Chapter 2 Corps des nombres réels

2.1 Structures

Exercice 2.1

Relier chacune des assertions suivantes à la propriété utilisée.

1. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

2. $7(4 \cdot 9) = (7 \cdot 4)9$.

3. $2(3 + k) = (6 + 2k)$.

4. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

5. $5 + (-5) = 0$.

6. $18 \cdot 1 = 18$.

7. $(3 + 7) + 19 = 3 + (7 + 19)$.

8. $23 + 6 = 6 + 23$.

9. $3 + 0 = 3$.

- L'addition est commutative.
- Existence d'un inverse pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.
- L'addition est associative.
- Élément neutre de la multiplication.
- La multiplication est associative.
- Existence d'un opposé pour l'addition.
- Élément neutre de l'addition.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Exercice 2.2

Quelles propriétés permettent de justifier les assertions suivantes.

1. $6(-8) = (-8)6$.

2. $5 + 0 = 5$.

3. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.

4. $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

5. $8\,(7(-3)) = (8 \cdot 7)(-3)$.

2.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 2.3 (*)
Quel est le nombre x vérifiant simultanément

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq x \leq 5?$$

Exercice 2.4 (**)
Encadrer $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 2.5 (***)
On rappelle que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1$.
Déterminer un encadrement de $\dfrac{x + \ln x}{1 + x^2}$ sur l'intervalle $[1, 2]$, puis sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2.8 (**)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 1| < |x - 2|$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 2.9 (****)
Résoudre l'inéquation

$$3|x - 2| - 2|x - 1| \geq |x - 4| - \frac{1}{4}(2x - 11). \tag{E}$$

Exercice 2.11 (**)
Résoudre les équations

1. $|x + 1| = 3$;
2. $|x + 5| = |x + 7|$;
3. $|x + 3| = x - 1$;
4. $|x| = x - 1$;
5. $x + 4 = 3|x|$;
6. $|x^2 + x - 6| = |-x^2 - 3x + 10|$;
7. $|1 - x| = x - 1$.

Exercice 2.13 (***)
Soit $f(x) = \dfrac{x \sin(x^3 + 1) + 3\sqrt{x} \cos x}{x^4 + 2x - 3}$. Montrer

$$\forall x \in [2, +\infty[, |f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.14 (***)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$|x - 1| + |2x - 7| + |x + 3| = 10.$$

Exercice 2.16 (**)
Trouver n, entier naturel, pour que $\dfrac{n}{13} < \dfrac{110}{17} < \dfrac{n + 1}{13}$.
Y a-t-il d'autres rationnels de la forme $\dfrac{110}{p}$ compris entre les rationnels trouvés.

Exercice 2.17 (***)
Déterminer une fraction de dénominateur 113 qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 6 que π.
On rappelle que $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971\ldots$.

Exercice 2.18 (***)

1. Soit x et y deux réels. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$.

3. Trouver deux réels x et y tels que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 2.19 (**)
Soient x et y deux nombres réels vérifiant $|x-y| > 1$. Alors il existe un entier compris au sens strict entre x et y.

Exercice 2.20 (*)
Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 2.21 (****)
Soit $k \in]0,+\infty[$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2. \tag{1}$$

Exercice 2.22 (**)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2.24 (***)
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n.$$

Exercice 2.25 (***)
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right\rfloor = 4n+1.$$

Exercice 2.27 (****)
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'entier $\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \rfloor$ est impair.

2.3 Le premier degré

Exercice 2.28 (*)
Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x-y=3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 4x+7y=52 \\ 28x+49y=0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x+3y=11 \\ 5y=68+3(x-1) \end{cases}$.

Exercice 2.29 (**)
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x+(m-5)y=5 \\ 4x-3my=5m \end{cases}$.

3. $\begin{cases} (m-1)x-3y=1 \\ mx+y=0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} mx-y=1 \\ 10x-2y=m-3 \end{cases}$.

Exercice 2.30 (**)

Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}$.

Exercice 2.31 (*)

Résoudre graphiquement les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 3x = 2y \\ x = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x/2 + 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 4 > 0 \\ y - 4 > 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y \leq 2 \\ x < 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 4y < 0 \\ x \leq 2y \\ 2x > y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x/3 + y/2 \leq 1 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

2.4 Puissances, racines

Exercice 2.35 (*)

Effectuer les calculs indiqués.

1. $(-7)^2$.

2. $(9)^2$.

3. $(-10)^3$.

4. $(+8)^3$.

5. $(-11)^2$.

6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

9. $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$.

10. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.

11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

12. $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.

13. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$.

14. $(-3)^4 \times (-3)^5$.

15. $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$.

16. $\left((-3)^{-2}\right)^{-1}$.

17. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

19. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times \left(7^{-8}\right)^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$.

Exercice 2.36 (**)

Simplifier les expressions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.
2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.
3. $9^{n+1} + 6^n - (3^n + 1)^2$.
4. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.
5. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.
6. $\dfrac{4^{n+1} - (-2)^{2n}}{2^n}$.

Exercice 2.37 (***)

Trouver x, entier relatif, satisfaisant aux égalités suivantes:

1. $(4^x)^x = \left(4^8\right)^2$.
2. $100 \times 10^x = (1000)^{-5x} \times 100^{25}$.
3. $2^x + 4^x = 20$.
4. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.
5. $\left(4^{(2+x)}\right)^{3-x} = 1$.
6. $\left(10^{x-1}\right)^{x-4} = 100^2$.

Exercice 2.41 (**)

On a $0 < a < 1 < b$. Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres

$$0; \quad 1; \quad \sqrt{a}; \quad a; \quad a^2; \quad a^3; \quad \sqrt{b}; \quad b; \quad b^2; \quad b^3.$$

Exercice 2.43 (*)

Après avoir simplifié chaque radical, calculer les sommes.

1. $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$.
2. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$.
3. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$.
4. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$.

Exercice 2.44 (**)

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Montrer

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Exercice 2.47 (****)

Déterminer m paramètre réel pour que l'équation suivante ait deux racines inférieures ou égales à 1 :

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0.$$

Exercice 2.48 (*)

Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Exercice 2.49 (*)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$;
2. $2x^2 + 8x + 8 = 0$;
3. $(x-1)^2 = \dfrac{1}{4}$;
4. $x^2 + x + 1 = 0$;
5. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$.

Exercice 2.50 (**) *Équation bicarrée*

Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.
2. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.
3. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$.
4. $3x^4 - x^2 + 5 = 0$.

Exercice 2.51 (***)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Discuter, selon les signes de $\Delta = b^2 - 4ac$, $\sigma = -b/a$ et $\pi = c/a$ le nombre de racines de l'équation

$$ax^2 + b|x| + c = 0 \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Exercice 2.52 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $3x^2 - 12x + 9 < 0$.
2. $x^2 - 7x + 6 \leq 0$.
3. $\left(x - \frac{3}{2}\right)(6 - 4x) \geq 0$.
4. $(x - 3)(5 - 2x) > 0$.
5. $(x^2 - 3x - 9)(x^2 - 1) > 0$.
6. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \leq 0$.
7. $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.
8. $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2} > 1$.
9. $\dfrac{(x - 1)(2x^2 + x + 1)}{x^2 + x - 6} \leq 0$.

Exercice 2.54 (*)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

Exercice 2.55 (***)

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le trinôme

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

est négatif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.57 (***)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4 - x| = x$.
2. $|x^2 + x - 3| = |x|$.
3. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$.
4. $\sqrt{1 - 2x} = |x - 7|$.
5. $x|x| = 3x + 2$.
6. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

Exercice 2.58 (***)

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$.

2. $x + 2 < |2x - 5|$.

3. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$.

4. $|3x - 5| \leq |2x + 3|$.

5. $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$.

6. $x + 3 \leq \sqrt{x+5}$.

7. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

8. $x + \dfrac{1}{x} \leq |x + 4| + 3$.

9. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$.

10. $|x + 3| > |x^2 - 3|$.

11. $\sqrt{|x+2|} \leq |x - 10|$.

12. $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$.

Exercice 2.59 (***)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$. Montrer que

$$\frac{(x-1)^2}{8x} \leq \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} \leq \frac{(x-1)^2}{8}.$$

Exercice 2.61 (***)

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1+x^2} \leq x + m$.

Exercice 2.62 (****)

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2+1} \leq mx$.

Exercice 2.63 (*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 2.65 (**)

Après avoir déterminé son domaine de définition, rendre le dénominateur rationnel dans l'expression

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}.$$

Exercice 2.70 (**)

Montrer qu'on peut éliminer tous les radicaux de

$$E = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}.$$

Exercice 2.71 (***)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x, après avoir précisé leur domaine.

1. $\sqrt{3x+3} = x + 1$.

2. $\sqrt{x^2 + 5x - 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = \sqrt{4x^2 + 6x - 1}$.

3. $\sqrt{3 + \sqrt{x}} - \sqrt{10 - \sqrt{x}} = 1$.

4. $\sqrt{1 - 2x^2} - \sqrt{1 - 3x^2} = 1$.

5. $\sqrt{\dfrac{1}{9} - \sqrt{\dfrac{1}{9x^2} + \dfrac{1}{x^4}}} = \dfrac{x+3}{3x}$.

Exercice 2.72 (***)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x, après avoir précisé leur domaine.

1. $\sqrt{10-x} < 5$.

2. $3x+2 > -2\sqrt{-x^2-x+2}$.

3. $2\sqrt{x^2-4x+11} \leq |x-19| - 3|x-3|$.

4. $6\left|x-\frac{4}{3}\right| + x + 57 \leq 35\sqrt{|x|+1}$.

5. $\frac{x-2}{8} \leq \frac{\sqrt{20x-x^2}}{3}$.

6. $\sqrt{x} + \sqrt{|x-1|} \leq \sqrt{x+1}$.

7. $\sqrt{x+6} > \sqrt{2|x|-5}$.

8. $\left|\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4}\right| < 1$.

Exercice 2.73 (***) *Un avant-goût de la définition des limites de fonctions…*

1. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in [3-\alpha, 3+\alpha]\,,\ |x+2| \leq 10.$$

2. En déduire qu'il existe $\beta > 0$ tel que
$$\forall x \in [3-\beta, 3+\beta]\,,\ \left|x^2-x-6\right| \leq 0.001.$$

3. Plus généralement, étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, montrer
$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in [3-\delta, 3+\delta]\,,\ \left|x^2-x-6\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2.74 (*****) ☕

Dans cet exercice, on n'utilisera pas la calculatrice et on supposera qu'on ne connaît de $\sqrt{2}$ que sa définition, *i.e.* que $\sqrt{2}$ est l'unique réel strictement positif dont le carré est égal à 2.

1. Montre que 1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $1/2$.

2. Soit $(p,q) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^2$ et $\varepsilon > 0$. On pose $r_1 = \frac{p}{q}$ et $r_2 = \frac{p+2q}{p+q}$.

   (a) Exprimer $r_2 - \sqrt{2}$ en fonction de $r_1 - \sqrt{2}$.

   (b) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision ε. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision $\varepsilon/5$.

   (c) On suppose que r_1 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à la précision ε. Montrer que r_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à la précision $\varepsilon/2$.

3. En déduire une fraction qui a même valeur décimale approchée par défaut à l'ordre 2 que $\sqrt{2}$.

2.5 Congruences dans $\mathbb{R}$

Exercice 2.75 (**)

L'assertion suivante est-elle vraie en général ?
$$x \equiv y \pmod{\varphi} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{\varphi}.$$

Exercice 2.76 (**)

Démêler le nécessaire et le suffisant entre les trois propositions suivantes
$$x \equiv y \pmod{\pi}, \quad x \equiv y \pmod{2\pi}, \quad x \equiv y \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$