

# ♪ 13 Dénombrement

## 13.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

## 13.2 Ensembles finis

### Solution 13.1

Les paires d'entiers dont la somme fait  $2n + 1$  sont

$$\{1, 2n\}, \{2, 2n - 1\}, \{3, 2n - 2\}, \dots, \{n, n + 1\}.$$

Il y a  $n$  paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et  $2n$  apparaît dans une et une seule paire. D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, les  $n + 1$  éléments de  $X$  ne peuvent être dans des paires différentes. Il existe donc deux éléments de  $X$  dans la même paire, et leur somme fait  $n + 1$ .

### Solution 13.2

### Solution 13.3

Pour  $X \subset E$ , on note  $s(X)$  la somme des éléments de  $X$ . On a

$$s(\emptyset) = 0 \leq s(X) \leq s(E) \leq 90 + 91 + \dots + 99 = 945.$$

Il y a  $2^{10} - 1 = 1023$  parties non vides  $X$  de  $E$ . Le principe des tiroirs et des chaussettes permet d'affirmer qu'il existe deux parties distinctes de  $E$ ,  $X$  et  $Y$  telles que  $s(X) = s(Y)$ .

On ne peut avoir  $X \subsetneq Y$  car sinon  $s(X) < s(Y)$ . De même,  $Y \subsetneq X$ .

Posons  $A = X \setminus Y$  et  $B = Y \setminus X$ . Ces deux parties sont donc non vides et disjointes. On peut réécrire  $X$  et  $Y$  sous la forme d'unions disjointes  $X = (X \cap Y) \cup A$  et  $Y = (X \cap Y) \cup B$ . On a donc

$$s(X) = s(X \cap Y) + s(A) \quad \text{et} \quad s(Y) = s(X \cap Y) + s(B)$$

et donc  $s(A) = s(B)$ .

### Solution 13.4

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition.

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

### Solution 13.5

Notons  $E$ ,  $H$ ,  $M$  et  $S$  les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne

$$\begin{array}{llll} \text{card}(E) = 800, & \text{card}(H) = 300, & \text{card}(S) = 352, & \text{card}(M) = 424, \\ \text{card}(E) = 800, & \text{card}(H) = 300, & \text{card}(S) = 352, & \text{card}(M) = 424, \\ \text{card}(H \cap S) = 188, & \text{card}(H \cap M) = 166, & \text{card}(S \cap M) = 208, & \text{card}(H \cap M \cap S) = 144. \\ \text{card}(H \cap S) = 188, & \text{card}(H \cap M) = 166, & \text{card}(S \cap M) = 208, & \text{card}(H \cap M \cap S) = 144. \end{array}$$

On cherche  $\text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S})$ , où  $\bar{A}$  désigne le complémentaire de  $A$  dans  $E$ . D'après les lois de Morgan (en notant  $\bar{H} = E \setminus H, \dots$ ):

$$\text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = \text{card}(\overline{H \cup M \cup S}).$$

$$\begin{aligned}\text{card}(H \cup M \cup S) &= \text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) \\ &\quad - \text{card}(H \cap M) - \text{card}(H \cap S) - \text{card}(M \cap S) + \text{card}(H \cap M \cap S).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = 658 \text{ et } \text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = 800 - 658 = 142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

### Solution 13.7

Soit  $E$  un ensemble fini non vide. Fixons  $a \in E$ , l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\mapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A. \end{cases}\end{aligned}$$

est une bijection (elle est sa propre réciproque). De plus, l'image d'une partie  $A$  par  $\varphi$  est une partie contenant un élément en plus ou en moins, ainsi

- l'image d'une partie  $A$  de cardinal pair est une partie de cardinal impair,
- l'image d'une partie  $A$  de cardinal impair est une partie de cardinal pair.

L'application  $\varphi$  étant bijective, il y a donc autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

## 13.3 Analyse combinatoire

### Solution 13.8

On note ici  $\bar{X}$  le complémentaire de  $X$  dans  $E$ .

Lorsque  $X, Y$  parcouruent  $\mathcal{P}(E)$ , il en est de même de  $\bar{X}$  et de  $\bar{Y}$ , autrement dit

$$(X, Y) \mapsto (\bar{X}, Y), \quad (X, Y) \mapsto (X, \bar{Y}), \quad (X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y}),$$

sont des bijections de  $(\mathcal{P}(E))^2$  dans lui-même. Donc

$$\begin{aligned}S &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y) = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(\bar{X} \cap Y) \\ &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap \bar{Y}) = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}).\end{aligned}$$

Mais on a toujours l'union disjointe

$$E = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}4S &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y) + \text{card}(\bar{X} \cap Y) + \text{card}(X \cap \bar{Y}) + \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}) \\ &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(E) \\ &= n(2^n)^2 = n4^n.\end{aligned}$$

On en déduit que  $S = n4^{n-1}$ .

Pour le calcul de  $T$ , utiliser le complémentaire

$$\text{card}(X \cup Y) = n - \text{card}(\overline{X \cup Y}) = n - \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

on trouve  $T = 3n4^{n-1}$ .

### Solution 13.9

Le nombre total de segments reliant deux sommets est  $\binom{2}{n}$ . Il suffit de soustraire les segments qui ne sont pas des diagonales (c'est-à-dire les côtés). Il y a donc

$$\binom{2}{n} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

diagonales dans un polygone convexe à  $n$  côtés.

### Solution 13.10

### Solution 13.11

### Solution 13.13 Convolution de Vandermonde

- On remarque que si  $X = A^c \cap B^c$ , on a  $f(X) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$ . Si  $f$  est injective, on a nécessairement  $A^c \cap B^c = \emptyset$ , c'est-à-dire après passage au complémentaire (dans  $E$ )  $A \cup B = E$ . Réciproquement, si  $A \cup B = E$ , alors si  $f(X_1) = f(X_2)$ , on a

$$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2,$$

et donc  $f$  est injective.

Si  $f$  est surjective, il existe  $X \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $X \cap A = A$  et  $X \cap B = \emptyset$ , on a donc  $A \subset X$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Réciproquement supposons  $A \cap B = \emptyset$ . Soit  $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ , on pose  $X = A' \cup B'$ , alors

$$A' \cap A = A' \quad A' \cap B = \emptyset \quad B' \cap A = \emptyset \quad B' \cap B = B',$$

et donc  $f(X) = (A', B')$ . L'application  $f$  est donc surjective.

#### Conclusion

- L'applicaiton  $f$  est injective si, et seulement si  $A \cup B = E$ .
- L'applicaiton  $f$  est surjective si, et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

- Lorsque  $f$  est bijective, on a

$$f^{-1}(A', B') = A' \cup B'.$$

- Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs  $p$  et  $q$ . On pose  $E = A \cup B$ , et donc  $\text{card } E = p + q$ .

Le nombre de parties à  $n$  éléments de  $E$  est  $\binom{p+q}{n}$ .

En utilisant la fonction  $f$  précédente, on constante que former une partie à  $n$  élément de  $E$  revient à choisir une partie  $A'$  à  $k$  éléments ( $0 \leq k \leq n$ ) de  $A$  et une partie  $B'$  à  $n-k$  éléments de  $B$ . Il y a  $\binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$  possibilités pour chaque  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , puis au total

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

possibilités. D'où l'identité demandée.

**Solution 13.14**

Les parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  s'écrivent de manière unique

$$X = \{ a \} \cup Y$$

avec  $a \in A$  et  $Y \in \mathcal{P}(E \setminus A)$ .

Pour le choix d'un élément de  $A$  nous avons  $p$  choix. Quelque-soit le choix de  $a$ , nous pouvons choisir  $2^{n-p}$  ensembles dans  $E \setminus A$  (de cardinal  $n - p$ ).

Ainsi, le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

**Solution 13.15****Solution 13.18**

<https://www.mathraining.be/chapters/39/theories/128>

**Solution 13.19****Solution 13.20****Solution 13.21 Permutations**

Réponses à justifier:

1.  $(6!)^2$

2.  $4! \times 8!$

3.  $2!2!4!4!$

4.  $6^6 \times 12^6, 4^4 \times 12^8, 2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$ .

**Solution 13.22 IMT MP 2024****Solution 13.23****Solution 13.24**

Il s'agit de placer six lettres à six places dans le mot. Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre d'anagrammes serait égal au nombre de permutations de ces six lettres :  $6!$ . Le mot comporte deux lettres répétées une fois : O et N. Une anagramme correspond donc à  $2! \times 2!$  permutations des lettres : celles qui sans toucher aux places du *G* et du *I*, transposent les *O* entre eux ou les *N* entre eux.

Le nombre d'anagrammes cherché est donc égal à  $\frac{6!}{2!2!} = 180$ .

Pour OGNON, utilisons une autre méthode : il y a  $\binom{5}{2}$  choix pour placer les deux O, il reste alors  $\binom{3}{2}$  choix pour les deux N.

Le nombre d'anagrammes cherché est  $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$ .

**Solution 13.25**

Le mot comporte 13 lettres, il y a donc  $13!$  permutations de ces lettres. La lettre A est présente trois fois : pour une disposition de ces trois A on a  $3!$  permutations.

Les lettres I et N sont présentes deux fois, à un mot correspond donc  $3! \times 2! \times 2!$  permutations.

Le nombre d'anagrammes est égal à

$$\frac{13!}{3!2!2!} = 259459200.$$

**Solution 13.26**

Le mot a 8 lettres, il y a  $\binom{8}{2}$  choix pour placer les deux I, il reste  $\binom{6}{2}$  choix pour les deux O, il reste  $\binom{4}{2}$  choix pour les deux F, il reste deux places pour le L.

Nombre d'anagrammes :

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = \frac{8!6!4!}{6!2!4!2!2!2!} \times 2 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040.$$

**Solution 13.27**

Il y a  $3^{84}$  applications des huîtres dans les assiettes, dont 3 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Si on retire une assiette, une distribution des huîtres correspond alors à une application des 84 huîtres dans deux assiettes. Parmi ces applications, il y en a 2 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Il y a donc  $2^{84} - 2$  de ces applications qui mettent au moins une huître dans chacune des deux assiettes. On a 3 manières de retirer une assiette, par conséquent il y a  $3 \times (2^{84} - 2)$  distributions qui laissent exactement une assiette vide.

Il y a  $3^{84} - 3 \times (2^{84} - 2) - 3 = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$  manières de répartir les 84 huîtres en ne laissant aucune assiette vide.

Remarque : on retrouve  $S(84, 3) = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$ .

**Solution 13.28**

Julie dispose de huit façons de tartiner chaque type de pain : quatre confitures sans beurre et quatre confitures avec beurre. On doit donc dénombrer les applications de l'ensemble { tartine, biscotte, toast } dans un ensemble de huit éléments : le nombre de possibilités différentes offertes à Julie est donc  $8^3 = 512$ .

**Solution 13.29**

1. Ce sont des combinaisons de 15 joueurs choisis parmi 22, il y a donc  $\binom{22}{15} = 170544$  équipes différentes.
2. On prend 13 joueurs parmi 15 joueurs, il y a donc  $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$  équipes différentes.

**Solution 13.30**

Dénombrons d'abord le nombre de groupes de dix joueurs que l'on peut former avec les dix-sept joueurs autres que les gardiens : il y en a  $\binom{17}{10} = 19448$ . Chacun de ces groupes peut constituer une équipe avec chacun des trois gardiens.

Il y a donc  $19448 \times 3 = 58344$  équipes possibles.

**Solution 13.32**

On note  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$  le nombre de  $p$ -arrangements dans un ensemble à  $n$  éléments.

1. Toutes les pattes sont différentes, toutes les pantoufles sont différentes. Il y a donc  $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  manières de chauffer le pachyderme.
2. Il y a trois chaussons pour les deux pattes de droites et trois chaussons pour les deux pattes de gauches. Il y a  $A_3^2 \times A_3^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$  façons de chauffer l'éléphant en respectant la droite et la gauche.

**Solution 13.33****Solution 13.34**

1. Il y a autant d'échanges en français que de combinaisons de deux Wallons dans un ensemble de  $q$  Wallons, soit  $\binom{q}{2}$ .
2. Il y a autant d'échanges en néerlandais que de combinaisons de deux Flamands dans un ensemble de  $p$  Flamands, soit  $\binom{p}{2}$ .
3. Il y a autant d'échanges en anglais que de couples formés d'un Flamand et d'un Wallon, soit  $pq$ .
4. On a ainsi dénombré tous les échanges de politesses qui correspondent aux combinaisons de deux personnes parmi  $p + q$ . Il y en a  $\binom{p+q}{2}$ . On en déduit  $\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}$ .

**Solution 13.35****Solution 13.36**

- *Première méthode.*

Soit  $i$  le nombre de groupes de 2 personnes qui passent en même temps.  $i$  varie entre 0 et 5.  $i$  étant fixé, le nombre de passages est égal à  $10 - i$  : on doit dénombrer les manières de placer  $i$  groupes de 2 personnes parmi  $10 - i$  passages. Il s'agit donc de combinaisons : il y en a  $\binom{10-i}{i}$ . Comme  $i$  varie de 0 à 5, le nombre total de possibilités est égal à

$$\binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} \binom{6}{4} + \binom{5}{5} = \sum_{i=0}^5 \binom{10-i}{i} = 89.$$

- *Deuxième méthode.*

Notons  $T_n$  le nombre de manières de faire passer  $n$  personnes. Au premier passage, il peut y avoir soit une personne, soit deux.

- Premier cas : il reste  $n - 1$  personnes à faire passer de  $T_{n-1}$  manières différentes.
- Deuxième cas : il en reste  $n - 2$  à faire passer de  $T_{n-2}$  manières différentes.

On obtient la relation  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ , avec  $T_1 = 1$  et  $T_2 = 2$ .

La suite  $(T_n)$  est la suite de Fibonacci. De proche en proche, on obtient

$$T_3 = 3, T_4 = 5, T_5 = 8, T_6 = 13, T_7 = 21, T_8 = 34, T_9 = 55, T_{10} = 89.$$

Il y a donc 89 possibilités.

**Solution 13.37**

**Solution 13.38**

1. Un groupe est une combinaison de quatre garçons pris parmi huit, il y a  $\binom{8}{4} = 70$  groupes possibles.
2. Un groupe muet est une combinaison de quatre garçons pris parmi six, il y a  $\binom{6}{4} = 15$  groupes muets possibles.
3. Chacun a une place sur la scène, on tient compte de l'ordre des garçons du groupe. Chaque disposition est un arrangement de quatre garçons pris parmi huit, il y a  $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$  dispositions possibles.
4. Pour avoir la stéréo, il faut un chanteur à une des deux places de droite et l'autre à une des deux places de gauche. Le premier a quatre places possibles, le deuxième doit être placé à une des deux places opposées: il y a  $4 \times 2 = 8$  manières différentes de placer les deux chanteurs. Il reste alors deux places pour six garçons, ce qui fait  $6 \times 5 = 30$  manières de les placer. Il y a  $8 \times 30 = 240$  dispositions donnant la stéréo.
5. Pour avoir un effet monophonique, il faut soit un seul chanteur, soit deux chanteurs du même côté.

Premier cas : le chanteur a quatre places possibles, il reste alors trois places pour six garçons, ce qui fait  $2 \times 4 \times (6 \times 5 \times 4) = 960$  dispositions.

Deuxième cas: les deux chanteurs sont soit à droite, soit à gauche. Il suffit de placer le premier, la place de l'autre est alors déterminée. Il y a donc quatre choix possibles pour les chanteurs. Il reste alors deux places pour six garçons, ce qui fait  $6 \times 5 = 30$  manières de les placer, ce qui fait  $4 \times 30 = 120$  dispositions.

Il y a  $960 + 120 = 1080$  dispositions donnant un effet monophonique.

6. Un quatuor de carpes est un arrangement de quatre garçons pris parmi six, il y a  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  quatuor de carpes.

Remarque.  $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 = 240 + 1080 + 360$ .

### Solution 13.41

1. Un élément de  $A$  est une 6-liste d'éléments de  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .  $\text{card } E = 9$ , donc  $\text{card } A = 9^6$ .
2. Un élément de  $A_1$  est un arrangement de 6 éléments de  $E$ , donc  $\text{card } A_1 = \frac{9!}{3!}$ .
3. Un élément de  $A$  est pair si, et seulement si, son chiffre des unités est 2, 4, 6 ou 8. Il y a 4 façons de choisir un tel chiffre, puis, pour chacune d'elles,  $9^5$  façons de choisir la 5-liste des 5 premiers chiffres. Donc  $\text{card } A_2 = 4 \times 9^5$ .
4. Il y a  $\binom{9}{6}$  façons de choisir les 6 chiffres d'un nombre de  $A_3$  puis, pour chacune d'elles, une (et une seule) façon de les écrire dans l'ordre croissant. Donc  $\text{card } A_3 = \binom{9}{6}$ .

### Solution 13.42

1. (a) Il y a  $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$  codes possibles.  
 (b) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2, 4, 6, 8). Il y a donc  $9 \times 9 \times 4$  tels codes.  
 (c) On va compter par différence. Il y a  $8 \times 8 \times 8$  codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc  $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$  codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.  
 (d) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc  $3 \times 8 \times 8$  tels codes.
2. (a) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc  $9 \times 8 \times 7$  choix possibles.  
 (b) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc  $8 \times 7 \times 5$  tels codes.  
 (c) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de  $8 \times 7 \times 3$ .

### Solution 13.43

1.  $10^6 = 1000000$ .
2.  $10!/(10-6)! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ .
3.  $\binom{10}{2} \binom{6}{3} = 900$ .
4.  $\binom{10}{3} \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 10800$ .
5.  $10 \times \binom{6}{2} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 453600$ .

### Solution 13.44

#### Solution 13.45

Une main de 13 cartes s'identifie à une partie à 13 éléments de l'ensemble des 52 cartes (il y en a  $\binom{52}{13}$ ).

1. On choisit le roi puis on choisit 12 cartes parmi 48, ce qui fait  $4 \times \binom{48}{12}$  mains possibles.
2. C'est le nombre de combinaisons de 13 cartes parmi 48. Il y a  $\binom{48}{13}$  possibilités.

**3.** L'ensemble des mains contenant au moins un roi est le complémentaire de l'ensemble des mains ne contenant aucun roi. Il y a  $\binom{52}{13}$  mains possibles. Il y a donc  $\binom{52}{13} - \binom{52}{12}$  possibilités.

On peut aussi dénombrer les mains avec exactement un roi, exactement deux rois, exactement trois rois, et exactement quatre rois. On en déduit

$$\binom{52}{13} - \binom{52}{12} = 4\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$

**4.** Il n'y a qu'une seule possibilité de choisir quatre rois. Reste ensuite à choisir neuf cartes parmi les 48 restantes. Il y a  $\binom{48}{9}$  possibilités.

**5.** Une seule main ne contient que des piques.

### Solution 13.46

- 1.** Il y a  $13 = \binom{13}{1}$  possibilités pour la hauteur de la paire et il faut choisir 2 cartes dans cette hauteur, soit  $\binom{4}{2}$  possibilités. Pour les 3 cartes manquantes, il faut les choisir en sorte de ne pas reformer de paire, c'est-à-dire dans des hauteurs différentes, ce qui laisse  $\binom{12}{3}$  choix. Et il faut choisir une couleur pour chacune de ces hauteurs. On trouve alors  $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3$  mains avec exactement une paire.
- 2.** Il faut choisir les hauteurs des 2 paires, ce qui fait  $\binom{13}{2}$  possibilités. Il faut ensuite choisir les couleurs pour chaque paire, soit  $\binom{4}{2}$  possibilités chacune. Enfin, reste à choisir la cinquième carte dans les 11 hauteurs restantes, soit 44 cartes possibles. Au total, il y a  $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot 44$  mains contenant deux paires (sans carré, ni brelan).
- 3.** Pour former un brelan, on choisit une hauteur puis 3 cartes dans cette hauteur. On complète la main par 2 cartes prises dans les 12 hauteurs restantes mais dans des hauteurs différentes, ce qui correspond à  $\binom{12}{2} \times 4^2$  possibilités. Il y a alors  $13 \times \binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2$  mains contenant des brelans.
- 4.** Il y a  $13 = \binom{13}{1}$  hauteurs pour le brelan, avec  $\binom{4}{3}$  couleurs différentes. On complète la main avec une paire parmi les  $12 = \binom{12}{1}$  hauteurs possibles, avec  $\binom{4}{2}$  couleurs différentes. Au total, il y a  $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$  mains avec un full.
- 5.** Il y a  $13 = \binom{13}{1}$  hauteurs possibles pour le carré (avec  $\binom{4}{4} = 1$  couleur(s) différente(s)). On complète la main avec une carte parmi les 48 restantes. Il y a donc  $13 \cdot 48$  mains contenant un carré.
- 6.** On choisit une couleur, puis 5 cartes dans cette couleur. Cela donne  $4\binom{13}{5}$  mains possibles.

**marque** S'il on souhaite obtenir la probabilité d'obtenir une telle main, on divise le résultat par le nombre de mains possibles, c'est-à-dire  $\binom{52}{5}$ .

On trouve respectivement  $\approx 42.257\%$ ,  $\approx 4.754\%$ ,  $\approx 2.113\%$ ,  $\approx 0.144$ ,  $\approx 0.024\%$ ,  $0.197\%$ .

Question subsidiaire, avec un jeu de 32 cartes, quel ordre des mains devrait être retenu pour être cohérent avec les probabilités?

### Solution 13.47

- 1.** Pour ranger les 12 livres, je choisis l'ordre des 3 groupes de livres ( $3!$  choix possibles), puis pour chacun de ces choix, il y a  $4!$  façons de ranger les livres de mathématiques entre eux, puis  $6!$  façons de ranger les livres de philosophie et  $2!$  façons de ranger les livres de géographie. Donc  $n_1 = 3!4!6!2!$  est le nombre de façons de ranger les livres lorsqu'ils doivent être groupés par matières.

- 2.** Il y a 9 façons de choisir le nombre de livres rangés avant ceux de mathématiques (il peut y avoir 0, 1, ..., 8 livres placés avant ceux de mathématiques). Puis, pour chacun de ces choix, 4! façons de ranger les livres de mathématiques, puis 8! façons de ranger les autres livres entre eux. Donc  $n_2 = 9 \times 4!8!$  est le nombre de façons de ranger les livres lorsque les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

**Solution 13.48**

**Solution 13.49**

**Solution 13.50**

On pose  $H$  = "vers le haut" et  $D$  = "vers la droite". Un exemple de chemin de  $(0, 0)$  à  $(p, q)$  est le mot  $DD...DHH...H$  où  $D$  est écrit  $p$  fois et  $H$  est écrit  $q$  fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du  $H$  est  $\binom{p+q}{q}$ . Une fois que les lettres  $H$  sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres  $D$ . Il y a donc  $\binom{p+q}{q}$  chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres  $D$  alors on a  $\binom{p+q}{q}$  choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car  $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{(p+q)-p} = \binom{p+q}{q}$ .