Chapitre 29

Dérivées

Considérons une fonction f à valeurs numériques définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne se réduisant pas à un seul point. Étant donné un $a \in I$, on se propose d'examiner le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers a. Si f est continue au point a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, autrement dit, la fonction f est «à peu près constante» au voisinage de a.

Mais au lieu d'approcher f au voisinage de a par la fonction constante $x \mapsto f(a)$, on peut chercher à l'approcher par une fonction un peu moins simpliste, par exemple une fonction de la forme $g(x) = Lx + k$.

Le moins que l'on puisse demander est que celle-ci soit égale à f au point a, d'où la condition $La + k = f(a)$. On a alors $g(x) = L(x - a) + f(a)$. Il reste à choisir la constante L la meilleure possible.

Or l'erreur commise en remplaçant f par g est donnée par

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - L(x - a) = (x - a)\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L\right).$$

Pour la minimiser, on est conduit à choisir L de telle sorte que le coefficient de $(x - a)$ soit le plus petit possible et même, ce qui serait encore mieux, tende vers 0 avec $x - a$.

Dans ce chapitre Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ envisagés sont supposés non réduits à un point. Les ensembles de définitions sont supposés être des intervalles ou des réunions d'intervalles.

29.1 Dérivées

§1 Dérivée première

Définition 1

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.
On dit que f est **dérivable** au point a si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie ; la valeur de cette limite s'appelle **dérivée première** (ou simplement **dérivée**) de f au point a, et se note $f'(a)$ ou $\mathrm{D}\,f(a)$.

Remarque En fait, on peut parler de dérivée en a dès que $a \in X$ est un point adhérent de $X \setminus \{\, a \,\}$.

Remarque Lorsque f est dérivable en a, on peut aussi écrire

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

L'application $T : \begin{array}{ccc} X\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ est le **taux d'accroissement de f en a**.

Le nombre dérivé $f'(a)$ se note aussi $\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=a}$.

Proposition 2

La dérivabilité en un point est une notion locale
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$ et $\eta > 0$. On note g la restriction de f à $X \cap \,]a-\eta, a+\eta[$. Alors f est dérivable en a si, et seulement si g est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, on a alors $f'(a) = g'(a)$.

Exemples 3

1. Une fonction constante a en tout point une dérivée nulle.
2. Une fonction affine $x \mapsto px + q$ a en tout point une dérivée égale à p.

Exemple 4

La fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ (définies pour $x \neq 0$) est dérivable en tout point a, $a \neq 0$, car on a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) \Big/ (x-a) = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{1}{a^2}.$$

Exemple 5

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. En effet, pour $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sin(a+h) - \sin(a) &= \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) \\ &= \sin(a)\,(\cos(h) - 1) + \cos(a)\sin(h). \end{aligned}$$

Sachant que

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2}{h} = \frac{h}{2}\,\frac{\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2}{(h/2)^2}, \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

On obtient alors,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\times 0 + \cos(a)\times 1 = \cos(a).$$

Ainsi, sin est dérivable au point a et $\sin'(a) = \cos(a)$.

Exemple 6

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est définie et dérivable en tout réel a et a pour dérivée en a: $f'(a) = n\,(a)^{n-1}$. En effet, pour $x \neq a$, on a

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}a^i.$$

On a alors

$$T_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}a^i \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}a^i.$$

Ainsi, f est dérivable en a et

$$f'(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}a^i = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}.$$

Définition 7

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

- On dit qu'une fonction f est **dérivable sur l'ensemble** I si elle est définie et dérivable en tout point de I.
- Si f est dérivable en tout point de X, on dit simplement que f est **dérivable**.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I (au moins), est appelée **fonction dérivée** ou (par abus de langage) dérivée de f et se note f' ou $\mathrm{D}\,f$.

Si f est dérivable sur l'ensemble I alors la restriction de f à I est dérivable. La réciproque est fausse.

Test 8

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ la fonction «racine carrée».

- Sur quel ensemble est-elle définie?
- Sur quel ensemble est-elle continue?
- Sur quel ensemble est-elle dérivable?

Test 9

Soit $u : x \mapsto |x|$ la fonction «valeur absolue».

- Sur quel ensemble est-elle définie?
- Sur quel ensemble est-elle continue?
- Sur quel ensemble est-elle dérivable?

§2 Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles usuelles

Fonction	Ens. de définition	Ens. de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0)$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
ln	$\mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	exp
sin	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cos
cos	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin$
tan	$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \right\}$	$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
cotan	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0\,[\pi] \}$	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0\,[\pi] \}$	$\dfrac{-1}{\sin^2} = -1 - \mathrm{cotan}^2$
arcsin	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch
ch	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sh

§3 Développement limité d'ordre 1

Théorème 10 **Développement limité à l'ordre 1**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ et $L \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'application f est dérivable en a et $f'(a) = L$.*
2. *Il existe une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,L + (x-a)\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Démonstration. ($1 \implies 2$) Il suffit de poser

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & x \neq a \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

($2 \implies 1$) On a alors pour $x \neq a$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L + \omega(x) \xrightarrow[x \to a]{} L.$$

∎

Définition 11

$DL^1(a)$ de f

Lorsque l'on écrit

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\omega(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to a} \omega(x) = 0,$$

ou de manière équivalente,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\omega(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \omega(h) = 0,$$

on dit que l'on fait un **développement limité à l'ordre 1 de f au point a**.

Avec les notations de Landau, cela s'écrit

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a) \qquad \text{quand } x \to a$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \qquad \text{quand } h \to 0$$

Proposition 12

DL^1 classiques

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et au voisinage de 0, on a

$$\begin{array}{rrr}
(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) & e^x = 1 + x + o(x) & \ln(1+x) = x + o(x) \\
\sin(x) = x + o(x) & \cos(x) = 1 + o(x) & \tan(x) = x + o(x) \\
\mathrm{sh}(x) = x + o(x) & \mathrm{ch}(x) = 1 + o(x) & \tanh(x) = x + o(x) \\
\mathrm{Arcsin}(x) = x + o(x) & \mathrm{Arccos}(x) = 1 + o(x) & \mathrm{Arctan}(x) = x + o(x)
\end{array}$$

§4 Lien entre dérivabilité et continuité

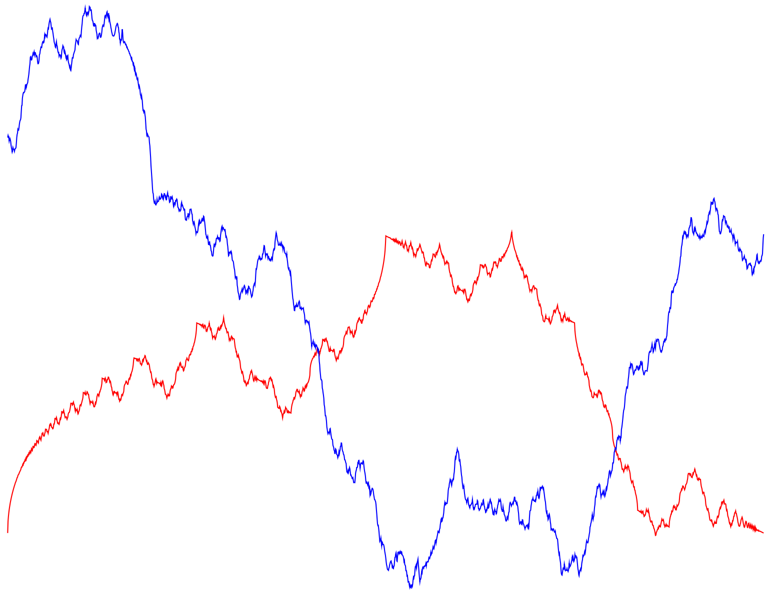
Théorème 13

Toute fonction dérivable au point a est continue en a.

La réciproque est fausse ($x \mapsto |x|$ en 0). On peut donner des exemples de fonctions continues dans un intervalle et n'ayant de dérivée en *aucun* point de l'intervalle.

Dans une lettre à Thomas Stieltjes datant de 1893, Charles Hermite écrivait

> « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée ».



Sans doute Poincaré pensait-il à ces exemples quand il disait, en 1899

> « Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela ».

Sur la dernière partie de sa phrase, il se trompait lourdement. . .

§5 Dérivée à gauche et à droite

Définition 14

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$.
On dit que f est **dérivable à droite** au point a si la restriction de f à l'ensemble $X \cap [a, +\infty[$ est dérivable au point a ; la valeur de la dérivée de cette restriction au point a, s'appelle **dérivée à droite** de f au point a, et se note $f'_d(a)$. Dans ce cas, on a

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On a une définition similaire à gauche et l'égalité

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition 15

Soit f une fonction définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et a un point intérieur *à I. Pour que f soit dérivable au point a il faut et il suffit que f admette en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, et que ces dérivées soient* égales *; on a alors*

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

Exemples 16

1. La fonction $x \mapsto |x|$, définie dans $\mathbb{R}$, admet au point $a = 0$ une dérivée à droite égale à $+1$ et une dérivée à gauche égale à -1 ; elle n'est donc pas dérivable en ce point.
2. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, est définie et continue dans $\mathbb{R}$, mais elle n'admet ni dérivée à droite ni dérivée à gauche au point $a = 0$.

Test 17

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable en a. Montrer que $f'(a) \geq 0$.

§6 Fonction affine tangente

Définition 18

Lorsque f est dérivable au point a, la fonction affine

$$x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a)$$

est dite **fonction affine tangente** à la fonction f au point a.
La droite Δ d'équation cartésienne

$$\Delta : y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée la **tangente** à la courbe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Proposition 19

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. Si la fonction f est continue en $a \in I$ et si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \pm\infty,$$

*la courbe de f admet une **tangente verticale** au point de coordonnées $(a, f(a))$.*

29.2 Opérations sur les dérivées

§1 Dérivées et opérations algébriques

Théorème 20

Soient f et g deux applications de X dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables au point a alors,

1. *$\lambda f + \mu g$ est dérivable au point a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;*
2. *fg est dérivable au point a et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et dérivables au point a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Corollaire 21 *Lorsque f et g sont dérivables sur $I \subset X$, alors $\lambda f + \mu g$, fg sont dérivables sur I et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = fg' + f'g.$$

Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Corollaire 22 *L'ensemble des fonctions définies sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$, et dérivables au point a, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f \mapsto f'(a)$ est une forme linéaire.*

Corollaire 23 *L'ensemble des fonctions définies et dérivables sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : f \mapsto f'$ est une application linéaire de cet espace dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$.*

Les théorèmes généraux (composition, produit,...) ne donne qu'une condition nécessaire pour qu'une fonction soit dérivable au point a. Par exemple,

$$x \mapsto \sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$$

est dérivable au point $a = 0$, bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0.

§2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 24 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ avec $f(X) \subset Y$. Supposons f dérivable en $a \in X$ et g dérivable en $f(a) \in Y$, alors l'application composée*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable au point a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Corollaire 25 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ avec $f(X) \subset Y$.*

Supposons f dérivable sur $I \subset X$ et g dérivable sur $f(I)$, alors l'application composée

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = \left(g' \circ f\right) \times f'.$$

Test 26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(x^2 - 3\right) + \ln(x+1)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, l'ensemble de dérivabilité de f ainsi que sa dérivée.

Méthode Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs > 0 et $v : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose pour $x \in I$,

$$(u^v)(x) = u(x)^{v(x)} = \exp(v(x)\ln(u(x))) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Si les fonctions u et v sont dérivables sur I alors la fonction u^v l'est également et on a [1]

$$(u^v)' = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) u^v$$

Test 27

Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & x^{(x^2)} \end{array}.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Face à une telle application, si vous devez dériver, trouver une limite, faire une étude ou plus tard trouver un équivalent ou un développement limité :

♥ il faut toujours se ramener à la forme exponentielle. ♥

§3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 28

Soient f une application continue et strictement monotone d'un intervalle *$I \subset \mathbb{R}$ et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Remarque Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

Exemple 29

Définir la fonction «racine carrée» sur $[0, +\infty[$ comme une bijection réciproque. Étudier alors sa dérivabilité et retrouver l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. En tant que fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = 2x$. Puisque f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0, f est strictement croissante. Comme $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, la tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ est

[1] 26: Il faut être capable de retrouver la formule sur des exemples. Gare au premier qui écrit $(u^v)' = vu^{v-1}$ ou autre horreur.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Notons, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = f^{-1}(x)$. D'après le théorème précédent, la racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, non dérivable en 0 car $f'(\sqrt{0}) = 0$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec sur cet intervalle

$$\left(\sqrt{\ }\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

29.3 Étude globale des fonctions dérivables

§1 Des hauts et des bas

Définition 30

On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en un point $c \in X$, s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in X \cap]c-\eta, c+\eta[, f(x) \leq f(c).$$

On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ admet un **minimum local** en un point $c \in X$, s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in X \cap]c-\eta, c+\eta[, f(c) \leq f(x).$$

Un **extrémum local** est un minimum local ou un maximum local.

Remarque

Il est clair que si f admet un maximum global, alors elle a un maximum local. La réciproque est bien entendu inexacte.

Théorème 31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si en un point c intérieur à I, f admet un extrémum local et si f est dérivable au point c, on a $f'(c) = 0$.

Plus précisément, on a montré

Corollaire 32

Si en un point c intérieur à I, f admet un maximum local (resp. minimum local) et a en ce point une dérivée à droite et à gauche, on a $f'_d(c) \leq 0$ et $f'_g(c) \geq 0$ (resp. $f'_d(c) \geq 0$ et $f'_g(c) \leq 0$).

Définition 33

Un **point critique** de f est un zéro de la dérivée de f.

Exemple 34

Déterminer les extrémums globaux de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$ sur $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$.

Deux erreurs à éviter :

- La condition $f'(c) = 0$ est nécessaire mais pas suffisante : il se peut que f' s'annule en un point qui n'est pas un extremum local. Par exemple, $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle au point $x = 0$, mais n'a ni maximum ni minimum relatif en ce point.

- Il est possible que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admette un extrémum local au point a, alors que $f'(a) \neq 0$.

§2 Théorème de Rolle

Théorème 35 **Théorème de Rolle, formulation classique**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$). On suppose :

- $f(a) = f(b)$
- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 36 **Théorème de Rolle**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ qui est l'abscisse d'un extrémum local de f, et donc tel que $f'(c) = 0$.

§3 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 37 **Égalité des accroissements finis**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{29.1}$$

Démonstration. Comme $a \neq b$, nous pouvons écrire $f(b) - f(a) = (b - a)A$, où A est le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Définissons alors $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par la relation

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)A.$$

Comme g diffère de f d'une fonction polynômiale, il est clair que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'autre part on a $g(a) = 0$ (trivial) et $g(b) = 0$ (par définition de A !). Ainsi g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - A$ et, par conséquent, $A = f'(c)$. ∎

Méthode **Astuce de la fonction auxiliaire.**
Dans la démonstration, nous avions

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b - a)A \\ \text{et } \ g(x) &= f(x) - f(a) - (x - a)A. \end{aligned}$$

Nous avons donc remplacé un des paramètres par la variable x en remplaçant le signe $=$ par le signe $-$. Cette astuce permettra de trouver des fonctions auxiliaires dans d'autres situations du même type.

Remarque Interprétation géométrique : il existe un point de la représentation graphique de f où la tangente est parallèle à la corde. Remarquons que la fonction auxiliaire introduite dans la preuve n'est autre que la distance courbe-corde à l'abscisse x.

Définition 38 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est ***k*-lipschitzienne** ou lipschitzienne de rapport k si

$$\forall (x, y) \in X^2, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Lorsque $k < 1$, on dit que f est **contractante**.

Une fonction lipschitzienne est donc continue.

Théorème 39 **Inégalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \,]a, b[\,, \left|f'(x)\right| \leq k.$$

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

En particulier,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Corollaire 40 *Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est lipschitzienne de rapport* $\sup\limits_{[a,b]}\left|f'\right|$.

Applications aux systèmes dynamiques discrets

Méthode Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$ un intervalle tel que $f(I) \subset I$. On considère la suite définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ et que pour tout $x \in I$

$$\left|f'(x)\right| \leq k \quad \text{où} \quad 0 \leq k < 1.$$

Alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exemple 41 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^2\right).$$

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$ et montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$$
puis que
$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§4 Caractérisation de la monotonie

Théorème 42 *Soit I un* intervalle *de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, l'intérieur de I.*

1. *f est croissante si et seulement si*
$$\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0.$$
2. *f est décroissante si et seulement si*
$$\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leq 0.$$
3. *f est constante si et seulement si*
$$\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0.$$
4. *f est strictement croissante sur I si et seulement si*
   - $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$,
   - *et* $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ *est d'intérieur vide.*
5. *f est strictement décroissante sur I si et seulement si*
   - $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leq 0$,
   - *et* $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ *est d'intérieur vide.*

Remarque En particulier, lorsque $f' \geq 0$ et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

Corollaire 43 *Soit I un* intervalle *de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues dans I et dérivable sur $\mathring{I}$, si*
$$\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = g'(x),$$
alors il existe une constante λ telle que
$$\forall x \in I, f(x) = g(x) + \lambda.$$

§5 Limite des dérivées

Théorème 44

Limite de la dérivée
Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que

- *l'application f est continue sur I,*
- *l'application f est dérivable sur $I \setminus \{ a \}$,*
- *l'application $f'(x)$ admet une limite ℓ (réel ou infini) au point lorsque x tend vers a.*

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.
En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable au point a et on a $f'(a) = \ell$.

Remarque

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et si $f' \underset{a}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais on a néanmoins $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (tangente verticale).

Exemple 45

La fonction $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ est définie, continue, dérivable et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$: f se prolonge par continuité en 0. On note encore f ce prolongement (on a alors $f(0) = 0$).
On a également

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{h\to\pm\infty} 2h^3 e^{-h^2} = 0.$$

L'application f (ainsi prolongée) est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque

L'application f est d'ailleurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

29.4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

§1 Dérivées d'ordre n

Définition 46

Soient f une application à valeurs réelles définie sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$. On définit par récurrence l'application dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$ ou $\mathrm{D}^n f$.

- Pour $n = 0$, on pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 1$. On suppose que l'on dispose de $f^{(n-1)} : X \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, et on note

$$\mathrm{D}^n f(a) = f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) = \left(f'\right)^{(n-1)}(a).$$

On dit que f est **n fois dérivable**, ou que f **admet une dérivée d'ordre n** sur $I \subset X$, si f admet une dérivée n-ième en tout point $a \in I$.

On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 47

L'application
$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^5}.$$
est dérivable deux fois sur $[0, +\infty[$ mais est trois fois dérivable uniquement sur $]0, +\infty[$.

Théorème 48

Soit $n \in \mathbb{N}$, f, g deux fonctions n-fois dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est n-fois dérivable sur I et
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Théorème 49

Formule de Liebniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications n fois dérivables sur I. Alors fg est n-fois dérivable sur I et
$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Théorème 50

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(X) \subset Y$. Si f est n-fois dérivable sur $I \subset X$ et g est n-fois dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

Théorème 51

Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications n fois dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n-fois dérivables sur I.

Proposition 52

Soient f une application dérivable sur un intervalle I. On suppose que f' est à valeurs > 0 (ou à valeurs < 0).
Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \to I$ est dérivable avec
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$
De plus, si f est n fois dérivable sur I, alors f^{-1} est n-fois dérivable sur I.

Remarque Une telle application est appelé un **difféomorphisme**.

§2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 53 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

- On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^0$** sur I si f est continue sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^n$** sur I si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^\infty$** sur I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^n(X, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur X.

Exemple 54 **Un contre-exemple important**
La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable, mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Les résultats précédents restent valables si on remplace « n-fois dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^n$ » ou par « de classe $\mathscr{C}^\infty$ ».

Théorème 55 *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors*

- *la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I,*
- *et la fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I,*
- *si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*

Théorème 56 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(X) \subset Y$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I \subset X$ et g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*

Proposition 57 *Soient f une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. On suppose que f' est à valeurs > 0 (ou à valeurs < 0).*
Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Remarque Une telle application est appelé un **$\mathscr{C}^n$-difféomorphisme**.

Corollaire 58 *La dérivation peut être considérée comme une application (linéaire)*

$$\mathrm{D} : \mathscr{C}^p(X, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^{p-1}(X, \mathbb{R}).$$

Bel exemple d'une application définie sur un ensemble considérablement plus vaste que $\mathbb{R}$, à savoir un «espace fonctionnel». Dans cet ordre d'idées, notons

$$\mathrm{D}^2 : \mathscr{C}^p(X, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^{p-2}(X, \mathbb{R}), \qquad \mathrm{D}^3 : \mathscr{C}^p(X, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^{p-3}(X, \mathbb{R}), \qquad \text{etc.}$$

les applications obtenues en dérivant 2,3,... fois des applications $f \in \mathscr{C}^p(X, \mathbb{R})$.

CHAPITRE 29

COMPLÉMENTS

29.5 NOTATION DIFFÉRENTIELLE

Lorsque f est dérivable au point a, on considère la fonction affine tangente

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a).$$

Sa partie homogène en $h = x - a$ dépend à la fois du point $a \in I$ et d'une variable auxiliaire $h \in \mathbb{R}$, d'où la définition

Définition 59

Lorsque f est dérivable au point $a \in I$, on appelle **différentielle de f en a** la *fonction*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f(a): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f'(a)h \end{array} \in \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{29.2}$$

Lorsque f est dérivable en tout point de I, on appelle **différentielle de f** la *fonction*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f: & I & \to & \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a): h \mapsto f'(a)h \end{array}.$$

Si par exemple $f(x) = x$, on a $f'(a) = 1$, de sorte que la différentielle de f est la fonction $h \mapsto h$; autrement dit [2]

$$\mathrm{d}x(a)(h) = h$$

quels que soient a et h réels. En comparant avec (29.2), on voit donc que

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)\,\mathrm{d}x(a)(h)$$

pour toute fonction f dérivable en a ; de façon plus condensée :

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x(a), \quad (\in \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$$

[2] À strictement parler, on note $\mathrm{d}x(a)$ se qu'on devrait noter $\mathrm{d}(\mathrm{Id})(a)$. C'est un «abus de notation» que l'on se permet pour d'autres fonctions ; personne n'a jamais noté $\mathrm{d}(\sin)(x)$ la différentielle de la fonction sinus en un point x ; on la note simplement $\mathrm{d}\sin x$.

produit de l'*application linéaire* $\mathrm{d}x(a) : h \mapsto h$, par la *constante* (relativement à h) $f'(a)$; et comme en fait la différentielle $\mathrm{d}x(a)$ ne dépend pas de a, autant l'appeler $\mathrm{d}x$ tout court et obtenir la formule

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x,$$

voire même, si f est dérivable quel que soit $x \in I$,

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou simplement } \mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x.$$

ou encore $\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x$.

D'où l'écriture traditionnelle

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

des dérivées ; elle n'a *aucun* sens dans ce cadre puisque $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ sont des fonctions et non pas des nombres, mais tout le monde l'utilise non seulement pour obéir à la tradition, mais aussi et surtout en raison de sa commodité qui ne s'est pas encore démentie au niveau élémentaire.

L'inventeur des notations $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, à savoir Leibniz, un métaphysicien, les interprétait de toute autre façon ; il n'y a pas, chez lui, de variable h ni de fonctions linéaires. Pour Leibniz et ceux qui l'ont suivi jusqu'à Cauchy au moins, le symbole $\mathrm{d}x$ représentait un «accroissement infiniment petit» de la variable x et $\mathrm{d}f$ la «partie principale », proportionnelle à $\mathrm{d}x$, de l'accroissement

$$f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$$

de f au point x. Ces notions, qui reposent sur des «infiniment petits» que personne n'a jamais pu définir, ont fait inutilement cogiter et divaguer beaucoup trop de gens pour qu'on leur attribue maintenant un autre rôle que celui d'une explication historique de la notation différentielle. Newton, esprit positif en ce qui concerne les mathématiques, l'astronomie, la physique, l'émission de la monnaie et, dans une moindre mesure, la Bible et l'alchimie, ne les appréciait pas car «elles ne se rencontrent pas dans la Nature».

Opérations sur les différentielles Les règles de calcul peuvent se mettre sous forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f+g)(a) &= \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a), & \mathrm{d}(f+g) &= \mathrm{d}f + \mathrm{d}g,\\
\mathrm{d}(fg)(a) &= g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a), & \mathrm{d}(fg) &= g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g,\\
\mathrm{d}(1/g)(a) &= -\,\mathrm{d}g(a)/g(a)^2, & \mathrm{d}(1/g) &= -\,\mathrm{d}g/g^2,\\
\mathrm{d}(f/g)(a) &= \left(g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)\right)/g(a)^2, & \mathrm{d}(f/g) &= \left(g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g\right)/g^2.
\end{aligned}$$

Différentielle d'une composée Le théorème de dérivation des fonctions composées s'écrit de même sous une forme très simple. Posons $y = f(x)$ et $z = g(y) = h(x)$. On a

$$\mathrm{d}z = g'(y)\,\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \text{ d'où } \mathrm{d}z = g'(y)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ puisque $\mathrm{d}z = h'(x)\,\mathrm{d}x$. Chez Leibniz and Co. on écrivait tout simplement la séduisante formule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; il vaut mieux ne pas l'appliquer trop mécaniquement car elle n'indique pas en quels points les dérivées doivent être calculées. Ce sont des formules de ce genre qui, ne se trouvant pas sous une forme aussi commode chez Newton, ont fait le succès du système de Leibniz en dispensant les usagers de réfléchir, mais non, même de nos jours, d'écrire parfois des bêtises.

Corollaire 60 *Sous les hypothèse du théorème,*

$$\mathrm{d}\,(g\circ f)\,(a) = \underbrace{\mathrm{d}g\,(f(a))}_{\in \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\mathrm{d}f(a)}_{\in \mathbf{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\,.$$

Le $\cdot$, généralement omis, désignant la composée entre applications linéaires.

Abréviativement, la séduisante formule devient $\mathrm{d}\,(g\circ f) = \mathrm{d}g\circ \mathrm{d}f$ avec toujours la même méfiance à son égard.

Quelques calculs à la physicienne Soit $f : I \to J$ un «difféomorphisme». Pour tout réel $x \in I$, notons y le réel $f(x) \in J$ et pour tout réel $y \in J$, notons x le réel $f^{-1}(y)$. On a donc

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & y \end{array}.$$

On a alors pour tout $y \in J$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Notons enfin $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = f'(x)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \left(f^{-1}\right)'(y)$. On obtient donc la formule

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)} \text{ ou plus simplement } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

Il vaut mieux ne pas appliquer cette dernière et séduisante formule sans réfléchir car elle n'indique pas en quels points les dérivées doivent être calculées.
Rappelons également que cette formule n'est valable que pour des *difféomorphismes*.

29.6 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 61 **Formule de Taylor-Lagrange**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. On suppose que f est dérivable n-fois sur le segment $[a, b]$ et $n+1$-fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. Résultat hors-programme. Démonstration en exercice. ∎

Théorème 62 **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. On suppose que f est dérivable n-fois sur le segment $[a, b]$ et $n+1$-fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in]a, b[, \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M,$$

alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$