Dénombrement

Aperçu

1. Partie finie de $\mathbb{N}$
2. Ensembles finis
3. Analyse combinatoire

L 1 *Soient deux entiers m, t tels que $m > 1$ et $1 \leq t \leq m$.*
Alors il existe une bijection φ de l'ensemble $T = [\![1, m]\!] \setminus \{ t \}$ sur $[\![1, m-1]\!]$.

Démonstration. L'application $s : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!]$ définie par

$$s(t) = m, \qquad s(m) = t, \qquad s(k) = k \text{ si } k \notin \{ m, t \}$$

est une bijection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$ (c'est par exemple l'identité si $t = m$).
L'application φ de T dans $[\![1, m-1]\!]$ définie par $\varphi(k) = s(k)$ convient. ∎

T 2 *Soient* $p, q \in \mathbb{N}^\star$.

1. *Il existe une injection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p \leq q$.
2. *Il existe une surjection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p \geq q$.
3. *Il existe une bijection de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, q]\!]$ *si et seulement si* $p = q$.

D 3 Soit X un ensemble. On dit que X est **fini** si $X = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Si un ensemble n'est pas fini, on dit qu'il est **infini**.

Autrement dit, X est fini si l'on peut «numéroter» ses éléments, c'est-à-dire écrire

$$X = \{ x_1, \dots, x_n \} .$$

Lorsque X est fini, non vide, le résultat suivant permet de définir le cardinal de X.

D 4 Si X est un ensemble fini et non vide, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$, on l'appelle **cardinal** de X ou **nombre d'éléments** de X.

La cardinal de X est noté $|X|$, $\operatorname{card}(X)$ ou $\#X$. Par convention, le cardinal de $\emptyset$ est 0.

P 5 *Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une bijection de X sur Y. Alors X est fini si et seulement si Y est fini et dans ce cas*

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y).$$

E 6

1. Tout singleton est fini et de cardinal 1.
2. L'application $k \mapsto 2k$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur l'ensemble des entiers pairs de $[\![1, 2n]\!]$. Cet ensemble est donc fini et de cardinal n.
3. Si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \leq b$, alors $\operatorname{card}\left([\![a, b]\!]\right) = b - a + 1$.
4. Si $\operatorname{card}(X) = n \geq 1$ et si $x \in X$, alors $\operatorname{card}(X \setminus \{ x \}) = n - 1$.

T 7 *Soient X et Y deux ensembles finis.*

1. *Il existe une injection de X dans Y si, et seulement si,* $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$*.*
2. *Il existe une surjection de X dans Y si, et seulement si,* $\mathrm{card}(X) \geq \mathrm{card}(Y)$*.*
3. *Il existe une bijection de X dans Y si, et seulement si,* $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$*.*

C 8 Principe des tiroirs et des chaussettes

Si p chaussettes sont rangées dans q tiroirs et $p > q$, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

T 9 **Toute partie d'un ensemble fini est finie**

Soient X un ensemble fini et A une partie de X. Alors l'ensemble A est fini,

$$\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(X).$$

De plus, $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(X)$ *si et seulement si* $A = X$.

T 10 *Soient X et Y deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, et f une application de X dans Y. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est une injection ;*

(ii) *f est une surjection ;*

(iii) *f est une bijection.*

Ce théorème s'applique au cas d'une application f d'un ensemble **fini** dans lui-même.

Ce théorème est faux pour les ensembles infinis.

C 11 *$\mathbb{N}$ est infini.*

T 15 *Soit A et B deux ensembles finis et disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Démonstration. Si A ou B est vide, le résultat est clair. Supposant A et B de cardinaux p et q strictement positifs, on possède deux bijections

$$\alpha : A \to [\![1, p]\!] \text{ et } \beta : B \to [\![1, q]\!].$$

On définit alors $\gamma : A \cup B \to [\![1, p+q]\!]$ par

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A \\ p + \beta(x) & x \in B. \end{cases}$$

Il ne vous reste plus qu'à montrer que γ est bijective. ∎

P 16 *Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \setminus B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Remarquons que $A \cap B$ et A' sont finies car incluses dans A qui est finie.
Or A est l'union disjointe de A' et $A \cap B$, donc

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') + \operatorname{card}(A \cap B).$$

∎

T 18 *Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ et $B' = B \setminus A$. Ce sont des parties finies car incluses dans A et B qui sont finies.
Puisque A est réunion disjointe de $A \cap B$ et A',

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A').$$

De même, $A \cup B$ est réunion disjointe de B et de A' donc

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A')$$

L'égalité annoncée en résulte:

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A') = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A').$$

∎

P 19 *Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ est fini et*

$$\operatorname{card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p\right) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \cdots + \operatorname{card}(A_p)$$

Démonstration. Par récurrence sur p. ∎

C 20 *Soit E un ensemble et $\left(A_i\right)_{i \in I}$ un recouvrement disjoint de A. On supposes l'ensemble I fini ainsi que chaque ensemble A_i ($i \in I$). Alors E est fini et*

$$\operatorname{card}(E) = \sum_{i \in I} \operatorname{card}(A_i).$$

Ce résultat s'applique en particulier lorsque $\left(A_i\right)_{i \in I}$ est une partition de E.

L 21 **Lemme des bergers**

Si un ensemble X possède une partition en p sous-ensembles ayant même cardinal q, alors X est fini et $\operatorname{card}(X) = p \times q$.

T 22 **Principe des Bergers**

Soient X, Y deux ensembles et f une surjection de X sur Y. On suppose Y fini et que les ensembles $f^{-1}(\{ y \})$, pour $y \in Y$, aient tous même cardinal q (c'est-à-dire que tout élément de Y possède exactement q antécédents par f). Alors X est fini et

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \times q.$$

E 23 Combien y-a-t-il de couples $(x, y) \in [\![1, 10]\!]$ tels que $x \neq y$?

T 24 *Soient X et Y deux ensembles finis. Alors l'ensemble $X \times Y$ est fini et*

$$\operatorname{card}(X \times Y) = (\operatorname{card} X)\,(\operatorname{card} Y)\,.$$

Démonstration. Posons $m = \operatorname{card}(X)$ et $p = \operatorname{card}(Y)$. On considère l'application $f : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$. Si $x \in X$, $f^{-1}(\{\, x \,\}) = \{\, x \,\} \times Y$ est une partie à p éléments de $X \times Y$, car $y \mapsto (x, y)$ est une bijection de Y sur $f^{-1}(\{\, x \,\})$. Le cardinal de $X \times Y$ est donc $\operatorname{card}(X) \times p$, c'est-à-dire mp. ∎

C 25 *Soient $p \geq 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_p$ des ensembles finis. Alors l'ensemble produit $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$ est fini et l'on a*

$$\operatorname{card}\left(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p\right) = \operatorname{card}(X_1) \times \operatorname{card}(X_2) \times \cdots \times \operatorname{card}(X_p).$$

En particulier, si X est un ensemble fini,

$$\operatorname{card}\left(X^p\right) = (\operatorname{card} X)^p\,.$$

D 26 Soit X un ensemble. Les éléments de X^p sont appelés ***p*-listes** ou ***p*-uplets** d'éléments de X.

R

- Les p-listes sont aussi appelées **mots**, **listes** ou **suites** de longueur p.
- L'ordre des éléments de la p-liste est important.
- Une p-liste peu contenir plusieurs fois le même élément.
- Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

E 27 Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

- $(1, 2, 2)$ et $(5, 3, 4)$ sont des 3-listes d'éléments de X.
- $(5, 3, 4)$ et $(3, 5, 4)$ sont des 3-listes différentes.

R Une **suite de p éléments** de X

$$(x_1, \dots, x_p) = \left(x_i\right)_{i \in [\![1,p]\!]}$$

est aussi une famille d'éléments de X indexée par $[\![1,p]\!]$, c'est-à-dire une application $f : [\![1,p]\!] \to X$ $\big(f(i) = x_i$ pour $i = 1 \dots p\big)$.

T 28 *Soient X, Y deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.*
L'ensemble $\mathscr{F}(X,Y)$ des applications de X dans Y est de cardinal p^n :

$$\operatorname{card}(\mathscr{F}(X,Y)) = (\operatorname{card} Y)^{\operatorname{card} X}.$$

Démonstration. Lorsque X est vide, il existe une unique application de X dans Y : celle dont le graphe est vide. La formule est donc correcte, puisque $p^0 = 1$.
Dans le cas contraire, numérotons les éléments de X : $x_1, \ldots, x_n$, ce qui revient à choisir une bijection $i \mapsto x_i$ de $[\![1, n]\!]$ sur X. On définit alors une application

$$F : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(X,Y) & \to & Y^n \\ f & \mapsto & \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) \end{array}.$$

Soit $v = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$. Le seul antécédent de v par F est l'application $f : X \to Y$ définie par $f(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n$. Ainsi F est bijective. Le cardinal de Y^n étant p^n, on a la conclusion. ∎

L 29 *Soit X un ensemble. L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X sur $\mathscr{F}(X, \{0, 1\})$.*

Démonstration. À toute fonction $f \in \mathscr{F}(X, \{0, 1\})$, associons la partie $f^{-1}(\{1\})$ de X.
Les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathscr{F}(X, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(X, \{0,1\}) & \to & \mathcal{P}(X) \\ f & \mapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (regarder les composées dans les deux sens). ∎

T 30 *Soit X un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est fini et*

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\operatorname{card}(X)}.$$

T 31 *Soient X, Y deux ensembles finis, $p = \mathrm{card}(X)$, $n = \mathrm{card}(Y)$.*

- *Si $p \leq n$, le cardinal de l'ensemble $I(X,Y)$ des injections de X dans Y est* [a]

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+2) \times (n-p+1)$$

- *Si $p > n$, il n'y a pas d'injection de X dans Y.*

[a] 31: Il y a p termes dans ce produit.

C 32 *Le nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal n est $n!$.*

R Soit X un ensemble et

$$(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]} = (x_1, \dots, x_p)$$

une **suite de p éléments** de X, c'est-à-dire une famille d'éléments de X indexée par $[\![1,p]\!]$, ou encore une application $f : [\![1,p]\!] \to X$ $(f(i) = x_i$ pour $i = 1 \dots p)$.
Avec ces notations les éléments $x_1, \dots, x_p$ sont distincts si, et seulement si, f est *injective*.

D 33 Soit X un ensemble.

- Un **p-arrangement** d'éléments de X est une application injective de $[\![1,p]\!]$ dans X.
- On appelle aussi **p-arrangement** une *p-liste d'éléments distincts deux à deux*, c'est-à-dire sans répétition.

Si $\operatorname{card}(X) = n$ et $p \in [\![0,n]\!]$, il existe donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de X.

R

- On dit aussi un **arrangement de p éléments** ou **p-liste d'éléments distincts** ou **p-uplet d'éléments distincts**.
- L'ordre des éléments d'un p-arrangement est important.

D 34 Soit X un ensemble.

- Une bijection de X dans lui-même s'appelle une **permutation** de X.
- Lorsque X est fini, on appelle aussi **permutation** de X une liste formée des $\mathrm{card}(X)$ éléments de X.

P 35 *Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n est $n!$.*

D 36 Soit X un ensemble. On appelle **combinaison de p éléments** de X, ou p-combinaison, toute partie à p éléments de X.

R

- Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts.
- L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

E 37 Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

- $\{ 1, 2, 3 \}$ est une combinaison de 3 éléments de X.
- $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 2, 3, 1 \}$.
- $\{ 1, 2, 2 \}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de X.

P 38 *Soit X un ensemble fini de cardinal n. Étant donné un entier $p \in [\![0, n]\!]$, le nombre de parties à p éléments de X est*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p > n$. Avec cette convention, le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$ pour *tout* entier naturel p.

Esquisse. Une p-liste d'éléments distincts de X est une permutation d'une combinaison de p éléments de X.
Pour chaque façon de choisir une combinaison de p éléments de X, il y a $p!$ permutations de ses éléments. On a donc

$$\operatorname{card} I([\![1, p]\!], X) = p! \times \operatorname{card} \mathcal{P}_p(X).$$

∎

R Le nombre $\binom{n}{p}$ des parties à p éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est aussi le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

P 39 *Soit* $(p, n) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
4. $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

P 40 *Pour tout entier n, on a*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Démonstration. Soit X est un ensemble à n éléments. Les $\mathcal{P}_p(X)$, $p = 0 \dots n$, forment une partition de $\mathcal{P}(X)$. ∎

P 41 **Relation de Pascal**

Soient n et p des entiers ; on a

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Démonstration. Voici une démonstration sans calcul.
Soit X un ensemble de cardinal $n+1$, a un élément de X. On note $X' = X \setminus \{ a \}$.

Les parties à $p+1$ éléments de X qui ne contiennent pas a sont les parties à $p+1$ éléments de X' : leur nombre est $\binom{n}{p+1}$.

Celles qui contiennent a s'écrivent de manière unique $A \cup \{ a \}$ où A est une partie à p éléments de X', et leur nombre est donc $\binom{n}{p}$.

∎

D'où la construction par récurrence du tableau des coefficients binomiaux, appelé **triangle de Pascal**

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$\ldots$	p	$p+1$	$\ldots$	$p=n$	$p=n+1$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$					
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\ldots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\ldots$	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	$\ldots$		$\binom{n+1}{p+1}$	$\ldots$	$\binom{n+1}{n}$	1

E 42 Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

1. Par calcul avec la formule du capitaine.
2. Avec une sommation par partition.
3. Par application de la formule du binôme.
4. Par dénombrement.

Démonstration. 1. Par calcul. De $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, on tire $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$S = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

∎

2. Par dénombrement. Soit E un ensemble de cardinal n. On calcule de deux manières différentes le nombre $B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A$.

On a

$$B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(E) \\ \operatorname{card}(A)=k}} \operatorname{card} A \right).$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les parties A de E de cardinal k sont en nombre $\binom{n}{k}$, donc la somme de leurs cardinaux est $k\binom{n}{k}$. En faisant varier k, on trouve

$$B = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = S.$$

L'application $A \mapsto \complement A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$2B = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A + \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} \complement A = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \left(\operatorname{card} A + \operatorname{card} \complement A \right) = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} n = n2^n.$$

D'où $S = n2^{n-1}$.

■

3. Par application de la formule du binôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. En dérivant par rapport à x, il vient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

et pour $x = 1$, on obtient $S = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

■

4. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couple (A, x) avec $\{ x \} \subset A \subset [\![1, n]\!]$. On va calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F})$ de deux façons différentes.

- Tout d'abord, pour former un élément quelconque (A, x) de $\mathcal{F}$, on peut
  Fixer k dans $[\![1, n]\!]$ et choisir A de cardinal k: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
  Choisir ensuite l'élément $x \in A$: il y a k possibilités.
  En faisant varier k, on trouve alors

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = S.$$

- On peut aussi
  choisir $x \in [\![1, n]\!]$: il y a n possibilités,
  poser $A = \{ x \} \cup A'$ avec $A' \subset [\![1, n]\!] \setminus \{ x \}$: il y a 2^{n-1} possibilités.
  par cette méthode, on trouve $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = n2^{n-1}$.

On a donc $S = n2^{n-1}$.