Chapter 8 Calculs algébriques

8.1 Le symbole somme $\sum$

Exercice 8.1 (*)
Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$
$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Exercice 8.2 (***)
Démontrer par récurrence l'assertion suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ \sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 8.5 (*)
Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$
8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Exercice 8.6 (**)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer par récurrence (avec prédécesseurs) que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 8.7 (***)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 8.9 (**)

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 8.10 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(1-k)$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} 2\left(k - \frac{1}{2}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$,
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

Exercice 8.11 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 8.12 (**)

Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 8.13 (**)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ à l'aide d'un télescopage.

Exercice 8.15 (**)

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Exercice 8.16 (**)

Soit $n \geq 1$. On considère les deux sommes

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots \frac{1}{n\times(n+1)}.$$

1. (a) Calculer S_1, S_2 et S_3.
   (b) Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $S_n = 2n^4 - n^2$.

2. (a) Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{p(p+1)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+1}.$$

   (b) En déduire une expression simple de $\tilde{S}_n$.
   (c) Retrouver ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

Exercice 8.17 (***)

1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Exercice 8.18 (***)

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Déterminer la valeur de

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 8.21 (***)

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

3. En déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8.23 (****)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} + u_k = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(x)\right)\tan^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2k+1}.$$

2. En faisant apparaitre un télescopage, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

(b) En déduire l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4n+2}.$$

4. En déduire finalement la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

ce que l'on note aussi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

8.2 Sommes usuelles

Exercice 8.24 (*)
Calculer

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k.$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} k.$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} i.$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} n.$

Exercice 8.25 (**)
Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k - \sum\limits_{l=0}^{n} l;$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1);$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1);$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$

Exercice 8.26 (**)

1. Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 8.29 (*)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

2. $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$.

Exercice 8.33 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}$.

2. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx).$$
On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh.

Exercice 8.35 (***)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+kb).$$

2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = 0. \tag{1}$$

Exercice 8.37 (***)
Définissons une suite par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, u_n est positif. En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $u_n \geq n-2$. En déduire la limite de la suite.

2. Définissons maintenant la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Remarquer que u_n est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de l'entier n.

Exercice 8.39 (*)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.

2. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

Exercice 8.40 (****) *Écriture en base b*
Soit $b \geq 2$ un entier. On souhaite démontrer que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique
$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k$$
avec $p \geq 0$, $a_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $a_p \geq 1$.

1. Existence: démontrer l'existence en procédant par récurrence forte. Pour l'hérédité, on pourra utiliser la division euclidienne de n par b.

2. Unicité: on suppose que n admet deux décompositions distinctes

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k = \sum_{k=0}^{p'} a'_k b^k.$$

On peut supposer $p \geq p'$. Quitte à compléter la suite a'_k par $a'_{p+1} = \cdots = a'_p = 0$, on peut supposer que $p = p'$.

Soit $\ell \in [\![0, p]\!]$ le plus grand possible tel que $a_\ell \neq a'_\ell$.

(a) Vérifier que $\left(a_\ell - a'_\ell\right) b^\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(a'_k - a_k\right) b^k$.

(b) Démontrer que, pour toute suite finie $c_0, \dots, c_{\ell-1}$ avec $0 \leq c_k \leq b - 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k b^k < b^\ell.$$

(c) Conclure.

3. Donner l'écriture de 37 écrit en base 10) en base 2, puis en base 3.

Exercice 8.41 (**)

Calculer

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2}.$$

Exercice 8.43 (**)

1. Pour $p, k \in \mathbb{N}$, exprimer $\binom{p+k}{p}$ en fonction de $\binom{p+k+1}{p+1}$ et $\binom{p+k}{p+1}$.

2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}.$$

Exercice 8.45 (*)

Développer.

1. $(a + b)^7$.

2. $(1 - 3x)^5$.

Exercice 8.46 (**)

Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Exercice 8.47 (*)

Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x - 2)^8$.

2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2 - y^2)^{14}$.

3. Le terme en x^6 du développement de $(3 - 4x^2)^5$.

4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{14}$.

Exercice 8.50 (*)

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Exercice 8.51 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Exercice 8.52 (***)

Soit n un entier naturel

1. Montrer qu'il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = p_n + q_n\sqrt{2}.$$

2. Exprimer $(1 - \sqrt{2})^n$ à l'aide de p_n, q_n et $\sqrt{2}$.

3. En déduire une relation entre p_n et q_n.

4. Calculer $\left\lfloor \left(1 + \sqrt{2}\right)^n \right\rfloor$ en fonction de p_n.

Exercice 8.53 (***)

Pour $0 \leq k \leq p \leq n$, démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 8.54 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x)^n$.

2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8.55 (****) *Une formule d'inversion*

On considère deux suites de nombres (f_n) et (g_n) liées par la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k. \tag{1}$$

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer le terme général de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si on prend successivement pour terme général de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les quantités

(a) $g_n = 1$;

(b) $g_n = 2^n$;

(c) $g_n = (-1)^n$;

(d) $g_n = e^{na}$ où a est un réel fixé.

2. Démontrer par récurrence la relation réciproque suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f_k. \tag{2}$$

8.3 Généralisation de la notation $\sum$

Exercice 8.58 (**)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j}.$

2. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2.$

Exercice 8.59 (***)
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.

2. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \qquad (1)$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \qquad (2)$$

Exercice 8.60 (**)
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^{i+j}.$$

Exercice 8.62 (****)
On se donne $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k} \right) \ge 0.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 8.63 (*)
Compléter les interversions suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet} \sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}.$

Exercice 8.64 (***)
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} ij.$$

Exercice 8.65 (***)
Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$.

2. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)$.

4. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j}$.

Exercice 8.67 (***)
Calculer

$$S = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}.$$

Exercice 8.68 (***)
Calculer

$$\sum_{0\leq p\leq q\leq n} \binom{n}{p} 2^q.$$

Exercice 8.69 (****)
Pour $n \geq 1$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

le n-ième nombre harmonique.

1. Calculer

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i+1} \right).$$

2. Pour $k \geq 1$, exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i+1}$ comme la différence de deux termes de la suite $\left(H_n\right)_{n\geq 1}$.

3. En écrivant S comme une somme double, en déduire

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2} \left(H_{n+1} - \frac{1}{2} \right).$$

Exercice 8.70 (****)
Calculer

$$S = \sum_{1\leq i\leq k\leq n} \frac{i2^k}{k(k+1)}.$$

Exercice 8.72 (***)
Pour tout entier n, on note

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2 \sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk.$$

2. Montrer ensuite

$$2 \sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} j \right)^2.$$

3. À l'aide des questions précédentes, retrouver l'expression de Q_n vue en cours.

Exercice 8.73 (***)

On considère (a_k), (b_k), (c_k), (d_k) des familles de nombres réels.

1. Donner une expression développée (relativement simple) de

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j\right)\left(c_j d_k - c_k d_j\right).$$

2. En déduire l'identité de Lagrange:

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

3. Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Exercice 8.74 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i + j$.

2. Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j).$$

On pourra scinder cette somme en deux.

3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$.

ue

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i,j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

8.4 Le symbole produit $\prod$

Exercice 8.76 (*)

Calculer

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} k$.

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} i$.

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n$.

Exercice 8.77 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;

2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;

3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Exercice 8.78 (*)
Calculer les nombres suivants:

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} 1, \qquad \sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} k,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} h, \qquad \sum_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} h,$$

$$\prod_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{k} k, \qquad \prod_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} h, \qquad \prod_{k=1}^{3} \prod_{h=1}^{k} k.$$

Exercice 8.79 (**)
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $p_n \sin \frac{a}{2^n}$.

2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} p_n$.