# Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

# Aperçu


1. Ensemble des solutions
2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
3. Problème de Cauchy
4. Méthode d'Euler

1. Ensemble des solutions

1.1 Définitions

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

1.3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

1. Ensemble des solutions
1.1 Définitions
1.2 Structure de l'ensemble des solutions
1.3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**D 1** Soit $\alpha, \beta$ et $\gamma : J \to \mathbb{K}$ trois applications continues sur un intervalle $J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1** une équation qui s'écrit sous la forme

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

On appelle **équation homogène** associée à $(E)$, l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

**D 2** Soit $I \subset J$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que $f$ est **solution de $(E)$ sur $I$** si

- l'application $f$ est dérivable sur $I$,
- et $\forall t \in I, \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

**Résoudre** ou **intégrer** l'équation différentielle $(E)$ sur $I$, c'est donner toutes les solutions définies sur $I$.
Une **courbe intégrale** de $(E)$ est la courbe représentative d'une solution de $(E)$.

**N** On note ici $\mathcal{S}(E, I)$ l'ensemble des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $I$.

**R**

- Souvent, l'équation $(E)$ se note abusivement

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t).$$

- Une équation différentielle linéaire est une équation linéaire au sens de l'algèbre linéaire (cf. espaces vectoriels)...

**E 3** L'équation $y'(t) = y(t)$ admet pour solutions

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$$

**D 4** Une solution $f : I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle est une **solution maximale** si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle $I' \neq I$ contenant $I$.

1. Ensemble des solutions
1.1 Définitions
1.2 Structure de l'ensemble des solutions
1.3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

P 5 **Principe de superposition des solutions**

*On considère les équations différentielles*

$$(E_1) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma_1(t) \qquad (E_2) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma_2(t)$$

*Si $f_1$ et $f_2$ sont solutions sur $I$ respectivement de $(E_1)$ et $(E_2)$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur $I$ de l'équation différentielle*

$$(E) : \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \lambda\gamma_1(t) + \mu\gamma_2(t).$$

*Démonstration.* Soient $f_1$ et $f_2$ des solutions sur $I$ respectivement de $(E_1)$ et $(E_2)$. Soient également $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et l'application

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Les applications $f_1$ et $f_2$ sont dérivables sur $I$ en tant que solutions de $E_1$ et $E_2$. L'application $f$ est donc dérivable sur $I$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $I$.
Soit $t \in I$.

$$f(t) = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \qquad \text{et} \qquad f'(t) = \lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha(t) f'(t) + \beta(t) f(t) &= \alpha(t) \left(\lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t)\right) + \beta(t) \left(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\right) \\ &= \lambda \left(\alpha(t) f_1'(t) + \beta f_1(t)\right) + \mu \left(\alpha(t) f_2'(t) + \beta(t) f_2(t)\right) \\ &= \lambda \gamma_1(t) + \mu \gamma_2(t) \end{aligned}$$

car $f_1, f_2$ sont solutions de $(E_1)$, $(E_2)$. Autrement dit, $f$ est solution de $(E)$. ∎

**T 6** *Soit $\alpha, \beta$ et $\gamma : I \to \mathbb{K}$ trois applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire*

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

*On suppose qu'il existe une solution $f_0 \in \mathcal{S}(E, I)$, alors*

$$\mathcal{S}(E, I) = f_0 + \mathcal{S}(H, I) = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$$

La «solution générale» s'écrit donc sous la forme «solution particulière» plus «solutions de l'équation homogène associée».

*Démonstration.* On note $F = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$.
Montrons que $\mathcal{S}(E, I) \subset F$. Si $f \in \mathcal{S}(E, I)$, alors $h = f - f_0 \in \mathcal{S}(H, I)$, d'où $f = f_0 + h \in F$.
Montrons que $F \subset \mathcal{S}(E, I)$. Si $f \in F$, alors il existe $h \in \mathcal{S}(H, I)$ tel que $f = f_0 + h$ et $f$ est solution de $(E)$ d'après le principe de superposition. ∎

1. Ensemble des solutions
1.1 Définitions
1.2 Structure de l'ensemble des solutions
1.3 Solutions complexes d'une équation à coefficients réels

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**P 7** *Soient*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \qquad \beta : I \to \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \gamma : I \to \mathbb{C}.$$

*L'application* $f : I \to \mathbb{C}$ *est solution de l'équation différentielle*

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \tag{E}$$

*si et seulement si* $\mathfrak{Re}(f)$ *est* $\mathfrak{Im}(f)$ *sont solutions respectives de*

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

Ce résultat est faux si $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas à images réelles.

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
2.1 Équation différentielle normalisée
2.2 Résolution d'une équation homogène normalisée
2.3 Résolution par changement de fonction inconnue
2.4 Expression des solutions sous forme intégrale

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
2.1 Équation différentielle normalisée
2.2 Résolution d'une équation homogène normalisée
2.3 Résolution par changement de fonction inconnue
2.4 Expression des solutions sous forme intégrale

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**D 8** Si pour tout $t \in J, \alpha(t) \neq 0$, alors $(E)$ est équivalente à une équation de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Une telle équation est dite sous forme **réduite** ou **normalisée**.

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
2.1 Équation différentielle normalisée
2.2 Résolution d'une équation homogène normalisée
2.3 Résolution par changement de fonction inconnue
2.4 Expression des solutions sous forme intégrale

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**T 9** *Soit $a : I \to \mathbb{K}$ où $I$ est un intervalle. On suppose que la fonction $a$ admet une primitive $A : I \to \mathbb{K}$ sur $I$. Alors, les solutions maximales de l'équation homogène*

$$y'(t) = a(t)y(t) \tag{H}$$

*sont les applications*

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

*Démonstration.* Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une application et $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Posons $z = ye^{-A} : t \mapsto y(t)e^{-A(t)}$. On a donc

$$\forall t \in I, y(t) = z(t)e^{A(t)}.$$

Donc *la fonction $z$ est dérivable si et seulement si $y$ est dérivable*. Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y'(t) - a(t)y(t) &= z'(t)e^{A(t)} + z(t)A'(t)e^{A(t)} - a(t)z(t)e^{A(t)} \\ &= z'(t)e^{A(t)} + z(t)a(t)e^{A(t)} - a(t)z(t)e^{A(t)} \\ &= z'(t)e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{A(t)}$ n'est jamais nul,

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}(H, I) &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \qquad \text{car } I \text{ est un intervalle.} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)} \end{aligned}$$

∎

**C 10** *Soit $h$ une solution non nulle de $(H)$, par exemple $h : t \mapsto e^{A(t)}$, alors*

$$\mathcal{S}(H, I) = \{ \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K} \} .$$

On dit que $\mathcal{S}(H, I)$ est une **droite vectorielle** de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et que $h$ en est un **générateur**.

**R** L'équation différentielle $y' = ay$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre $1$ à coefficients constants. L'application $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $A(t) = at$ est une primitive de l'application constante $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a \end{array}$.
Les solution de l'équation différentielle homogène $y' = ay$ sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**E 11** Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) - ty(t) = 0. \tag{H}$$

*Démonstration.* L'équation $(H)$ est équivalente à l'équation $y'(t) = ty(t)$. L'application $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array}$ admet pour primitive l'application

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{2} \end{array}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ étant un intervalle, les solutions réelles maximales de $(H)$ sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{t^2/2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

∎

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
2.1 Équation différentielle normalisée
2.2 Résolution d'une équation homogène normalisée
2.3 Résolution par changement de fonction inconnue
2.4 Expression des solutions sous forme intégrale

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**M** Nous supposons que la fonction $\alpha$ ne s'annule pas sur $I$. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et $h$ est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à $(E)$,

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que $h$ est un **facteur intégrant**.
Considérons une application $y : I \to \mathbb{K}$. On sait que $h$ ne s'annule pas donc $z = \frac{y}{h}$ est dérivable sur $I$ si et seulement si $y = zh$ est dérivable sur $I$. Sous cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) &= \alpha(t)\left(z'(t)h(t) + z(t)h'(t)\right) + \beta(t)z(t)h(t)\\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) + z(t)\cancel{\left(\alpha(t)h'(t) + \beta(t)h(t)\right)}\\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) && \text{car } h \text{ est solution de } (H\end{aligned}$$

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci-dessus.

**M** Nous supposons que la fonction $\alpha$ ne s'annule pas sur $I$. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et $h$ est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à $(E)$,

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que $h$ est un **facteur intégrant**.
De plus, on sait que $\alpha$ et $h$ ne s'annulent pas, d'où

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{S}(E, I) &\iff \forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \\
&\iff \forall t \in I, \alpha(t)z'(t)h(t) = \gamma(t) \\
&\iff \forall t \in I, z'(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \qquad \text{où } b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.
\end{aligned}$$

Supposons alors qu'il existe $B$ une primitive de $\frac{b}{h}$ sur l'*intervalle* $I$. Nous sommes assurés de son existence lorsque $\alpha$ et $\gamma$ sont continues. Alors la fonction $f_0 : t \mapsto B(t)h(t)$ est solutions de $(E)$ sur $I$.

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci-dessus.

**M** Nous supposons que la fonction $\alpha$ ne s'annule pas sur $I$. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et $h$ est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à $(E)$,

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que $h$ est un **facteur intégrant**.
L'équation $(E)$ étant linéaire, ses solutions définies sur $I$ sont donc les applications

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (B(t) + \lambda)\, h(t) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci-dessus.

**P 12** *Soient $I$ un intervalle, $a$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux applications. On suppose qu'il existe $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $a$ sur $I$ et $B : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ sur $I$.*
*Alors, les solutions de l'équation*

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

*sont les applications*

$$\begin{array}{rccc} f_\lambda : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & (B(t)+\lambda)\, e^{A(t)} \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

**E 13** Déterminer les solutions définies sur $]0,+\infty[$ et à images réelles, de l'équation différentielle
$$ty'(t)-y(t)=t^2\,\mathrm{e}^t\,. \tag{E}$$

*Démonstration.*
L'équation homogène associée à $(E)$ est $ty'(t)-y(t)=0$ qui est équivalente sur $]0,+\infty[$ à l'équation réduite
$$y'(t)=\frac{1}{t}y(t).$$

L'application $\begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$ admet pour primitive $\begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln t \end{array}$.
Les solutions de l'équation $ty'(t)-y(t)=0$ sur l'*intervalle* $]0,+\infty[$ sont
$$\begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln t}=\lambda t \end{array},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

**E 13** Déterminer les solutions définies sur $]0,+\infty[$ et à images réelles, de l'équation différentielle

$$t y'(t) - y(t) = t^2\,\mathrm{e}^t\,. \tag{E}$$

Cherchons une solution de $(E)$ sous la forme $f : t \mapsto z(t)\,\mathrm{e}^{\ln t} = tz(t)$ où $z$ est une application dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $t \in ]0,+\infty[$, on a

$$tf'(t) - f(t) = t\left(tz'(t) + \cancel{z(t)}\right) - \cancel{tz(t)} = t^2 z'(t),$$

et on en déduit

$$tf'(t) - f(t) = t^2 e^t \iff t^2 z'(t) = t^2 e^t \iff z'(t) = e^t \quad \text{car} \quad t^2 \neq 0.$$

On peut choisir $z(t) = e^t$, c'est-à-dire $f(t) = te^t$. La fonction $f$ est donc *une solution* de $(E)$ sur $]0,+\infty[$.
L'équation $(E)$ étant linéaire, l'ensemble de ses solutions réelles définies sur $]0,+\infty[$ est donc

$$\mathcal{S}\left(E, ]0,+\infty[\right) = \left\{ \begin{array}{rccc} f_\lambda : & ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t + \lambda t \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
2.1 Équation différentielle normalisée
2.2 Résolution d'une équation homogène normalisée
2.3 Résolution par changement de fonction inconnue
2.4 Expression des solutions sous forme intégrale

3. Problème de Cauchy

4. Méthode d'Euler

**C 14** *Soient $I$ un intervalle, $a$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues. Soit $t_0 \in I$. Les solutions maximales de l'équation différentielle*

$$(E)\,:\, y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

*sont les applications*

$$\begin{array}{rccl} f\,: & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left(\lambda + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}\,\mathrm{d}u\right) e^{A(t)} \end{array}$$

*avec*

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \qquad \textit{et} \qquad \lambda = f(t_0) \in \mathbb{R} \textit{ un réel quelconque.}$$

**C 15** *Une solution particulière de* $(E)$ *est donnée par*

$$\begin{array}{rccl} f_0 : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left( \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} \, \mathrm{d}u \right) e^{A(t)} \end{array}.$$

**R** L'application $f_0$ est une solution de $(E)$, c'est une « solution particulière » de $(E)$. En notant $\lambda h : t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ les solutions de l'équation homogène associée à $(E)$, on a [2]

$$\mathcal{S}(E, I) = \left\{ f_0 + \lambda h \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

On dit que $\mathcal{S}(E, I)$ est une **droite affine** de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

---

[2]

$$\overbrace{f_0}^{\text{«point»}} + \underbrace{\mathbb{K} \overbrace{h}^{\text{«vect.directeur»}}}_{\text{«direction»}}$$

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

3.2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

4. Méthode d'Euler

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy
3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz
3.2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

4. Méthode d'Euler

**D 16** Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre $(E)$ et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions $f$ de $(E)$ qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$.

**T 17** **Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz**

*Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur un intervalle $I$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{E}$$

*admet une solution unique.*

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de $(E)$ passant par le point $M_0(t_0, y_0)$.

1. Ensemble des solutions

2. Résolution d'une équation différentielle normalisée

3. Problème de Cauchy

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

3.2 Exemple où l'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

4. Méthode d'Euler

Considérons l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

**R** Ici, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

- Toutes les solutions, et il y en a une infinité, vérifient $y(0) = 0$.
- On peut vérifier que toutes les applications de la forme

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^2 + t^3 \end{array}$$

sont solution de $(E)$. Il y en a encore d'autres.

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

*Démonstration.*
On commence par chercher les solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
L'équation homogène associée à $(E)$ est

$$ty'(t) - 2y(t) = 0. \tag{H}$$

Sur $]-\infty, 0[$, l'équation $(H)$ est équivalente à $y'(t) = \frac{2}{t}y(t)$. L'application $\begin{array}{rcl} ]-\infty,0[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{2}{t} \end{array}$ admet pour primitive $\begin{array}{rcl} ]-\infty,0[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2\ln|t| = 2\ln(-t) \end{array}$. Les solutions de $(H)$ sur $]-\infty, 0[$ sont donc les applications

$$\begin{array}{rcl} ]-\infty,0[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^2 \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Nous cherchons maintenant une solution de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ sous la forme $y : t \mapsto z(t)\,\mathrm{e}^{2\ln(-t)} = t^2 z(t)$ où $z : ]-\infty, 0[ \to \mathbb{R}$ est dérivable. Or, pour $t \in ]-\infty, 0[$, on a

$$ty'(t) - 2y(t) = 2t^2 z(t) + t^3 z'(t) - 2t^2 z(t) = t^3 z'(t).$$

Ainsi, $y$ est solution de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ si, et seulement si

$$\forall t \in ]-\infty, 0[, z'(t) = 1.$$

On choisit par exemple $z(t) = t$ et une solution de $(E)$ est

$$\begin{array}{rcl} ]-\infty, 0[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 \end{array}.$$

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

La solution générale de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ s'écrit

$$\begin{array}{rcl} ]-\infty, 0[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 + \lambda t^2 \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Mutatis mutandis*, la solution générale de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ s'écrit

$$\begin{array}{rcl} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 + \mu t^2 \end{array}, \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Sur $\mathbb{R}$, la théorie ne s'applique pas. Nous travaillons alors par condition nécessaire et condition suffisante pour déterminer les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

(CN) Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit solution de $(E)$. Alors, $f$ est solution[a] de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ ; en effet, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, +\infty[$ et vérifie $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ pour $t \in \mathbb{R}$, donc *a fortiori* pour $t \in ]-\infty, 0[$. Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in ]-\infty, 0[, f(t) = t^3 + \lambda t^2.$$

De même, $f$ est solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$. Il existe donc une constante $\mu \in \mathbb{R}$[b] telle que

$$\forall t \in ]0, +\infty[, f(t) = t^3 + \mu t^2.$$

---

[a] ou plutôt sa restriction à $]-\infty, 0[$

[b] : les constantes intervenant sur chaque intervalle sont, à priori, différentes. Il faut donc leur donner un nom différent.

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \qquad \text{(E)}$$

On utilise ensuite le fait qu'une solution de $(E)$ est une application dérivable : [a]

- $f$ doit être continue en $0$, or

$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = \lim_{t \to 0^-} t^3 + \lambda t^2 = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} t^3 + \mu t^2 = 0.$$

La continuité de $f$ en $0$ donne $f(0) = 0$.

- $f$ doit être dérivable en $0$, or

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} t^2 + \lambda t = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} t^2 + \mu t = 0;$$

la dérivabilité de $f$ en $0$ donne $f'(0) = 0$.

[a] On peut également dire que $f$ coïncide à gauche et à droite de $0$ avec des fonctions dérivables.

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

(CS) Réciproquement, soit $f$ la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & t < 0 \end{cases} \end{array}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star, ty'(t) - 2y(t) = t^3$$

puisque les restrictions de $f$ à $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ sont solutions de l'équation différentielle $(E)$. De plus, le calcul précédent montre que $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$, et puisque $0f'(0) - 2f(0) = 0^3$, la fonction $f$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

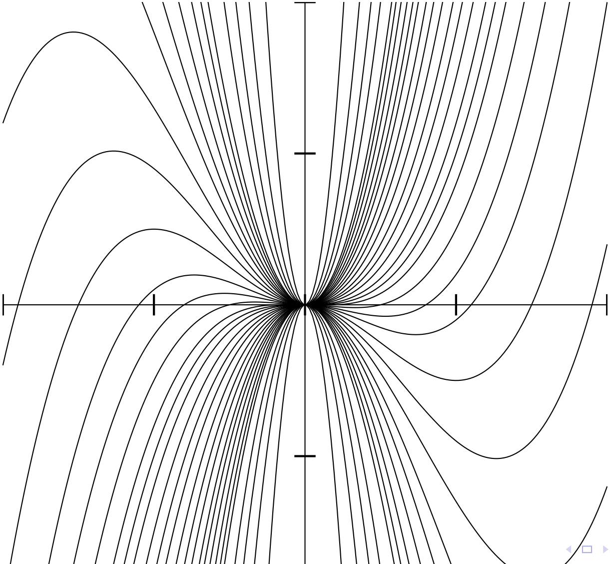
$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

Conclusion : la solution générale de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & t < 0 \end{cases} \end{array}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

**T 18** Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$



# *Compléments

1. Ensemble des solutions
2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
3. Problème de Cauchy
4. Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $F$ est une fonction réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ [3]
L'idée de la méthode d'Euler est la suivante : on choisit un pas $h > 0$ puis on remplace, en $t_k = t_{k-1} + h = t_0 + kh$, la courbe intégrale du problème par sa tangente en ce point. On effectue donc l'approximation

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + hy'(t_k) \\ &= y(t_k) + hF(t_k, y(t_k)). \end{aligned}$$

La suite des valeurs approchées de la solution du problème de Cauchy se définit ainsi par la relation de récurrence

$$y_{k+1} = y_k + hF(y_k).$$

On obtient une ligne polygonale joignant les points $(t_k, y_k)$ qui approche la courbe intégrale de la solution du problème de Cauchy.

**R** C'est en utilisant cette approximation qu'Euler a démontré l'existence de solutions pour les équations différentielles d'ordre $1$.

[3] Dans les cas résolus précédemment

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}, F(t, y) = a(t)y + b(t).$$