Chapter 46 Déterminant d'une matrice carrée

46.1 Déterminant d'une matrice carrée

Solution 46.1 *Oral ENS MP*
Solution 46.2

1. On peut par exemple développer le déterminant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 5(2-7) - 2(-6+1) - 4(-21+1) = 65.$$

2. Ici, le developpement selon la troisième colonne semble tout indiqué.

$$\begin{vmatrix} 1 & 23 & 6 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\,(2(4-3) - 1(5-1)) = -12.$$

Solution 46.3
En développant par exemple selon la troisième colonne:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & w \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = w(-10) + 1(-5) + 7(5) = -10w + 30.$$

Finalement, $\det B = 0$ si, et seulement si $w = 3$.
Solution 46.4 *Matrices à petits coefficients*
Solution 46.5

1. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5.(-1).2 = -10.$

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$ car $C_1 = 10C_2 + C_3$.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 30 & 12 \end{vmatrix} = 12.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

6. $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&2\\2&3&1\end{vmatrix} \underset{\text{transposée}}{=} \begin{vmatrix}1&3&2\\1&3&3\\1&2&1\end{vmatrix} = 1.$

Solution 46.6

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}5&2&-4&-2\\-3&1&5&1\\-4&3&1&3\\2&1&-1&1\end{vmatrix} &\underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{=} \begin{vmatrix}5&2&-4&-2\\1&-2&4&-2\\-4&3&1&3\\2&1&-1&1\end{vmatrix}\\
&\underset{L_2\leftrightarrow L_1}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&4&-2\\5&2&-4&-2\\-4&3&1&3\\2&1&-1&1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&-2&4&-2\\0&12&-24&8\\0&-5&17&-5\\0&5&-9&5\end{vmatrix}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+L_4}{=} -4\begin{vmatrix}1&-2&4&-2\\0&3&-6&2\\0&0&8&0\\0&5&-9&5\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}3&-6&2\\0&8&0\\5&-9&5\end{vmatrix}\\
&= -32\begin{vmatrix}3&2\\5&5\end{vmatrix} = -160\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix} = -160(1) = -160.
\end{aligned}$$

Et en utilisant des opérations sur les colonnes,

$$\begin{vmatrix}5&2&-4&-2\\-3&1&5&1\\-4&3&1&3\\2&1&-1&1\end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2-C_4}{=} \begin{vmatrix}5&4&-4&-2\\-3&0&5&1\\-4&0&1&3\\2&0&-1&1\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}-3&5&1\\-4&1&3\\2&-1&1\end{vmatrix} = -4(40) = -160,$$

Solution 46.7 *Dérivation d'un déterminant*

Solution 46.8

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}x&a&b&c\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\c&b&a&x\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}x&a&b&c\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\x+a+b+c&x+a+b+c&x+a+b+c&x+a+b+c\end{vmatrix} \quad L_4\leftarrow L_4+L_1+L_2+L_3\\
&= (x+a+b+c)\begin{vmatrix}x&a&b&c\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\1&1&1&1\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On peut continuer de manière un peu brutale mais efficace: faire disparaitre les «1» de la dernière ligne.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} &= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} x & a-x & b-x & c-x \\ a & x-a & c-a & b-a \\ b & c-b & x-b & a-b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{matrix} \\
&= -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix} \\
&= -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & b-x+c-a & c-x+b-a \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix} \\
&= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ x-a & c-a & b-c \\ c-b & x-b & a-x \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ c-b & a-x \end{vmatrix} \\
&= -(x+a+b+c)(x+a-b-c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ x-a-b+c & -x+a+b-c \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= -(x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} x-a & b-c \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a-b+c)(x-a+b-c).
\end{aligned}
$$

Une version un peu plus subtile et rapide est d'utiliser le 1 comme pivot sur les lignes avec les opérations (totalement licites) $L_1 \leftarrow L_1 - xL_4$, $L_2 \leftarrow L_1 - aL_4$,...

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a-x & b-x & c-x \\ 0 & x-a & c-a & b-a \\ 0 & c-b & x-b & a-b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - xL_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_4 \end{matrix}$$

$$= -(x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ 0 & c-a+b-x & b-a+c-x \\ c-b+a-x & 0 & a-b+c-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$= -(x+a+b+c)(c+b-a-x)(c-b+a-x)\begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+a+b+c)(c+b-a-x)(c-b+a-x)\left((a-x)+(b-x)-(c-x)\right)$$

$$= (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c).$$

Solution 46.10

Solution 46.11

1. $D = (c-b)(c-a)(b-a)$.
   ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1,\ldots$)
2. $D = -(a+b+c)^3$.
   ($L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3, L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3,\ldots$)
3. $D = (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c)$.
   ($C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4\ldots$)

Solution 46.12

1. Avec $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$

$$D = \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

   Puis les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$D = -2\begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

   On reconnait un déteminant de Vandermonde : $D = 2abc(b-a)(c-b)(c-a)$.

2.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a^2 & a^2 & b^2-a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2-c^2 & c^2 & -c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -a^2 & b^2-a^2 \\ 1 & a^2 & c^2 \\ 1 & b^2-c^2 & -c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -2a^2 & b^2-a^2-c^2 \\ 1 & a^2 & c^2 \\ 0 & b^2-c^2-a^2 & -2c^2 \end{vmatrix} \\
&= -4a^2c^2 - (b^2-a^2-c^2)^2 \\
&= -(2ac - b^2 + a^2 + c^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2) \\
&= ((a+c)^2 - b^2)((a-c)^2 - b^2) \\
&= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

3. Facile, $D = 2abc(a+b+c)^3$.

Solution 46.13 *Déterminant et suites récurrentes linéaire*
Solution 46.14

Notons D_n le déterminant de la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ définie comme dans l'énoncé. Soit $n \geq 3$; en développant D_n suivant la première ligne, on obtient

$$D_n = (2\cos\varphi)D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

puis, en développant le déterminant d'ordre $n-1$ suivant la première colonne:

$$D_n = 2\cos\varphi D_{n-1} - D_{n-2}.$$

On a $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, donc

$$D_1 = 2\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

D'autre part:

$$\sin 3\varphi = \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi = \sin\varphi(4\cos^2\varphi - 1),$$

donc

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 \\ 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = 4\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}.$$

On finit alors avec une récurrence sur k (à faire!) et quelques formules de trigonométrie pour montrer que

$$\forall k \geq 1, D_k = \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

ue

On peut également remarquer que la relation $D_n = 2\cos\varphi D_{n-1} - D_{n-2}$ est une récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2\cos\varphi + 1 = 0$, dont les racines sont $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, D_n = A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi).$$

Et il ne reste plus qu'à déterminer A et B à partir de D_1 et D_2. Il peut être astucieux d'introduire un $D_0 = 2\cos\varphi D_1 - D_2$ (articificiellement) pour simplifie les calculs.

Solution 46.15

- Relation $D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$.
- $D_n = (n+1)a^n$.

Solution 46.16 *Oral CCINP PC 2023*

- Relation $\Delta_n = 3\Delta n - 1 - 2\Delta_{n-2}$.

Solution 46.17 *Oral IMT MP 2023*

- Relation $\Delta_n(x) = \dots$

Solution 46.18 *Déterminant de Vandermonde*

1. On a $V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ et

$$\begin{aligned}
V_3(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).
\end{aligned}$$

2. En développant le déterminant selon la premièreligne, on obtient

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = -x^3 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{vmatrix} + x^2 C_{13} + xC_{12} + C_{11}$$

où les cofacteurs C_{**} sont indépendant de x.

De plus, le coefficient de degré 3 est $V_3(a_2, a_3, a_4) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0$. La fonction f est donc une fonction polynômiale de degré 3 et son coefficient dominant est $-V_3(a_2, a_3, a_4)$.

De plus, si $x \in \{ a_2, a_3, a_4 \}$, alors deux lignes du determinants $V_4(x, a_2, a_3, a_4)$ sont égales et donc $f(x) = 0$.

Puisque f est une fonction polynômiale de degré 3 avec trois racines distinctes a_2, a_3, a_4, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -V_3(a_2, a_3, a_4)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

Cette dernière formule reste vraie pour $x \in \{ a_2, a_3, a_4 \}$ ($f(x) = 0$).
En substituant a_1 à x, on obtient

$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

3. On effectue le même raisonement avec $f(x) = V_n(x, a_2, \dots, a_n)$. On trouve

$$f(x) = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)(a_2 - x)(a_3 - x) \dots (a_n - x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Déterminants

46.2 Applications bilinéaires

46.3 Applications multilinéaires

Solution 46.19

46.4 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

Solution 46.20

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(u+v, v+w, w+u) &= \det_{\mathcal{B}}(u, v+w, w+u) + \det_{\mathcal{B}}(v, v+w, w+u)\\
&= \det_{\mathcal{B}}(u, v, w+u) + \det_{\mathcal{B}}(u, w, w+u) + \cancel{\det_{\mathcal{B}}(v, v, w+u)} + \det_{\mathcal{B}}(v, w, w+u)\\
&= \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) + \cancel{\det_{\mathcal{B}}(u, v, u)} + \cancel{\det_{\mathcal{B}}(u, w, w)}\\
&\quad + \cancel{\det_{\mathcal{B}}(u, w, u)} + \cancel{\det_{\mathcal{B}}(v, w, w)} + \det_{\mathcal{B}}(v, w, u)
\end{aligned}$$

Et puisque $\det_{\mathcal{B}}(v, w, u) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ (deux permutations), on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u+v, v+w, w+u) = 2\det_{\mathcal{B}}(u, v, w).$$

Solution 46.21 *Application du déterminant de Vandermonde*
Solution 46.22
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La famille (a, b, c) contient $3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Ainsi (a, b, c) est libre si, et seulement si (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$, si, et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(a, b, c) \neq 0$.

Or

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(a, b, c) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix}\\
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha-8 \end{vmatrix} = 3(\alpha-8)+6 = 3(\alpha-6).
\end{aligned}$$

Ainsi (a, b, c) est libre si, et seulement si $\alpha \neq 6$.
Solution 46.23
La famille $\boldsymbol{e'} = \left(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1\right)$ est une base de E, si, et seulement si $\det_{\boldsymbol{e}}(e') \neq 0$. Or

$$\det_{\boldsymbol{e}}(e') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda^2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1.$$

Conclusion

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la famille e' est une base de E si, et seulement si $\lambda \neq -1$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors la famille e' est une base de E si, et seulement si $\lambda \notin \{ -1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3} \}$ (ce sont les racine cubiques de -1).

46.5 Déterminant d'un endomorphisme

Solution 46.24

Le plus simple est d'utiliser $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et d'utiliser

$$\det(u) = \det\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(u(1), u(X), u(X^2)\right).$$

1. On note $u : P(X) \mapsto P(X+1)$. Alors

$$u(1) = 1, \qquad u(X) = X + 1, \qquad u(X^2) = X^2 + 2X + 1.$$

D'où

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. On note $u : P \mapsto (X+1)P' + P$.

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

3. On note $u : P \mapsto P(2) + P(1)X + P(0)X^2$.

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

4. On note $u : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2(X+3)P$.

$$\det(u) = \begin{vmatrix} -6 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -192. \tag{1}$$

Solution 46.25

Solution 46.26 *Oral CCP MP 2015*

46.6 Applications aux déterminants de matrices

Solution 46.27

Puisque A est une matrice $(3,3)$ et $\det A = 7$, on a

$$\det(2A) = 2^3 \det A = 56, \qquad \det(A^2) = \det(A)\det(A) = 49,$$

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \frac{2^3}{\det A} = \frac{8}{7}, \qquad \det((2A)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{56}.$$

Solution 46.28 *Factorisation d'un déterminant circulant*
Solution 46.29
Calculons le déterminant de la matrice A,

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-4-\lambda)+30 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2).\end{aligned}$$

Ainsi, A n'est pas inversible si, et seulement si $\det A = 0$, si, et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.
Solution 46.31 *Une famille de matrices inversibles*
Solution 46.32

1. La matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Or

$$\det(A-\lambda I_3) = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} 5-4\lambda & 3 & -6 \\ -9 & -7-4\lambda & 6 \\ -9 & -3 & 2-4\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_2\\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{=} \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -4-4\lambda & -4-4\lambda & 0 \\ -9 & -7-4\lambda & 6 \\ 0 & 4+4\lambda & -4-4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{64}(4+4\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -9 & -7-4\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2\leftarrow C_2+C_3}{=} \frac{1}{4}(1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -9 & -1-4\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(1+\lambda)^2(8-4\lambda) = (\lambda+1)^2(2-\lambda).$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si $\lambda \in \{\,-1, 2\,\}$.

2. On a

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \ker(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff (x, y, z)^T \in \ker(A + I_3).$$

Or

$$A + I_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & 6 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\ker(A+I_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \ker(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left\{\, e_1', e_2' \,\right\}$$

où $e_1' = -\frac{1}{3}e_1 + e_2 = (-1/3, 1, 0)^T$ et $e_2' = \frac{3}{2}e_1 + e_3 = (3/2, 0, 1)^T$.
De manière analogue, on a

$$A - 2I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -9 & -15 & 6 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \ker(u - 2I_3) = \text{Vect}\left\{-e_1 + e_2 + e_3\right\}.$$

3. On pose

$$e'_1 = -e_1 + 3e_2 \qquad e'_2 = 3e_1 + e_3 \qquad e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

La matrice de la famille $\boldsymbol{e'} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ relativement à la base $\boldsymbol{e}$ est $P = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\3 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On a

$$\det(P) = \begin{vmatrix}-1 & 3 & -1\\3 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} \underset{L_3}{=} -\begin{vmatrix}-1 & -1\\3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-1 & 3\\3 & 0\end{vmatrix} = -11.$$

Ainsi $\det(P) \neq 0$, donc la famille $\boldsymbol{e'} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. D'après la question précédente, on a

$$u\left(e'_1\right) = -e'_1 \qquad u\left(e'_2\right) = -e'_2 \qquad u\left(e'_3\right) = 2e'_3,$$

et donc la matrice de u relativement à la base $\boldsymbol{e'}$ est

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

De plus, on a la relation $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.

Solution 46.33
Solution 46.34

46.7 Comatrice

Solution 46.35 *Matrices à coefficients entiers et inversibilité*
Solution 46.36

Compléments

46.8 Formules de Cramer

Solution 46.37
Solution 46.38