Chapter 13 Groupes

13.1 loi de composition

Exercice 13.1 (*)

On note $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice carrées $(2,2)$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, le produit AB est définit par

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette loi est associative mais n'est pas commutative.

2. Déterminer l'élément neutre pour la multiplication. On le notera I.

3. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Lorsque c'est le cas, déterminer leur inverses.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.2 *Étude de lois de composition*

Indiquer, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des lois de composition interne. Lorsque c'est le cas, préciser l'éventuelle associativité ou commutativité.

$$\perp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array} \qquad \top : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x+y}{4} \end{array}$$

$$\square : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \big((u_n),(v_n)\big) & \mapsto & (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots) \end{array} \qquad \triangle : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{e}^{x+y} \end{array}.$$

Exercice 13.3 *Propriétés de lois de composition*

Étudier les lois de composition interne suivantes : commutativité, élément neutre éventuel, éléments inversibles.

$$\star : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(\mathbb{N})\times\mathfrak{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \\ (A,B) & \mapsto & A\cap B \end{array} \qquad \square : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \max(x,y) \end{array}$$

$$\triangle : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}\right)^2 & \to & \mathbb{R}^\star\times\mathbb{R} \\ \big((x,y),(x',y')\big) & \mapsto & \left(xx', xy'+x'y\right) \end{array}$$

13.2 La structure de groupes

Exercice 13.4 *Addition des vitesses en théorie de la relativité*

Soit $c > 0$ (c correspond à la vitesse de la lumière) et $I =]-c, c[$.

1. Montrer

$$\forall (x,y) \in I^2, x \star y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}} \in I.$$

2. Montrer que la loi $\star$ munit I d'une structure de groupe abélien.

Cette loi $\star$ correspond à l'addition des vitesses portées par un même axe en théorie de la relativité.

Exercice 13.5

Soit l'ensemble

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^\star \right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathcal{J}$ est un groupe abélien.

Exercice 13.6

Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 13.7

Soit $(G, .)$ un groupe dont on note e l'élément neutre.

Soit $a, b, c \in G$. On suppose que $b^6 = e$ et $ab = b^4 a$. Montrer les égalités $b^3 = e$ et $ab = ba$.

13.3 Sous-groupes

Exercice 13.8

On considère les fonctions de $\mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$ dans lui-même définies par

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_3(x) = \frac{x-1}{x},$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_5(x) = 1-x, \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

1. Montrer qu'elles forment un groupe G pour la loi $\circ$.

2. Quels sont les sous-groupes de G?

Exercice 13.9

Montrer que $H = \left\{ \frac{a}{3^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 13.10

Sur $G = \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\square$ par $(x, y)\square(x', y') = (xx', xy' + y)$.

1. Montrer que $(G, \square)$ est un groupe.

2. Montrer que $H =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, \square)$.

Exercice 13.11 *Un exemple de sous-groupe*

On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \left\{ a + b\sqrt{7} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 13.12

Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble

$$Z(G) = \{ x \in G \mid \forall g \in G, x \star g = g \star x \}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 13.13

Soient G un groupe commutatif d'élément neutre e et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$B = \{ a \in G \mid a^n = e \}.$$

Montrer que B est un sous-groupe de G.

Exercice 13.14

Soit G un groupe commutatif d'élément neutre e. On pose

$$B = \left\{ a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^\star, a^n = e \right\}.$$

Montrer que B est un sous-groupe de G.

Exercice 13.15 (**)

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif ; soient A et B deux parties de G. On définit la somme de A et B, notée $A + B$, par

$$A + B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b \}.$$

1. Montrer que si A et B sont deux sous-groupes de G, $A + B$ est un sous-groupe de G.
2. On suppose maintenant que A et $A + B$ sont deux sous-groupes de G ; B est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 13.16 (***)

Soit $(G, \cdot)$ un groupe (non commutatif) ; soient A et B deux sous-groupes de G. On définit le produit de A et B, noté $A \cdot B$, par

$$A \cdot B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a.b \}.$$

Montrer les équivalences

$$(A \cdot B \text{ est un sous-groupe de } G) \iff (A \cdot B = B \cdot A) \iff (B \cdot A \subset A \cdot B).$$

Donner un exemple (en précisant G, A, B) où $A \cdot B$ n'est pas un groupe.

Exercice 13.17

Soit G un groupe fini (loi notée multiplicativement), de cardinal $n \geq 2$, de neutre e, et a, un élémnet de G.

1. En considérant l'ensemble des a^k, $k = 0, \dots, n$, montrer qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $a^d = e$.
2. Justifier l'existence de ω, le plus petit entier supérieur ou égal à 1 vérifiant $a^\omega = e$. ω s'appelle l'**ordre** de l'élément a.
3. Vérifier que
$$H = \left\{ e, a, a^2, \dots, a^{\omega - 1} \right\}$$
est un sous-groupe de G à ω éléments.

Exercice 13.18 (***) *Théorème de Lagrange*

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit la relation $\mathcal{R}$ dans G par

$$x \mathcal{R} y \iff x^{-1} y \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans G et que la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$ est
$$xH = \{ xh \mid h \in H \}.$$
2. Montrer que les classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ ont toutes le même cardinal que H.
3. En déduire que
$$\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(H) \times \mathrm{card}\,(G/\mathcal{R})$$
où $G/\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des classe d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

On a ainsi prouvé le théorème de Lagrange:

Dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

13.4 Morphismes de groupes

Exercice 13.19 (***)

Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $|zw| = |z||w|$;
3. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;
4. $e^{z+w} = e^z e^w$;
5. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;
6. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Exercice 13.20
Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $a \in G$ fixé, on considère l'application

$$f_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a.x.a^{-1} \end{array} .$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de $(G, .)$.
2. On note $I = \{ f_a \mid a \in G \}$.
   Montrer que $(I, \circ)$ est un groupe où $\circ$ est la loi de composition des applications de G dans G.
3. Soit
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & I \\ a & \mapsto & f_a \end{array} .$$
   Montrer que φ est un morphisme de $(G, .)$ dans $(I, \circ)$.

Exercice 13.21
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^\star, .)$. Déterminer son image et son noyau.

Exercice 13.22
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\star$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2. Calculer son noyau et son image.
3. f est-elle injective ?

Exercice 13.23 *Étude des groupes à faibles cardinaux*

1. (a) Soit $(G, \cdot)$ un groupe à deux éléments. Construire la table de multiplication de G.
   (b) Soit $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ deux groupes à deux éléments. Construire un isomorphisme de groupes de G dans G'.

   Ainsi, tous les groupes à deux éléments sont isomorphes. On dit qu'il n'y a qu'un groupe à deux éléments à isomorphisme près.
2. Soit $(G, \cdot)$ un groupe à trois éléments. Construire la table de multiplication de G. En déduire qu'il n'y a qu'un groupe à trois éléments à isomorphisme près.
3. Montrer que $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ (muni de la loi de groupe produit) ne sont pas isomorphes (il y a donc plusieurs «types» de groupes à quatre éléments).

Exercice 13.24
Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre 6.

Exercice 13.25 (***)

Montrer que si f est une bijection de X sur Y, alors $F: \begin{array}{rcl} \mathfrak{S}(X) & \to & \mathfrak{S}(Y) \\ \sigma & \mapsto & f\sigma f^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 13.26 (***)

Soit $(G, .)$ un groupe (quelconque). Un caractère de G est un morphisme de G vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\star$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

1. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe commutatif pour la loi naturelle (produit ponctuel des applications).

   On l'appelle *groupe dual* de G.

2. Montrer que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^\star$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $F: \begin{array}{rcl} \widehat{\mathbb{U}_n} & \to & \mathbb{U}_n \\ f & \mapsto & f(\omega) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

4. Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe produit. En introduisant, pour $f_1 \in \widehat{G_1}$ et $f_2 \in \widehat{G_2}$, l'application

$$f: \begin{array}{rcl} G & \to & \mathbb{C}^\star \\ (x_1, x_2) & \mapsto & f_1(x_1)f_2(x_2) \end{array},$$

   montrer que $\widehat{G}$ est isomorphe à $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.

Exercice 13.27 (***)

Le but de cet exercice est de montrer que les groupes $(\mathbb{R}^\star, \times)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$ ne sont pas isomorphes. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de $(\mathbb{R}^\star, \times)$ sur $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

1. Montrer que $\varphi(-1) = -1$.

2. Montrer que si $\alpha = \varphi^{-1}(i)$, alors $\alpha^2 = -1$.

3. Conclure.

Exercice 13.28

Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux et $n = pq$. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif vérifiant $x^n = 1$ pour tout $x \in G$. On forme

$$M = \{ x \in G \mid x^p = 1 \} \quad \text{et} \quad N = \{ x \in G \mid x^q = 1 \}.$$

1. Montrer que M et N sont des sous-groupes de $(G, \cdot)$.

2. Vérifier $M \cap N = \{ 1 \}$.

3. Établir que l'application

$$f: \begin{array}{rcl} M \times N & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

   est un isomorphisme de groupes.

Exercice 13.29 (***)

Soit $f: G \to H$ un morphisme de groupes. Supposons G *fini*. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est finie, et que l'on a

$$|G| = |\ker(f)| \times |\mathrm{Im}(f)|.$$

Exercice 13.30 (***) *Lemme des 5*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "g_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "g_4"'] & A_5 \arrow[d, "g_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

Considérons $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_5$ dix groupes *abéliens* et des morphismes de groupes

$$f_k : A_k \to A_{k+1} \quad \text{et} \quad g_k : A_k \to B_k \quad \text{et} \quad h_k : B_k \to B_{k+1}.$$

On suppose que (f_{k-1}, f_k) et (h_{k-1}, h_k) forment des suites exactes, c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(f_{k-1}) = \ker(f_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(h_{k-1}) = \ker(h_k).$$

et que le diagramme précédent est commutatif, c'est-à-dire que l'on a les égalités

$$h_k \circ g_k = g_{k+1} \circ f_k.$$

1. Montrer que si g_2 et g_4 sont injectives et g_1 est surjective alors g_3 est injective.

2. Montrer que si g_2 et g_4 sont surjectives et g_5 est injective alors g_3 est surjective.

3. En déduire que si g_1, g_2, g_4, g_5 sont bijectives, alors g_3 est bijective.

13.5 Générateurs

Exercice 13.31

Sur $G = \mathbb{Z} \times \{ -1, +1 \}$, on définit une loi $\top$ ainsi

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall (\varepsilon, \nu) \in \{ -1, +1 \}^2, (a, \varepsilon) \top (b, \nu) = (a + \varepsilon b, \varepsilon \nu).$$

1. Montrer que $(G, \top)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif?

2. Soient $a = (0, 1)$ et $b = (1, -1)$. Montrer que a et b sont deux éléments d'ordre 2 de G et que $\{ a, b \}$ engendre G.

Exercice 13.32

Soient $(G, \cdot)$ un groupe abélien, H, K deux sous-groupes de G. Montrer

$$\langle H \cup K \rangle = HK = \{ x \in G \mid \exists (h, k) \in H \times K, hk = x \}.$$

Exercice 13.33

Montrer que $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathbb{U}_n$ est un groupe infini, où tout élément est d'ordre fini.

Exercice 13.34 (***)

Soient $(G, \times)$ un groupe *fini* et $s : G \to G$ un morphisme *involutif* : $s \circ s = \mathrm{Id}_G$.
On suppose de plus que 1 est le seul *point fixe* de s.

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1} s(x)$ de G dans G est injective. En déduire que $s(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in G$, puis que G est abélien.

2. Montrer que l'ordre de G est impair.

3. Établir une réciproque lorsque G est abélien d'ordre impair.