CHAPITRE 50

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES, LIMITE, CONTINUITÉ

50.1 APPLICATIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

§1 Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Rappelons que pour toutes applications f et g de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les lois naturelles

- $f + g$ est la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) + g(x, y)$,
- $f \times g = fg$ est la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)g(x, y)$,
- $\lambda \cdot f$ est la fonction $(x, y) \mapsto \lambda f(x, y)$,
- Si g ne s'annule pas sur A, f/g est la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)/g(x, y)$.

Muni de ces lois, nous connaissons déjà le résultat suivant

Proposition 1

1. *L'ensemble $(\mathcal{F}(A, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif.* [a]
2. *L'ensemble $(\mathcal{F}(A, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

[a] 1.**1.**$\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ n'est pas un anneau intègre si card $A \geq 2$.

Exemples 2

1. Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by \end{array}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

sont des fonctions réelles de deux variables réelles.

2. Les **fonctions polynomiales de deux variables réelles**, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\substack{p=0\dots n\\ q=0\dots m}} a_{p,q}x^p y^q \end{array}, \quad \text{où} a_{p,q} \in \mathbb{R}.$$

3. Les **fonctions rationnelles de deux variables réelles**, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \end{array},$$

   où P et Q sont des fonctions polynomiales de deux variables et $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) \neq 0 \right\}$.

§2 Applications partielles

Définition 3 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, et $a = (x_0, y_0) \in A$. Les **applications partielles de f en a** sont les fonctions d'une seule variable réelle

$$f(*, y_0) : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array} \qquad \text{où } I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in A \right\},$$

et

$$f(x_0, *) : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array} \qquad \text{où } J = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in A \right\}.$$

On a une définition analogue lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, notamment avec les valeurs numériques ou les applications coordonnées, on note ces applications simplement f_{y_0} et f_{x_0}.

Exemple 4 Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{(y-4)\sin(x)}{x^2+y^2+1} \end{array}.$$

1. La première application partielle en $a = (\pi, 1)$ est $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-3\sin(x)}{x^2+2} \end{array}$.
2. La seconde application partielle en $a = (\pi, 1)$ est $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 0 \end{array}$.

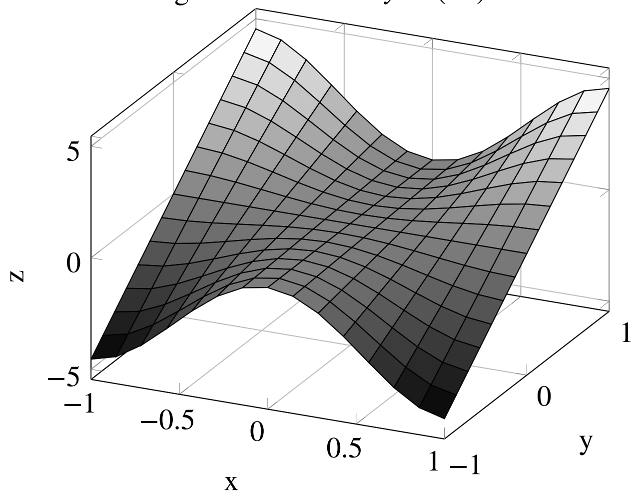
§3 Interprétation graphique

Une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ admet une représentation graphique, qui est une surface représentative, à savoir

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y) \in A \text{ et } z = f(x,y) \right\}.$$

Les courbes représentatives des fonctions partielles $t \mapsto f(t,y_0)$ s'interprètent comme

Figure 50.1: $z = 5xy\sin(2x)$.



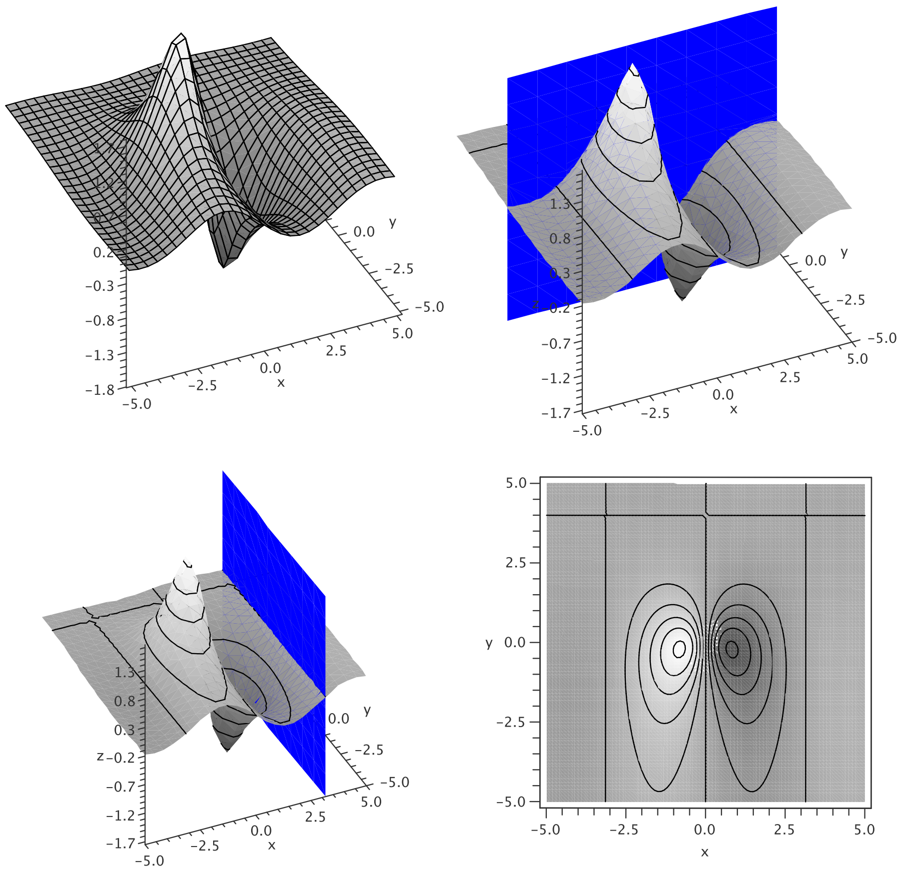
l'intersection du plan $y = y_0$ et de la surface représentative de f. De même, les courbes représentatives des fonctions partielles $t \mapsto f(x_0,t)$ sont les intersections de la surface représentative de f avec le plan $x = x_0$.

Définition 5 La **courbe de niveau** λ de l'application f est l'ensemble

$$C_\lambda = \{ (x,y) \in A \mid f(x,y) = \lambda \} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est l'intersection de la surface représentative de f avec le plan $z = \lambda$. Dans une représentation graphique, pour une meilleure lisibilité, on colore souvent les zones entre les courbes de niveau dans différents tons. En physique, on parle de courbe équipotentielle.

$$z = \frac{(y-4)\sin(x)}{x^2+y^2+1}$$



50.2 Limite en un point, continuité

Remarque **Définition générale de limite**

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (par exemple deux espaces vectoriels euclidiens). Soit A une partie de E, a un point adhérent à A et $b \in F$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| \leq \delta \implies \|f(z) - b\| \leq \varepsilon.$$

Lorsque cette limite existe, elle est unique. On note cette propriété

$$\lim_a f = b \quad \text{ou} \quad \lim_{z \to a} f(z) = b.$$

§1 Fonctions à valeurs réelles

Définition 6 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A et $b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| \leq \delta \implies |f(z) - b| \leq \varepsilon.$$

Lorsque cette limite existe, elle est unique. On note cette propriété

$$\lim_a f = b, \quad \lim_{z \to a} f(z) = b, \quad \text{ou} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b \text{ si } a = (x_0, y_0).$$

⚠ Faire tendre $z = (x, y)$ vers $a = (x_0, y_0)$ *ne revient pas* à faire tendre x vers x_0 puis y vers y_0 ou le contraire ou toute autre invention malsaine.

Remarque On a de manière immédiate

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{z\to a} f(z) - b = 0 \iff \lim_{z\to a} |f(z) - b| = 0$$

et en particulier

$$\lim_{z\to a} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to a} |f(z)| = 0.$$

On a aussi le «changement de variable» $z = a + v$

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{v\to(0,0)} f(a+v) = b$$

Définition 7 Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.
- Soit X une partie de A. On dit que f est **continue sur X** si f est continue en tout point de X.
- Lorsque f est continue sur son ensemble de définition A, on dit simplement que f est **continue**.

Formellement, $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 8 *L'application $\|*\|$ et les projections canoniques*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\| \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array},$$

sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

§2 Domination et encadrement

Théorème 9 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et f une application de A dans $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que,*

- *pour $z \in A$ au voisinage de a, $|f(z) - b| \leq g(z)$,*
- $\lim_{z\to a} g(z) = 0$

Alors $\lim_{z\to a} f(z) = b$.

On pourrait également énoncer un théorème de convergence par encadrement.

Exemple 10

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|x| \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

L'application f est donc continue en $(0, 0)$.

On utilise très souvent une domination pour montrer l'existence d'une limite en un point. Les outils classiques sont l'**inégalité triangulaire** et les inégalités

$$|x| \leq \|(x, y)\|, \quad |y| \leq \|(x, y)\|, \quad \text{et} \quad |xy| \leq \frac{1}{2}\|(x, y)\|^2 \tag{50.1}$$

vraies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

§3 Limite suivant une partie

Définition 11

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, une partie $X \subset A$, a un point adhérent à X et $b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet b pour **limite** en a **suivant** X si la fonction $f|_X$ admet b pour limite en a, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in X, \|z - a\| < \delta \implies |f(z) - b| < \varepsilon.$$

On a une définition analogue pour $f : A \to \mathbb{R}^2$.

On note cette propriété $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in X}} f(z) = b$.

Proposition 12

Avec les notations de la définition. Si $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b$, *alors* $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in X}} f(z) = b$.

La réciproque est bien sûr totalement fausse.

Exemple 13

Considérons l'application $f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pour $y \neq 0$, on a $f(0, y) = 0$. Autrement dit, la restriction de f à la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par la droite Δ d'équation $x = 0$ est identiquement nulle ; sa limite au point $(0, 0)$ est 0. La seule limite *possible* pour f en $(0, 0)$ est donc 0. Montrons que c'est bien le cas !
Pour tout $(x, y) \in A$, on a

$$|f(x, y) - 0| \leq \frac{3x^2}{\|(x, y)\|} + \frac{|xy|}{\|(x, y)\|} \leq \frac{3\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} + \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} \leq 4\|(x, y)\|.$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4\|(x, y)\| = 0$, d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

On peut également utiliser les coordonnées polaires [a] En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ de coordonnées polaires (r, θ) où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, on a

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x, y)\| = 0$.

[a] Pour une limite lorsque (x, y) tend vers $a = (x_0, y_0)$, on peut utiliser les coordonnées polaires de pôle a, c'est-à-dire

$$x = x_0 + r\cos\theta \text{ et } y = y_0 + r\sin\theta.$$

On retrouve néanmoins le caractère *local* des notions de limite et de continuité.

Proposition 14 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A et V un voisinage de a. Alors*

1. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \ell \iff \lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in V\cap A}} f(z) = \ell$.
2. *f est continue en a si et seulement si la restriction de f à $V \cap A$ est continue en a.*

Le plus souvent, on utilise pour V une boule centrée en a et de rayon $r > 0$.

Test 15 Soient A et A' deux parties de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et à A', f une fonction de définie sur $A \cup A'$.
Montrer que pour que $\ell = \lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in A\cup A'}} f(z)$ il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$\ell = \lim_{\substack{z\to a\\ z\in A}} f(z) \qquad \text{et} \qquad \ell = \lim_{\substack{z\to a\\ z\in A'}} f(z)$$

§4 Restriction et applications partielles

Proposition 16 *La restriction d'une application continue reste continue.*

Proposition 17 *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Si f est continue en $a = (x_0, y_0) \in A$ alors $f(*, y_0)$ est continue en x_0 et $f(x_0, *)$ est continue en y_0. Autrement dit, la continuité de f entraîne la continuité des applications partielles.*

Ces corollaires peuvent également servir à nier une continuité.

Exemple 18 **La réciproque est fausse !**
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit $y_0 \neq 0$. La première application partielle en (x_0, y_0) est la fonction $x \mapsto \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$. Si maintenant $y_0 = 0$, la première application partielle est $x \mapsto 0$. En particulier, les premières applications partielles sont continues. De même, les deuxièmes applications partielles sont aussi continues.
Mais, considérons maintenant la restriction g de la fonction f à la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par la droite Δ d'équation $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Pour tout point $(x, y) \in \Delta$ on a

$$g(x, y) = f(x, y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

La fonction g est constante sur Δ, sa limite au point $(0, 0)$ est le nombre $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, différent de 0, donc différent de $g(0, 0)$. La fonction g, et par suite la fonction f n'est pas continue au point $(0, 0)$.
Ce résultat se visualise assez bien en utilisant les coordonnées polaires. Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$ de coordonnées polaires (r, θ), $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

D'où il résulte que sur tout cercle ayant pour centre $(0, 0)$, la fonction prend toutes les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; elle n'admet pas 0 pour limite au point $(0, 0)$.
La valeur de $f(a)$ ne dépend donc que de θ et non de r. On peut donc construire le graphe de f comme un faisceau de demi-droites passant par l'axe (Oz).

§5 Limites infinies et limites à l'infini

Définition 19

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A. On dit que f admet $+\infty$ pour **limite** en a si

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \exists\delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies f(z) > \omega.$$

On dit que f admet $-\infty$ pour **limite** en a si

$$\forall\omega > 0, \exists\delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies f(z) < \omega.$$

Définition 20

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$ non bornée. On dit que $f(z)$ admet b pour limite lorsque $\|z\|$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall z \in A, \|z\| \geq A \implies |f(z) - b| \leq \varepsilon.$$

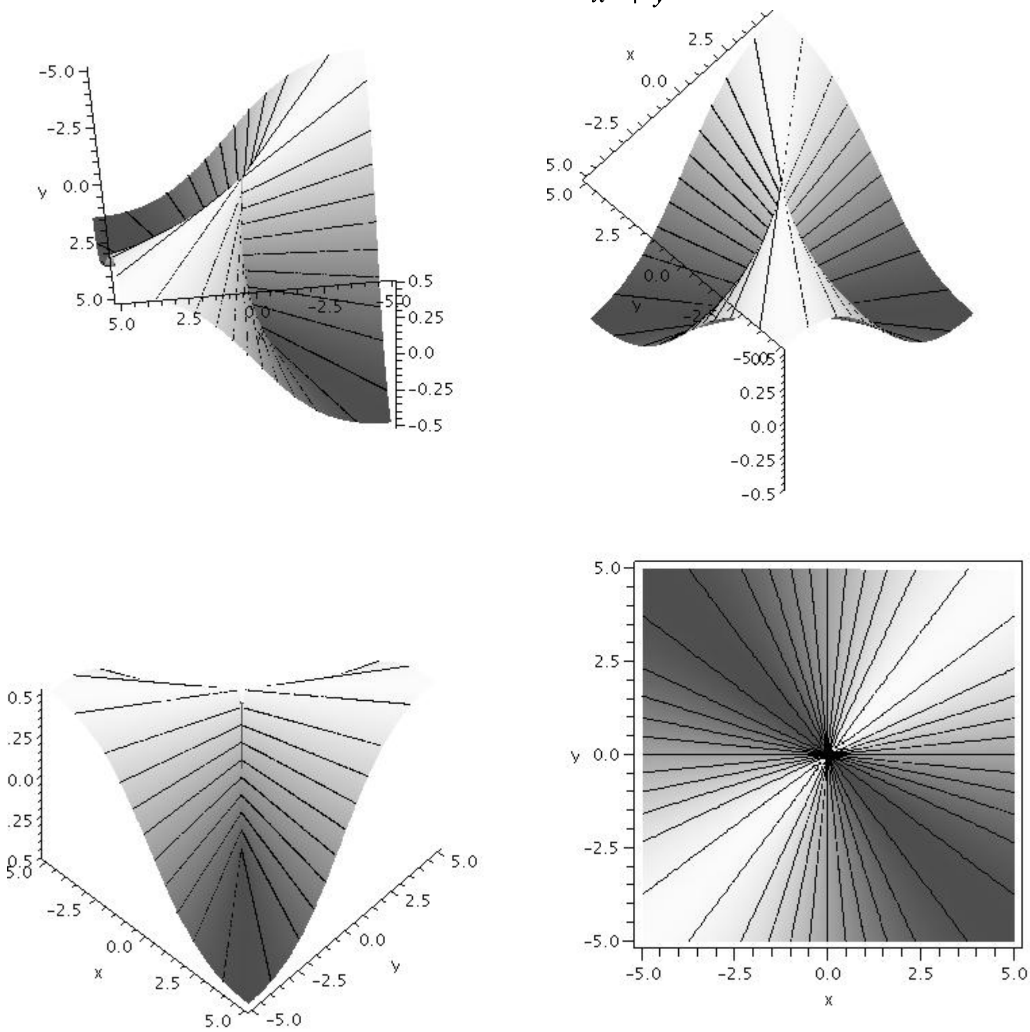
On dit que $f(z)$ admet $+\infty$ pour limite lorsque $\|(z)\|$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall z \in A, \|z\| \geq A \implies f(z) \geq \omega.$$

On dit que $f(z)$ admet $-\infty$ pour limite lorsque $\|(z)\|$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall z \in A, \|z\| \geq A \implies f(z) \leq \omega.$$

Figure 50.2: $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.



50.3 Champs de vecteurs

§1 Définition, applications coordonnées

La donnée d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est équivalente à la donnée de 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 21 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}^2$. On peut écrire

$$f : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f_1(x,y)\cdot e_1 + f_2(x,y)\cdot e_2 = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) \end{array}.$$

Les applications f_1 et f_2 (définie sur A) sont les **applications coordonnées** de f. On note $f = (f_1, f_2)$.

Exemples 22

1. Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$.
2. Le passage en coordonnées polaires : $(\varrho, \theta) \mapsto (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$.

Remarque

En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, l'application $f = (f_1, f_2)$ s'identifie à l'application

$$x + iy \mapsto f_1(x, y) + i f_2(x, y).$$

Par exemple l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$ s'identifie à l'application

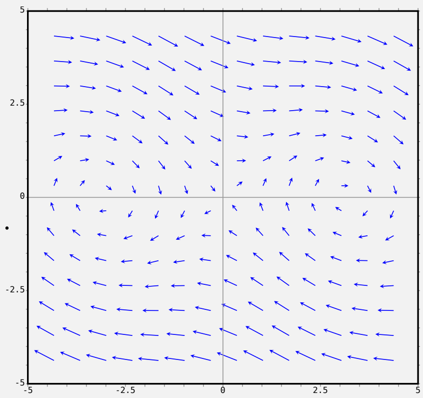
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}.$$

Définition 23

Dans un langage géométrique, les applications de $A \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont appelées **champs de vecteurs** et les applications de A dans $\mathbb{R}$ sont appelés **champs de scalaires**

Exemple 24

$f(x, y) = (y, \sin(x) - y/3)$.



Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour toutes applications f et g de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les lois naturelles

- $f + g$ est la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) + g(x, y)$,
- $\lambda \cdot f$ est la fonction $(x, y) \mapsto \lambda f(x, y)$,
- Il n'y a pas produit naturel sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2)$. On peut toutefois considérer le produit scalaire de deux telles applications défini par

$$(f \cdot g)(x) = \langle f(x), g(x) \rangle.$$

- Si $\alpha : A \to \mathbb{R}$, on définit

$$\alpha f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ a & \mapsto & \alpha(a) f(a) \end{array}.$$

Proposition 25

L'ensemble $(\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^2), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

§2 Limite en un point, continuité

Définition 26

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et $b \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet b pour **limite** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies \|f(z) - b\| < \varepsilon.$$

Cette limite est alors unique et on note cette propriété

$$\lim_a f = b, \quad \lim_{z \to a} f(z) = b, \quad \text{ou} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b \text{ si } a = (x_0, y_0).$$

Proposition 27

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées (f_1, f_2), a un point adhérent à A et $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{z\to a} \|f(z) - b\| = 0 \iff \begin{cases} \lim_{z\to a} f_1(z) = b_1 \\ \lim_{z\to a} f_2(z) = b_2. \end{cases}$$

On retrouve à partir de ce résultat les théorèmes de domination et de restriction.

Définition 28

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ et $a \in A$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.
- Soit X une partie de A. On dit que f est **continue sur X** si f est continue en tout point de X.
- Lorsque f est continue sur son ensemble de définition A, on dit simplement que f est **continue**.

Formellement, $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| < \delta \implies \|f(z) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 29

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées (f_1, f_2) et $a \in A$. [a] *Alors*

1. *f est continue en a si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.*
2. *f est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.*

[a] Ne pas confondre fonctions coordonnées et application partielles

50.4 Propriétés

Dans cette section, n, p et q appartiennent à $\{1, 2\}$.

§1 Composition de limites

Théorème 30

Soit A est une partie de $\mathbb{R}^n$, B une partie de $\mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens.

1. *Si $f(z) \xrightarrow[z\to a]{} b$, alors b est un point adhérent à B.*
2. *Si $f(z) \xrightarrow[z\to a]{} b$ et si $g(w) \xrightarrow[w\to b]{} \ell$,*

$$g \circ f(z) \xrightarrow[z\to a]{} \ell.$$

§2 Opérations algébriques sur les limites

Théorème 31

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, a un point adhérent à A et f et g des applications de A dans $\mathbb{R}$. On suppose

$$f(z) \xrightarrow[z\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \text{ et } g(z) \xrightarrow[z\to a]{} m \in \mathbb{R}.$$

Alors

1. *$\lambda f(z) \xrightarrow[z\to a]{} \lambda\ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *$f(z) + g(z) \xrightarrow[z\to a]{} \ell + m$.*
3. *$f(z)g(z) \xrightarrow[z\to a]{} \ell m$.*
4. *Si $\ell \neq 0$, alors f est non nulle au voisinage de a et $\frac{1}{f(z)} \xrightarrow[z\to a]{} \frac{1}{\ell}$.*

Les deux premières propriétés se généralisent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

§3 Composition d'applications continues

«La composée de deux applications continues est une application continue».

Théorème 32

Soit A est une partie de $\mathbb{R}^n$, B une partie de $\mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens. Si f est continue en a_0 et g est continue en $b_0 = f(a_0)$, alors $g \circ f$ est continue en a_0.

Corollaire 33

Soit $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ et $g : B \to \mathbb{R}^q$. On suppose $f(A) \subset B$, de sorte que la composée $g \circ f$ a un sens. Alors $g \circ f$ est continue sur A.

Corollaire 34 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Alors f est continue sur $I \times \mathbb{R}$. On a un résultat similaire avec $g : (x, y) \mapsto \varphi(y)$.

Exemple 35 Les applications $(x, y) \mapsto \cos y$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $(x, y) \mapsto (\cos x, \cos y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en (x_0, y_0), on utilise souvent une limite de la forme $\lim\limits_{t\to 0} f(x_0 + \alpha t^p, y_0 + \beta t^q)$ (les applications partielles en sont un exemple). Si deux telles limites sont différentes, la fonction n'est pas continue.

Exemple 36 On reprend l'exemple de l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pour $t \neq 0$,

$$f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

alors que $(t, t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0, 0)$. L'application f n'est donc pas continue en $(0, 0)$.

Exemple 37

Si f est une fonction de deux variables continue en $a = (x_0, y_0)$ et si $v = (h, k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors, lorsqu'elle est définie au voisinage de 0, la fonction

$$\varphi_v : t \mapsto \varphi(a + tv) = \varphi(x_0 + th, y_0 + tk)$$

est continue en 0 comme composée de la fonction affine $t \mapsto (x_0 + th, y_0 + tk)$ avec f.
Toutefois, pour une fonction f et un point a donné, la continuité de toutes les applications φ_v ne suffit pas à établir la continuité de f en a.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

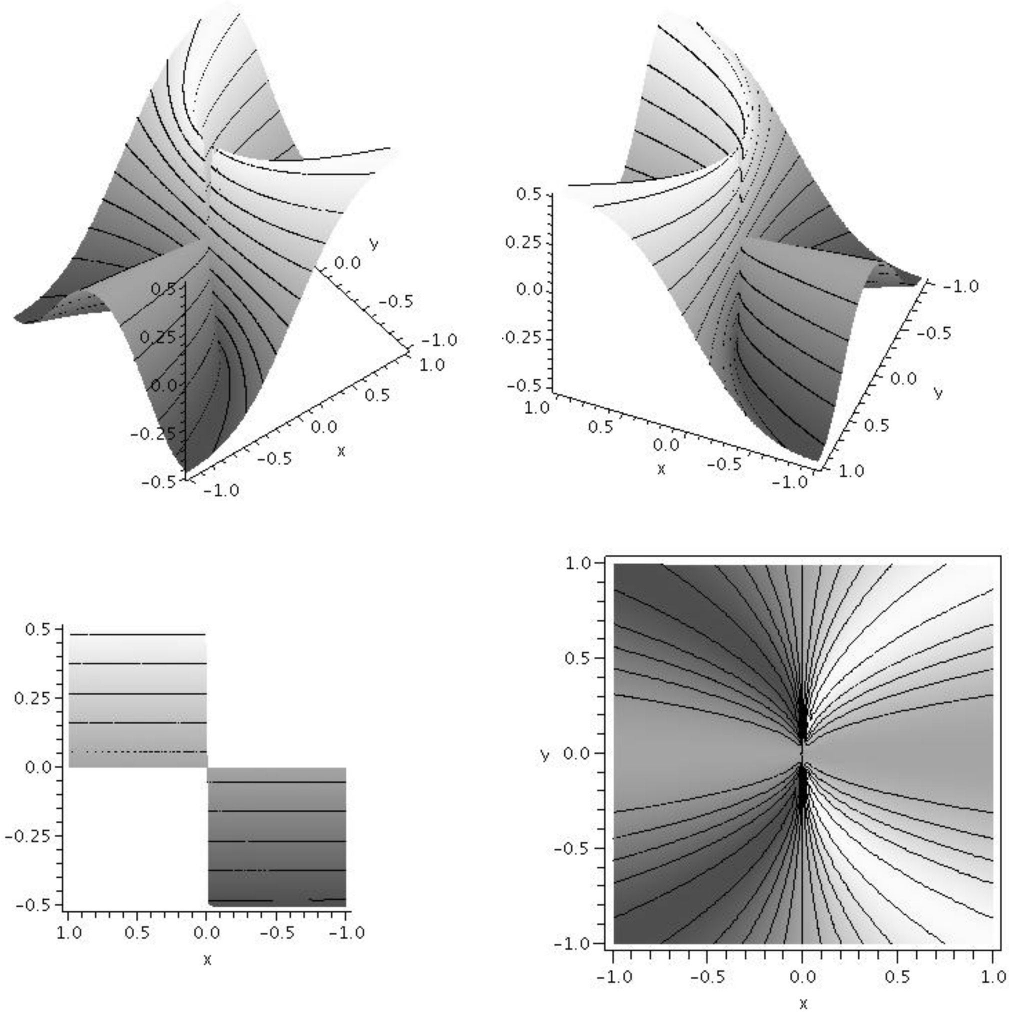
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pour tout vecteur non nul $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$, et tout $t \in \mathbb{R}^\star$, on a

$$f(tv) = \frac{t^3 hk^2}{t^2 h^2 + t^4 k^4} = t\frac{hk^2}{h^2 + t^2 k^2}.$$

En particulier, $\lim_{t\to 0} f(tv) = 0$. Autrement dit, lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ en restant sur une même droite, alors $f(x, y)$ tend vers 0.
Pourtant, f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, lorsque t tend vers 0, $\gamma(t) = (t^2, t)$ tend vers $(0, 0)$ mais $f(\gamma(t)) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $0 = f(0, 0)$. Donc f ne peut pas être continue en $(0, 0)$.

Figure 50.3: $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$.



§4 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Proposition 38 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, f et g des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ et a un point de A où f et g sont continues. Alors les fonctions*

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad fg : x \mapsto f(x)g(x)$$

sont continues en a. Si $g(a) \neq 0$, on a $g(z) \neq 0$ pour z au voisinage de a et la fonction

$$f/g : x \mapsto f(x)/g(x),$$

définie pour $g(x) \neq 0$, est continue en a.

Corollaire 39 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.*

1. *$\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$.*

2. *$\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ est un sous-anneau de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$.*

3. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas, alors $1/f$ est continue.*

Corollaire 40 *Les fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables sont continues sur leur domaine de définition.*

50.5 Aspects topologiques

§1 Caractérisation globale de la continuité

Théorème 41 *Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p, q \in \{1, 2\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue.*

2. *Pour tout ouvert Y de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(Y)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^p$.*

3. *Pour tout fermé Y de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(Y)$ est fermé dans $\mathbb{R}^p$.*

Corollaire 42 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble*

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) > \lambda \right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les ensembles

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = \lambda \right\} \text{ et } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) \geq \lambda \right\}$$

sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

§2 Fonctions continues sur un fermé borné

Théorème 43 *Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et $X \subset A$ une partie fermée bornée. Alors f est bornée sur X et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

Une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est une **partie compacte** (la réciproque est fausse en dimension infinie).

Démonstration. Admis, c'est un théorème de seconde année. ∎

CHAPITRE 50

RAPPELS ET COMPLÉMENTS

50.6 TOPOLOGIE DE L'ESPACE $\mathbb{R}^2$

§1 Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce chapitre $\langle *, * \rangle$ désigne le produit scalaire canonique et $\|*\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, si $z = (x, y)$ et $w = (x', y')$, alors

$$\langle z, w \rangle = xx' + yy' \qquad \text{et} \qquad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $z, w \in \mathbb{R}^2$, $d(z, w) = \|z - w\|$ désigne la distance entre z et w.

Proposition 44 *Soit $z \in \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- $\|z\| = 0 \implies z = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ *(séparation).*
- $\|\lambda z\| = |\lambda|\|z\|$ *(homogénéité).*
- $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$ *(sous-additivité).*

Ces trois propriétés sont celle qui définissent une norme, d'une manière générale, sur un «espace vectoriel normé».

§2 Boule ouverte, boule fermée

Définition 45 Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B(a,r) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|z-a\| < r \right\}.$$

- La **boule fermé** ou **disque** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B_f(a,r) = D(a,r) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|z-a\| \leq r \right\}.$$

- La **sphère** ou **cercle** de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$S(a,r) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|z-a\| = r \right\}.$$

Définition 46 On dit que A est une partie **bornée** si A est inclue dans une boule, ou de manière équivalente si il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq r.$$

§3 Partie ouvertes, voisinages

Définition 47 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a,r) \subset A.$$

Proposition 48 *Un boule ouverte est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$.

Exemples 49

1. L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Le rectangle $]a,b[\times]c,d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

La notion d'ouvert permet de considérer des limites dans toutes les directions, ce qui généralise les limites à gauche et à droite.

Lemme 50 *Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in A$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall t \in]-\delta,\delta[, a + t\vec{v} \in A$$

Ce lemme caractérise d'ailleurs les parties ouvertes.

Définition 51 Soit $a \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est un **voisinage** de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $B(a,\eta) \subset A$.

Une partie ouverte est donc une partie qui est voisinage de chacun de ses points.

§4 Sous-ensembles remarquables

Étant donnée donnée une partie A de $\mathbb{R}^2$, les points de $\mathbb{R}^2$ se répartissent en deux ensembles disjoints

1. Il se peut tout d'abord qu'il existe une boule B de centre a et de rayon $r > 0$ telle que $B \cap A$ soit vide, auquel cas on dit que a est **extérieur** à A.

   Il est important de comprendre que si les points extérieurs à A sont évidemment «en dehors» de A, la réciproque est inexacte. Par exemple, les points extérieurs à une boule de centre a et de rayon r sont ceux qui vérifient l'inégalité stricte $|z - a| > r$.

2. Il se peut qu'au contraire toute boule B de centre a rencontre A ; on dit alors que a est **adhérent** à A. La notion de point adhérent généralise la notion d'extrémité d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

   Tout $a \in A$ est évidemment adhérent à A, mais la réciproque est fausse : les points adhérents à une boule quelconque sont ceux de la boule *fermée* correspondante.

Si un point a est extérieur à un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$, le complémentaire $\complement A = \mathbb{R}^2 \setminus A$ de A contient une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ de centre a ; on dit alors que a est **intérieur** à $\complement A$ dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, les points intérieurs à une boule B de centre a et de rayon r sont ceux de la boule *ouverte* de mêmes centre et rayon.

Il est en effet clair que si un point z est sur la circonférence limite, toute boule ouverte de centre z rencontre à la fois B et $\mathbb{R}^2 \setminus B$; il ne leur est donc ni intérieur ni extérieur, tout en étant adhérent aussi bien à B qu'à $\mathbb{R}^2 \setminus B$.

Ce raisonnement s'étend à un ensemble A quelconque : au partage des points de $\mathbb{R}^2$ en points extérieurs et points adhérents à A correspond un partage des points adhérents à A en points intérieurs et **points frontières** de A (ou point frontière du complémentaire de A : ce sont visiblement les même).

Définition 52 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.

1. On dit que A est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ si $\complement_{\mathbb{R}^2} A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Un point $a \in \mathbb{R}^2$ est dit **adhérent** à A si pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Autrement dit, si il existe des points de A arbitrairement proches de a.

Proposition 53 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Tous les points de A lui sont intérieurs si et seulement si A est ouverte.*
2. *Tous les points de A lui sont adhérents si et seulement si A est fermée.*

Exemples 54

1. L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^2$.
2. Un point de A est toujours adhérent à A.
3. L'ensemble des points adhérents au rectangle $]a, b[\times]c, d[$ est le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ (c'est-à-dire avec ses côtés et ses sommets).
4. L'ensemble des points adhérents au demi-plan ouvert (qui est un ouvert !) défini par l'inéquation $ax + by + c > 0$ est le demi-plan fermé défini par $ax + by + c \geq 0$.

5. Le carré $[0,1] \times [3,4[$ n'est ni un ouvert, ni un fermé de $\mathbb{R}^2$.

§5 Caractérisation séquentielle

Définition 55 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\ell \in \mathbb{R}^2$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle $\left(\|u_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 56 *La suite $(u_n) = (x_n, y_n)$ converge vers $\ell = (a,b)$ si, et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = b.$$

Théorème 57 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.*

- *Un point $a \in \mathbb{R}^2$ est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite (u_n) de $A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a.*
- *La partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est fermée si, et seulement si toute suite convergente (u_n) d'éléments de A a sa limite dans A.*

50.7 Notion d'homéomorphisme

Définition 58 Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to B$. On dit que f est un **homéomorphisme** si f est continue, bijective et de réciproque continue.

⚠ Un homéomorphisme n'est pas un morphisme.

Exemple 59 L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^\star \times]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est continue par composition et bijective. Mais sa réciproque n'est pas continue : on ne peut pas associer continûment à un point du plan distinct de l'origine un argument. En effet, si φ^{-1} était une réciproque continue de φ, alors on aurait

$$(1, -\pi+h) = \varphi^{-1}(\cos(-\pi+h), \sin(-\pi+h)).$$

Or, lorsque h tend vers 0, le premier membre tend ver $(1,-\pi)$ et le deuxième vers $\varphi^{-1}(\cos(-\pi), \sin(-\pi)) = \varphi^{-1}(\cos\pi, \sin\pi) = (1,\pi)$.
En revanche, $\psi : \mathbb{R}_+^\star \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, définie par la même formule que φ, est un homéomorphisme et sa réciproque est donnée par

$$\psi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

qui est manifestement continue par composition.