Chapter 17 Systèmes d'équations linéaires

17.1 Systèmes d'équations linéaires

17.2 Procédé d'élimination de Gauß-Jordan

Solution 17.1
Solution 17.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

Solution 17.16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

Solution 17.17

En notant $(A|b)$ la matrice augmentée du système...

1. $(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ Le système a une unique solution $(2, 1, -4)^T$.

2. $(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Le système admet une droite de solutions paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.18

Le système d'équation de la question 1 est le système homogène associé au système de la question 2. On peut donc effectuer la réduction sur la matrice augmentée $(A|b)$ du second système pour en déduire les solutions de chacun des système.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 10 & -10 \\ -2 & 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On observe immédiatement que ce système est incompatible car les deux dernières lignes représentent les équations $y + z = 8$ et $y + z = -3$. On peut néanmoins poursuivre la réduction pour A.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions sont

1. $x = t\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

2. Pas de solutions.

Solution 17.19

Les deux premières équations ont pour solution une droite paramétrée par $x = p + sw$, $s \in \mathbb{R}$, où $p = (1,0,0)^T$ et $w = (0,-1,1)^T$.

Le troisième plan intersecte les deux premiers selon cette droite. Pour le vérifier, on peut résoudre le système de trois équation correspondant. On peut également rechercher l'intersection de la droite et du plan En effet, si $x(x_1,x_2,x_3)^T = p + sw = (1,-s,s)^T$,

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \iff (1) + 2(-s) + 2(s) = 1 \iff 1 = 1.$$

Autrement dit, tous les points de la droite sont dans le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$.

Solution 17.20

1. On trouve

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -5\\0 & 1 & -1 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

2. et la solution générale

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5-2t\\4+t\\t\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Pour vérifier notre solution, nous devons trouver $Ap = b$ et $Av = 0$.

$$Ap = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\1 & 2 & 0 & -1\\3 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\4\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix},$$

$$Av = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\1 & 2 & 0 & -1\\3 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

4. La forme réduite de A est constitué des quatre première colonne de la forme réduite de $(A|b)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Un tel vecteur d n'existe pas puisque la matrice précédente a un pivot sur chaque ligne. Plus précisement, on aurait

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & *\\0 & 1 & -1 & 0 & *\\0 & 0 & 0 & 1 & *\end{pmatrix}.$$

où les $*$ sont des réels quelconques : il n'y a aucune condition de compatibilité.

(b) Il n'existe pas de vecteur d tel que le système ait une solution unique. En effet, le système $Ax = d$ a une infinité de solutions pour tout vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ car il y a toujours une variable libre (il n'y a pas de pivot dans la troisième colonne).

Solution 17.21

1. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. Les solutions sont dans $\mathbb{R}^4$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions sont dans $\mathbb{R}^5$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-4t \\ -s+t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

4. Pour déterminer d, on effectue un calcul direct

$$d = Cw = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les solutions de $Cx = d$, il est inutile de recommencer l'algorithme de Gaß. Nous savons déjà que $Cw = d$ et nous connaissons les solutions du système homogène associé. La solutions générale de $Cx = d$ est donc de la forme

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.22

Le déterminant de A est

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{vmatrix} = -1 - i(1+i) = -1 - i^2 - i = -i.$$

On peut résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauß-Jordan à la matrice $(A|b)$, ou en déterminant A^{-1}. On trouve

$$A^{-1} = -\frac{1}{i} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution du système $Ax = b$ est

$$x = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

17.3 Noyau et image d'une matrice

Solution 17.23 *Vrai ou Faux?*

1. Faux. Certains systèmes sont incompatibles comme…
2. Faux. Un système linéaire a zéro, exactement une, ou une infinité de solutions (c'est du cours).
3. Vrai. Chaque opération élémentaire possède une opération «inverse».
4. Faux. Par exemple si
$$(A|b) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
5. Vrai. Cette ligne représente une équation $0 = a$ avec $a \neq 0$.
6. Vrai.
7. Vrai.
8. Vrai.
9. Faux.

Solution 17.24

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'unique solution de $\boldsymbol{B}x = 0$ est $x = 0$. Ainsi $\ker \boldsymbol{B} = \{ 0 \} \subset \mathbb{R}^3$. On a de plus

$$d = c_1 + 2c_2 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

On a $d = c_1 + 2c_2 - c_3$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = d.$$

Ainsi, $(1, 2, -1)^T$ est solution du système $\boldsymbol{B}x = d$ et c'est l'unique solution puisque $\ker \boldsymbol{B} = \{ 0 \}$.

Solution 17.25

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.26

La matrice augmentée du système est

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & -8 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -3 & -8 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

On peut donc déjà dire que le système est compatible, de plus

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système sont donc paramétrées par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit les solutions du système homogène associé qui sont paramétrées par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.27

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, alors les solutions (dans $\mathbb{R}^4$) sont une droite paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si C est équivalente par ligne une matrice B, les solutions du système $Bx = 0$ (dans $\mathbb{R}^5$) sont un plan paramétré par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.28

On a

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ admet donc pour unique solution $x = (2, 0, -5)^T$.

On a

$$(B|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $Bx = b$ admet donc un plan de solutions paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.29

On a

$$B \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le système $Bx = 0$ est un système à 4 équations et 4 inconnues.

Ce système étant homogène, il est toujours compatible. De plus, il y a toujours une variable libre (il n'y a pas de pivot sur la troisième colonne) ; ce système admet donc une infinité de solutions.

Les solutions de $Bx = 0$ sont une droite paramétrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Il existe un $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible. En effet, en remontant les opérations élémentaires sur les lignes, nous pouvons déterminer un vecteur B tel que

$$(B|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui représente un système incompatible.

Puisque nous n'avons effectué aucun échange de ligne dans la réduction, il suffit de choisir $b = (0, 0, 0, 1)^T$. On peut vérifier

$$(B|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne représentant l'équation $0 = 1$.

3. On pourrait choisir $d = (0,0,0,0)^T$ et l'on se trouve alors dans le cas de la première question... On peut plutôt choisir n'importe quel vecteur $p \in \mathbb{R}^4$, par exemple $p = (1,1,1,1)^T$ et calculer

$$d = Bp = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur p est donc une solution particulière de l'équation $Bx = d$. Connaissant les solution du système $Bx = 0$, on en déduit que les solutions du système $Bx = d$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.30

On a

$$Ax = 6x \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 4x_1 & -x_2 & +x_3 & = 6x_1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & = 6x_2 \\ x_1 & -x_2 & +4x_3 & = 6x_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & = 0 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce que l'on aurait pu trouver plus rapidement en remarquant

$$Ax = 6x \iff Ax = 6I_3 x \iff Ax - 6I_3 x = 0 \iff \left(A - 6I_3\right) x = 0.$$

Les solutions de $Ax = 6x$ sont donc les éléments du noyau de $B = A - 6I_3$. Or

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$Ax = 6x \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions de l'équation $Ax = 6x$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.31

La matrice augmentée du système $Bx = v$ est

$$(B|v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 3 & c \\ 3 & 1 & 2 & d \end{pmatrix}$$

On a successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 3 & c \\ 3 & 1 & 2 & d \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 4 & a+c \\ 0 & 1 & -1 & -3a+d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 4 & a+c \\ 0 & 0 & -2 & -3a+-b+d \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c \\ 0 & 0 & -2 & -3a+-b+d \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}a - b + \frac{1}{2}c + d \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$$

Inutile de poursuivre jusqu'à la forme échelonnée réduite, nous savons alors que le système $Bx = v$ est compatible si, et seulement si $-\frac{5}{2}a - b + \frac{1}{2}c + d = 0$, c'est-à-dire

$$5a + 2b - c - 2d = 0.$$

Solution 17.32

Solution 17.33

Posons $b = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$. Le système $Ax = b$ a pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ -2 & 3 & -1 & \beta \\ 3 & -3 & 0 & \gamma \\ 2 & 0 & -2 & \delta \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 3 & -3 & \beta + 2\alpha \\ 0 & -3 & 3 & \gamma - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \delta - 2\alpha \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 3 & -3 & \beta + 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 0 & \delta - 2\alpha \end{array}\right)$$

Ainsi, le système

$$Ax = b \iff \begin{cases} x - z &= \alpha \\ 3y - 3z &= \beta + 2\alpha \\ 0 &= -\alpha + \beta + \gamma \\ 0 &= -2\alpha + \delta \end{cases}$$

est compatible si, et seulement si

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha + \delta &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2}\delta \\ \beta &= -\gamma + \frac{1}{2}\delta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si b est combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 17.34

Chouette, un problème pour réviser les nombres complexes et les racines de l'unité.

Celui-ci peut être rendu en travail de rédaction en temps libre.

Solution 17.36

Solution 17.37

Solution 17.38

Si $m = \frac{1}{2}$, alors le système (S) n'a pas de solutions.

Si $m = -1$, le système (S) a une infinité de solutions, de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $m \notin \left\{ \frac{1}{2}, -1 \right\}$, alors le système (S) a une unique solution,

$$x = \frac{m-1}{1-2m} \qquad y = \frac{1-3m}{1-2m} \qquad z = \frac{(1+2m)(1-m)}{1-2m}.$$

Solution 17.39

Si $a = 3$, le système n'a pas de solutions.

Si $a = 2$, il y a une infinité de solutions: les triplets $(5t, 1-4t, t)$ où t parcourt $\mathbb{R}$.

Si $a \neq 2$ et $a \neq 3$, alors il y a une unique solution: le triplet $\left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)$.

Solution 17.40

17.4 Image d'une matrice

Solution 17.41

En appliquant l'algorithme de Gauß jusqu'à obtenir une forme échelonnée, on obtient

$$A \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est échelonnée et a trois ligne non nulles, ainsi $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Le noyau de A est l'ensemble des solutions de $Ax = 0$. En continuant la réduction de A, on obtient

$$A \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deux matrices équivalentes par lignes ont même noyau, on a ici

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff \begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

Les variables principales sont x_1, x_2 et x_3. En paramètrant les solutions de $Ax = 0$ avec $x_4 = s$ et $x_5 = t$, on obtient la forme des solutions de $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ -2t \\ s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\ker(A) = \left\{ s(-1,0,1,1,0)^T + t(1,-2,-3,0,1)^T \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4 + \alpha_5 c_5 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

où

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'image de A est également l'ensemble des vecteurs $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ tel que le système $Ax = b$ est compatible. Or

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5b_1 - 3b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_3 + b_4 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est donc compatible si, et seulement si $b_1 - b_3 + b_4 = 0$. On a donc

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ (b_1, b_2, b_3, b_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; b_1 - b_3 + b_4 = 0 \right\}.$$

Solution 17.42

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 2 & 3 & 0 & v \\ 3 & 5 & 1 & w \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 0 & -1 & -2 & v-2u \\ 0 & -1 & -2 & w-3u \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & u \\ 0 & -1 & -2 & v-2u \\ 0 & 0 & 0 & w-u-v \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est donc compatible si, et seulement si $w - u - v = 0$.

On a donc

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ (u,v,w)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u + v - w = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$$

On reconnait l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine.

Le vecteur $d = (1, 5, 6)^T$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$ puisque $1 + 5 - 6 = 0$. D'après le calcul ci dessus, on a d'ailleurs

$$(A|d) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$Ax = d \iff \begin{cases} x_1 - 3x_3 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= 7 + 3x_3 \\ x_2 &= -3 - 2x_3 \end{cases}$$

Les solutions du système $Ax = d$ sont donc paramétrée par

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Chacune des solutions du sytème $Ax = d$ permet d'écrire d comme combinaison linéaire des colonnes de A. Par exemple, avec $t = 0$ et $t = -1$, on a

$$d = 7c_1 - 3c_2 \text{ et } d = 4c_1 - c_2 - c_3.$$

Solution 17.43

Réponses non rédigées!

1. On trouve que A est de rang 2. Les soltuions de $Ax = 0$ sont de la forme

$$x = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui permet d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire des colonnes de A.

$$-3c_1 + 2c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si $a = 5$ et $b = 10$. Dans ce cas, les solutions de $Ax = b$ sont de la forme

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Le rang de B est 4. Les différents critère d'inversibilité d'une matrices nous permettent d'affirmer que l'équation $Bx = 0$ a donc pour unique solution le vecteur nul. Ainsi, il est impossible d'écrire le vecteur nul comme une combinaison linéaire non triviale des colonnes de A.

Également, le système $Bx = b$ a une unique solution pour tout $b \in \mathbb{R}^4$, ainsi $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^4$.

17.5 Rang

Solution 17.45

Solution 17.46

On a

$$
\begin{aligned}
(A|b) &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 8 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3} L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2
\end{aligned}
$$

Le rang de A est donc $r = \operatorname{rg}(A) = 2$. De plus,

$$
(E) \iff \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 + 4x_5 = -7 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}
$$

Nous pouvons donc paramétrer les solutions de (E) à partir des variables libres, disons $x_2 = s$, $x_4 = t$ et $x_5 = u$. Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 - 5s - t - 4u \\ s \\ 3 - 2t + u \\ t \\ u \end{pmatrix}, \quad s, t, u \in \mathbb{R}.
$$

Solution que l'on peut écrire sous forme vectorielle

$$
\begin{aligned}
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= p + sv_1 + tv_2 + uv_3.
\end{aligned}
$$

Ce qui est bien de la forme demandée avec $n = 5$, le nombre d'inconnue et donc $n - r = 5 - 2 = 3$ vecteurs v_i.

Un calcul direct montre

$$
A \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

En notant $c_1, c_2, \dots, c_5$ les colonnes de A, on peut réécrire les relation $Ap = b$ et $Av_1 = 0$ ainsi

$$-7c_1 + 3c_3 = b \text{ et } -5c_1 + c_2 = 0.$$

Il y a bien d'autre combinaisons possibles!

Solution 17.47

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & \lambda & 7 \\ 1 & -1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & \lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1 & \mu-2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \mu-2 \\ 0 & -9 & \lambda & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \mu-2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 3-3\mu \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- Le système a une unique solution si, et seulement si $\lambda \neq 3$ (et on a bien $\mathrm{rg}(A) = 3$). Dans ce cas, on obtient par substitution

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 2 \\ -3x_2 + x_3 & = \mu - 2 \\ (\lambda - 3)x_3 & = 3 - 3\mu \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = \frac{4\lambda+\lambda\mu-15}{3(\lambda-3)} \\ x_2 & = \frac{2\lambda-\lambda\mu-3}{3(\lambda-3)} \\ x_3 & = \frac{3-3\mu}{\lambda-3} \end{cases}$$

- Le système est incompatible si, et seulement si $\lambda = 3$ et $\mu \neq 1$. Le système est alors de rang 2.

- Le système admet une infinité de solution si, et seulement si $\lambda = 3$ et $\mu = 1$. Le système est alors de rang 2. On a alors

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système $Ax = b$ sont alors paramètrée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution 17.48

Puisque les solutions sont des élément de $\mathbb{R}^4$, la matrice B a quatre colonnes que l'on note c_1, c_2, c_3, c_4.
Le vecteur $(1, 0, 2, 0)^T$ est une solution de $Bx = d$, donc

$$c_1 + 2c_3 = d$$

d'où $c_3 = \frac{1}{2}(d - c_1) = (1, 2, -2)^T$. Deplus, $(-3, 1, 0, 0)^T$ et $(1, 0, -1, 1)^T$ sont solutions du système homogène $Bx = 0$, c'est-à-dire

$$-3c_1 + c_2 = 0 \text{ et } c_1 - c_3 + c_4 = 0$$

d'où $c_2 = 3c_1 = (3, 3, 6)^T$ et $c_4 = c_3 - c_1 = (0, 1, -4)^T$. Finalement,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Solution 17.49

Solution 17.50

17.6 Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^n$

Solution 17.51

$$(1)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ x \qquad + z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad \boldsymbol{y} - 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad y - 2z = 2 \\ \qquad 6z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases} \qquad \text{(1) compatible de rang 3}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (1) est $S_1 = \{ (1, 0, -1) \}$.

$$(2)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad \boldsymbol{5y} - 4z = 5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad 5y - 4z = 5 \\ \qquad 0z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système est de rang 2 mais est incompatible ; l'ensemble de ses solutions est $S_2 = \emptyset$.

$$(3)\begin{cases} \boldsymbol{x} - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad \boldsymbol{5y} - 4z = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad 5y - 4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad 5y - 4z = 4 \\ \qquad 0z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \qquad \text{(3) compatible de rang 2}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{11z + 6}{5} \\ y = \dfrac{4z + 4}{5} \end{cases}$$

Le système est de rang 2 et l'ensemble de ses solutions est $S_3 = \left\{ \left(-\frac{11z+6}{5}, \frac{4z+4}{5}, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$.