Chapter 1 Notations

Raisonnement et symbolisme mathématiques

1.1 Raisonnement logique

Exercice 1.1

Démontrer que $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.

Exercice 1.2

Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \implies Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\implies$ ($R \implies S$).

Exercice 1.3

Écrire les affirmations suivantes en utilisant les symboles $\implies$, $\geq$, $>$, $\neq$ et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.
2. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.
3. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

1.2 Quantificateurs

Exercice 1.4

Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
2. Il existe un nombre réel qui est strictement supérieur à son carré.
3. Il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
4. Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

Exercice 1.5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f ne prend que deux valeurs a et b distinctes.
5. La fonction f est une fonction impaire.

Exercice 1.6

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

5. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

Exercice 1.7

Vrai ou Faux ? Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies \left\{ \begin{array}{ll} & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ \text{ou} & \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 1.8 *Les feux de l'amour*

Dans ce problème, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des homme et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Définissons la relation «être amoureux»: pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, notons $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$. Ainsi $h \not\heartsuit f$ signifiera que h n'aime pas f.

À titre d'exemple, exprimons la phrase «chaque homme est amoureux d'une femme». Nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f. Cela s'écrit:

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$$

On rappelle qu'en mathématique, «une» signifie «au moins une», et non pas «exactement une».

Dans les exercices qui suivent, il y a généralement plusieurs réponses possibles. Dès que la réponse n'est pas directement évidente, expliquez-la. Par ailleurs, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

Partie A

Thème Écrire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

A1. Tous les hommes aiment toutes les femmes.

A2. Chaque femme aime un unique homme.

A3. Certaines femmes aiment deux hommes.

A4. Il existe une femme amoureuse d'elle-même.

A5. Certains hommes aiment un homme et une femme.

A6. Tout le monde aime tout le monde.

Partie B

Version Que signifient, dans un français naturel, les assertions suivantes?

B1. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f.$

B2. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$

B3. $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h.$

B4. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \heartsuit h).$

B5. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}, (h \heartsuit f \text{ et } f \not\heartsuit h).$

B6. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F} h \heartsuit f)$ et $(\exists f \in \mathcal{F}, f \heartsuit h)$.

Partie C

Négations On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny, et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale (B, J, M, D).

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes, puis écrire la phrase et sa négation à l'aide de quantificateurs.

C1. Brenda aime Mike et Dick.

C2. Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.

C3. Jenny n'aime aucun homme.

C4. Brenda aime une femme.

C5. Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

C6. Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Jenny.

Indication. Dans cet partie, écrire la phrase en quantificateurs vous aidera à écrire la négation. En effet, écrire la négation d'une phrase en quantificateurs est un procédé purement mécanique et facile à retenir (remplacer les $\forall$ par des $\exists$, etc...).

Partie D

Implications

D1. Traduire les assertions suivantes sous forme de formule logique utilisant des quantificateurs.

(a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.
(b) Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.
(c) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.
(d) Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.
Vous êtes libre du sens précis que vous donnerez au mot «homosexuel» mais vous l'expliquerez dans votre réponse.

D2. Que signifient les assertions suivantes?

(a) $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \implies M \heartsuit f$.
(b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \implies (\forall f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f)$.
(c) $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \implies J \not\heartsuit h$.
(d) $\forall h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \implies h = M$.
(e) $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.
(f) $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit J$.

Partie E

Négation d'implication Écrire la négation des assertions de la partie 4.

1.3 Ensembles

Exercice 1.9

Que peut-on dire de l'ensemble $E = \{ x \in A \mid P(x) \}$ lorsque

1. «$\forall x \in A, P(x)$» ?
2. «$\exists x \in A, P(x)$» ?

Exercice 1.10

Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $(A \subset C \text{ \underline{et} } B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.
3. $(A \subset B \text{ \underline{et} } A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.
4. $(A \subset B) \implies (A \cap C \subset B \cap C)$.
5. $(A \subset B) \implies (A \cup C \subset B \cup C)$.
6. $(A \subset B \text{ \underline{et} } C \subset D) \implies (A \cup C \subset B \cup D)$.
7. $(A \subset B \text{ \underline{et} } C \subset D) \implies (A \cap C \subset B \cap D)$.

Exercice 1.11

Lesquelles des assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $2 \in \mathbb{N}$.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$.
3. $2 \subset \mathbb{N}$.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.12

Écrire en extension l'ensemble
$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; z^3 = \overline{z} \right\}.$$

Exercice 1.13

Soient a, b deux réels avec $a < b$. Prouver par double inclusion que
$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}.$$

Exercice 1.14

Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{ 0, 1 \}$.

Exercice 1.15

1. Soit $E = \{ -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \}$.
   Donner une définition de l'ensemble E sans avoir à énumérer ses éléments.
2. Même question avec l'ensemble $F = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$.
3. Décrire comme ci-dessus l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

Exercice 1.16

Soit X et Y deux ensembles. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$ est
$$X \cap Y = X \cup Y.$$

Exercice 1.17

Quel est le produit cartésien des ensembles
$$A = \{ \text{as}, \text{roi}, \text{dame}, \text{valet}, 10, 9, 8, 7 \} \quad \text{et} \quad B = \{ \text{cœur}, \text{carreau}, \text{trèfle}, \text{pique} \}.$$

Exercice 1.18

Soit A et B deux ensembles. On définit leur différence symétrique par
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Comparer les ensembles $A\Delta(B \cup C)$ et $(A\Delta B) \cup (A\Delta C)$.

2. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\Delta B = A\Delta C) \iff (B = C).$$

Exercice 1.19

On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y < 1 \right\}, \\
A_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x + y| < 1 \right\}, \\
A_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| < 1 \right\}, \\
A_4 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y > -1 \right\}, \\
A_5 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - y| < 1 \right\}.
\end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.

2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y| < 1 \text{ et } |x-y|| < 1) \iff |x| + |y| < 1.$$

Exercice 1.20

Soient A et B des ensembles. Donner les rédactions des énoncés du type

1. $P \implies Q$, en distinguant raisonnement direct et par contraposée, par l'absurde.

2. $P \iff Q$.

3. $A \subset B$.

4. $A = B$.

5. $A \cap B = \{ 0 \}$.

6. $\forall x \in A, P(x)$.

7. $\exists x \in A, P(x)$.

8. $\exists! x \in A, P(x)$.

9. $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$, où expr_1 et expr_2 sont deux expressions données.

10. $(i) \iff (ii) \iff (iii)$.