Chapter 27 Limite, continuité

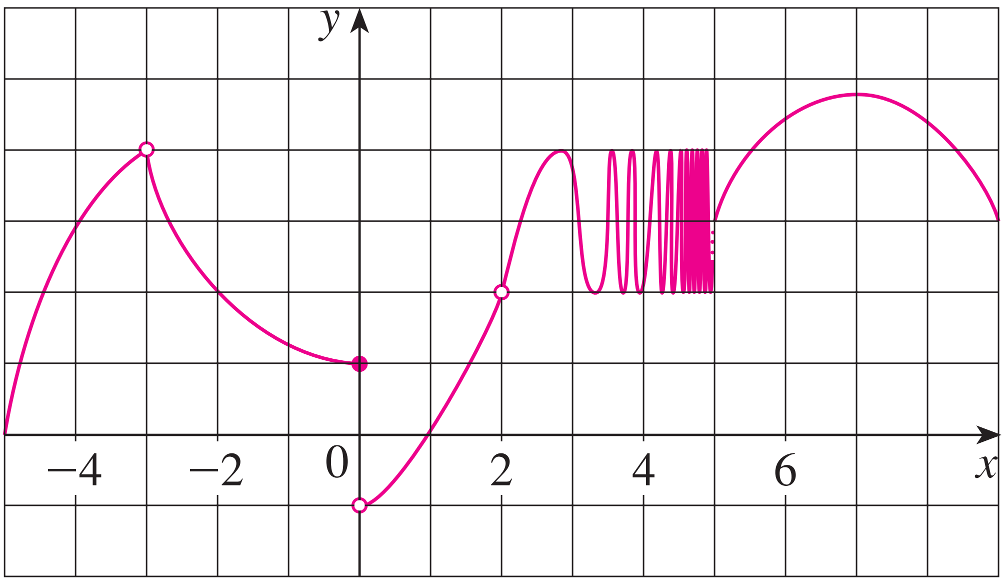
27.1 Caractère local d'un problème

27.2 Limites

Exercice 27.1

Pour la fonction h dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

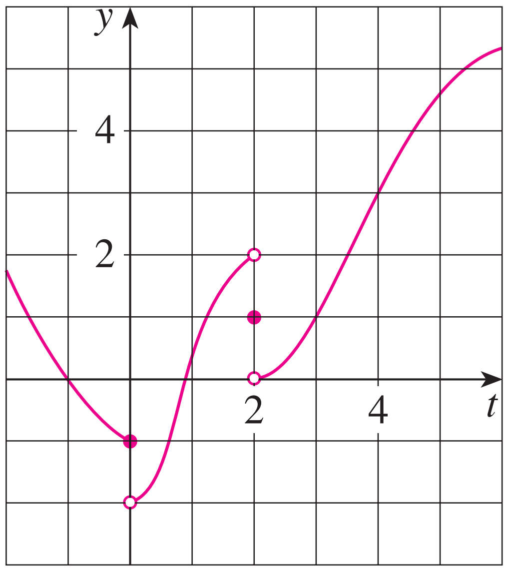
1. $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} h(x)$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}} h(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$.
4. $h(-3)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} h(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} h(x)$.
7. $\lim\limits_{x\to0} h(x)$.
8. $h(0)$.
9. $\lim\limits_{x\to2} h(x)$.
10. $h(2)$.
11. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} h(x)$.
12. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} h(x)$.



Exercice 27.2

Pour la fonction g dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{t\to0\\<}} g(t)$.
2. $\lim\limits_{\substack{t\to0\\>}} g(t)$.
3. $\lim\limits_{t\to0} g(t)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t\to2\\<}} g(t)$.
5. $\lim\limits_{\substack{t\to2\\>}} g(t)$.
6. $\lim\limits_{t\to2} g(t)$.
7. $g(2)$.
8. $\lim\limits_{t\to4} g(t)$.



Exercice 27.3

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

Exercice 27.4

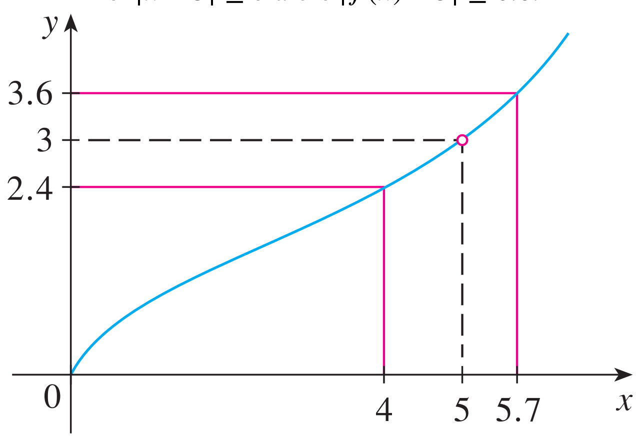
Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln\left(x + x^2\right) \qquad \text{avec} \qquad x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001.$$

Exercice 27.5

À l'aide de la courbe représentative de f, déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } |x - 5| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - 3| \leq 0.6.$$



Exercice 27.6

Illustrer la définition de la limite

$$\lim_{x\to 1} \left(4 + x - 3x^3\right) = 2$$

en déterminant une valeur de δ correspondante à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0.1$.

Exercice 27.7

Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition (en ε, δ) de la limite.

1. $\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$.
2. $\lim_{x \to -3} (1-4x) = 13$.
3. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$.
4. $\lim_{x \to 4} (7-3x) = -5$.

Exercice 27.8

1. Montrer, en revenant à la définition de la limite, que
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} = 1.$$
2. Montrer de même que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Exercice 27.9

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer

1. $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = 3$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1$.
3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$.

Exercice 27.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
On suppose que f a une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.

27.3 Limite et relation d'ordre

Exercice 27.11

1. Démontrer à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$
2. Calculer, si possible

(a) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(c) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$;

(d) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\lfloor x \rfloor}{2x}$.

Exercice 27.12

On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^k}.$$

1. Préciser la valeur $f(x)$ pour $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que f est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
4. En appliquant la définition, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 27.13
Montrer
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

27.4 Opérations sur les limites

Exercice 27.14
Trouver
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

27.5 Limites usuelles

Rechercher les asymptotes du graphe de chacune des fonctions f suivantes. Esquisser l'allure du graphe au voisinage des asymptotes.

Exercice 27.15
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;
Exercice 27.16
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$;
Exercice 27.17
$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$;
Exercice 27.18
$f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$;
Exercice 27.19
$f(x) = \tan x + x$;
Exercice 27.20
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;
Exercice 27.21
$f(x) = |x| \sin \dfrac{1}{x}$;
Exercice 27.22
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x}$;
Exercice 27.23
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 27.24
Calculer la limite suivante, si elle existe :
$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Exercice 27.25
Calculer la limite suivante, si elle existe :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x}.$$

Exercice 27.26
Calculer la limite suivante, si elle existe :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}{3 + \cos(x)}.$$

27.6 Continuité

Exercice 27.27

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant le point a, continue en a avec $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, on ait $f(x) > 0$.

Exercice 27.28

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et $L(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

1. L'ensemble $L(I)$ est-il stable pour l'addition ? pour la multiplication ?

2. Vrai ou Faux ? Si f est un élément de $L(I)$ et si f ne s'annule pas, alors $1/f$ est également dans $L(I)$.

Exercice 27.29

Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue en tout $a \in I$.

Exercice 27.30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \\ \mathrm{e}^x & : x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

2. Dans sa copie, Bob affirme

« La fonction $x \mapsto 1$ est continue en 0, donc f est continue en 0. »

Expliquer l'erreur de raisonnement de Bob.

Exercice 27.31

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur continuité.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 27.32

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & x > 4 \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. f est elle continue ?

3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 27.33

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est croissante,
- la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x = -1$.

Exercice 27.34

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Exercice 27.35

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Exercice 27.36

$$f(x) = \frac{e^{2(x+1)} - 1}{e^{x+1} - 1}$$

Exercice 27.37

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$$

Exercice 27.38

$$f(x) = \frac{\sin(x + 1)}{x + 1}$$

Exercice 27.39

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$$

Exercice 27.40 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 27.41 (***)

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et en 1 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right),$$

alors f est constante.

.

27.7 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Exercice 27.42

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$p \cdot f(a) + q \cdot f(b) = (p + q)f(c).$$

Exercice 27.43

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Exercice 27.44

Quel est l'intervalle image par f de I avec $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x \cos x$?

Exercice 27.45

Montrer qu'une fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 27.46

Soit f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f(b) = g(a).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 27.47

Un randonneur parcourt 10 km en 2 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

On pourra introduire la fonction $d : [1,2] \to \mathbb{R}$ qui au temps t associe le nombre de kilomètres parcourus depuis 1 heure.

Exercice 27.48

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que f est strictement monotone.

On pourra supposer $f(0) < f(1)$. Le cas $f(0) > f(1)$ est analogue.

Exercice 27.49

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. L'objectif est d'établir que f est strictement monotone. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas strictement monotone.

1. Justifier qu'il existe $a, b, x, y \in I$ tels que
$$a < b, \quad f(a) < f(b), \quad x < y, \quad f(x) > f(y).$$
2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(t) = f\left(tx + (1-t)a\right) - f\left(ty + (1-t)b\right)$$
s'annule.
3. Conclure.

Exercice 27.50

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 27.51

Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles. On suppose
$$\forall x \in [a,b], f(x) > g(x).$$
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que
$$\forall x \in [a,b], f(x) > g(x) + m.$$

Exercice 27.52

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que
$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$
Montrer que f est bornée.

Exercice 27.53

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$g(x) = \sup_{t \in [x, x+1]} f(t).$$
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

27.8 Continuité uniforme