

Chapter 28 Relations de comparaisons sur les fonctions

28.1 Comparaison des fonctions

28.2 Comparaison des applications usuelles

28.3 Calcul avec les relations de comparaisons

Exercice 28.1

1. Déterminer une fonction simple équivalente à f en $+\infty$ et en 0.

(a) $f(x) = x^2 + x.$

(b) $f(x) = x + \sqrt{x}.$

(c) $f(x) = x + 1 + \ln x.$

(d) $f(x) = \ln x + (\ln x)^2.$

(e) $f(x) = e^x + \sin x.$

(f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$

2. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \rightarrow 0$.

(a) $f(x) = \sin(x^2).$

(b) $f(x) = \ln(\cos x).$

(c) $f(x) = \frac{(\tan x)(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x^2}-1}.$

3. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \rightarrow +\infty$.

(a) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1).$

(b) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}.$

Exercice 28.2

Déterminer des équivalents simples lorsque $x \rightarrow 0$ de

1. $\frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}.$

2. $\ln(\cos x).$

3. $a^x - 1$ où $a \in]0, +\infty[.$

4. $x^x - 1.$

5. $(8+x)^{1/3} - 2.$

Exercice 28.3

En se servant éventuellement d'équivalents, déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{1/\sin x}.$

Exercice 28.4

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3}.$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\tanh x)^{e^{2x} \ln x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^{\text{ch}(\ln x)}.$$

Exercice 28.5

Déterminer les limites, lorsque x tend vers 0^+ de

$$f(x) = x^{(x^x)} - 1, \quad g(x) = x^{(x^x-1)}, \quad h(x) = x^{(x^{(x-1)})}.$$

Exercice 28.6

Déterminer les limites des quantités $f(x)$ suivantes en utilisant au besoin des équivalents

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{x})^{1/x};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos(2x)};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1 + 2x^2)}{x \ln(1 + x)};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3} \right);$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \pi/3}.$$

Exercice 28.7

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

$$1. f(x) = \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sqrt{\sin x}}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

$$2. f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{\cos x} - \tan x, \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

$$4. f(x) = \cos(\sin x), \quad x \rightarrow 0.$$

$$5. f(x) = x^x - 1, \quad x \rightarrow 0^+.$$

$$6. f(x) = \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}, \quad x \rightarrow 1.$$

Exemples avec les suites