

Suites de nombres réels et complexes

Aperçu

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence
6. Suites extraites
7. Suites monotones

Suites de nombres réels et complexes

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 1 Un ensemble E étant donné, on appelle **suite de E** toute application de \mathbb{N} à valeurs dans E .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **suite réelle**, et si $E \subset \mathbb{C}$, de **suite complexe**; ces deux cas constituent les **suites numériques**.

La notion d'égalité des suites est un cas particulier de la notion d'égalité des applications.

D 2 Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **égales**, et on écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$.

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

Revoir les suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique. Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

D 4 Étant donné une suite numérique (a_n) , on appelle **somme partielle** d'indice n associé à la suite (a_n) la somme des termes d'indices au plus n :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Nous appellerons **série de terme général** a_n le couple des deux suites (a_n) et (A_n) . L'étude de la série de terme général a_n sera, par définition, l'étude de la suite (A_n) .

E 5 Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(somme des termes d'une progression géométrique)

E 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Il existe «donc» un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

Par exemple, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Cette suite (u_n) est un exemple de **suite définie de manière implicite**.

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 7 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

► **constante** si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda.$$

► **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies u_n = \lambda.$$

D 7 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

► **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

► **strictement croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$

► **décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

► **strictement décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$$

► **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

► **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

D 7 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

► **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

R On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante si et seulement si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \implies u_p \leq u_q.$$

Ceci est cohérent avec la définition de fonction croissante. On a un résultat similaire pour les suites décroissante ou strictement croissante/décroissante.

E 8

1. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
2. Étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n = \frac{n^n}{n!}$

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 10

- ▶ On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'il existe $\mu \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mu$.
- ▶ On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est
 - ▶ **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
 - ▶ **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

P 11

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

R

Une suite réelle bornée est évidemment minorée et majorée (par $\pm\mu$), et inversement une suite minorée et majorée est bornée (prendre $\mu = \max \{ |m|, |M| \}$). Mais la notion suite bornée est utile aussi pour les suites à valeurs complexes, pour lesquelles la notion de minoré/majoré n'a pas de sens.

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 12 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de \mathbb{K} , et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme des suites u et v** la suite $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $u + v$, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n.$$

- On appelle **produit des suites u et v** la suite $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $u.v$ ou uv , définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n.v_n.$$

- On appelle **produit externe de la suite u par le réel λ** la suite $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $\lambda \cdot u$, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda u_n.$$

Résumons

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

P 13 *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans \mathbb{K} est un anneau commutatif. Cet anneau n'est pas intègre.*

R L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est aussi un \mathbb{K} -espace vectoriel et une \mathbb{K} -algèbre.

1. L'ensemble des suites

1.1 Vocabulaire et notations

1.2 Quelques exemples

1.3 Variations d'une suite réelle

1.4 Suites bornées

1.5 Opérations algébriques sur les suites numériques

1.6 Produit de Cauchy

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 16 Produit de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Le **produit de Cauchy** de ces suites est la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

- D 17** Soit (u_n) une suite dans un ensemble E et, pour tout $x \in E$, $P(x)$ une assertion sur x . On dit que (u_n) **vérifie la propriété P** si $P(u_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que (u_n) vérifie la propriété P **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies P(u_n).$$

- E 18** La suite $(n^2 - 23580)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. En effet, si $n \geq 1000$, on a $n^2 - 23580 \geq 1000000 - 23580 \geq 0$.

- R** Si (u_n) est une suite qui satisfait une propriété P à partir d'un certain rang, alors chacune de ses suites tronquées la satisfait aussi à partir d'un certain rang.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

D 19 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** ℓ , ou **tend vers** ℓ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

E 20 La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ admet pour limite 1.

E 21 La suite (v_n) , définie par $v_n = \frac{1}{2^n}$ est-elle convergente ?

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ ou encore $2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Remarquons que pour tout entier naturel n , on a $2^n \geq n$ (démonstration par récurrence, ou utiliser que $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), x \mapsto \{x\}$ est injective).

Soit donc n_0 un entier naturel $\geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

La suite (v_n) est donc convergente et admet 0 pour limite. ■

T 22 Unicité de la limite éventuelle

La limite d'une suite convergente est unique.

Autrement dit, si (u_n) admet ℓ_1 et ℓ_2 comme limites, alors $\ell_1 = \ell_2$.

N Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell; \quad \lim_{+\infty} u = \ell; \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell;$$

ou même plus simplement

$$\lim u_n = \ell; \quad \lim u = \ell; \quad u_n \rightarrow \ell; \quad u \rightarrow \ell.$$

P 23 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

L'emploi de «lim» implique bien l'existence de la limite, et pas seulement la valeur de cette dernière.

Démonstration. Comparez leur écriture avec des quantificateurs !



E 24 Nous avons vu que pour la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, la somme partielle d'ordre n est $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. On a donc $|A_n - 2| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2$.

Nous dirons que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est **convergente** et a pour **somme** 2 et nous écrirons alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Ou encore, en mettant de côté le terme correspondant à $k = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

ne pas oublier !

Ce résultat est apparu très mystérieux aux anciens qui appréhendaient peu les notions d'infini et de limite — voir Achille et sa tortue, Zenon et sa flèche.

E 25 Considérons la suite u définie par $u_n = (-1)^n$. Démontrer que cette suite n'est pas convergente.

Démonstration. En prenant la négation de la définition 19

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

En effet, quel que soit le choix de ℓ , choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$; l'un au moins des deux nombres $|1 - \ell|$ et $|-1 - \ell|$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme pour tout entier n_0 , il existe des nombres pairs et des nombres impairs supérieurs à n_0 , il existe donc un entier $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geq \frac{1}{2}$; la conclusion en résulte. ■

Nous retrouverons plus loin cet exemple et nous donnerons alors une démonstration plus élégante de sa divergence.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

D 26 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) **tend** vers $+\infty$, ou **diverge vers** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) **tend** vers $-\infty$, ou **diverge vers** $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

N On écrira

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{+\infty} u = +\infty, \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty, \quad \dots$$

E 27 On considère la suite de terme général $u_n = 2^n$. Montrons qu'elle tend vers $+\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Le caractère archimédien de \mathbb{R} assure l'existence d'un entier naturel $n_0 > A$.
Pour $n \geq n_0$, on a $u_n = 2^n \geq n \geq n_0$ et donc $u_n \geq A$. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

T 28 Caractère asymptotique de la notion de limite

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques égales à partir d'un certain rang. Alors les suites (u_n) et (v_n) ont même nature ; si celles-ci ont une limite, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

2.1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

2.2 Suites convergentes

2.3 Suites réelles divergeant vers l'infini

2.4 Modification d'un nombre fini de termes

2.5 Exemple fondamental : suites géométriques

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

T 30 Soit $q \in \mathbb{R}$.

- ▶ Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
- ▶ Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1-ier cas : $q > 1$.

On peut alors écrire $q = 1 + h$ avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton montre alors que l'on a pour $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$.

Soit $A > 0$ et n_0 un entier tel que $n_0 > \frac{A-1}{h}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $1 + nh \geq 1 + n_0 h > A$ et donc *a fortiori* $q^n > A$. Ce qui montre que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.



T 30 Soit $q \in \mathbb{R}$.

- ▶ Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
- ▶ Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1^{er} cas : $0 < |q| < 1$.

On peut alors écrire $|q| = \frac{1}{q'}$, avec $q' > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ et l'étude faite au premier cas montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $(q')^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $|q^n| \leq \varepsilon$. Ce qui montre que la suite converge vers 0.



T 30 Soit $q \in \mathbb{R}$.

- ▶ Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
- ▶ Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1^{er} cas : $q < -1$.

La suite (q^n) ne peut pas avoir de limite finie car la suite $(|q^n|)$ tend vers $+\infty$ (2-ième cas).

De plus, (q^n) ne peut pas tendre vers $+\infty$, car pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq 1 \implies u_{n+1} < -1 \implies u_{n+1} < 1.$$

Ainsi, on ne peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $q^n \geq 1$.

De manière analogue, (q^n) ne peut pas tendre vers $-\infty$.

T 30 Soit $q \in \mathbb{R}$.

- ▶ Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
- ▶ Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

troisième cas : les scores.

- ▶ $q = 1$: la suite est constante et égale à 1.
- ▶ $q = -1$: ce cas a déjà été vu et on sait que cette suite est bornée et n'est pas convergente, elle n'a donc pas de limite.
- ▶ $q = 0$: la suite est constante et égale à 0.



1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

T 31 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse ! Il suffit de regarder par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, qui est une suite bornée mais ne converge pas.

C 32 *Si une suite n'est pas bornée, elle est divergente.*

C 33 *Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.*

R La même propriété vaut pour les suites réelles «minorées» ou «majorées».

P 34 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in]a, b[$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in]a, b[.$$

Ce résultat devient faux avec un segment $[a, b]$ qui n'est pas un ouvert de \mathbb{R} .

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

P 35 Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $\ell > 0$, alors il existe $c > 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n > c$.
2. Si $\ell < 0$, alors il existe $c < 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n < c$.
3. Si $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

P 36 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

1. Si $\lim_{+\infty}(u_n) = +\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et n'est pas majorée.
2. Si $\lim_{+\infty}(u_n) = -\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et n'est pas minorée.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

P 37 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Démonstration.

Suivant l'hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, $u_n \leq v_n$.
Notons a la limite de u et b celle de v . Montrons par l'absurde que $a \leq b$. Supposons donc que $a > b$.

P 37 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Posons $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$. On a alors,

$$b - \varepsilon < b < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon.$$

Puisque la suite (u_n) converge vers a , il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$a - \varepsilon \leq u_n \leq a + \varepsilon.$$

Puisque la suite (v_n) converge vers b , il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$b - \varepsilon \leq v_n \leq b + \varepsilon.$$

P 37 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Soit n le plus grand des entiers k , n_1 et n_2 , alors on a à la fois

$$a - \varepsilon \leq u_n$$

$$u_n \leq v_n$$

$$v_n \leq b + \varepsilon.$$

Ainsi $a - \varepsilon \leq b + \varepsilon$, d'où la contradiction.

C 38 Supposons $m \leq u_n \leq M$ à partir d'un certain rang et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite (finie ou infinie). Alors

$$m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq M$$

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

T 39 Existence de limite par domination

Soient (u_n) une suite numérique, $\ell \in \mathbb{K}$ et (α_n) une suite réelle.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ et qu'à partir d'un certain rang

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$,

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Puisque (α_n) converge vers 0, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_2$,

$$|\alpha_n| \leq \varepsilon.$$

Posons $n_0 = \max \{ n_1, n_2 \}$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



C 40 On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où le résultat par domination. ■

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

T 41 Existence de limite par encadrement

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Si (u_n) est une suite satisfaisant

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons que l'on a l'équivalence

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon;$$

et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq k$, on a $a_n \leq u_n \leq b_n$.

Puisque (a_n) a pour limite ℓ , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$ on ait $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$. De même, puisque (b_n) a pour limite ℓ , il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$ on ait $|b_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(k, n_1, n_2)$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a à la fois

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq u_n$$

et

$$u_n \leq b_n \leq \ell + \varepsilon;$$

donc $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.



E 42 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité

$$x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor x \times 10^n \rfloor}{10^n} \leq x.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{1}{10^n} - x \right| = \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et par domination $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{10^n} = x$. On a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} x = x$ d'où, par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = x.$$

Ainsi, on a montré que tout réel est limite d'une suite de nombres décimaux.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

T 43 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A une partie non vide, majorée de \mathbb{R} et M un majorant de A .

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. M est la borne supérieure de A .
2. Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M .
3. Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M .

Démonstration. Voir exercices. ■

E 44 On retrouve $\sup([0, 1[) = 1$.

En effet 1 est un majorant de $[0, 1[$:

$$\forall x \in [0, 1[, x \leq 1,$$

et la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ vérifie

$$u_n \in [0, 1[\quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

On a un résultat analogue pour la borne inférieure.

T 45 Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A une partie non vide, minorée de \mathbb{R} et m un minorant de A .

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *m est la borne inférieure de A .*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers m .*
3. *Il existe une suite décroissante d'éléments de A convergente vers m .*

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

3.1 Convergence et caractère borné

3.2 Limite et signes

3.3 Limite infinie et caractère borné

3.4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

3.5 Convergence par domination

3.6 Convergence par encadrement

3.7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

3.8 Divergence par minoration ou majoration

4. Opérations algébriques

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

T 46 Théorèmes de divergence par minoration ou majoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

4.1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

4.2 Opérations algébriques sur les limites finies

4.3 Opérations avec limites infinies

4.4 Résumé des «formes indéterminées»

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

4.1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

4.2 Opérations algébriques sur les limites finies

4.3 Opérations avec limites infinies

4.4 Résumé des «formes indéterminées»

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

P 47 Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n v_n| \leq \varepsilon.$$

Puisque la suite (v_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$$

De plus, la suite (u_n) tend vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon;$$

d'où le résultat.

E 48 La suite de terme général $u_n = \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge vers 0.

En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et la suite $(\sin(n\theta))$ est bornée:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n\theta) \leq 1.$$

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

4.1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

4.2 Opérations algébriques sur les limites finies

4.3 Opérations avec limites infinies

4.4 Résumé des «formes indéterminées»

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

T 49 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors les suites $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, et de plus

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n).\end{aligned}$$

T 50 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, alors la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$$

T 51 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \neq 0$. Alors les suites $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ sont définies à partir d'un certain rang et sont convergentes et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)}.$$

P 52 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n , on note x_n la partie réelle de u_n et y_n sa partie imaginaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{C}$.

(ii) (x_n) tend vers $\Re(\ell)$ et (y_n) tend vers $\Im(\ell)$.

E 53 Théorème de Cesàro

Soit (a_n) une suite réelle indexée par \mathbb{N}^* . On lui associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes arithmétiques de ses n premiers termes:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si la suite (a_n) tend vers ℓ , alors la suite (b_n) tend aussi vers ℓ .

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

4.1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

4.2 Opérations algébriques sur les limites finies

4.3 Opérations avec limites infinies

4.4 Résumé des «formes indéterminées»

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

L 54 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.

1. Si (u_n) est minorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$.
2. Si (u_n) est majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$.

On en déduit

T 55 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.

<i>Si u_n tend vers</i>	<i>et si v_n tend vers</i>	<i>alors $u_n + v_n$ tend vers</i>
ℓ	m	$\ell + m$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	«F.l.»
$+\infty$	$-\infty$	«F.l.»

T 56 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.

<i>Si u_n tend vers ℓ et si v_n tend vers m alors $u_n \cdot v_n$ tend vers</i>		
ℓ	m	ℓm
$-\infty$ ou $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$ ou $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$ ou $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ ou $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	«F.I.»

T 57 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\lambda, \ell \in \mathbb{R}$.

<i>Si et si u_n tend vers alors λu_n tend vers</i>		
$\lambda \in \mathbb{R}$	ℓ	$\lambda \ell$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$+\infty$

Si $\lambda = 0$, alors (λu_n) est la suite nulle et converge vers 0.

D 58 Soit (u_n) une suite de nombres réels.

► On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs supérieures** lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell + .$$

► On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs inférieures** lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $u_n < \ell$ à partir d'un certain rang, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell - .$$

L 59 Soit (u_n) est une suite de réels strictement positifs, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0+ \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0+$$



Pour une suite (u_n) quelconque, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang.

T 60 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si u_n tend vers alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers	
$\ell \neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
$0-$	$-\infty$
$0+$	$+\infty$
$+\infty$	$0+$
$-\infty$	$0-$
0	«F.l.»

P 61 Si la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

T 62 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et

Si u_n tend vers		et si v_n tend vers	alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers
ℓ	$m \neq 0$		$\frac{\ell}{m}$
ℓ	$\pm\infty$		0
$-\infty$	$m < 0$		$+\infty$
$-\infty$	$m > 0$		$-\infty$
$+\infty$	$m < 0$		$-\infty$
$+\infty$	$m > 0$		$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$		«F.l.»
$\pm\infty$ ou ℓ	0		«F.l.»

T 63 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$; de sorte que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ soit définie à partir de ce rang. Alors

Si u_n tend vers et si v_n tend vers alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers		
$-\infty$ ou $\ell < 0$	$0-$	$+\infty$
$-\infty$ ou $\ell < 0$	$0+$	$-\infty$
$+\infty$ ou $\ell > 0$	$0-$	$-\infty$
$+\infty$ ou $\ell > 0$	$0+$	$+\infty$
$0\pm$	$0\pm$	«F.l.»

1. L'ensemble des suites

2. Limite d'une suite

3. Suite et relations d'ordres

4. Opérations algébriques

4.1 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

4.2 Opérations algébriques sur les limites finies

4.3 Opérations avec limites infinies

4.4 Résumé des «formes indéterminées»

5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

7. Suites monotones

Les «formes indéterminées» sont les mêmes que pour les opérations algébriques dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \pm \infty \times 0 \quad \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0} \quad \text{et plus généralement } \frac{\ell}{0} \text{ pour } \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Néanmoins, pour $\ell \in \bar{\mathbb{R}}, \ell \neq 0$, on peut lever les indéterminations $\frac{\ell}{0^+}$ et $\frac{\ell}{0^-}$ en utilisant la « règle des signes ».

E 64 Quelle est la limite de $\frac{n^3}{n^2+1}$?

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence
6. Suites extraites
7. Suites monotones

P 65 Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. Alors

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0+.$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0+.$ En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{e^{an}} = 0.$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0+.$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0+.$

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

- 6.1 Suites extraites et limite
- 6.2 Valeur d'adhérence
- 6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

7. Suites monotones

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

6.1 Suites extraites et limite

6.2 Valeur d'adhérence

6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

7. Suites monotones

D 66 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On appelle **suite extraite** de (u_n) selon φ , ou **sous-suite** de (u_n) , la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite extraite est donc une suite obtenue en ne gardant qu'un certain nombre de termes de la suite initiale. Mais les termes conservés ont toujours un indice croissant (dans la suite de départ).

- E 67**
1. Le décalage de k indices remplace (u_n) par $(v_n) = (u_{n+k})$. Ici $\varphi(n) = n + k$.
 2. $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite extraite de (u_n) constituée par ses termes d'indices pairs.
 3. $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{4n+11})_{n \in \mathbb{N}}$, sont des suites extraites de (u_n) .
 4. $(u_{n^2-n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de (u_n) car le terme u_0 est répété pour $n = 0$ et $n = 1$.

L 68 Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration. Récurrence immédiate. ■

T 69 Si une suite (u_n) possède une limite (finie ou infinie) ℓ , alors toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Soit u une suite numérique qui admet pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ et v une suite extraite de u : il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Dès lors, si $n \geq n_0$, $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, donc

$$|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le cas $\ell = \pm\infty$ est analogue. ■

E 70 Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ , alors la suite extraite (u_{n+1}) également. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} au_n + b = a\ell + b.$$

On a donc nécessairement $\ell = a\ell + b$, c'est-à-dire $(1 - a)\ell = b$. La seule limite éventuelle de la suite (u_n) est donc $\frac{b}{1-a}$.

T 71 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ . Alors u tend vers ℓ .

Démonstration. Il convient de distinguer trois cas : $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Puisque (u_{2n}) a pour limite ℓ , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$ on ait $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.

Puisque (u_{2n+1}) a pour limite ℓ , il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_2$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Soit un entier $n \geq n_0$. Si n est pair, on écrit $n = 2p$ où $p \geq \frac{n_0}{2} \geq n_1$, donc $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$. Si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$ où $p \geq \frac{n_0-1}{2} \geq n_2$, donc $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas on a

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$



M Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, il peut être commode d'exhiber deux suites extraites admettant des limites différentes ou une suite extraite n'admettant pas de limite.

- E 72** ▶ La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car $(u_{2n}) = (1)$ et $(u_{2n+1}) = (-1)$ ont pour limites respectives 1 et -1 .
Ceci montre que la réciproque de la propriété est inexacte, c'est-à-dire qu'il existe des suites n'ayant pas de limite dont on peut extraire des suites ayant une limite.
- ▶ La suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ n'a pas de limite. En effet, $u_{6n+3} = (-1)^n$: la suite extraite $(u_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune limite donc la suite (u_n) aussi.

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

6.1 Suites extraites et limite

6.2 Valeur d'adhérence

6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

7. Suites monotones

D 73 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ .

Une suite convergente admet donc une unique valeur d'adhérence.

P 74 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors $\ell \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

E 75 La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : -1 et 1 .

E 76 La suite $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, car pour tout fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim |u_{\varphi(n)}| = +\infty$.

E 77 La suite $((1 + (-1)^n) n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une seule valeur d'adhérence 0 . Néanmoins, cette suite n'est pas convergente.

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence

6. Suites extraites

- 6.1 Suites extraites et limite
- 6.2 Valeur d'adhérence
- 6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

7. Suites monotones

T 78 Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique bornée. Alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge.

Ou de manière équivalente

T 79 Bolzano-Weierstrass

Toute suite numérique bornée admet une valeur d'adhérence.

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence
6. Suites extraites
7. Suites monotones
 - 7.1 Convergence et divergence des suites monotones
 - 7.2 Suites adjacentes

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence
6. Suites extraites
- 7. Suites monotones**
 - 7.1 Convergence et divergence des suites monotones**
 - 7.2 Suites adjacentes

T 80 Soit $u = (u_n)$ une suite croissante.

1. Si la suite (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers

$$\sup \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

T 81 Soit $u = (u_n)$ une suite décroissante.

1. Si la suite (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers

$$\inf \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

2. Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

C 82 Toute suite monotone admet une limite.

E 83 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Montrer que (u_n) converge.

1. L'ensemble des suites
2. Limite d'une suite
3. Suite et relations d'ordres
4. Opérations algébriques
5. Comparaison des suites de référence
6. Suites extraites
- 7. Suites monotones**
 - 7.1 Convergence et divergence des suites monotones
 - 7.2 Suites adjacentes

D 85 Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- ▶ la suite (a_n) est croissante,
- ▶ la suite (b_n) est décroissante,
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

E 86 $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D 85 Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- ▶ la suite (a_n) est croissante,
- ▶ la suite (b_n) est décroissante,
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

E 86 $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

T 87 **Théorème des suites adjacentes**

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont une limite commune ℓ . Ce réel ℓ est l'unique réel qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n.$$