

Chapter 53 Topologie sur les espaces vectoriels normés

53.1 Normes et espaces vectoriels normés

Exercice 53.1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t^2} \right|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur \mathbb{R}^2 , et dessiner la boule unité.

Exercice 53.2

Soit $p \geq 1$ un réel. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient des réels positifs $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. On a vu l'inégalité de Minkovski

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}.$$

On pose, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur \mathbb{K}^n .
2. Montrer que pour $a \geq 0$, $1 + a^p \leq (1 + a)^p$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p$.
4. Étudier les variations de $\|X\|_p$ en fonction de p .
5. Étudier $\lim_{p \rightarrow \infty} \|X\|_p$.

Exercice 53.3

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Soient des scalaires distincts a_0, \dots, a_n . Montrer que

$$\|P\| = \sum_{k=0}^n |P^{(k)}(0)|$$

est une norme.

Exercice 53.4

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$. Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne ainsi une norme $\|\cdot\|_A$ sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 53.5

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 53.6

Soit E l'algèbre des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} . On pose, pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Montrer que cette norme d'espace vectoriel n'est pas une norme d'algèbre.

Exercice 53.7

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E . On veut prouver qu'elle est euclidienne dès que l'égalité du parallélogramme est vérifiée, c'est-à-dire

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (\text{Égalité du parallélogramme})$$

En vertu de la méthode de polarisation, on pose

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

et on cherche à prouver que φ est un produit scalaire sur E .

1. Montrer l'identité $\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$.
2. Montrer l'identité pour tout λ réel : $\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$.
3. Montrer que φ est un produit scalaire tel que $\|\cdot\|$ est sa norme associée.

Exercice 53.8

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Montrer les inégalités

$$\begin{aligned} \|X\|_\infty &\leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty, \\ \|X\|_\infty &\leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty, \\ \|X\|_\infty &\leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty. \end{aligned}$$

Prouver que les six constantes obtenues sont les meilleures, en exhibant chaque fois un vecteur $X \neq 0$ réalisant l'égalité.

Exercice 53.9

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer l'inégalité $\|f\|_1 \leq (b - a)\|f\|_\infty$.
2. Montrer l'inégalité $\|f\|_2 \leq \sqrt{b - a}\|f\|_\infty$.
3. Montrer l'inégalité $\|f\|_1 \leq \sqrt{b - a}\|f\|_2$.
4. Montrer que, pour $f \neq 0$, les quotients suivants non sont pas majorés

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1}, \quad \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}, \quad \frac{\|f\|_2}{\|f\|_1}.$$

Exercice 53.10

Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Montrer que E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension 2.
2. Montrer que les applications

$$a + b\sqrt{2} \mapsto |a| + |b| \quad \text{et} \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a + b\sqrt{2}|$$

définissent deux normes sur E .

3. À l'aide de $u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$, montrer qu'elle ne sont pas équivalentes.

Exercice 53.11

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et pour $\varphi \in E$, $N_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall f \in E, N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty.$$

1. Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.
2. Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes si, et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Exercice 53.12 Oral Mines-Pont PSI 2023

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E .

1. Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1) . On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2) .
2. On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si, et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2) . Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
3. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$, et

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Montrer que si $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.
5. En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

53.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 53.13

Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q pour cette norme.

53.3 Topologie d'un espace normé

Exercice 53.14

Si deux boules fermées $B_f(a, r)$ et $B_f(a', r')$ d'un espace vectoriel normé $E \neq \{0\}$ sont égales, montrer que $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 53.15

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A un ouvert de $E \times F$, B un ouvert de $F \times G$. On définit

$$B \circ A = \{ (x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F, (x, y) \in A \text{ et } (y, z) \in B \}.$$

Montrer que $B \circ A$ est un ouvert de $E \times G$.

Exercice 53.16

Soient U_1, \dots, U_p des parties ouvertes d'un espace vectoriel normé E .

1. Montrer que $U = U_1 \cap \dots \cap U_p$ est une partie ouverte.

2. Que dire de la réunion d'un nombre fini de parties fermées?

Exercice 53.17

Montrer que les points intérieurs à une boule fermée sont ceux de la boule ouverte de même rayon (donc aucune boule fermée n'est ouverte).

Exercice 53.18

Soit A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E . Montrer que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donner un exemple dans lequel $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 53.19

Soit A, B deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E . Montrer que les intérieurs de \overline{U} et \overline{V} sont disjoints.

Exercice 53.20

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E . Montrer que

1. $\overline{(\overset{\circ}{A})} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ et $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

5. $\overset{\circ}{(A \setminus B)} = \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}$.
6. $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Exercice 53.21

Soit E l'espace des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On le munit des normes

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \quad N_d(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

1. Comparer ces trois normes.
2. Étudier pour chacune si

$$\Omega = \{ f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(t) > 0 \}$$

est une partie ouverte.

Exercice 53.22

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E , alors son adhérence \overline{F} est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 53.23

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

1. Montrer que \overline{A} est convexe.
2. La partie $\overset{\circ}{A}$ est-elle convexe?

Exercice 53.24

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont

$$|\xi| \leq \max \{ 1, |a| + |b| + |c| \}.$$

2. On note \mathcal{D} l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur \mathbb{R} .

Montrer que \mathcal{D} est une partie fermée de \mathbb{R}^3 .

53.4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Exercice 53.25

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont

$$|\xi| \leq \max \{ 1, |a| + |b| + |c| \}.$$

2. On note \mathcal{D} l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur \mathbb{R} .

Montrer que \mathcal{D} est une partie fermée de \mathbb{R}^3 .