

Relations binaires sur un ensemble

Aperçu

1. Propriétés d'une relation
2. Relation d'ordre
3. Relation d'équivalence

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

3. Relation d'équivalence

D 1 Soit E un ensemble. Définir une **relation binaire** \mathcal{R} dans E , c'est se donner une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$. On écrit alors $x\mathcal{R}y$ pour exprimer que $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$. Dans ce cas, on dit que x **est en relation avec** y . L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est appelé le **graphe** de la relation \mathcal{R} .

Une relation binaire est donc une application $E \times E \rightarrow \{ \text{Vrai}, \text{Faux} \}$. Dans la

$$(x, y) \mapsto x\mathcal{R}y$$

suite, on parlera simplement de **relation** dans un ensemble E .

D 2 Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que

► \mathcal{R} est **réflexive** si

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$

► \mathcal{R} est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x;$$

► \mathcal{R} est **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y;$$

► \mathcal{R} est **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

E 3

1. La relation \leq sur \mathbb{R} est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. La relation \subset sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
3. Dans l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, la relation en x et y

$$x\mathcal{R}y \iff y - x \in 5\mathbb{Z}$$

est la relation de congruence modulo 5. Cette relation est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.

4. Dans l'ensemble des parties de \mathbb{N} à trois éléments, la relation \mathcal{R} définie par

$$A\mathcal{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$$

est réflexive et symétrique, non antisymétrique, non transitive.

5. Sur tout ensemble E , la relation d'égalité $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On peut d'ailleurs vérifier que c'est la seule.
6. Soient \mathcal{R} une relation sur un ensemble E et A une partie de E . En convenant que $x\mathcal{R}_A y$ signifie $x\mathcal{R}y$, nous définissons une relation \mathcal{R}_A sur A qui est dite **induite** par \mathcal{R} . Nous constatons que si \mathcal{R} est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), il en est de même pour \mathcal{R}_A . La réciproque n'est pas vraie.

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

D 4

- ▶ Une relation binaire \leq sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- ▶ On dit que (E, \leq) est un **ensemble ordonné**.
- ▶ Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** si

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

- ▶ On dit que \leq est un **ordre total** sur E si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

- ▶ Si \leq n'est pas total, c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables, on dit que \leq est un **ordre partiel** sur E .

\leq se lit « précède » ou « inférieur ou égal à ».

E 5 Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ l'ordre usuel, \leq , est un ordre total.

E 6 Soit \mathcal{E} un ensemble d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans \mathcal{E} . En effet, elle est réflexive (pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $A \subset A$) anti-symétrique (c'est le principe de double inclusion) et transitive ($A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$). C'est pour cette raison qu'on écrit, de façon abrégée,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

au lieu d'écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ et } \dots$$

E 7 Soit $E = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < a \leq b \leq c \}$. On définit une relation d'ordre sur E par

$$(a, b, c) \leq (a', b', c') \iff a \leq a' \text{ et } b \leq b' \text{ et } c \leq c'.$$

Autrement dit, E est un ensemble de boîtes et on écrit $(a, b, c) \leq (a', b', c')$ si la boîte (a', b', c') peut contenir la boîte (a, b, c) .

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

D 11 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

- ▶ Soit $x \in E$. Si M , élément de E , est tel que $x \leq M$, on dit que M est un **majorant** de x , ou encore qu'il **major**e x .
- ▶ Soit A un sous-ensemble de E . On dit que M , élément de E , est un **majorant** de A si M est un majorant de chaque élément de A , c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

- ▶ Une partie de E dont l'ensemble des majorants est non vide est dite **majorée**.

D 12 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . On dit que a est le **plus grand élément** de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq a.$$

Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément. Néanmoins, si il existe, c'est le **seul** élément de A ayant cette propriété ; car si on a aussi $x \leq b$ pour tout $x \in A$, alors $a \leq b$ et $b \leq a$, d'où $b = a$.

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

D 13 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

- ▶ Soit $x \in E$. Si m , élément de E , est tel que $m \leq x$, on dit que m est un **minorant** de x , ou encore qu'il **minore** x .
- ▶ Soit A un sous-ensemble de E . On dit que m , élément de E , est un **minorant** de A si m est un minorant de chaque élément de A , c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

- ▶ Une partie de E dont l'ensemble des minorants est non vide est dite **minorée**.

D 14 Une partie de E à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

D 15 Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

- ▶ On dit qu'un élément de E est la **borne inférieure** de A dans E si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E . Lorsque cette borne existe, on la note $\inf A$.
- ▶ On dit qu'un élément de E est la **borne supérieure** de A dans E si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E . Lorsque cette borne existe, on la note $\sup A$.



Contrairement au plus grand élément, la borne supérieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

N

La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ se note (lorsqu'elle existe) $\sup(x, y)$ (resp. $\inf(x, y)$) ; notations analogues pour les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble à trois éléments, etc.

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

E 16

1. Dans (\mathbb{R}, \leq) , l'intervalle $[0, 1]$

- ▶ a pour minorant tout élément de $] - \infty, 0]$,
- ▶ a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
- ▶ a pour plus petit élément 0,
- ▶ a pour plus grand élément 1,
- ▶ a pour borne inférieure 0,
- ▶ a pour borne supérieure 1.

2. Dans (\mathbb{R}, \leq) , l'intervalle $[0, 1[$

- ▶ a pour minorant tout élément de $] - \infty, 0]$,
- ▶ a pour majorant tout élément de $[1, +\infty[$,
- ▶ a pour plus petit élément 0,
- ▶ ne possède pas de plus grand élément,
- ▶ a pour borne inférieure 0,
- ▶ a pour borne supérieure 1.

E 17 Dans $E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre «divise» :

$$a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{N}, aq = b.$$

L'ensemble $A = \{ 15, 21 \}$

- ▶ a pour minorant les entiers 1 et 3,
- ▶ a pour majorant 0, 105, 210 et les autres multiples de 105,
- ▶ n'a pas de plus petit élément,
- ▶ n'a pas de plus grand élément,
- ▶ a pour borne inférieure 3,
- ▶ a pour borne supérieure 105.

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

2.2 Majorants, plus grand élément

2.3 Minorants, plus petit élément

2.4 Borne supérieure, borne inférieure

2.5 Exemples

2.6 Quelques propriétés de la borne supérieure

3. Relation d'équivalence

- P 19
1. Si une partie A de E admet un plus grand élément a , a est borne supérieure de A dans E .
 2. Si une partie A de E admet une borne supérieure et si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le plus grand élément de A .

Démonstration. Laissez en exercice! ■

- P 20
- Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E , non vide, admettant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure dans E . Alors $\inf(A) \leq \sup(A)$.

Démonstration. Laissez en exercice! ■

- P 21
- Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, A et B deux parties de E , admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E ; si $A \subset B$, on a $\sup(A) \leq \sup(B)$ (resp. $\inf(B) \leq \inf(A)$).

Démonstration. Laissez en exercice! ■

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'ordre

3. Relation d'équivalence

D 22 Une relation sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

E 23 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit dans \mathbb{R} la relation de congruence modulo α pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
 x et y sont congrus modulo α si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha$.
On note $x \equiv y[\alpha]$. Cette relation est une relation d'équivalence.

D 24 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur l'ensemble E . On appelle **classe** d'équivalence de $x \in E$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \}.$$

- ▶ Il n'y a pas de notation au programme, on notera ici \bar{x} ou $\text{Classe}(x)$ la classe de x .
- ▶ La notation usuelle, mais hors programme, pour l'ensemble des classes d'équivalences est E/\mathcal{R} .

T 25 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur l'ensemble E .

1. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$(x\mathcal{R}y) \iff y \in \text{Classe}(x) \iff x \in \text{Classe}(y) \iff \text{Classe}(x) = \text{Classe}(y).$$

2. Deux classes d'équivalence sont ou bien égales, ou bien d'intersection vide.
3. L'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{R} forment une partition de E .

E 26 Sur \mathbb{Z} , on considère la relation «être congru modulo 5». Il y a cinq classes d'équivalence qui forment une partition de \mathbb{Z} :

$$\bar{0} = \text{Classe}(0) = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots \}$$

$$\bar{1} = \text{Classe}(1) = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \}$$

$$\bar{2} = \text{Classe}(2) = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots \}$$

$$\bar{3} = \text{Classe}(3) = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \}$$

$$\bar{4} = \text{Classe}(4) = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \}.$$

On a par exemple $\text{Classe}(11) = \text{Classe}(6) = \text{Classe}(1)$.

On note l'ensemble des classe d'équivalence modulo 5

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ \text{Classe}(0), \text{Classe}(1), \text{Classe}(2), \text{Classe}(3), \text{Classe}(4) \}$$

P 27 Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E .

1. La relation binaire \mathcal{R} définie par

$$(x\mathcal{R}y) \iff (\exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$$

est une relation d'équivalence.

2. Les classe d'équivalence pour cette relation sont les ensembles $(A_i)_{i \in I}$.