

CHAPITRE

15

RELATIONS DE COMPARAISONS SUR LES SUITES

15.1 LES RELATIONS DE COMPARAISONS

§1 Définitions

Définition 1

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites numériques.

- On dit que la suite (u_n) est **dominé** par la suite (v_n) lorsqu'il existe un entier n_0 et un réel k tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq k|v_n|.$$

On écrit $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».

- On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (v_n) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit « u_n est un petit O de v_n ».

- On dit que la suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit « u_n est équivalente à v_n ».

Théorème 2 ❤️

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si, et seulement si

$$u_n - v_n = o(v_n).$$

On peut aussi écrire $u_n = v_n + o(v_n)$.

Notation

On note $\mathcal{O}(v)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ l'ensemble des suites dominées par la suite (v_n) . Cette notation est celle de Landau. Pour exprimer cette relation, on devrait écrire $u \in \mathcal{O}(v)$. En fait, l'usage est d'écrire abusivement $u = \mathcal{O}(v)$ ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. On doit lire « u_n est grand \mathcal{O} de v_n » et non « u_n égale grand \mathcal{O} de v_n ». Ces notations traduisent une *appartenance* et non une égalité. Par exemple $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$ et $n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$ mais $n^2 \neq n^2 + 1$.

Notation

On note $o(v)$ ou $o(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant la suite (v_n) . Cette notation est encore une notation de Landau. Là encore, au lieu d'écrire $u \in o(v)$, on écrit abusivement $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$. On doit lire « u_n est petit o de v_n ».

Exemples 3

1. La suite $(2n^2 - 3n + 4)$ est dominée par la suite (n^2) car pour $n \geq 1$,

$$|2n^2 - 3n + 4| \leq 2|n^2| + 3|n| + 4 \leq 9n^2.$$

2. Si à partir d'un certain rang on a $|u_n| \leq |v_n|$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

⚠ La réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent.

3. La relation $u_n = \mathcal{O}(1)$ signifie que la suite (u_n) est bornée.

Plus généralement, si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) est bornée.

4. Pour toute suite (u_n) et tout scalaire $\lambda \neq 0$, on a $u_n = \mathcal{O}(\lambda u_n)$.

5. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
-

Exemples 4

1. La relation $u_n = o(1)$ signifie que (u_n) tend vers 0.

Plus généralement, si $u_n = o(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.

2. Si (ω_n) est une suite qui tend vers 0, alors $(\omega_n u_n) = o(u_n)$.

3. Pour toutes suites $(u_n), (v_n)$ et tout scalaire $\lambda \neq 0$, la relation $u_n = o(\lambda v_n)$ est équivalente à $u_n = o(v_n)$.
-

Remarque

On notera que la relation $u_n \sim v_n$ ne signifie nullement que la différence $u_n - v_n$ tende vers 0 ; cette différence peut même être non bornée, comme le montre l'exemple $n^2 + n \sim n^2$.

§2 Caractérisations des relations de comparaisons

Proposition 5

Caractérisation de la relation \mathcal{O}

On a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \quad \text{et} \quad (\mu_n) \text{ est bornée.}$$

Proposition 6

Caractérisation de la relation o

On a $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0.$$

Proposition 7

Caractérisation de la relation \sim

On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si il existe une suite (μ_n) et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_n \mu_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 1.$$

Exemples 8

1. $n = o(n^2)$ car $n = \frac{1}{n} n^2$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

On a donc également $n^2 + n \sim n^2$ car $n^2 + n - n^2 = n = o(n^2)$.

2. $e^n = o(e^{3n})$ car $e^n = e^{-2n} e^{3n}$ et $e^{-2n} \rightarrow 0$.

3. On a $3n^2 + 3n - 4 = o(n^3)$ car $3n^2 + 3n - 4 = n^3 \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} \right)$ et $\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} \rightarrow 0$.

4. $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. $\frac{1}{(n+1)!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$.

Lorsque (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n .

Théorème 9

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.

1. On a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) est bornée.

2. On a $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 0.

3. On a $u_n \sim v_n$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 1.

§3 Comparaison des suites de référence

Proposition 10

Si la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $u_n = o(v_n)$.

Proposition 11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} a^n = o(b^n) &\iff |a| < |b| \text{ ou } a = b = 0; \\ n^a = o(n^b) &\iff a < b; \\ (\ln n)^a = o((\ln n)^b) &\iff a < b. \end{aligned}$$

Proposition 12

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$.

1. $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
2. $n^\beta = o(a^n)$. En particulier $n^\beta = o(e^{\alpha n})$.
3. $a^n = o(n!)$.
4. $n! = o(n^n)$.

Remarque

Si (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, $u_n = o(v_n)$ signifie que (v_n) tend «plus vite» que (u_n) vers $+\infty$. Si (u_n) et (v_n) tendent vers 0, $u_n = o(v_n)$ signifie que (u_n) tend «plus vite» que (v_n) vers 0.

§4 Calculs avec la notation de Landau

Définition 13

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

Exemple 14

Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

car $u_n - v_n = n = \mathcal{O}(n^2)$.

Définition 15

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + o(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = o(w_n)$.

Exemple 16

Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + o(n^2),$$

$$\text{car } u_n - v_n = n = o(n^2).$$

15.2 CALCULS AVEC LES RELATIONS DE COMPARAISONS

§1 Propriétés des relations de comparaisons

Proposition 17

1. La relation \mathcal{O} est réflexive.

$$u_n = \mathcal{O}(u_n).$$

2. La relation \mathcal{O} est transitive.

$$\left. \begin{array}{l} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ v_n = \mathcal{O}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = \mathcal{O}(w_n).$$

Proposition 18

Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ quatre suites.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
2. Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = \mathcal{O}(a_n b_n)$.
3. Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$.

Remarque

On peut résumer les résultats sous la forme

$$\mathcal{O}(a_n) + \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n), \quad \mathcal{O}(a_n)\mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(a_n b_n), \quad \lambda \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n).$$

Proposition 19

Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ quatre suites.

1. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.
2. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.
3. Si $u_n = o(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = o(a_n)$.

On peut résumer les résultats sous la forme

$$o(a_n) + o(a_n) = o(a_n), \quad o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n), \quad \lambda o(a_n) = o(a_n).$$

Exemple 20 ❤️

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ des réels tels que $a_k \neq 0$. Alors

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k.$$

En effet,

$$1 = o(n^k), \quad n = o(n^k), \quad \dots \quad n^{k-1} = o(n^k)$$

donc $a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1} = o(a_k n^k)$.

Par exemple $2n + 1 \sim 2n$ ou $8n^3 - 200n^2 + 9n - 3 \sim 8n^3$.

Exemple 21

Soient b_1, b_2, \dots, b_k des réels tels que $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$. Alors

$$b_1^n + b_2^n + \dots + b_k^n \sim b_k^n.$$

En effet,

$$b_1^n = o(b_k^n), \quad b_2^n = o(b_k^n), \quad \dots \quad b_{k-1}^n = o(b_k^n)$$

$$\text{donc } b_1^n + b_2^n + \dots + b_{k-1}^n = o(b_k^n).$$

Par exemple $2^n + 5^n \sim 5^n$.

Exemple 22

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des réels tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Alors

$$\frac{1}{n^{\alpha_1}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} \sim \frac{1}{n^{\alpha_1}}.$$

En effet, pour tout $\alpha > \alpha_1$, $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$, donc $\frac{1}{n^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$.

Par exemple $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{25}} \sim \frac{1}{n}$.

Exemple 23

Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si (v_n) est bornée, alors $u_n + v_n \sim u_n$.

Proposition 24

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) , (a_n) , (b_n) des suites.

- 1.** Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
- 2.** Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- 3.** Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- 4.** Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
Autrement dit, la relation o est transitive.
- 5.** Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.
- 6.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(\lambda a_n)$ et $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$.

Si $u_n = o(a_n)$ alors $u_n = o(\lambda a_n)$ et $\lambda u_n = o(a_n)$.

Théorème 25

Dans l'ensemble des suites réelles, la relation \sim est une relation d'équivalence.

- 1.** La relation \sim est réflexive

$$u_n \sim u_n.$$

- 2.** La relation \sim est symétrique

$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n.$$

3. La relation \sim est transitive

$$u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \implies u_n \sim w_n.$$

Théorème 26

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites.

- 1.** Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
- 2.** Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.
- 3.** Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- 4.** Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.
- 5.** Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.

§2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence**Théorème 27**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(v_n).$$

Théorème 28

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, et que (v_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors (u_n) tend aussi vers ℓ .



La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3$.

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$. Alors

$$u_n \sim \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$



Ce résultat bien sûr totalement est faux avec $\ell = 0$. En effet, $u_n \sim 0$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

§3 Opérations sur les équivalents**Théorème 29****Règles de calcul**

Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ quatre suites réelles. On suppose $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors

- 1.** $u_n a_n \sim v_n b_n$,
- 2.** Si (b_n) est non nulle à partir d'un certain rang, alors (a_n) également et

$$\frac{u_n}{a_n} \sim \frac{v_n}{b_n}.$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est à valeurs > 0 à partir d'un certain rang, alors (v_n) également et

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Par contre les relations $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ n'entraînent pas $u_n + a_n \sim v_n + b_n$ comme le montre l'exemple,



$$u_n = 1 \quad v_n = 1 \quad a_n = -1 + \frac{1}{n} \quad b_n = -1 + \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}.$$

La propriété

$$u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Revient à composer (à gauche) chaque membre par l'application $x \mapsto x^\alpha$.

Ce résultat a un caractère exceptionnel car la relation d'équivalence n'est en général pas compatible avec la composition. Par exemple, on a

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} \sim 2n\pi$$

mais les suites de termes généraux

$$\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sin(2n\pi) = 0$$

ne sont pas équivalentes.

§4 Suites extraites et relations de comparaisons

Proposition 30

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.
2. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} = \mathcal{O}(v_{\varphi(n)})$.
3. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.

En particulier, si $u_n \sim v_n$, alors $u_{n+1} \sim v_{n+1}$. La proposition précédente signifie que les relations de comparaisons sont compatibles avec la composition à droite par l'application φ .

§5 Équivalence par encadrement

Proposition 31

Équivalence par encadrement

Soient (a_n) , (b_n) , (u_n) trois suites à valeurs réelles. On suppose que $a_n \sim b_n$ et qu'à partir d'un certain rang

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Alors ces trois suites sont équivalentes:

$$u_n \sim a_n \quad \text{et} \quad u_n \sim b_n.$$

§6 Quelques équivalents classiques

Proposition 32

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle. Alors ^a

1. $\sin(u_n) \sim u_n,$
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2},$
3. $\tan(u_n) \sim u_n,$
4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n,$
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n,$
6. $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2}u_n.$

^a Ces équivalents sont généralement faux sans l'hypothèse $u_n \rightarrow 0$.

Proposition 33

Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exemple 34

Étudier la limite de

$$a_n = \frac{(n^3 + 9) \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n} - 5n^2 + \cos\left(\frac{n}{3}\pi\right)}.$$

Exemple 35

Trouver un équivalent simple de

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln(1 + 1/n^2)}{\sqrt{\sin(1/n)}} (n + 42).$$

CHAPITRE

15

COMPLÉMENTS

15.3 COURS SOUS FORME D'EXERCICES

Théorème 36

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.

1. On a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) est bornée.
2. On a $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 0.
3. On a $u_n \sim v_n$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 1.

Test 37

Les suites $(u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n)$ désignant des suites numériques qui ne s'annulent pas. Utiliser la caractérisation 36 des relations o, \mathcal{O}, \sim pour démontrer les propriétés suivantes.

1. Montrer que $3n^2 - 5n + 6 = o(5n^3)$.
2. Montrer que $2n^2 - 3n + 4 = O(n^2)$.
3. Montrer que $4n^3 - 5n^2 + 8n - 9 \sim 4n^3 + n^2 - 2$.
4. Montrer que $3^n + n^2 2^n \sim 3^n$.
5. Montrer

$$\sqrt{4n^2 + 1} = \mathcal{O}(n), \quad \sqrt{4n^2 + 1} = o(n^2), \quad \sqrt{4n^2 + 1} \sim 2n.$$

6. La relation \mathcal{O} est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
7. La relation o est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
8. La relation \sim est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?

- 9.** Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
- 10.** Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
- 11.** Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
- 12.** Montrer que si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.
- 13.** Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.
- 14.** Classer les suites suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{n^2} & n^n & \sqrt{n} & n! & 0.5^n & 8n^2 & 23n \ln(n) \\ \frac{1}{n} & 2e^n & 9n^5 & 4321 \ln(n) & \frac{1}{\sqrt{n}} & 42n & 10^n & \ln(n)^3 \end{array}$$



- 15.** Montrer que si $v_n = o(u_n)$, alors $u_n + v_n \sim u_n$.

- 16.** Utiliser la propriété précédente pour montrer que

$$\begin{aligned} 8n^5 - n^2 + 1000n &\sim 8n^5 \\ 0.5^n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{5}{n} - \frac{18}{n^2} &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \\ n! - n^5 + 10^n &\sim n! \end{aligned}$$

- 17.** On suppose que $u_n \sim v_n$ et que (v_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie). Montrer que (u_n) tend aussi vers ℓ .

- 18.** On suppose que $a_n \sim b_n$ et que $u_n \sim v_n$. Montrer

$$a_n u_n \sim b_n v_n \quad \frac{a_n}{u_n} \sim \frac{b_n}{v_n}.$$

- 19.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que ces deux suites sont à valeurs réelles strictement positives. Montrer que

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

- 20.** Montrer sur un contre exemple que $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$ n'entraîne pas $a_n + u_n \sim b_n + v_n$ en général.

- 21.** Déterminer un «équivalent simple» des suites suivantes:

$$u_n = \frac{3n^3 - e^n + 28n \ln(n)}{n! - 10^n + n^{34}} \quad v_n = (3n^2 - 2n + 5) \frac{2^n - 3^n + 5^n}{5n^2 + n \sin(n) - 23}.$$

15.4 UN PEU D'INFORMATIQUE

§1 Les relations Ω et Θ



Les relations Ω et Θ ne sont pas au programme de mathématiques.

Elle sont toutefois utilisées en informatique. Dans ce cas, on utilise plutôt la notation fonctionnelle pour les suites ($U(n)$ au lieu de u_n) et les suites sont le plus souvent à valeurs strictement positives.

Définition 38

Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \rightarrow]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

signifie qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

On dit que $g(n)$ est une **borne asymptotiquement approchée** de $f(n)$ ou que $g(n)$ et $f(n)$ sont semblables.

Cette relation est parfois notée $f(n) \asymp g(n)$.

Exemple 39

1. $4n^3 - 2n^2 + 3 = \Theta(n^3)$.

2. $3n^2 - 2n \ln n = \Theta(n^2)$.

3. $\frac{1}{8}n \ln n + 4n = \Theta(n \ln n)$.

Proposition 40

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $f(n) = \Theta(g(n))$.

2. $g(n) = \Theta(f(n))$.

3. $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ et $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Définition 41

Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \rightarrow]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

signifie qu'il existe une constante $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c g(n) \leq f(n).$$

On dit que $g(n)$ est un **minorant asymptotique** de $f(n)$.

Cela revient à dire que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.