Déterminants

Aperçu

Le **déterminant** d'une matrice carrée A est un scalaire, noté $\det A$. Ce scalaire permet de déterminer rapidement si une matrice est inversible. Par exemple, si A est une matrice $(2,2)$, et que l'on souhaite déterminer A^{-1} en utilisant des opération élémentaire sur les lignes. On forme la matrice $(A|I)$ et on cherche sa forme échelonnée réduite. Supposons $a \neq 0$, quitte à permuter les deux lignes.

$$
\begin{aligned}
(A|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) & \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) & L_1 \leftarrow (1/a)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d-cb/a & -c/a & 1 \end{array}\right) & L_2 \leftarrow L_2 - cL_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right). & L_2 \leftarrow aL_2
\end{aligned}
$$

et donc A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.

D 1 Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** A le scalaire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

E 2 Étant donnée une matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Remarquez l'utilisation de barres verticales pour le déterminant.

E 3 Il y a $3! = 6$ permutations dans $\mathcal{S}_3$:

- trois permutations paires
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
- et trois permutations impaires
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,
$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1.$$

On observera que
$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_3 & z_3\end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

T 4 *Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\det\left(A^T\right) = \det(A),$$

ce qui s'écrit également

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}.$$

Démonstration. On remarque que pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et

$$a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

∎

P 5

- *Si une colonne de* A *est nulle, alors* $\det(A) = 0$.
- *Si une ligne de* A *est nulle, alors* $\det(A) = 0$.

P 6 *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si chaque coefficient de la colonne j s'écrit comme somme de deux scalaire $a_{ij} = \lambda b_{ij} + \mu c_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n$, alors*

$$\det(A) = \lambda \det(B) + \mu \det(C),$$

où B se déduit de la matrice A en substituant la colonne j par $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$, et C se déduit de la matrice A en substituant la colonne j par $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$.

P 7 *Le résultat précédent reste valable lorsque l'on remplace le mot «colonne» par «ligne».*

On dit que $\det(A)$ dépend linéairement de la colonne C_j (resp. ligne L_i) lorsque les autres colonnes (resp. lignes) sont fixées.
L'application $A \mapsto \det A$ *n'est pas linéaire* ! En effet, $\det(\lambda A) = \lambda^n A$ si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (chaque colonne est multipliée par λ).

E 8 Illustrons le résultat pour une matrice $(3,3)$. La proposition affirme que

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b+p & c \\ d & e+q & f \\ g & h+r & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}=\det(B)+\det(C).$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & \lambda b & c \\ d & \lambda e & f \\ g & \lambda h & i \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\lambda\det(B).$$

D 9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. Le **mineur** d'indice (i, j) de A, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice $(n-1, n-1)$ extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
2. Le **cofacteur** d'indice (i, j) de la matrice A est

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ainsi le cofacteur est égale au mineur si $i + j$ est pair, et son opposé si $i + j$ est impair. On peut retrouver rapidement ce signe en suivant le schéma

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

E 10 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le mineur M_{23} et le cofacteur C_{23} sont

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -5.$$

T 11 Déterminer le cofacteur C_{13} pour la matrice précédente.

T 12 *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. *On désigne par* C_{ij} *le cofacteur d'indice* (i, j) *de* A.

1. *Pour tout entier* i *tel que* $1 \leq i \leq n$, *on a*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

   (Développement par rapport à la i*-ème ligne).*

2. *Pour tout entier* j *tel que* $1 \leq j \leq n$, *on a*

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

   (Développement par rapport à la j*-ème colonne).*

Démonstration. Plus tard!... Au programme mais pas vraiment indispensable. ∎

E 13 On reprend l'exemple 10, où l'on développe le déterminant par rapport à la première ligne.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(1) + 3(13) = 34.$$

T 14 Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

E 15 On reprend l'exemple 10, mais en effectuant un développement selon la troisième ligne ou troisième colonne. Ceci réduit le nombre de calculs puisque $a_{33} = 0$. Par exemple, en développant le déterminant selon la troisième colonne,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 3 \cdot 13 - 5 = 34.$$

T 16 Vérifier le déterminant obtenu pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

en utilisant un développement selon une autre ligne ou colonne. Choisir celle avec le moins de calculs à effectuer.

Pour de grandes matrices, développer brutalement avec les cofacteurs est peu pratique. Par exemple,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -10 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 1C_{11} + (-4)C_{12} + 3C_{13} + 2C_{14}$$

nécessite le calcul de quatre déterminants 3×3.
Heureusement, il y a une méthode plus efficace. Pour simplifier les calculs, nous allons nous tourner encore une fois vers les opérations élémentaires. Mais tout d'abord, nous devons démontrer quelques résultats sur les déterminants.

L 17 *Si A est une matrice carrée de la forme*

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = \lambda \det(A')$.

D 18

- On dit que $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i>j \implies a_{ij}=0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- On dit que $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i<j \implies a_{ij}=0. \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P 19 *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, ou diagonale, alors*

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

T 20 *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*.*

1. *Si* B *se déduit de* A *en multipliant une ligne par un scalaire* α*, alors*

$$\det B = \alpha \det A.$$

2. *Si* B *se déduit de* A *en permutant deux lignes, alors*

$$\det B = -\det A.$$

3. *Si* B *se déduit de* A *en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne, alors*

$$\det B = \det A.$$

Ces résultats restent valables en substituant le mot «colonne» au mot «ligne».

C 21 *Si* A *contient deux lignes égales ou deux colonnes égales, alors* $\det(A) = 0$*.*

E 22 À l'aide d'opération élémentaire sur les lignes, calculer

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

T 23 On peut raccourcir la rédaction précédente en développant le déterminant aussitôt que l'on a obtenue des zéros sous un pivot. On est alors ramener au calcul d'un déterminant $(3,3)$. Utiliser cette stratégie pour calculer à nouveau

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

D 24 Étant donnée des scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$, on appelle **matrice de Vandermonde** de taille n la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

T 25 *Le déterminant de Vandermonde*

$$V_n = V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_j - x_i \right).$$

Démonstration.

Pour j allant de n à 2, on effectue l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$:

$$
\begin{aligned}
V_n &= V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Puis, on développe par rapport à la première ligne

$$V_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \right) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).$$

Puis, par récurrence, on obtient

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_j - x_i \right).$$

D 26 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$f : E \times E \to F$$

est **bilinéaire** si

- $f(*, b) : x \mapsto f(x, b)$ est une application linéaire pour tout $b \in E$,
- $f(a, *) : y \mapsto f(a, y)$ est une application linéaire pour tout $a \in E$.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme bilinéaire** sur E^2.

Cela signifie donc que l'on a les identités

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y), \qquad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),$$
$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'), \qquad f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

N L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times E$ dans F se note $\mathcal{L}_2(E, F)$.

P 27 *$\mathcal{L}_2(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E \times E, F)$.*

D 28 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E \times E \to F$.

- On dit que l'application f est **symétrique** lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, f(y, x) = f(x, y).$$

- On dit que l'application f est **antisymétrique** lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, f(y, x) = -f(x, y).$$

- On dit que l'application f est **alternée** lorsque

$$\forall x \in E, f(x, x) = 0.$$

P 29 *Soit $f \in \mathcal{L}_2(E, F)$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors l'application bilinéaire f est alternée si, et seulement si f est antisymétrique.*

Démonstration. Si f est alternée, alors quels que soient $x, y \in E$, on a

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,y) + f(y,x).$$

Si f est antisymétrique, alors quel que soit $x \in E$, on a

$$f(x,x) = -f(x,x).$$

∎

E 30 Soit $E = \mathbb{R}^q$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \dots, x_q); (y_1, \dots, y_q)\big) & \mapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_q y_q \end{array}.$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique.

E 31 Soit $E = \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$\psi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & F \\ (f, g) & \mapsto & \int_a^b f g \end{array}.$$

Alors ψ est une forme bilinéaire symétrique.

E 32 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$ et soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, x_2); (y_1, y_2)\big) & \mapsto & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}.$$

Alors f est une forme bilinéaire antisymétrique et alternée.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans la base $\mathcal{B}$. Si $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire**, alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\ &= x_1 y_1 f(e_1, e_1) + x_1 y_2 f(e_1, e_2) + x_2 y_1 f(e_2, e_1) + x_2 y_2 f(e_2, e_2). \end{aligned}$$

En notant $a = f(e_1, e_1)$, $b = f(e_1, e_2)$, $c = f(e_2, e_1)$ et $d = f(e_2, e_2)$, on a

$$f(x, y) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- l'application f est symétrique si, et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique, c'est-à-dire lorsque $c = b$.
- l'application f est alternée si, et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est antisymétrique, c'est-à-dire lorsque $a = d = 0$ et $c = -b$.

E 33 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^2 \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire alternée.
Cela signifie donc que pour tout $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2), (y_1, y_2), (y'_1, y'_2) \in \mathbb{K}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x'_1 & y_1 \\ \lambda x_2 + \mu x'_2 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 \\ x'_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda y_1 + \mu y'_1 \\ x_2 & \lambda y_2 + \mu y'_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x_1 & y'_1 \\ x_2 & y'_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

P 34 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $f : E^2 \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée, alors*

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = f(e_1, e_2) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x, y).$$

Toute forme bilinéaire alternée f sur E^2 est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$ et il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

D 35 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \geq 2$. On dit qu'une application

$$f : E^n \to F$$

est ***n*-linéaire** si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $a_k \in E$ avec $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{ j \}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & x_j & \mapsto & f\left(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n\right) \end{array}$$

est linéaire.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire.

E 36 Dire que f est une application trilinéaire signifie donc que l'on a les identités

$$\begin{aligned} f(x+x',y,z) &= f(x,y,z)+f(x',y,z), & f(\lambda x,y,z) &= \lambda f(x,y,z),\\ f(x,y+y',z) &= f(x,y,z)+f(x,y',z), & f(x,\lambda y,z) &= \lambda f(x,y,z),\\ f(x,y,z+z') &= f(x,y,z)+f(x,y,z'), & f(x,y,\lambda z) &= \lambda f(x,y,z). \end{aligned}$$

E 37 Soit $E = F = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{array}{rcl} E^n & \to & E \\ (f_1,\dots,f_n) & \mapsto & 3f_1\times\cdots\times f_n \end{array}$$

est une application n-linéaire.

N L'ensemble des applications n-linéaire de E^n dans F se note $\mathcal{L}_n(E,F)$.

P 38 *$\mathcal{L}_n(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^n,F)$.*

R Soit $f \in \mathcal{L}_n(E,F)$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$. S'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = 0$, alors $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$.

P 39 Expression d'une application n-linéaire en dimension finie

Soit f une application n-linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i,$$

alors on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq p \\ 1 \leq i_2 \leq p \\ \vdots \\ 1 \leq i_n \leq p}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}).$$

D 40 Soit $f \in \mathscr{F}(E^n, F)$.

- On dit que f est **symétrique** lorsque

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

- On dit que f est **antisymétrique** lorsque

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

- On dit que f est **alternée** lorsque

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(i \neq j \text{ et } x_i = x_j \implies f(x_1, \ldots, x_n) = 0\right).$$

P 41 *Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$. Alors f est antisymétrique si, et seulement si f est alternée.*

P 42 *Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$ un application n-linéaire alternée.*

1. *La valeurs $f(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des x_j une combinaison linéaire des autres.*
2. *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

P 43 *Soit f une application n-linéaire alternée de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que*

$$\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = \sum_{i=1} a_{i,j} e_i,$$

alors on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \right) f(e_1, \ldots, e_n). \end{aligned}$$

T 44 *L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est de dimension 1.*

D 45 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E tels que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots + a_{n,j}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i,$$

on appelle **déterminant de la famille** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

R Le déterminant de la matrice de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est aussi le déterminant de la matrice des coordonnées de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$$

Réciproquement, en notant $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors

$$\det(A) = \det_{\varepsilon}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

E 46

1. Si $n = 2$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Si $n = 3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Si $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ désigne la base de E définie par

$$e'_1 = e_1 + 2e_2, \qquad e'_2 = 2e_1 - e_2,$$

alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \det_{\mathcal{B}'}(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

T 47 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*

1. $\det_{\mathcal{B}}$ *est une forme n-linéaire alternée.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme n-linéaire alternée, alors*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

3. $\det_{\mathcal{B}}$ *est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 en $(e_1, \dots, e_n)$.*

R Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

T 48 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors S est une base de E si, et seulement si $\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \neq 0$.*

E 49 On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 et les polynômes

$$P_0 = (X-1)^2, \qquad P_1 = X(X-1), \qquad P_2 = X^2.$$

Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, nous avons

$$\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

E 50 Le déterminant de Vandermonde

$$V_n = V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_j - x_i\right).$$

Démonstration. Avec des polynômes! En exercice. ∎

D 51 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Il existe un unique élément de $\mathbb{K}$, noté $\det(f)$, tel que, pour *toute* base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, on a

$$\forall \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}\left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\right) = \det(f) \cdot \det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right).$$

Ce scalaire $\det(f)$ est appelé *déterminant* de f.

P 52 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, l'égalité suivante est vérifiée*

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right).$$

P 53 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f).$$

Le déterminant n'est pas une application linéaire.

T 54 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$,*

$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f).$$

T 55 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Pour que f soit bijectif (i.e. soit un automorphisme de E), il faut, et il suffit que son déterminant soit non nul. Lorsque c'est le cas, on a*

$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det(f))^{-1}.$$

T 56 *L'application* $\det$ *induit un morphisme de* $\mathbf{GL}(E)$ *sur* $\mathbb{K}^{\star}$.

R Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}} \left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \right) = \det \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right).$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\det(A) = \det(f)$.

T 57 *Pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \textit{et} \qquad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

T 58 Vérifier le théorème sur un exemple. Montrer que si E_2 est une matrice élémentaire qui permute deux lignes, alors $\det(E_2 B) = \det(E_2)\det(B)$. Faire de même avec une matrice élémentaire E_3 qui ajoute un multiple d'une ligne à une autre ligne.

P 59 *Soient $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possédant un bloc rectangulaire de zéros en bas à gauche:*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \text{ avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Alors

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D).$$

Démonstration. On écrit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a alors

- $\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$ par développements successifs selon la première colonne (ou première ligne),
- $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = 1$ car c'est une matrice triangulaire supérieure,
- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A)$ par développements successifs selon la dernière colonne (ou dernière ligne),

E 60 Ce résultat se généralise immédiatement au déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-10) \cdot (-2) = 60.$$

Comme le déterminant est invariant par transposition, on peut aussi calculer des déterminant «triangulaires inférieurs par blocs».

T 61 *Soit A une matrice (n, n), alors A est inversible si, et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

T 62 *L'application* $\det$ *induit un morphisme de* $\mathbf{GL}(E)$ *sur* $\mathbb{K}^\star$.

T 63 *Pour toute matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$,*

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même déterminant.

C 64 *Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si ses coefficient diagonaux sont tous non nuls.*

E 65 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice V soit inversible.

T 66 *Soit A une matrice carrée (n, n). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible,*
2. *Pour tout b, le système $Ax = b$ admet une unique solution,*
3. *Pour tout b, le système $Ax = b$ admet une solution,*
4. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle,*
5. $A \underset{L}{\sim} I_n$,
6. $\det(A) \neq 0$,
7. $\mathrm{rg}(A) = n$,
8. *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,*
9. *Les lignes de A (écrites en colonnes) forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

E 67 L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

est $\mathbb{R}^3$, et la famille (v_1, v_2, v_3) en est une base. En effet, la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3 est inversible puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

E 68 Que penser de $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La famille (v_1, v_2) est libre, donc $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, et (v_1, v_2) est une base de U.

Une représentation paramétrique est $v = sv_1 + tv_2$ et on peut obtenir une équation en cherchant si ce système est compatible pour un vecteur $v = (x, y, z)^T$... Mais il y a plus simple!

T 69 Calculer le déterminant. Vérifier que $7x + y - 3z = 0$ est une équation de U en vérifiant que v_1, v_2, v_3 vérifient l'équation.

E 68 Que penser de $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La famille (v_1, v_2) est libre, donc $U = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, et (v_1, v_2) est une base de U.

En effet, le vecteur $v \in U$ si, et seulement si v est combinaison linéaire de v_1, v_2, si, et seulement si (v_1, v_2, v) est liée, si, et seulement si

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 5 & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on obtient

$$7x + y - 3z = 0.$$

D 70 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n\mathbb{K}$. On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A.

T 71 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a*

$$A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T.$$

C 72 *La combinaison linéaire formé des cofacteur d'une ligne avec les coefficients d'une autre ligne est nulle. Plus précisément, si $i \neq j$, alors*

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \cdots + a_{jn}C_{in} = 0.$$

E 73 Étant donnée une matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),$$

le déterminant de A est le scalaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Remarquez l'utilisation de barres verticales pour le déterminant.

1. Déterminant d'une matrice carrée
2. Applications bilinéaires
3. Applications multilinéaires
4. Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base
5. Déterminant d'un endomorphisme
6. Applications aux déterminants de matrices
7. Comatrice
8. Formules de Cramer

Lorsque la matrice d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ est inversible, on dit que c'est un **système de Cramer**.

T 74 *Soient* $n \geq 2$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $b \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *Soit* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *l'unique solution du système de Cramer* $Ax = b$, *alors*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

où A_j *est la matrice obtenue à partir de* A *en remplaçant la* j*-ième colonne de* A *par le vecteur colonne* b.

E 75 Pour $n = 2$, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{array} \right.$$

est un système de Cramer si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans ce cas, la solution du système est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$