Chapter 1 Notations

Raisonnement et symbolisme mathématiques

1.1 Raisonnement logique

Exercice 1.1

Démontrer que $(1 = 2) \implies (23 = 42)$.

Exercice 1.2

Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \implies Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\implies$ ($R \implies S$).

Exercice 1.3

Compléter les phrases suivantes par « il faut», « il suffit» ou « il faut et il suffit».

1. Pour qu'un quadrilatère soit un carré,...... qu'il soit un rectangle.
2. Pour qu'un triangle soit équilatéral,...... qu'il ait deux angles de 60 degrés.
3. Pour qu'un rectangle soit un carré,...... qu'il soit un losange.
4. Pour qu'un quadrilatère soit un losange,...... qu'il soit un carré.
5. Pour qu'un parallélogramme soit un losange,...... que ses diagonales soient perpendiculaires.
6. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme,...... que ses diagonales se coupent en leur milieu.
7. Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90 km/h,...... que sa vitesse instantanée ait été à un certain moment supérieure à 90 km/h.
8. Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90 km/h,...... que sa vitesse instantanée ait été constamment supérieure à 90 km/h.

Exercice 1.4

Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

Exercice 1.5

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger le cas échéant.

1. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.

2. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit différent de 2.

3. Une condition suffisante pour qu'un un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

4. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

Exercice 1.6

Écrire les affirmations suivantes en utilisant les symboles $\implies$, $\geq$, $>$, $\neq$ et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.

2. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.

3. Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

Exercice 1.7

Soient x, y, z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose que les trois implications suivantes sont vraies :

- $A \,:\, x = 0 \implies y > 0$.
- $B \,:\, x > 0 \implies y < 0$.
- $C \,:\, y \neq 0 \implies z > 0$.

Comparer x, y et z.

Exercice 1.8

Soient x et y deux réels. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $P \,:\, 0 < x \leq 1$.

2. $Q \,:\, xy = 0$.

3. $R \,:\, x^2 = 1 \implies x = 1$.

1.2 Quantificateurs

Exercice 1.9

Montrer que l'assertion «Tout Belge comprenant l'allemand maîtrise l'espagnol.» est fausse revient à l'une des actions suivantes. Laquelle ?

A : Trouver un Belge comprenant l'allemand et maîtrisant l'espagnol.

B : Trouver un Belge ne comprenant pas l'allemand mais maîtrisant l'espagnol.

C : Trouver un Belge comprenant l'allemand mais ne maîtrisant pas l'espagnol.

D : Trouver un Belge ne comprenant pas l'allemand et ne maîtrisant pas l'espagnol.

E : Prouver que tout Belge maitrisant l'espagnol comprend l'allemand.

Exercice 1.10

Traduire les énoncés mathématiques suivants en français puis dire s'ils sont vrais ou faux.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y < x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0 \text{ ou } x + 2 \neq 0).$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0).$

Exercice 1.11

Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
2. Il existe un nombre réel qui est strictement supérieur à son carré.
3. Il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
4. Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

Exercice 1.12

Traduire à l'aide de quantificateurs les deux assertions suivantes

1. Tous les réels qui appartiennent à $[-1, 1]$ sont de la forme $\sin\theta$.
2. Tous les réels qui appartiennent à $[-10, 10]$ sont de la forme $\sin\theta$.

Ces deux assertions sont-elles vraies ?

Exercice 1.13

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f ne prend que deux valeurs a et b distinctes.
5. La fonction f est une fonction impaire.

Exercice 1.14

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0.$

Exercice 1.15

Exprimer les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs et donner leur négation.

1. «Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.»
2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
   «La fonction f n'est pas de signe constant sur I».
3. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
   «La fonction f est majorée sur I».
4. «Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est inclus dans $]1, 2[$».

Exercice 1.16

Vrai ou Faux ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \, (|x| = x \text{ ou } |x| = -x).$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x).$
3. $\exists z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (y, z) \in \mathbb{R}^2, x = y + z.$
5. $\exists! x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, y = x^2.$
6. $\exists! y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, y = x^2.$
7. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \geq 2n.$
8. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq m \implies p \leq 2n.$

Exercice 1.17

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \implies n \geq 3$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \implies x \geq 3$.

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^\star, x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

4. $\forall z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{ i \}, z \neq z' \implies \frac{z+i}{z-i} \neq \frac{z'+i}{z'-i}$.

Exercice 1.18

Vrai ou Faux ? Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \implies \left\{ \begin{array}{ll} & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ \text{ou} & \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 1.19

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Que signifient les phrases quantifiées suivantes?

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
2. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \implies f(x) \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \implies x = 0$.
5. $\exists A \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \implies f(x) = C$.

1.3 Ensembles

Exercice 1.20

Soit X l'ensemble des nombres x tels que $0 < x < 1/100000000$ et Y l'ensemble des nombres y tels que $0 \leq y \leq 100000000$; démontrer que $X \subset Y$.

Exercice 1.21

Que peut-on dire de l'ensemble $E = \{ x \in A \mid P(x) \}$ lorsque

1. «$\forall x \in A, P(x)$» ?

2. «$\exists x \in A, P(x)$» ?

Exercice 1.22

Lesquelles des assertions suivantes sont-elles exactes ?

1. $2 \in \mathbb{N}$.
2. $\{ 2 \} \in \mathbb{N}$.
3. $2 \subset \mathbb{N}$.
4. $\{ 2 \} \subset \mathbb{N}$.
5. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathbb{N}$.
6. $2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. $\{ 2 \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. $2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. $\{ 2 \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
10. $\{ \{ 2 \} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.23

Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{ a \}))$ où a désigne un élément.

Exercice 1.24

Écrire en extension l'ensemble
$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^\star \;\middle|\; z^3 = \overline{z} \right\}.$$

Exercice 1.25

Soient a, b deux réels avec $a < b$. Prouver par double inclusion que
$$[a, b] = \{ (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}.$$

Exercice 1.26

Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{ 0, 1 \}$.

Exercice 1.27

1. Soit $E = \{ -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \}$.
   Donner une définition de l'ensemble E sans avoir à énumérer ses éléments.
2. Même question avec l'ensemble $F = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$.
3. Décrire comme ci-dessus l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

Exercice 1.28

Soient A et B deux ensembles quelconques.

1. Écrire l'assertion «$A \subset B$» à l'aide de quantificateurs.
2. Écrire la négation de «$A \subset B$» à l'aide de quantificateurs.
3. Écrire l'assertion $A \neq B$ à l'aide de quantificateurs.
4. Démontrer que «$\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$» est une assertion fausse.

Exercice 1.29

On définit les cinq ensembles suivants :
$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y < 1 \right\},$$
$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x + y| < 1 \right\},$$
$$A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| < 1 \right\},$$
$$A_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y > -1 \right\},$$
$$A_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - y| < 1 \right\}.$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de
$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y|| < 1) \iff |x| + |y| < 1.$$

1.4 Constructeurs

Exercice 1.30

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection et l'union des ensembles A et B.

1. $A = \{ -7, 4, 8, 10 \}$ et $B = \{ -7, 0, 2, 8, 10, 12 \}$.

2. $A = [-5, 5]$ et $B = [-3, 10]$.

3. $A = \emptyset$ et $B = \mathbb{R}$.

4. $A = [1, 3] \times [2, 4]$ et $B = [3, 7] \times [2, 4]$.

Exercice 1.31

Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrer

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

2. $(A \subset C \ \underline{\text{et}}\ B \subset C) \iff (A \cup B \subset C)$.

3. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ A \subset C) \iff (A \subset B \cap C)$.

4. $(A \subset B) \implies (A \cap C \subset B \cap C)$.

5. $(A \subset B) \implies (A \cup C \subset B \cup C)$.

6. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cup C \subset B \cup D)$.

7. $(A \subset B \ \underline{\text{et}}\ C \subset D) \implies (A \cap C \subset B \cap D)$.

Exercice 1.32

F, G, H désignent trois sous-ensembles non vides d'un ensemble E. Justifier

$$((F \cup G) \subset (F \cup H) \text{ et } (F \cap G) \subset (F \cap H)) \implies (G \subset H).$$

Exercice 1.33

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier $A \setminus (E \setminus B)$.

Exercice 1.34

Soit X et Y deux ensembles. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$ est

$$X \cap Y = X \cup Y.$$

Exercice 1.35

Quel est le produit cartésien des ensembles

$$A = \{ \text{as, roi, dame, valet}, 10, 9, 8, 7 \} \quad \text{et} \quad B = \{ \text{cœur, carreau, trèfle, pique} \}.$$

Exercice 1.36

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Démontrer l'égalité

$$(A \cap B) \cup \left(A \cap \complement_E B\right) = A.$$

Exercice 1.37

Soit A et B deux ensembles. On définit leur différence symétrique par

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Comparer les ensembles $A\Delta(B \cup C)$ et $(A\Delta B) \cup (A\Delta C)$.
2. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\Delta B = A\Delta C) \iff (B = C).$$

Exercice 1.38

Soient deux ensembles E et F. Quelle relation y a-t-il

1. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

1.5 Famille d'ensembles

Exercice 1.39

Montrer

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[= \{ 3 \}.$$

Exercice 1.40

Montrer

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right] = [-2, 5].$$

Exercice 1.41

Montrer

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[-2 + \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}\right] =]-2, 5].$$

Exercice 1.42

Montrez que l'ensemble suivant est un intervalle que vous calculerez

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$$

Exercice 1.43

Montrez que l'ensemble suivant est un intervalle que vous calculerez

$$J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$$

1.6 Rédaction

Exercice 1.44

Soient A et B des ensembles. Donner les rédactions des énoncés du type

1. $P \implies Q$, en distinguant raisonnement direct et par contraposée, par l'absurde.
2. $P \iff Q$.
3. $A \subset B$.
4. $A = B$.
5. $A \cap B = \{ 0 \}$.
6. $\forall x \in A, P(x)$.
7. $\exists x \in A, P(x)$.
8. $\exists! x \in A, P(x)$.
9. $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$, où expr_1 et expr_2 sont deux expressions données.
10. $(i) \iff (ii) \iff (iii)$.