

# Diagonalisation

# Aperçu

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme
2. Polynôme caractéristique
3. Diagonalisation en dimension finie
4. Puissances de matrices
5. Suites récurrentes
6. Équations différentielles
7. Théorème de Cayley-Hamilton



# Diagonalisation

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme
2. Polynôme caractéristique
3. Diagonalisation en dimension finie
4. Puissances de matrices
5. Suites récurrentes
6. Équations différentielles
7. Théorème de Cayley-Hamilton

**D 1** Soient  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $u$  si l'endomorphisme  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif. Dans ce cas, le noyau de  $u - \lambda \text{Id}_E$  est appelé **sous-espace propre** de  $u$  relatif à  $\lambda$ . On note

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E) = \{ x \in E \mid u(x) = \lambda x \}.$$

- On dit qu'un vecteur  $x \neq 0_E$  de  $E$  est un **vecteur propre** de  $u$  si  $u(x)$  est colinéaire à  $x$ , c'est-à-dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x.$$

On dit que  $x$  est un **vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme  $u$  s'appelle le **spectre** de  $u$  et se note  $\text{Sp}(u)$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera  $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

**R** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Alors,  $E_\lambda$  est stable par  $u$ :

$$u(E_\lambda) \subset E_\lambda.$$

De plus,

$$E_0 = \ker(u).$$

et si  $\lambda \neq 0$ ,

$$E_\lambda \subset \operatorname{Im}(f).$$

**E 2** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Une homothétie n'a qu'une valeur propre, son rapport  $\alpha$ , et on a

$$E = E_\alpha.$$

2. Un projecteur  $p \in \mathcal{L}(E)$  a deux valeurs propres, 1 et 0, et on a

$$E = E_1 \oplus E_0.$$

3. Une symétrie  $s \in \mathcal{L}(E)$  a deux valeurs propres, 1 et  $-1$ , et on a

$$E = E_1 \oplus E_{-1}.$$

**E 3** Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D : E \rightarrow E$  l'endomorphisme de dérivation. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$f \mapsto f'$$

on pose  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors, pour tout réel  $x$ , on a

$$x \mapsto e^{\alpha x}$$

$$(D f_\alpha)(x) = f'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha x} = \alpha f_\alpha(x).$$

Autrement dit,  $D f_\alpha = \alpha f_\alpha$ . Tout réel  $\alpha$  est donc valeur propre de  $D$ . De plus le sous-espace propre de  $D$  relatif à la valeur propre  $\alpha$  est

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{ f \in E \mid D f = \alpha f \} \\ &= \{ f \in E \mid f' = \alpha f \} \\ &= \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\alpha x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $E_\alpha = \text{Vect} \{ f_\alpha \}$ .



- T 4** *Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , et  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille finie de vecteurs propres de  $u$  associés respectivement à des valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  deux à deux distinctes. Alors la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre.*
- C 5** *Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  est fini, et de cardinal au plus  $n$ .*

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

2.1 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice

2.3 Multiplicité

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

Dans tout ce paragraphe, on étudie un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . On désigne par  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $A = (a_{i,j})$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

2.1 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice

2.3 Multiplicité

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**P 6** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si

$$\det (\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0.$$

**D 7** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . On appelle **polynôme caractéristique de  $u$**  le polynôme  $\chi_u$  défini par la relation

$$\chi_u(\lambda) = \det (\lambda \operatorname{Id}_E - u) .$$

L'ordre de multiplicité d'une racine  $\lambda$  de  $\chi_u$  est dit **multiplicité de la valeur propre  $\lambda$**  de  $u$ .

En dimension finie, les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

2.1 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice

2.3 Multiplicité

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**D 8** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme caractéristique de  $A$**  le polynôme  $\chi_A$  défini par la relation

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

**P 9** *Les polynômes caractéristiques de deux matrices semblables sont égaux.*

**P 10** *Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . Le polynôme caractéristique de  $u$  est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices.*

**D 11** Par extension, les **valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres de l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  qui est canoniquement associé à  $A$ .

**E 12** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda I_2 - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 7 & 15 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est

$$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 7)(\lambda + 4) + 30 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Ainsi, les valeurs propres de  $A$  (et de  $u$ ) sont les solutions de  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ .

Pour trouver les vecteurs propres associées à la valeur propre 1, on détermine les solutions du système  $(A - I_2)x = 0$ , on a

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



**E 12** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_1(u) = \text{Vect} \{ 5e_1 + 2e_2 \}.$$

De manière analogue, on trouve

$$E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_2(u) = \text{Vect} \{ 3e_1 + e_2 \}.$$

**T 13** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

2.1 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice

2.3 Multiplicité

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**D 14** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ .  
La **multiplicité d'une valeur propre**  $\lambda$  de  $u$  est l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda$  de  $\chi_u$ .

**T 15** *Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  d'ordre de multiplicité  $k$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. Alors*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k.$$

- T 16** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . On suppose  $\chi_u$  scindé et on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses racines listées avec leur multiplicité. Alors
1. Le déterminant de  $u$  est égal au produit de ses valeurs propres.
  2. La trace de  $u$  est égal à la somme de ses valeurs propres.

**R** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\chi_u$  est toujours scindé.

**E 17** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice sachant que  $-1$  l'une des valeurs propres.

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

3.1 Diagonalisation

3.2 Cas des valeurs propres simples

3.3 Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

3.1 Diagonalisation

3.2 Cas des valeurs propres simples

3.3 Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

D 18

- ▶ Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Dans ce cas, la matrice de  $u$  dans cette base est diagonale.
- ▶ Une matrice carrée  $A$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit, s'il existe une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP = D$ .



**E 19** On reprend l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable, car si l'on considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors  $P$  est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**T 20** Vérifier les calculs précédents.

Un endomorphisme n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais diagonalisable : en effet une matrice diagonale nilpotente est nécessairement nulle !

**E 21** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

3.1 Diagonalisation

3.2 Cas des valeurs propres simples

3.3 Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**T 22** Soit  $u$  endomorphisme de  $E$ . Si  $u$  possède  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable.

**T 23** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $A$  est diagonalisable.

**E 24** La matrice  $(3, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a trois valeurs propres, 0, 4 et 12 : elle est donc diagonalisable.

**T 25** Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**E 26** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mais est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

3.1 Diagonalisation

3.2 Cas des valeurs propres simples

3.3 Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**L 27** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres de  $u$  deux à deux distinctes. Alors,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \dots \times E_{\lambda_p},$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = 0_E, x_2 = 0_E, \dots, x_p = 0_E.$$

On dira que les sous-espaces propres de  $u$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en **somme directe**.

**T 28** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si

- ▶ le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ ,
- ▶ pour toute valeur propre de  $u$ , sa multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

**C 29** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u)) = \dim(E).$$

**C 30** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  les sous-espaces propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (E_{\lambda}(u)) = E.$$



**E 31** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

n'a que deux valeurs propres, 2 et 4, mais est diagonalisable.

**E 32** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a que deux valeurs propres,  $-1$  et  $-2$ , mais n'est pas diagonalisable.

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

2. Polynôme caractéristique

3. Diagonalisation en dimension finie

4. Puissances de matrices

5. Suites récurrentes

6. Équations différentielles

7. Théorème de Cayley-Hamilton

**T 33** Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ .

$$\chi_u(X) = \det (X \operatorname{Id}_E - u) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Alors  $\chi_u(u) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k$  est l'endomorphisme nul de  $E$ .

**T 34** Soient  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et

$$\chi_M(X) = \det (X I_n - M) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Alors  $\chi_M(M) = \sum_{k=0}^n \alpha_k M^k$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

*Démonstration.* Non exigible.

Désignons par  $C(X)$  le polynôme à coefficients dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que pour  $x \in \mathbb{K}$ ,  $C(x)$  est la transposée de la comatrice de la matrice  $xI_n - M$ . On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,

$$(xI_n - M) C(x) = (\det(xI_n - M)) I_n = \chi_M(x) I_n.$$

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$X^k I_n - M^k = (X I_n - M) (X^{k-1} I_n + X^{k-2} M + \dots + M^{k-1}),$$

et puisque  $\chi_M(X) I_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k I_n$  et  $\chi_M(M) = \sum_{k=0}^n \alpha_k M^k$ , on obtient après combinaison linéaire

$$\chi_M(X) I_n - \chi_M(M) = (X I_n - M) Q(X)$$

où  $Q(X)$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On en déduit

$$\chi_M(M) = (X I_n - M) (C(X) - Q(X)) = (X I_n - M) \left( \sum_{k=0}^n X^k B_k \right) \quad \text{avec} \quad B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Supposons que l'une des matrices  $B_k$  soit non nulle. On pose alors  $r = \max \{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid B_k \neq 0 \}$ , alors

$$\chi_M(M) = X^{r+1} B_r + \sum_{k=0}^{r-1} X^{k+1} B_k - \sum_{k=0}^r X^k M B_k.$$

Ainsi, parmi les coefficients de la matrice  $\chi_M(M)$  figurerait au moins un terme en  $X^{r+1}$ , ce qui est contradictoire avec  $\chi_M(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les matrices  $B_k$  sont donc toutes nulles et  $\chi_M(M) = 0$ . ■

**E 35** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , alors

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc = X^2 - (a + d)X + ad - bc$$

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A).$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit

$$A^2 = \operatorname{Tr}(A)A - \det(A)I_2.$$