Chapter 6 Nombres entiers, itérations

6.1 Nombres entiers

Solution 6.1
Solution 6.2
Solution 6.3
Solution 6.4

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n)$ la relation

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

L'assertion $R(0)$ est vérifiée puisque

$$(1+a)^0 = 1 = 1 + 0a + 0a^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$, alors

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a) \times (1+a)^n \\
&\geq (1+a)(1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\
&\geq 1 + a + na + na^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^3 \\
&\geq 1 + (n+1)a + \frac{n^2 - n + 2n}{2}a^2 \\
&\geq 1 + (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}a^2,
\end{aligned}$$

d'où $R(n+1)$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En applicant le résultat précédent avec $a = 2$.

$$(1+2)^n = 3^n \geq 1 + 2n + 2n(n-1) = 1 + 2n^2.$$

Et donc $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2n^2+1}$. En multipliant cette relation par $3n$ (positif), on obtient alors l'inégalité demandée

$$0 \leq u_n \leq \frac{3n}{2n^2+1}.$$

Solution 6.5

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)$: «$9^n - 1$ est multiple de 8».

- On a $9^1 - 1 = 8$ qui est un multiple de 8 d'où $R(1)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie, c'est-à-dire $9^n - 1$ est multiple de 8. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $9^n - 1 = 8k$, ou encore $9^n = 8k + 1$. D'où

$$9^{n+1} = 9 \times 9^n = 9 \times (8k+1) = 8 \times 9k + 9.$$

  Finalement,

$$9^{n+1} - 1 = 8 \times (9k+1)$$

  est un multiple de 8.

- *Conclusion :* par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Solution 6.6

On souhaite essayer de démontrer ce résultat par récurrence. Commençons par établir un lien entre $\alpha^n + 1/\alpha^n$ et $\alpha^{n+1} + 1/\alpha^{n+1}$. On a

$$\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

Ce qui fait également apparaitre α^{n-1}. On a alors

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Ce qui suggère d'utiliser plutôt une récurrence à deux pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R(n)$ l'assertion «$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}$».

L'assertion $R(0)$, c'est-à-dire $1 + 1 \in \mathbb{Q}$, est vraie. L'assertion $R(1)$ est également vraie par hypothèse sur α.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $R(n)$ et $R(n-1)$. Puisque $R(1)$ est également vraie, on peut écrire

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q} \qquad \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}.$$

Or, on a vu que

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \underbrace{\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)}_{\in\mathbb{Q}}\underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)}_{\in\mathbb{Q}}.$$

Puisque le produit de deux rationnel est un rationnel, et que la somme de deux rationnels est un rationnel, on en déduit que $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $R(n+1)$.

Ainsi, on a montré que si $R(n)$ et $R(n-1)$ sont vraies, alors $R(n+1)$ est vraie. De plus, $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Conclusion

D'après le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Q}.$$

Solution 6.7

Solution 6.8

Solution 6.9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion $|u_n| \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a bien $|u_0| = 7 \leq 7\frac{1}{2^0}$ et $|u_1| = \frac{1}{10} \leq \frac{7}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2^1}$. Donc $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ et $R(n+1)$ soient vraies. Nous allons montrer $R(n+2)$. On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= \left|\frac{1}{10}u_{n+1} + \frac{1}{5}u_n\right| \\
&\leq \frac{1}{10}|u_{n+1}| + \frac{1}{5}|u_n| && \because \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{10} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^n} && \because R(n) \text{ et } R(n+1) \\
&= \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{28}{5} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\
&= 7 \cdot \frac{1}{2^{n+2}};
\end{aligned}$$

D'où $R(n+2)$.

Conclusion

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$.

Solution 6.10

Solution 6.11

Récurrence double.

Solution 6.12

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)$: «il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p\,(2q+1)$.

On a $1 = 2^0\,(0+1)$, d'où $R(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $R(1), R(2), \ldots, R(n)$. Montrons $R(n+1)$.

- Si $n+1$ est impair, alors n est pair. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$ et on a donc $n+1 = 2^0(2q+1)$, d'où $R(n+1)$.
- Si $n+1$ est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m$. Or $m < n+1$, donc $R(m)$ est vraie : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^p(2q+1)$. On a donc $n+1 = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$, d'où $R(n+1)$.

Dans chaque cas, $R(n+1)$ est vraie. Par récurrence forte, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, R(n+1).$$

6.2 Suites définies par une relation de récurrence

Solution 6.13

1. On a $u_6 = q^6 u_0 = 2^6 u_0 = 64u_0$, d'où $u_0 = 96/64 = 3/2$.
2. On a $u_1 = qu_0$ et $u_4 = q^4 u_0$, d'où
$$\frac{u_4}{u_1} = q^3 = \frac{-8}{3 \times 72} = -\frac{1}{27}.$$
On a donc $q = -1/3$ et $u_0 = -216$.
3. On a $u_7 = u_0 q^7$ et $u_3 = u_0 q^3$, d'où
$$\frac{u_7}{u_3} = q^4 = 16 = 2^4,$$
d'où $q = \pm 2$ puis $u_0 = u_3/q^3 = \pm 5$ (du même signe que q).

Solution 6.14

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} = \frac{\frac{3a_n+2}{a_n+4}-1}{\frac{3a_n+2}{a_n+4}+2} = \frac{2a_n-2}{5a_n+10} = \frac{2}{5}\frac{a_n-1}{a_n+2} = \frac{2}{5}b_n.$$

Conclusion

La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

2. On a $b_0 = \frac{a_0-1}{a_0+2} = \frac{1}{2}$, d'où

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_n = \frac{a_n-1}{a_n+2} &\implies b_n(a_n+2) = a_n - 1 \\ &\implies 1 + 2b_n = a_n(1-b_n) \\ &\implies a_n = \frac{1+2b_n}{1-b_n} \\ &\implies a_n = \frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2-\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5^n+2^n}{5^n-2^{n-1}}.$$

Solution 6.15

On trouve $u_n = 2^n - 1$.

Solution 6.16

On a une suite arithmético-géométrique: $p_{n+1} = \frac{3}{2}p_n - 1000$. On cherche r le point fixe de la fonciton $f : x \mapsto \frac{3}{2}x - 1000$, on trouve $r = 2000$. On introduit $y_n = p_n - r$, alors

$$y_{n+1} = p_{n+1} - 2000 = \frac{3}{2}p_n - 1000 - 2000 = \frac{3}{2}\left(p_n - 2000\right) = \frac{3}{2}y_n.$$

Ainsi, la suite (y_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$, donc

$$y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n y_0 = 8000\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

En particulier, $p_{50} = 8000\left(\frac{3}{2}\right)^{50} + 2000$, qui est de l'ordre de 5.1×10^{12}.

Solution 6.17

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie. On a alors

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

  Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3 > 0$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$$

  et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif. On a

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 - 3x_n}{x_n + 2} = \frac{x_n}{2}\frac{x_n - 3}{x_n + 2}$$

Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Soit $n \geq 0$, supposons que $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
  D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
- Nous concluons en résumant la situation :
  $\mathcal{H}_0$ est vraie, et quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_n$ est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

6.3 Entiers relatifs

Solution 6.18

On a $842 = 256 \times 3 + 74$, d'où

$$96842 = 256 \times 375 + 256 \times 3 + 74 = 256 \times 378 + 74 \text{ et } 0 \leq 74 < 256.$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne de 96842 par 256 sont respectivement 378 et 74.

De manière analogue, on On a $842 = 2 \times 375 + 92$, d'où

$$96842 = 256 \times 375 + 2 \times 375 + 92 = 258 \times 375 + 92 \text{ et } 0 \leq 92 < 375.$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne de 96842 par 375 sont respectivement 258 et 92.

6.4 Les nombres rationnels