Chapter 43 Espace probabilisé fini

43.1 Le langage de l'aléatoire

Exercice 43.1 (**)

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω. Écrire les ensembles suivants à l'aide d'unions et/ou d'intersections.

1. A : «il y a une infinité d'événements parmi les événements A_n qui sont réalisés».
2. B : «à partir d'un certain rang, tous les événements A_n sont réalisés».
3. C : «il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés».

43.2 Espace probabilisé fini

Exercice 43.2

On considère 3 évènements A, B et C.

1. À l'aide d'un dessin des ensembles A, B et C, conjecturer une formule permettant de calculer
$$P(A \cup B \cup C)$$
si l'on connaît les probabilités de chacun de ces événements et les probabilités des intersections de ces événements.
2. Démontrer cette formule à partir des axiomes de la théorie des probabilités.

Exercice 43.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements de probabilité $\frac{3}{5}$. Donner un encadrement de $P(A \cap B)$.

Exercice 43.4

Soient A et B deux événements quelconques d'un espace probabilisé. Démontrer que
$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4},$$
et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 43.5

Pour chacune des expériences qui suit, proposer un espace probabilisé (Ω, P) permettant de l'étudier.

1. On tire successivement et sans remise six boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 49.
2. On lance deux dés équilibrés.
3. Dix individus prennent place sur dix chaises réparties autour d'une table.
4. On lance une pièce équilibrée. Si celle-ci tombe du côté pile, on tire une boule dans une urne contenant une boule blanche et deux boules rouges. Sinon, on tire une boule dans une urne contant trois boules blanches et une boule rouge.

Exercice 43.6

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ k \}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 43.7

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ 1, 2, \dots, k \}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 43.8

On considère six urnes numérotées de 1 à 6 contenant chacune au moins une boule blanche et une boule noire. On lance un dé et on pioche successivement et avec remise 8 boules dans l'urne dont le numéro est le résultat du lancer. On définit alors les événements suivants:

- N_0 : «On ne pioche que des boules blanches».
- N : «On ne pioche que des boules noires».
- B_k : «Le k-ième tirage dans l'urne a donné une boule blanche.
- N_k : «On a tiré la première boule noire au k-ième tirage».
- A_i : «On a tiré les boules dans l'urne numéro i».

Parmi les familles suivantes, lesquelles forment un système complet d'événements ?

1. (N, N_0).

2. $\left(B_k\right)_{1 \leq k \leq 8}$.

3. $\left(N_k\right)_{1 \leq k \leq 8}$.

4. $\left(N_k\right)_{0 \leq k \leq 8}$.

5. $\left(A_i\right)_{1 \leq i \leq 6}$.

Exercice 43.9

Une urne contient une boule bleue, une boule blanche, une boule rouge et deux boules vertes. Quelles est la probabilité d'obtenir en tirant successivement trois boules de l'urne:

1. Les boules bleue, blanche et rouge dans cet ordre?

2. Les boules bleue, blanche et rouge dans un ordre quelconque?

Exercice 43.10

Dans un sac, on a placé trois pièces de 1 euro et quatre pièces de 2 euros. Une personne extrait de ce sac trois pièces simultanément. En admettant que chaque sous-ensemble de trois pièces à même probabilité d'être extrait, calculer les probabilités des événements suivants:

1. Les trois pièces sont des pièces de 2 euros.

2. Il y a au moins une pièce de 2 euros parmi les trois pièces extraites.

Exercice 43.11

Soit le système d'équations numériques réelles, d'inconnue $(x; y)$, dans lequel a, b, c désignent trois paramètres réels.

$$\left\{ \begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6: le premier numéro sorti donne a, le second b et le troisième c.

1. Quelles sont les probabilités p_0, p_1 et p_2 pour que le système ainsi obtenu ait respectivement: une infinité de solutions; aucune solution; une solution unique $(x_0; y_0)$?

2. Quelle est la probabilité p_3 pour que le système admette la solution unique $(3; 0)$?

Exercice 43.12

Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 avariés. Les acheteurs prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée.

Voulez-vous être le 1er, 2-ième,..., le 150-ième acheteur ?

Exercice 43.13

Un joueur de poker reçoit une «main» de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker).

Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. une seule paire ?

2. deux paires ?

3. un brelan ?

4. un carrée ?

5. un full ?

Exercice 43.14

Dans une classe de n personnes, quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient le même jour d'anniversaire?

La calculer pour l'effectif standard en MP2I : 24 (25 étudiants et 1 prof).

Exercice 43.15 *Un exemple de marche aléatoire*

Une puce se déplace sur l'axe des entiers relatifs (Ce doit être une puce savante... Sincèrement, qui peut croire cela?). Elle se trouve initialement en 0, et se met à sauter. Si elle est à l'abscisse k, elle saute à l'abscisse $k + 1$ ou $k - 1$ de manière équiprobable.

1. Quelle est la probabilité qu'elle se retrouve à son point de départ après 16 sauts? Après 17 sauts?

2. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve à l'abscisse k après 16 sauts, où $k \in [\![-16, 16]\!]$?

Exercice 43.16 *Un exemple de marche aléatoire*

Une puce se déplace sur l'axe des entiers relatifs (Ce doit être une puce savante... Sincèrement, qui peut croire cela?). Elle se trouve initialement en 0, et se met à sauter. Si elle est à l'abscisse k, elle saute à l'abscisse $k + 1$ ou $k - 1$ ou reste à sa place de manière équiprobable.

1. Quelle est la probabilité qu'elle se retrouve à son point de départ après 16 sauts? Après 17 sauts?

2. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve à l'abscisse k après 16 sauts, où $k \in [\![-16, 16]\!]$?

Exercice 43.17

Quatre hommes déposent leur chapeau au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux.

1. Calculer la probabilités qu'aucun des 4 hommes ne prenne son propre chapeau.

2. Calculer la probabilités qu'exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau.

Exercice 43.18

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point. Quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque un.

Pour qui parieriez-vous?

Exercice 43.19

Deux joueurs jouent indépendamment n parties de «pile ou face». Quelle est la probabilité que sur ces n parties, il obtiennent tous deux le même nombre de fois «face»?

43.3 Conditionnement

Exercice 43.20

Votre médecin vous annonce que votre test de dépistage du cancer du bras droit est positif. Pas de chance, car ce cancer ne touche que 0.1% de la population!

Vous cherchez alors à savoir si ce test est fiable. La réponse est sans appel : «Si vous avez le cancer, le test sera positif dans 90% des cas ; alors que si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 97% des cas».

Que devez-vous en penser?

Exercice 43.21

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?

2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 43.22

Vl'a ti pâs qu'en pâssant par l'plant[1] du Pé Mathieu eun vôleu i a chapardeu trois pommes de saignette qu'i mit dans sa pouchette, é pi quatre coquerelles et côr sept ambrettes. En r'venant il a croiseu su son ch'min la fille de son vésin et i y'offrit trois pommes au hasard.

1. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu eune pomme de châque sorte.

2. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu trois pommes pareuilles.

3. Et au cas où les trois pommes é seraieunt de la même sorte, calculeu la probabiliteu pour qu'e seient des pommes de saignette.

Exercice 43.23 (*)

Une urne contient cinq boules rouges et une boule noire. Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement trois boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

Exercice 43.24

Every afternoon at five o'clock, Charles is having tea at his mother's. In order to start the conversation, he keeps saying either "I think it's raining" or "I think it isn't raining". He is mistaken once out of three when it is raining, and once out of two when it is not raining. And it is raining nine times out of ten. This afternoon, just after Big Ben rang five, he said: "I think it's raining."

Calculate the probability it is actually raining.

Exercice 43.25

Jack possède une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Dans le premier tiroir, il y a 30 chaussettes roses et 20 chaussettes vertes. Les deux autres tiroirs contiennent, l'un quatre chaussettes roses (il ne sait pas lequel), l'autre quatre chaussettes vertes (il ignore évidemment de quel tiroir il s'agit). Dans l'obscurité, il prend, au hasard, une chaussette du premier tiroir, puis la place dans un des deux autres tiroirs. Il prend ensuite dans celui-ci une chaussette au hasard et allume la lumière. Elle est rose.

Calculer la probabilité pour que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses.

Exercice 43.26 (*)

On considère trois urnes :

[1] l'vergeu

- U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.
- U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.
- U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 43.27 (*)

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de cartes de poker (52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi?

Exercice 43.28

Le sultan dit à Ali Baba: «Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche.»

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 boules noires dans la deuxième?

2. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place dans chaque urne 2 boules blanches et 2 boules noires?

3. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 3 boules blanches dans la première urne et les autres boules dans la deuxième?

4. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances?

Exercice 43.29 *La chaîne des menteurs*

On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne M_1, M_2, M_3,... de messagers menteurs, qui transmettent correctement le message avec une probabilité p, mais qui changent sa valeur avec la probabilité $1 - p$.

Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$), déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, puis une expression explicite de a_n en fonction de n, ainsi que la valeur limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

Le résultat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Exercice 43.30

Le gène de l'hémophilie est porté par le chromosome X, les hommes le révèlent systématiquement s'ils le portent, et les femmes ne le révèlent pas (nous considérons ici qu'il n'y a pas d'exception à cette règle). Ce gène est transmis aux enfants avec une probabilité $1/2$ par la mère. Une femme a un cousin germain hémophile (le fils de la sœur de sa mère), ni son grand-père, ni son père ni son beau-frère ne sont hémophiles.

1. Quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?

2. Si on sait de plus qu'elle a deux fils non hémophiles, quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?

3. Si on sait de plus qu'elle a un frère non-hémophile, quelle est sa probabilité de porter le gène de l'hémophilie?

Exercice 43.31 (*)

Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. On tire une boule, si elle est blanche, on gagne, si elle est noire, on perd, si elle est rouge, on fait deuxième tirage sans remettre la boule rouge,etc...

On note G_r l'événement «on gagne en partant d'une urne contenant r boules rouges».

1. Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.

2. Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.

3. Calculer $P(G_r)$.

43.4 Indépendance stochastique

Exercice 43.32 (*)
On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

- A : «on obtient le tirage 2, 4, ou 6»,
- B : «on obtient le tirage 3 ou 6».

Exercice 43.33 (***)
Soit A et B deux événements indépendants pour une probabilité P.

1. Vérifier que les événements A et B^c, puis A^c et B, enfin A^c et B^c sont indépendants.

2. Donner une exemple où A et B sont indépendants pour une probabilité P et ne le sont pas pour une probabilité Q.

Exercice 43.34
Les jours de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants, quel que soit le temps. En mai, il pleut en moyenne deux jours sur cinq. Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie huit fois sur dix et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur vingt-cinq. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps neuf fois sur dix. Le 13 mai, jour de grève, elle annoncent toutes les deux qu'il va faire beau.

Calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

Exercice 43.35
Em ersten Tag des Oktoberfestes hat der Franzl - wie es sich schickt - seine Lederhose an. Diese wird vorsichtshalber durch Gürtel und Hosenträger befestigt. Bei jedem Band des Hosenträgers stehen die Chancen, daß es zerreißen könnte, eins zu fünf, beim Gürtel eins zu fünfzehn.

1. Berechnen Sie die Whscheinlichkeit, daß an diesem Tage seine Lederhose hinunterfällt.

2. Man geht davon aus, daß er seine Hose anbehalten hat. Berechnen Sie also die Wahrscheinlichkeit, daß der Gürtel hätte platzen können.

(Die Haltbarkeit jedes Bandes und die Haltbrkeit des Gürtels sind nicht verbunden.)

Exercice 43.36 *Tirages dans des urnes de façon aléatoire*
On considère deux urnes A et B dont chacune contient des boules noires et des boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne A et a (avec $0 < a < 1$) et la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne B et b (avec $0 < b < 1$).

On effectue N tirage successifs, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient, et ceci de la façon suivante.

- Pour le premier tirage, on choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire une boule de cette urne.
- Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne; et si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- On continue suivant la même règle jusqu'au N-ième tirage.

Pour tout entier n de $[\![1, n]\!]$, on définit

- A_n : «le n-ième tirage est effectué dans l'urne A» et $q_n = P(A_n)$.
- B_n : «la n-ième boule tirée est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer q_1, p_1, q_2, p_2.

2. Pour tout n de $[\![2, N]\!]$, déterminer une relation entre q_n et q_{n-1}. En déduire une expression de q_n en fonction de a, b et n.

3. Pour tout n de $[\![1, N]\!]$, déterminer une relation entre p_n et q_n. En déduire une expression de p_n en fonction de a, b et n.

Exercice 43.37 (**)
Chou le chaton a trois passions dans la vie : manger, dormir et jouer. On peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5 minutes.

- Après 5 minutes de repas, il continue de manger les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sinon il se met à jouer.
- Après 5 minutes de sieste, il continue de dormir les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{3}{4}$ et sinon il a faim au réveil et va manger.
- Après 5 minutes de jeu, soit il est en appétit et mange les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{4}$, soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note m_n la probabilité qu'il mange entre les minutes $5n$ et $5n+5$, d_n la probabilité qu'il dorme et j_n la probabilité qu'il joue. Enfin, on pose $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $C_{n+1} = AC_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer $4A^3 - 5A^2$, puis en déduire un polynôme annulateur P de A.

3. En déduire les puissance de A.

4. En déduire les limites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que dire de la journée de Chou?

Exercice 43.38 (***) *Trois face d'affilée*
On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur pile est p et la probabilité qu'elle tombe sur face est $q = 1-p$. On considère une succession de lancers de cette pièce. Pour tout entier $n \geq 1$, on nomme B_n l'événement «aucune séquence de face de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers» et on note b_n la probabilité de B_n.
Calculer b_1, b_2, b_3. Montrer

$$\forall n \geq 4, b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}.$$

Chapter 44 Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 44.1

On lance deux dés équilibré à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 44.2

On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X. Établir la loi de X.

Exercice 44.3

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.

On note X la variable aléatoire «nombre d'ampoules défectueuses». Déterminer la loi de X.

Exercice 44.4

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$) *avec remise*.

Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $P(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
2. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 44.5

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$) *sans remise*.

Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $P(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
2. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 44.6 (*)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.

Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X?

Exercice 44.7

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boule et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^\star$) ; on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
5. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Exercice 44.8

De l'autre côté du miroir[1], les lapins sont soit blancs, soit roses. La probabilité pour un lapin d'être rose est $p = 0.1$.

1. Alice rencontre deux lapins au hasard de sa promenade aléatoire. On note T le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de T.

2. Alice attrape sept lapins au hasard. On note X le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de X.

3. Alice place ces sept lapins dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de lapins roses parmi ces deux lapins.

   Établir la loi de probabilité de Y.

4. Elle installe ces deux lapins dans une cage. Sachant que si les lapins sont de sexes différents, ils auront des lapereaux blancs s'ils sont tous les deux blancs, des lapereaux roses sinon.

   Calculer la probabilité pourqu'il y ait des lapereaux roses.

Exercice 44.9

On retapisse la flopée de louchébems aux layoncrems qu'ils se carrent sur chaque loche. La proba de larguer un layoncrem est la même pour chaque loche. On dégauchit m_2 louchébems qui ont encore deux layoncrems à leur loches et m_1 qui en ont paumé un.

Soit $p = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, coller une estimation de la proportion de louchébems qui ont paumé leurs deux layoncrems.

Exercice 44.10

On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?

2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0.5 ?

3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0.4 et 0.6 (bornes incluses) ?

4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5 - \frac{a}{10}, 0.5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%.

5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

[1] cf. Lewis Carroll.

Moments d'une variable aléatoire finie

Exercice 44.11

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités respective $0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2$.
   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$.
   Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \qquad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \qquad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 44.12

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire réelle associée au lancer de dé.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $E(X)$

3. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 44.13

Marguerite élève huit poules, dont une ne possédant qu'une patte, et six canes. Son panier contient un œuf de chacune de ses pensionnaires. Elle en prend quatre au hasard pour faire une omelette avec les trois cèpes qu'elle a ramassés au lever du soleil. Soit X le nombre de pattes des poules impliquées dans la production des œufs de l'omelette.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 44.14

Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc quinze dromadaires, dix chameaux et cinq lamas. Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard.

Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses photographiées.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 44.15

Dans le restaurant de Marco, on sert le café accompagné de deux sucres. La moitié des clients boivent leur café sans sucre, un tiers y plongent un seul sucre et les autres deux. À la table numéro 7, les trois clients ont commandé un café chacun.

Soit X le nombre de sucres consommés à cette table.

Établir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 44.16

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 44.17

Andy est un ivrogne. Quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même. Quand il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. Il est licencié du chantier naval et le soir même il rentre ivre chez lui. Il reste au chômage pendant n jours. On note X le nombre de jours de sobriété de cette période.

Calculer $E(X)$.

Exercice 44.18 (*)

Ingmar a bricolé un ordinateur avec un processeur 4 bits récupéré sur le système de navigation d'un sous-marin soviétique échoué dans un fjord. Son ami Blaise y a adapté un compilateur Pascal. Dans son premier programme, il déclare une variable I, codée sur 4 bits, à laquelle il n'affecte pas de valeur. Chaque bits se trouve ainsi dans un état aléatoire: 0 avec la probabilité p et 1 avec la probabilité $1 - p$.

On note K la variable aléatoire égale à la valeur de I, en considérant I comme un nombre entier exprimé dans la base 2.

1. Établir la loi de K. Calculer $E(K)$ et $V(K)$.

2. Calculer la probabilité d'avoir un nombre pair.

3. Calculer la probabilité d'avoir un palindrome en base deux.

Exercice 44.19 (*)

On fixe un entier naturel non nul n.

Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc…On ajoute donc $k + 1$ boules noires lors de la k-ième obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre *total* de boules dans l'urne la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X.

2. Quelle est la loi de X ?

3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N.

On tire une boule de l'urne et on pose B : «la boule tirée est blanche.».

4. Démontrer rigoureusement que $P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Calculer cette somme.

On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k-ème pile, c'est-à-dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc…en doublant à chaque fois le nombre de boules noires *ajoutées*.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X.

7. Calculer $E(N')$.

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : «la boule tirée est blanche».

Exercice 44.20

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^\star$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S.

2. On suppose $\beta = 1/\alpha$. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$?

3. On suppose que $\alpha = 1 + h$ et $\beta = 1 - h$ pour $h \in]0, 1[$ donné. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$? Que vaut alors $V(S)$?

Exercice 44.21 (*)

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes.

On note X la variable aléatoire «nombre de tirages effectués». Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 44.22 (*)

Un forain possède 2 roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, sur la deuxième, 1 vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante:

- 3 euros si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert,

- 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc,

- 0.5 euro si les 2 roues tombent sur des secteurs blancs.

Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain pour que son bénéfice moyen soit d'au moins 25 centimes d'euro par partie.

Exercice 44.23 (*)

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$.

Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait. On peut procéder de deux manière différentes.

- Première méthode: on effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

- Deuxième méthode: on effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.

Soit X le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, puis l'espérance mathématique de cette variable, en fonction de n.

2. On voudrait connaître la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.

   (a) Étudier la fonction $f : x \mapsto ax + \ln x$ où a est un réel strictement négatif.
   Montrer qu'elle admet un maximum positif lorsque l'on choisit $a = \ln(0.85)$.

   (b) Trouver dans ce cas la plus grande valeur entière de x pour laquelle $f(x) > 0$.

   (c) Déterminer que $f(n)$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire suivant les valeurs de n la méthode que l'on a intérêt à adopter.

Exercice 44.24 (*)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant: après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premier tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi de X_2.

3. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 44.25 (*)

L'élément F d'une machine est source de pannes fréquentes.

Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé. Le coût du dépannage (pièce et main d'œuvre) s'élève à x euros et la perte de production due à cette panne à y euros.

On suppose qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour.

On note p_n la probabilité de bon fonctionnement le n-ième jour ($n = 1$ correspond au jour de la mise en service de la machine).

Si la machine fonctionne correctement le jour j, la probabilité qu'elle fonctionne aussi correctement le jour $j + 1$ est 0.6.

Si l'élément F est changé le jour j, la probabilité de bon fonctionnement pour le jour $j + 1$ est 0.9.

1. Exprimer la probabilité p_{n+1} de bon fonctionnement le $n + 1$-ème jour en fonction de la probabilité p_n de bon fonctionnement le n-ième jour.

En déduire p_n en fonction de p_1 et n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2. On considère désormais que la probabilité de bon fonctionnement de la machine est $\frac{9}{13}$ dans l'hypothèse où l'élément F n'est changé qu'en cas de panne.

On appelle C_1 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien.

(a) Donner la loi de C_1 en fonction de x et y.

(b) Calculer l'espérance de C_1.

3. On envisage un entretien préventif de cette machine consistant à remplacer chaque jour, avant la mise en service de la machine, l'élément F.

Le coût de cet entretien reste égal à x euros.

Dans cette hypothèse, on interviendra donc chaque jour, une ou deux fois, selon qu'il y a panne ou non. La probabilité de bon fonctionnement de la machine pendant la journée reste évidemment égale à 0.9 puisque l'élément F est neuf!

On appelle C_2 le coût d'intervention quotidien.

(a) Donner la loi de C_2 en fonction de x et y.

(b) Calculer l'espérance de C_2.

4. Vous devez aider à choisir entre les deux options:

i. attendre la panne,

ii. procéder à un entretien préventif systématique.

Que conseillez-vous? Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) qui vous conduisent à conseiller l'option i.

Exercice 44.26 (*)

1. Montrer que
$$\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n}.$$
On pourra utiliser le polynôme $P(X) = \sum_{k=n-1}^{2n-1}(1+X)^k$.

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules une à une sans remise.
Soit X le rang de sortie de la dernière boule noire. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

Exercice 44.27

Un jeux de dés très populaire dans les bars anglais et le *chuck-a-luck*. Il consiste pour la banque à jeter 3 dés. Un joueur peut parier sur n'importe quel résultat compris entre 1 et 6. Si exactement un de ces 3 dés montre le chiffre prévu, le joueur récupère sa mise plus un montant équivalent. Si 2 dés montrent ce résultat, le gain net est de 2 pour 1. Si les 3 dés montrent indiquent le chiffre prévu, le gain net est de 3 pour 1. Si aucun dé ne montrer le chiffre choisi par le joueur, ce dernier perd sa mise.

1. Calculer l'espérance de gain lorsque l'enjeu est d'une livre.

2. Quel montant devrait recevoir le joueur si les 3 dés montrent le chiffre prévu pour que le jeu soit*fair* (c'est-à-dire pour que l'espérance de gain soit nulle)?

Exercice 44.28 (*) *Fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et on pose
$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k.$$
La formule de transfert permet d'écrire $G_X(t) = E\left(t^X\right)$.

1. Calculer $G_X(1)$.

2. Déterminer $G_X(t)$ lorsque X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

3. Déterminer $G_X(t)$ lorsque X suit une loi de Bernouilli de paramètre p.

4. Déterminer $G_X(t)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

5. Exprimer $E(X)$ en fonction de G'_X.

6. Exprimer $V(X)$ en fonction de G''_X.

Exercice 44.29

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que pour tout $c \in]a, b[$,
$$\frac{E(X)-c}{b-c} \leq P(X \geq c) \leq \frac{E(X)-a}{c-a}.$$
Étudier également les cas $c = a$ et $c = b$.

Chapter 45 Couple de variables aléatoires réelles

Exercice 45.1 (*)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\{ 0, 1 \}$, dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant:

(x, y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$P(X = x \text{ et } Y = y)$	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6} - 2a$

1. Quelles valeurs sont autorisées pour a et b?
2. Calculer en fonction de a et b les lois marginales de X et de Y.
3. Quelles valeurs de a et b correspondent à un couple (X, Y) de variables indépendantes.

Exercice 45.2 (***)

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $cov(X, Y)$. Conclusion ?

Exercice 45.3

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéro obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois marginales de X et de Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
4. On pose $Z = Y - X$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Déterminer ensuite la loi de Z.

Exercice 45.4

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les réels $p_{i,j}$ par $p_{i,j} = a \cdot i \cdot j$.

1. Déterminer a pour que la loi du couple (X, Y) soit donnée par la distribution de probabilité $\left(p_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?
3. En déduire $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.
4. On pose $Z = X + Y$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 45.5

On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Calculer $P(X = Y)$.

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 45.6

On lance un dé cubique honnête, soit X le résultat obtenu. Si X est divisible par 3, on extrait en une fois 3 boules d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. Sinon, on extrait en une fois X boules d'une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

Soit Y le nombre aléatoire de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 45.7 (**)

On admet la convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j \notin [\![0, n]\!]$.

1. Soit n et m deux entiers naturels, et f la fonction polynôme définie pour tout réel x par

$$f(x) = (1 + x)^n(1 + x)^m = (1 + x)^{n+m}.$$

   (a) Développer $f(x)$ deux deux façons différentes, en utilisant la formule du binôme.

   (b) En déduire que, pour tous entiers naturels n et m, on a

$$\forall k \in [\![0, n + m]\!], \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

   Cette formule est connue sous le nom de *formule de Vandermonde*.

2. Démontrer le théorème de stabilité de la somme de deux lois binomiales indépendantes, c'est-à-dire que, si X et Y sont deux variables *indépendantes* suivant respectivement une loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$

Exercice 45.8

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

1. Déterminer les lois de X_2 et de X_3, puis calculer leurs espérances.

2. Soit $n \geq 2$. Justifier que X_n prend ses valeurs dans $\{ 0, \dots, n-1 \}$.
   Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n - 1)$.

3. Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{ 0, \dots, n \}$, montrer

$$P\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2}P\left(X_n = k\right) + \frac{1}{2}P\left(X_n = k - 1\right).$$

4. On note, pour tout $n \geq 2$, $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = k\right) s^k.$$

   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

(b) Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s).$$

(c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

5. Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 45.9 (***) *Nombre de sommets isolés dans un graphe aléatoire (X-ENS)*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, on se donne un réel $p_n \in]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1, \dots, n$, tel que, si pour tout (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, $X_{i,j}$ est la variable indicatrice de l'événement «$\{ i,j \}$ est une arête de Γ_n», alors les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n.

On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

1. Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $P(X > 0) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

2. On suppose que $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3. On suppose que $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 45.10 *Mines-Ponts PSI 2022*

On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la distribution uniforme de probabilité P.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Déterminer $P(\{ \sigma \})$.

2. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie sur $\mathcal{S}_n$ par $X_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$ et $X_i(\sigma) = 0$ sinon. Déterminer $E(X_i)$.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire N égale au nombre de points fixes.

4. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. Calculer la covariance de X_i et X_j.

5. En déduire la variance de N.

Exercice 45.11

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Reconnaître la loi de Y_n.

2. Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes?

3. Espérance et variance de $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

Exercice 45.12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant

- une boule numérotée 1,
- deux boules numérotées 2,
- ...
- n boules numérotées n.

1. On tire une boule dans cette urne, on note X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule obtenue.

Déterminer la loi de X. Calculer $E(X)$.

2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée. On note T_1 la variable aléatoire représentant le numéro de la première boule tirée et T_2 la variable aléatoire représentant le numéro de la deuxième boule tirée.

(a) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).

(b) En déduire la loi des variables aléatoires T_1 et T_2.

(c) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes?

(d) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $T_1 + T_2$.

Exercice 45.13

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par

- $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ème tirage,
- $X_i = 0$ sinon.

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.

2. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

3. Soit $p \leq n - 1$.

(a) Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

(b) Pour $k \in Z_p(\Omega)$, déterminer $P_{(Z_p=k)}\left(X_{p+1} = 1\right)$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$P\left(X_{p+1} = 1\right) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

(c) Montrer (par récurrence) que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left(X_p = 1\right) = P\left(X_p = 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 45.14 *E3A 2018 MP1 exercice 3*

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $E(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \dots, X_n$: si $k_1, \dots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par les variable $X_1, \dots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{ k_1, \dots, k_n \}$, pour tout $(k_1, \dots, k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note «$\{ X_1, \dots, X_n \} = S$» la réunion des événements «$(X_1, \dots, X_n) = (k_1, \dots, k_n)$», pour tout $(k_1, \dots, k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{ k_1, \dots, k_n \}$.

1. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et $\ell \geq 2$.

(a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

(b) Calculer $P(U_2 = 1)$ et $P(U_2 = 2)$.

(c) Calculer $E(U_2)$.

2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n?

3. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement «$X_i \in S$» en fonction de $|S|$?

4. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $P\left(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a\right)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

5. En déduire $P\left(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n\right)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

6. Justifier

$$P\left(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n\right) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\left(\{ X_1, \dots, X_{n-1} \} = S\right) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right),$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des partie non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

7. En déduire, dans le cas où $n \geq 3$:

$$E\left(U_{n-1}\right) = \ell\left(1 - P\left(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n\right)\right).$$

8. Exprimer $E(U_n)$ en fonction de n et de ℓ.

9. Déterminer la limite de $E(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et n tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

10. Déterminer la limite de $E(U_n)$ lorsque n est fixé et ℓ tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

11. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un gorupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

(a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est-à-dire $E(D_n)$.

(b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 45.15 *Les urnes de Pólya (CCINP PC 2021 exercice 1)*

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant:

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire;

2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie A Préliminaires

A1. Déterminer la loi de X_1.

A2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

A3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n?

Partie B La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

B1. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

B2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

B3. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie C La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

C1. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

C2. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

C3. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Caculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants:

(a) $\ell \notin \{ k-1, k \}$,

(b) $\ell = k-1$,

(c) $\ell = k$.

C4. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

C5. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 45.16 *Modèle de diffusion d'Ehrenfest*

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest.

On considère deux chiens, Ugolin et Ugoline, qui se partagent à eux deux N puces ($N \in \mathbb{N}^\star$). À chaque étape, une des N puces est choisies au hasard et saute alors d'un chien à l'autre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de puces présentes sur Ugolin à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de puces initialement présentes sur Ugolin, la variable aléatoire X_1 est donc égale au nombre de puces présentes sur Ugolin après un échange,...

Par exemple, si 3 puces sont initialement présentes sur Ugolin, et 2 puces sur Ugoline, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$. On choisit alors une puce de façon équiprobable entre les 5. Si celle-ci est sur Ugolin, elle saute sur Ugoline et on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau une puce de façon équiprobable entre les 5. Si celle-ci est sur Ugoline, elle saute sur Ugolin et on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau une puce de façon équiprobable entre les 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$, et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, N]\!], Y_{n,k} = P(X_n = k).$$

Partie A

Matrice de transition

A1. On suppose que $N = 2$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$Y_{n+1} = A_2 Y_n \quad \text{avec} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A2. Dans toute la suite, $N \in \mathbb{N}^\star$ est fixé.

On considère la matrice de $\mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_{n+1} = AY_n$.

A3. (a) Déterminer, lorsque $N = 2$, les vecteurs colonne X vérifiant $A^T X = X$.

(b) Déterminer, lorsque $N = 3$, les vecteurs colonne X vérifiant $A^T X = X$.

(c) Déterminer, dans le cas général, un vecteur X vérifiant $A^T X = X$.

(d) En déduire que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.

Partie B

Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

B1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

B2. En déduire que $E(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N} E(X_n)$.

B3. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de $E(X_0)$.

B4. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

Partie C

Étude de la probabilité stationnaire On s'intéresse dans cette question à l'espace des vecteurs invariant par multiplication par A, que l'on notera E_1:

$$E_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; AX = X \right\}.$$

C1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

C2. En déduire que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ et préciser la dimension de E_1.

C3. Calculer la somme $S = \sum\limits_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.

C4. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

C5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, N]\!], P(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi suivie par X_∞? Donner son espérance et sa variance.

C6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.

Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.