Chapter 35 Séries numériques

35.1 Convergence d'une série

Exercice 35.1

Après avoir calculé les sommes partielles, étudier la convergence de

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3-n}{n(n+1)(n+2)}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$.

Exercice 35.2

Montrer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Exercice 35.3

Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 35.4

1. Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 35.5

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contre-exemple dans ce dernier cas.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ et $\sum(u_n+v_n)$ ont même nature.
2. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes deux.
3. si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+m}$ converge aussi et a la même somme.
4. Quel que soit $c \in \mathbb{R}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} cu_n$ est convergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
5. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n u_n = 0$.
6. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Exercice 35.6

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contrexemple dans ce dernier cas.

1. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est majorée.

2. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles soient toutes nulles.
3. Pour qu'une série converge, il est suffisant que ses sommes partielles soient toutes nulles.
4. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles tendent vers 0.
5. Pour qu'une série converge, il est suffisant que la suite de ses sommes partielles soit décroissante.
6. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que la suite de ses sommes partielles soit croissante.
7. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est bornée.
8. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
9. Une série converge si la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
10. Une série converge si la suite de ses sommes partielles est constantes.

Exercice 35.7

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, Claude procède comme suit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots\\
&\qquad = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots\\
&\qquad = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-\dots\\
&\qquad = 1.
\end{aligned}$$

tandis que Dominique utilise la méthode suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots\\
&\qquad = \left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\dots\\
&\qquad = 2-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\right)-\dots\\
&\qquad = 2.
\end{aligned}$$

L'un des deux a-t-il raison ? Si oui, lequel ?

Exercice 35.8 *Séries géométriques dérivées*

On fixe un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq p} \binom{k}{p} x^k$ converge.
2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
3. Calculer $x\left(S_p + S_{p+1}\right)$.
4. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$ (série géométrique dérivée).

Exercice 35.9

Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs. Montre que si

- $\sum u_n$ est convergente,
- (u_n) est une suite décroissante,

alors

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

35.2 Séries à termes positifs

Exercice 35.10

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

1. $\dfrac{|\cos n|}{n^2}$
2. $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}} - \sqrt{n}$
3. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\ln \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}$
5. $\dfrac{1}{n^2 \ln n}$
6. $\dfrac{\ln n}{n}$
7. $\dfrac{n!}{n^n}$
8. $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 35.11

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^\star$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux

1. $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$,
2. $v_n = e^{a_n} - 1$,
3. $w_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$,
4. $x_n = a_n^2$.

Exercice 35.12

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

1. $e^{-\sqrt{n}}$
2. $\dfrac{\ln n}{n^2}$
3. $n^{1/n^2} - 1$
4. $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$
5. $\dfrac{1}{n \ln n}$
6. $\dfrac{1}{n (\ln n)^2}$.

Exercice 35.13

Soit $\sum u_n$ la série définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n = 2^p, p \in \mathbb{N}^\star, \\ \frac{1}{n^2} & n \neq 2^p. \end{cases}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Est-il exact que la convergence d'une série $\sum u_n$ entraîne le fait que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 35.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictements positifs. On suppose

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, 1[\,.$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right) u_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

3. Soient deux réels $\alpha > 0$ et $a > 1$. Déterminer la nature des trois séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^\alpha}{a^n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 35.15

Soient $a > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{1+ax} - 1$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x) - x$ est du signe de $x(a-2-x)$. Déterminer les points fixes de f ainsi que les intervalles stables. Tracer le graphe de f pour différentes valeurs de a.

2. On suppose $a < 2$ et on considère la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

   Montrer que $u_n \to 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. Que dire de la suite (u_n) si $a > 2$?

Exercice 35.16

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

   Déterminer un équivalent de la suite (S_n).

2. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

   Déterminer un équivalent de la suite (R_n).

Exercice 35.17

Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = n^\alpha \int_0^{\pi/n} (\sin x)^\beta \, \mathrm{d}x.$$

35.3 Séries alternées

Exercice 35.18
Pour tout $n \geq 2$, posons

$$a_n = \frac{1}{n+(-1)^n} \qquad \text{et} \qquad u_n = (-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.
Exercice 35.19
Étudier la nature des deux séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Commenter les résultats.

35.4 Séries absolument convergentes

Exercice 35.20
Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La réel γ est appelé la constante d'Euler.
Exercice 35.21
Soit $\sum x_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une série $\sum y_n$ absolument convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + y_n.$$

1. Montrer que $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + z_n$ où z_n est le terme général d'une série convergente.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $x_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.
3. Exemple : Nature de la série de terme général $\frac{n^n}{n!\,e^n}$?

Exercice 35.22
Étudier si la série de terme général

$$u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$$

converge.
Exercice 35.23
Étudier si la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge.
Exercice 35.24
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

avec un produit de Cauchy.

Exercice 35.25

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < 1$. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

avec un produit de Cauchy.

Exercice 35.26

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-b}.$$