

# Chapter 5 Fonctions circulaires

## 5.1 Fonctions trigonométriques

### Solution 5.1

Solutions à justifier!

1.  $\text{Dom } f = \mathbb{R}.$

2.  $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$

3.  $\text{Dom } f = \dots \left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right[ \cup \dots$

## 5.2 Formulaire de Trigonométrie

### Solution 5.2

On a  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$ , d'où  $\cos^2 \alpha = \frac{25}{41}$ . Or  $\alpha$  est un angle du troisième quadrant, donc  $\cos \alpha < 0$ , d'où  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

De plus,  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{41}$  et  $\sin \alpha < 0$ , donc  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ .

**Solution 5.3**

Il y a de très nombreuses façons de procéder. Par exemple, on a

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

d'où  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$ . Puisque  $\alpha$  est un angle du premier quadrant,  $\sin \alpha > 0$  donc  $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$ . Finalement,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \times 12 \times 5}{169} = \frac{120}{169} \quad \text{et} \quad \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

## 5.3 Équations trigonométriques

### Solution 5.4

1.  $x = k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ .
2.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .
3.  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ .
4.  $x = 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x \in \{0, 2\pi\}$ .
5.  $x = \pi + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \pi$ .
6.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ .
7.  $x = k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ .
8.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans  $[0, 2\pi]$ ,  $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ . Si celui-là est trop difficile graphiquement, écrire  $\tan x = 1 \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ .

### Solution 5.5

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \iff \left( x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ .

2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin x = \sin -\frac{\pi}{4} \iff \left( x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{5\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$ .

3. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\tan x = -1 \iff \tan x = \tan \frac{-\pi}{4} \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$ .

4. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{7\pi}{6}$ .

5. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \iff \left( x \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$ .

6. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \tan x = \cos \frac{3\pi}{4} \iff \left( x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \right).$$

L'ensemble solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sur  $[0, 2\pi]$ , les solutions sont  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$ .

### Solution 5.6

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences successives suivantes

$$\begin{aligned}\sin 2x = \cos \frac{x}{2} &\iff \sin 2x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv \pi - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}.\end{aligned}$$

L'équation  $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$  donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du pentagone régulier étoilé  $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4$  dont le premier sommet  $M_0$  est l'image du nombre  $\frac{\pi}{5}$ .

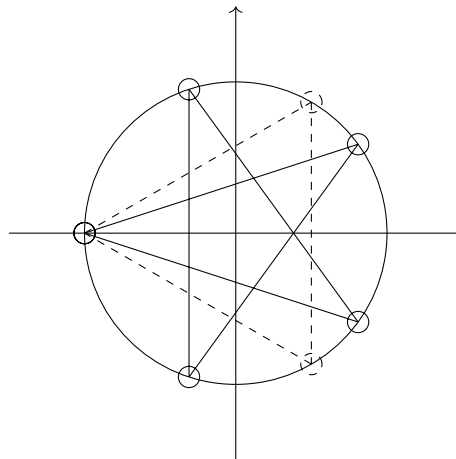
marque

Toute solution de l'équation  $x \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{4\pi}{5}}$  a pour image l'un des sommets du pentagone précédent, mais réciproquement, tout nombre ayant pour image l'un des sommets de ce pentagone n'est pas nécessairement solution de l'équation ; par exemple, le nombre  $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$  dont l'image est  $M_3$  n'est pas solution.

L'équation  $x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{4\pi}{3}}$  donne comme solutions des nombres dont les images sont les sommets du triangle équilatéral  $N_0 N_1 N_2$ , le sommet  $N_0$  étant l'image de la solution  $\frac{\pi}{3}$ .

marque

Ici encore, il importe d'observer que tout nombre ayant pour image l'un des points  $N_0$ ,  $N_1$  ou  $N_2$  n'est pas nécessairement solution de l'équation. Par exemple, le nombre  $\pi$  dont l'image est  $N_2$  n'est pas solution.



**Solution 5.7**

Le polynôme  $2X^2 - 5X + 2$  a deux racines : 2 et  $1/2$ . D'où, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 2 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 2 = 0 &\iff \underbrace{\sin^2 x = 2}_{\text{Impossible}} \text{ ou } \sin^2 x = \frac{1}{2} \\
 &\iff \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\iff \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'on peut réduire l'écriture :

$$2 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 2 = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$



### Solution 5.8

Soit  $x \in [0, 2\pi]$ .

$$1 - 2 \sin^2 x \geq 0 \iff \sin^2 x \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].$$

<sup>1</sup> Également,  $1 - 2 \sin^2 x = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ . De plus,


$$1 + 2 \cos x \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right];$$

avec égalité si, et seulement si  $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$1 - 2 \sin^2 x$	+	0	-	-	0	+	0	+
$1 + 2 \cos x$	+	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + 2 \cos x}$	+	0	-	+	0	-	0	+

Finalement,

$$\frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + 2 \cos x} \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

<sup>1</sup>  sin n'est pas monotone, même sur  $[0, 2\pi]$ .

## Solution 5.9

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff x + \frac{\pi}{6} \equiv x - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} \equiv -x + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\iff \frac{2\pi}{3} \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

*Conclusion :* l'ensemble des solutions de l'équation  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)$  est

$$\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ .

$$\begin{aligned}\tan x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &\iff \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x \\ &\iff \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -1 \\ &\iff x \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv \pi \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

<sup>2</sup> *Conclusion :* l'ensemble des solutions de l'équation  $\tan x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  est  $\pi\mathbb{Z}$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\sin(2x + 3) = \frac{1}{2} &\iff \sin(2x + 3) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff 2x + 3 \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x + 3 \equiv \pi - \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{12} - \frac{3}{2} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12} - \frac{3}{2} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

*Conclusion :* l'ensemble des solution de l'équation  $\sin(2x + 3) = \frac{1}{2}$  est

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \equiv -\frac{3}{2} + \frac{\pi}{12} \text{ ou } x \equiv -\frac{3}{2} + \frac{5\pi}{12} \right\}$$

4.

5.

6. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3} \sin x &= 2 \left( \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) \\ &= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Remarquez que si  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$  alors  $\tan x$  est bien définie et l'on a effectivement une solution.

On a donc

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv 0 \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

*Conclusion :* l'ensemble des solutions de l'équation  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$  est

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup (2\pi\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| x \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv 0 \pmod{2\pi} \right. \right\}.$$

### Solution 5.10

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = m\sqrt{2} \iff \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = m \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour que les deux équations de l'énoncé soient équivalentes, on peut donc choisir par exemple,  $a = \frac{\pi}{3}$  et  $b = \frac{\pi}{4}$ .

2. On a donc

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = m\sqrt{2} \iff \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{m}{\sqrt{2}} \iff \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Cette équation admet des solutions si, et seulement si  $\frac{m}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ , c'est-à-dire  $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

3. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2} &\iff \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \\ &\iff \left( x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \right) \\ &\iff \left( x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi} \right). \end{aligned}$$

### **Solution 5.11**

## 5.4 Étude des fonctions trigonométriques

## 5.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

### Solution 5.12

Solutions à justifier!

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. <math>\text{Dom } f = \mathbb{R}</math>.</li><li>2. <math>\text{Dom } f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[</math>.</li></ol> |  | <ol style="list-style-type: none"><li>3. <math>\text{Dom } f = [0, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, 4]</math>.</li></ol> |
|--|--|---|

**Solution 5.13**

- On a  $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  d'où  $A = \frac{\pi}{3}$ .
- $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (on a toujours, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan x) = x$ ).<sup>3</sup>
- On a  $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  d'où  $C = \frac{\pi}{4}$ .
- On a  $\cos\left(\frac{89\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{89\pi}{3} - 30\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$  d'où  $D = \frac{\pi}{3}$ .

---

<sup>3</sup>On peut également calculer directement !  $\tan\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Solution 5.14**

Posons  $a = \arctan \frac{1}{2}$  et  $b = \arctan \frac{1}{3}$ . On a alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

On ne peut pas déduire immédiatement que  $a+b = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  car on ignore si  $a+b \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

Or  $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . La fonction  $\arctan$  étant strictement croissante, on a

$$0 < a = \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad 0 < b = \arctan \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi  $0 \leq a+b < \frac{\pi}{2}$  et  $\tan(a+b) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ . Or la fonction tangente est injective sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , d'où

$$a+b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$



**Solution 5.15**

Posons  $a = \arcsin \frac{3}{5}$  et  $b = \arcsin \frac{7}{25}$ . L'abus de formules trigonométriques permet d'obtenir  $\sin(2a + b) =$   
1. De plus, les encadrements

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } 0 < \frac{7}{25} < \frac{1}{2}$$

permettent d'écrire (arcsin étant croissante)

$$\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 < b < \frac{\pi}{6}.$$

On a donc  $\frac{\pi}{3} < 2a + b < \frac{2\pi}{3}$  et  $\sin(2a + b) = 1$ , d'où

$$2 \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{7}{25} = \frac{\pi}{2}.$$

### Solution 5.16

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car le sinus est défini sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[-1, 1]$ , ensemble de définition de l'arcsinus.

2. La fonction  $f$  est impaire. En effet, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x)) = -f(x).$$

De plus,  $f$  est  $2\pi$ -périodique, car pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x \pm 2\pi \in \mathbb{R} \text{ et } f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin(x)) = f(x).$$

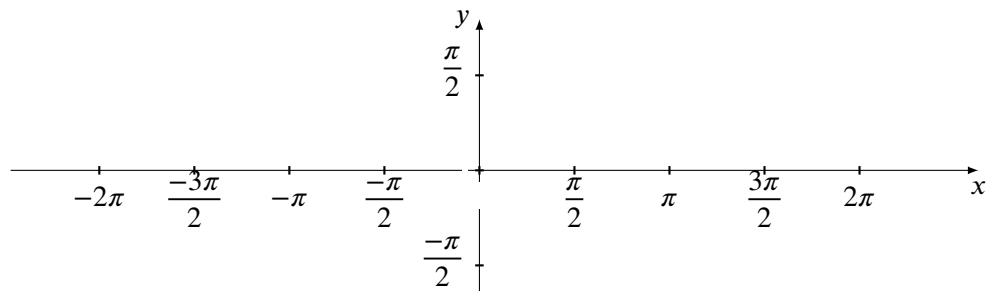
3. Pour  $x \in [0, \pi/2]$ , on a  $f(x) = \arcsin(\sin x) = x$ .

4. Pour  $x \in [\pi/2, \pi]$ , on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \text{ et } \pi - x \in [0, \pi/2],$$

donc  $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ . On en déduit la courbe de  $f$ .

5. Il suffit de tracer la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Ensuite, on obtient alors la totalité de la courbe en effectuant une symétrie de centre  $O$  et des translations de vecteur  $2k\pi\vec{e}_1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



- 6.
- $f(x) = 0$  équivaut à  $\arcsin(\sin x) = 0$  ou encore à  $\sin(x) = 0$ . Ainsi, l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x) = 0$  est-il égal à  $\pi\mathbb{Z}$ .
  - $f(x) = \frac{\pi}{3}$  équivaut à  $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{3}$  ou encore à  $\sin(x) = \sin(\pi/3)$ . Ainsi, l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x) = \frac{\pi}{3}$  est-il égal à la réunion de  $\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$  et de  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$ .
  - $f(x) = \pi$  n'admet aucune solution puisque  $\pi \notin [-\pi/2, \pi/2]$ .

7. Soient  $k \in \mathbb{Z}$  et  $x \in I_k$ . Distinguons deux cas.

- Supposons  $k$  impair. On a alors  $\sin(k\pi - x) = \sin(x)$  et puisque  $k\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2]$ , on a

$$f(x) = \arcsin(\sin(k\pi - x)) = k\pi - x.$$

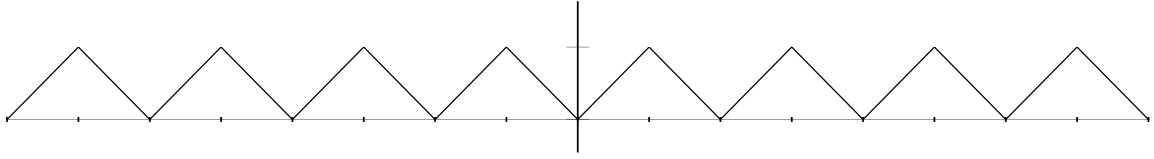
- Supposons  $k$  pair. On a alors  $\sin(x - k\pi) = \sin(x)$  et puisque  $x - k\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , on a

$$f(x) = \arcsin(\sin(x - k\pi)) = x - k\pi.$$

**Solution 5.17**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire et  $2\pi$ -périodique. Il suffit donc de l'étudier sur  $[0, \pi]$ . On complétera le tracé à l'aide d'une symétrie d'axe  $(Oy)$  et par des translations de vecteurs  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Or pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = \arccos(\cos x) = x$ .



**Solution 5.18**

$f$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $\pi$ -périodique et impaire. De plus,

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], f(x) = x$$

Il ne reste plus qu'à tracer !

**Solution 5.19**

1. Pour  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

De plus,  $\arccos(x) \in [0, \pi]$ , on a donc

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arcsin(x).$$

2. Pour  $x \in [-1, 1]$ , posons  $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] - 1, 1[$  et on a

$$\forall x \in ] - 1, 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction  $f$  étant continue sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , elle est donc constante. D'où

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat.

### Solution 5.20

1. Soit  $x > 0$ . On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right)} = \frac{\cos\left(\arctan \frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arctan \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\arctan \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1/x} = x.$$

De plus,  $\frac{1}{x} > 0$ , donc  $0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ , d'où

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2},$$

et finalement

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \arctan x.$$

2. *Variation.*

Lorsque  $x < 0$ , on utilise l'imparité de l'arctangente:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\arctan -x - \arctan \frac{1}{-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

*Variation.* Notons pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

La fonction  $f$  est donc constante sur *chacun* des deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Puisque l'on a  $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$  et  $f(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$ , on en déduit que pour tout réel  $x$  non nul,

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

### Solution 5.21

1. (a) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 1 > 0$  et

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 1 \iff |x| \leq \sqrt{x^2 + 1} \iff x^2 \leq x^2 + 1.$$

Cette dernière assertion étant toujours vraie, on a toujours  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \in [-1, 1]$ .

La fonction arcsin étant définie sur  $[-1, 1]$ , la fonction  $f$  est définie sur  $D = \mathbb{R}$ .

- (b) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 1 > 0$ . La fonction  $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

La fonction arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x) \in ] -1, 1[$  puisque

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \iff |x| < \sqrt{x^2 + 1} \iff x^2 < x^2 + 1. \iff 0 < 1.$$

La fonction  $f = \arcsin \circ u$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - u(x)^2}} u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}}} \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 - x^2}} \frac{1}{(x^2 + 1)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- (c) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \arctan'(x)$ . Puisque  $\mathbb{R}$  est un intervalle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x) + k.$$

Puisque  $f(0) = 0$  et  $\arctan(0) = 0$ , on en déduit que  $k = 0$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x).$$

2. Avec  $x = \tan \varphi$  où  $\varphi \in ] -\pi/2, \pi/2[$ , on a  $\cos \varphi > 0$  et donc

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \tan \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} = \tan \varphi \cos \varphi = \sin \varphi.$$

Or  $\varphi \in ] -\pi/2, \pi/2[$  donc

$$f(x) = \arcsin(\sin \varphi) = \varphi = \arctan x.$$

3. C'est la courbe de l'arctangente...

### Solution 5.22

1. La fonction arcsin étant définie sur  $[-1, 1]$ ,  $f$  est définie en  $x \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\varphi(x) \in [-1, 1]$ .

### Méthode 1. Or

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 \leq 1 &\iff 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0 \\ &\iff (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

<sup>4</sup> De plus,

$$\begin{aligned} 3x - 4x^3 &\geq -1 && \iff 4x^3 - 3x - 1 \geq 0 \\ &&& \iff (x-1)(4x^2 + 4x + 1) \geq 0 \\ &&& \iff (x-1)(2x+1)^2 \geq 0 \\ &&& \iff x \leq 1 \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Finalement :  $-1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$ . Donc  $f$  est définie sur  $[-1, 1]$ .

**Méthode 2.** Une étude rapide de  $\varphi$  donne le tableau de variations

$x$	$-\infty$	$-1$	$-1/2$	$1/2$	$1$	$+\infty$
$\varphi(x)$						

On constate que  $\varphi(x) \in [-1, 1]$  si et seulement si  $x \in [-1, 1]$ , d'où le résultat.

2. (a) Pour  $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ , on a

$$\sin(-\pi - u) = \sin(u) \text{ et } -\pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où  $\boxed{\arcsin(\sin u) = -\pi - u}$ .

- (b) Pour  $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\arcsin(\sin u) = u$ .

- (c) Pour  $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ , on a

$$\sin(\pi - u) = \sin(u) \text{ et } \pi - u \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right],$$

d'où  $\boxed{\arcsin(\sin u) = \pi - u}$ .

**3.** <sup>6</sup>

<sup>4</sup>On a remarqué que  $-1$  est une racine du polynôme  $4X^3 - 3X + 1$  ; on peut donc mettre  $(X + 1)$  en facteur.

<sup>5</sup>Idem avec +1 et le polynôme  $4X^3 - 3X - 1$ .

<sup>6</sup>On peut également utiliser la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}(\sin \theta)^3 &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\&= \frac{1}{-8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\&= -\frac{1}{4} (\sin(3\theta) - 3\sin(\theta))\end{aligned}$$



Soit  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . On a par la formule de De Moivre

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta\end{aligned}$$

Par identification des parties imaginaires, on obtient

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

4. Soit  $x \in E$  et  $\theta = \arcsin x$ . On a donc  $x = \sin \theta$  et d'après la question précédente,  $\sin 3\theta = 3x - 4x^3$ , d'où  $f(x) = \arcsin(\sin 3\theta)$ . Remarquons également que  $3\theta \in \left[-\frac{3}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi\right]$ . Utilisons maintenant les résultats de la question ??.

- Si  $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{6}$ ,<sup>7</sup> alors  $-\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta \leq -\frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3 \arcsin x}.$$

- Si  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ , alors  $-\frac{\pi}{2} \leq 3\theta \leq \frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = 3\theta = \boxed{3 \arcsin x}.$$

- <sup>8</sup> Si  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , c'est-à-dire  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , alors  $-\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta \leq -\frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$f(x) = \arcsin(\sin(3\theta)) = \pi - 3\theta = \boxed{\pi - 3 \arcsin x}.$$

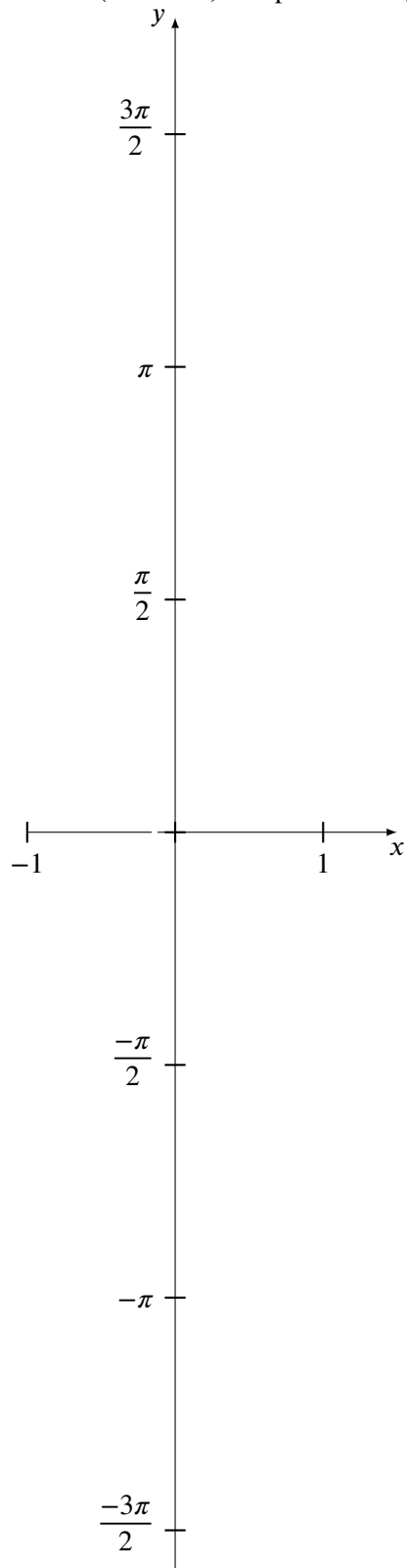
5. Figure 5.1.

---

<sup>7</sup>Rappelons que arcsin est croissante.

<sup>8</sup>Pour ce dernier cas, on peut également utiliser le fait que  $f$  est impaire avec le résultat du premier cas :  $f(x) = -f(-x) = -(-\pi - 3 \arcsin(-x)) = \pi - 3 \arcsin(x)$ .

Figure 5.1:  $y = \arcsin(3x - 4x^3)$ . En pointillés :  $y = 3 \arcsin x$ .



**Solution 5.23** *Formule de Machin*

1. (a) Pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\arctan(\tan x) = x$ .  
(b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan x) = x$ .
2. En notant  $a = \arctan \frac{1}{5}$ , on a successivement,

$$\begin{aligned}\tan 2a &= \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12} \\ \tan 4a &= \frac{2 \tan 2a}{1 - \tan^2 2a} = \frac{5/6}{1 - 25/144} = \frac{120}{119} \\ \tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{120/119 - 1}{1 + 1 \times 120/119} = \frac{1}{239}.\end{aligned}$$

3. Puisque la fonction  $\arctan$  est strictement croissante et  $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , on a

$$0 < a < \frac{\pi}{6}$$

et par conséquent

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 4a - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que

$$4a - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

### Solution 5.24

La fonction arctan est définie sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Pour  $x$  au voisinage de  $\pm\infty$ ,

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

La droite  $\mathcal{A}_1$  d'équation  $y = \frac{\pi}{4}$  est asymptote à la courbe de  $f$  (en  $-\infty$  et  $+\infty$ ).

De plus

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u = +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\frac{\pi}{2}.$$

De manière analogue

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan u = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  est dérivable sur  $D$ , donc  $f$  est dérivable sur  $D$  et

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} > 0.$$

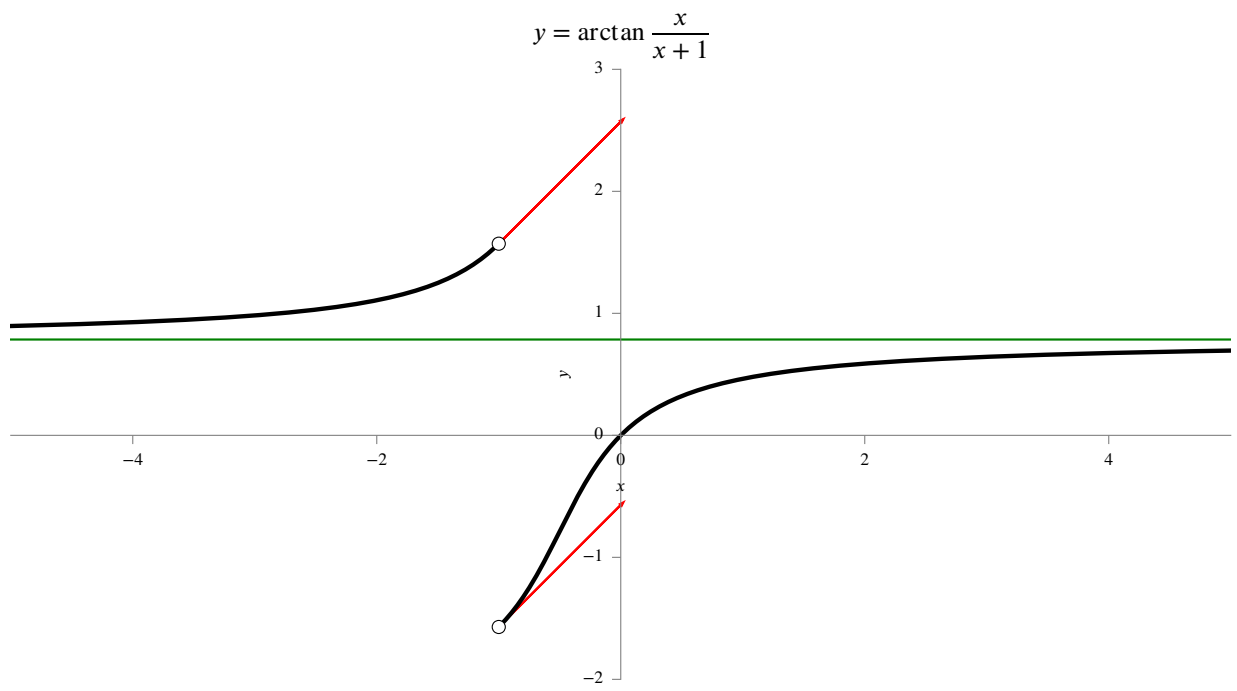
On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = 1.$$

La fonction  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $-1$ , néanmoins, elle admet des limites finies à gauche et à droite de  $-1$ . Cela nous donne une information sur l'aspect de la courbe au voisinage de  $-1$ .

On en déduit le tableau de variations

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
Variations de $f$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$



**Solution 5.25**