Chapter 11 Dénombrement

11.1 Partie finie de $\mathbb{N}$

11.2 Ensembles finis

Solution 11.1

Les paires d'entiers dont la somme fait $2n+1$ sont

$$\{\,1, 2n\,\}, \{\,2, 2n-1\,\}, \{\,3, 2n-2\,\}, \dots, \{\,n, n+1\,\}.$$

Il y a n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ apparait dans une et une seule paire. D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, les $n+1$ éléments de X ne peuvent être dans des paires différentes. Il existe donc deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $n+1$.

Solution 11.2

Solution 11.3

Pour $X \subset E$, on note $s(X)$ la somme des éléments de X. On a

$$s(\emptyset) = 0 \leq s(X) \leq s(E) \leq 90 + 91 + \cdots + 99 = 945.$$

Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ parties non vides X de E. Le principe des tiroirs et des chaussettes permet d'affirmer qu'il existe deux parties distinctes de E, X et Y telles que $s(X) = s(Y)$.

On ne peut avoir $X \subsetneq Y$ car sinon $s(X) < s(Y)$. De même, $Y \subsetneq X$.

Posons $A = X \setminus Y$ et $B = Y \setminus X$. Ces deux parties sont donc non vides et disjointes. On peut réécrire X et Y sous la forme d'unions disjointes $X = (X \cap Y) \cup A$ et $Y = (X \cap Y) \cup B$. On a donc

$$s(X) = s(X \cap Y) + s(A) \qquad \text{et} \qquad s(Y) = s(X \cap Y) + s(B)$$

et donc $s(A) = s(B)$.

Solution 11.4

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition.

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Solution 11.5

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}(E) = 800, && \operatorname{card}(H) = 300, && \operatorname{card}(S) = 352, && \operatorname{card}(M) = 424,\\
&\operatorname{card}(E) = 800, && \operatorname{card}(H) = 300, && \operatorname{card}(S) = 352, && \operatorname{card}(M) = 424,\\
&\operatorname{card}(H \cap S) = 188, && \operatorname{card}(H \cap M) = 166, && \operatorname{card}(S \cap M) = 208, && \operatorname{card}(H \cap M \cap S) = 144.\\
&\operatorname{card}(H \cap S) = 188, && \operatorname{card}(H \cap M) = 166, && \operatorname{card}(S \cap M) = 208, && \operatorname{card}(H \cap M \cap S) = 144.
\end{aligned}$$

On cherche $\operatorname{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S})$, où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. D'après les lois de Morgan (en notant $\bar{H} = E \setminus H, \dots$):

$$\operatorname{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = \operatorname{card}\left(\overline{H \cup M \cup S}\right).$$

$$\operatorname{card}(H \cup M \cup S) = \operatorname{card}(H) + \operatorname{card}(M) + \operatorname{card}(S) \\ - \operatorname{card}(H \cap M) - \operatorname{card}(H \cap S) - \operatorname{card}(M \cap S) + \operatorname{card}(H \cap M \cap S).$$

On en déduit :

$$\operatorname{card}(H \cup M \cup S) = 658 \text{ et } \operatorname{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = 800 - 658 = 142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.
Solution 11.7

11.3 Analyse combinatoire

Solution 11.8

On note ici $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E.

Lorsque X, Y parcourent $\mathcal{P}(E)$, il en est de même de $\bar{X}$ et de $\bar{Y}$, autrement dit

$$(X, Y) \mapsto (\bar{X}, Y), \quad (X, Y) \mapsto (X, \bar{Y}), \quad (X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y}),$$

sont des bijections de $(\mathcal{P}(E))^2$ dans lui même. Donc

$$\begin{aligned} S = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cap Y) &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}\left(\bar{X} \cap Y\right) \\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}\left(X \cap \bar{Y}\right) = \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right). \end{aligned}$$

Mais on a toujours l'union disjointe

$$E = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 4S &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cap Y) + \operatorname{card}\left(\bar{X} \cap Y\right) + \operatorname{card}\left(X \cap \bar{Y}\right) + \operatorname{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right) \\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(E) \\ &= n\,(2^n)^2 = n4^n. \end{aligned}$$

On en déduit que $S = n4^{n-1}$.

Pour le calcul de T, utiliser le complémentaire

$$\operatorname{card}(X \cup Y) = n - \operatorname{card}\left(\overline{X \cup Y}\right) = n - \operatorname{card}\left(\bar{X} \cap \bar{Y}\right).$$

on trouve $T = 3n4^{n-1}$.
Solution 11.9
Solution 11.10
Solution 11.11 *Convolution de Vandermonde*

1. On remarque que si $X = A^c \cap B^c$, on a $f(X) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$. Si f est injective, on a nécessairement $A^c \cap B^c = \emptyset$, c'est-à-dire après passage au complémentaire (dans E) $A \cup B = E$. Réciproquement, si $A \cup B = E$, alors si $f(X_1) = f(X_2)$, on a

$$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2,$$

et donc f est injective.

Si f est surjective, il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$, on a donc $A \subset X$ et $A \cap B = \emptyset$. Réciproquement supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on pose $X = A' \cup B'$, alors

$$A' \cap A = A' \qquad A' \cap B = \emptyset \qquad B' \cap A = \emptyset \qquad B' \cap B = B',$$

et donc $f(X) = (A', B')$. L'application f est donc surjective.

Conclusion

- L'applicaiton f est injective si, et seulement si $A \cup B = E$.
- L'applicaiton f est surjective si, et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

2. Lorsque f est bijective, on a

$$f^{-1}\left(A', B'\right) = A' \cup B'.$$

3. Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs p et q. On pose $E = A \cup B$, et donc $\operatorname{card} E = p + q$.

Le nombre de parties à n éléments de E est $\binom{p+q}{n}$.

En utilisant la fonction f précédente, on constante que former une partie à n lément de E revient à choisir une partie A' à k éléments $(0 \leq k \leq n)$ de A et une partie B' à $n-k$ éléments de B. Il y a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, puis au total

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

possibilités. D'ou l'identité demandée.

Solution 11.12

Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^{k} ensembles à k éléments $(k = 0, 1, \dots, n)$. Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Solution 11.13

Solution 11.14 *Permutations*

1. $(6!)^2$

2. $4! \times 8!$

3. $2!2!4!4!$

4. $6^6 \times 12^6$, $4^4 \times 12^8$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Solution 11.15

Il s'agit de placer six lettres à six places dans le mot. Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre d'anagrammes serait égal au nombre de permutations de ces six lettres : $6!$. Le mot comporte deux lettres répétées une fois : O et N. Une anagramme correspond donc à $2! \times 2!$ permutations des lettres : celles qui sans toucher aux places du G et du I, transposent les O entre eux ou les N entre eux.

Le nombre d'anagrammes cherché est donc égal à $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Pour OGNON, utilisons une autre méthode : il y a $\binom{5}{2}$ choix pour placer les deux O, il reste alors $\binom{3}{2}$ choix pour les deux N.

Le nombre d'anagrammes cherché est $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$.

Solution 11.16

Le mot comporte 13 lettres, il y a donc $13!$ permutations de ces lettres. La lettre A est présente trois fois : pour une disposition de ces trois A on a $3!$ permutations.

Les lettres I et N sont présentes deux fois, à un mot correspond donc $3! \times 2! \times 2!$ permutations.

Le nombre d'anagrammes est égal à

$$\frac{13!}{3!2!2!} = 259459200.$$

Solution 11.17

Le mot a 8 lettres, il y a $\binom{8}{2}$ choix pour placer les deux I, il reste $\binom{6}{2}$ choix pour les deux O, il reste $\binom{4}{2}$ choix pour les deux F, il reste deux places pour le L.

Nombre d'anagrammes :

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = \frac{8!6!4!}{6!2!4!2!2!2!} \times 2 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040.$$

Solution 11.18

Il y a 3^{84} applications des huîtres dans les assiettes, dont 3 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Si on retire une assiette, une distribution des huîtres correspond alors à une application des 84 huîtres dans deux assiettes. Parmi ces applications, il y en a 2 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Il y a donc $2^{84} - 2$ de ces applications qui mettent au moins une huître dans chacune des deux assiettes. On a 3 manières de retirer une assiette, par conséquent il y a $3 \times (2^{84} - 2)$ distributions qui laissent exactement une assiette vide.

Il y a $3^{84} - 3 \times (2^{84} - 2) - 3 = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$ manières de répartir les 84 huîtres en ne laissant aucune assiette vide.

Remarque : on retrouve $S(84, 3) = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$.

Solution 11.19

Julie dispose de huit façons de tartiner chaque type de pain : quatre confitures sans beurre et quatre confitures avec beurre. On doit donc dénombrer les applications de l'ensemble $\{ \text{tartine}, \text{biscotte}, \text{toast} \}$ dans un ensemble de huit éléments : le nombre de possibilités différentes offertes à Julie est donc $8^3 = 512$.

Solution 11.20

1. Ce sont des combinaisons de 15 joueurs choisis parmi 22, il y a donc $\binom{22}{15} = 170544$ équipes différentes.

2. On prend 13 joueurs parmi 15 joueurs, il y a donc $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$ équipes différentes.

Solution 11.21

Dénombrons d'abord le nombre de groupes de dix joueurs que l'on peut former avec les dix-sept joueurs autres que les gardiens : il y en a $\binom{17}{10} = 19448$. Chacun de ces groupes peut constituer une équipe avec chacun des trois gardiens.

Il y a donc $19448 \times 3 = 58344$ équipes possibles.

Solution 11.22

1. Toutes les pattes sont différentes, toutes les pantoufles sont différentes. Il y a donc $A_6^4 = 6{\times}5{\times}4{\times}3 = 360$ manières de chausser le pachyderme.

2. Il y a trois chaussons pour les deux pattes de droites et trois chaussons pour les deux pattes de gauches. Il y a $A_3^2 \times A_3^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ façons de chausser l'éléphant en respectant la droite et la gauche.

Solution 11.23

1. Il y a autant d'échanges en français que de combinaisons de deux Wallons dans un ensemble de q Wallons, soit $\binom{q}{2}$.

2. Il y a autant d'échanges en néerlandais que de combinaisons de deux Flamands dans un ensemble de p Flamands, soit $\binom{p}{2}$.

3. Il y a autant d'échanges en anglais que de couples formés d'un Flamand et d'un Wallon, soit pq.

4. On a ainsi dénombré tous les échanges de politesses qui correspondent aux combinaisons de deux personnes parmi $p + q$. Il y en a $\binom{p+q}{2}$. On en déduit $\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}$.

Solution 11.24

Solution 11.25

- *Première méthode.*
  Soit i le nombre de groupes de 2 personnes qui passent en même temps. i varie entre 0 et 5. i étant fixé, le nombre de passges est égal à $10 - i$: on doit dénombrer les manières de placer i groupes de 2 personnes parmi $10 - i$ passages. Il s'agit donc de combinaisons : il y en a $\binom{10-i}{i}$. Comme i varie de 0 à 5, le nombre total de possibilités est égal à

$$\binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3}\binom{6}{4} + \binom{5}{5} = \sum_{i=0}^{5} \binom{10-i}{i} = 89.$$

- *Deuxième méthode.*
  Notons T_n le nombre de manières de faire passer n personnes. Au premier passage, il peut y avoir soit une personne, soit deux.

  - Premier cas : il reste $n - 1$ personnes à faire passer de T_{n-1} manières différentes.
  - Deuxième cas : il en reste $n - 2$ à faire passer de T_{n-2} manières différentes.

  On obtient la relation $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$.

  La suite (T_n) est la suite de Fibonacci. De proche en proche, on obtient

$$T_3 = 3, T_4 = 5, T_5 = 8, T_6 = 13, T_7 = 21, T_8 = 34, T_9 = 55, T_10 = 89.$$

  Il y a donc 89 possibilités.

Solution 11.26
Solution 11.27

1. (a) Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.
   (b) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir $2, 4, 6, 8$). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.
   (c) On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
   (d) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

2. (a) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.
   (b) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.
   (c) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Solution 11.28
Une main de 13 cartes s'identifie à une partie à 13 éléments de l'ensemble des 52 cartes (il y en a $\binom{52}{13}$).

1. On choisit le roi puis on choisit 12 cartes parmi 48, ce qui fait $4 \times \binom{48}{12}$ mains possibles.

2. C'est le nombre de combinaisons de 13 cartes parmi 48. Il y a $\binom{48}{13}$ possibilités.

3. L'ensemble des mains contenants au moins un roi est le complémentaire le l'ensemble des mains ne contenant aucun roi. Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles. Il y a donc $\binom{52}{13} - \binom{52}{12}$ possibilités.
   On peut aussi dénombrer les mains avec exactement un roi, exactement deux rois, exactement trois rois, et exacteement quatre rois. On en déduit
   $$\binom{52}{13} - \binom{52}{12} = 4\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$

4. Il n'y a qu'une seule possibilité de choisir quatre rois. Reste ensuite à choisir neux cartes parmi les 48 restantes. Il y a $\binom{48}{9}$ possibilités.

5. Une seule main ne contient que des piques.

Solution 11.29

1. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ possibilités pour la hauteur de la paire et il faut choisir 2 cartes dans cette hauteur, soit $\binom{4}{2}$ possibilités. Pour les 3 cartes manquantes, il faut les choisir en sorte de ne pas reformer de paire, c'est-à-dire dans des hauteurs différentes, ce qui laisse $\binom{12}{3}$ choix. Et il faut choisir une couleur pour chacune de ces hauteurs. On trouve alors $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3$ mains avec exactement une paire.

2. Il faut choisir les hauteurs des 2 paires, ce qui fait $\binom{13}{2}$ possibilités. Il faut ensuite choisir les couleurs pour chaque paires, soit $\binom{4}{2}$ possibilités chacune. Enfin, reste à choisir la cinquième carte dans les 11 hauteurs restantes, soit 44 cartes possibles. Au total, il y a $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot 44$ mains contenant deux paires (sans carré, ni brelan).

3. Pour former un brelan, on choisit une hauteur puis 3 cartes dans cette hauteur. On complète la main par 2 cartes prises dans les 12 hauteurs restantes mais dans des hauteurs différentes, ce qui correspond à $\binom{12}{2} \times 4^2$ possibilités. Il y a alors $13 \times \binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2$ mains contenant des brelans.

4. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs pour le brelan, avec $\binom{4}{3}$ couleurs différentes. On complète la main avec une paire parmis le $12 = \binom{12}{1}$ hauteurs possibles, avec $\binom{4}{2}$ couleurs différentes. Au total, il y a $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ mains avec un full.

5. Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs possibles pour le carré (avec $\binom{4}{4} = 1$ couleur(s) différente(s)). On complète la main avec une carte parmis les 48 restantes. Il y a donc $13 \cdot 48$ mains contenant un carré.

6. On choisit une couleur, puis 5 cartes dans cette couleur. Cela donne $4\binom{13}{5}$ mains possibles.

marque S'il on souhaite obtenir la probabilité d'obtenir une telle main, on divise le résultat par le nombre de mains possibles, c'est-à-dire $\binom{52}{5}$.

On trouve respectivement $\approx 42.257\%$, $\approx 4.754\%$, $\approx 2.113\%$, ≈ 0.144, $\approx 0.024\%$, 0.197%.

Question subsidiaire, avec un jeu de 32 cartes, quel ordre des mains devrait être retenu pour être cohérent avec les probabilités?

Solution 11.30

1. Pour ranger les 12 livres, je choisis l'ordre des 3 groupes de livres (3! choix possibles), puis pour chacun de ces choix, il y a 4! façoins de ranger les livres de mathématiques entre eux, puis 6! façons de ranger les livres de philosophie et 2! façons de ranger les livres de géographie. Donc $n_1 = 3!4!6!2!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsqu'ils doivent être groupés par matières.

2. Il y a 9 façons de choisir le nombre de livres rangés avant ceux de mathématiques (il peut y avoir $0, 1, \ldots, 8$ livres placés avant ceux de mathématiques). Puis, pour chacun de ces choix, 4! façons de ranger les livres de mathématiques, puis 8! façons de ranger les autres livrers entre eux. Donc $n_2 = 9 \times 4!8!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsque les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Solution 11.31

On pose H = "vers le haut" et D = "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0, 0)$ à (p, q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du H est $\binom{p+q}{q}$. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc $\binom{p+q}{q}$ chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a $\binom{p+q}{q}$ choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{(p+q)-p} = \binom{p+q}{q}$.