DL

Aperçu

D 1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être au point 0. On dit que la fonction f admet un **développement limité** d'ordre n au point 0 lorsqu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ lorsque } x \to 0.$$

- La fonction polynômiale $P_n : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelée la **partie régulière** du développement limité de f à l'ordre n au point 0.
- Les $a_k x^k$ sont les **termes**, les a_k les **coefficients** et la fonction $r_n = f - P_n$ est le **reste** de ce développement.

Plus généralement, on peut parler développement limité de f en 0 dès lors que 0 est un point adhérent à I de sorte que les limites lorsque $x \to 0$ aient un sens.

P 2 *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

S'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-1} x^{p-1} \sim a_p x^p \quad \text{lorsque } x \to 0.$$

E 3 On pose $f(x) = 1 + x^2 + x^3$. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 0, 1, 2 et $n \geq 3$.

P 4 *Pour $n \in \mathbb{N}$ et au voisinage de $x = 0$*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

R Soit f une fonction admettant un développement limité en 0.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors, lorsque $x \to 0$,

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n).$$

P 6 *Si f admet un développement limité d'ordre n, elle admet aussi un développement limité d'ordre p pour tout $p < n$ et il est obtenu en* ***tronquant*** *à l'ordre p la partie régulière du développement limité à l'ordre n.*

T 7 *Si f admet un développement limité d'ordre n au point 0, ce développement limité est unique. Cela revient à dire que si les réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ vérifient*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

alors $a_k = b_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

C 8 *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0.*

1. *Si f est paire, alors la partie régulière du développement est un polynôme pair.*
2. *Si f est impaire, alors la partie régulière du développement est un polynôme impair.*

P 9 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Alors f admet une limite en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0.*
Dans ce cas

$$f(x) = a_0 + o(\mathbf{1}) \iff \lim_{x \to 0} f(x) = a_0.$$

C 10 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, alors f est continue en 0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 au point 0.*

Si on a un développement limité à l'ordre 0, $f(x) = a_0 + o(1)$, pour une fonction qui n'est pas définie en 0, celle-ci est alors prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$.

Dans la suite Quitte à effectuer un prolongement par continuité, on supposera les fonctions définies en 0.

P 11 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Alors f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce cas*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

Prenons la fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^\star$, et qu'on peut prolonger par continuité au point 0 en posant $f(0) = 1$. Puisque $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, on voit que

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2);$$

la fonction f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
De plus, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, et d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = 1$ — d'ailleurs $f(x) = 1 + x + o(x)$ prouve que f est dérivable en 0 de dérivée 1.
Or, pour $x \neq 0$, le taux de variation $\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ce qui prouve que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

> Ainsi, pour prouver qu'une fonction f est p fois dérivable en 0, il est incorrect de donner pour argument le fait qu'elle admet un développement limité d'ordre p en ce point.

L 12 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit g une fonction dérivable au voisinage de 0. Si $g'(x) = o\left(x^k\right)$ au voisinage de 0, alors*

$$g(x) - g(0) = o\left(x^{k+1}\right).$$

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire au voisinage de $h = 0$

$$g'(h) = h^k \omega(h) \qquad \text{avec} \qquad \omega(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour x au voisinage de 0, l'application g est continue sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), dérivable sur $]0, x[$ (ou $]x, 0[$). Appliquons l'égalité des accroissements finis dans l'intervalle $[0, x]$: il existe $c_x \in \,]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = x g'\left(c_x\right).$$

On en déduit

$$|g(x) - g(0)| = \left|x c_x^k \omega\left(c_x\right)\right| \leq \left|x^{k+1} \omega\left(c_x\right)\right|$$

Avec, $\lim_{x \to 0} \omega\left(c_x\right) = 0$ puisque $\lim_{x \to 0} c_x = 0$. ∎

T 13 **Formule de Taylor-Young**

Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, et au voisinage de $x = 0$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Démonstration. [1] Nous faisons une récurrence sur n. La formule est bien entendu vraie si $n = 0$ ou $n = 1$ d'après les résultats de la partie ??.
Supposons le résultat établit au rang n et f $n+1$ dérivable au voisinage du point 0. En l'appliquant au rang n à f' (qui est bien n fois dérivable au voisinage de 0), on peut écrire

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Appliquons le lemme avec $k = n$ et

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

on a alors $g'(x) = o\left(x^n\right)$ et comme $g(0) = 0$, le lemme conduit à $g(x) = o\left(x^{n+1}\right)$, ce qui est la formule cherchée. ∎

[1] L'hypothèse f est n fois dérivable au voisinage de 0 suffit pour établir la formule, mais le programme impose f de classe $\mathscr{C}^n$.

C 14 *Si* $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$*, alors* f *admet un développement limité en* 0 *à tout ordre* $n \in \mathbb{N}$*.*

C 15 *Au voisinage de $x = 0$,*

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
4. $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
5. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

C 16 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et au voisinage de $x = 0$,*

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

où on a noté $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. On parle de coefficient binomial généralisé.

Dans le cas où α est entier, la partie régulière reproduit le développement du binôme de Newton.

C 17 *Au voisinage de* $x = 0$,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \begin{cases} o(x^7) & \\ o(x^8) & \textit{par imparité et classe } \mathscr{C}^8. \end{cases}$$

T 18 (Re)trouver le développement limité à l'ordre n en 0 des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

R Au voisinage de $x = 0$,

1. $q > p \implies x^q = o(x^p)$.
2. $o(x^p) = x^p \times o(1)$.
3. $x^p \times o(x^q) = o(x^{p+q})$.
4. $o(x^p) \times o(x^q) = o(x^{p+q})$.
5. Si $0 \leq p \leq q$, $o(x^p) + o(x^q) = o(x^p)$.

T 19 *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point* 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \qquad\qquad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et λf admettent des développements limités d'ordre n au point 0 donné par

$$(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n) \qquad\qquad (\lambda f)(x) = \lambda P(x) + o(x^n).$$

E 20 Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sin x + \cos x$.

R Si les développements limités de f et g ne sont pas au même ordre, on fait un développement limité de $f+g$ en gardant l'ordre minimum. Par exemple, si au voisinage de $x=0$

$$f(x) = 1 - x^2 + o(x^2) \qquad\qquad g(x) = 3 + 2x + \frac{x^2}{3} + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

alors, on ne peut donner qu'un développement limité de $f+g$ à l'ordre 2

$$(f+g)(x) = 4 + 2x - \frac{2x^2}{3} + o(x^2).$$

T 21 *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point 0.*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \qquad\qquad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors, la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n en 0 dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le produit PQ de leurs parties régulières.

Le produit de deux développements limités à l'ordre n n'est pas un développement limité à l'ordre $2n$! C'est un développement limité au même ordre n.

E 22 Développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+x}$.

E 23 Chercher un développement limité à l'ordre 7 en 0 de $(\operatorname{sh} x)(\sin x - x)$.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction étant paire, sa partie régulière n'aura que des puissances paires. Comme $\operatorname{sh} x = x + o(x)$, et $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on voit qu'on pourra mettre x^4 en facteur dans la partie régulière du produit

$$\begin{aligned} f(x) = (\operatorname{sh} x)(\sin x - x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\ &= x^4\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^3)\right) \\ &= x^4\left(-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{36}\right)x^2 + o(x^3)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + o(x^7)$$

On voit ici que les termes en x^5 et x^7 du $DL7$ de $\operatorname{sh} x$ et le terme en x^7 du $DL7$ de $\sin x - x$ étaient inutiles. ∎

T 24 *Soient u et f deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au point 0. On suppose que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.*

$$u(x) = P(x) + o(x^n) \qquad\qquad f(y) = Q(y) + o(y^n).$$

Alors l'application $f\circ u$ admet un développement limité à l'ordre n au point 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme composé $Q\circ P$.

E 25 Déterminer en développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

T 26 *Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 avec $f(0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

C 27 *Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0 avec $g(0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

Démonstration & méthode. La fonction f, non nulle en 0 et continue en 0, est non nulle au voisinage de 0. Notons $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ la partie régulière du DLn de f en 0. Alors $a_0 = f(0)$ est non nul, et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + (a_1/a_0)x + \cdots + (a_n/a_0)x^n + o(x^n)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + u(x)},$$

la fonction $x \mapsto u(x)$ étant nulle en 0, et admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Or $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ admet un développement limité en 0 à tout ordre, donc $1/f$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 par composition. ∎

E 28 Déterminer un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $x = 0$ de $\tan x$ en utilisant le quotient

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

M Il peut arriver que le quotient $\frac{f}{g}$ admette un développement limité en 0 alors que $g(0) = 0$; le théorème ne s'applique pas directement. De manière générale, si

$$f(x) = x^p(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)) \text{ et } g(x) = x^q(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))$$

avec $p \geq q$ et $b_0 \neq 0$, alors on obtient un développement limité de f/g à l'ordre $p - q + n$ (on garde x^{p-q} en facteur).

E 29 Montrer que $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

T 30 *Soit f une application dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que sa fonction dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 et

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

C 31 *Soit f une application continue sur un voisinage de 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors toute primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est obtenue par intégration de la partie régulière de celui de f. Ainsi

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

C 32 *Au voisinage de $x = 0$,*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

C 33 *Au voisinage de $x = 0$,*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Démonstration. On intègre le développement limité

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

∎

L'existence d'un développement limité de f ne permet *à priori* pas de déduire l'existence d'un développement limité de f'. Revoir par exemple

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

P 34 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction dérivable sur un voisinage de 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$
$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors $b_0 = a_1, b_1 = 2a_2, \ldots, b_{n-1} = na_n$.

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^n$, la formule de Taylor-Young assure l'existence du développement limité à l'ordre $n-1$ de f'. On peut donc déduire ce développement limité en dérivant terme à terme le développement limité à l'ordre n de f.

D 35 Développement limité en un point a

On dit qu'un fonction f définie au voisinage d'un point a admet un **développement limité** d'ordre n en ce point si la fonction

$$h \mapsto F(h) = f(a+h)$$

admet un développement limité d'ordre n au point 0. Dans ce cas, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que au voisinage de $h = 0$,

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

ou de manière équivalente, au voisinage de $x = a$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

E 36 Déterminer un développement limité de $\ln$ à l'ordre 3 au voisinage de 4.

P 37 *Soit f une fonction définie au voisinage de a.*

1. *La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 au point a. Dans ce cas,* [a]

$$f(x) = f(a) + o(\mathbf{1}), \quad [x \to a];$$

2. *La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \quad [x \to a],$$

ou de manière équivalente, on peut écrire $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ quand $h \to 0$.

3. *Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. On suppose qu'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq 0$, alors au voisinage de $x = a$,*

$$f(x) - a_0 - a_1(x-a) - \cdots - a_{p-1}(x-a)^{p-1} \sim a_p(x-a)^p$$

[a] Ou seulement prolongeable par continuité si f n'est pas définie en a.

T 38 **Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Les opérations sur les développements limités restent valables.

P 39 *Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a, alors*

1. *$f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet un développement limité à l'ordre n en a.*
3. *fg admet un développement limité à l'ordre n en a.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*

P 40 *Si f admet un développement limité à l'ordre n au point a et si g admet un développement limité à l'ordre n au point $f(a)$, alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au point a.*

E 41 Déterminer la limite au point 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}.$$

Démonstration. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

d'où

$$\begin{aligned}
x(1+\cos x) - 2\tan x &= x\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \\
&= -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\sim -\frac{7}{6}x^3 \\
2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\sim -\frac{1}{6}x^3.
\end{aligned}$$

Finalement $f(x) \sim \frac{-\frac{7}{6}x^3}{-\frac{1}{6}x^3} \sim 7$, d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 7$. ∎

T 42 Soit $g(x) = \dfrac{\sin x - x}{\operatorname{sh} x - x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

T 43 Soit $h(x) = \dfrac{\ln(1+x) - xe^{-x/2}}{(1+x^3)^\alpha - 1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

P 44 *Soit f, une fonction définie au voisinage d'un point a. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 au point a, $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, Alors f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation*

$$\Delta : y = a_0 + a_1(x-a).$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de a et admet un développement limité de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0,$$

la représentation graphique de f admet, au point d'abscisse a, un tangente T_a d'équation

$$T_a : y = a_0 + a_1(x-a).$$

Le signe de la quantité $\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$ permet de palcer le point $M(x, f(x))$ par rapport à cette tangente : pour $\Delta(x)$ positif, M est situé «au dessus» de T_a. Comme

$$\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p,$$

on connaît le signe de cette quantité **au voisinage de a**. En particulier, si p est pair, la représentation graphique de f reste **localement** du même côté de T_a (point à concavité) ; si p est impair, la représentation graphique de f traverse donc sa tangente T_a lorsque $x - a$ change de signe (point d'inflexion).

E 45 Le développement limité à l'ordre 3 au point 4 de $\ln$ nous donne

$$\ln(x) = \ln(4) + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(x-4)^3}{192} + o\left((x-4)^3\right).$$

La tangente à la courbe du logarithme au point d'abscisse 4 a donc pour équation

$$T_4 \,:\, y = \ln(4) + \frac{x-4}{4}.$$

De plus, pour x au voisinage de 4, on a $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \sim -\frac{(x-4)^2}{32}$ donc $f(x) - (\ln 4 - 1 + \frac{x}{4}) \leq 0$ pour x au voisinage de 4. La courbe représentative de logarithme se trouve donc **sous** sa tangente **au voisinage** de $x = 4$.

E 46 Reprenons l'exemple

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

La fonction ci-dessus n'était pas définie en 0, mais elle tend vers 1 en 0, et on peut la prolonger par continuité en posant $f(0) = 1$. On en déduit que $f'(0) = \frac{1}{2}$, que la tangente à la courbe est d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$, et que la différence $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est équivalente à la fonction $-\frac{x^2}{4}$ au voisinage de 0, et est donc négative au voisinage de 0. Ainsi la courbe de la fonction est-elle **sous** sa tangente **au voisinage** du point d'abscisse 0.

M Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$ et $a_p \in \mathbb{R}^\star$. Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_p\,(x-a)^p\,.$$

- Si p est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. La fonction f admet un extrémum local en a.
- Si p est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a. La fonction f n'admet pas d'extrémum local en a.

P 47 *Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$ et soit $a \in I$.*

- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.*
- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.*

E 48 Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x)\sin(x)$. La fonction f admet-elle un extrémum local en 0?

E 49 Étudier la fonction $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x)$ au voisinage de $x = 0$.

Démonstration. Cette fonction n'admet pas de développement limité en 0 car elle tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x).
\end{aligned}$$

La présence du $\frac{1}{x}$ confirme que ce n'est pas un développement limité. ∎

E 50 Étudier la fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\ln(1+u)\\
&= \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4)\right)\\
&= \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4)\right)+\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right).
\end{aligned}$$

Ici, on doit additionner un développement limité et un développement asymptotique qui n'ont pas la même précision. On conserve la précision la plus mauvaise.

$$f(x) = \frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\frac{4u}{3}-\frac{3u^2}{4}+o(u^2) = \sqrt{x}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3\sqrt{x}}-\frac{3}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ \text{quand } x\to+\infty.$$

∎

D 51 Soit f, une fonction définie dans un intervalle ayant pour extrémité $\omega = \pm\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** au graphe de f en ω lorsque

$$\lim_{x \to \omega} f(x) - ax - b = 0.$$

M Lorsqu'on imagine que f admet une droite asymptote en $\omega = \pm\infty$, il peut être très rapide de faire un développement limité de $\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h})$ où on a posé $h = \frac{1}{x}$. Un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $h = 0$ suffit alors à avoir l'asymptote, et un développement limité à un ordre plus grand permet de comparer les positions du graphe et de l'asymptote.

E 52 Étudier au voisinage de $+\infty$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-x+2}{x+3}e^{-1/x} \end{array}$$

Démonstration. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et il y a donc un espoir d'asymptote.
Posons $h = \frac{1}{x}$ qui est voisin de 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1-h+2h^2}{1+3h}\,\mathrm{e}^{-h} \\ &= (1-h+2h^2)(1-3h+9h^2)(1-h+\frac{1}{2}h^2)+o(h^2) \\ &= (1-4h+14h^2+o(h^2))(1-h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)) \\ &= 1-5h+\frac{37}{2}h^2+o(h^2) \\ &= 1-\frac{5}{x}+\frac{37}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Donc $f(x) = x-5+\frac{37}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi la droite d'équation $y = x-5$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, et

$$f(x)-(x-5) \sim \frac{37}{2}\frac{1}{x}$$

est positif pour x assez grand : la courbe est au dessus de son asymptote, au moins pour x assez grand. ∎

1. Développement limité en 0

2. Formule de Taylor-Young

3. Opérations sur les développements limités

4. Développement limité en un point a

5. Applications des développements limités

6. Développements asymptotiques

7. Développements limités usuels au voisinage de $x = 0$