CHAPITRE 11

DÉNOMBREMENT

11.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

Lemme 1 *Soient deux entiers m, t tels que $m > 1$ et $1 \leq t \leq m$.*

Alors il existe une bijection φ de l'ensemble $T = [\![1, m]\!] \setminus \{ t \}$ sur $[\![1, m-1]\!]$.

Démonstration. L'application $s : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!]$ définie par

$$s(t) = m, \qquad s(m) = t, \qquad s(k) = k \text{ si } k \notin \{ m, t \}$$

est une bijection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$ (c'est par exemple l'identité si $t = m$).

L'application φ de T dans $[\![1, m-1]\!]$ définie par $\varphi(k) = s(k)$ convient. ∎

Théorème 2 *Soient $p, q \in \mathbb{N}^\star$.*

1. *Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \leq q$.*
2. *Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \geq q$.*
3. *Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p = q$.*

Démonstration. **1.**

- Si $p \leq q$, on a $[\![1, p]\!] \subset [\![1, q]\!]$, et alors il est clair que l'injection canonique $x \mapsto x$ de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ est injective.
- Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $R(p)$: pour $q \in \mathbb{N}^\star$, s'il existe une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$, alors $p \leq q$.

  Pour $p = 1$, il n'y a rien à prouver, car alors $[\![1, p]\!]$ est un singleton.

  Supposons $p \geq 1$ et $R(p)$ vraie. Soit $q \in \mathbb{N}^\star$ et $f : [\![1, p+1]\!] \to [\![1, q]\!]$ une application injective. Notons que $1 \neq p + 1$, donc $[\![1, q]\!]$ n'est pas un singleton, puisque f est injective, donc $q \geq 2$.

– 1-ier cas : $f(p+1) = q$. Alors, par injectivité de f, $f(\llbracket 1,p\rrbracket) \subset \llbracket 1,q-1\rrbracket$. $f|_{\llbracket 1,p\rrbracket}$ est une injection de $\llbracket 1,p\rrbracket$ dans $\llbracket 1,q-1\rrbracket$ donc $q-1 \geq p$ à cause de l'hypothèse de récurrence, d'où $p+1 \leq q$
– 2-ième cas : $f(p+1) < q$. Soit alors $g : \llbracket 1,q\rrbracket \to \llbracket 1,q\rrbracket$ la bijection telle que

$$g(q) = f(p+1) \text{ et } g(f(p+1)) = q$$

et $g(i) = i$ pour $i \neq q$, $i \neq f(p+1)$. Alors $g \circ f : \llbracket 1,p+1\rrbracket \to \llbracket 1,q\rrbracket$ est une injection, et $g \circ f(p+1) = q$, d'où $q \geq p+1$ par le 1-ier cas.
On a donc prouvé $R(p+1)$.
Le résultat s'en suit par récurrence sur p.

2. • Si $p \geq q$, l'application $f : \llbracket 1,p\rrbracket \to \llbracket 1,q\rrbracket$ définie par

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \in \llbracket 1,q\rrbracket \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est surjective.

• Soit f une surjection de $\llbracket 1,p\rrbracket$ dans $\llbracket 1,q\rrbracket$.
Pour chaque $k \in \llbracket 1,q\rrbracket$, l'ensemble $E_k = f^{-1}(\{k\})$ est non vide, donc admet un plus petit élément, que nous notons $g(k)$. On a ainsi construit $g : \llbracket 1,q\rrbracket \to \llbracket 1,p\rrbracket$ et il est clair que g est injective, d'où $p \geq q$.

3. Immédiat.

∎

11.2 Ensembles finis

§1 Cardinal

Définition 3

Soit X un ensemble. On dit que X est **fini** si $X = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $\llbracket 1,n\rrbracket$. Si un ensemble n'est pas fini, on dit qu'il est **infini**.

Autrement dit, X est fini si l'on peut «numéroter» ses éléments, c'est-à-dire écrire

$$X = \{ x_1, \dots, x_n \}.$$

Lorsque X est fini, non vide, le résultat suivant permet de définir le cardinal de X.

Définition 4

Si X est un ensemble fini et non vide, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec $\llbracket 1,n\rrbracket$, on l'appelle **cardinal** de X ou **nombre d'éléments** de X.

La cardinal de X est noté $|X|$, $\mathrm{card}(X)$ ou $\#X$. Par convention, le cardinal de $\emptyset$ est 0.

Démonstration. L'existence d'une bijection entre X et $\llbracket 1,n\rrbracket$ provient de la définition de X est un ensemble fini.

Si l'on a deux bijections $\varphi : X \to \llbracket 1,n\rrbracket$ et $\psi : X \to \llbracket 1,p\rrbracket$, alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une bijection de $\llbracket 1,p\rrbracket$ sur $\llbracket 1,n\rrbracket$, donc $n = p$. ∎

La proposition suivante découle immédiatement de la définition du cardinal. Elle est essentielle au fondement de tout dénombrement digne de ce nom.

Proposition 5

Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une bijection de X sur Y. Alors X est fini si et seulement si Y est fini et dans ce cas

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y).$$

Exemples 6

1. Tout singleton est fini et de cardinal 1.
2. L'application $k \mapsto 2k$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur l'ensemble des entiers pairs de $[\![1, 2n]\!]$. Cet ensemble est donc fini et de cardinal n.
3. Si $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \leq b$, alors $\operatorname{card}\left([\![a, b]\!]\right) = b - a + 1$.
4. Si $\operatorname{card}(X) = n \geq 1$ et si $x \in X$, alors $\operatorname{card}(X \setminus \{ x \}) = n - 1$.

§2 Propriétés des ensembles finis

Théorème 7

Soient X et Y deux ensembles finis, de cardinaux n et p respectivement.

1. *Il existe une injection de X dans Y si, et seulement si, $n \leq p$.*
2. *Il existe une surjection de X dans Y si, et seulement si, $n \geq p$.*
3. *Il existe une bijection de X dans Y si, et seulement si, $n = p$.*

Corollaire 8

Principe des tiroirs et des chaussettes
Si p chaussettes sont rangées dans n tiroirs et $p > n$, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

Théorème 9

Toute partie d'un ensemble fini est finie
Soient X un ensemble fini et A une partie de X. Alors l'ensemble A est fini,

$$\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(X).$$

De plus, $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(X)$ *si et seulement si* $A = X$.

Démonstration. Écartons le cas évident où l'un des deux ensembles est vide.

Raisonnons par récurrence sur $n = \operatorname{card}(X)$.

Supposons X de cardinal $n \geq 1$, la conclusion étant vraie pour tout ensemble fini de cardinal strictement inférieur à n. Soit A une partie de X. Si $A = X$, il n'y a rien a démontrer. Sinon, soit $x \in X \setminus A$. Il existe un $q \in [\![1, n]\!]$ et une bijection de $X \setminus \{ x \}$ sur $[\![1, n]\!] \setminus \{ q \}$. Comme $[\![1, n]\!] \setminus \{ q \}$ est de cardinal $n - 1$, $X \setminus \{ x \}$ l'est aussi. Or $A \subset X \setminus \{ x \}$. D'après l'hypothèse de récurrence, A est donc fini, de cardinal au plus $n - 1$, d'où la conclusion.

Le cas d'égalité se traite de manière analogue par récurrence.

∎

§3 Applications entre ensembles finis de même cardinal

Théorème 10 *Soient X et Y deux ensembles finis ayant le* même *nombre d'éléments, et f une application de X dans Y. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f est une injection ;

(ii) f est une surjection ;

(iii) f est une bijection.

Ce théorème s'applique au cas d'une application f d'un ensemble **fini** dans lui-même.

Démonstration. Notons $n = \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$. Il existe donc deux bijections

$$\varphi : [\![1, n]\!] \to X \text{ et } \psi : [\![1, n]\!] \to Y.$$

Notons $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

$$g : [\![1, n]\!] \xrightarrow[bij.]{\varphi} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow[bij.]{\psi^{-1}} [\![1, n]\!].$$

On a donc $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$.

- Si f est bijective, elle est injective et surjective.
- Supposons f est injective, l'application g est injective comme composée d'injection. Ainsi, l'application $x \mapsto g(x)$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $g([\![1, n]\!])$. De plus, $g([\![1, n]\!])$ est une partie de $[\![1, n]\!]$ à n éléments, donc $g([\![1, n]\!]) = [\![1, n]\!]$, vu le théorème 9 : g est donc surjective. Finalement, g est bijective et $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ également.
- Supposons f est surjective, l'application g est surjective comme composée de surjections. Si $k \in [\![1, n]\!]$, notons $h(k)$ le plus petit antécédents de k par g. On définit ainsi une application h de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, et $g \circ h$ est, par construction, l'application identique de $[\![1, n]\!]$.

  Il en résulte que h est injective, en effet, pour $x_1, x_2 \in [\![1, n]\!]$,

  $$h(x_1) = h(x_2) \implies g \circ h(x_1) = g \circ h(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

  Vu ce qui précède, h est bijective, donc g l'est aussi (c'est la réciproque de h). Finalement, $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ est bijective comme composée de bijections.

∎

Ce théorème est faux pour les ensembles infinis.

D'ailleurs, on doit à Dedekind la définition suivante des ensembles infinis :

> On dit qu'un ensemble E est **infini** s'il existe une injection de E vers E qui ne soit pas surjective. Un ensemble qui n'est pas infini est dit **fini**.

Avant lui, on avait déjà remarqué cette propriété pour certains ensembles infinis.

Corollaire 11 *$\mathbb{N}$ est infini.*

Test 12 Si f est une application de X fini dans un ensemble quelconque Y, alors $f(X)$ est fini et

$$\operatorname{card} f(X) \leq \operatorname{card} X.$$

De plus, $\operatorname{card} f(X) = \operatorname{card} X$ si et seulement si f est injective.

Test 13 Si f est une application surjective de X fini dans un ensemble quelconque Y, alors Y est fini et

$$\operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X.$$

De plus, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ si et seulement si f est bijective.

Test 14 Si f est une application injective de X dans Y, si $f(X)$ est fini, alors X est fini et

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} f(X).$$

§4 Cardinal d'une union

Théorème 15 *Soit A et B deux ensembles finis et disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Démonstration. Si A ou B est vide, le résultat est clair. Supposant A et B de cardinaux p et q strictement positifs, on possède deux bijections

$$\alpha : A \to [\![1, p]\!] \quad \text{et} \quad \beta : B \to [\![1, q]\!].$$

On définit alors $\gamma : A \cup B \to [\![1, p+q]\!]$ par

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A \\ p + \beta(x) & x \in B. \end{cases}$$

Il ne vous reste plus qu'à montrer que γ est bijective. ∎

Proposition 16 *Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \setminus B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Remarquons que $A \cap B$ et A' sont finies car incluses dans A qui est finie.

Or A est l'union disjointe de A' et $A \cap B$, donc

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') + \operatorname{card}(A \cap B).$$

∎

Corollaire 17 *Soit X un ensemble fini et A une partie de X, alors $\complement_X A$ est fini et*

$$\operatorname{card}\left(\complement_X A\right) = \operatorname{card}(X) - \operatorname{card}(A).$$

Théorème 18 *Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Démonstration. Notons $A' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ et $B' = B \setminus A$. Ce sont des parties finies car incluses dans A et B qui sont finies.

Puisque A est réunion disjointe de $A \cap B$ et A',

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A').$$

De même, $A \cup B$ est réunion disjointe de B et de A' donc

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A')$$

L'égalité annoncée en résulte:

$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A') = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(A').$$

∎

Proposition 19 *Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est fini et*

$$\operatorname{card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\right) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \dots + \operatorname{card}(A_n)$$

Démonstration. Par récurrence sur n. ∎

Corollaire 20 *Soit E un ensemble et $\left(A_i\right)_{i \in I}$ un recouvrement disjoint de A. On supposes l'ensemble I fini ainsi que chaque ensemble A_i ($i \in I$). Alors E est fini et*

$$\operatorname{card}(E) = \sum_{i \in I} \operatorname{card}(A_i).$$

Ce résultat s'applique en particulier lorsque $\left(A_i\right)_{i \in I}$ est une partition de E.

11.3 Analyse combinatoire

§1 Principe des Bergers

Lemme 21 **Lemme des bergers**
Si un ensemble X possède une partition en p sous-ensembles ayant même cardinal r, alors X est fini et $\operatorname{card}(X) = r \times p$.

Théorème 22 **Principe des Bergers**
Soient X, Y deux ensembles et f une surjection de X sur Y. On suppose Y fini et que les ensembles $f^{-1}(\{y\})$, pour $y \in Y$, aient tous même cardinal p (c'est-à-dire que tout élément de Y possède exactement p antécédents par f). Alors X est fini et

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \times p.$$

Ce lemme justifie qu'un berger trouve le nombre de ses moutons en comptant leurs pattes et en divisant le résultat par quatre ; d'où sa dénomination. En pratique, le principe des bergers permet de formaliser la notion de «choix successifs». Il est souvent utilisé de façon implicite dans les raisonnements. Il faut essentiellement en retenir que lorsqu'on fait des choix successifs, et qu'à chaque étape, le nombre de possibilité ne dépend pas de la situation dans laquelle on se trouve (c'est-à-dire des choix précédents), alors le nombre total de possibilités s'obtient en faisant le produit du nombre de possibilités à chaque étape.

Exemple 23 Combien y-a-t-il de couples $(x, y) \in [\![1, 10]\!]$ tels que $x \neq y$?

§2 Cardinal d'un produit cartésien

Théorème 24 *Soient X et Y deux ensembles finis. Alors l'ensemble $X \times Y$ est fini et*

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card} X \times \operatorname{card} Y.$$

Démonstration. Posons $m = \operatorname{card}(X)$ et $p = \operatorname{card}(Y)$. On considère l'application $f : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$. Si $x \in X$, $f^{-1}(\{ x \}) = \{ x \} \times Y$ est une partie à p éléments de $X \times Y$, car $y \mapsto (x, y)$ est une bijection de Y sur $f^{-1}(\{ x \})$. Le cardinal de $X \times Y$ est donc $\operatorname{card}(X) \times p$, c'est-à-dire mp. ∎

Corollaire 25 *Soient $p \geq 1$ un entier et $X_1, \dots, X_n$ des ensembles finis. Alors l'ensemble produit $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$ est fini et l'on a*

$$\operatorname{card}\left(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p\right) = \operatorname{card}(X_1) \times \operatorname{card}(X_2) \times \cdots \times \operatorname{card}(X_p).$$

En particulier, si X est un ensemble fini,

$$\operatorname{card}\left(X^p\right) = (\operatorname{card} X)^p.$$

Définition 26 Soit X un ensemble. Les éléments de X^p sont appelés ***p*-listes** ou ***p*-uplets** d'éléments de X.

Remarque

- Les p-listes sont aussi appelées **mots**, **listes** ou **suites** de longueur p.
- L'ordre des éléments de la p-liste est important.
- Une p-liste peu contenir plusieurs fois le même élément.
- Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

Exemple 27 Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

- $(1, 2, 2)$ et $(5, 3, 4)$ sont des 3-listes d'éléments de X.
- $(5, 3, 4)$ et $(3, 5, 4)$ sont des 3-listes différentes.

§3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Théorème 28 *Soient X, Y deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. L'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y est de cardinal p^n :*

$$\operatorname{card}(\mathscr{F}(X, Y)) = (\operatorname{card} Y)^{\operatorname{card} X}.$$

Démonstration. Lorsque X est vide, il existe une unique application de X dans Y : celle dont le graphe est vide. La formule est donc correcte, puisque $p^0 = 1$.

Dans le cas contraire, numérotons les éléments de X : $x_1, \dots, x_n$, ce qui revient à choisir une bijection $i \mapsto x_i$ de $[\![1, n]\!]$ sur X. On définit alors une application

$$F : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(X, Y) & \to & Y^n \\ f & \mapsto & \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) \end{array}.$$

Soit $v = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$. Le seul antécédent de v par F est l'application $f : X \to Y$ définie par $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Ainsi F est bijective. Le cardinal de Y^n étant p^n, on a la conclusion. ∎

§4 Nombre de parties d'un ensemble fini

Lemme 29 *Soit X un ensemble. L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X sur $\mathscr{F}(X, \{0, 1\})$.*

Démonstration. À toute fonction $f \in \mathscr{F}(X, \{0, 1\})$, associons la partie $f^{-1}(\{1\})$ de X.

Les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathscr{F}(X, \{0, 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(X, \{0, 1\}) & \to & \mathcal{P}(X) \\ f & \mapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (regarder les composées dans les deux sens). ∎

Théorème 30 *Soit X un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est fini et*

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\operatorname{card}(X)}.$$

§5 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Théorème 31 *Soient X, Y deux ensembles finis, $p = \operatorname{card}(X)$, $n = \operatorname{card}(Y)$.*

- *Si $p \le n$, le cardinal de l'ensemble $I(X, Y)$ des injections de X dans Y est* [a]

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+2) \times (n-p+1)$$

- *Si $p > n$, il n'y a pas d'injection de X dans Y.*

[a] 31: Il y a p termes dans ce produit.

Démonstration. Si $p = 0$, $X = \emptyset$ et il existe une unique application de X dans Y (dont le graphe est vide) et elle est injective, la formule reste donc valable.

Pour tout $n \geq 1$ fixé, nous démontrons la formule par récurrence finie sur $p \geq 1$. On note $R(p)$ l'assertion : pour tout ensemble X de cardinal p et tout ensemble Y de cardinal $n \geq p$, le cardinal de $I(X, Y)$ est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Pour $p = 1$, toute application de X dans Y est injective, le nombre d'injections de X dans Y est donc bien $n = \text{card}(Y) = \frac{n!}{(n-1)!}$.

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, tel que la proposition $R(p)$ soit vérifiée. On considère alors X un ensemble à $p+1$ éléments. Soit a un élément de X ; posons $X' = X \setminus \{ a \}$, d'où card $X' = p$.

À toute injection f de $I(X, Y)$, on peut associer bijectivement le couple (g, b) où g est la restriction de f à X' et b est $f(a)$, qui n'appartient pas à $g(X') = f(X')$ qui est de cardinal p. Par suite

$$\text{card}\,(I(X, Y)) = \text{card}\,\big(I(X', Y)\big) \times (n-p) = \frac{n!}{(n-p)!} \times (n-p) = \frac{n!}{(n-(p+1))!}.$$

Nous avons ainsi démontré $R(p+1)$ et le résultat par récurrence. ∎

Corollaire 32 *Le nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal n est $n!$.*

Soit X un ensemble fini, de cardinal n. Une suite $(x_1, \dots, x_p)$ de p éléments de X est par définition une application $f : [\![1, p]\!] \to Y$ ($f(i) = x_i$ pour $i = 1 \dots p$), et $x_1, \dots, x_p$ sont distincts si, et seulement si, f est *injective*.

Définition 33 Soit X un ensemble.

- Un ***p*-arrangement** d'éléments de X est une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans X.
- On appelle aussi ***p*-arrangement** une *p-liste d'éléments distincts deux à deux*, c'est-à-dire sans répétition.

Si $\text{card}(X) = n$ et $p \in [\![0, n]\!]$, il existe donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de X.

Remarque

- On dit aussi un **arrangement de *p* éléments** ou ***p*-liste d'éléments distincts** ou ***p*-uplet d'éléments distincts**.
- L'ordre des éléments d'un p-arrangement est important.

Définition 34 Soit X un ensemble.

- Une bijection de X dans lui-même s'appelle une **permutation** de X.
- Lorsque X est fini, on appelle aussi **permutation** de X une liste formée des $\text{card}(X)$ éléments de X.

Proposition 35 *Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n est $n!$.*

§6 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Définition 36 Soit X un ensemble. On appelle **combinaison de p éléments** de X, ou p-combinaison, toute partie à p éléments de X.

Remarque

- Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts.
- L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Exemple 37 Si $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

- $\{ 1, 2, 3 \}$ est une combinaison de 3 éléments de X.
- $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 2, 3, 1 \}$.
- $\{ 1, 2, 2 \}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de X.

Proposition 38 *Soit X un ensemble fini de cardinal n. Étant donné un entier $p \in [\![0, n]\!]$, le nombre de parties à p éléments de X est*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p > n$. Avec cette convention, le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$ pour *tout* entier naturel p.

Esquisse. Une p-liste d'éléments distincts de X est une permutation d'une combinaison de p éléments de X.

Pour chaque façon de choisir une combinaison de p éléments de X, il y a $p!$ permutations de ses éléments. On a donc

$$\operatorname{card} I([\![1, p]\!], X) = p! \times \operatorname{card} \mathcal{P}_p(X).$$

∎

Démonstration. La formule est vraie pour $p = 0$, puisque $\binom{n}{0} = 1$ et que, d'autre part, la seule partie de X de cardinal 0 est $\emptyset$.

Plaçons nous maintenant dans le cas $1 \leq p \leq n$. Nous cherchons le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_p(X)$ des parties de X à p éléments.

Pour tout $f \in I([\![1, p]\!], X)$, on a $\operatorname{Im}(f) = f([\![1, p]\!]) \in \mathcal{P}_p(X)$; en posant $\varphi(f) = f([\![1, p]\!])$, on définit donc une application $\varphi : I([\![1, p]\!], X) \to \mathcal{P}_p(X)$. Il s'agit d'une surjection ; en effet étant donné $A \in \mathcal{P}_p(X)$, $\varphi^{-1}(A)$ est l'ensemble des injections de $[\![1, p]\!]$ dans A, qui sont au nombre de $p!$. Le principe des bergers s'applique et donne

$$\operatorname{card} I([\![1, p]\!], X) = p! \times \operatorname{card}\left(\mathcal{P}_p(X)\right).$$

D'autre part $\operatorname{card} \mathfrak{I}_p = n!/(n-p)!$. ∎

Remarque Le nombre $\binom{n}{p}$ des parties à p éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est aussi le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Proposition 39

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
4. $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 40

Pour tout entier n, on a

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Démonstration. Soit X est un ensemble à n éléments. Les $\mathcal{P}_p(X)$, $p = 0 \dots n$, forment une partition de $\mathcal{P}(X)$. ∎

Proposition 41

Relation de Pascal
Soient n et p des entiers ; on a

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Démonstration. Voici une démonstration sans calcul.

Soit X un ensemble de cardinal $n+1$, a un élément de X et $X' = X \setminus \{ a \}$. Les parties à p éléments de X qui ne contiennent pas a sont les parties à p éléments de X' : leur nombre est $\binom{n}{p}$. Celles qui contiennent a sont de la forme $A \cup \{ a \}$ où A est une partie à $p-1$ éléments de A', et leur nombre est donc $\binom{n}{p-1}$. ∎

D'où la construction par récurrence du tableau des coefficients binomiaux, appelé **triangle de Pascal**

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$\dots$	p	$p+1$	$\dots$	$p=n$	$p=n+1$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$					
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\dots$	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	$\dots$		$\binom{n+1}{p+1}$	$\dots$	$\binom{n+1}{n}$	1

Exemple 42

Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. Par calcul.
2. Par dénombrement.

3. Par application de la formule du binôme.

Démonstration. **1.** Par calcul. De $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, on tire $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$S = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Par dénombrement. Soit E un ensemble de cardinal n. On calcule de deux manières différentes le nombre $B = \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A$.

On a

$$B = \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{A\in\mathcal{P}(E)\\ \operatorname{card}(A)=k}} \operatorname{card} A\right).$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, les parties A de E de cardinal k sont en nombre $\binom{n}{k}$, donc la somme de leurs cardinaux est $k\binom{n}{k}$. En faisant varier k, on trouve $B = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = S$.

L'application $A \mapsto \complement A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$2B = \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A + \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{card}\complement A = \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \left(\operatorname{card} A + \operatorname{card}\complement A\right) = \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} n = n2^n.$$

D'où $S = n2^{n-1}$.

3. Par application de la formule du binôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. En dérivant par rapport à x, il vient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1},$$

et pour $x = 1$, on obtient $S = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

∎