Chapter 9 Corps des nombres complexes

9.1 Définition des nombres complexes

Exercice 9.1 (*)

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
2. $z_2 = (1-2i)^2$.
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$.
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$.
5. $z_5 = (2+i)^3$.
6. $z_6 = (1+i)^2 - (2-i)^2$.

Exercice 9.2 (*)

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3+i)(2-3i)(4+5i)$.
2. $z_2 = (1+i)^{10}$.
3. $z_3 = (2-i)^4$.

Exercice 9.3 (**)

Déterminer tous les nombres complexes z tels que le nombre complexe $z^2 + 3$ ait une partie imaginaire nulle.

Exercice 9.4 (*)

Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Exercice 9.5 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1+4i)z + (1-2i) = iz + 3$
2. $\dfrac{1+3iz}{1+3z} = i\dfrac{z+2}{z-5}$

9.2 Conjugué, module

Exercice 9.6 (**)

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z+i}{z-3i} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{2z+1}{iz-2} \in i\mathbb{R}^\star$.

Exercice 9.7 (**)

À tout nombre complexe z différent de 0 et -1, on associe

$$u = \frac{z^2}{z+1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{z(z+1)}.$$

1. Déterminer z pour que u et v soient tous deux réels.

2. Calculer les valeurs correspondantes de u et v.

Exercice 9.8 (*)

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 9.9 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 9.10 (**)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z - 2| = 3$.

2. $|2z - 1 + i| = 4$.

3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Exercice 9.12 (**) *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 9.14 (***)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a| < 1$, $|b| < 1$. Montrer que $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$.

Exercice 9.17 (****)

Soit u l'une des racines carrées du produit zz'. Montrer

$$\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| = |z| + |z'|.$$

Exercice 9.19 (****)

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0 \implies |z| \leq 1.$$

Exercice 9.20 (**)

Soit z un nombre complexe différent de -1 et M le point du plan d'affixe z. On pose $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. z' soit réel ;

2. z' soit imaginaire pur ;

3. z' soit de module 2.

Exercice 9.22 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre l'équation

$$(z-1)^n = \left(\overline{z} + 1\right)^n.$$

9.3 Racines d'un polynôme

Exercice 9.23 (**)

Calculer les racines carrées des complexes suivants.

1. $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
2. $\dfrac{1+i}{1-i}$.
3. $3 - 4i$.
4. $-8 + 6i$.
5. $5 + 12i$.

Exercice 9.24 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + 3z + 3 - i = 0$.
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
3. $z^2 - z - iz + 5i = 0$.
4. $z^2 - (7+i)z + 12 + 3i = 0$.

Exercice 9.25 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.
2. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$.
3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

Exercice 9.26 (**)
Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.

Exercice 9.27 (***)
Résoudre l'équation

$$(1+i)z^2 - 2(1+4i)z + 5(1+3i) = 0,$$

d'inconnue complexe z.

Exercice 9.28 (**)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0. \qquad (1)$$

Exercice 9.30 (**)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$.

Exercice 9.31 (***)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \qquad (1)$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Exercice 9.32 (**)
Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Exercice 9.33 (**)
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Exercice 9.34 (***)
Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des racines des équations

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0 \qquad (E_\lambda)$$

lorsque λ décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 9.35 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+y &= 1+i \\ xy &= 2-i. \end{cases}$$

9.4 Représentation trigonométrique

Exercice 9.36 (**)

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de modules 1. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ existe bien et $f(\theta) \in \mathbb{U}$.

2. f est-elle injective ?

3. f est-elle surjective ?

Exercice 9.38 (*)

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1+i$;

2. $1-i\sqrt{3}$;

3. i ;

4. $-2\sqrt{3}+2i$;

5. $2+i$;

6. 17 ;

7. $-3i$;

8. $-\pi$;

9. $-12-5i$;

10. $-5+4i$.

Exercice 9.39 (**)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\varrho e^{i\theta}$ où ϱ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

2. $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$.

3. $1+i\tan\alpha$.

4. $\cos\alpha + i(1+\sin\alpha)$.

5. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

6. $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\beta+i\sin\beta}$.

7. $e^{i\beta}-e^{i\alpha}$.

8. $e^{i\beta}+e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Exercice 9.40 (**)

Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 9.41 (**)

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 9.42 (**)

Déterminer les entiers naturels n tels que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ soit un réel négatif.

Exercice 9.43 (***)

Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 et u^4.

2. Déduire le module et un argument de u.

Exercice 9.44 (***)

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

2. En déduire α et β.

3. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.

4. Déterminer $\sin\frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

Exercice 9.46 (**)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On note A le point d'affixe i.
À tout point M du plan distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{iz}{z-i}.$$

1. Déterminer les coordonnées des points M tels que l'on ait $M = M'$.

2. Déterminer les coordonnées du point B' associé au point B d'affixe 1.
Déterminer les coordonnées du point C tel que le point C' associé ait pour affixe 2.

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

4. Placer A, B, B', C, C' et Γ sur une même figure.

5. Soit z un nombre complexe différent de i.

(a) Montrer que l'on a $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$.

(b) On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 9.47 (***)

Calculer le module et un argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\leq 2p\leq n}} (-1)^p \binom{n}{2p} = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ 0\leq 2p+1\leq n}} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$$

Exercice 9.48 (***)

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\arg(z) \equiv 2\arctan\frac{\mathfrak{Im}(z)}{\mathfrak{Re}(z)+|z|}.$$

Exercice 9.49 (**)

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Exercice 9.53 (**)

1. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Déterminer le module et un argument de $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$.
2. En déduire le module et un argument, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, de

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1}.$$

Exercice 9.54 (***)
Calculer

$$\frac{\sin(6x)}{\sin(x)}$$

en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 9.55 (****) *Polynômes de Tchebychev*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme T_n tel que

$$\cos(nt) = T(\cos(t)).$$

On vérifiera que

$$T(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \left(X^2 - 1\right)^p X^{n-2p}.$$

2. Montrer qu'il existe un polynôme U_n tel que

$$\sin(nt) = \sin(t) U(\cos(t))$$

On vérifiera que

$$U(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1} \left(X^2 - 1\right)^p X^{n-1-2p}.$$

Exercice 9.56 (**)
Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 9.60 (**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^2(x)\cos(x)$.

Exercice 9.62 (**)
Linéariser les expressions suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2 x \sin x$.
2. $\sin^3 x \cos^3 x$.
3. $\sin^4 x \cos^2 x$.
4. $\cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 9.63 (**)

À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$ et en déduire

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, \mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 9.64 (***)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} k \sin(k\theta).$$

Exercice 9.65 (**)

Soient x et φ deux réels et n un entier naturel. Calculer les sommes

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx + \varphi) \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx + \varphi).$$

Exercice 9.66 (**) *IMT PSI 2022*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 9.70 (***)

Calculer pour n entier

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}.$$

Exercice 9.71 (***) *BanqueCCINP 2023 Exercice 89 algèbre*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9.72 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

9.5 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 9.76 (**)

1. Quels sont les complexes z non nuls tels que $z + \frac{1}{z}$ est réel ?

2. Quels sont les complexes z tels que les points d'affixes 1, z, z^3 sont alignés.

Exercice 9.77 (**)
Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que ABC soit un triangle rectangle en A.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que ABC soit un triangle isocèle et rectangle en A.

Exercice 9.78 (***)
Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Exercice 9.79 (***)
Soient a, b et c trois nombres complexes, A, B et C les points du plan d'affixes respectives a, b et c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

1. le triangle ABC est équilatéral.

2. j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice 9.80 (**)
Dans le plan complexe, soit I le point d'affixe i. À tout point M d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe iz.

1. On suppose que $z \neq 0$. Calculer la partie imaginaire de $\frac{z-i}{z-iz}$ en fonction de x et y.

2. On suppose toujours que $z \neq 0$. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\frac{z-i}{z-iz}$ pour que les trois points I, M et M' soient alignés. Exprimer cette condition en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M tels que I, M et M' soient alignés est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 9.81 (****)
Soit a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que, si deux des quotients suivants

$$\frac{a-d}{b-c}, \quad \frac{b-d}{c-a}, \quad \frac{c-d}{a-b},$$

sont imaginaires purs, le troisième l'est aussi. Interprétation dans le plan euclidien.

Exercice 9.82 (****)
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-1}{4-2z} \end{array}.$$

1. f est-elle injective?

2. Déterminer $f(\mathbb{C} \setminus \{2\})$.

3. Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

4. Soit $\theta \in \,]-\pi, \pi[$.

(a) Montrer que $f\left(e^{i\theta}\right)$ n'est pas un réel négatif ou nul.

(b) D'après la question précédente, il existe un unique $\alpha \in \,]-\pi, \pi[$ tel que

$$\arg\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

Montrer que

$$e^{i\alpha} = \frac{2e^{i\theta} - 1}{2 - e^{i\theta}}.$$

(c) Soit $x \in \,]-\pi, \pi[$. Exprimer $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ à l'aide de e^{ix} uniquement.

(d) En déduire que $\tan\frac{\alpha}{2} = 3\tan\frac{\theta}{2}$.

(e) Exprimer α en fonction de θ.

(f) Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction de $]-\pi, \pi[$ dans $]-\pi, \pi[$ qui à θ associe la valeur α comme définie ci-dessus.

Exercice 9.83 (***)
Retrouver le résultat de l'exercice **??** à partir de l'expression de u_n.

9.6 Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

Exercice 9.84 (**)
Calculer les racines cubiques des complexes suivants.

1. i.

2. $2 - 2i$.

3. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

4. $1 + j$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 9.85 (**)
Chercher les nombres complexes z vérifiant $z^3 = 8i$.

Exercice 9.86 (**)
Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 9.87 (***)
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1$.

1. En développant $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right)$, montrer que z est une racine cinquième de l'unité.

2. Que vaut

$$\left(3z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 1\right)\left(z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 4\right)?$$

Exercice 9.88 (***)
On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

1. Justifier le fait que
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0. \tag{1}$$

2. Montrer que
$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0. \tag{2}$$

3. Pour tout réel θ, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution de l'équation (3) d'inconnue x suivante
$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0. \tag{3}$$

Exercice 9.89 (***)
Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.

2. $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 9.91 (**)
Calculer les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$.
En déduire les valeurs de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 9.94 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

2. $(z^2 - 2z)\cos^2\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.95 (***)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

2. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.

3. $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

Exercice 9.96 (****)
On considère le polynôme $P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

1. (Cours) Donner la définition et les expressions des racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

2. À l'aide de ces racines cinquièmes de l'unité, déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Vérifier qu'elles sont toutes réelles.

3. Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec a, b, c des réels que l'on calculera.

   Déterminer alors une autre écriture des racines de P.

4. Comparer les résultats obtenus et en déduire une expression algébrique de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 9.97 (****)

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{2}$$

3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{3}$$

4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{4}$$

5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.

6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$

7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 9.98 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 9.99 (****)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha. \tag{1}$$

Exercice 9.102 (****) *CCINP PC 2022*

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = e^{i\pi/3}$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 9.103 (**) *BanqueCCINP 2023 Exercice 84 algèbre*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

9.7 Suites définies par une relation de récurrence linéaire portant sur deux termes

Exercice 9.104 (**)

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Intégration