

Chapter 25 Suites récurrentes

Exercice 25.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
$$x \mapsto x - x^2$$
2. Étudier la suite (u_n) dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Étudier la convergence de (u_n) dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
Dans chacun des cas, si (u_n) admet une limite, on la précisera.

Exercice 25.2

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par :
$$\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \frac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}.$$

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n) .

Exercice 25.3

On considère la suite u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0 . En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
3. Étudier la monotonie de u .
4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 25.4

On se propose de définir une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ln u_n.$$

1. Montrer que l'équation $2 + \ln x = x$ admet deux solutions a et b telles que $0 < a < 1 < b$.
2. Démontrer les résultats suivants

- (a) Si $0 < u_0 < a$, alors on ne peut définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Si $u_0 > a$, alors (u_n) est monotone et converge vers b .

Exercice 25.5

Voici quelques exemples supplémentaires pour s'entraîner

- | | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = \sin^2 x$, | 3. $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $u_0 = 2$, |
| 2. $f(x) = \ln(1+2x)$, | 4. $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$. |

Attention, pour certaines fonctions f , le problème peut être très difficile, la suite (u_n) pouvant avoir un comportement chaotique. C'est le cas par exemple de la suite de Feigenbaum définie par la relation $u_{n+1} = \mu(u_n - u_n^2)$. Le comportement de cette suite est très sensible aux variations u_0 et du paramètre $\mu \in [0, 4]$.

Exercice 25.6

On donne la suite (u_n) définie par

$$u_1 = \sqrt{2} \text{ et } u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 25.7

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7}{9}|u_n - \ell|$.
4. Conclure.

Exercice 25.8

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone ?
2. Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
3. Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_{2n} - u_{2n-1}| \text{ et } |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$

5. Que dire des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ? Conclure que (u_n) est convergente.

Exercice 25.9

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq |v_n - 2| \text{ et } |v_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

3. Dédire

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 25.10

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u .

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α .

(c) Conclure sur la convergence de la suite u .

(d) Écrire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode.*

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α .

(b) En déduire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.