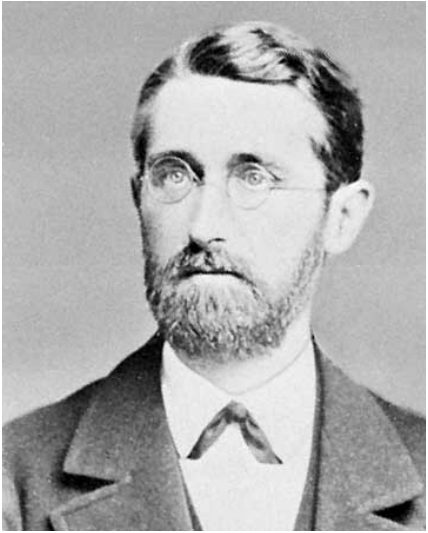
Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Aperçu

1. Majorant, minorant
2. Théorème de la borne supérieure
3. Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$
4. La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$



Richard Dedekind (1831-1916)

D 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un réel M est un **majorant** de A si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

  On dit alors que la partie A est **majorée**.
- On dit qu'un réel m est un **minorant** de A si

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

  On dit alors que la partie A est **minorée**.
- Une partie majorée et minorée est dite **bornée**.

La valeur absolue permet de caractériser facilement les parties bornées de $\mathbb{R}$.

P 2 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si*

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

- $\mathbb{R}$ n'est ni minoré ni majoré.
- $[0, 1]$ est majorée par 5, minorée par 0.
- $]0, 1]$ est majorée par 5, minorée par 0.

D 3 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A ou le **maximum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, x \leq a \qquad .$$

Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

- On dit que a est **le plus petit élément** de A ou le **minimum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, a \leq x \qquad .$$

Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

E 4

- $[0,1]$ a pour maximum 1 et pour minimum est 0.
- $]0,1]$ a pour maximum 1 et n'a pas de minimum.

P 5 *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \} .$$

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 7 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 8

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

E 9 Il existe un réel positif x tel que $x^2 = 2$.

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 7 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 8

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

E 9 Il existe un réel positif x tel que $x^2 = 2$.

R Il est faux que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ admet une «borne supérieure» dans $\mathbb{Q}$. Par exemple avec A=$\left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2 \right\}$. L'ensemble des rationnels qui majore A est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$: il n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$.

E 10 Soit

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Alors A n'a pas de plus grand élément et $\sup(A) = 0$.

T 11 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

D 12 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **la borne inférieure de A** et on la note $\inf A$.

T 13 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

T 14 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est minorée. Alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

T 15 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{-x \mid x \in A\}$. Alors B est minorée et $\inf B = -\sup A$.

D 16 Une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de A est inclus dans A, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in A.$$

T 17 Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.
Montrer que

$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}.$$

T 18 Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles ouverts**, de la forme*

$$\begin{aligned}
]a,+\infty[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x\ \}\\
]-\infty,b[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid x < b\ \}\\
]a,b[&=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\ \}\\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

T 18 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles fermés**, de la forme*

$$\begin{aligned}
[a,+\infty[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\ \} \\
]-\infty,b] &= \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\ \} \\
[a,b] &=]-\infty,b] \cap [a,+\infty[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \} \\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

*Les intervalles de la forme $[a,b]$ fermés et bornées sont aussi appelés **segments**.*

T 18 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les intervalles de la forme*

$$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$
$$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

Ces intervalles ne sont ni ouverts, ni fermés.

T 18 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *L'ensemble vide : $\emptyset$.*

R

- Noter que si $b < a$, alors $]a, b[= [a, b] = \emptyset$. Si $a = b$, on a $[a, a] = \{ a \}$.
- Par ailleurs, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles ouverts et fermés.

C 19 *Toute intersection d'intervalles est un intervalle.*

N On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ appelé droite numérique achevée.

Notation à ne pas confondre avec l'adhérence de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$!

D 20 On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leq$ de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty.$$

D 21 On prolonge l'addition de $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x &= +\infty \\
\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = (-\infty) + x &= -\infty \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty
\end{aligned}$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{et} \quad (-\infty) + (+\infty).$$

D 22 On prolonge la multiplication de $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nous posons également

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Par contre, nous ne donnerons aucun sens aux expressions

$$0 \times (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \times 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0}$$

E 23

1. Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncide.
2. Tout partie de $\overline{\mathbb{R}}$ est majorée par $+\infty$.
3. Si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, elle est toutefois majorée dans $\overline{\mathbb{R}}$ par $+\infty$. On peut alors écrire
$$\sup(A) = +\infty.$$
4. L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Donc la borne supérieure de $\emptyset$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $-\infty$.

T 24 *Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement $\pm\infty$.*

D 25 Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$, on définit les **intervalles**

$$[a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$
$$]a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a < x < b \right\}$$
$$[a, b[= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$$
$$]a, b] = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$$

D 26 Une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ est convexe lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A.$$

T 27 *Les parties convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.*