

## Nombres entiers, itérations

# Aperçu

1. Nombres entiers
2. Suites définies par une relation de récurrence
3. Entiers relatifs
4. Les nombres rationnels

## 1. Nombres entiers

### 1.1 Les entiers naturels

### 1.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

### 1.3 Le principe de récurrence

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

## 1. Nombres entiers

### 1.1 Les entiers naturels

### 1.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

### 1.3 Le principe de récurrence

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

D

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

P

*L'addition des entiers possède les propriétés suivantes:*

- 1. L'addition est une loi de composition interne dans  $\mathbb{N}$ . Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels; on sait que leur somme est un entier  $m + n \in \mathbb{N}$ .*
- 2. L'addition étant associative dans  $\mathbb{R}$ , elle est a fortiori associative dans  $\mathbb{N}$ .*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, (x + y) + z = x + (y + z).$$

*On note simplement  $x + y + z$ .*

- 3. L'addition dans  $\mathbb{R}$  admet le nombre 0 comme élément neutre; puisque 0 est un entier naturel, il est l'élément neutre pour l'addition dans  $\mathbb{N}$ .*
- 4. L'addition dans  $\mathbb{N}$  est commutative puisque, dans  $\mathbb{R}$ , elle est commutative.*

*La multiplication des entiers possède les propriétés suivantes:*

- 1. La multiplication est une loi de composition interne dans  $\mathbb{N}$ . Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels; on sait que leur produit est un entier  $m \times n \in \mathbb{N}$ .*
- 2. La multiplication étant associative dans  $\mathbb{R}$ , elle est a fortiori associative dans  $\mathbb{N}$ .*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, (xy)z = x(yz).$$

*On note simplement  $xyz$ .*

- 3. La multiplication dans  $\mathbb{R}$  admet le nombre 1 comme élément neutre; puisque 1 est un entier naturel, il est l'élément neutre pour la multiplication dans  $\mathbb{N}$ .*
- 4. La multiplication dans  $\mathbb{N}$  est commutative puisque, dans  $\mathbb{R}$ , elle est commutative.*
- 5. La multiplication dans  $\mathbb{N}$  est distributive par rapport à l'addition, puisqu'elle l'est dans  $\mathbb{R}$ .*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x.(y + z) = x.y + x.z \text{ et } (x + y).z = x.z + y.z.$$

**R** L'opposé d'un nombre réel  $x$  est le le nombre  $-x$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul; le nombre  $-n$  n'appartient pas à  $\mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{N}$  possède donc des éléments (par exemple le nombre 2) qui n'admettent pas d'opposé dans  $\mathbb{N}$ .

- P**
1. *Le seul élément ayant un opposé pour l'addition dans  $\mathbb{N}$  est 0.*
  2. *Le seul élément ayant un inverse pour la multiplication dans  $\mathbb{N}$  est 1.*

**N**

$$\mathbb{N}^{\star} = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$



## 1. Nombres entiers

### 1.1 Les entiers naturels

### 1.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

### 1.3 Le principe de récurrence

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

## T Axiomatique

*L'ensemble  $\mathbb{N}$  est muni d'une relation d'ordre totale  $\leq$  vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes*

- 1. Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.*
- 2. Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$  admet un plus grand élément.*
- 3.  $\mathbb{N}$  n'a pas de plus grand élément.*

N Si  $p$  et  $q$  sont des entiers, on note

$$[[p, q]] = \{ n \in \mathbb{N} \mid p \leq n \leq q \}.$$

R Si  $p$  et  $q$  sont des entiers,

$$p \leq q \iff p < q + 1.$$

## 1. Nombres entiers

### 1.1 Les entiers naturels

### 1.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

### 1.3 Le principe de récurrence

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

On rappelle qu'un **prédicat** ou une **propriété** sur  $\mathbb{N}$  est une relation contenant une variable  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire une application de  $\mathbb{N}$  dans l'ensemble  $\mathcal{B} = \{ \text{Vrai}, \text{Faux} \}$ . Si  $R$  est un tel prédicat, on écrit «on a  $R(n)$ » ou plus simplement « $R(n)$ » pour exprimer que la valeur de  $R(n)$  est Vrai. Par exemple, si  $R(n)$  est « $2n \geq n^2$ », on a  $R(1)$  et  $R(2)$  mais on n'a pas  $R(3)$ .

## Principe de récurrence

Soit  $R$  un prédicat sur  $\mathbb{N}$ . On suppose que

- ▶  $R(0)$  est vraie,
- ▶  $\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1)$ .

Dans ces conditions, la propriété  $R(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Utiliser ces propriétés, c'est faire un **raisonnement par récurrence**.

*Démonstration non exigible.* Effectuons un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$  est faux ; autrement dit, l'ensemble

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{non } R(n) \}.$$

n'est pas vide. Or  $A \subset \mathbb{N}$  donc  $A$  admet un plus petit élément, noté  $a$ .

$R(0)$  est vraie, donc  $a \geq 1$ . Par définition de  $a$ , on a  $a-1 \notin A$ , c'est-à-dire que l'assertion  $R(a-1)$  est vraie. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1);$$

donc  $R(a)$  est vraie, c'est absurde.

*Conclusion :*  $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$ .

E

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'assertion

$$R(n) : 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

- ▶ L'assertion  $R(0)$  est vraie<sup>1</sup> puisque  $5^2 = 4^2 + 3^2$ .
- ▶ Soit un entier  $n \geq 0$ . On suppose que  $R(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$ . Ainsi<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} 5^{n+3} &= 5 \times 5^{n+2} \\ &\geq 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) \quad \text{d'après } R(n). \end{aligned}$$

Or  $5 \times 4^{n+2} \geq 4^{n+3}$  et  $5 \times 3^{n+2} \geq 3^{n+3}$  ; on peut donc affirmer

$$5^{n+3} \geq 4^{n+3} + 3^{n+3},$$

d'où  $R(n+1)$ .

- ▶ D'après le principe de récurrence,<sup>3</sup> l'assertion  $R(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>1</sup>Initialisation :  $R(0)$ .

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

## C Récurrence à deux pas

*Soit  $R$  un prédicat sur  $\mathbb{N}$ . On suppose que*

$$R(0) \quad \text{et} \quad R(1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (R(n) \text{ et } R(n+1)) \implies R(n+2).$$

*Dans ces conditions,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Ce résultat peut se généraliser à la récurrence à trois pas, quatre pas. . .

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

## C Récurrence à partir du rang $k$

Soit  $R$  un prédicat sur  $\llbracket k, +\infty \rrbracket$ . On suppose que

$$R(k) \quad \text{et} \quad \forall n \geq k, R(n) \implies R(n+1).$$

Dans ces conditions,

$$\forall n \geq k, R(n).$$



On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

## C Récurrence limitée à un intervalle

*Soit  $a, b$  deux entiers tels que  $a \leq b$ , et soit  $R$  un prédicat sur  $\llbracket a, b \rrbracket$  tel que l'on ait*

$$R(a) \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket a, b-1 \rrbracket, R(n) \implies R(n+1).$$

*Alors*

$$\forall n \in \llbracket a, b \rrbracket, R(n).$$

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

## C Récurrence avec prédécesseurs

Soit  $R$  un prédicat sur  $\mathbb{N}$ . On suppose que

$$R(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (R(0) \text{ et } R(1) \text{ et } \dots \text{ et } R(n)) \implies R(n+1).$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

### 2.1 Suites arithmétiques

### 2.2 Suites géométriques

### 2.3 Suites arithmético-géométriques

### 2.4 Définition d'une suite par récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels



## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

### 2.1 Suites arithmétiques

### 2.2 Suites géométriques

### 2.3 Suites arithmético-géométriques

### 2.4 Définition d'une suite par récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

**D** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre complexe  $r$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Ce nombre  $r$  est appelé la **raison** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**P** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ , alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p + (q - p)r.$$

## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

### 2.1 Suites arithmétiques

### 2.2 Suites géométriques

### 2.3 Suites arithmético-géométriques

### 2.4 Définition d'une suite par récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

**D** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre complexe  $r$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n.$$

Ce nombre  $r$  est appelé la **raison** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**P** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $r$ , alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 r^n.$$

Plus généralement, si  $r \neq 0$ .

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p r^{q-p}.$$



## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

### 2.1 Suites arithmétiques

### 2.2 Suites géométriques

### 2.3 Suites arithmético-géométriques

### 2.4 Définition d'une suite par récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

D

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$



Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(x) = ax + b$ . On considère la suite  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n).$$

On suppose  $a \neq 1$ , (sinon  $(u_n)$  est une suite arithmétique).

► Déterminons le(s) point(s) fixe(s) de  $f$ : pour  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$f(x) = x \iff ax + b = x \iff (a - 1)x = -b \iff x = \frac{b}{1 - a}.$$

L'application  $f$  a donc un unique point fixe  $\ell = \frac{b}{1 - a}$ .



Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(x) = ax + b$ . On considère la suite  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n).$$

On suppose  $a \neq 1$ , (sinon  $(u_n)$  est une suite arithmétique).

► Introduisons la suite  $(v_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell = u_n - \frac{b}{1-a},$$

alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell = av_n + \cancel{f(\ell)} - \ell = av_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $a$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0.$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \ell = a^n(u_0 - \ell) + \ell = a^n u_0 + b \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

T

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = 9u_n + 56$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Calculer les premiers termes de la suites,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ .
2. La suite  $(u_n)$  est-elle une suite arithmétique? une suite géométrique?
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

P

## Formule hors-Programme

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Alors, si  $a \neq 1$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 + b \frac{1 - a^n}{1 - a} = \left( u_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^n + \frac{b}{1 - a}.$$

**Programme** Le programme officiel stipule que vous devez connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique. Le résultat ci-dessus, en plus d'être plutôt indigeste, est donc hors-programme.

## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

### 2.1 Suites arithmétiques

### 2.2 Suites géométriques

### 2.3 Suites arithmético-géométriques

### 2.4 Définition d'une suite par récurrence

## 3. Entiers relatifs

## 4. Les nombres rationnels

On admet le résultat suivant:

T

*Soit  $E$  un ensemble,  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ ,  $a$  un élément de  $E$ . Il existe une et une seule suite  $(x_n)_n \in \mathbb{N}$  de  $E$  telle que*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

C'est ainsi, par exemple, que l'on définira les suites arithmétiques et géométriques.



On peut aussi définir une suite par des relations de récurrence plus compliquées.

T

Soit  $E$  un ensemble,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'applications de  $E$  dans  $E$ ,  $a$  un élément de  $E$ . Il existe une et une seule suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  telle que

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_n(x_n). \end{cases}$$

E

Avec  $E = \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = (n+1)x$ , et  $a = 1$ . On définit ainsi par récurrence la suite

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

(pour  $n > 0$ ). Ce nombre, qui est le produit des  $n$  premiers entiers  $> 0$  s'appelle **factorielle** de  $n$ . On convient que  $0! = 1$ .

$n!$  intervient dans de nombreuses formules;  $n!$  prend rapidement de «grandes valeurs»:  $10! = 3\,628\,800$  ;  $50!$  est un nombre de 65 chiffres en base 10 ;  $100!$  est un nombre à 158 chiffres en base 10.

On peut aussi définir une suite par des relations de récurrence plus compliquées.

T

Soit  $E$  un ensemble,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'applications de  $E$  dans  $E$ ,  $a$  un élément de  $E$ . Il existe une et une seule suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  telle que

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_n(x_n). \end{cases}$$

E

Avec  $E = \mathbb{R}_+$ ,  $f_n(x) = \sqrt{x+n}$ , et  $a = 1$ . On définit ainsi par récurrence une suite  $(x_n)$  telle que

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{2}+2}, \quad x_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+3}, \dots$$

**R** On définit aussi des suites par récurrence d'ordre  $k$  où  $k$  est un entier naturel non nul. Il s'agit de suites  $(x_n)$  de  $E$  définies à l'aide d'une suite d'applications de  $(f_n)$  de  $E^k$  dans  $E$ , pour lesquelles on se donne les  $k$  premières valeurs  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  et pour tout  $n$

$$x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}).$$

Étant donnés  $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in E^k$ , il y a encore existence et unicité de la suite  $(x_n)$  de  $E$  telle que

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}). \end{cases}$$

**E** La suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Il arrive même que l'on définisse une suite par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme se calcule à l'aide de tous les précédents. Là aussi on admet l'existence et l'unicité.

**R** On définit aussi des suites par récurrence d'ordre  $k$  où  $k$  est un entier naturel non nul. Il s'agit de suites  $(x_n)$  de  $E$  définies à l'aide d'une suite d'applications de  $(f_n)$  de  $E^k$  dans  $E$ , pour lesquelles on se donne les  $k$  premières valeurs  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  et pour tout  $n$

$$x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}).$$

Étant donnés  $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in E^k$ , il y a encore existence et unicité de la suite  $(x_n)$  de  $E$  telle que

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}). \end{cases}$$

**E** Dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $(x_n)$  telle que

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 3x_n - 2x_{n+1} - n. \end{cases}$$

Il arrive même que l'on définisse une suite par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme se calcule à l'aide de tous les précédents. Là aussi on admet l'existence et l'unicité.

## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

### 3.1 L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$

### 3.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

### 3.3 Division euclidienne

## 4. Les nombres rationnels

1. Nombres entiers

2. Suites définies par une relation de récurrence

3. Entiers relatifs

3.1 L'anneau  $(\mathbb{Z}, +, \times)$

3.2 L'ensemble ordonné  $(\mathbb{Z}, \leq)$

3.3 Division euclidienne

4. Les nombres rationnels

D

On désigne par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, -3, \dots \}.$$

P

*L'ensemble  $\mathbb{Z}$  muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif.*

- 1. L'addition est une loi de composition interne dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 2. L'addition est associative dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 3. L'addition admet 0, élément de  $\mathbb{Z}$  comme élément neutre.*
- 4. L'addition est commutative dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 5. Tout entier relatif admet pour opposé un entier relatif.*
- 6. La multiplication est une loi de composition interne dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 7. La multiplication est associative dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 8. La multiplication admet 1, élément de  $\mathbb{Z}$  comme élément neutre.*
- 9. La multiplication est commutative dans  $\mathbb{Z}$ .*
- 10. La multiplication dans  $\mathbb{Z}$  est distributive par rapport à l'addition.*

P

*Les seuls éléments ayant un inverse pour la multiplication dans  $\mathbb{Z}$  sont 1 et  $-1$ .*



## 1. Nombres entiers

## 2. Suites définies par une relation de récurrence

## 3. Entiers relatifs

### 3.1 L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$

### 3.2 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

### 3.3 Division euclidienne

## 4. Les nombres rationnels

T

*L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est muni d'une relation d'ordre totale  $\leq$  vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes*

- 1. Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus petit élément.*
- 2. Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus grand élément.*

1. Nombres entiers

2. Suites définies par une relation de récurrence

3. Entiers relatifs

3.1 L'anneau  $(\mathbb{Z}, +, \times)$

3.2 L'ensemble ordonné  $(\mathbb{Z}, \leq)$

3.3 Division euclidienne

4. Les nombres rationnels

D

## Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soient  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ . Alors il existe un unique couple d'entiers  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  vérifiant

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

- ▶  $q$  est le **quotient** de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
- ▶  $r$  est le **reste** de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

*Démonstration.* ► Commençons prouver l'unicité d'un couple  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que  $a = bq + r$  et  $0 \leq r < b$ . Supposons l'existence de deux couples  $(q, r)$  et  $(q', r')$  vérifiant ces conditions. Alors  $a = qb + r = q'b + r'$ , d'où

$$r - r' = b(q - q').$$

Puisque  $0 \leq r < b$  et  $0 \leq r' < b$ , on en déduit  $-b < r - r' < b$ , c'est-à-dire  $0 \leq |r - r'| = b|q - q'| < b$ . Puisque  $b > 0$  on a  $|q - q'| < 1$  et comme  $|q - q'| \in \mathbb{N}$ : on a donc  $q = q'$ . Par conséquent,  $r - r' = b(q - q') = 0$ .

► Soit  $E = \{ k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a \}$ . Cet ensemble est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{Z}$ . En effet, si  $a \geq 0$ ,  $0 \in E$  et  $a$  majore  $E$  (car  $b \geq 1$ ). Si  $a < 0$ , alors 0 majore  $E$ . L'ensemble  $E$  admet donc un plus grand élément  $q$ . On a donc  $qb \leq a < (q + 1)b$  (sinon  $q + 1 \in E$ ) et en posant  $r = a - bq$ , on a bien  $0 \leq r < b$ .



E

$$\begin{array}{r|l} 543 & 17 \\ 33 & 31 \\ 16 & \end{array} \quad \text{lci } a = 543, b = 17, q = 31, r = 16.$$

1. Nombres entiers
2. Suites définies par une relation de récurrence
3. Entiers relatifs
4. Les nombres rationnels

L'opération inverse de la multiplication dans  $\mathbb{Z}$  (division) n'est pas toujours définie :  $\frac{2}{3}$  n'a pas de sens dans  $\mathbb{Z}$ . L'introduction des nombres rationnels pallie ce défaut. La *construction* de  $\mathbb{Q}$  n'est pas au programme, l'important est de garder à l'esprit les principales propriétés de  $\mathbb{Q}$ . L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est donc supposé connu (ou construit), il contient  $\mathbb{Z}$ , et ses éléments sont appelés **nombres rationnels**.

D

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est l'ensemble des nombres réels  $x$  représentés par  $\frac{p}{q}$ , avec  $p$  appartenant à  $\mathbb{Z}$  et  $q$  appartenant à  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

N

$$\mathbb{Q}^{\star} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$



À tout couple  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  correspond un nombre rationnel écrit sous la forme de **fraction**  $\frac{a}{b}$ , et tout nombre rationnel s'écrit de cette manière. Une telle écriture n'est pas unique, vu la propriété suivante :

**P** Si  $a, c \in \mathbb{Z}$  et  $b, d \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

P

1. L'addition dans  $\mathbb{Q}$  est une loi de composition interne. On a

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

2. L'addition est associative, commutative dans  $\mathbb{Q}$ .

3. Le nombre 0 appartient à  $\mathbb{Q}$  est élément neutre pour l'addition.

4. Le nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  a pour opposé  $-\frac{p}{q}$ .

5. La multiplication dans  $\mathbb{Q}$  est une loi de composition interne. On a

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

6. La multiplication est associative, commutative dans  $\mathbb{Q}$ .

7. Le nombre 1 appartient à  $\mathbb{Q}$  est élément neutre pour la multiplication.

8. Tout nombre rationnel non nul a un inverse dans  $\mathbb{Q}$ . Si  $p \neq 0$ ,  $\frac{p}{q}$  a pour inverse  $\frac{q}{p}$ .

R

On calcule dans  $\mathbb{Q}$  comme dans  $\mathbb{R}$ .

E

Il existe des nombres réels non rationnels, appelés **irrationnels** :  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$  sont irrationnels. Ces exemples seront développés ultérieurement.