Chapitre

5

Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

5.1 Rappel sur les fonctions polynomiales

§1 Vocabulaire

Définition 1

Une fonction p définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est une **fonction polynomiale** lorsqu'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que, pour tout $x \in D$, on ait

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Lorsque $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé le **degré** de p.

On note souvent $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Exemples 2

1. L'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x + 5 \end{array}$ est polynomiale de degré 2.
2. L'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + 5x - 3 \end{array}$ est polynomiale de degré 3.
3. L'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est polynomiale de degré 1.
4. Un fonction polynomiale de degré 0 est une fonction constante *non nulle*, c'est-à-dire, il existe $a_0 \neq 0$ tel que

$$\forall x \in D, p(x) = a_0.$$

5. Par convention, l'application nulle est aussi polynomiale et on dit que son degré est $-\infty$.

Définition 3 On dit qu'une fonction polynomiale p admet a pour **racine** lorsque $p(a) = 0$.

Retenez pour l'instant qu'une fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines. La démonstration viendra plus tard dans l'année.

§2 Propriétés

Proposition 4 *Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur $\mathbb{R}$.*

Remarquez que la dérivée d'une fonction polynomiale est polynomiale.

Théorème 5 **Principe d'identification**
Soit I un intervalle véritable, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_p$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ tels que

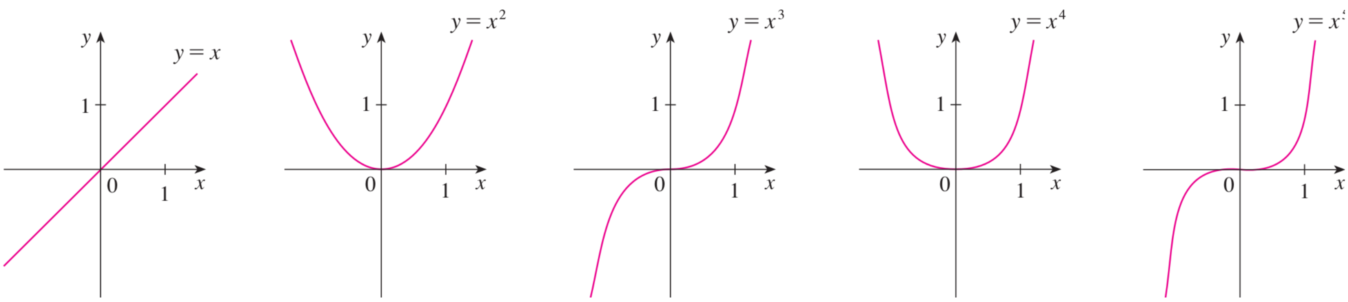
$$\forall x \in I, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p.$$

Alors $n = p$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Ce théorème justifie *a posteriori* la définition de degré d'une fonction polynomiale.

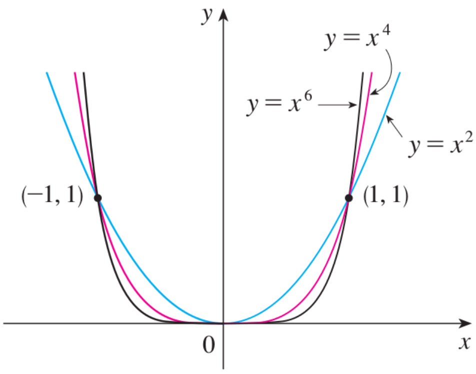
§3 Fonctions puissance n où n est entier

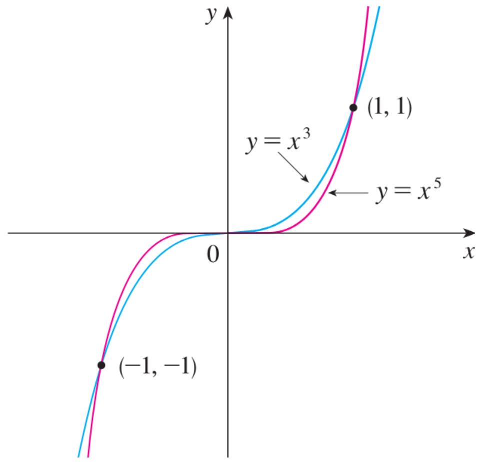
Ci-dessous sont représentés les courbes de $x \mapsto x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



L'allure générale de la courbe de $f : x \mapsto x^n$ dépend de la parité de n. Si n est pair, alors $x \mapsto x^n$ est une fonction paire et sa courbe est comparable à celle de la parabole d'équation $y = x^2$. Si n est impair, alors $x \mapsto x^n$ est une fonction impaire et sa courbe est similaire celle d'équation $y = x^3$ (pour $n \geq 3$).

Toutefois, remarquons que lorsque n augmente, la courbe d'équation $y = x^n$ s'aplatit près de l'origine et croit plus rapidement lorsque $|x| \geq 1$. (Si x est petit, x^2 est plus petite, x^3 encore plus petit,etc...)





§4 Fonctions rationnelles

Définition 6 Une fonction **rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemples 7

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^9 - x^2}{3 + x^8} \end{array}$ est une fonctions rationnelle.
2. Toute fonction polynomiale est *a fortiori* une fonction rationnelle.

Proposition 8

1. *Soit p et q deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.*
La fonction rationnelle $f = \frac{p}{q}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des racines de q.
2. *Les fonctions rationnelles sont continues et infiniment dérivables sur leur ensemble de définition.*
3. *La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.*

Exemple 9 La fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{6x^3 - x}{x^2 - 1}$$

est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$.

5.2 Logarithmes, exponentielles

Exemple 10 Résolution de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \left]0, +\infty\right[^2, f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

où $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

§1 Logarithme népérien

Définition 11 Le **logarithme népérien** (ou logarithme naturel) est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. En d'autre termes

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}.$$

Proposition 12

1. *Le logarithme est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto x^{-1}$ sur $\mathbb{R}^\star$.*

Corollaire 13

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1 \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Proposition 14 *On a pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$,*

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
3. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.
4. $\ln(1/x) = -\ln x$.

Démonstration. Voici une démonstration alternative de la seconde propriété. Celle-ci requiert de savoir faire un changement de variable dans une intégrale (ici $u = xt$).

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{xy} \frac{x}{u}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = \int_x^{xy} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(xy) - \ln(x).$$

∎

Proposition 15 *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\ln\left(x^n\right) = n \ln(x).$$

Proposition 16 *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et*

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

La fonction ln *étant continue, elle réalise donc une bijection de* $\mathbb{R}_+^\star$ *sur* $\mathbb{R}$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de ln.

Remarque L'injectivité du logarithme nous permet d'écrire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\star, \ln(x) = \ln(y) \iff x = y.$$

Proposition 17 *Pour tout* $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Proposition 18 *La courbe représentative de* ln *présente une branche parabolique horizontale au voisinage de* $+\infty$*:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

On dit que le logarithme est négligeable par rapport aux puissances au voisinage de $+\infty$.

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

Corollaire 19

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln(x) = 0.$$

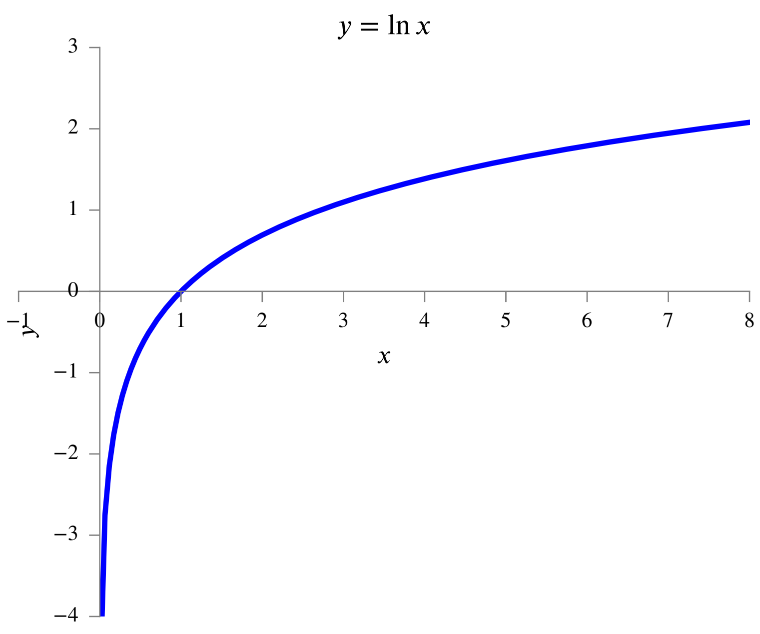


Figure 5.1: Logarithme népérien

§2 Exponentielle népérienne

Définition 20 **et proposition**

Le logarithme réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée exponentielle et notée

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$$

Ainsi

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \exp(\ln x) = x,$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x) = \exp(y) \iff x = y.$

Test 21 Résoudre l'équation $\exp(5 - 3x) = 10$.

Proposition 22 *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

1. $\exp(0) = 1.$
2. $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y).$
3. $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}.$
4. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$

Proposition 23 *L'exponentielle est strictement croissante et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(et même de classe* $\mathscr{C}^\infty$*) et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$

L'axe des abscisse est donc asymptote à la courbe représentative de exp *au voisinage de* $-\infty$*:*

Proposition 24 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Proposition 25 *La courbe représentative de* exp *présente une branche parabolique verticale au voisinage de* $+\infty$*:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty.$$

On dit que les puissances sont négligeables par rapport à l'exponentielle au voisinage de $+\infty$.

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

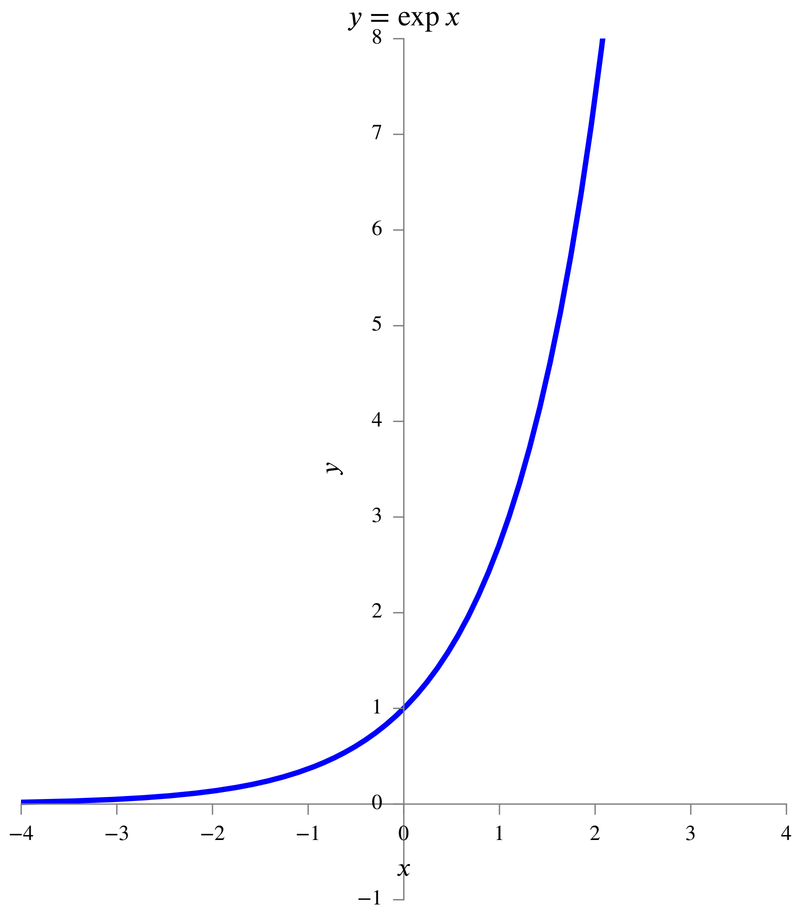


Figure 5.2: Exponentielle népériene

Test 26

Donner l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}\exp(-x) - 1$. Tracer sa courbe et expliciter son image $\mathrm{Im}(g)$.

Test 27

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{(\ln x)^{2305}} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x =$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^3 \, x^7 e^{-10x} =$

§3 Exponentielle de base a

Définition 28

Exponentielle de base a
Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \exp_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \exp(x \ln a) \end{array}$$

Lemme 29

À ne pas retenir
Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $\exp_a(0) = 1$.
2. $\ln(\exp_a(x)) = x \ln a$.
3. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
4. $\exp_a(xy) = \exp_{\exp_a(x)}(y)$.
5. $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)} = \exp_{1/a}(x)$.
6. $\exp_{ab}(x) = \exp_a(x)\exp_b(x)$.
7. $\exp_{a/b}(x) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)}$.

Lemme 30

À ne pas retenir
Si $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp_a(n) = a^n$.

Ce lemme légitime la notation sous forme de puissance.

Définition 31

Extension de la notation puissance
Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Le réel a^x se lit «a puissance x».

Remarque

Sachez que par convention,

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

et non $\left(a^b\right)^c$.

Le lemme 29 montre que les règles de calcul déjà connues pour des exposants entiers (et même rationnel) s'étendent au cas d'exposants réels.

Proposition 32

Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $a^0 = 1$.
2. $\ln(a^x) = x \ln a$.
3. $a^{x+y} = a^x a^y$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.
6. $(ab)^x = a^x b^x$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Test 33

Résoudre l'équation

$$2^x + 6 \times 2^{-x} = 5. \tag{5.1}$$

Proposition 34 *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$ est dérivable et on a*

$$\exp_a'(x) = \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = (\ln a)a^x$$

De plus $x \mapsto a^x$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Définition 35 La **constante de Néper** est le réel défini par $\mathrm{e} = \exp(1)$ ou de manière équivalente par $\ln \mathrm{e} = 1$. On dit encore que e est la base du logarithme népérien. Avec cette définition, on a donc $\exp_{\mathrm{e}} = \exp$ et on peut donc écrire

$$\exp x = \mathrm{e}^x .$$

§4 Logarithme de base *a*

Définition 36 Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Pour tout $x > 0$, on note

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

L'application $\log_a$ est le **logarithme de base *a***.

Exemples 37

1. En particulier $\log_e = \ln$.
2. On utilise $\log_{10}$, appelé logarithme décimal et noté simplement log, en physique et en chimie.
3. La fonction $\log_2$ (logarithme en base 2) est très utilisée en informatique.

Proposition 38 *Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{ 1 \}$. Alors $\log_a$ est la bijection réciproque de $\exp_a$.*

On a donc pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$a^y = x \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a} \iff y = \log_a(x).$$

Test 39 Combien de chiffres comporte l'écriture décimale de 4444^{4444} ?

Figure 5.3: Fonctions exponentielles de base $a > 1$: $x \mapsto a^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		$+$	$\ln a$	$+$	
$\exp_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

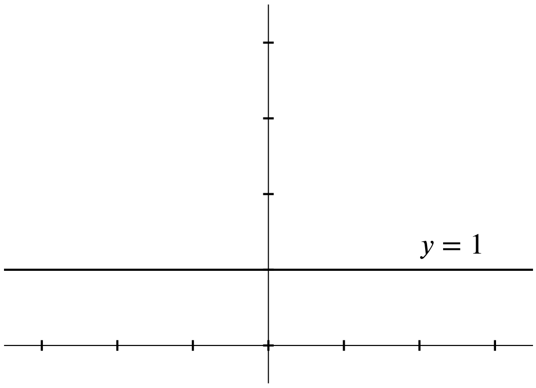
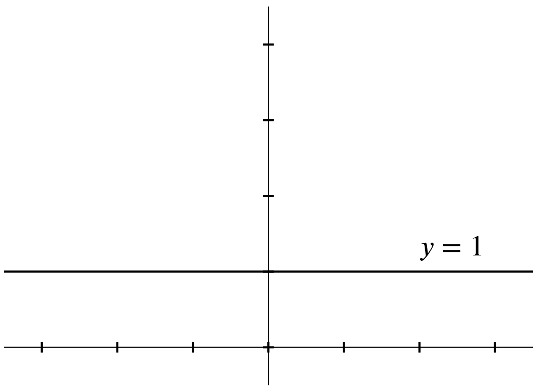
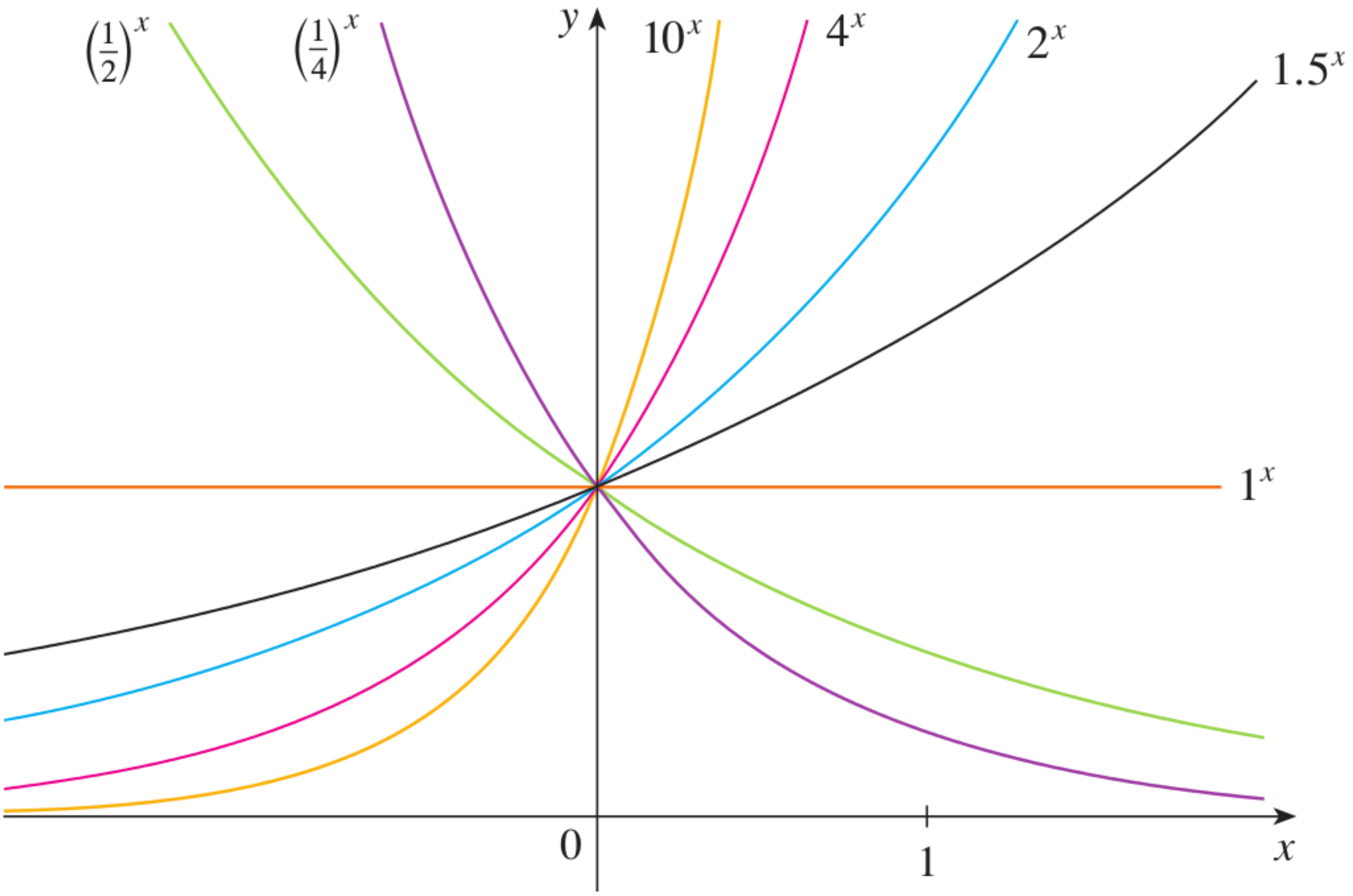


Figure 5.4: Fonctions exponentielles de base $a < 1$: $x \mapsto a^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		$-$	$\ln a$	$-$	
$\exp_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0





5.3 Fonctions puissances

Définition 40

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** d'exposant α l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on retrouve les fonctions puissances déjà connues.

Théorème 41

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^\star$. Sa dérivée est la fonction*
$$\varphi'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$
2. *Limites en 0 et $+\infty$:*
$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

3. *Si $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.*

4. *Positions relatives. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$, alors*

$$\forall x \in]0,1], x^\beta \leq x^\alpha;$$
$$\forall x \in [1,+\infty[, x^\alpha \leq x^\beta.$$

Remarques

1. Pour $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en une fonction continue définie sur tout $\mathbb{R}_+$ en posant $0^\alpha = 0$. Mais attention, ce prolongement est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$.

2. Le prolongement de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est généralement notée $\sqrt[n]{*} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, on a aussi

$$\sqrt[n]{x} = \sup \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ et } y^n \leq x \} .$$

Les fonctions $\sqrt{*}, \sqrt[3]{*}, \sqrt[4]{*}, \ldots$ ne sont pas dérivables sur tout $\mathbb{R}_+$, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^\star$.

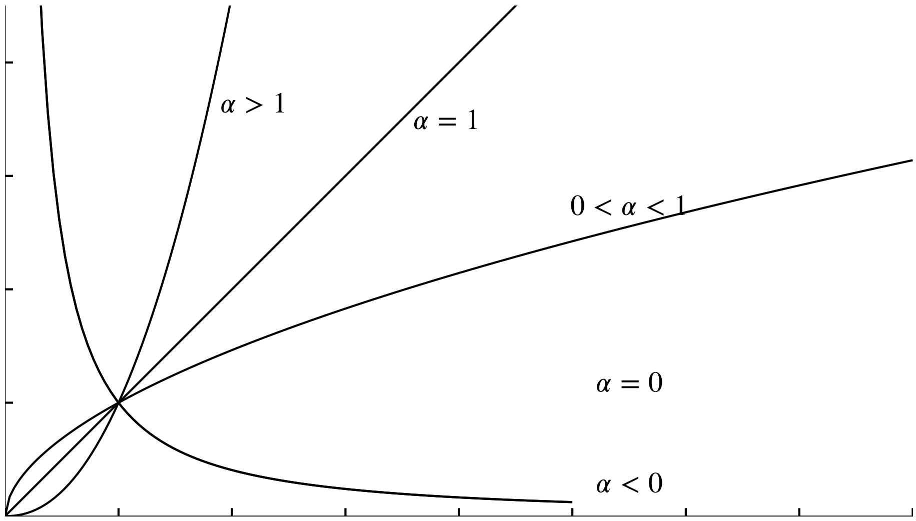


Figure 5.5: Fonctions puissances et positions relatives

5.4 Fonctions hyperboliques

§1 Les fonctions ch et sh

Définition 42 On définit les fonctions **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperbolique** par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sh}: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{ch}: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 43

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x \geq 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x$ *et* $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\, x < \frac{e^x}{2} < \mathrm{ch}\, x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Proposition 44

1. *La fonction* sh *est impaire et la fonction* ch *est paire.*
2. *Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables (donc continues) sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \quad \textit{et} \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$$

3.

$$\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} \mathrm{ch} = \lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$$

§2 La fonction th

Définition 45 On définit la fonction **tangente hyperbolique** par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{th}: \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}.$$

Proposition 46

1. *La fonction* th *est impaire.*
2. *La fonction* th *est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$*, strictement croissante et on a*

$$\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2.$$

3. $\lim_{-\infty} \mathrm{th} = -1$ *et* $\lim_{+\infty} \mathrm{th} = +1$.

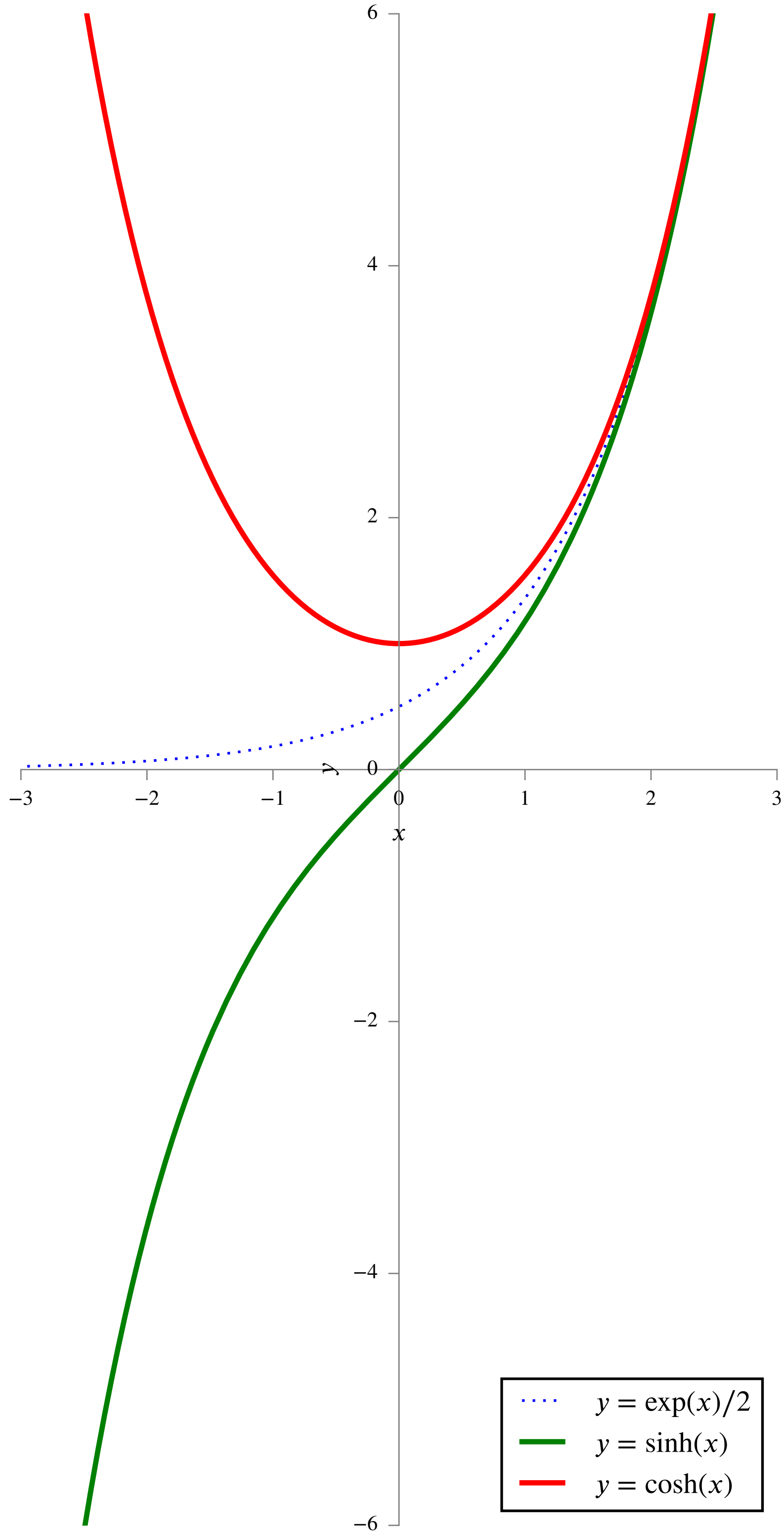


Figure 5.6: Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Figure 5.7: Tangente hyperbolique