Chapter 52 Isométries vectorielles

52.1 Généralités

Exercice 52.1

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la matrice suivante appartienne à $\mathbf{O}(3)$.

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 52.2

À quelle condition une symétrie orthogonale appartient-elle à $\mathbf{SO}(E)$?

52.2 Isométries d'une droite vectorielle

52.3 Isométries vectorielles en dimension 2

Exercice 52.3

Soit la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ où α est un réel.

1. Déterminer la (les) valeur(s) de α pour que A soit une matrice orthogonale.
2. Déterminer dans ce cas les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f canoniquement associé à A.

52.4 Isométries vectorielles en dimension 3

Exercice 52.4 *Isométries vectorielles*

On se place ici dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$ canonique. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

1. Déterminer la nature précise de l'endomorphisme u de E dont la matrice dans $\mathcal{E}$ est
$$A = M_{\mathcal{E}}(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer la nature précise de l'endomorphisme v de E dont la matrice dans $\mathcal{E}$ est
$$B = M_{\mathcal{E}}(v) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. Donner la matrice dans $\mathcal{E}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation
$$3x + y + 4z = 0.$$
4. Donner la matrice dans $\mathcal{E}$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{n} = (-1, -1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 52.5

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$$

soit la matrice d'une rotation. Préciser alors son axe.

Exercice 52.6

Compléter la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

en une matrice orthogonale de déterminant positif puis étudier l'endomorphisme représenté par A.

Exercice 52.7

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\boldsymbol{e}$ une base orthonormée directe de E. Étudier les endomorphismes de E représentés dans la base $\boldsymbol{e}$ par les matrices suivantes.

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 52.8

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on considère les deux droites définies par

$$D : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases}$$

Déterminer une rotation f de E telle que $f(D) = D'$.

Exercice 52.9

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit une matrice de rotation.

Supposant ceci réalisé, exprimer ses coefficients sachant que l'angle de la rotation est θ.

Exercice 52.10

1. Soit a un vecteur unitaire de E (euclidien orienté de dimension 3). On note r la rotation de droite $\mathbb{R}a$ et d'angle θ. Montrer

$$\forall x \in E, r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)a \wedge x + (1 - \cos\theta)\langle a, x\rangle a.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère la rotation r d'axe dirigé et orienté par $b = (1, 1, 1)$ et d'angle $\pi/3$.
   Déterminer la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.