Chapter 26 Introduction à la topologie

26.1 Topologie de la droite réelle

Exercice 26.1

Déterminer, pour tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, si ce sont des ouverts, des fermés, les deux, ou ni l'un ni l'autre. Donner également leurs intérieurs, adhérences et frontières.

1. $A = \{ x \}$ où $x \in \mathbb{R}$.
2. $B =]0, 1]$.
3. $C =]0, 1] \cup \{ 2 \}$.
4. $D =]0, 1] \cup]3, 7]$.
5. $E =]0, +\infty[$.
6. $F = \mathbb{Q}$.

Exercice 26.2

On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que chaque singleton $\{ n \}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un fermé.
3. Montrer que $A =]-\infty, 0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $\mathbb{Z} \cup]0, 1[$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$?

   Donner son intérieur et son adhérence.
6. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ est-il un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$?

   Donner son intérieur et son adhérence.

Exercice 26.3

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\sup A$ est l'unique réel qui soit à la fois un majorant de A et un point adhérent à A.

Exercice 26.4

Dans l'espace vectoriel normé $E = \mathbb{R}$, on pose $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{ n - \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$.
Montrer que A et B sont fermés et que $A + B$ n'est pas fermé.
Étudier de même pour $E = \mathbb{R}^2$, les ensembles

$$A = \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2 \;\middle|\; xy = 1 \right\} \quad \text{et} \quad B = \{ 0 \} \times]-\infty, 0] \quad \text{et} \quad A + B.$$

Exercice 26.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence $\overline{U}$ de U.

Exercice 26.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble de ses valeurs.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence A de la suite (u_n) est fermé.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq n \}$. Montrer que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

3. Montrer que $\overline{U} = A \cup U$.

Exercice 26.7 *Points isolés*

Soit S une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $p \in S$ est un *point isolé* de S si

$$\exists r > 0,]p - r, p + r[\cap S = \{ p \} .$$

On note $\mathrm{Isol}(S)$ l'ensemble des points isolées de S. On dit que $p \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation* de S si

$$\forall r > 0, (]p - r, p[\cup]p, p + r[) \cap S \neq \emptyset.$$

On note $\mathrm{Acc}(S)$ l'ensemble des points d'accumulation de S.

1. Donner un exemple d'ensemble S avec un point isolé, un point d'accumulation qui appartient à S, et un point d'accumulation qui n'appartient pas à S.

2. Montrer

$$\mathrm{Isol}(S) \cup \mathrm{Acc}(S) = \overline{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{Isol}(S) \cap \mathrm{Acc}(S) = \emptyset.$$

3. Montrer que $\mathrm{Acc}(S)$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donner un exemple où $\mathrm{Isol}(S)$ n'est pas fermé.

4. Montrer

$$\mathrm{Isol}\left(\overline{S}\right) \subset S.$$

5. Montrer que si A est fermé et x est isolé dans A, alors $A \setminus \{ x \}$ est fermé.

Exercice 26.8

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distincts.

26.2 Topologie de $\mathbb{R}^p$

Exercice 26.9

Montrer que les boules ouvertes de $\mathbb{R}^m$ sont ouvertes puis que les boules fermées sont fermées.

Exercice 26.10

Dans cet exercice, on utilise la définition des ouverts *via* les boules, et pas de critères séquentiels. On représentera chaque raisonnement sur un dessin.

On considère la bande verticale

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- Montrer que C est fermé.
- Quel est l'intérieur de C?

Exercice 26.11

Dans cet exercice, on utilise la définition des ouverts *via* les boules, et pas de critères séquentiels. On représentera chaque raisonnement sur un dessin.

On considère les parties de $\mathbb{R}^2$

$$U =]-1, 1[\times]-1, 1[\quad \text{et} \quad U = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

1. Calculer le plus grand réel r, et le plus petit réel R tels que

$$B(0, r) \subset F \subset B(0, R).$$

2. Montrer que U est ouvert.

3. Montrer que F est fermé.

4. Déterminer l'intérieur de F.

Exercice 26.12

Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1 \right\}$.

2. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1 \right\}$.

3. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1 \right\}$.

4. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0 \right\}$.

5. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 4y = 2 \right\}$.

6. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

7. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \right\}$.

8. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{ 1/n \} \times [0, 1]$.

Exercice 26.13

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^n + y^n = 1 \right\}$.
A_n est-il ouvert ? fermé ? borné ? convexe ?

Exercice 26.14

Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{k^2}{n^2} \right\} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n.$$

Ω est-il ouvert ? Ω est-il fermé ?

Exercice 26.15

Soit

$$A = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t}\right) \;\middle|\; t > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\bar{A}$ de A.

Exercice 26.16

Soient p_1 et p_2 les projections de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$

$$p_1 : (x, y) \mapsto x, \qquad\qquad p_2 : (x, y) \mapsto y.$$

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $p_1(A)$ et $p_2(A)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 26.17

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Comparer $\overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overline{A}$.

3. Comparer $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ et $\overset{\circ}{A}$.

4. Comparer $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

5. Comparer $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

6. Comparer $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.

7. Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Exercice 26.18

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe représentative de f, c'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

26.3 Compacité

26.4 Topologie de $\mathbb{C}^p$