Chapter 5 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

5.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

5.2 Logarithmes, exponentielles

Exercice 5.1 (**)
Résoudre
$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Exercice 5.2 (**)
Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 5.3 (**)
Déterminer le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation
$$x\ln(x) = 1.$$

Exercice 5.4 (*)
Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1| - 3\ln(x^2+1)}$.

Exercice 5.5 (**)
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Exercice 5.6 (****)
Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation
$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{1}$$
Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.

Exercice 5.7 (**)
Étudier et tracer la courbe de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Exercice 5.8 (**)
Résoudre l'équation
$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0.$$

Exercice 5.9 (***)
Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation
$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$
d'inconnue réelle x.

Exercice 5.10 (**)

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\varphi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.11 (****)

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Exercice 5.13 (**)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $2\log_4(x+1) + \log_4(x+3) = \log_4(6x+2) + 1/2$.

2. $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 2\ln x + 9 = 0$.

3. $\ln(1-x) = \ln(4-2x)$.

Exercice 5.14 (***)
Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \leq 2^x$.

2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.

3. $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$.

Exercice 5.15 (****)
Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

5.3 Fonctions puissances

Exercice 5.17 (**)
Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Exercice 5.18 (***)
Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x.$$

Exercice 5.19 (***)
Résoudre les équations suivantes

1. $\mathrm{e}^{3x} - 5\,\mathrm{e}^{2x} - 6\,\mathrm{e}^x = 0$;

2. $\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^6$;

3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$;

4. $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$;

5. $\log_a x = \log_x a$;

6. $\log_3 x - \log_2 x = 1$;

7. $2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots 3^{x+n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.20 (**)

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^x$.

2. En déduire que

$$\forall x > -1, (1+x)^x \geq 1.$$

Exercice 5.21 (***)
Soit $p \in]0,1]$.

1. Établir que pour tout $t \geq 0$,

$$(1+t)^p \leq 1 + t^p.$$

2. En déduire que pour tout $x, y \geq 0$,

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p.$$

5.4 Fonctions hyperboliques

Exercice 5.23 (*)
Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Exercice 5.24 (**)
Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{25}{12} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \operatorname{ch} b \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = a \operatorname{sh} b \end{cases}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.25 (**)

1. Exprimer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch} x$, et $\operatorname{sh}(3x)$ en fonction de $\operatorname{sh} x$.

2. Étudier la fonction définie par $f(x) = \operatorname{ch}(3x) - 3\operatorname{ch} x$.

Exercice 5.26 (**)

1. Exprimer $\operatorname{sh}^4 x$ en fonction de $\operatorname{ch} 2x$ et $\operatorname{ch} 4x$.

2. Calculer $\int \operatorname{sh}^4 x \, \mathrm{d}x$.

Exercice 5.27 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \sqrt{3}$.

2. $\operatorname{ch}^2 x + 3\operatorname{ch} x - 4 = 0$.

Exercice 5.28 (***)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^{\operatorname{argsh}(x-a)} = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^{\operatorname{argsh}(x-b)}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. $2\operatorname{argsh} x = \operatorname{argth} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{argch} \sqrt{2}$.

3. $\operatorname{argch} x = \operatorname{argsh}(2 - x)$

Exercice 5.29 (**)
Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Exercice 5.30 (**) *Fonction argument tangent hyperbolique*

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.

2. On note argth sa bijection réciproque appelée *argument tangente hyperbolique*.
   Montrer que la fonction argth est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.

3. En étudiant l'équation $y = \operatorname{th}(x)$ d'inconnue x réelle, exprimer $\operatorname{argth}(t)$ à l'aide des fonctions usuelles.
   Retrouver ainsi l'expression de sa dérivée.

5.5 Fonctions hyperboliques réciproques