Chapter 20 Polynômes

20.1 Polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

20.2 Polynômes dérivés

Exercice 20.1

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$,

2. $X^2P'' + 2XP' - P = 0$.

Exercice 20.2

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $P = X^{2n}$.

1. Calculer $\mathrm{D}^n(P)$.

2. En écrivant que $P = X^nX^n$ et en appliquant la formule de Leibniz, calculer $\mathrm{D}^n(P)$.

3. En déduire une jolie formule.

Exercice 20.3

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n, tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient tous deux impairs.

1. Montrer

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \frac{P^{(k)}(1)}{k!} \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que P n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 20.4

Soit $P = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$.

20.3 Division dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 20.5

Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

2. $X^3 + X + 2$ par $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$.

3. $4X^7 + 9X^5 + 3X^4 + 2X + 1$ par X^3.

4. $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.

5. $X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 2$ par $X^3 + X + 1$.

6. $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ par $X^3 + X + 1$.

7. $X^5 - X^3 + X^2$ par X^3.

8. $X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X + 1$ par $X^2 - 1$.

Exercice 20.6

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que le polynôme $B = X^2 + 2$ divise $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 20.7

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20.8

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-3)$.
3. Déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 20.9
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère le polynôme $P = X^n + 1$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.

Exercice 20.10
Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.

Exercice 20.11
Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\left(A - I_2\right)^2$.
2. En déduire A^{100}.

20.4 Racines

Exercice 20.12
Soit $A = X^3 + 1$. Déterminer quatre diviseurs de A dans $\mathbb{R}[X]$ ayant des degrés deux à deux distincts.

Exercice 20.13 *IMT MP 2022*
Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$ avec $a_0 > 0$ et $a_1, \dots, a_{n-1}$ réels positifs.

1. Montrer que P admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note ϱ.
2. Soit z une racine complexe de P. Montrer que $|z| \leq \varrho$.
3. Montrer que $\varrho \leq \max\left(1, a_0 + \cdots + a_{n-1}\right)$.
4. Montrer que $\varrho \leq 1 + \max\left(a_0, \dots, a_{n-1}\right)$.

Exercice 20.14

1. Montrer que 2 est racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.
2. Quel est son ordre ?
3. Quelles sont les autres racines de P ?
4. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. À quelle condition Q divise-t-il P ?

Exercice 20.15
Résoudre l'équation d'inconnue $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$(X^2 - 5X + 7)P + (X-2)Q = 2X - 3.$$

Exercice 20.16
Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$P_n = \cos\left((n-1)\theta\right) X^{n+1} - \cos\left(n\theta\right) X^n - \cos\left(\theta\right) X + 1.$$

Montrer que $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise P_n.

Exercice 20.17

Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 + 5X^2 - 8X - 48$ sachant qu'il admet deux racines distinctes dont la somme est égale à -1.

Exercice 20.18

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 14 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 36 \end{array} \right. .$$

1. Étant donnés trois complexes quelconques x, y et z, exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ à l'aide de

$$\sigma_1 = x + y + z \qquad \sigma_2 = xy + xz + yz \qquad \sigma_3 = xyz$$

2. Soit (x, y, z) une solution de S. Calculer σ_1, σ_2 et σ_3.

3. En utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, résoudre S.

Exercice 20.19

Juliette se réveille à la fin du cours d'algèbre du jeudi après-midi. À ce moment précis, elle entend le professeur dire «…et je vous donne comme indication que toutes les racines sont positives et réelles». En levant les yeux vers le tableau, elle découvre une équation du 20-ième degré à résoudre à la maison, qu'elle essaie de recopier à toute vitesse. Elle arrive seulement à voir les deux premiers termes : $X^{20} - 20X^{19}$ avant que le professeur n'efface complètement le tableau. Heureusement elle se souvient que le terme constant est $+1$.

Pouvez-vous aider notre héroïne à résoudre cette équation ?

Exercice 20.20

On considère le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}.$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 20.21

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^3 + pX + q$. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

1. Montrer que P possède une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.

2. Montrer que si P possède trois racines réelles deux à deux distinctes, alors $\Delta < 0$.

Exercice 20.22

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $P = (X + 1)^n - e^{2in\theta}$.

1. Déterminer les racines de P ainsi que leur ordre de multiplicité.

2. En considérant le produit des racines de P, déterminer une expression simplifiée de

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 20.23

Soient p et q des élément de $\mathbb{K}$. Montrer que le polynôme $X^3 - 3pX + 2q$ admet une racine multiple si et seulement si $p^3 = q^2$.

20.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 20.24

1. Montrer que $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
2. Déterminer explicitement une relation de Bézout entre $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$.

Exercice 20.25 *Arithmétique autour des polynômes $X^n - 1$*

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant et k un entier non nul. Montrer que $P - 1$ divise $P^k - 1$.
2. Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Posons $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m.
   - Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$.
   - En déduire l'équivalence
   $$(X^m - 1) \,\Big|\, (X^n - 1) \iff m \,\Big|\, n.$$
   - Montrer que
   $$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Exercice 20.26
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, non constants, premiers entre eux.

1. Montrer qu'il existe au moins un couple (U_0, V_0) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$$AU_0 + BV_0 = 1 \text{ et } \deg(U_0) < \deg(B) \text{ et } \deg(V_0) < \deg(A). \tag{1}$$
2. Déterminer alors tous les couples (U, V) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. En déduire l'unicité du couple tel que $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.
3. Déterminer U_0 et V_0 lorsque $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + 1$.
4. Déterminer un polynôme P vérifiant le système
$$X^2 + 1 \,\Big|\, P(X) + 1 \text{ et } X^3 + 1 \,\Big|\, P(X) - 1. \tag{S}$$

Exercice 20.27
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $P_n = X^n - a^n$ ($a \in \mathbb{K}^\star$ donné). On conviendra que $P_0 = 0$.

1. Pour $m \leq n$, effectuer la division euclidienne de P_n par P_m. À quelle condition a-t-on $P_m \,\Big|\, P_n$?
2. Soient a, b, c, d quatre entiers naturels tels que $a < b$ et $c < d$. À quelle condition a-t-on $X^b - X^a \Big| X^d - X^c$?
3. Déterminer le PGCD des polynômes P_m et P_n.
4. Déterminer le PGCD des polynômes
$$A = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \text{ et } B = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Exercice 20.28
On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de polynômes réels définis par
$$P_1 = 1, P_2 = X, \text{ et }, \forall n \geq 3, P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}.$$

1. Préciser le degré de P_n, montrer que $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$ est constant, puis que $P_{n-1} \wedge P_n = 1$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a
$$P_{n+p} = P_n P_{p+1} - P_{n-1} P_p. \tag{1}$$
et en déduire que $P_{n+p} \wedge P_p = P_n \wedge P_p$.
3. Montrer que $P_n \wedge P_p = P_{n \wedge p}$.

20.6 Décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 20.29 *Factorisation d'un polynôme dans* $\mathbb{R}[X]$

On considère le polynôme
$$P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1.$$
Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20.30

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

1. $X^5 - 1$,
2. $X^6 - 1$,
3. $X^8 + 1$,
4. $X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 20.31

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20.32 *Factorisation d'un polynôme dans* $\mathbb{C}[X]$

Déterminer la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes suivants.

1. $P_1 = X^5 + 1$;
2. $P_2 = X^3 - (1+i)X^2 + (1+i)X - i$;
3. $P_3 = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX - 3i + 1$, sachant qu'il admet une racine réelle.

Exercice 20.33

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1. Montrer que si $|P(i)| < 1$, alors P admet au moins une racine complexe non réelle.

Exercice 20.34

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2X^n \cos(a) + 1$.

Exercice 20.35

On considère un entier $n \geq 1$ et un réel α non multiple de π.

Déterminer les racines complexes du polynôme
$$P = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} \sin(q\alpha) X^{n-q}.$$

20.7 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Petits problèmes

Exercice 20.36 (***)
Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \operatorname{pgcd}\left(P(n), Q(n)\right).$$

Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Exercice 20.37 (***)
Soit $E = \{ 3, 5, 7, 11, 13, 17 \}$ et 50 réels $\left(a_k\right)_{k\in[\![0,49]\!]}$ tels que

$$\forall p \in E, \forall r \in [\![1, p-1]\!], \sum_{k\equiv r \pmod p} a_k = \sum_{k\equiv 0 \pmod p} a_k.$$

Montrer que les réels $(a_k)_{k\in[\![0,49]\!]}$ sont tous nuls.