CHAPITRE 41

REPRÉSENTATION MATRICIELLE EN ALGÈBRE LINÉAIRE

41.1 FAMILLE DE VECTEURS

§1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

Définition 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle **matrice des coordonnées de la famille S relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice de type (n, p) dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur w_j relativement à la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \begin{pmatrix}\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1) & \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2) & \dots & \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m)\end{pmatrix}$$

Chaque vecteur de la famille S se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\
w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
w_j &= a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
w_p &= a_{1p}v_1 + a_{2p}v_2 + \dots + a_{np}v_n
\end{aligned}$$

Alors, la matrice $M_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p)$ s'écrit

$$M_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Test 2

On reprend les bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P = \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{S}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer $Q = \operatorname{Coord}_{\mathcal{S}}(\mathcal{B})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}$ relativement à la base $\mathcal{S}$.
Calculer les produits PQ et QP.

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(S) &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1), \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2), \dots, \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m)\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m)\right). \end{aligned}$$

§2 Matrice de passage

Définition 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et deux bases de E

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur v_j relativement à la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice carrée d'ordre n, qui sera notée $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$\operatorname{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1) \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v_2) \quad \dots \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v_n)\right).$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Aucune nouveauté ici! Mais le terme «matrice de passage» rappelle que les deux familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même espace vectoriel.

Théorème 5

Soit v un vecteur de E. Alors

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \operatorname{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \times \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}'}(v).$$

En général, on note X et X' les coordonnées du vecteurs x relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ «l'ancienne base» à $\mathcal{B}'$ la nouvelle base. On a alors

$$X = PX'.$$

La matrice P donne $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$, mais la formule $X = PX'$ donne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

Exemple 6

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, nous écrivons d'abord la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}$ relativement à la base canonique $C = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$P = \mathrm{Coord}_C(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3, en effet

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice P est donc la matrice de passage de la base C à la base $\mathcal{B}$.
Connaissant les coordonnées d'un vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}$, par exemple

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

on peut déterminer les coefficients de v qui sont ses coordonnées dans la base canonique de deux manières, directement en utilisant la définition des coordonnées,

$$v = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

ou avec la matrice de passage

$$\mathrm{Coord}_C(v) = P \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

qui donne évidement le même résultat.
Pour déterminer les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur x, par exemple $x = (5, 7, -3)^T$, nous devons trouver les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut pour cela résoudre le système $Pa = x$ avec $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, ou en utilisant la matrice inverse de P, pour trouver finalement

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(x) = P^{-1} \times \operatorname{Coord}_{\mathcal{C}}(x) = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier ce résultat avec le calcul suivant

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = x.$$

Test 7

Vérifier les calculs précédents. Déterminer P^{-1} et en déduire $\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$.

Test 8

En reprenant les même notations. Quelles sont les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ des vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Exemple 9

On considère l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{E} \,:\, 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 2.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base obtenue à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ après une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 10

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

41.2 Représentation d'une application linéaire par une matrice

§1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Définition 11

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de F.
On appelle **matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(v_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$. C'est une matrice de

type (m,n) que l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_1)\right)\quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_2)\right)\quad \dots\quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_n)\right)\right)$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donc la matrice des coordonnées de la famille $\left(f(v_1),\dots,f(v_n)\right)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Les coefficients de la matrice $A=\left(a_{i,j}\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ sont donc caractérisés par

$$\forall j\in [\![1,n]\!],\, f(v_j)=a_{1,j}w_1+a_{2,j}w_2+\dots+a_{m,j}w_m=\sum_{i=1}^{m}a_{i,j}w_i.$$

Notation Il n'y a pas de notation fixée par le programme. Je note parfois $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans le poly d'exercices.

Théorème 12 *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f\in\mathbf{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors pour tout vecteur $x\in E$, on a*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(x)\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\left(f\right)\times\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(x\right).$$

Autrement dit, en notant X les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, Y les coordonnées de $y=f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, on a

$$Y=AX.$$

Exemple 13 Soit $u:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto&\begin{pmatrix}4x+y\\3x+y\\x\end{pmatrix}\end{array}$ et soit

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}\qquad e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\qquad f_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad f_2=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\qquad f_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}=(f_1,f_2,f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$u(e_1)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=-2f_1+f_2\qquad\qquad u(e_2)=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f. On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Test 14

Matrice de $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(1) - P(0), P''(1)) \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Test 15

Matrice de $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

Test 16

Soit $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+y \\ 3y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= u((1,0)) = (-1,0,1) = -f_1 + f_3 \\ u(e_2) &= u((0,1)) = (1,3,-2) = f_1 + 3f_2 - 2f_3 \end{aligned}$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application f. On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

On retrouve donc la matrice canoniquement associée à $u \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. ∎

§2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice

Dans la suite, On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Proposition 17

Soit A une matrice de type (m, n). Alors l'application

$$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est une application linéaire.

Définition 18

L'application linéaire T est appelée l'**application linéaire canoniquement associée** à la matrice A.

Théorème 19

Soit $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit A la matrice dont les colonnes sont $T(e_1), \dots, T(e_n)$, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax$.

Définition 20 La matrice A est appelée la **matrice canoniquement associée** à l'application linéaire $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Autrement dit, A est la matrice associée à T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$

Exemple 21 Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'image du vecteur $u = (1, 2, 3)^T$ par l'application T, il suffit de substituer $(1, 2, 3)$ dans l'expression de T. On obtient $T(u) = (6, -1, -4)^T$.
Pour trouver la matrice A, telle que $T(x) = Ax$, on détermine les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Et l'on pose donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarquez bien que les coefficients de A sont exactement les coefficients de x, y, z dans la définition de T.

Test 22 Calculer Au avec $u = (1, 2, 3)^T$ et vérifier que l'on obtient bien $T(u)$.

§3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Théorème 23 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et m munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : & \mathbf{L}(E, F) & \to & \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour tout $f \in \mathbf{L}(E, F)$,

$$\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f)\right).$$

Corollaire 24 *En particulier, pour tous $f, g \in \mathbf{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(g) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,(f),$$

et on a l'équivalence

$$f = g \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

De plus, $\mathbf{L}(E,F)$ *est de dimension finie et*

$$\dim(\mathbf{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Théorème 25 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Pour toutes applications linéaire $f \in \mathbf{L}(E,F)$ et $g \in \mathbf{L}(F,G)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Ainsi la *composition des applications linéaires se traduit par la multiplication matricielle*. Bien noter l'ordre dans lequel est fait le produit matriciel.

Une démonstration. Soient $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $m = \dim(G)$. Posons $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$ de sorte que U, V, R sont des matrices de type (n,p), (m,n) et (m,p). Il s'agit de montrer que $R = VU$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. La matrice U est la matrice dont les colonnes sont

$$\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_1)\right) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_2)\right) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_p)\right)\right)$$

La matrice VU est donc la matrice dont les colonnes sont

$$\left(V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_1)\right) \quad V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_2)\right) \quad \dots \quad V \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(e_p)\right)\right)$$

c'est-à-dire la matrice

$$\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_1)\right) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_2)\right) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g \circ f(e_p)\right)\right)$$

qui n'est autre que la matrice R. ∎

Les applications linéaires *bijectives* se reconnaissent à leurs matrices.

Théorème 26 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ un base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f : E \to F$ une application linéaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors f est un isomorphisme si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1}.$$

§4 Changement de bases

Lemme 27 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, alors*

$$\operatorname{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\operatorname{Id}_E\right).$$

Théorème 28 **Formule de changement de bases**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$. Considérons $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux base de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \operatorname{Pass}(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \qquad A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \qquad P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \qquad Q = \operatorname{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

on a la relation

$$A' = Q^{-1} A P.$$

§5 Matrices équivalentes et rang

Théorème 29 *Une application linéaire $f \in \mathbf{L}(E, F)$ est de rang r si, et seulement si, il existe un couple de bases dans lequel f a pour matrice*

$$J_r = \left(\alpha_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \quad \textit{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \leq r \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Définition 30 On dit que deux matrices A et A' de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** lorsque

$$\exists Q \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), A' = QAP.$$

Une matrice A' est équivalente à la matrice A représentant une application linéaire $u \in \mathbf{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F si, et seulement si, elle représente u dans des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ de E et F. Par conséquent, deux matrices équivalentes ont même rang.

Théorème 31 *Une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice*

$$J_r = \left(\alpha_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \quad \textit{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \leq r \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 32 *Deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si elles ont même rang.*

Corollaire 33 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors* $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}(A)$.

Rappel

- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.
- Les opérations élémentaires conservent le rang.

§6 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Définition 34 Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de A, toute matrice B obtenue en ne conservant que certaines lignes et colonnes de A.
Plus précisément, en notant $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et

$$1 \leq i_1 < \dots i_p \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j_1 < \dots j_q \leq n,$$

la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & \cdots & a_{i_p,j_q} \end{pmatrix}$$

est une matrice extraite de A de type (p,q).

Théorème 35 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

1. *Pour toute matrice extraite B de A, on a $\operatorname{rg}(B) \leq \operatorname{rg}(A)$.*
2. *Le rang de A est l'ordre maximal des matrices inversibles que l'on peut extraire de A.*

41.3 Cas des endomorphismes

§1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base

Définition 36 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathbf{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée. Cette matrice, notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Nous dirons aussi que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$. Notant $a_{i,j}$ les coefficients de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!], f\left(v_j\right) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \cdots + a_{n,j}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}v_i.$$

Théorème 37 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

§2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème 38 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : & \mathbf{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.

Proposition 39 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tous $f, g \in \mathbf{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Proposition 40 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est un automorphisme de E (i.e. f est bijectif) si, et seulement si la matrice A est inversible, auquel cas son inverse A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right).$$

§3 Changement de base

Théorème 41 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E)$. Considérons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

♥ En notant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \qquad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

on a la relation

$$A' = P^{-1}AP.$$

Exemple 42 On considère l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + 5y \end{pmatrix}.$$

On cherche à décrire géométriquement cet endomorphisme. À priori, on ne peut pas en dire grand chose…
Supposons donc que l'on nous propose d'effectuer un changement de base. On considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note M la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$. Nous avons $M = P^{-1}AP$, où A est la matrice de T relativement à $\mathcal{C}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$M = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Test 43

Vérifier ces calculs.

Par définition de M, on a

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_1)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_2)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$T(v_1) = 4v_1 \quad \text{et} \quad T(v_2) = 2v_2.$$

Ainsi, l'application T s'apparente à une «dilatation» d'un facteur 4 dans la direction v_1 et d'un facteur 2 dans la direction v_2.
Remarquons que l'effet de T est le même quelque soit la base où on exprime sa matrice. Ainsi, on doit également avoir

$$Av_1 = 4v_1 \quad \text{et} \quad Av_2 = 2v_2.$$

Test 44

Vérifier que $Av_1 = 4v_1$ et $Av_2 = 2v_2$.

§4 Matrice semblables et trace

Définition 45

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\, A' = PAP^{-1}.$$

Remarques

- Deux matrices semblables sont équivalentes.
- Une matrice A' est semblable à la matrice A représentant un endomorphisme $f \in \mathbf{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ de E si, et seulement si, elle représente f dans une base $\mathcal{B}'$ de E.
- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 46

On appelle **trace** d'une matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 47 *L'application* $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 48 *Pour toutes matrices* $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *on a*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(A\right).$$

Théorème 49 **et définition**
Il existe une unique forme linéaire $\mathrm{Tr} : \mathbf{L}(E) \to \mathbb{K}$ *telle que pour toute base* $\mathcal{B}$ *de* E, *on ait*

$$\forall f \in \mathbf{L}(E), \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f\right).$$

On appelle alors ***trace*** *d'un endomorphisme* f *de* E *le scalaire* $\mathrm{Tr}(f)$.

Proposition 50 *Pour tous* $u, v \in \mathbf{L}(E)$, *on a* $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u)$.

Proposition 51 *Soit* p *un projecteur de* E, *alors* $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.