Génération et liberté

Aperçu

1. Familles et parties génératrices
2. Liberté
3. Bases
4. Généralisation aux familles quelconques

D 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A admet un plus petit élément (pour l'inclusion). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par A**, il se note $\mathrm{Vect}(A)$, et on a

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{W \text{ sev de } E \\ A \subset W}} W .$$

Si $\mathrm{Vect}\, A = E$, on dit que A est une **partie génératrice** de E.

E 2 Soit $x \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x est

$$\operatorname{Vect}\{\ x\ \} = \mathbb{K}x.$$

En effet, si un sous-espace vectoriel V de E contient x, il contient tous les multiples de x car il est stable par multiplication externe ; on a donc $\mathbb{K}x \subset V$.
Or nous avons vu que $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus $x \in \mathbb{K}x$. Le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x est donc $\mathbb{K}x$, autrement dit $\operatorname{Vect}(\{\ x\ \}) = \mathbb{K}x$.

E 3 Le sous-espace vectoriel engendré par la partie vide est le sous-espace vectoriel nul

$$\operatorname{Vect} \emptyset = \{0\}.$$

P 4 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soit A et B deux parties de E. Alors*

1. $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.
2. *Si V est un sous-espace vectoriel de E et $A \subset V$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset V$.*
3. $A = \mathrm{Vect}(A)$ *si, et seulement si, A est un sous-espace vectoriel de E.*
4. $A \subset B \implies \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

E 5 Soit $x, y \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x et y est

$$\mathrm{Vect}\,\{\, x, y \,\} = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{\, \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,\}\,.$$

P 6 *Soit A et B sont deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors*

$$\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}\,(A \cup B)\,.$$

D 7 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(v_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par l'image $\left\{ v_i \mid i \in I \right\}$ de cette famille.
- On dit que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E.

Dans cette partie, nous ne considérons que des famille finie de vecteurs. Le cas général est traité dans la section??.

T 8 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$:*

$$\mathrm{Vect}\left(v_1, v_2, \dots, v_p\right) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^k \right\}.$$

C 9 *Soit $v_1, v_2, \dots v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*
Si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$ et $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p$, Alors $v + w$ et αv ($\alpha \in \mathbb{K}$) sont également combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$.

E 10 L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$. On a

$$S = \left\{ sv_1 + tv_2 \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 = \operatorname{Vect}\left\{ v_1, v_2 \right\}.$$

E 11 L'espace des solutions de l'équations différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est

$$\left\{ y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; y'' + 2y' + y = 0 \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ x \mapsto e^x, x \mapsto xe^x \right\}.$$

E 12 Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v = (1, 1, 2)^T \qquad \text{et} \qquad w = (-1, 2, 3)^T.$$

Un vecteur $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si le système linéaire suivant, d'inconnues $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a au moins une solution

$$\alpha v + \beta w = b \iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ \alpha + 2\beta &= y \\ 2\alpha + 3\beta &= z \end{cases}$$

Ce système est successivement équivalent au systèmes

E 12 Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v = (1,1,2)^T \qquad \text{et} \qquad w = (-1,2,3)^T.$$

Un vecteur $b = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si le système linéaire suivant, d'inconnues $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ a au moins une solution

$$\alpha v + \beta w = b \iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ \quad 3\beta &= y - x \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad 5\beta &= z - 2x \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta &= x \\ \quad 3\beta &= y - x \\ \quad\ 0 &= 5(y-x) - 3(z-2x) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

Pour qu'il y ait une solution (α,β), il faut et il suffit que les égalités de compatibilité soient satisfaites.

E 12 Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v = (1, 1, 2)^T \qquad \text{et} \qquad w = (-1, 2, 3)^T.$$

Un vecteur $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si le système linéaire suivant, d'inconnues $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a au moins une solution
Le sous-espace vectoriel V a donc pour équation

$$x + 5y - 3z = 0.$$

Par exemple, le vecteur $(5, 2, 5)^T$ appartient à V et $(1, 2, 3)^T$ n'y appartient pas.
On peut d'ailleurs vérifier que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D 13 On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qu'il est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie et on note alors $\dim E < \infty$. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et on note $\dim E = \infty$.

E 14

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

D 15

- On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel non nul engendré par un seul élément.
- On appelle **plan vectoriel** un espace vectoriel engendré par deux éléments et qui n'est pas une droite vectorielle.

Tout élément non nul d'une droite vectorielle l'engendre. Deux éléments quelconques d'une droite vectorielle sont proportionnels. Enfin, on verra plus loin que deux éléments non proportionnels d'un plan vectoriel l'engendrent.

L 16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E et $j \in [\![1, p]\!]$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, tels que*

$$\alpha_j \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E;$$

2. *le vecteur v_j est combinaison linéaire des vecteurs v_i, avec $i \neq j$.*

D 17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$.

- La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **libre** si et seulement si

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E \implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0.$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est **liée**, c'est-à-dire

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0) \text{ et } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0_E.$$

E 18 Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.
En effet, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ 2\alpha - \beta & = 0 \end{cases}$$

Et ce système homogène a pour unique solution $\alpha = 0, \beta = 0$. Ainsi, les vecteurs v et w sont linéairement indépendants.

T 19 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que les vecteurs

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants en écrivant une relation de dépendance linéaire non triviale entre p et q.

E 20 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

sont linéairement dépendants. En effet (vérifiez!),

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Remarquons que l'on peut également écrire $v_3 = 2v_1 + v_2$.

P 21 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. Alors la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des $n-1$ autres.*

C 22 *Deux vecteurs forment une famille liée si, et seulement si l'un est un multiple scalaire de l'autre.*

E 23 Les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (2, 1, 5)$ sont linéairement indépendants.

T 24 Obtenir une relation de dépendance linéaire pour les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3) \qquad v_2 = (2, 1, 5) \qquad v_3 = (4, 5, 11).$$

T 25 Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où e_i est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ème qui vaut 1. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Il est également utile d'avoir en tête les résultats suivants.

P 26

1. *Tout famille extraite d'une famille libre est une famille libre.*
2. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

Il est exact que si la famille (u, v, w) est libre, alors les familles (u, v), (u, w) et (v, w) le sont également. Mais la réciproque est fausse.

E 27 Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

E 28 Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer quelles familles sont libres.

$$L_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$L_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille L_2 est libre car aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre. La famille L_3 est par contre liée (Test). La famille L_3 est une sous-famille de L_4 et L_1; ces deux familles sont donc également liées.

T 29 Montrer que L_3 est liée. Écrire une relation de dépendance linéaire non triviale. Écrire l'un des vecteur comme combinaison linéaire des 2 autres.

T 30 *Soit* $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \in E^p$ *une famille libre de vecteurs de* E *et soit* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$ *des scalaires tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p,$$

alors

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \ldots\ldots \qquad \alpha_p = \beta_p.$$

T 31 Montrer le!

R Qu'implique le théorème pour un vecteur v, combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, s'écrivant

$$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_p v_p?$$

Le théorème affirme que *si* un vecteur v est combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants, cette écriture est *unique*.

T 32 *Soit* $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ *une famille libre d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et* $w \in E$.
Alors la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p, w)$ *est libre si, et seulement si,* w *n'est pas combinaison linéaire de* $v_1, v_2, \dots, v_p$*, c'est-à-dire* $w \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Supposons que la famille $S = (v_1, \ldots, v_p)$ engendre l'espace vectoriel V, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(S) = V$.

- Si S est libre, alors une sous famille de S n'engendre pas V. En effet, si l'on supprime un vecteur, disons v_i, alors la sous famille de $p-1$ vecteurs ne peut engendrer V puisque v_i (qui appartient à V) n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Si S est liée, alors un vecteur v_i est combinaison linéaire des autres. Si l'on supprime le vecteur v_i dans la famille S, la nouvelle famille reste une famille génératrice.
  En effet, formons la famille $T = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p)$ (il manque v_i), alors $v_i \in \mathrm{Vect}(T)$ et plus généralement $\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \} \subset \mathrm{Vect}(T)$. Puisque S engendre V, on obtient

$$V = \mathrm{Vect}\,\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \} \subset \mathrm{Vect}(T) \subset V$$

  c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(T) = V$.

D 33 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, et seulement si

- La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une famille libre
- et la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ engendre E, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ou encore, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une **base** de E si, et seulement si tout vecteur $v \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\forall v \in E, \exists! \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \in \mathbb{K}^n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v.$$

Par convention, on dira l'espace vectoriel $\{ 0 \}$ admet pour base la famille vide $\mathcal{F} = (\quad)$.

E 34 Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où e_i est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ème qui vaut 1. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Nous avons déjà montré que la famille $\mathcal{B}$ était libre. De plus, il est facile de voir que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{K}^n$, puisque tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ s'écrit

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

c'est-à-dire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelée la **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.

E 35 Déterminons une base de W, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\}.$$

Si $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u \in W \iff x + y - 3z = 0 \iff x = -y + 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff u = y \cdot v + z \cdot w \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a bien $v, w \in W$. L'équivalence précédente montre que les vecteurs $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$ engendrent W. La famille (v, w) est également libre. Cela se montre facilement grâce aux coefficients 0 et 1, si $\alpha v + \beta w = 0$, on a directement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

E 36 La famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.
On peut montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Nous allons plutôt montrer que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b.$$

Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque $\det(A) \neq 0$. L'équation ci-dessus admet donc une unique solution, c'est-à-dire que b s'écrit de manière unique

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b$$

L 37 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale de E, c'est-à-dire que si l'on considère une sous-famille de $\mathcal{B}$ où l'un des v_i est supprimé, la nouvelle famille n'est plus génératrice.*

T 38 **Théorème de la base extraite**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Plus généralement, de toute partie génératrice $\mathcal{G} \subset E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, on peut extraire une famille génératrice finie, et donc également extraire une base.

Démonstration. Une version plus générale de ce théorème, le théorème de la base incomplète, sera démontré ultérieurement. Donnons une esquisse de la démonstration, qui explicite une manière d'obtenir une base à partir d'une partie génératrice finie qui contient k vecteurs

$$S = \{ w_1, w_2, \dots, w_k \} .$$

Si les vecteurs de S sont liés, alors l'un des vecteur est combinaison linéaire des $k-1$ autres. L'ensemble S_1 obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble S engendre toujours E. Si les vecteurs de S_1 sont linéairement indépendant, ils forment une base.
Sinon, on répète le processus: l'un des $k-1$ vecteurs est combinaison linéaire des $k-2$ autres. L'ensemble S_2 obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble S_1 engendre toujours E. Si les vecteurs de S_2 sont linéairement indépendant, ils forment une base.
On répète ainsi le processus jusqu'à obtenir une partie génératrice de E contenant des vecteurs linéairement indépendants... ∎

T 38 **Théorème de la base extraite**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Plus généralement, de toute partie génératrice $\mathcal{G} \subset E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, on peut extraire une famille génératrice finie, et donc également extraire une base.

T 39 *Tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ admet une base.*

D 40 **Coordonnées d'un vecteur**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E. Étant donné v un vecteur de E, il se décompose dans la base S sous la forme

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les **coordonnées** de v relativement à la base S.
On appelle **matrice colonne des coordonnées de v relativement à la base S** la matrice

$$\mathrm{Coord}_S(v) = M_S(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

T 41 *L'application Coord_S qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base S est linéaire.*

E 42 On considère les familles $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les familles, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur $v = (2, -5)^T$ dans chacune de ces bases sont

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En effet, $v = 2e_1 - 5e_2$: dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées de v sont exactement ses coefficients.
Dans la base $\mathcal{S}$, on obtient les coordonnées de v en remarquant (ou en résolvant $\alpha v_1 + \beta v_2 = v$) que

$$v = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

T 43 Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\},$$

admet pour base $\mathcal{B} = (v, w)$ avec $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$.
Montrer que le vecteur $c = (5, 1, 2)^T$ appartient à W et déterminer ses coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$.

T 44 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. L'application*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \to & E \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \end{array}$$

est linéaire.

- *L'application φ est injective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.*
- *L'application φ est surjective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice. Plus précisément,*

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right).$$

- *L'application φ est bijective si, et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E. Dans ce cas, la bijection réciproque de φ est l'application $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}$ qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{S}$.*

C 45 *L'application $\mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}$ qui à un vecteur $v \in E$ associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{S}$ est linéaire.*

D 46 Soit I un ensemble quelconque et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires indexée par I.

- On appelle **support** de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\left\{ j \in I \;\middle|\; \lambda_j \neq 0 \right\}$.
- On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **à support fini** lorsque son support est fini.

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini de $\mathbb{K}^I$.

P 47 *L'ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ des familles de scalaire indexées par I à support fini est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^I$.*

D 48 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. Soit par ailleurs $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini. On définit la somme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in J} \lambda_i v_i,$$

où J est le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.

D 49 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit qu'un vecteur v de E est combinaison linéaire de la famille $(v_i)_{i\in I}$, s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires, à support fini, telle que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i.$$

E 50 Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

P 51 *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_i:*

$$\mathrm{Vect}(v_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

R Lorsque l'on dispose d'une partie A, on peut indexer ses éléments par elle-même. On peut alors écrire

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a\in A} \lambda_a a \;\middle|\; (\lambda_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.$$

D 52 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit que cette famille est **libre** lorsque

$$\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0\right) \implies \big(\forall i \in I, \alpha_i = 0\big).$$

Sinon, la famille est dite **liée**.

R La famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre, si, et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

D 53 Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E indexée par l'ensemble I. On dit que cette famille est une **base** de E lorsque

$$\forall v \in E, \exists! (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = v.$$

E 54 La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.