CHAPITRE 7

CALCULS ALGÉBRIQUES

7.1 LE SYMBOLE SOMME $\sum$

§1 Sommes finies

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. La somme des termes de u_p à u_q est notée

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme $\sum\limits_{k=p}^{q} u_k$ se note aussi $\sum\limits_{p\leq k\leq q} u_k$.

Pour tous entiers naturels $p \leq q$, la somme $\sum\limits_{k=p}^{q}$ comporte $q - p + 1$ termes.

Exemples 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premier entiers non nuls est

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Remarque L'indice k est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre indice. Il convient de ne jamais confondre k et n. Ainsi

$$\underbrace{n+n+n\cdots+n}_{n} = \sum_{k=1}^{n} n \neq \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n.$$

Test 3 Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

____

____

Test 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante

$$S_n = 5+7+9+11+\cdots+775+777$$

$$= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

§2 Propriétés

Proposition 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q < n$ trois entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k$$

Remarque Cela vous rappelle peut-être $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Mais attention : pour une intégrale, les bornes « c » sont identiques, ce qui n'est pas le cas d'une somme $\sum_{k=p}^{n}$. Il y a beaucoup de points communs entre $\int_a^b$ et $\sum_{k=p}^{n}$. La première est une somme continue, la deuxième une somme discrète. Les deux sont des cas particuliers de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Proposition 6 *Pour tous nombres complexes λ et μ, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a*

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad \sum_{k=p}^{q}(a_k+b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$$

On dit que $\sum_{k=p}^{q}$ est linéaire.

On peut écrire directement,

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k + \mu \sum_{k=p}^{q} b_k.$$

Proposition 7

Pour toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Re}(a_k); \qquad \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{Im}(a_k); \qquad \overline{\sum_{k=p}^{q} a_k} = \sum_{k=p}^{q} \overline{a_k}.$$

§3 Changement d'indices

La somme $S = 6 + 8 + 10 + \cdots + 26 + 28$ possède de nombreuses écritures

$$S = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13}(2k+2) = \sum_{k=4}^{15}(2k-2)$$

Plus généralement, on a $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

Méthode

Effectuons le changement de variable $l = k + 1$ dans la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \{\, 0, 1, \dots, n \,\} & \to & \{\, 1, 2, \dots, n+1 \,\} \\ k & \mapsto & k+1 \end{array}$$

est une bijection : lorsque k décrit l'ensemble $\{\, 0, 1, \dots, n \,\}$, $l = k + 1$ décrit l'ensemble $\{\, 1, 2, \dots, n+1 \,\}$, d'où

$$S_n = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$$

L'indice l étant muet, on préfère écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$

Pour certain changement d'indice, il faut faire attention à l'ordre des bornes : $\sum_{l=n}^{0}$ n'a pas de sens si $0 < n$. On aura par exemple,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} u_{n-l}.$$

Proposition 8

Changements d'indices utiles (à savoir retrouver)

1. *Par translation :*
$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+m} = \sum_{k'=p+m}^{q+m} u_{k'} = \sum_{k=p+m}^{q+m} u_k$$
car $p \leq k \leq q$ équivaut à $p+m \leq k+m \leq q+m$.

2. *Par symétrie :*
$$\sum_{k=p}^{q} a_{p+q-k} = \sum_{k'=p}^{q} u_{k'} = \sum_{k=p}^{q} u_k$$
car $p+q-k$ est le symétrique de k par rapport à $\frac{p+q}{2}$ et $p \leq k \leq q$ équivaut à $p \leq p+q-k \leq q$.

§4 Simplification télescopiques

Proposition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors
$$\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

Test 10

En remarquant que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$
calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

7.2 Sommes usuelles

§1 Somme de puissances successives

Proposition 11

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = 2S + (n+1).$$

D'où $2S = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1-1)(n+1) = n(n+1)$. ∎

Proposition 12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

§2 Somme d'une progression arithmétique

Théorème 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $p \leq q$ deux entiers naturels alors

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 + kr = u_0 + pr + (k-p)r = u_p + (k-p)r$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} u_k &= \sum_{k=p}^{q} u_p + (k-p)r \\
&= (q-p+1)u_p + \sum_{k'=0}^{q-p} k'r \qquad\qquad (k' = k-p) \\
&= (q-p+1)u_p + \frac{(q-p+1)(q-p)}{2} r \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_p + (q-p)r\right) \\
&= \frac{q-p+1}{2}\left(u_p + u_q\right).
\end{aligned}$$

∎

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 14

$$\sum_{k=p}^{q} k = (q-p+1)\frac{p+q}{2}.$$

§3 Factorisation de $a^n - b^n$

Théorème 15 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

On peut également écrire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{k}b^{n-k}.$$

Test 16

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

Démonstration.

- $a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$
- $a^7 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6)$
- $a^{n+1} - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$.

∎

Corollaire 17 *Soit $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

§4 Somme d'une progression géométrique

Théorème 18 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r, $p \leq q$ deux entiers naturels alors*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ (q-p+1)u_p & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\neq 1$ est donnée par la formule

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

ou encore

$$\frac{\text{premier terme écrit} - \text{dernier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

Test 19

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Méthode

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a\left(u_{n+1} - u_n\right) = av_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_n = v_0 \frac{1-a^n}{1-a} = \left((a-1)u_0 + b\right) \frac{1-a^n}{1-a} = u_0\left(a^n - 1\right) + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Par télescopage, on a également,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right)$$

et après simplification,

$$u_n = u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

§5 Formule du binôme

Définition 20

- Soit n un entier ; on note $n!$, qui se lit **factorielle n**, l'entier défini par

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

  On a donc $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices *n* et *p*** le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

  On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p < 0$ ou $p > n$.

Test 21

- Pour $n \geq 0$, $\dbinom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\dbinom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\dbinom{n}{2} =$.

Proposition 22

1. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

2. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$.

3. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p-1} + \dbinom{n}{p} = \dbinom{n+1}{p}$ (formule de Pascal).

4. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p}$ est un entier naturel.

Théorème 23

Formule du binôme de Newton

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut également écrire

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esquisse de démonstration. Démonstration par récurrence sur n. Pour l'hérédité, on utilise $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$. On développe et on effectue le changement de variable adéquat pour retrouver des termes en $a^{n+1-k}b^k$. On découpe les indices qui dépassent, on regroupe les autres grâce à la formule de Pascal. ∎

Remarque

Interprétation combinatoire

En développant le produit

$$(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b),$$

on obtient des termes du type $a^{n-k}b^k$ avec $0 \leq k \leq n$, l'indice k correspondant au nombre de facteurs du produit $(a+b)\cdots(a+b)$ pour lesquelles on a choisit b. Puisque l'on dénombre $\binom{n}{k}$ choix possible de k facteurs parmi n, on obtient

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

§6 Formule de Leibniz

Théorème 24

Formule de Liebniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux applications n fois dérivables sur I. Alors fg est n-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Exemple 25

Si f et g sont deux fois dérivables sur I, alors fg est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).$$

7.3 Généralisation de la notation $\sum$

§1 Somme d'une famille finie

Si on rajoute une condition sous le symbole $\sum$, cela signifie qu'on se limite aux indices qui vérifient la condition.

Exemple 26

La somme $u_{2p} + u_{2p+2} + \cdots + u_{2q-2} + u_{2q}$ peut être notée $\sum_{k=p}^{q} u_{2k}$, mais également

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2q} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{k=2p \\ k \in 2\mathbb{N}}}^{2q} u_k.$$

Exemple 27

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{10} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$$

Notation

Soit $I = \{ i_1, \dots, i_n \}$ un ensemble fini et $u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ des complexes alors on note

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \cdots + u_{i_n}$$

Exemple 28

Si $I = \{ 0, 2, \dots, 2n \}$,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k$$

§2 Sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ une famille de nombres complexes. Une telle famille peut être rangée dans un tableau que nous appellerons **matrice** à p lignes et q colonnes. Par exemple, dans le cas où $p = 3$ et $q = 5$:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{matrix}$$

Théorème 29

Permutation des $\sum$
La somme des nombre $a_{i,j}$ est

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

Lorsque i et j décrivent le même ensemble d'indices, on écrit abréviativement

$$\sum_{1\leq i\,,\,j\leq n} a_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}.$$

§3 Produit de deux sommes finies

Théorème 30

Soient $\left(a_i\right)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $\left(b_i\right)_{i\in[\![1,q]\!]}$ deux familles finies de nombres complexes. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} a_i b_j.$$

§4 Sommes triangulaires

Théorème 31

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de nombres complexes

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

et

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

Exemple 32

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

§5 Sommations par partition

Théorème 33

Si Ω est la réunion disjointe *de plusieurs parties Ω_1, Ω_2,…,Ω_n, on a*

$$\sum_{i\in\Omega} x_i = \sum_{i\in\Omega_1} x_i + \sum_{i\in\Omega_2} x_i + \cdots + \sum_{i\in\Omega_n} x_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in\Omega_k} x_i.$$

Exemple 34

Si $\Omega = [\![m, n]\!]^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} &= \sum_{m\le i\le j\le n} x_{i,j} + \sum_{m\le j<i\le n} x_{i,j}\\ &= \sum_{i=m}^{n} x_{i,i} + \sum_{m\le i<j\le n} x_{i,j} + \sum_{m\le j<i\le n} x_{i,j}.\end{aligned}$$

Exemple 35

Découpage en diagonale
Il est possible de décrire une zone triangulaire par des parallèles aux diagonales. Par exemple (en faisant un dessin) :

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j\le i\le n} x_{i,j} &= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{\substack{0\le j\le i\le n\\ i-j=d}} x_{i,j}\right)\\ &= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{i=d}^{n} x_{i,i-d}\right)\\ &= \sum_{d=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-d} x_{j+d,j}\right).\end{aligned}$$

7.4 Le symbole produit $\prod$

§1 Produits finis

Définition 36

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \le q$ deux entiers naturels. Le produit des termes u_p à u_q est notée

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Exemple 37

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \le q$ deux entiers naturels, $\prod_{k=p}^{q} \alpha = \alpha^{q-p+1}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

Proposition 38

Pour tout nombre complexe λ, tout entier n, toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

1. $\prod_{k=p}^{q} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right)$.
2. $\prod_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k$.
3. $\prod_{k=p}^{q} (a_k^n) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^n$.

Proposition 39

Simplification télescopique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$