Chapter 1 Notations

Raisonnement et symbolisme mathématiques

Exercice 1.1

Démontrer que $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.

Solution 1.1

Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A \implies B$ est une écriture pour B ou (non A) ; ici A (la proposition $(1 = 2)$) est fausse, donc (non A) est vraie et B ou (non A) l'est également. Donc l'assertion $A \implies B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Exercice 1.2

Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \implies Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\implies$ ($R \implies S$).

Solution 1.2

1. P et non Q;
2. «non P ou Q» ce qui la même chose que «$P \implies Q$»;
3. (non P) ou ((non Q) ou (non R)) (on peut supprimer les parenthèses);
4. non P et (non Q ou non R) (ici les parenthèses sont importantes);
5. P et Q et R et non S;

Exercice 1.3

Écrire les affirmations suivantes en utilisant les symboles $\Longrightarrow$, $\geq$, $>$, $\neq$ et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.

2. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.

3. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

Solution 1.3

1. Cette affirmation s'écrit $x \geq 1 \Longrightarrow x > 2$. Celle-ci est signifie non$(x \geq 1)$ ou $(x > 2)$. Cette affirmation est donc vraie si, et seulement si $(x < 1 \text{ ou } x > 2)$.

2. Cette affirmation s'écrit $x > 2 \Longrightarrow x \geq 1$. Celle-ci est vraie si, et seulement si $x \in \mathbb{R}$.

3. Cette affirmation s'écrit $x \geq 1 \Longrightarrow x \neq 1$. Celle-ci est vraie si, et seulement si $x \neq 1$.

Exercice 1.4

Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.

2. Il existe un nombre réel qui est strictement supérieur à son carré.

3. Il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.

4. Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

Solution 1.4

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Cette assertion est vraie.

2. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$. L'exemple $x = \frac{1}{2}$ prouve que la proposition est vraie.

3. $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, p \geq n$. Cette assertion est évidement fausse. En effet, si un tel p existait, on aurait $p \geq p + 1$ et donc $0 \geq 1$.

4. C'est la négation de la précédente: $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, p < n$. Cette assertion est donc vraie.

Exercice 1.5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f ne prend que deux valeurs a et b distinctes.
5. La fonction f est une fonction impaire.

Solution 1.5

1. $\exists! x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
3. Voici trois possibilités parmis d'autres
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y).$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0).$$
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda.$$
4. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$(a \neq b) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = a \text{ ou } f(x) = b)).$$
5. L'ensemble de définition étant symétrique par rapport à 0, f impaire s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

Exercice 1.6

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

Solution 1.6

1. La proposition signifie que $x + y^2$ est toujours nul ; le contre-exemple $(x, y) = (1, 1)$ montre que cette proposition est fausse.

2. Le réel x étant donné, nous ne pouvons trouver $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y^2 = 0$ que si $x \leq 0$: par exemple, pour $x = 1$, il n'existe pas de réel y tel que $y^2 = -x = -1$. La proposition est donc fausse.

3. La proposition signifie que y^2 est constant quand y décrit $\mathbb{R}$; elle est évidemment fausse (On peut montrer que négation «$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 \neq 0$» est vraie). [1]

4. Le réel y étant donné, en posant $x = -y^2$, nous avons bien $x \in \mathbb{R}$ et $x + y^2 = 0$; la proposition est donc vraie.

5. L'exemple $(x, y) = (-1, 1)$ prouve que la proposition est vraie.

[1] Les questions **3.** et **4.** prouvent qu'on change le sens de la proposition en échangeant les symboles $\exists$ et $\forall$.

Exercice 1.7

Vrai ou Faux ? Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies \begin{cases} & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ \text{ou} & \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0. \end{cases}$$

Solution 1.7

Cette assertion est fausse. En effet, si l'on considère les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 : x \geq 0 \\ 9 : x < 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 23 : x \geq 0 \\ 0 : x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = \begin{cases} 0 \cdot 9 : x \geq 0 \\ 23 \cdot 0 : x > 0 \end{cases} = 0.$$

L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0$$

est donc vraie.

Néanmoins l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ est fausse puisque $f(-3) = 9$. De même l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ est fausse puisque $g(5) = 23$. Leur disjonction

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0).$$

est donc également fausse.

Ainsi l'implication de l'énoncé est fausse ($(vrai \implies faux)$ est fausse).

Remarquez qu'il est par contre exact d'écrire

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)).$$

Exercice 1.8 *Les feux de l'amour*

Dans ce problème, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des homme et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Définissons la relation «être amoureux»: pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, notons $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$. Ainsi $h \not\heartsuit f$ signifiera que h n'aime pas f.

À titre d'exemple, exprimons la phrase «chaque homme est amoureux d'une femme». Nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f. Cela s'écrit:

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$$

On rappelle qu'en mathématique, «une» signifie «au moins une», et non pas «exactement une».

Dans les exercices qui suivent, il y a généralement plusieurs réponses possibles. Dès que la réponse n'est pas directement évidente, expliquez-la. Par ailleurs, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

Partie A

Thème Écrire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

A1. Tous les hommes aiment toutes les femmes.

A2. Chaque femme aime un unique homme.

A3. Certaines femmes aiment deux hommes.

A4. Il existe une femme amoureuse d'elle-même.

A5. Certains hommes aiment un homme et une femme.

A6. Tout le monde aime tout le monde.

Partie B

Version Que signifient, dans un français naturel, les assertions suivantes?

B1. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f.$

B2. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$

B3. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h.$

B4. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h).$

B5. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \not\heartsuit h).$

B6. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F} h \heartsuit f) \text{ et } (\exists f \in \mathcal{F}, f \heartsuit h).$

Partie C

Négations On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny, et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale (B, J, M, D).

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes, puis écrire la phrase et sa négation à l'aide de quantificateurs.

C1. Brenda aime Mike et Dick.

C2. Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.

C3. Jenny n'aime aucun homme.

C4. Brenda aime une femme.

C5. Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

C6. Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Jenny.

Indication. Dans cet partie, écrire la phrase en quantificateurs vous aidera à écrire la négation. En effet, écrire la négation d'une phrase en quantificateurs est un procédé purement mécanique et facile à retenir (remplacer les $\forall$ par des $\exists$, etc...).

Partie D

Implications

D1. Traduire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

(a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.

(b) Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.

(c) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.

(d) Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.
Vous êtes libre du sens précis que vous donnerez au mot «homosexuel» mais vous l'expliquerez dans votre réponse.

D2. Que signifient les assertions suivantes?

(a) $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \implies M \heartsuit f$.

(b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \implies (\forall f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f)$.

(c) $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \implies J \not\heartsuit h$.

(d) $\forall h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \implies h = M$.

(e) $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.

(f) $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.

Partie E

Négation d'implication Écrire la négation des assertions de la partie 4.

Solution 1.8 *Les feux de l'amour*

Fait!

Exercice 1.9

Que peut-on dire de l'ensemble $E = \{ x \in A \mid P(x) \}$ lorsque

1. «$\forall x \in A, P(x)$» ?

2. «$\exists x \in A, P(x)$» ?

Solution 1.9

1. $E = A$.

2. $E \neq \emptyset$.

Exercice 1.10

Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $(A \subset C \underline{\text{ et }} B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.
3. $(A \subset B \underline{\text{ et }} A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.
4. $(A \subset B) \implies (A \cap C \subset B \cap C)$.
5. $(A \subset B) \implies (A \cup C \subset B \cup C)$.
6. $(A \subset B \underline{\text{ et }} C \subset D) \implies (A \cup C \subset B \cup D)$.
7. $(A \subset B \underline{\text{ et }} C \subset D) \implies (A \cap C \subset B \cap D)$.

Solution 1.10

1. Pour tout x,
$$x \in A \text{ et } x \in B \implies x \in A \implies x \in A \text{ ou } x \in B.$$
Ce qui montre $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

2. Supposons $A \subset C$ et $B \subset C$. Soit $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$.

Si $x \in A$, alors $x \in C$ car $A \subset C$.

Si $x \in B$, alors $x \in C$ car $B \subset C$.

Dans tous les cas, $x \in C$. On a montré
$$\forall x \in A \cup B, x \in C,$$
c'est-à-dire $A \cup B \subset C$.

Réciproquement, si $A \cup B \subset C$, on a d'après (1.)
$$A \subset A \cup B \subset C \text{ et } B \subset A \cup B \subset C.$$
On a donc $A \subset C$ et $B \subset C$.

Conclusion

$(A \subset C \underline{\text{ et }} B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.

3. Supposons $A \subset B$ et $A \subset C$. Alors, si $x \in A$, on a $x \in B$ et $x \in C$. D'où $A \subset B \cap C$.

Réciproquement, si $A \subset B \cap C$, on a $A \subset B$ car $B \cap C \subset B$ et $A \subset C$ car $B \cap C \subset C$.

Conclusion

$(A \subset B \underline{\text{ et }} A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.

4. Supposons $A \subset B$ et montrons que $A \cap C \subset B \cap C$.

Soit $x \in A \cap C$, c'est-à-dire $x \in A$ et $x \in C$. Puisque $x \in A$ et $A \subset B$, on a $x \in B$. De plus, $x \in C$, d'où $x \in B \cap C$.

Conclusion

On a donc montré
$$\forall x \in A \cap C, x \in B \cap C,$$
c'est-à-dire $A \cap C \subset B \cap C$.

5. Supposons $A \subset B$ et montrons que $A \cup C \subset B \cup C$.
Soit $x \in A \cup C$, c'est-à-dire $x \in A \text{ ou } x \in C$.

Si $x \in A$, on a $x \in B$ puisque $A \subset B$, et donc *a fortiori* $x \in B \cup C$.

Si $x \in C$, on a $x \in B \cup C$ puisque $C \subset B \cup C$.

Dans tous les cas, $x \in B \cup C$.

Conclusion

On a montré
$$\forall x \in A \cup C, x \in B \cup C,$$
c'est-à-dire $A \cup C \subset B \cup C$.

6. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$ et montrons que $A \cup C \subset B \cup D$.
Soit $x \in A \cup C$, c'est-à-dire $x \in A \text{ ou } x \in C$.

Si $x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subset B$.

Si $x \in C$, alors $x \in D$ car $C \subset D$.

Dans tous les cas, $x \in B \text{ ou } x \in D$, c'est-à-dire $x \in B \cup D$.

Conclusion

On a montré
$$\forall x \in A \cup C, x \in B \cup D,$$
c'est-à-dire $A \cup C \subset B \cup D$.

7. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$ et montrons que $A \cap C \subset C \cap D$.
Soit $x \in A \cap C$, c'est-à-dire $x \in A \text{ et } x \in C$.
Puisque $x \in A$ et $A \subset B$, on a $x \in B$. Puisque $x \in C$ et $C \subset D$, on a $x \in D$.
Finalement, $x \in B \text{ et } x \in D$, c'est-à-dire $x \in B \cap D$.

Conclusion

On a montré
$$\forall x \in A \cap C, x \in B \cap D,$$
c'est-à-dire $A \cap C \subset B \cap D$.

Exercice 1.11

Lesquelles des assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $2 \in \mathbb{N}$.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$.
3. $2 \subset \mathbb{N}$.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Solution 1.11

1. $2 \in \mathbb{N}$ est vraie, 2 est un entier.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$ est fausse, $\{ 2 \}$ n'est pas un entier.
3. $2 \subset \mathbb{N}$ est fausse. Elle signifie $\forall x \in 2, x \in \mathbb{N}$ qui ne signifie pas grand chose.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$ est vraie. Elle signifie $\forall x \in \{ 2 \}, x \in \mathbb{N}$ et on a bien $x \in \{ 2 \} \implies x = 2 \implies x \in \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$ est fausse. Elle signifie $\forall x \in \{ \{ 2 \} \}, x \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$, ce qui est faux.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est fausse. Elle signifie $2 \subset \mathbb{N}$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est vraie. Elle signifie $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est fausse. Elle signifie $\forall x \in 2, x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'a pas beaucoup de sens.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est fausse. Elle signifie $\forall x \in \{ 2 \}, x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on a pas $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est vraie. Elle signifie $\forall x \in \{ \{ 2 \} \}, x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on a bien $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.12

Écrire en extension l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; z^3 = \overline{z} \right\}.$$

Solution 1.12

Soit $z \in E$. On a $z^3 = \overline{z}$, donc nécessairement $\left|z^3\right| = \left|\overline{z}\right|$, et puisque $z \neq 0$,

$$|z|^3 = |z| \text{ d'où } |z| = 1.$$

Puisque $|z| = 1$, on a $z \in \mathbb{U}$ et $\overline{z} = \frac{1}{z}$. D'où

$$z^3 = \overline{z} \implies z^4 = 1 \implies z \in \mathbb{U}_4.$$

Finalement $E \subset \mathbb{U}_4 = \{ 1, i, -1, -i \}$.

Réciproquement,

$$1^3 = 1 = \overline{1} \qquad i^3 = -i = \overline{i} \qquad (-1)^3 = -1 = \overline{-1} \qquad (-i)^3 = i = \overline{-i}.$$

On a donc $\mathbb{U}_4 \subset E$.

Conclusion

$E = \mathbb{U}_4 = \{ 1, i, -1, -i \}$.

Exercice 1.13

Soient a, b deux réels avec $a < b$. Prouver par double inclusion que

$$[a, b] = \{ (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \} .$$

Solution 1.13

Si $a = b$, les deux ensembles sont égaux à $\{ a \}$.
On se place donc dans le cas où $a < b$ et on note $B = \{ (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}$.

Soit $x \in B$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1-\lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b-a)$. Or $b - a > 0$, donc

$$0 \leq \lambda(b-a) \leq b-a \text{ puis } a \leq a + \lambda(b-a) \leq b,$$

c'est-à-dire $x \in [a, b]$. On a donc $B \subset [a, b]$.

Réciproquement, soit $x \in [a, b]$. On pose $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$. Puisque $a \leq x \leq b$, on a $0 \leq x - a \leq b - a$, d'où

$$0 \leq \lambda = \frac{x-a}{b-a} \leq 1 \text{ et } (1-\lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b-a) = x.$$

Ainsi, $x \in B$. On a donc $[a, b] \subset B$.

Conclusion

Par double inclusion, on a $[a, b] = \{ (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}$.

Exercice 1.14

Calculer $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(E\right)\right)$ lorsque $E = \{ 0, 1 \}$.

Solution 1.14

On a

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \Big\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(E)\right) = \Big\{ &\emptyset, \big\{ \emptyset \big\}, \{ \{ 0 \} \}, \{ \{ 1 \} \}, \{ \{ 0, 1 \} \}, \big\{ \emptyset, \{ 0 \} \big\}, \big\{ \emptyset, \{ 1 \} \big\}, \big\{ \emptyset, \{ 0, 1 \} \big\}, \\ &\{ \{ 0 \}, \{ 1 \} \}, \{ \{ 0 \}, \{ 0, 1 \} \}, \{ \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \}, \big\{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 1 \} \big\}, \\ &\big\{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 0, 1 \} \big\}, \big\{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \big\}, \{ \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \}, \\ &\big\{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \big\} \Big\}.\end{aligned}$$

Exercice 1.15

1. Soit $E = \{ -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \}$.
   Donner une définition de l'ensemble E sans avoir à énumérer ses éléments.

2. Même question avec l'ensemble $F = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$.

3. Décrire comme ci-dessus l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

Solution 1.15

1. $E = \{ 5k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ et } -7 \leq k \leq 7 \} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid -35 \leq n \leq 35 \text{ et } 5 \text{ divise } n \}$.

2. $F = \left\{ k^2 \mid k \in [\![1, 10]\!] \right\} = \left\{ k^2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq k \leq 10 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{N}^\star, x \leq 10 \text{ et } y = x^2 \right\}$.

3. $I = \{ 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 1 \pmod 2 \}$.

Exercice 1.16

Soit X et Y deux ensembles. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$ est

$$X \cap Y = X \cup Y.$$

Solution 1.16

Exercice 1.17

Quel est le produit cartésien des ensembles

$$A = \{\ \text{as}, \text{roi}, \text{dame}, \text{valet}, 10, 9, 8, 7\ \} \qquad \text{et} \qquad B = \{\ \text{cœur}, \text{carreau}, \text{trèfle}, \text{pique}\ \}\ .$$

Solution 1.17

Un jeu de 32 cartes

$$A \times B = \{\ (\text{as}, \text{cœur}), (\text{as}, \text{carreau}), \dots, (7, \text{trèfle}), (7, \text{pique})\ \}\ .$$

Exercice 1.18

Soit A et B deux ensembles. On définit leur différence symétrique par

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Comparer les ensembles $A\Delta(B \cup C)$ et $(A\Delta B) \cup (A\Delta C)$.

2. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\Delta B = A\Delta C) \iff (B = C).$$

Solution 1.18

1. Soit x un élément quelconque. On a

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \cup C$	$x \in A\Delta(B \cup C)$	$x \in A\Delta B$	$x \in A\Delta C$	$x \in (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F

À finir...

Exercice 1.19

On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y<1 \right\},\\
A_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x+y|<1 \right\},\\
A_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y|<1 \right\},\\
A_4 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y>-1 \right\},\\
A_5 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-y|<1 \right\}.
\end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.

2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|| <1) \iff |x|+|y|<1.$$

Solution 1.19

Exercice 1.20

Soient A et B des ensembles. Donner les rédactions des énoncés du type

1. $P \implies Q$, en distinguant raisonnement direct et par contraposée, par l'absurde.

2. $P \iff Q$.

3. $A \subset B$.

4. $A = B$.

5. $A \cap B = \{ 0 \}$.

6. $\forall x \in A, P(x)$.

7. $\exists x \in A, P(x)$.

8. $\exists! x \in A, P(x)$.

9. $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$, où expr_1 et expr_2 sont deux expressions données.

10. $(i) \iff (ii) \iff (iii)$.

Solution 1.20

1.
- *Raisonnement direct.* «Supposons P, alors… donc Q.»
- *Raisonnement par contraposée.* «Supposons non Q, alors… donc non P.»
- *Raisonnement par l'absurde.* «Sachant que P est vraie. Supposons que Q soit fausse, c'est-à-dire …, alors …, ce qui est absurde donc Q est vraie.»

2. En général par double implication $P \implies Q$ et $Q \implies P$, par l'un des trois types de raisonnement ci-dessus). Parfois, on peut raisonner directement par équivalences, par exemple lors de la résolution d'une équation ; pour une démonstration assez longue, c'est assez rare (et plutôt dangereux…).

3. «Soit $x \in A$, alors… donc $x \in B$.»

4. Souvent par double inclusion. «Soit $x \in A$, alors… donc $x \in B$.» Puis : «Soit $x \in B$, alors… donc $x \in A$.»

5. Par double inclusion. «On a bien $0 \in A$ et $0 \in B$, donc $\{ 0 \} \subset A \cap B$. Soit $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, c'est-à-dire… donc $x = 0$. On a donc $A \cap B \subset \{ 0 \}$ et par double inclusion $A \cap B = \{ 0 \}$.»

6. «Soit $x \in A$, montrons que $P(x)$», ... «d'où $P(x)$».

7. «On cherche $x \in A$ tel que $P(x)$», ... «On pose $x =$ ..., on a donc $x \in A$ et $P(x)$».

8.
- On commence par construire un tel x, ou montrer qu'un tel x existe : «On pose $x =$ ..., alors $x \in A$ et $P(x)$». Puis : «Soit $x, x' \in A$ tels que $P(x)$ et $P(x')$, alors… , donc $x = x'$.»
- On effectue un raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante.
  - CN. On cherche le(s) candidat(s) pour x. «Supposons qu'il existe x tel que $P(x)$. Alors… donc $x =$ ....»
  - CS. On vérifie que le candidat (ou un seul des candidats) vérifie $P(x)$. «Posons $x =$ ..., alors $x \in A$ et $P(x)$ est vraie.

9. On part d'une expression pour arriver à l'autre «$\text{expr}_1 = \cdots = \text{expr}_2$». Parfois on trouve une expression intermédiaire commune : «$\text{expr}_1 = \cdots = \text{expr}_3$ et $\text{expr}_2 = \cdots = \text{expr}_3$, d'où $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$».

10. «Montrons $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$.» En choisissant le cycle le plus facile.