Chapter 14 Groupe symétrique

Solution 14.1
Solution 14.2
Solution 14.3
Solution 14.4
Solution 14.5 *Inégalité de réarrangement*

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note

$$T(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}.$$

Puisque $\mathcal{S}_n$ est un ensemble fini, il existe au moins une permutation σ telle que

$$T(\sigma) = \max T\left(\mathcal{S}_n\right),$$

c'est-à-dire telle que le réel $T(\sigma)$ soit maximal.

Si plusieurs permutations réalisent ce maximum, on en choisie une qui possède le plus grand nombre de points fixes. Nous allons montrer par l'absurde que $\sigma = \mathrm{Id}$.

Supposons $T(\sigma) > T(\mathrm{Id})$. Puisque $\sigma \neq \mathrm{Id}$, on pose

$$j = \min i \in [\![1, n]\!] \,|\, \sigma(i) \neq i \qquad \text{et} \qquad k = \sigma^{-1}(j).$$

Remarquons que, par construction de σ, on a $k > j$. Définissons la permutation τ par

$$\tau(i) = \begin{cases} j & \text{si } i = j \\ \sigma(j) & \text{si } i = k \\ \sigma(i) & \text{si } i \notin \{\, j, k \,\}. \end{cases}$$

Intuitivement, on «rajoute» deux points fixes à la permutation σ en échangeant $\sigma(j)$ et $j = \sigma(k)$ dans la seconde ligne:

$$\begin{aligned} \tau &= \begin{pmatrix} j & \sigma(j) \end{pmatrix} \circ \sigma \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j-1 & \sigma(k) & \sigma(j+1) & \dots & \sigma(k-1) & \sigma(j) & \sigma(k+1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} T(\tau) - T(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\tau(i)} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} \\ &= \sum_{i \in \{\, j,k \,\}} x_i y_{\tau(i)} - \sum_{i \in \{\, j,k \,\}} x_i y_{\sigma(i)} \\ &= x_j y_j + x_k y_{\sigma(j)} - x_j y_{\sigma(j)} - x_k y_j && (\sigma(k) = j) \\ &= (x_j - x_k)(y_j - y_{\sigma(j)}) \\ &\geq 0 && \text{car } k > j \text{ et } \sigma(j) > j. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le choix de sigma car τ a plus de points fixes.

Solution 14.6
Solution 14.7 *Exemples dans $\mathcal{S}_7$*
Solution 14.8

1. Les inversions de σ sont :

$$\begin{array}{ccccc}
\{1,4\}, & \{1,5\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, \\
\{2,6\}, & \{2,7\}, & \{2,8\}, & \{2,10\}, & \{2,11\}, \\
\{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, & \{3,7\}, & \{3,8\}, \\
\{6,7\}, & \{6,8\}, & \{9,10\}, & \{9,11\}, & \{9,12\}.
\end{array}$$

Au total, il y a $2+8+5+2+3=20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

2. $\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.

Puis, $\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.

Puis, $\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.

Puis, $\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.

Puis, $\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.

Puis, $\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.

Puis, $\tau_{1,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = \tau_{1,3}$.

Par suite,

$$\sigma = \tau_{11,12}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{1,4}\circ\tau_{1,3}.$$

3. $O(1) = \{1,3,4,7\} = O(3) = O(4) = O(7)$, puis $O(2) = \{2,5,8,10\}$ puis $O(6) = \{6\}$ et $O(9) = \{9,11,12\} = O(11) = O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

4. *cas* σ^{2041} à adapter…

σ est donc le produit commutatif des cycles

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

On a $c_1^4 = c_2^4 = \mathrm{Id}$ et $c_3^3 = \mathrm{Id}$. Or, $2041 = 4.1010 + 1$. Donc, $c_1^{2041} = c_1(c_1^4)^{1010} = c_1$, et de même $c_2^{2041} = c_2$. Puis, $c_3^{2041} = (c_3^3)^{680}c_3 = c_3$. Puisque c_1, c_2 et c_3 commutent,

$$\sigma^{2041} = c_1^{2041}c_2^{2041}c_3^{2041} = c_1c_2c_3 = \sigma.$$