Chapter 2 Corps des nombres réels

2.1 Structures

Solution 2.1
Solution 2.2

2.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Solution 2.3
Solution 2.4

- En additionnant les deux inégalités : $\boxed{-1 \leq x+y \leq 4}$.
- On a $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En additionnant les deux inégalités, on a $\boxed{5 \leq x-y \leq 10}$.
- Il y a de nombreuses façons d'encadrer, mais il faut faire attention au signe de y. Par exemple, puisque $x \geq 0$, on a $-4x \leq xy \leq -2x$. Ensuite, $3 \leq x \leq 6$ d'où $-24 \leq -4x \leq -12$ et $-12 \leq -2x \leq -6$. Par transitivité, on a
$$\boxed{-24 \leq xy \leq -6.}$$
- On a $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4}$ et $x \geq 0$ d'où $-\frac{x}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{4}$. Ensuite $3 \leq x \leq 6$ d'où $-3 \leq -\frac{x}{2} \leq -\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} \leq -\frac{x}{4} \leq -\frac{3}{4}$. Enfin,
$$\boxed{-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}.}$$

Solution 2.5

Dans tous les cas, on peut écrire pour $x \geq 1$,
$$0 < \frac{x+\ln x}{1+x^2} \leq \frac{2x-1}{1+x^2}.$$

- Pour $x \in [1,2]$, on a $1 \leq x+\ln x \leq 2x-1 \leq 3$ et $2 \leq 1+x^2 \leq 5$. Nous obtenons alors l'encadrement
$$\boxed{\frac{1}{5} \leq \frac{x+\ln x}{1+x^2} \leq \frac{3}{2}.}$$
- Pour $x \in [1,+\infty[$, on a
$$\boxed{0 < \frac{x+\ln x}{1+x^2} \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.}$$
En effet, $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff 2x \leq 1+x^2 \iff x^2-2x+1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0$. La dernière assertion étant toujours vraie, il en est de même de $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

Solution 2.8

Comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés.
$$|x-1| < |x-2| \iff (x-1)^2 < (x-2)^2 \iff x^2-2x+1 < x^2-4x+4 \iff 2x < 3 \iff \boxed{x < \frac{3}{2}}.$$

Géométriquement, $|x-1|$ et $|x-2|$ représente la distance de x à 1 et 2 sur la droite réelle. Ainsi x est solution de l'inéquation si, et seulement si x est (strictement) plus proche de 1 que de 2.

Variante: On utilise une disjonction de cas.

- Si $x < 1$, alors $x-1 < 0$ et $x-2 < 0$, donc
$$|x-1| < |x-2| \iff 1-x < 2-x \iff 1 < 2.$$
Cette dernière relation étant toujours vraie, il en est de même de $|x-1| < |x-2|$ (sous la condition $x < 1$). D'où un premier ensemble solution : $]-\infty, 1[$.

- Si $1 \leq x \leq 2$, alors $x-1 \geq 0$ et $x-2 < 0$, donc
$$|x-1| < |x-2| \iff x-1 < 2-x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}.$$
D'où un second ensemble solution $\left[1, 3/2\right[$.

- Si $2 < x$, alors $x-1 \geq 0$ et $x-2 \geq 0$, donc
$$|x-1| < |x-2| \iff x-1 < x-2 \iff -1 < -2.$$
Cette dernière relation étant toujours fausse, il n'y a pas de solution dans le cas $x > 2$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de $|x-1| < |x-2|$ est $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.

Solution 2.9

- Si $x \geq 4$,
$$(\textbf{??}) \iff 3(x-2) - 2(x-1) \geq (x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} \geq 0 \iff x \geq \frac{11}{2}.$$
D'où un premier ensemble de solutions : $\mathscr{S}_1 = \left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$.

- Si $2 \leq x > 4$:
$$(\textbf{??}) \iff 3(x-2) - 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 10x \geq 43 \iff x \geq \frac{43}{10};$$
ce cas ne fournit donc pas de solution.

- Si $1 \leq x < 2$:
$$(\textbf{??}) \iff -3(x-2) - 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff -16x+16 \geq 11-2x \iff -14x \geq -5 \iff x \leq \frac{5}{14};$$
ce cas ne founit donc pas de solution également.

- Si $x < 1$:
$$(\textbf{??}) \iff -3(x-2) + 2(x-1) \geq -(x-4) - \frac{1}{4}(2x-1) \iff 0 \geq -\frac{1}{4}(2x-11) \iff x \geq \frac{11}{2};$$
il n'y a donc pas non plus de solution dans ce dernier cas.

L'ensemble des solution de l'équation (**??**) est alors la réunion des différents cas

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{11}{2};+\infty\right[.}$$

Solution 2.11

1. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|x+1| = 3 \iff x+1=3 \text{ ou } x+1=-3 \iff x \in \{\, 2;-4 \,\}.$$

2. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x+5| = |x+7| &\iff x+5 = x+7 \text{ ou } x+5 = -x-7 \\ &\iff \underbrace{0=2}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } 2x=-12 \iff x=-6. \end{aligned}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x+3| = x-1 \iff \begin{cases} x+3 = x-1 \text{ ou } x+3 = -x+1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3=-1 \text{ ou } 2x=-2 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

L'équation $|x+3| = x-1$ n'a donc pas de solution.

4. Réponse : $\mathscr{S} = \emptyset$.

5. Réponse : $\mathscr{S} = \{\, -1, 2 \,\}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x^2+x-6| = |-x^2-3x+10| &\iff x^2+x-6 = -x^2-3x+10 \text{ ou } x^2+x-6 = x^2+3x-10 \\ &\iff 2x^2+4x-16=0 \text{ ou } 2x=4. \end{aligned}$$

L'équation $2x^2+4x+4=0$ a pour discriminant $16+128=144$ et pour solutions $\frac{-4-12}{4}=-4$ et $\frac{-4+12}{4}=2$. Finalement

$$|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10| \iff x=-4 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=2.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $|x^2+x-6| = |-x^2-3x+10|$ est donc $\{\, -4;2 \,\}$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |1-x| = x-1 &\iff \begin{cases} 1-x = x-1 \text{ ou } 1-x = -x+1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x=2 \text{ ou } 0=0 \text{ (toujours vrai)} \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 1. \end{aligned}$$

Solution 2.13
Solution 2.14
Solution 2.16
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{13} < \frac{110}{17} < \frac{n+1}{13} \iff n < \frac{110 \times 13}{17} < n+1.$$

D'après la définition de la partie entière, il existe un unique entier n vérifiant l'inégalité $n \leq \frac{1430}{17} < n+1$, c'est $n = \left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor$. Or $1430/17 \notin \mathbb{N}$, donc $\left\lfloor \frac{1300}{17} \right\rfloor \neq \frac{1430}{17}$ et $\left\lfloor \frac{1430}{17} \right\rfloor = 84$ convient.
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{84}{13} < \frac{110}{p} < \frac{85}{13} \iff 84p < 13 < 85p \iff \frac{13}{85} < p < \frac{13}{84}.$$

Or $0 < 13/85 < 13/84 < 1$ et l'intervalle $]0, 1[$ ne contient aucun entier. Il n'existe donc aucun $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\dfrac{84}{13} < \dfrac{110}{p} < \dfrac{85}{13}$.
Solution 2.17
On a $\lfloor 113 * \pi \rfloor = 354$, ainsi $355/113$ approche π à l'ordre 6.
Solution 2.18

1. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

En additionnant ces deux inégalité, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Par définition de la partie entière de $x + y$, la première inégalité montre que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$$

étant donné que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$.

En tenant compte de $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$, la seconde inégalité prouve que

$$\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Ces deux quantités étant entières, cela revient à $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. On peut prendre par exemple $x = 3.1$ et $y = 5.2$.

3. On peut prendre par exemple $x = 4.7$ et $y = 2.8$.

Solution 2.19
Si on suppose $x < y$, on pose $k = \lfloor x \rfloor + 1$. On a alors $x < k$ et aussi $k \leq x + 1 < x + |x - y| = y$.
Le raisonnement est similaire lorsque $x > y$; on pose alors $k = \lfloor y \rfloor + 1$.
Solution 2.20
Solution 2.21
L'équation (**??**) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \frac{1}{k}$.
Une condition nécessaire pour que $\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2$ est $\frac{x}{1-kx} > 0$, c'est-à-dire $x \in \left]0, \frac{1}{k}\right[$.

Soit $x \in \left]0, \frac{1}{k}\right[$.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2 &\iff 2 \leq \frac{x}{1-kx} < 3 \\
&\iff 2(1-kx) \leq x < 3(1-kx) && \because 1-kx > 0 \\
&\iff (1+2k)x \geq 2 \text{ et } (1+3k)x < 3 \\
&\iff \frac{2}{1+2k} \leq x < \frac{3}{1+3k}.
\end{aligned}$$

On remarque enfin que $0 \leq \frac{2}{1+2k} \leq \frac{3}{1+3k} < \frac{3}{3k} = \frac{1}{k}$.

Conclusion

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \iff x \in \left[\frac{2}{1+2k}, \frac{3}{1+3k}\right[.$$

Solution 2.22

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguerons deux cas : $\lfloor x \rfloor$ est un entier pair ou $\lfloor x \rfloor$ est un entier impair.
Premier cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $2p \leq x < 2p+1$, d'où

$$p \leq \frac{x}{2} < p + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < p+1,$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p = \lfloor x \rfloor.$$

Deuxième cas: si $\lfloor x \rfloor = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $2p+1 \leq x < 2p+2$, d'où

$$p + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1 \quad \text{et} \quad p+1 \leq \frac{x+1}{2} < p + \frac{3}{2},$$

ces encadrements prouvent que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p+1$$

d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 2p+1 = \lfloor x \rfloor.$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution 2.24
Solution 2.25
Solution 2.27

2.3 Le premier degré

Solution 2.30
Solution 2.31

2.4 Puissances, racines

Solution 2.35

1. $(-7)^2 = 7^2 = 49.$

2. $(9)^2 = 81.$

3. $(-10)^3 = -10^3 = -1000.$

4. $(+8)^3 = 512.$

5. $(-11)^2 = 11^2 = 121.$

6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}.$

9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3 = -\frac{10^3}{3^3} = -\frac{1000}{27}.$

10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}.$

11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2\times 3^2}{3\times 4^2} = \frac{2\times 3}{4^2} = \frac{3}{8}.$

12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2 = \frac{2^2\times 3^2}{3^2\times 4^2} = \frac{1}{4}.$

13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{7^2\times 2^2\times 7}{8^3\times 7^2\times 14} = \frac{2}{8^3} = \frac{1}{256}.$

14. $(-3)^4 \times (-3)^5 = -3^9.$

15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1} = (-3)^2 = 9.$

17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1} = (-2\times(-3)\times(-1))^{-1} = (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}.$

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1} = 3^2 \times (-2) = -18.$

19. $77^{-1}\times 7^4\times 11^2\times(7\times 11)^4\times(7^2)^{-8}\times\left(7^{-8}\right)^{-3}\times\frac{1}{(-11)^{-3}} = -7^{-1+4+4-16+24}\times 11^{-1+2+4+3} = -7^{15}\times 11^8.$

Solution 2.36

1. $2 \times 3^{n-1}$.

2. $2^2 \times 3^7$.

3. $8 \times 3^{2n} + (2^n - 2) \times 3^n - 1$.

4. $\dfrac{2^{n+2}}{3}$.

5. $\dfrac{1}{3^2 \times 2^n}$.

6. 3×2^n.

Solution 2.37

Toutes les équations sont définies pour $x \in \mathbb{Z}$.

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2 \iff 4^{(x^2)} = 4^{16} \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4$.

2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25} \iff 10^{x+2} = 10^{50-15x} \iff x + 2 = 50 - 15x \iff x = 3$.

3. $2^x + 4^x = 20 \iff 2^x + (2^x)^2 = 20 \iff (2^x)^2 + 2^x - 20 = 0$. Or, les racines du polynôme $X^2 + X - 20$ sont 4 et -5. Enfin
$$2^x = 4 \iff x = 2 \quad \text{et} \quad 2^x = -5 \text{ est impossible.}$$
Finalement, l'équation $2^x + 4^x = 20$ a pour unique solution $x = 2$.

4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \iff 9\,(3^x)^2 + 9\,(3^x) - 810 = 0 \iff (3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$. Or, le polynôme $X^2 + X - 90$ a pour discriminant $361 = 19^2$ et pour racines -10 et 9. Enfin,
$$3^x = -10 \text{ est impossible} \quad \text{et} \quad 3^x = 9 \iff x = 2.$$
Finalement, l'équation $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ a pour unique solution $x = 2$.

5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1 \iff 4^{(2+x)(3-x)} = 1 \iff (2+x)(3-x) = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 3$.

6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2 \iff 10^{(x-1)(x-4)} = 10^4 \iff x^2 - 5x + 4 = 4 \iff x^2 - 5x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$.

Solution 2.41

Montrons
$$0 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \sqrt{b} < b < b^2 < b^3.$$
En multipliant l'inégalité $a < 1$ par a ou a^2 (qui sont > 0), on obtient $a^2 < a$ et $a^3 < a^2$.

Puisque $a < 1$, on a $\sqrt{a} < 1$ et donc $a < \sqrt{a}$.

Le raisonnement pour b est analogue...

Solution 2.43

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 0$.

3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$.

4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98} = 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

Solution 2.44

Afin de comparer des réels positifs, il suffit de comparer leur carrés. Ainsi
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \iff x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \iff 0 \leq \sqrt{xy}.$$

Cette dernière relation étant toujours vraie, la première l'est également.

Solution 2.47

Solution 2.48

Multiplions chaque membre de l'inégalité par xy. Puisque $x > 0$ et $y > 0$, il vient

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0.$$

Or la dernière assertion est toujours vraie, et elle est équivalente à l'inéquation $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Cette dernière est donc également toujours vraie (sous l'hypothèse $x > 0$ et $y > 0$).

Solution 2.49

1. Le discriminant de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ est $16 > 0$ et ses solutions sont donc

$$\frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } \frac{2+4}{2} = 3.$$

2. Une racine double : -2.

3. Inutile de développer :

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4} \iff \left(x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ou } x - 1 = -\frac{1}{2}\right) \iff \left(x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}\right).$$

4. Il n'y a pas de solution réelle.

5. On trouve deux solutions 0 et 2. Encore une fois, il n'est pas utile de développer.

Solution 2.50 *Équation bicarrée*

Solution 2.51

Solution 2.52

Solution 2.54

Solution 2.55

Si $m = 0$, $mx^2 + (m-1)x + m - 1 = -x - 1$ n'est pas de signe constant.

Si $m \neq 0$. Alors, le trinôme $mx^2 + (m-1)x + m - 1$ est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si $m < 0$ et son discriminant $\Delta \leq 0$. Ici

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m(m-1) = -3m^2 + 2m + 1.$$

On retrouve un trinôme du second degré en m de discriminant $\delta = 4 + 12 = 16 \geq 0$ ayant pour racines $\frac{-2-4}{-6} = 1$ et $\frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3}$. D'où

$$\Delta \leq 0 \iff -3m^2 + 2m + 1 \leq 0 \iff \left(m \geq 1 \text{ ou } m \leq -\frac{1}{3}\right).$$

Finalement,

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, mx^2 + (m-1)x + m - 1 \leq 0\right) \iff (\Delta \leq 0 \text{ et } m < 0) \iff m \leq -\frac{1}{3}.$$

Solution 2.57

1. L'équation $|4-x| = x$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $x > 4$, alors

$$|4-x| = x \iff x-4 = x \iff -4 = 0.$$

Ce cas n'apporte aucune solution.

Si $x \leq 4$, alors

$$|4-x| = x \iff 4-x = x \iff x = 2.$$

Conclusion

L'équation $|4-x| = x$ a pour unique solution $x = 2$.

2. L'équation $|x^2+x-3| = |x|$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|x^2+x-3| = |x| \iff x^2+x-3 = x \text{ ou } x^2+x-3 = -x. \iff x^2-3 = 0 \text{ ou } x^2+2x-3 = 0.$$

La première équation a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. La seconde a pour solutions 1 et -3. Finalement

$$|x^2+x-3| = |x| \iff x \in \left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, -3 \right\}.$$

3. On fait trois cas et l'on trouve deux solutions : $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$.

4. L'équation $\sqrt{1-2x} = |x-7|$ est définie pour $x \leq \frac{1}{2}$. Comparer des nombre positifs revient à comparer leurs carrés, ainsi

$$\sqrt{1-2x} = |x-7| \iff 1-2x = x^2-14x+49 \iff x^2-12x+48 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

5. L'équation $x|x| = 3x+2$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$,

$$x|x| = 3x+2 \iff x^2 = 3x+2 \iff x^2-3x-2 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

  En tenant compte de la condition $x \geq 0$,

$$x|x| = 3x+2 \iff x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

- Si $x < 0$,

$$x|x| = 3x+2 \iff -x^2 = 3x+2 \iff x^2+3x+2 = 0 \iff x \in \{-2, -1\}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x|x| = 3x+2$ est

$$\left\{ \frac{3+\sqrt{17}}{2}, -2, -1 \right\}.$$

6. L'équation $x+5=\sqrt{x+11}$ est définie pour $x \geq -11$. On a

$$x+5=\sqrt{x+11} \iff \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ (x+5)^2 = x+11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2+10x+25 = x+11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2+9x+14=0 \end{cases}$$

Or le polynôme $X^2+9X+14$ a pour discriminant 25 et pour racines -7 et -2. Tenant compte de la condition $x \geq -5$ et $x \geq -11$, on a

$$x+5=\sqrt{x+11} \iff x=-2.$$

7. L'équation $x = 1+\sqrt{x^2-2}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}\backslash]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Dans ce cas,

$$x=1+\sqrt{x^2-2} \iff x-1=\sqrt{x^2-2} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1 = x^2-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ -2x=-3 \end{cases} \iff x=\frac{3}{2}.$$

8. L'équation $x+|x| = \frac{2}{x}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^\star$.

- Si $x > 0$,
$$x+|x| = \frac{2}{x} \iff 2x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 1 \underset{x>0}{\iff} x=1.$$
- Si $x < 0$,
$$x+|x| = \frac{2}{x} \iff 0 = \frac{2}{x} \text{ (impossible).}$$

Conclusion

L'équation $x+|x| = \frac{2}{x}$ a pour unique solution $x=1$.

Solution 2.59

Solution 2.61

L'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} \leq x+m &\iff 1+x^2 \leq (x+m)^2 \text{ et } x+m \geq 0 \\ &\iff 1+x^2 \leq x^2+2mx+m^2 \text{ et } x+m \geq 0 \\ &\iff 2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m. \end{aligned}$$

- Si $m=0$, l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ n'a pas de solution.
- Si $m > 0$,
$$(2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m) \iff \left(x \geq \max\left(-m, \frac{1-m^2}{2m}\right)\right)$$
Or $\frac{1-m^2}{2m} > -m$ (car $\frac{1-m^2}{2m} + m = \frac{m^2+1}{m} > 0$),
Donc l'ensemble des solution de l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est $\left[\frac{1-m^2}{2m}, +\infty\right[$.
- Si $m < 0$,
$$(2mx \geq 1-m^2 \text{ et } x \geq -m) \iff \left(-m \leq x \leq \frac{1-m^2}{2m}\right),$$
or $-m > \frac{1-m^2}{2m}$ (car $\frac{1-m^2}{2m} + m = \frac{m^2+1}{2m} < 0$).
Donc l'ensemble des solution de l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ est vide.

Conclusion

L'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x+m$ admet des solutions si, et seulement si $m > 0$, et dans ce cas, l'ensemble solution est
$$\left[\frac{1-m^2}{2m}, +\infty\right[.$$

Solution 2.62

Solution 2.63

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq \sqrt{x^2+1} < 3$$
$$\iff 4 \leq x^2+1 < 9 \iff 3 \leq x^2 < 8 \iff \sqrt{3} \leq |x| < 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$ est $\left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[$.

Solution 2.65

Solution 2.71

Solution 2.72

Solution 2.73 *Un avant-goût de la définition des limites de fonctions...*

1. On peut choisir $\alpha = 2$ par exemple. Ainsi, si $x \in [1, 5]$, on a $3 \leq x \leq 7$ et donc $|x+2| \leq 10$.
2. On a $|x^2 - x - 6| = |x+2||x-3|$. Or
$$x \in [3-\beta, 3+\beta] \iff |x-3| \leq \beta.$$
Donc si l'on choisit $\beta \leq 2$, on a $[3-\beta, 3+\beta] \subset [3-2, 3+2]$ et d'après la question précédente
$$\forall x \in [3-\beta, 3+\beta], |x+2||x-3| \leq 10\beta.$$
On peut choisir, par exemple, $\beta = 1/10000$. On a donc pour $x \in [3-\beta, 3+\beta]$,
$$|x^2 - x - 6| = |x+2||x-3| \leq 10 \times \beta = \frac{1}{1000} = 0.001.$$

Solution 2.74 ☕

1. Comme $1 \leq 2 \leq 9/4$, et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, nous obtenons $1 \leq \sqrt{2} \leq 3/2$.
2. (a) On a
$$r_2 - \sqrt{2} = \frac{p+2q}{p+q} - \sqrt{2} = \frac{p/q+2}{p/q+1} - \sqrt{2} = \frac{r_1+2}{r_1+1} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{r_1\left(1-\sqrt{2}\right) + 2 - \sqrt{2}}{r_1+1} = \frac{\left(r_1 - \sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{r_1+1}.$$
(b) On suppose $\sqrt{2} \leq r_1 \leq \sqrt{2} + \varepsilon$. Comme $r_1 \geq \sqrt{2} \geq 1$, on a
$$0 \leq \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{5}$$
Puisque $\sqrt{2} \leq r_1 \leq \sqrt{2} + \varepsilon$, nous obtenons
$$0 \leq \sqrt{2} - r_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1}\left(r_1 - \sqrt{2}\right) \leq \frac{1}{5}\varepsilon.$$

(c) On suppose $\sqrt{2}-\varepsilon \leq r_1 \leq \sqrt{2}$. Comme $r_1 > 0$ et $\sqrt{2} \leq 3/2$, on a

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1} \leq \sqrt{2}-1 \leq \frac{1}{2}.$$

Et puisque $\sqrt{2}-\varepsilon \leq r_1$, nous obtenons

$$0 \leq r_2 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{r_1+1}\left(\sqrt{2}-r_1\right) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

3. Utilisons les résultats précédent cinq fois de suite

- $1/1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $1/2$ près;
- $3/2$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $1/4$ près;
- $7/5$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{4\times 5}$ près;
- $17/12$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $\frac{1}{20\times 2}$ près;
- $41/29$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à $\frac{1}{40\times 5}$ près.

Ainsi, $41/29$ et $\sqrt{2}$ ont même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2.

2.5 Congruences dans $\mathbb{R}$

Solution 2.75

Non. Par exemple $\sqrt{2} \equiv 0 \pmod{\sqrt{2}}$ alors que $2 \not\equiv 0 \pmod{\sqrt{2}}$ (sinon on pourrait écrire $2 = k\sqrt{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ nécessairement non nul, et $\sqrt{2} = \frac{2}{k}$ serait donc rationnel).

Solution 2.76

$$x \equiv y \pmod{2\pi} \implies x \equiv y \pmod{\pi} \implies x \equiv y \pmod{\pi/2}.$$

Les implications réciproques sont en général fausses, en effet

$$0 \equiv \pi \pmod{\pi} \text{ mais } 0 \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$$
$$0 \equiv 3\pi/2 \pmod{\pi/2} \text{ mais } 0 \not\equiv 3\pi/2 \pmod{\pi}.$$