Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Aperçu

D 1 Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à φ. L'**intégrale de $\boldsymbol{\varphi}$ sur $\boldsymbol{[a,b]}$**, notée $\int_{[a,b]} \varphi$, est définie par

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i)\left(x_{i+1} - x_i\right) \text{ où } t_i \in]x_i, x_{i+1}[. \tag{1}$$

La famille $\gamma = (t_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ est un **pointage** de la subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

R

- Comme il y a une infinité de façons possibles de choisir une subdivision adaptée à φ – toute partition plus fine, par exemple, serait également adaptée au calcul de l'intégrale –, il faut vérifier que cette définition ne dépend ni de la subdivision adaptée à φ ni aux réels t_i que l'on a choisi.
- Si φ est une fonction constante sur $[a, b]$, ou même simplement sur $]a, b[$, et si on note λ cette constante, on a
$$\int_{[a,b]} \varphi = \lambda(b - a).$$
- Le nombre $\varphi(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ représente l'aire signée d'un rectangle de hauteur $\varphi(t_i)$ et de base le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi, si φ est une fonction positive, $\int_{[a,b]} \varphi$ représente l'aire du domaine du plan défini par
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq \varphi(x) \right\}$$
- On ne s'intéresse pas aux valeurs prises par la fonction en escalier aux points de la subdivision associée. Par conséquent, si ψ est une application définie sur $[a, b]$ qui ne diffère de la fonction en escalier φ qu'en un nombre fini de points, alors ψ est encore une fonction en escalier et son intégrale est la même que celle de φ sur $[a, b]$.

P 2 *Soit φ, ψ des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*

1. *Si φ est une application à valeurs positive, $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$.*
2. *Si $c \in [a, b]$, alors*
$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi.$$
3. *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{[a,b]} \varphi \end{array}$ *est une application linéaire ;*
$$\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi.$$

D 3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On considère

- l'intégrale inférieure de f dans $[a,b]$

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\},$$

- et l'intégrale supérieure de f dans $[a,b]$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}.$$

On dit que f est **intégrable** au sens de Riemann s'il l'on a $I^-(f) = I^+(f)$, la valeur commune $\int_{[a,b]} f$ de ces deux nombre étant alors appelée l'**intégrale** de f sur $[a,b]$. On a donc

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \left(\int_{[a,b]} \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ f \leq \psi}} \left(\int_{[a,b]} \psi \right).$$

C'est le *seul et unique* nombre vérifiant

$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leq f \leq \psi \implies \int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

T 4 *On ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction en un nombre fini de points.*

R

Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a,b])^2$ tel que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

T 5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, alors la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration.
Considérons l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui minorent f

$$E^- = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\},$$

et l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent f

$$E^+ = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}.$$

L'application f est bornée car continue sur un segment. Notons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, alors

$$\int_{[a,b]} m = m(b-a) \in E^- \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} M = M(b-a) \in E^+$$

Donc E^- et E^+ sont non vides.
Si $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq M$ donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq M(b-a)$. Donc E^- est majorée par $M(b-a)$. De même E^+ est minorée par $m(b-a)$.
E^- est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure $I^-(f) = \sup(E^-)$. De même, E^+ admet une borne inférieure $I^+(f) = \inf(E^+)$.

T 5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, alors la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.*

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

⚠ *On ne peut pas encore parler de $\int_{[a,b]} f$, encore moins écrire $\int_I \varphi \leq \int_I f \leq \int_I \psi$!*

Donc, en fixant ψ, on a $I^-(f) \leq \int_{[a,b]} \psi$, puis, l'inégalité valant pour toute fonction ψ en escalier qui majore f, on a $I^-(f) \leq I_+(f)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après le théorème d'approximation, il existe une application φ telle que

$$\varphi \leq f \leq \varphi + \frac{1}{n},$$

et ainsi,

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq I\_(f) \leq I_+(f) \leq \int_{[a,b]} \left(\varphi + \frac{1}{n}\right) = \left(\int_{[a,b]} \varphi\right) + \frac{b-a}{n}.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, 0 \leq I_+(f) - I\_(f) \leq \frac{b-a}{n},$$

ce qui n'est possible que lorsque $I\_(f) = I_+(f)$.

R Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque f est une fonction lipschitzienne de rapport $k > 0$ (et donc continue), on peut choisir une subdivision régulière

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{telle que} \quad \frac{b-a}{n} \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

et des fonctions φ et ψ telles que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi(x_i) = \psi(x_i) = f(x_i)$$
$$\text{et } \forall x \in \left]x_i, x_{i+1}\right[, \varphi(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \text{ et } \psi(x) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f.$$

Alors

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ et } 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

E 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la subdivision régulière de $[a,b]$ donnée par

$$\forall i \in [\![0,n]\!], x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Et définissons $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \left[x_i, x_{i+1}\right[, \varphi(x) = x_i \text{ et } \psi(x) = x_{i+1}.$$

On a clairement $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{b-a}{n}\frac{n(x_0 + x_{n-1})}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

$$\int_{[a,b]} \psi = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \frac{b-a}{n}\frac{n(x_1 + x_n)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n} \leq \int_{[a,b]} f \leq \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Par compatibilité de la limite avec la relation d'ordre $\leq$, on obtient

$$\int_{[a,b]} f = \frac{b^2-a^2}{2},$$

ce qui est cohérent avec la formule usuelle pour l'aire d'un trapèze.

L 7 *Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$ et (φ_n) un suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varepsilon_n = \|\varphi_n - f\|_\infty$. Alors

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n.$$

Les fonctions $\varphi_n \pm \varepsilon_n$ étant des fonction en escalier, on a par définition de l'intégrale de f,

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n - \varepsilon_n) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\varphi_n + \varepsilon_n)$$

c'est-à-dire

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n) - (b-a)\varepsilon_n \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\varphi_n) + (b-a)\varepsilon_n$$

On obtient donc l'inégalité

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} f \right| \leq (b-a)\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le résultat s'en suit par domination. ∎

T 8 *L'application*

$$\int_{[a,b]} : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est une application linéaire sur $\mathscr{C}_m([a,b])$, c'est-à-dire que si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

Démonstration. Puisque f est continue par morceaux sur $[a,b]$, il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que

$$\varphi_n \leq f \leq \varphi_n + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \psi_n \leq g \leq \psi_n + \frac{1}{n}.$$

Alors, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\left|\varphi_n(x) + \psi_n(x) - f(x) - g(x)\right| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |\psi_n(x) - g(x)| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

Cette majoration étant indépendante de x, ceci prouve que la suite de foncions $(\varphi_n + \psi_n)$ converge uniformément vers la fonction $f + g$ et donc

$$\int_{[a,b]} (f+g) = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} \left(\varphi_n + \psi_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} \left(\varphi_n\right) + \int_{[a,b]} \left(\psi_n\right) = \int_{[a,b]} (f) + \int_{[a,b]} (g).$$

De manière analogue,

$$\left|\lambda\varphi_n - \lambda f\right| = |\lambda|\left|\varphi_n - f\right| \leq \frac{|\lambda|}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

et donc

$$\int_{[a,b]} \lambda f = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} \lambda\varphi_n = \lim_{n \to +\infty} \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

T 9 *Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$.*

1. *Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.*
2. *Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.*

Démonstration.

1. Si $f \geq 0$, on remarque que la fonction nulle $\widetilde{0}$ est en escalier et on a donc
$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} \widetilde{0} = 0.$$
2. C'est une conséquence immédiate de la linéarité et de la positivité de l'intégrale,
$$g - f \geq 0 \implies \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g - f \geq 0.$$

∎

C 10 *Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, alors*
$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $-|f| \leq f \leq |f|$. ∎

D 11 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Soit x et y deux points de I, alors on pose

$$\int_x^y f = \begin{cases} \int_{[x,y]} f & : x < y \\ 0 & : x = y \\ -\int_{[y,x]} f & : y < x. \end{cases}$$

L'intégrale $\int_x^y f$ peut être aussi notée $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$.

R Le t qui figure sous le signe intégral est une variable muette, et peut-être remplacée par n'importe quelle lettre

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^y f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \ldots$$

T 12 **Relation de Chasles**

Si f est continue par morceaux sur un intervalle contenant x, y et z alors

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec la notation $\int_a^b$, il faut être très vigilant lors de l'utilisation d'inégalités, notamment lorsque $a > b$ on a

$$\left|\int_a^b f\right| \leq -\int_a^b |f|$$

M

Comparaison somme-intégrale

Soient f une fonction continue et décroissante sur un intervalle I et $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$. Si $p-1$ et $q+1$ appartiennent à I, on a

$$f(p+1) + f(p+2) + \cdots + f(q+1) \leq \int_p^{q+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q),$$

ou encore

$$\int_p^{q+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q) \leq \int_{p-1}^{q} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On a un résultat analogue lorsque f est croissante.

N Pour toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

P 13 **Norme de la convergence uniforme**

Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. *L'égalité $\|f\|_\infty = 0$ implique $f = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.*
3. *On a l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

On dit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array}$ *est une norme sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

T 14 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une application continue et de signe constant, alors*

$$\int_{[a,b]} f = 0 \iff f = 0$$

Esquisse. Par l'absurde. Si l'on a $f(x_0) = r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], |x - x_0| \leq r' \implies f(x) \geq r/2.$$

La partie du plan comprise entre $[a,b]$ et le graphe de f contient donc un rectangle d'aire > 0. ∎

C 15 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, une fonction continue et positive sur $[a,b]$. S'il existe un point x_0 de $[a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors*

$$\int_{[a,b]} f > 0.$$

Ce résultat n'est plus valable pour les fonctions continues par morceaux.

N Pour toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, posons

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

P 16 **Norme de la convergence uniforme**

Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. *L'égalité $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$.*
3. *On a l'inégalité triangulaire $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.*

On dit que l'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_1 \end{array}$ *est une norme sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.*

T 17 *Pour* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors*

$$\|f\|_1 \leq |b - a| \cdot \|f\|_\infty.$$

T 18 *Soit* $(f_n : [a, b] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications continues convergeant uniformément vers* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| \mathrm{d}x = 0,$$

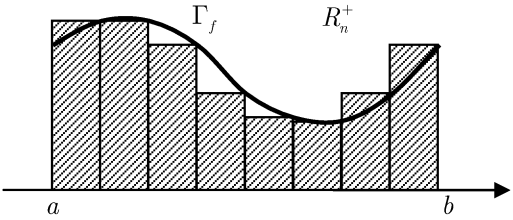
en particulier,

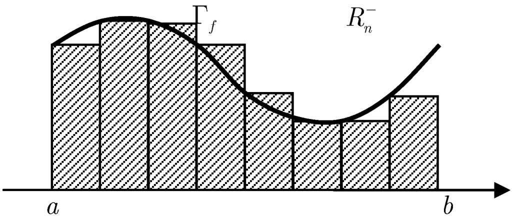
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

D 19 On appelle la **somme de Riemann régulière à gauche** associée à f, à l'ordre n, sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

La somme de Riemann régulière à droite est obtenue en sommant i de 1 à n.





T 20 *Soit* $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$*, avec* $a < b$*, on a*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Démonstration. Admettons ce résultat pour l'instant. La démonstration n'est exigible que pour f lipschitzienne. ∎

C 21 *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, avec $a \neq b$, on a*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Autrement dit, l'élément $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est limite de la **moyenne arithmétique** des valeurs de f sur une subdivision régulière de $[a,b]$.

D 22 Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, avec $a \neq b$, la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f.$$

R On a montré précédemment

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]} f.$$

E 23 Calculons $A = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

T 24 Calculer $R_n(f)$ dans le cas où $f(x) = e^x$ et en déduire

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x = e^b - e^a.$$

T 25 Devinette : Si dans $R_n(f)$ on enlève un nombre fini fixé de termes, que se passe-t-il ? Par exemple, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n-7} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

T 26 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors,

$$\left| R_n(f) - \int_{[a,b]} f \right| \leq k\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut poser $k = \sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

D 27 Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si $F' = f$.

P 28 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F dans I, l'ensemble des primitives de f dans I est identique à l'ensemble des fonctions $F + k$, où k est une constante. En particulier, pour $x_0 \in I$, il existe alors une unique primitive de f s'annulant en x_0 qui est $F - F(x_0)$.*

T 29 **Théorème de Newton-Leibniz alias T.F.C.D.I.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une application continue sur un intervalle* I *et* $a \in I$*. On définit*

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et* $F' = f$*.*

Démonstration. Fixons $x \in I$. pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$,

$$F(x+h) - F(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $g(h) = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue au point x, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $|t - x| < \delta$ implique $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, ce qui est en particulier le cas lorsque $t \in [x, x+h]$, avec $|h| < \delta$. Ainsi, lorsque $|h| < \delta$,

$$|g(h)| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|h|}|x + h - x|\varepsilon = \varepsilon.$$

La fonction g est donc de limite 0 en 0, ce qui prouve que F est dérivable en x, de dérivée $f(x)$. Comme f est continue et que $F' = f$, F est de classe $\mathscr{C}^1$. ∎

P 30 **Calcul des intégrales**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

1. *f admet des primitives sur I.*
2. *Si h est une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = [h(t)]_a^b.$$

3. *Il existe une et une seule primitive g de f sur I prenant la valeur y_0 au point $x_0 \in I$, elle est donnée par*

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

P 31 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$,*

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'.$$

Il est faux de dire que si f est dérivable alors

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

N Si F est la primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui s'annule en x_0, alors on écrit $\int_{x_0} f = F$.

Pour désigner une primitive de f, on utilise une autre notation toute aussi universelle et encore plus catastrophique, à savoir

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où l'on n'écrit pas de limites d'intégration. Comme la lettre x du second membre désigne une variable liée et celle du premier une variable libre, tous les tabous sont violés. On dit alors qu'il s'agit d'une intégrale indéfinie. Cette notation incite à utiliser les techniques de l'intégration dans la cuisine du calcul des primitives (I.P.P, changement de variable...), mais il faut bien préciser les hypothèses nécessaires.

P 32 **À savoir retrouver**

Soient I et J deux intervalles, u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in I$, on définit

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

E 33 Étudions la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \int_{x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

T 34 *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (2)$$

C 35

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

E 36 Pour $x \in]0,+\infty[$,

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

E 37 Calculons $I = \int_0^1 x^2 e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

T 38 Calculer $I = \int_0^{\pi/2} t \sin t \,\mathrm{d}t$.

T 39 On cherche une primitive de la fonction arc-tangente sur $\mathbb{R}$. Nous savons que $t \mapsto \int_0^t \arctan x \,\mathrm{d}x$ est une telle primitive. Calculer cette intégrale.

T 40 **Formule de Taylor avec reste intégral ou Formule de Taylor-Laplace**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur un intervalle I contenant a. Alors,

$$\forall x \in I, f(x) = T_p(x) + R_p(x)$$

avec

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$$

$$R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

D 41 La formule précédente est appelée développement de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre p au point a. La fonction polynomiale T_p est la **partie régulière d'ordre p** et la fonction R_p est le **reste intégral d'ordre p**. On dit aussi que T_p est le **polynôme de Taylor de degré p en a**.

T 42 **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur un intervalle I contenant a. Si M est tel que

$$\forall t \in I, |f^{(p+1)}(t)| \leq M,$$

alors

$$\forall x \in I, |R_p(x)| = |f(x) - T_p(x)| \leq M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

E 43 Soit $R > 0$ un nombre réel quelconque et considérons l'application $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur l'intervalle $[-R, R]$. On a $f^{(k)}(t) = e^t$ et donc $f^{(k)}(0) = 1$ et

$$\forall t \in [-R, R], |f^{(p+1)}(t)| = |e^t| \leq e^{|t|} \leq e^R.$$

On en déduit alors pour tout $x \in [-R, R]$,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^R \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^R \frac{R^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Par croissance comparée, on sait que $\lim_{p \to \infty} \frac{R^{p+1}}{(p+1)!} = 0$. Nous avons donc démontré

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

et que la convergence de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers e^x est uniforme sur tout segment $[-R, R]$.

Toute fonction de la forme $(g'\circ f)\times f'$ admet $g\circ f$ pour primitive. Mentionnons quelques cas très courants:
Si u est une fonction dérivable sur I,

- $u'e^u$ admet e^u pour primitive sur I.
- $u'\cos u$ admet $\sin u$ pour primitive sur I.
- $u'\sin u$ admet $-\cos u$ pour primitive sur I.
- $\dfrac{u'}{1+u^2}$ admet $\arctan u$ pour primitive sur I.
- Si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u}$ admet $\ln|u|$ pour primitive sur I.
- Si u est à images dans $\mathbb{R}_+^\star$ sur I et $\alpha\neq -1$, $u'u^\alpha$ admet $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour primitive sur I.
- etc...

E 44

- La fonction $x\mapsto \frac{\sin x}{5-3\cos x}$ admet $x\mapsto \frac{1}{3}\ln(5-3\cos x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x\mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x\mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- La fonction $x\mapsto \frac{1}{4x^2+1}$ admet $x\mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$.

M Le programme exige que vous sachiez primitiver les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.
Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique et l'on fait apparaitre la dérivée de l'arctangente.

E 45 La fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2-x+1}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

T 46 **Formule de changement de variable**

Soit u une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ dans un segment $I = [a, b]$ et f une fonction continue dans l'intervalle $J = u(I)$. On a alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Il est impératif de noter qu'en général $u([a, b])$ est différent de $[u(a), u(b)]$.

R La formule se comprend d'elle même : on remplace y par son expression en fonction x à la fois dans $f(y)$ et dans $\mathrm{d}y$.

E 47 Première utilisation

Calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}$.

On peut poser $y = \tan t = u(t)$. Il faut alors interpréter les bornes 0, 1 comme étant des nombres $u(a)$, $u(b)$. L'application $u : t \mapsto \tan t = y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$, et l'application $f : y \mapsto \frac{1}{(1+y^2)^2}$ est continue sur $u([0, \pi/4]) = [0, 1]$.

On écrit alors $y = \tan t$ et $\mathrm{d}y = (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{(1 + \tan^2 t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}.$$

E 48 Deuxième utilisation

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

On peut sentir le «bon» changement de variable $y = \sin t = u(t)$. L'application u étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on a $\mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t$ et

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right) \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 y^2(1 - y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

T 49 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x.$

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$.
Soit $\tau \in \mathbb{R}$. On appelle **translatée de f** par τ la fonction f_τ définie sur $[a + \tau, b + \tau]$ par

$$\forall x \in [a + \tau, b + \tau], f_\tau(x) = f(x - \tau).$$

L'application f est en escalier (resp. continue par morceaux) sur I si et seulement si f_τ l'est sur $[a + \tau, b + \tau]$. De plus, on a

$$\int_a^b f = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f_\tau,$$

ou encore

P 50 *Soient f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t - \tau)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période T, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$. Alors, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(il s'agit de l'aire algébrique de deux domaines, le premier étant image de l'autre par une translation horizontale). En conséquence

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b+T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale de la fonction T-périodique sur un segment de longueur T ne dépend pas du segment choisi.

D 51 Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ avec une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est **convergente** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ >}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une telle intégrale est alors appelé **intégrale généralisée** ou **intérgrale impropre**.

D 52 Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est **convergente** si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\ <}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D 53 Soit $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est **convergente** si pour un (ou de façon équivalente pour tout) $c\in]a,b[$,

- la fonction $x\mapsto \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a,
- la fonction $x\mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b.

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux limites:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\ <}} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{\substack{x\to b\\ >}} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette valeur ne dépend pas de $c\in]a,b[$.

E 54 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.

E 55 Intégrales de Riemann

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha < 1$.
3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ n'est jamais convergente.

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\star$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Pour $a > 0$.

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$.	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a}$	$]-a, a[$

Fonction $x \mapsto$	Une primitive $x \mapsto$	Intervalle d'intégration
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\coth x$	$\ln\lvert \operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2\arctan(e^x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert \tanh \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}_-^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$

1. Les fonctions polynomiales

$$\int a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \, \mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + k$$

2. Les fonctions rationnelles de première espèce

$$\int \frac{1}{(x-a)} \, \mathrm{d}x = \ln|x-a| + k$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} \, \mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + k, \quad n \geq 2.$$

3. Les fonctions rationnelles de deuxième espèce, avec $b^2 - 4ac < 0$,

$$\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} = A \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + B \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}$$

Pour $n = 1$, on a

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} \, \mathrm{d}x = \ln(x^2 + 2px + q) + k$$

$$\text{et} \int \frac{1}{x^2 + px + q} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - p^2/4}} \arctan \frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + k$$

Par linéarité de l'intégration, il suffit de connaître $I_{p,q} = \int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x$.

Cas particulier

- Pour calculer $I_{p,1} = \int \sin^p x \cos x \,\mathrm{d}x$, il semble important de remarquer «quelque chose de particulier», à savoir que la dérivée de $\sin x$ est justement $\cos x$. Nous sommes donc en présence d'une expression de la forme
$$\int u^p(x)u'(x)\,\mathrm{d}x, \text{ d'où } I_{p,1} = \frac{1}{p+1}u^{p+1}(x) + k = \frac{\sin^{p+1}(x)}{p+1} + k.$$
Le calcul de $I_{1,q}$ se traite de même, au problème de signe près.
- Pour calculer $I_{p,2q+1} = \int \sin^p x \cos^{2q+1}(x)\,\mathrm{d}x$, on remarque la même chose ! On écrit alors $I_{p,2q+1} = \int \sin^p x (1-\sin^2(x))^q \cos x \,\mathrm{d}x$. Il suffit maintenant de développer $(1-\sin^2(x))^q$ pour se ramener à une combinaison linéaire de termes qui relèvent tous du cas précédent. De même pour le calcul de $I_{2p+1,q}$.

Cas général

Le cas qui échappe aux considérations précédentes est celui où p et q sont simultanément pairs (la proportion de cas particuliers est donc de $\frac{3}{4}$!!). Dans ce cas on doit repenser à la linéarisation. La technique la plus agréable passe alors par l'emploi des formules d'Euler.
On peut aussi, et c'est souvent avantageux, obtenir des relations de récurrence entre les $I_{2p,2q}$ à l'aide d'une intégration par partie.

Nous voulons calculer $\int F(\cos(x), \sin(x))\,\mathrm{d}x$, où F une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$. On pose $f(x) = F(\cos(x), \sin(x))$ et $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

M

Règles de Bioche

- Si $\omega(x+\pi) = \omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \tan x$.
- Si $\omega(\pi - x) = -\omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(-x) = -\omega(x)$; on peut faire le changement de variable $u = \cos x$.
- Si deux des trois tests ci-dessus s'avèrent positifs (dans ce cas les trois relations sont vraies) ; on peut faire le changement de variable $u = \cos 2x$.
- Si les trois tests s'avèrent négatifs, on n'aura plus d'autre choix que de faire le changement de variable $u = \tan \frac{x}{2}$, universel mais généralement très long. On a alors
$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

E 56 Calculer $I(x) = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$.

On pose $u = \sqrt{x+1}$ ou encore $x = u^2 - 1$. Par conséquent $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Ce changement de variable donne

$$I(x) = \int \frac{(u^2-1)^2}{u} 2u\,\mathrm{d}u = \int (u^2-1)^2\,\mathrm{d}u$$

et le calcul s'achève sans difficultés en développant le polynôme à intégrer.

Remarquons, si l'on veut énoncer quelques principes généraux, que si la fonction à intégrer contient un seul radical de la forme $\sqrt[n]{at+b}$, celui-ci disparaîtra naturellement en effectuant le changement de variable $u = \sqrt[n]{at+b}$. Des problèmes plus ardus peuvent se poser si la fonction contient plusieurs radicaux différents de ce type. Dans ce cas, il faut trouver un changement de variable astucieux les faisant disparaître simultanément.

1. Construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment

2. Propriétés élémentaires des intégrales

3. Deux normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

4. Sommes de Riemann

5. Intégration des fonctions continues

6. Intégration par parties

7. La formule du changement de variable

8. Intégrales généralisées

9. Rappel des primitives usuelles

Nous rappelons que la «canonisation» du trinôme permet toujours de se ramener à l'un des trinômes suivants : u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2 (la forme $-u^2-a^2$ a été oubliée car elle ne peut survivre sous le radical). Il reste à trouver dans chaque cas, un bon changement de variable qui les transforme en carré parfait, afin d'éliminer le radical.

- Le cas $\sqrt{a^2-u^2}$. Il est évident que u doit se trouver entre $-a$ et a. Le bon changement de variable consiste à poser $u = a\sin\varphi$ (ou $u = a\cos\varphi$) ou plutôt, pour définir correctement φ, $\varphi = \arcsin\frac{u}{a}$ (ou $\varphi = \arccos\frac{u}{a}$). Ceci évite de plus les problèmes de signe des fonctions trigonométriques.
- Le cas $\sqrt{a^2+u^2}$. Cette expression existe pour tout u réel. Il existe dans ce cas deux changements de variable permettant de transformer l'expression :
  - on peut poser $u = a\tan\theta$ (ou plutôt $\theta = \arctan\frac{u}{a}$, pour définir correctement θ), car on a alors $a^2+u^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$ et $\cos\theta > 0$.
  - on peut poser $u = a\,\mathrm{sh}\,\theta$, car on a alors $a^2+u^2 = a^2(1+\mathrm{sh}^2\,\theta) = a^2\,\mathrm{ch}^2\,\theta$ et $\mathrm{ch}\,\theta > 0$.
- Le cas $\sqrt{u^2-a^2}$. Cette quantité existe si $u \geq a$ ou $u \leq -a$. Il faut savoir que dans ce cas, on pose $u = a\,\mathrm{ch}\,\theta$ si $u \geq a$ ou $u = -a\,\mathrm{ch}\,\theta$ si $u \leq -a$, en choisissant $\theta \geq 0$ (de façon à pouvoir utiliser la fonction argch). On condense alors ces deux cas en écrivant $u = a\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\theta$, avec $\varepsilon \in \{-1,+1\}$ suivant la position de u. On en déduit $\mathrm{d}u = a\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\theta$ et $u^2-a^2 = a^2(\mathrm{ch}^2\,\theta - 1) = a^2\,\mathrm{sh}^2\,\theta$ et comme θ a été choisi positif ou nul, on obtient $\sqrt{u^2-a^2} = a\,\mathrm{sh}\,\theta$.

T 57 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* k*-lipschitzienne. On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. *Soit*

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Alors,

$$\left| R_n - \int_{[a,b]} f \right| \leq k\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut poser $k = \sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

T 58 *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I = [a, b]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit*

$$I_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right).$$

Alors,

$$\left| I_n - \int_I f \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad \text{avec} \quad M_2 = \sup_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

- Méthode de Simpson.
- Méthodes de Gauß à deux et trois points.

1. Construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment

2. Propriétés élémentaires des intégrales

3. Deux normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

4. Sommes de Riemann

5. Intégration des fonctions continues

6. Intégration par parties

7. La formule du changement de variable

8. Intégrales généralisées

9. Rappel des primitives usuelles

T 59 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I. On suppose que g garde un signe constant sur chacun des intervalles $I \cap]-\infty, x_0[$ et $I \cap]x_0, +\infty[$.*

1. *Si, au voisinage de $x = a$, $f(x) = o(g(x))$, alors au voisinage de $x = a$, on a*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

2. *Si, au voisinage de $x = a$, $f(x) \sim g(x)$, alors au voisinage de $x = a$, on a*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse que g garde un signe constant est indispensable.