

13 Dénombrement

13.1 Partie finie de \mathbb{N}

13.2 Ensembles finis

Solution 13.1

Les paires d'entiers dont la somme fait $2n + 1$ sont

$$\{1, 2n\}, \{2, 2n-1\}, \{3, 2n-2\}, \dots, \{n, n+1\}.$$

Il y a n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ apparaît dans une et une seule paire. D'après le principe des tiroirs et des chaussettes, les $n+1$ éléments de X ne peuvent être dans des paires différentes. Il existe donc deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $n+1$.

Solution 13.2

Solution 13.3

Pour $X \subset E$, on note $s(X)$ la somme des éléments de X . On a

$$s(\emptyset) = 0 \leq s(X) \leq s(E) \leq 90 + 91 + \dots + 99 = 945.$$

Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ parties non vides X de E . Le principe des tiroirs et des chaussettes permet d'affirmer qu'il existe deux parties distinctes de E , X et Y telles que $s(X) = s(Y)$.

On ne peut avoir $X \subsetneq Y$ car sinon $s(X) < s(Y)$. De même, $Y \subsetneq X$.

Posons $A = X \setminus Y$ et $B = Y \setminus X$. Ces deux parties sont donc non vides et disjointes. On peut réécrire X et Y sous la forme d'unions disjointes $X = (X \cap Y) \cup A$ et $Y = (X \cap Y) \cup B$. On a donc

$$s(X) = s(X \cap Y) + s(A) \quad \text{et} \quad s(Y) = s(X \cap Y) + s(B)$$

et donc $s(A) = s(B)$.

Solution 13.4

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition.

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Solution 13.5

Notons E , H , M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne

$$\begin{array}{llll} \text{card}(E) = 800, & \text{card}(H) = 300, & \text{card}(S) = 352, & \text{card}(M) = 424, \\ \text{card}(E) = 800, & \text{card}(H) = 300, & \text{card}(S) = 352, & \text{card}(M) = 424, \\ \text{card}(H \cap S) = 188, & \text{card}(H \cap M) = 166, & \text{card}(S \cap M) = 208, & \text{card}(H \cap M \cap S) = 144. \\ \text{card}(H \cap S) = 188, & \text{card}(H \cap M) = 166, & \text{card}(S \cap M) = 208, & \text{card}(H \cap M \cap S) = 144. \end{array}$$

On cherche $\text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S})$, où \bar{A} désigne le complémentaire de A dans E . D'après les lois de Morgan (en notant $\bar{H} = E \setminus H, \dots$):

$$\text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = \text{card}(\overline{H \cup M \cup S}).$$

$$\begin{aligned}\text{card}(H \cup M \cup S) &= \text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) \\ &\quad - \text{card}(H \cap M) - \text{card}(H \cap S) - \text{card}(M \cap S) + \text{card}(H \cap M \cap S).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = 658 \text{ et } \text{card}(\bar{H} \cap \bar{M} \cap \bar{S}) = 800 - 658 = 142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Solution 13.7

Soit E un ensemble fini non vide. Fixons $a \in E$, l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\mapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A. \end{cases}\end{aligned}$$

est une bijection (elle est sa propre réciproque). Deplus, l'image d'une partie A par φ est une partie contenant un élément en plus ou en moins, ainsi

- l'image d'une partie A de cardinal pair est une partie de cardinal impair,
- l'image d'une partie A de cardinal impair est une partie de cardinal pair.

L'application φ étant bijective, il y a donc autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

13.3 Analyse combinatoire

Solution 13.8

On note ici \bar{X} le complémentaire de X dans E .

Lorsque X, Y parcourent $\mathcal{P}(E)$, il en est de même de \bar{X} et de \bar{Y} , autrement dit

$$(X, Y) \mapsto (\bar{X}, Y), \quad (X, Y) \mapsto (X, \bar{Y}), \quad (X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y}),$$

sont des bijections de $(\mathcal{P}(E))^2$ dans lui-même. Donc

$$\begin{aligned}S &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y) = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(\bar{X} \cap Y) \\ &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap \bar{Y}) = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}).\end{aligned}$$

Mais on a toujours l'union disjointe

$$E = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}4S &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y) + \text{card}(\bar{X} \cap Y) + \text{card}(X \cap \bar{Y}) + \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}) \\ &= \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(E) \\ &= n(2^n)^2 = n4^n.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = n4^{n-1}$.

Pour le calcul de T , utiliser le complémentaire

$$\text{card}(X \cup Y) = n - \text{card}(\overline{X \cup Y}) = n - \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}).$$

on trouve $T = 3n4^{n-1}$.

Solution 13.9

Le nombre total de segments reliant deux sommets est $\binom{2}{n}$. Il suffit de soustraire les segments qui ne sont pas des diagonales (c'est-à-dire les côtés). Il y a donc

$$\binom{2}{n} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

diagonales dans un polygone convexe à n côtés.

Solution 13.10

Solution 13.11

Solution 13.13 Convolution de Vandermonde

1. On remarque que si $X = A^c \cap B^c$, on a $f(X) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$. Si f est injective, on a nécessairement $A^c \cap B^c = \emptyset$, c'est-à-dire après passage au complémentaire (dans E) $A \cup B = E$. Réciproquement, si $A \cup B = E$, alors si $f(X_1) = f(X_2)$, on a

$$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2,$$

et donc f est injective.

Si f est surjective, il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$, on a donc $A \subset X$ et $A \cap B = \emptyset$. Réciproquement supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on pose $X = A' \cup B'$, alors

$$A' \cap A = A' \quad A' \cap B = \emptyset \quad B' \cap A = \emptyset \quad B' \cap B = B',$$

et donc $f(X) = (A', B')$. L'application f est donc surjective.

Conclusion

- L'application f est injective si, et seulement si $A \cup B = E$.
- L'application f est surjective si, et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

2. Lorsque f est bijective, on a

$$f^{-1}(A', B') = A' \cup B'.$$

3. Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs p et q . On pose $E = A \cup B$, et donc $\text{card } E = p + q$.

Le nombre de parties à n éléments de E est $\binom{p+q}{n}$.

En utilisant la fonction f précédente, on constate que former une partie à n élément de E revient à choisir une partie A' à k éléments ($0 \leq k \leq n$) de A et une partie B' à $n - k$ éléments de B . Il y a $\binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, puis au total

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

possibilités. D'où l'identité demandée.

Solution 13.14

Les parties de E qui contiennent un et un seul élément de A s'écrivent de manière unique

$$X = \{a\} \cup Y$$

avec $a \in A$ et $Y \in \mathcal{P}(E \setminus A)$.

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix. Quelque-soit le choix de a , nous pouvons choisir 2^{n-p} ensembles dans $E \setminus A$ (de cardinal $n - p$).

Ainsi, le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Solution 13.15**Solution 13.18**

<https://www.mathraining.be/chapters/39/theories/128>

Solution 13.19**Solution 13.20****Solution 13.21** *Permutations*

Réponses à justifier:

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6, 4^4 \times 12^8, 2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Solution 13.22 *IMT MP 2024***Solution 13.23****Solution 13.24**

Il s'agit de placer six lettres à six places dans le mot. Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre d'anagrammes serait égal au nombre de permutations de ces six lettres : $6!$. Le mot comporte deux lettres répétées une fois : O et N. Une anagramme correspond donc à $2! \times 2!$ permutations des lettres : celles qui sans toucher aux places du G et du I, transposent les O entre eux ou les N entre eux.

Le nombre d'anagrammes cherché est donc égal à $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Pour OGNON, utilisons une autre méthode : il y a $\binom{5}{2}$ choix pour placer les deux O, il reste alors $\binom{3}{2}$ choix pour les deux N.

Le nombre d'anagrammes cherché est $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$.

Solution 13.25

Le mot comporte 13 lettres, il y a donc $13!$ permutations de ces lettres. La lettre A est présente trois fois : pour une disposition de ces trois A on a $3!$ permutations.

Les lettres I et N sont présentes deux fois, à un mot correspond donc $3! \times 2! \times 2!$ permutations.

Le nombre d'anagrammes est égal à

$$\frac{13!}{3!2!2!} = 259459200.$$

Solution 13.26

Le mot a 8 lettres, il y a $\binom{8}{2}$ choix pour placer les deux I, il reste $\binom{6}{2}$ choix pour les deux O, il reste $\binom{4}{2}$ choix pour les deux F, il reste deux places pour le L.

Nombre d'anagrammes :

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = \frac{8!6!4!}{6!2!4!2!2!2!} \times 2 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040.$$

Solution 13.27

Il y a 3^{84} applications des huîtres dans les assiettes, dont 3 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Si on retire une assiette, une distribution des huîtres correspond alors à une application des 84 huîtres dans deux assiettes. Parmi ces applications, il y en a 2 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Il y a donc $2^{84} - 2$ de ces applications qui mettent au moins une huître dans chacune des deux assiettes. On a 3 manières de retirer une assiette, par conséquent il y a $3 \times (2^{84} - 2)$ distributions qui laissent exactement une assiette vide.

Il y a $3^{84} - 3 \times (2^{84} - 2) - 3 = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$ manières de répartir les 84 huîtres en ne laissant aucune assiette vide.

Remarque : on retrouve $S(84, 3) = 3^{84} - 3 \times 2^{84} + 3$.

Solution 13.28

Julie dispose de huit façons de tartiner chaque type de pain : quatre confitures sans beurre et quatre confitures avec beurre. On doit donc dénombrer les applications de l'ensemble { tartine, biscotte, toast } dans un ensemble de huit éléments : le nombre de possibilités différentes offertes à Julie est donc $8^3 = 512$.

Solution 13.29

1. Ce sont des combinaisons de 15 joueurs choisis parmi 22, il y a donc $\binom{22}{15} = 170544$ équipes différentes.
2. On prend 13 joueurs parmi 15 joueurs, il y a donc $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$ équipes différentes.

Solution 13.30

Dénombrons d'abord le nombre de groupes de dix joueurs que l'on peut former avec les dix-sept joueurs autres que les gardiens : il y en a $\binom{17}{10} = 19448$. Chacun de ces groupes peut constituer une équipe avec chacun des trois gardiens.

Il y a donc $19448 \times 3 = 58344$ équipes possibles.

Solution 13.32

On note $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ le nombre de p -arrangements dans un ensemble à n éléments.

1. Toutes les pattes sont différentes, toutes les pantoufles sont différentes. Il y a donc $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ manières de chauffer le pachyderme.
2. Il y a trois chaussons pour les deux pattes de droites et trois chaussons pour les deux pattes de gauches. Il y a $A_3^2 \times A_3^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ façons de chauffer l'éléphant en respectant la droite et la gauche.

Solution 13.33**Solution 13.34**

1. Il y a autant d'échanges en français que de combinaisons de deux Wallons dans un ensemble de q Wallons, soit $\binom{q}{2}$.
2. Il y a autant d'échanges en néerlandais que de combinaisons de deux Flamands dans un ensemble de p Flamands, soit $\binom{p}{2}$.
3. Il y a autant d'échanges en anglais que de couples formés d'un Flamand et d'un Wallon, soit pq .
4. On a ainsi dénombré tous les échanges de politesses qui correspondent aux combinaisons de deux personnes parmi $p + q$. Il y en a $\binom{p+q}{2}$. On en déduit $\binom{p+q}{2} = \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2}$.

Solution 13.35**Solution 13.36**

- *Première méthode.*

Soit i le nombre de groupes de 2 personnes qui passent en même temps. i varie entre 0 et 5. i étant fixé, le nombre de passages est égal à $10 - i$: on doit dénombrer les manières de placer i groupes de 2 personnes parmi $10 - i$ passages. Il s'agit donc de combinaisons : il y en a $\binom{10-i}{i}$. Comme i varie de 0 à 5, le nombre total de possibilités est égal à

$$\binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5} = \sum_{i=0}^5 \binom{10-i}{i} = 89.$$

- *Deuxième méthode.*

Notons T_n le nombre de manières de faire passer n personnes. Au premier passage, il peut y avoir soit une personne, soit deux.

- Premier cas : il reste $n - 1$ personnes à faire passer de T_{n-1} manières différentes.
- Deuxième cas : il en reste $n - 2$ à faire passer de T_{n-2} manières différentes.

On obtient la relation $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$.

La suite (T_n) est la suite de Fibonacci. De proche en proche, on obtient

$$T_3 = 3, T_4 = 5, T_5 = 8, T_6 = 13, T_7 = 21, T_8 = 34, T_9 = 55, T_{10} = 89.$$

Il y a donc 89 possibilités.

Solution 13.37

Solution 13.38

1. Un groupe est une combinaison de quatre garçons pris parmi huit, il y a $\binom{8}{4} = 70$ groupes possibles.
2. Un groupe muet est une combinaison de quatre garçons pris parmi six, il y a $\binom{6}{4} = 15$ groupes muets possibles.
3. Chacun a une place sur la scène, on tient compte de l'ordre des garçons du groupe. Chaque disposition est un arrangement de quatre garçons pris parmi huit, il y a $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ dispositions possibles.
4. Pour avoir la stéréo, il faut un chanteur à une des deux places de droite et l'autre à une des deux places de gauche. Le premier a quatre places possibles, le deuxième doit être placé à une des deux places opposées: il y a $4 \times 2 = 8$ manières différentes de placer les deux chanteurs. Il reste alors deux places pour six garçons, ce qui fait $6 \times 5 = 30$ manières de les placer. Il y a $8 \times 30 = 240$ dispositions donnant la stéréo.
5. Pour avoir un effet monophonique, il faut soit un seul chanteur, soit deux chanteurs du même côté.
Premier cas : le chanteur a quatre places possibles, il reste alors trois places pour six garçons, ce qui fait $2 \times 4 \times (6 \times 5 \times 4) = 960$ dispositions.
Deuxième cas: les deux chanteurs sont soit à droite, soit à gauche. Il suffit de placer le premier, la place de l'autre est alors déterminée. Il y a donc quatre choix possibles pour les chanteurs. Il reste alors deux places pour six garçons, ce qui fait $6 \times 5 = 30$ manières de les placer, ce qui fait $4 \times 30 = 120$ dispositions. Il y a $960 + 120 = 1080$ dispositions donnant un effet monophonique.
6. Un quatuor de carpes est un arrangement de quatre garçons pris parmi six, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ quatuor de carpes.

Remarque. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 = 240 + 1080 + 360$.

Solution 13.41

1. Un élément de A est une 6-liste d'éléments de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\text{card } E = 9$, donc $\text{card } A = 9^6$.
2. Un élément de A_1 est un arrangement de 6 éléments de E , donc $\text{card } A_1 = \frac{9!}{3!}$.
3. Un élément de A est pair si, et seulement si, son chiffre des unités est 2, 4, 6 ou 8. Il y a 4 façons de choisir un tel chiffre, puis, pour chacune d'elles, 9^5 façons de choisir la 5-liste des 5 premiers chiffres. Donc $\text{card } A_2 = 4 \times 9^5$.
4. Il y a $\binom{9}{6}$ façons de choisir les 6 chiffres d'un nombre de A_3 puis, pour chacune d'elles, une (et une seule) façon de les écrire dans l'ordre croissant. Donc $\text{card } A_3 = \binom{9}{6}$.

Solution 13.42

1. (a) Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.
(b) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2, 4, 6, 8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.
(c) On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
(d) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.
2. (a) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.
(b) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.
(c) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Solution 13.43

1. $10^6 = 1000000$.
2. $10!/(10-6)! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$.
3. $\binom{10}{2}\binom{6}{3} = 900$.
4. $\binom{10}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 10800$.
5. $10 \times \binom{6}{2} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 453600$.

Solution 13.44

Solution 13.45

Une main de 13 cartes s'identifie à une partie à 13 éléments de l'ensemble des 52 cartes (il y en a $\binom{52}{13}$).

1. On choisit le roi puis on choisit 12 cartes parmi 48, ce qui fait $4 \times \binom{48}{12}$ mains possibles.
2. C'est le nombre de combinaisons de 13 cartes parmi 48. Il y a $\binom{48}{13}$ possibilités.

3. L'ensemble des mains contenant au moins un roi est le complémentaire de l'ensemble des mains ne contenant aucun roi. Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles. Il y a donc $\binom{52}{13} - \binom{52}{12}$ possibilités.

On peut aussi dénombrer les mains avec exactement un roi, exactement deux rois, exactement trois rois, et exactement quatre rois. On en déduit

$$\binom{52}{13} - \binom{52}{12} = 4\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$

4. Il n'y a qu'une seule possibilité de choisir quatre rois. Reste ensuite à choisir deux cartes parmi les 48 restantes. Il y a $\binom{48}{2}$ possibilités.
5. Une seule main ne contient que des piques.

Solution 13.46

- Il y a $13 = \binom{13}{1}$ possibilités pour la hauteur de la paire et il faut choisir 2 cartes dans cette hauteur, soit $\binom{4}{2}$ possibilités. Pour les 3 cartes manquantes, il faut les choisir en sorte de ne pas reformer de paire, c'est-à-dire dans des hauteurs différentes, ce qui laisse $\binom{12}{3}$ choix. Et il faut choisir une couleur pour chacune de ces hauteurs. On trouve alors $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3$ mains avec exactement une paire.
- Il faut choisir les hauteurs des 2 paires, ce qui fait $\binom{13}{2}$ possibilités. Il faut ensuite choisir les couleurs pour chaque paire, soit $\binom{4}{2}$ possibilités chacune. Enfin, reste à choisir la cinquième carte dans les 11 hauteurs restantes, soit 44 cartes possibles. Au total, il y a $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot 44$ mains contenant deux paires (sans carré, ni brelan).
- Pour former un brelan, on choisit une hauteur puis 3 cartes dans cette hauteur. On complète la main par 2 cartes prises dans les 12 hauteurs restantes mais dans des hauteurs différentes, ce qui correspond à $\binom{12}{2} \times 4^2$ possibilités. Il y a alors $13 \times \binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2$ mains contenant des brelans.
- Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs pour le brelan, avec $\binom{4}{3}$ couleurs différentes. On complète la main avec une paire parmi les 12 = $\binom{12}{1}$ hauteurs possibles, avec $\binom{4}{2}$ couleurs différentes. Au total, il y a $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ mains avec un full.
- Il y a $13 = \binom{13}{1}$ hauteurs possibles pour le carré (avec $\binom{4}{4} = 1$ couleur(s) différente(s)). On complète la main avec une carte parmi les 48 restantes. Il y a donc $13 \cdot 48$ mains contenant un carré.
- On choisit une couleur, puis 5 cartes dans cette couleur. Cela donne $4\binom{13}{5}$ mains possibles.

S'il on souhaite obtenir la probabilité d'obtenir une telle main, on divise le résultat par le nombre de mains possibles, c'est-à-dire $\binom{52}{5}$.

On trouve respectivement $\approx 42.257\%$, $\approx 4.754\%$, $\approx 2.113\%$, $\approx 0.144\%$, $\approx 0.024\%$, 0.197% .

Question subsidiaire, avec un jeu de 32 cartes, quel ordre des mains devrait être retenu pour être cohérent avec les probabilités?

Solution 13.47

- Pour ranger les 12 livres, je choisis l'ordre des 3 groupes de livres (3! choix possibles), puis pour chacun de ces choix, il y a 4! façons de ranger les livres de mathématiques entre eux, puis 6! façons de ranger les livres de philosophie et 2! façons de ranger les livres de géographie. Donc $n_1 = 3!4!6!2!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsqu'ils doivent être groupés par matières.

2. Il y a 9 façons de choisir le nombre de livres rangés avant ceux de mathématiques (il peut y avoir 0, 1, ..., 8 livres placés avant ceux de mathématiques). Puis, pour chacun de ces choix, $4!$ façons de ranger les livres de mathématiques, puis $8!$ façons de ranger les autres livres entre eux. Donc $n_2 = 9 \times 4!8!$ est le nombre de façons de ranger les livres lorsque les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Solution 13.48

Solution 13.49

Solution 13.50

On pose H = "vers le haut" et D = "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0, 0)$ à (p, q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du H est $\binom{p+q}{q}$. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D . Il y a donc $\binom{p+q}{q}$ chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a $\binom{p+q}{p}$ choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{(p+q)-p} = \binom{p+q}{p}$.