible et $(e(A))^{-1} = e(-A)$.

3. Calculer $e(A)$ dans le deux exemples suivants.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.36 *Mines MP*

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = I_n.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

16.7 Transposée

Exercice 16.37

Résoudre l'équation d'inconnue A

$$\left(5A^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)^T = 3A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1}$$

Exercice 16.38 (*)

Déterminer la matrice A si

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.39

Soit A un matrice (m, n) et B une matrice (n, n). Simplifier l'expression

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T \left(B^{-1} A^T\right)^T B^T B^2 B^{-1}$$

en supposant que les matrices inverses apparaissant dans l'expression sont bien définies.

Exercice 16.40

Soit A une matrice carrée (n, n).

1. Montrer que la matrice $A + A^T$ est symétrique et que la matrice $A - A^T$ est antisymétrique.

2. Montrer que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 16.41

Donner un exemple de deux matrices symétriques dont le produit ne l'est pas. À quelle condition nécessaire et suffisante le produit de deux matrices symétriques le reste-t-il ?

Exercice 16.42

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ un matrice (m, n) sur le corps $\mathbb{R}$. Calculer $\operatorname{Tr}\left(AA^T\right)$. En déduire

$$AA^T = 0 \implies A = 0 \text{ et } A^T = 0.$$

2. Les matrices A, B, et C étant de dimensions convenables, prouver

$$BAA^T = CAA^T \implies BA = CA.$$

On se ramènera à la propriété précédente.

Exercice 16.43

Soit B une matrice (m, k). Montrer que la matrice $B^T B$ est une matrice symétrique (k, k).

16.8 Vecteurs de $\mathbb{K}^n$