Chapter 5 Fonctions circulaires

5.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 5.1
Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \cos(x^2 + 4)$.
2. $f(x) = \sin \frac{1}{x(x-1)}$.
3. $f(x) = \tan 3x$.

5.2 Formulaire de Trigonométrie

Exercice 5.2 (*)
Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sachant que $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ et que α un angle du troisième quadrant.

Exercice 5.3 (*)
Soit α un angle du premier quadrant.
Calculer $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ sachant que $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

5.3 Équations trigonométriques

Exercice 5.4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Exercice 5.5 (*)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5.6 (**)
Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \tag{1}$$

et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.
Exercice 5.7
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2 = 0. \tag{1}$$

Exercice 5.8
Résoudre l'inéquation

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\cos x} \geq 0. \tag{1}$$

d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 5.9

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)$.
2. $\tan(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $\sin(2x + 3) = \frac{1}{2}$.
4. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.
5. $\sqrt{3}\cos(x) \leq 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
6. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

Exercice 5.10

Soit les deux équations

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m\sqrt{2}$$

et

$$\cos a \cos x + \sin a \sin x = m \cos b.$$

1. Déterminer a et b pour qu'elles soient équivalentes.
2. En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la première de ces équations possède des solutions.
3. La résoudre pour $m = 1$.

Exercice 5.11

Soient $\omega, t \in \mathbb{R}$. Mettre l'expression $y = 2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(\omega t)$ sous la forme $y = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$, A, B et φ étant des constantes réelles.

5.4 Étude des fonctions trigonométriques

5.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Exercice 5.12

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = \arctan(1 - 2x)$.
2. $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \arccos\sqrt{x(4 - x)}$.

Exercice 5.13

Donner une expression simple des réels

$$A = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right); \qquad B = \tan\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$C = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right); \qquad D = \arccos\left(\cos\frac{89\pi}{3}\right).$$

Exercice 5.14

Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

Exercice 5.15

Calculer $2\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{7}{25}$.

Exercice 5.16

Le but de cet exercice est de tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x)=\arcsin(\sin x).$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire. Justifier que l'on peut alors restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$.

3. Soit $x\in\left[0,\pi/2\right]$, que vaut $f(x)$?

4. Soit $x\in\left[\pi/2,\pi\right]$, que vaut $f(x)$?

5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

6. Résoudre les équations $f(x)=0$, $f(x)=\frac{\pi}{3}$ et $f(x)=\pi$.

7. Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $I_k=\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x\in I_k$.

Exercice 5.17

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x)=\arccos(\cos x).$$

S'inspirer de l'exercice .

Exercice 5.18

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x)=\arctan(\tan x).$$

S'inspirer de l'exercice **??**.

Exercice 5.19 (*)

Montrer

$$\forall x\in[-1,1],\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}.$$

1. En calculant le sinus d'un angle bien choisi.

2. En étudiant la fonction définie par le premier membre.

Exercice 5.20 (**)

Montrer

$$\forall x\in\mathbb{R}^\star,\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Exercice 5.21

On considère la fonction

$$f:x\mapsto\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

(c) En déduire une expression simple de f.

2. Pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $x = \tan\varphi$, on a donc $\varphi = \arctan x$. Calculer $f(x) = f(\tan\varphi)$ et retrouver le résultat de la question 1.c.

3. Construire le graphe de f.

Exercice 5.22

On se propose d'étudier f, la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \arcsin\left(3x - 4x^3\right).$$

Dans tout cet exercice, on pourra poser $\varphi(x) = 3x - 4x^3$.

1. Justifier que le domaine de définition de f est $E = [-1, 1]$.

2. Dans cette question, on cherche a donner une expression simple de $\arcsin(\sin u)$.

   (a) Montrer que si $u \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin(u)) = -\pi - u$.

   (b) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Calculer $\arcsin(\sin(u))$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3(\theta)$.

4. Soit $x \in E$. On pose $\theta = \arcsin x$. En dégageant les cas pertinents pour x, exprimer $f(x) = f(\sin\theta)$ en fonction de $\arcsin(x)$.

5. Tracer le graphe de f.

6. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable. Calculer sa dérivée et confronter votre résultat à celui de la question **4.**.

Exercice 5.23 *Formule de Machin*

1. Préciser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles :

   (a) $\arctan(\tan(x)) = x$;

   (b) $\tan(\arctan(x)) = x$.

2. Calculer successivement,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right), \qquad \text{et} \qquad \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

   On obtiendra des nombres rationnels que l'on simplifiera.

3. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

ue Sachant que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Exercice 5.24

Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{x+1}.$$

Déterminer son domaine de définition, étudier sa continuité, rechercher ses asymptotes, calculer sa dérivée première, dresser le tableau de ses variations et esquisser son graphe.

Exercice 5.25 (***)

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On étudie la fonction f de la variable réelle x déterminée par

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{2 \sin \theta (x - \cos \theta)}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} \right).$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ excepté en deux points x_1 et x_2 que l'on précisera. Simplifier l'expression de $f'(x)$ pour $x \notin \{ x_1, x_2 \}$.

3. Justifier que la représentation de f présente un centre de symétrie.

4. En admettant que les pentes des demi-tangentes à la courbe représentative ed f en x_1 et x_2 sont déterminées par les limites de f' à droite et à gauche de ces points, donner l'allure de la courbe représentative de f.