Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικών
Επεξεργασια Φωνής
2ο συνολο αναλυτικών ασκήσεων
Κώνστα Αλυξια-Μαρια
03114147

Άσκηση 1:

All-pole με συναρτηση μεταφοράς $V(z) = \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{q}(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z^{-1})}$

Ν.δ.ο το cepstrum είναι: $\hat{v}(n) = 2\sum_{k=1}^{q} \dfrac{(r_k)^n}{n} \cos(\theta_k n)$
με $c_k = r_k e^{j\theta_k}$

Λύση:

Αρχικά παιρνουμε τον λογάριθμο:

$$\hat{V}(z) = \cancel{\log 1}^{\,0} - \sum_{k=1}^{q} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{q} \log(1-c_k^* z^{-1}) \Rightarrow$$

$$\hat{V}(z) = -\sum_{k=1}^{q} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{q} \log(1-c_k^* z^{-1})$$

• $\log(1-az^{-1}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n} z^{-n}$ (εφοσον τα παραπάνω παριστουν z-μετασχηματισματα με περιοχή συγκλισης που περιεχει τον μοναδιαίο κυκλο.

Με αντιστροφο z-μετασχηματισμό:

$$\hat{v}[n] = \sum_{k=1}^{q} \frac{c_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{q} \frac{c_k^{*n}}{n} = \sum_{k=1}^{q} \frac{(r_k)^n}{n} \exp(j\theta_k n) + \sum_{k=1}^{q} \frac{(r_k)^n}{n} \exp(-j\theta_k n)$$

$$\Rightarrow \hat{v}[n] = \sum_{k=1}^{q} \frac{(r_k)^n}{n} \left(\exp(j\theta_k n) + \exp(-j\theta_k n)\right)$$

$$\Rightarrow \hat{v}[n] = 2\sum_{k=1}^{q} \frac{(r_k)^n}{n} \cos(\theta_k n)$$

Άσκηση 3:

1. Ν.δ.ο η ενεργεια λαθους πρόβλεψης:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1+p} \left(\sum_{k=0}^{p} a_{xk} x(n-k) \right)^2 = a_x R_x a_x^T$$

Γνωρίζω ότι: $E_x = \sum_{m=0}^{N+p-1} e_n^2(m)$

$e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_{xk} x(n-k) = \sum_{k=0}^{p} a_{xk} x(n-k)$ $\Rightarrow$

$$E_x = \sum_{n=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=0}^{p} a_{xk} x(n-k) \right)^2$$

Έχουμε: $\sum_{k=0}^{p} a_{xk} x(n-k) = a_{x0} x(n) + a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{xp} x(n-p)$

$\left(\sum_{k=0}^{p} a_{xk} x(n-k) \right)^2 = \left(a_{x0} x(n) + a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{xp} x(n-p) \right)^2$

$= \left(a_{x0} x(n) + a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{xp} x(n-p) \right) \left(a_{x0} x(n) + a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{xp} x(n-p) \right)$

$= a_{x0} x(n) a_{x0} x(n) + a_{x0} x(n) a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{x0} x(n) a_{xp} x(n-p)$
$+ a_{x1} x(n-1) a_{x0} x(n) + a_{x1} x(n-1) a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{x1} x(n-1) a_{xp} x(n-p)$
$+ \dots + a_{xp} x(n-p) a_{x0} x(n) + a_{xp} x(n-p) a_{x1} x(n-1) + \dots + a_{xp} x(n-p) a_{xp} x(n-p)$

$= a_{x0} [x(n)x(n) + x(n)x(n-1) + \dots + x(n)x(n-p)] a_x^T$
$+ a_{x1} [x(n-1)x(n) + x(n-1)x(n-1) + \dots + x(n-1)x(n-p)] a_x^T$
$+ \dots + a_{xp} [x(n-p)x(n) + x(n-p)x(n-1) + \dots + x(n-p)x(n-p)] a_x^T$

$$= a_x \sum_{n=0}^{N+p-1} \begin{bmatrix} x(n)x(n) & x(n)x(n-1) & \dots & x(n)x(n-p) \\ x(n-1)x(n) & x(n-1)x(n-1) & \dots & x(n-1)x(n-p) \\ x(n-p)x(n) & x(n-p)x(n-1) & \dots & x(n-p)x(n-p) \end{bmatrix} a_x^T$$

$= a_x R_x a_x^T$, όπου R_x $(p+1)\times(p+1)$ πίνακας

αφού είναι πίνακας που αποτελεί άθροισμα $(N+p-1)$ πινάκων με διαστάσεις $(p+1)\times(p+1)$

2. Ν.Δ.Ο. η ενέργεια λάθους πρόβλεψης του σήματος $x(n)$ με τους βέλτιστους συντελεστές του σήματος $y(n)$ είναι:

$$E_{xy} = \sum_{n=0}^{N-1+p} \left(\sum_{k=0}^{p} a_{yk} x(n-k) \right)^2 = a_y R_x a_y^T$$

Γνωρίζω ότι: $E_x = \sum_{m=0}^{N+p-1} e_n^2(m)$

$$e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_{yk} x(n-k) = \sum_{k=0}^{p} a_{yk} x(n-k)$$

Χρησιμοποιώ για την πρόβλεψη τους συντελεστές a_y αυτή τη φορά. και οπότε με το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει:

$$E_{xy} = \sum_{n=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=0}^{p} a_{yk} x(n-k) \right)^2$$

ανοίγοντας την παραπάνω σχέση, όπως προηγουμένως προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$E_{xy} = a_y R_x a_y^T$$

3. Να βρείτε το πεδίο τιμών του λόγου E_{xy}/E_x

Ασκηση 2 :

1. Οριστε τα a_n, b_n

Απο το σχημα που μας δινεται έχουμε:

$a_n(\omega_k) = x(n)\cos(\omega_k n) * h(n)$

$b_n(\omega_k) = x(n)\sin(\omega_k n) * h(n)$

2. Υποθετουμε ότι το h_n είναι narrowband lowpass filter οποτε έχει μικρή ζωνη διέλευσης.

Συμβολίζω τον DTFT $a_n(\omega_k)$ με A: και του $b_n(\omega_k)$ με B

$$\cos\omega_0 n \rightleftharpoons \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\}$$

$$\sin\omega_0 n \rightleftharpoons \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) - \delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\}$$

$$a_n(\omega_k) = \cos(\omega_0 n)\cos(\omega_k n) * h(n) = \left(\frac{1}{2}\cos[(\omega_0-\omega_k)n] + \frac{1}{2}\cos((\omega_0+\omega_k)n)\right) * h(n)$$

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot H(e^{j\omega}) \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega-\omega_0+\omega_k-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0-\omega_k-2\pi k)\} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega-\omega_0-\omega_k-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0+\omega_k-2\pi k)\} \Big]$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(e^{j(\omega_0-\omega_k+2\pi k)})\delta(\omega-\omega_0+\omega_k-2\pi k) + H(e^{j(\omega_k-\omega_0+2\pi k)})\delta(\omega+\omega_0-\omega_k-2\pi k) + H(e^{j(\omega_0+\omega_k+2\pi k)})\delta(\omega-\omega_0-\omega_k-2\pi k) + H(e^{j(-\omega_0-\omega_k+2\pi k)})\delta(\omega+\omega_0+\omega_k-2\pi k) \Big]$$

Απο την παρατήρηση που έγινε στην αρχή το $H(e^{j\omega}) \simeq 1$ μονο στο $\omega_0-\omega_k$, αφου το φίλτρο είναι narrowband και 0 αλλου μπορώ να θεωρησω ότι αποκοπτονται οι συχνοτητες $\omega_0+\omega_k+2\pi k$ και $-\omega_0-\omega_k+2\pi k$.

$$A = \frac{\pi}{2}\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0+\omega_k-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_0-\omega_k-2\pi k) \Big]$$

$A \rightleftharpoons a = \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)n)$, ομοιως για το B ακολουθώ την

ιδια διαδικασία $b = \frac{1}{2}\sin((\omega_k-\omega_0)n)$

3. Συνδυάζοντας τα a, b να βρω το πλάτος και την παράγωγο φάσης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε πως:

$X_n(e^{jw}) = a_n(w_k) - j\,b_n(w_k)$

$X_n(e^{jw}) = \frac{1}{2}\cos((w_n - w_0)n) - j\,\frac{1}{2}\sin((w_n - w_0)n)$

$$X_n(e^{jw}) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\cos((w_n-w_0)n)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sin((w_n-w_0)n)\right)^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin((w_n-w_0)n)}{+\frac{1}{2}\cos((w_n-w_0)n)}\right)$$

$$X_n(e^{jw}) = \frac{1}{2}\sqrt{\cancelto{1}{\cos((w_n-w_0)n)^2 + \sin((w_n-w_0)n)^2}}\ \angle \tan^{-1}(\tan(-(w_n-w_0)n))$$

$M_n(w_k) = \frac{1}{2}$ και $\varphi_n(w_k) = -(w_n+w_0)n \Rightarrow \varphi'_n(w_k) = -w_n + w_0$

4. Δείξτε ότι το σήμα εξόδου είναι κατ' ουσίαν ίδιο με το σήμα εισόδου.

$y_k(n) = a_n(w_k)\cos(w_k n) + b_n(w_k)\sin(w_k n)$

$y_k(n) = \frac{1}{2}\cos((w_n-w_0)n)\cos(w_k n) + \frac{1}{2}\sin((w_n-w_0)n)\sin(w_k n)$

- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$y_k(n) = \frac{1}{2}\Big[\cos(w_k n)\cos(w_0 n)\cos(w_k n) + \sin(w_k n)\cancel{\sin(w_0 n)\cos(w_k n)} + \sin(w_k n)\cos(w_0 n)\sin(w_k n) - \cancel{\cos(w_k n)}\sin(w_0 n)\sin(w_k n)\Big]$$

$= \frac{1}{2}\cos(w_0 n)$, το οποίο είναι κατ' ουσίαν ίδιο με το αρχικό σήμα.

5. $$\varphi'_n(w_k) = \frac{b_n(w_k)a'_n(w_k) - a_n(w_k)b'_n(w_k)}{a_n(w_k)^2 + b_n(w_k)^2}$$

$$\varphi'_n(w_k) = \frac{-\cancel{\frac{1}{2}}\sin((w_k-w_0)n)\cancel{\frac{1}{2}}\sin((w_k-w_0)n)(w_k-w_0) - \cancel{\frac{1}{2}}\cos((w_k-w_0)n)\cancel{\frac{1}{2}}\sin((w_k-w_0)n)\times(w_n-w_0)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\cancelto{1}{\cos^2((w_n-w_0)n) + \sin^2((w_n-w_0)n)}\right)}$$

$$\varphi'_n(w_k) = -(w_k-w_0)\left[\cancelto{1}{\sin^2((w_k-w_0)n) + \cos^2((w_k-w_0)n)}\right]$$

6. Υποθέτουμε τώρα πως: $a'(\omega_k) \approx \frac{1}{T}\left(a_n(\omega_k) - a_{n-1}(\omega_k)\right)$

$$\varphi'_n(\omega_k) = \frac{b_n(\omega_k)\frac{1}{T}\left(a_n(\omega_k) - a_{(n-1)}(\omega_k)\right) - a_n(\omega_k)\frac{1}{T}\left(b_n(\omega_k) - b_{(n-1)}(\omega_k)\right)}{a_n^2(\omega_k) + b_n^2(\omega_k)}$$

- $a_n(\omega_k) = \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)n)$

- $a_{(n-1)}(\omega_k) = \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)(n-1)) = \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))$

- $a_n(\omega_k) - a_{(n-1)}(\omega_k) = \frac{1}{2}\left[\cos((\omega_k-\omega_0)n) - \cos((\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))\right]$

- $b_n(\omega_k)a_n(\omega_k) = \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)n]\,\frac{1}{2}\sin((\omega_k-\omega_0)n)$

$$= \frac{1}{8}\sin((\omega_k-\omega_0)2n)$$

- $b_n(\omega_k)\,a_{(n-1)}(\omega_k) = \frac{1}{2}\sin((\omega_k-\omega_0)n] \cdot \frac{1}{2}\cos((\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))$

$b_n(\omega_k)a_{n-1}(\omega_k) = \frac{1}{8}\sin(\omega_k-\omega_0) + \frac{1}{8}\sin(2(\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))$

- $b_{n-1}(\omega_k)\,a_n(\omega_k) = \frac{1}{2}\sin((\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))\cos((\omega_k-\omega_0)n)\cdot\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{8}\sin(-(\omega_k-\omega_0)) + \frac{1}{8}\sin(2(\omega_k-\omega_0)n - (\omega_k-\omega_0))$$

$$\varphi'_n(\omega_k) = \frac{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{8}\sin(\cancel{(\omega_k-\omega_0)2n}) - \frac{1}{8}\sin(\omega_k-\omega_0) - \frac{1}{8}\sin(\cancel{2(\omega_k-\omega_0)n-(\omega_k-\omega_0)}) - \frac{1}{8}\sin(\cancel{(\omega_k-\omega_0)2n}) - \frac{1}{8}\sin((\omega_k-\omega_0)) + \frac{1}{8}\sin(\cancel{2(\omega_k-\omega_0)n-(\omega_k}\ldots\right.}{1/4}$$

$$\varphi'_n(\omega_k) = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\cdot 2\sin(\omega_k-\omega_0) = -\sin(\omega_k-\omega_0)$$

Για μικρά $\omega_k-\omega_0$ ισχύει : $\sin(\omega_k-\omega_0) = \omega_k-\omega_0$

Άσκηση 4:

Για την εύρεση των ζητούμενων χρησιμοποιήσαμε κώδικα ο, οποίος επισυνάπτεται.
Για το χρόνο t_{10} είδαμε πως η μέγιστη πιθανότητα δίνεται για $q_{10} = 3$.

Για να βρούμε την πιο πιθανή ακολουθία, χρησιμοποιούμε backpointers, συγκεκριμένα τον παρακάτω πίνακα:

	q_1	q_2	q_3	q_4
t_1	0	0	0	0
t_2	3	4	4	4
t_3	2	2	2	2
t_4	3	4	3	4
t_5	1	2	2	2
t_6	2	2	2	2
t_7	2	2	2	2
t_8	3	4	3	4
t_9	3	4	1	1
t_{10}	2	2	2	2

Το πιο σύντομο μονοπάτι είναι: {4 2 4 2 2 2 4 2 3}

Η πιθανότητα $P^*(O, Q^*) = \delta_{t_{10}}(3) = 1.990656 \cdot 10^{-7}$
με $\delta_t(i) = \max_{q_1 \dots q_{t-1}} P(q_1 q_2 \dots q_{t-1} q_t = i, O_1, \dots, O_t \mid \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, 10$