

Dénombrement

Aperçu

1. Partie finie de \mathbb{N}
2. Ensembles finis
3. Analyse combinatoire

Dénombrement

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

L 1 Soient deux entiers m, t tels que $m > 1$ et $1 \leq t \leq m$.

Alors il existe une bijection φ de l'ensemble $T = \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{t\}$ sur $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

Démonstration. L'application $s : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ définie par

$$s(t) = m, \quad s(m) = t, \quad s(k) = k \text{ si } k \notin \{m, t\}$$

est une bijection de $\llbracket 1, m \rrbracket$ sur $\llbracket 1, m \rrbracket$ (c'est par exemple l'identité si $t = m$).
L'application φ de T dans $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ définie par $\varphi(k) = s(k)$ convient. ■

T 2 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.

1. Il existe une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ si et seulement si $p \leq q$.
2. Il existe une surjection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ si et seulement si $p \geq q$.
3. Il existe une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ si et seulement si $p = q$.

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

2.1 Cardinal

2.2 Propriétés des ensembles finis

2.3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

2.4 Cardinal d'une union

3. Analyse combinatoire

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

2.1 Cardinal

2.2 Propriétés des ensembles finis

2.3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

2.4 Cardinal d'une union

3. Analyse combinatoire

D 3 Soit X un ensemble. On dit que X est **fini** si $X = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si un ensemble n'est pas fini, on dit qu'il est **infini**.

Autrement dit, X est fini si l'on peut «numéroter» ses éléments, c'est-à-dire écrire

$$X = \{ x_1, \dots, x_n \}.$$

Lorsque X est fini, non vide, le résultat suivant permet de définir le cardinal de X .

D 4 Si X est un ensemble fini et non vide, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$, on l'appelle **cardinal** de X ou **nombre d'éléments** de X .

La cardinal de X est noté $|X|$, $\text{card}(X)$ ou $\#X$. Par convention, le cardinal de \emptyset est 0.

P 5 Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une bijection de X sur Y . Alors X est fini si et seulement si Y est fini et dans ce cas

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y).$$

- E 6**
1. Tout singleton est fini et de cardinal 1.
 2. L'application $k \mapsto 2k$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur l'ensemble des entiers pairs de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. Cet ensemble est donc fini et de cardinal n .
 3. Si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \leq b$, alors $\text{card}(\llbracket a, b \rrbracket) = b - a + 1$.
 4. Si $\text{card}(X) = n \geq 1$ et si $x \in X$, alors $\text{card}(X \setminus \{x\}) = n - 1$.

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

2.1 Cardinal

2.2 Propriétés des ensembles finis

2.3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

2.4 Cardinal d'une union

3. Analyse combinatoire

T 7 Soient X et Y deux ensembles finis, de cardinaux n et p respectivement.

1. Il existe une injection de X dans Y si, et seulement si, $n \leq p$.
2. Il existe une surjection de X dans Y si, et seulement si, $n \geq p$.
3. Il existe une bijection de X dans Y si, et seulement si, $n = p$.

C 8 Principe des tiroirs et des chaussettes

Si p chaussettes sont rangées dans n tiroirs et $p > n$, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

T 9 Toute partie d'un ensemble fini est finie

Soient X un ensemble fini et A une partie de X . Alors l'ensemble A est fini,

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(X).$$

De plus, $\text{card}(A) = \text{card}(X)$ si et seulement si $A = X$.

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

2.1 Cardinal

2.2 Propriétés des ensembles finis

2.3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

2.4 Cardinal d'une union

3. Analyse combinatoire

- T 10** Soient X et Y deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, et f une application de X dans Y . Les assertions suivantes sont équivalentes
- (i) f est une injection ;
 - (ii) f est une surjection ;
 - (iii) f est une bijection.

Ce théorème s'applique au cas d'une application f d'un ensemble **fini** dans lui-même.

Ce théorème est faux pour les ensembles infinis.

- C 11** \mathbb{N} est infini.

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

2.1 Cardinal

2.2 Propriétés des ensembles finis

2.3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

2.4 Cardinal d'une union

3. Analyse combinatoire

T 15 Soit A et B deux ensembles finis et disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Démonstration. Si A ou B est vide, le résultat est clair. Supposant A et B de cardinaux p et q strictement positifs, on possède deux bijections

$$\alpha : A \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et } \beta : B \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket.$$

On définit alors $\gamma : A \cup B \rightarrow \llbracket 1, p + q \rrbracket$ par

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A \\ p + \beta(x) & x \in B. \end{cases}$$

Il ne vous reste plus qu'à montrer que γ est bijective. ■

P 16 Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \setminus B$ est fini et

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Remarquons que $A \cap B$ et A' sont finies car incluses dans A qui est finie.

Or A est l'union disjointe de A' et $A \cap B$, donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(A') + \text{card}(A \cap B).$$



T 18 Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ et $B' = B \setminus A$. Ce sont des parties finies car incluses dans A et B qui sont finies.

Puisque A est réunion disjointe de $A \cap B$ et A' ,

$$\text{card}(A) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A').$$

De même, $A \cup B$ est réunion disjointe de B et de A' donc

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(B) + \text{card}(A')$$

L'égalité annoncée en résulte:

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A') = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(A').$$



P 19 Soient A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est fini et

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$$

Démonstration. Par récurrence sur n . ■

C 20 Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement disjoint de E . On suppose l'ensemble I fini ainsi que chaque ensemble A_i ($i \in I$). Alors E est fini et

$$\text{card}(E) = \sum_{i \in I} \text{card}(A_i).$$

Ce résultat s'applique en particulier lorsque $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E .

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergrers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Berbers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

L 21 Lemme des bergers

Si un ensemble X possède une partition en p sous-ensembles ayant même cardinal r , alors X est fini et $\text{card}(X) = r \times p$.

T 22 Principe des Bergers

Soient X, Y deux ensembles et f une surjection de X sur Y . On suppose Y fini et que les ensembles $f^{-1}(\{y\})$, pour $y \in Y$, aient tous même cardinal p (c'est-à-dire que tout élément de Y possède exactement p antécédents par f). Alors X est fini et

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y) \times p.$$

E 23 Combien y-a-t-il de couples $(x, y) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ tels que $x \neq y$?

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergrers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

T 24 Soient X et Y deux ensembles finis. Alors l'ensemble $X \times Y$ est fini et

$$\text{card}(X \times Y) = \text{card } X \times \text{card } Y.$$

Démonstration. Posons $m = \text{card}(X)$ et $p = \text{card}(Y)$. On considère l'application $f : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$. Si $x \in X$, $f^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ est une partie à p éléments de $X \times Y$, car $y \mapsto (x, y)$ est une bijection de Y sur $f^{-1}(\{x\})$. Le cardinal de $X \times Y$ est donc $\text{card}(X) \times p$, c'est-à-dire mp . ■

C 25 Soient $p \geq 1$ un entier et X_1, \dots, X_p des ensembles finis. Alors l'ensemble produit $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p$ est fini et l'on a

$$\text{card}(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p) = \text{card}(X_1) \times \text{card}(X_2) \times \dots \times \text{card}(X_p).$$

En particulier, si X est un ensemble fini,

$$\text{card}(X^p) = (\text{card } X)^p.$$

D 26 Soit X un ensemble. Les éléments de X^p sont appelés **p -listes** ou **p -uplets** d'éléments de X .

- R**
- ▶ Les p -listes sont aussi appelées **mots**, **listes** ou **suites** de longueur p .
 - ▶ L'ordre des éléments de la p -liste est important.
 - ▶ Une p -liste peut contenir plusieurs fois le même élément.
 - ▶ Il y a n^p p -listes d'un ensemble à n éléments.

- E 27** Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,
- ▶ $(1, 2, 2)$ et $(5, 3, 4)$ sont des 3-listes d'éléments de X .
 - ▶ $(5, 3, 4)$ et $(3, 5, 4)$ sont des 3-listes différentes.

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergrers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

T 28 Soient X, Y deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .
L'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y est de cardinal p^n :

$$\text{card}(\mathcal{F}(X, Y)) = (\text{card } Y)^{\text{card } X}.$$

Démonstration. Lorsque X est vide, il existe une unique application de X dans Y : celle dont le graphe est vide. La formule est donc correcte, puisque $p^0 = 1$.

Dans le cas contraire, numérotons les éléments de X : x_1, \dots, x_n , ce qui revient à choisir une bijection $i \mapsto x_i$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur X . On définit alors une application

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}(X, Y) &\rightarrow Y^n \\ f &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{aligned}.$$

Soit $v = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$. Le seul antécédent de v par F est l'application $f : X \rightarrow Y$ définie par $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$. Ainsi F est bijective. Le cardinal de Y^n étant p^n , on a la conclusion. ■

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

L 29 Soit X un ensemble. L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X sur $\mathcal{F}(X, \{0, 1\})$.

Démonstration. À toute fonction $f \in \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$, associons la partie $f^{-1}(\{1\})$ de X .

Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathcal{F}(X, \{0, 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X, \{0, 1\}) & \rightarrow & \mathcal{P}(X) \\ f & \mapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (regarder les composées dans les deux sens). ■

T 30 Soit X un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est fini et

$$\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{card}(X)}.$$

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

T 31 Soient X, Y deux ensembles finis, $p = \text{card}(X)$, $n = \text{card}(Y)$.

► Si $p \leq n$, le cardinal de l'ensemble $I(X, Y)$ des injections de X dans Y est ^a

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+2) \times (n-p+1)$$

► Si $p > n$, il n'y a pas d'injection de X dans Y .

^a31: Il y a p termes dans ce produit.

C 32 Le nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal n est $n!$.

Soit X un ensemble fini, de cardinal n . Une suite (x_1, \dots, x_p) de p éléments de X est par définition une application $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow X$ ($f(i) = x_i$ pour $i = 1 \dots p$), et x_1, \dots, x_p sont distincts si, et seulement si, f est *injective*.

D 33 Soit X un ensemble.

- ▶ Un **p -arrangement** d'éléments de X est une application injective de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans X .
- ▶ On appelle aussi **p -arrangement** une *p -liste d'éléments distincts deux à deux*, c'est-à-dire sans répétition.

Si $\text{card}(X) = n$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de X .

R

- ▶ On dit aussi un **arrangement de p éléments** ou **p -liste d'éléments distincts** ou **p -uplet d'éléments distincts**.
- ▶ L'ordre des éléments d'un p -arrangement est important.

D 34 Soit X un ensemble.

- ▶ Une bijection de X dans lui-même s'appelle une **permutation** de X .
- ▶ Lorsque X est fini, on appelle aussi **permutation** de X une liste formée des $\text{card}(X)$ éléments de X .

P 35 *Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n est $n!$.*

1. Partie finie de \mathbb{N}

2. Ensembles finis

3. Analyse combinatoire

3.1 Principe des Bergers

3.2 Cardinal d'un produit cartésien

3.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.4 Nombre de parties d'un ensemble fini

3.5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

3.6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

D 36 Soit X un ensemble. On appelle **combinaison de p éléments** de X , ou p -combinaison, toute partie à p éléments de X .

- R**
- ▶ Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts.
 - ▶ L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

- E 37** Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,
- ▶ $\{ 1, 2, 3 \}$ est une combinaison de 3 éléments de X .
 - ▶ $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 2, 3, 1 \}$.
 - ▶ $\{ 1, 2, 2 \}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de X .

P 38 Soit X un ensemble fini de cardinal n . Étant donné un entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le nombre de parties à p éléments de X est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p > n$. Avec cette convention, le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$ pour tout entier naturel p .

Esquisse. Une p -liste d'éléments distincts de X est une permutation d'une combinaison de p éléments de X .

Pour chaque façon de choisir une combinaison de p éléments de X , il y a $p!$ permutations de ses éléments. On a donc

$$\text{card } I(\llbracket 1, p \rrbracket, X) = p! \times \text{card } \mathcal{P}_p(X).$$



R Le nombre $\binom{n}{p}$ des parties à p éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est aussi le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

P 39 Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

4. $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$

P 40 *Pour tout entier n , on a*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Démonstration. Soit X est un ensemble à n éléments. Les $\mathcal{P}_p(X)$, $p = 0 \dots n$, forment une partition de $\mathcal{P}(X)$. ■

P 41 Relation de Pascal

Soient n et p des entiers ; on a

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Démonstration. Voici une démonstration sans calcul.

Soit X un ensemble de cardinal $n+1$, a un élément de X et $X' = X \setminus \{a\}$. Les parties à p éléments de X qui ne contiennent pas a sont les parties à p éléments de X' : leur nombre est $\binom{n}{p}$. Celles qui contiennent a sont de la forme $A \cup \{a\}$ où A est une partie à $p-1$ éléments de X' , et leur nombre est donc $\binom{n}{p-1}$. ■

D'où la construction par récurrence du tableau des coefficients binomiaux, appelé **triangle de Pascal**

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	\dots	p	$p + 1$	\dots	$p = n$	$p = n + 1$
$n = 0$	1								
$n = 1$	1	1							
$n = 2$	1	2	1						
$n = 3$	1	3	3	1					
\vdots	\vdots			\ddots					
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	\dots	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	\dots	1	
$n + 1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	\dots		$\binom{n+1}{p+1}$	\dots	$\binom{n+1}{n}$	1

E 42 Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

1. Par calcul.
2. Par dénombrement.
3. Par application de la formule du binôme.

Démonstration. 1. Par calcul. De $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, on tire $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$S = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$



2. Par dénombrement. Soit E un ensemble de cardinal n . On calcule de deux manières différentes le nombre $B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card } A$.

On a

$$B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card } A = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \text{card}(A)=k}} \text{card } A \right).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les parties A de E de cardinal k sont en nombre $\binom{n}{k}$, donc la somme de leurs cardinaux est $k \binom{n}{k}$. En faisant varier k , on trouve

$$B = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = S.$$

L'application $A \mapsto \complement A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$2B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card } A + \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card } \complement A = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} (\text{card } A + \text{card } \complement A) = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} n = n2^n.$$

D'où $S = n2^{n-1}$.



3. Par application de la formule du binôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. En dérivant par rapport à x , il vient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

et pour $x = 1$, on obtient $S = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

