ILL record updated to IN PROCESS
Record 52 of 101

to Ariel
10/21

ILL pe

Record 46 of 101

CAN YOU SUPPLY ? YES NO COND FUTUREDATE

:ILL: 190554 :Borrower: COO :ReqDate: 20031017 :NeedBefore: 20031116
:Status: IN PROCESS 20031017 :RecDate: :RenewalReq:
:OCLC: 1765868 :Source: OCLCILL :DueDate: :NewDueDate:
:Lender: *YUS,YUS
:CALLNO:
:AUTHOR: Sociâetâe scientifique de Bruxelles.
:TITLE: Annales de la Sociâetâe scientifique de Bruxelles.
:IMPRINT: Namur [etc.] Sociâetâe scientifique de Bruxelles [etc.] 1875/76-
:ARTICLE: Abbe Georges Henri Lemaitre: L'Universe in Expansion
:VOL: A53 :NO: :DATE: 1933 :PAGES: 51-85
:VERIFIED: <TN:225093>OCLC ISSN: 0037-959X [Format: Serial]
:PATRON: O-Pivarski, James, <TN:225093>
:SHIP TO: Interlibrary Services/ Cornell University Library/ Olin Library/ Central Ave/ Ithaca, NY 14853-5301
:BILL TO: Interlibrary Services/ Cornell University Library/ Olin Library/ Central Ave./ Ithaca, NY 14853-5301
:SHIP VIA: Ariel or mail :~~MAXCOST:~~ SHARES member
:COPYRT COMPLIANCE: CCL
:FAX: 607/255-9091 ARIEL: 128.253.70.20
:E-MAIL: olin-ils@cornell.edu
:LENDING CHARGES: :~~SHIPPED~~: :SHIP INSURANCE:
:LENDING RESTRICTIONS:
:LENDING NOTES:
:RETURN TO:
:RETURN VIA:

p51-85

A28

115

53A (1933)

ramener aux cas déjà prouvés, un procédé qui a atteint sa culmination dans les 18 façons de Thabit ben Korrah.

On a vu plus haut ce qu'il faut penser du classique reproche fait à Théon. Pour l'Almageste, nous venons d'arriver à une conclusion différente : Ptolémée n'a pas cherché de quelle partie du théorème il aurait besoin dans les pages qui lui restaient à écrire. Est-ce d'ailleurs dans ses habitudes de faire un triage si soigneux et si élégant de ses arguments? On sait, au contraire, que dans le calcul de *corde* 1°, il fait des détours, et calcule le côté de certains polygones, qui ne lui seront ensuite d'aucune utilité. Ce qu'il ne s'est pas donné la peine de faire, lorsqu'il avait à construire un raisonnement de seize pages, il l'aurait fait pour l'ensemble cent fois plus long de son œuvre ?

Il semble plutôt que la preuve n'était pas complète chez Ménélas, et qu'elle ne contenait ni l'addition des traductions arabes (solution du cas impossible), ni celle de Théon, nécessaire pour que le raisonnement puisse s'appliquer théoriquement à tous les problèmes de l'Almageste.

La preuve du « cas impossible » n'a pas dû se trouver dans les éditions de Ménélas que lisait Ptolémée, qui n'avait aucune raison de l'omettre et qui simplifiait sa besogne en copiant le raisonnement tel qu'il le trouvait dans sa source. Elle ne devait pas être connue de Théon, qui soulève la question et n'aurait pas manqué d'ajouter que lorsque le « 3e théorème circulaire » était ἀσύστατον, le « théorème sphérique », loin d'être inapplicable, était plus simple.

Aux arguments dont Björnbo tire que l'enchaînement des idées était bien chez Ménélas tel qu'il le prétend, on peut opposer tout ce qui vient d'être dit. Il lui reste encore à invoquer l'ordre des lettres des figures dans les versions arabes : il y a trente ans, l'on était persuadé que cet ordre, s'il correspondait à celui des lettres grecques : *alif, ba, gim*, etc., indiquait d'une manière certaine un original grec derrière le texte arabe. Après l'article de M. S. Gandz sur cette question (1), il serait difficile de se montrer encore si affirmatif.

Dans l'état où en sont les études sur les Sphériques de Ménélas, il serait peut-être téméraire de conclure par autre chose que par un vœu : celui de voir un orientaliste reprendre le travail que Björnbo n'a pas eu le temps d'achever, et examiner cette œuvre dans tout son ensemble, en réunissant tous les documents qui existent encore. Mais il semblerait bien, d'après ce qui précède, que Ptolémée et Théon ne trouvaient pas dans Ménélas la preuve complète du théorème qui est mis sous son nom.

(1) S. Gandz, Der Hultsch-Cantorsche Beweis von der Reihenfolge der Buchstaben in den mathematischen Figuren der Griechen und Araber, dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Abt B, 2 (1932), p. 81-87.

L'Univers en expansion

PAR

M. l'Abbé G. LEMAITRE

Introduction et résumé

Nous ne nous proposons pas dans ce travail de discuter les hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie de l'expansion de l'Univers, ni la valeur des confirmations astronomiques qui l'étayent. Une telle discussion nous paraît actuellement prématurée et ne pourrait certes pas arriver à des conclusions définitives dans l'état actuel de la théorie et des observations.

La théorie peut être développée de deux façons : par l'étude de solutions exactes des équations de la gravitation, fournissant des modèles simplifiés, ou par le développement approché de la solution de problèmes plus complexes. Il nous paraît utile de ne pas mélanger ces deux méthodes, et dans ce travail nous ne nous occuperons que de solutions mathématiquement exactes. Lorsque nous voudrons les appliquer aux problèmes réels, nous aurons à faire appel à l'intuition physique pour réduire un problème trop complexe à un modèle simplifié, dont nous avons la solution. Plusieurs de nos résultats semblent pouvoir servir de points de départ à des méthodes de développement en série que nous espérons traiter dans un travail ultérieur.

Dans les deux premiers paragraphes, nous donnons en détail les calculs de tenseurs, dont nous aurons besoin, et que nous résumons au § 3, en introduisant des notations qui mettent en évidence l'analogie des résultats relativistes avec les formules classiques.

Nous introduisons ensuite la notion de champ quasi-statique qui permet de généraliser immédiatement des solutions statiques connues en y permettant des variations adiabatiques. Nous donnons une solution probablement nouvelle pour le cas d'une sphère à pression radiale constante, et nous en servons pour mettre en évidence le paradoxe de Schwarzschild et montrer que la limitation plus sévère du rayon d'une masse donnée introduite par la solution du problème intérieur s'évanouit lorsqu'on n'impose pas à la matière la condition d'être à l'état fluide. Nous décrivons une mise en charge de l'univers d'Einstein, supposé fluide où la masse propre de l'univers diminue sans que le volume varie, ni l'équilibre soit troublé.

Au § 6, nous résumons en les complétant des résultats obtenus dans notre thèse de doctorat (non publiée) présentée en 1927 au Massachusetts Institute of Technology et relatifs à une modification proposée par Eddington au problème intérieur de Schwarzschild.

Le § 7 est relatif à l'influence de la formation de condensations locales sur la rupture de l'équilibre d'un univers d'Einstein ; nous retrouvons notre résultat (M. N. 91-1931-490) que la pression à la zone neutre est le facteur déterminant de la rupture d'équilibre en éliminant les complications techniques qui encombraient notre démonstration primitive.

Au § 8, nous étudions le développement de condensations sphériques dans l'univers en expansion, dans l'hypothèse où la pression est négligeable et retrouvons comme cas particulier l'univers de Friedmann.

Nous intégrons ensuite, § 9, l'équation de Friedmann par les fonctions elliptiques de Weierstrass et mettons les équations sous une forme adaptée aux calculs numériques.

Au § 10, nous introduisons l'hypothèse que les amas de nébuleuses sont en équilibre. Cette hypothèse peut être vérifiée par l'observation, et le résultat est favorable. On obtient comme masse moyenne des nébuleuses 7×10^8 fois la masse du soleil et comme coefficient d'expansion de l'univers 13.

Nous indiquons comment cette nouvelle hypothèse pourrait donner une signification cosmique à la fréquence relative des amas et des nébuleuses isolées et lever ainsi l'indétermination qui subsiste dans la loi de l'expansion. Nous calculons ensuite dans diverses hypothèses, la durée de l'expansion et le rayon de l'univers.

L'hypothèse de l'équilibre des nébuleuses semble exclure le cas critique pour lequel le rayon d'équilibre dépasserait de beaucoup le milliard d'années de lumière. Nous établissons le résultat que dans ce cas critique la distance à l'instant d'équilibre des points les plus éloignés qui peuvent échanger de la lumière au cours de l'expansion est encore de quelques milliards d'années de lumière.

Au § 11, nous écartons une contradiction apparente entre la théorie de Friedmann et la solution du problème extérieur de Schwarzschild. D'après cette dernière, une masse telle que celle de l'univers ne pourrait avoir un rayon inférieur à un milliard d'années de lumière. Nous montrons que la singularité du problème extérieur de Schwarzschild est une singularité apparente due au fait que l'on a imposé une solution statique et qu'elle peut être éliminée par un changement de coordonnées.

Au § 12, nous discutons la possibilité pour l'univers de passer le zéro théorique du rayon.

A l'aide d'un modèle anisotropique d'univers que nous a proposé Einstein, nous montrons que l'anisotropie ne fait que précipiter la contraction. Analysant les diverses forces qui pourraient arrêter la contraction d'un univers où la valeur du rayon se précipiterait vers zéro, nous arrivons à la conclusion que seules les forces non-maxwelliennes qui défendent l'intercompénétration des particules ultimes de la matière, paraissent capables de mettre un terme à la contraction, lorsque la valeur du rayon de l'univers est réduite aux dimensions du système solaire.

Nous en concluons que l'origine de la terre est postérieure à un tel événement et cela nous force à écarter les solutions où le rayon de l'univers serait plus petit que le rayon d'équilibre et en particulier les solutions quasi-périodiques.

1. Calcul du tenseur de Riemann.

Nous prenons comme point de départ l'étude des équations de la gravitation dans le cas très général d'une forme quadratique

$$ds^2 = a_1^2 dx_1^2 + a_2^2 dx_2^2 + a_3^2 dx_3^2 + a_4^2 dx_4^2 = a_\mu^2 dx_\mu^2 , \tag{1.1}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions des quatre coordonnées, et nous nous proposons d'écrire explicitement les équations de la gravitation

$$\kappa T_\mu^\nu + \lambda g_\mu^\nu = - R_\mu^\nu + \frac{1}{2} g_\mu^\nu R , \tag{1.2}$$

où

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} R_\nu^\sigma = - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha . \tag{1.3}$$

Les calculs se simplifient considérablement si on remarque que les a_μ, qui ne sont pas des tenseurs pour une transformation générale des coordonnées, sont pourtant des covariants du premier ordre pour des transformations spéciales de la forme

$$x'_\mu = c_\mu x_\mu ,$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes.

Pour ces transformations spéciales, les expressions

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{a_i a_k} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} , \tag{1.4}$$

et

$$\alpha_{ikl} = \frac{1}{a_i a_k a_l} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k \partial x_l} \tag{1.5}$$

sont des invariants. Nous devons donc nous attendre à ce que les dérivées ne figurent dans l'expression de R_i^i (sans sommation), que par les α_{ik} et α_{ikl}, puisque R_i^i est invariant pour les transformations spéciales.

Dans la suite, nous suspendrons la convention ordinaire de sommation pour des indices désignés par des lettres latines.

Les symboles de Christoffel, qui ne sont pas identiquement nuls, sont $(i \neq k)$

$$(1.6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{a_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_i\,\alpha_{ii} \\ \Gamma_{ii}^k &= -\frac{a_i}{a_k^2}\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = -\frac{a_i^2}{a_k}\,\alpha_{ik} \\ \Gamma_{ik}^k &= \frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = a_i\,\alpha_{ki} \end{aligned}\right.$$

Nous calculerons tout d'abord le tenseur de Riemann contracté R_{ii} $\mu = \nu = i$. Nous mettons en évidence dans les sommations les valeurs de l'indice sommatoire égale à i et celles k, l différentes de i et différentes l'une de l'autre, et remplaçons les symboles de Christoffel par leurs valeurs (1.6).

Nous obtenons ainsi

$$R_i^i = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{a_i}{a_k^2}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right] + \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right]$$
$$-\alpha_{ii}\alpha_{ii} - \alpha_{ii}\alpha_{ki} + \alpha_{ik}\alpha_{ik} + \alpha_{ik}\alpha_{kk} + \alpha_{il}\alpha_{kl}$$
$$+\alpha_{ii}\alpha_{ii} - 2\,\alpha_{ik}\alpha_{ik} + \alpha_{ki}\alpha_{ki}$$

Effectuant les dérivations et substituant par (1.4) et (1.5), il vient

$$(1.7)\qquad R_i^i = \alpha_{ikk} + \alpha_{kii} - \alpha_{ii}\alpha_{ki} - \alpha_{ik}\alpha_{kk} + \alpha_{il}\alpha_{kl}$$

expression supposée sommée pour k et l différents de i et différents l'un de l'autre.

Cette expression peut s'écrire

$$(1.8)\qquad R_i^i = \sum_k \beta_{ik}$$

où les β_{ik} sont supposés égaux à zéro pour $i = k$, et dont l'expression pour $i \neq k$ peut s'écrire d'après (1.4) et (1.5)

$$(1.9)\qquad \beta_{ik} = \frac{1}{a_i a_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a_i}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) + \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\frac{\partial a_k}{\partial x_l}\right]$$

la somme en l s'entendant pour les valeurs différentes de i et de k.

Le scalaire totalement contracté R s'obtiendra en faisant aussi la somme en i. Il contiendra deux fois chacun des β_{ik} et nous pourrons écrire

$$(1.10)\qquad \frac{1}{2}\,R = \sum_{i<k} \beta_{ik}$$

Les équations de la gravitation (1.1) s'écrivent donc pour $\mu = \nu = i$

$$(1.11)\qquad \kappa\,T_i^i + \lambda = \sum \beta_{kl}$$

où la sommation s'entend sans répétition $(k < l)$ et pour les valeurs de k et l différentes de i, soit explicitement,

$$(1.12)\qquad \left\{\begin{aligned} \kappa\,T_1^1 + \lambda &= \beta_{23} + \beta_{24} + \beta_{34} \\ \kappa\,T_2^2 + \lambda &= \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{34} \\ \kappa\,T_3^3 + \lambda &= \beta_{12} + \beta_{14} + \beta_{24} \\ \kappa\,T_4^4 + \lambda &= \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23} \end{aligned}\right.$$

Il nous reste à calculer les composantes R_{ik} pour $i \neq k$. Employant la même méthode, nous obtenons

$$\frac{R_{ik}}{a_i a_k} = \frac{1}{a_i a_k}\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{a_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{a_l}\frac{\partial a_l}{\partial x_i}\right)\right]$$
$$-\alpha_{ik}\alpha_{ii} - \alpha_{ik}\alpha_{ki} - \alpha_{ik}\alpha_{li}$$
$$-\alpha_{ki}\alpha_{kk} - \alpha_{ki}\alpha_{ik} - \alpha_{ki}\alpha_{lk}$$
$$+\alpha_{ii}\alpha_{ik} + \alpha_{kk}\alpha_{ki} + 2\alpha_{ik}\alpha_{ki} + \alpha_{li}\alpha_{lk}$$

soit, en effectuant les dérivations et substituant par (1.4) et (1.5),

$$\frac{R_{ik}}{a_i a_k} = \alpha_{lik} - \alpha_{li}\alpha_{ik} - \alpha_{lk}\alpha_{ki}$$

ou par (1.1)

$$(1.13)\qquad -\kappa\,T_{ik} = \sum_l \frac{1}{a_l}\left[\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{a_i}\frac{\partial a_l}{\partial x_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{1}{a_k}\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right],$$

la sommation en l étant entendue pour les valeurs différentes de i et de k.

2. Symétrie sphérique.

Par symétrie sphérique, nous entendons le cas où deux des coordonnées x_2 et x_3 ne figurent dans le ds^2 que par l'expression

$$dx_2^2 + \sin^2 x_2\, dx_3^2 \tag{2.1}$$

ou une expression équivalente.

Le ds^2 est alors invariant pour les transformations de x_2 et x_3 qui laissent invariante cette expression et qui forment le groupe des rotations d'une sphère de rayon un autour de son centre.

Dans ce cas a_1, a_2, a_4 ne sont fonctions que de x_1 et x_4 et

$$a_3 = a_2 \sin x_2 . \tag{2.2}$$

Toutes les dérivées en x_3 sont donc nulles, ainsi que les dérivées en x_2, sauf pour les dérivées premières,

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = a_2 \cos x_2 . \tag{2.3}$$

Pour les dérivées secondes, on aura en particulier

$$\frac{1}{a_3 a_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{a_2}\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) = -\frac{1}{a_2^2} . \tag{2.4}$$

Les équations (1.9) deviendront donc

$$\left\{\begin{aligned} \beta_{23} &= \frac{1}{a_2^2}\left[-1 + \frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{a_4^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right)^2\right] \\ \beta_{12} = \beta_{13} &= \frac{1}{a_1 a_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{a_4^2}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right] \\ \beta_{24} = \beta_{34} &= \frac{1}{a_2 a_4}\left[\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right) + \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right] \\ \beta_{14} &= \frac{1}{a_1 a_4}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{a_1}\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{1}{a_4}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\right)\right] \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

tandis que (1.13) donne

$$-\kappa T_{14} = \frac{2}{a_2^2}\left[\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right] \tag{2.6}$$

$$T_{12} = T_{13} = T_{23} = T_{24} = T_{34} = 0$$

Les coordonnées x_1 et x_4 sont jusqu'à présent choisies d'une manière arbitraire.

Lorsque le tenseur matériel n'est pas nul, il y a une partition naturelle

de l'espace et du temps imposée par la matière ; on peut en effet déterminer des lignes d'univers, telles que si on choisit x_1 constant le long de ces lignes, on a $T_{14} = 0$. Les lignes x_4 constant sont alors les trajectoires orthogonales des lignes x_1 constant.

Dans la suite, nous nous attacherons à l'étude du champ lorsque les coordonnées ont été ainsi choisies.

Il importe de remarquer que cette façon de faire ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus.

Dans certains cas, le choix des coordonnées peut être plus ou moins indéterminé. Il peut se faire aussi que l'introduction de ces coordonnées produise des singularités analytiques qui demanderont une étude spéciale.

Pour des coordonnées telles que $T_{14} = 0$, il est commode de se servir du théorème de conservation

$$T^{\nu}_{\mu,\nu} = 0$$

qui donne les deux relations

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial x_1} + \frac{2}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\left(T^1_1 - T^2_2\right) + \frac{1}{a_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\left(T^1_1 - T^4_4\right) = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial T^4_4}{\partial x_4} + \frac{2}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\left(T^4_4 - T^2_2\right) + \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\left(T^4_4 - T^1_1\right) = 0, \tag{2.8}$$

exprimant le théorème de conservation de l'énergie et l'équation d'équilibre (quantité de mouvement égale à zéro).

Éliminant T^2_2 entre ces deux équations et groupant les termes en T^1_1 et en T^4_4 il vient

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial T^1_1}{\partial x_1} + \frac{2}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}T^1_1 + \left(\frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\right)T^1_1$$
$$= \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial T^4_4}{\partial x_4} + \frac{2}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}T^4_4 + \left(\frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\right)T^4_4$$

et utilisant (2.6) avec $T_{14} = 0$, et multipliant par a_2^2,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[T^1_1 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right] = \frac{\partial}{\partial x_4}\left[T^4_4 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right]. \tag{2.9}$$

Ceci nous conduit à rechercher s'il n'existe pas une expression Φ des a et de leurs dérivées, telle que

$$T^1_1 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_4} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \tag{2.10}$$

$$T^4_4 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} . \tag{2.11}$$

En raison de la symétrie qui subsiste dans nos formules entre les indices 1 et 4, il suffit de faire la démonstration pour un des deux cas, par exemple pour (2.11).

Nous avons, par (1.12) et (2.5),

$$\left(\kappa T_4^4 + \lambda\right) a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = (\beta_{23} + 2\beta_{12})\, a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1}$$

$$= -\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)^3 + \frac{2a_2}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)$$

$$+ \frac{1}{a_4^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right)^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{2a_2}{a_1 a_4^2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}.$$

Tenant compte de (2.6), ($T_{14} = 0$), le dernier terme peut s'écrire

$$\frac{2a_2}{a_4^2}\left[\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right]\frac{\partial a_2}{\partial x_4}$$

$$= \frac{2a_2}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{a_4}\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right] = a_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{a_4^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right)^2\right]$$

Il vient ainsi

$$\left(\kappa T_4^4 + \lambda\right) a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{ a_2\left[-1 + \frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{a_4^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right)^2\right]\right\}$$

ce qui justifie le relation (2.11) avec

$$\Phi = \frac{a_2}{\kappa}\left[-1 + \frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{a_4^2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right)^2 - \frac{\lambda a_2^2}{3}\right] \tag{2.12}$$

3. Symétrie sphérique, résumé.

Avant de discuter les équations que nous venons d'obtenir et en montrer la signification et les analogies qu'elles présentent avec les formules de la mécanique classique, il nous faut reprendre ces résultats en employant des notations plus adaptées aux applications.

Considérons un ds^2 de la forme

$$ds^2 = -a^2 d\chi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2 dt^2\,; \tag{3.1}$$

$-a^2$, $-r^2$, c^2 sont les fonctions de $x_1 = \chi$ et $x_4 = t$ désignées précédemment par a_1^2, a_2^2, a_4^2. Nous écrirons en outre

$$T_4^4 = \rho, \qquad T_1^1 = -p, \qquad T_2^2 = T_3^3 = -\tau. \tag{3.2}$$

La constante d'Einstein est

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c_o^2},$$

où K est la constante de la gravitation et c_o la vitesse de la lumière. Au lieu de Φ, nous introduirons une fonction $m = -4\pi\iota\Phi$.

De cette manière, les équations (2.10) et (2.11) s'écrivent

$$4\pi\rho r^2 \frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{\partial m}{\partial \chi} \tag{3.3}$$

$$4\pi p r^2 \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\partial m}{\partial t} \tag{3.4}$$

La première est l'équation classique entre la distance, la densité et la masse.

L'équation (2.12) peut s'écrire

$$\frac{c_o^2}{c^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = -c_o^2\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2\right] + \frac{2Km}{r} + \frac{\lambda c_o^2}{3} r^2. \tag{3.5}$$

Elle est analogue à l'équation classique de l'énergie sous l'action de diverses forces, parmi lesquelles on reconnaît la force newtonienne de gravitation.

L'équation (2.6), ($T_{14} = 0$), peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial \chi}\right) = \frac{1}{ac}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial \chi}. \tag{3.6}$$

En dérivant (3.5), en tenant compte de (3.4) et (3.6), on obtient, après simplification par $2\frac{\partial r}{\partial t}$,

$$\frac{c_o}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_o}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{c_o^2}{ca^2}\frac{\partial r}{\partial \chi}\frac{\partial c}{\partial \chi} - 4\pi K p r - \frac{Km}{r^2} + \frac{\lambda c_o^2}{3} r. \tag{3.7}$$

Cette expression est particulièrement utile lorsque $\partial r/\partial t$ s'annule, auquel cas l'équation (3.4) devient illusoire. Il est aisé de montrer directement qu'elle s'applique encore dans ce cas.

Enfin, les théorèmes de conservation (2.7) (2.8) s'écrivent

$$\frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial \chi}(p - \tau) + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial \chi}(p + \rho) = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial t}(\rho + \tau) + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}(p + \rho) = 0. \tag{3.9}$$

Sous cette forme, les équations deviennent remarquablement intuitives. La coordonnée χ est attachée à la matière et joue le rôle des valeurs initiales des coordonnées en hydrodynamique classique. r est analogue à la distance variable à l'origine ; en fait, r est la distance telle qu'elle peut être estimée à partir de mesures normales au rayon vecteur. (3.5) et (3.7) sont alors les équations du mouvement de la matière, m correspondant à la masse intérieure à la sphère matérielle mobile de rayon χ.

L'équation (3.8) est analogue à l'équation d'équilibre, $\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial \chi}$ jouant le rôle de la force de gravitation résiduelle, décompte fait de la réaction d'entraînement.

4. Champs quasi-statiques.

Considérons le cas où

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0,$$

où donc la matière est en équilibre. Nous avons alors par (3.6)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0,$$

et par (3.4)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0,$$

et donc par (3.3) ou (3.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Mais c n'est pas nécessairement indépendant du temps. C'est pour cette raison que nous désignons ce cas sous le nom de champ quasi-statique, par opposition aux champs statiques, où c est indépendant du temps ou peut en être rendu indépendant moyennant un changement de variable.

On a par (3.5)

$$a^2\,d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2\,\mathrm{K}m}{c_o^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2}, \tag{4.1}$$

avec par (3.3)

$$4\,\pi\rho\, r^2 = \frac{dm}{dr}, \tag{4.2}$$

(3.7) devient

$$\frac{4\,\pi \mathrm{K}}{c_o^2} p + \frac{\mathrm{K}m}{c_o^2 r^3} - \frac{\lambda}{3} = \left(1 - \frac{2\,\mathrm{K}m}{c^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right) \frac{1}{cr}\frac{\partial c}{\partial r}, \tag{4.3}$$

tandis que (3.8) s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{r}(p - \tau) + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial r}(p + \rho) = 0 . \tag{4.4}$$

Naturellement ces équations ne concernent que la partie mécanique du problème qui ne peut être déterminé que lorsque nous avons quelque information sur le genre de matière à laquelle nous avons affaire. Nous disposons de quatre équations entre 6 variables a, ρ, p, τ, m et c; il nous

faut deux conditions supplémentaires. Par exemple, nous pourrons avoir affaire à un fluide

$$p = \tau$$

avec une répartition donnée de matière ρ en fonction de r.

5. Densité d'énergie uniforme.

Considérons en particulier le cas où ρ est non seulement indépendant de t, mais aussi de χ. On peut alors, par un changement de variable, rendre a constant, et choisir la valeur de cette constante. Nous prendrons

$$\frac{1}{a^2} = \frac{8\,\pi \mathrm{K}}{3\,c_o^2}\rho + \frac{\lambda}{3} \tag{5.1}$$

et obtenons par (4.1) et (3.3)

$$r = a \sin\chi \tag{5.2}$$

et (4.3) devient

$$\frac{4\,\pi\mathrm{K}}{c_o^2} p + \frac{1}{2a^2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\cot\chi}{a^2 c}\frac{\partial c}{\partial \chi} . \tag{5.3}$$

Pour un fluide, (4.4) devient

$$\frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial \chi}(p + \rho) = 0, \tag{5.4}$$

d'où, puisque ρ est constant,

$$\frac{4\,\pi\mathrm{K}}{c_o^2}(p + \rho) = \frac{f_1(t)}{c\,a^2} .$$

Substituons dans (5.3), en tenant compte de (5.1), et intégrons, il vient

$$c = f_1(t) - f_2(t)\cos\chi . \tag{5.5}$$

Nous obtenons donc

$$ds^2 = -a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right] + \left[f_1(t) - f_2(t)\cos\chi\right]^2 dt^2 \tag{5.6}$$

avec

$$3\,\kappa p = \frac{3\,\kappa\rho f_2(t)\cos\chi - (\kappa\rho - 2\lambda) f_1(t)}{f_1(t) - f_2(t)\cos\chi} . \tag{5.7}$$

La pression peut être nulle pour

$$\cos\chi_1 = \frac{(\kappa\rho - 2\lambda) f_1(t)}{3\,\kappa\rho f_2(t)} \tag{5.8}$$

et infinie pour

$$\cos\chi_o = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} . \tag{5.9}$$

Lorsque les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, ou du moins leur rapport, se réduisent à une constante, on retrouve les résultats connus de Schwarzschild.

Pour $f_2(t)=0$ et $\kappa\rho = 2\lambda$, nous obtenons l'univers d'Einstein. Si nous faisons varier $f_2(t)$, nous obtenons une mise en charge progressive de l'univers, la pression variant suivant la loi

$$p = \frac{\rho f_2(t) \cos \chi}{f_1(t) - f_2(t) \cos \chi} . \tag{5.10}$$

On peut imaginer cette pression exercée à l'origine $\chi = 0$, et se répartissant dans le fluide incompressible en maintenant l'équilibre. La pression diminue à partir du centre, pour s'annuler au plan polaire $\chi = \frac{\pi}{2}$ de ce centre.

Les choses se passent différemment pour un univers d'Einstein de forme simplement elliptique, ou pour un univers avec points antipodaux distincts. Dans ce dernier cas, χ varie de 0 à π et la pression est différente de part et d'autre du plan $\chi = \frac{\pi}{2}$; elle est négative dans l'autre moitié de l'espace, et différente en valeur absolue en des points correspondants.

Ces résultats sont naturellement sans intérêt direct pour l'étude de l'univers réel qui ne peut en rien être assimilé à un fluide incompressible. Ils ont pourtant l'intérêt de montrer comment l'univers peut rester en équilibre, quoique sa masse propre varie.

Celle-ci se calcule aisément ; on a

$$M(\chi) = \int_0^\chi 4\pi a^3 (\rho - 3p) \sin^2\chi \, d\chi,$$

où p est donné par (5.10).

Posant

$$\sin\beta = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} ,$$

on trouve

$$M(\chi) = 4\pi a^3 \rho \left\{ \left(2 - \frac{3}{\sin^2\beta}\right)\chi - \sin 2\chi - \frac{3\sin\chi}{\sin\beta} + 6\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right]\right\}$$

et pour la masse propre de l'univers à points antipodaux distincts

$$M(\pi) = 2\pi^2 a^3 \rho \left(1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) .$$

Pour $f_1 = 0$, et $\rho = 0$, nous obtenons l'univers de de Sitter.

Une conséquence de la solution intérieure de Schwarzschild est, qu'elle semble imposer pour le rayon minimum d'une sphère de masse donnée, une limite plus sévère que celle imposée par le problème extérieur.

Cette limite s'obtient pour

$$f_1(t) = f_2(t) ,$$

auquel cas la pression est infinie au centre.

On a alors (pour $\lambda = 0$) par (5.8)

$$\cos\chi_1 = \frac{1}{3} ,$$

d'où, pour le rayon correspondant,

$$r = a \sin\chi_1 = a\sqrt{8/9} ,$$

tandis que le problème extérieur permettrait un rayon aussi voisin que l'on veut de a.

Cette limitation provient uniquement de ce que l'on a supposé la matière fluide.

Considérons, en effet, de la matière se soutenant comme le fait une voûte sous l'action de tensions transversales. La pression radiale p peut être nulle ou plus généralement constante.

Dans ce cas, l'équation (5.3) peut encore être intégrée et donne

$$c = f_3(t)\,[\cos\chi]^{-\frac{1}{2}(1 - \lambda a^2 + \kappa p a^2)} ,$$

tandis que l'équation d'équilibre (3.8) donne

$$\tau - p = \frac{\operatorname{tg}\chi}{2c}(p + \rho)\frac{\partial c}{\partial \chi} ,$$

soit

$$\tau - p = \frac{\operatorname{tg}^2\chi}{4}(\rho + p)(1 - \lambda a^2 + \kappa p a^2).$$

En particulier pour $p = 0$ et $\lambda = 0$, on a

$$ds^2 = -a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] + f_3^2(t)\frac{dt^2}{\cos\chi} \tag{5.11}$$

avec

$$\tau = \frac{\rho}{4}\operatorname{tg}^2\chi \quad \text{et} \quad \kappa\rho = \frac{3}{a^2} . \tag{5.12}$$

On peut donc construire une sphère soutenue par tensions transversales et qui remplit l'espace aussi complètement que l'on veut.

La limite inférieure du rayon pour une masse donnée est donc déterminée par le champ extérieur et non par la solution du problème intérieur, si on n'impose pas à la matière l'état fluide. Les deux solutions peuvent être combinées. On peut imaginer un liquide, de l'eau par exemple, dont une partie est gelée et forme des sphères concentriques de glace se soutenant indépendamment les unes des autres par tensions normales. Ces sphères sont alors adiabatiquement fondues à partir du centre donnant le fluide de Schwarzschild. La solution de Schwarzschild peut à chaque instant être raccordée à la solution $p = 0$ en choisissant convenablement les valeurs des fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. On peut ainsi augmenter progressivement le rayon de la région fondue jusqu'à ce que la pression centrale devienne infinie et le problème de Schwarzschild n'ait pas de solution. Ceci met clairement en évidence la nature vraiment paradoxale du résultat de Schwarzschild.

6. Problème d'Eddington.

Eddington a suggéré que l'on pouvait plus naturellement considérer pour le problème de la sphère fluide homogène, le cas où la densité de masse propre

$$\delta = T = T^4_4 + 3T^1_1 = \rho - 3p \tag{6.1}$$

et non ρ est considérée comme constante.

Les équations du problème sont, éliminant c entre (4.3) et (4.4)

$$\frac{4\pi K}{c_0^2}\, p + \frac{Km}{c_0^2 r^3} - \frac{\lambda}{3} = -\left(1 - \frac{2Km}{c_0^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right) \frac{1}{\delta + 4p} \frac{\partial p}{r \partial r} \tag{6.2}$$

$$4\pi (\delta + 3p) r^2 = \frac{dm}{dr}$$

où les deux fonctions inconnues sont p et m.

Il est commode d'employer au lieu de m, la pression moyenne q définie par

$$q = \frac{3}{r^3} \int_0^r p r^2 dr .$$

On a alors

$$m = \frac{4\pi r^3}{3} (\delta + 3q) .$$

Si nous posons

$$\frac{\kappa p - \lambda}{x} = \frac{\kappa q - \lambda}{y} = \frac{\kappa \delta + 4\lambda}{12} = \frac{u}{r^2} , \tag{6.3}$$

les équations deviennent

$$\frac{dx}{du} + \frac{(x + y + 4)(x + 3)}{1 - (y + 4) u} = 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{dy}{du} + \frac{3}{2} \frac{y - x}{u} = 0 . \tag{6.5}$$

Les solutions, $x = y = -2$, $x = y = -3$ correspondent respectivement aux univers d'Einstein et de de Sitter.

Il est assez facile d'étudier l'allure des fonctions x et y pour de grandes valeurs de ces variables. On peut alors négliger les termes numériques à côté de x ou y.

Posant

$$x = \frac{X}{u} , \quad y = \frac{Y}{u} \tag{6.6}$$

on peut éliminer u et on trouve

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{1 - X - 2Y} \; \frac{1 - Y}{2X} \tag{6.7}$$

La solution de cette équation correspondant à des valeurs initiales finies de x et y est la solution particulière passant par l'origine. Il est facile de discuter l'allure de cette solution et de montrer que, partant de l'origine à une inclinaison de 45°, elle s'enroule en spirale dans le sens direct pour tendre asymptotiquement vers le point

$$X = \frac{1}{7} , \quad Y = \frac{3}{7} .$$

Il en résulte que X passe successivement par une maximum X_1, un minimum X_2, etc., et que les courbes x, sont successivement tangentes aux hyperboles

$$x = \frac{X_k}{u} .$$

Lorsque l'on fait varier les valeurs initiales, les points de contact se déplacent et les hyperboles forment autant d'enveloppes des courbes x.

On peut s'attendre à ce que ces caractères généraux subsistent pour l'allure des solutions même lorsque x et y ne sont plus petits.

En fait, il résulte de calculs numériques qui ont fait l'objet d'une thèse non publiée, présentée en 1927 au Massachusetts Institute of Technology, que la première enveloppe peut être représentée jusqu'à des valeurs de x voisines de -2 par la formule

$$x = \frac{0.220}{u} - 2.65 ,$$

tandis que la limite des asymptotes peut se développer en série

$$x = \frac{1}{7u} - 2.8571 + 0.168u + 0.22u^2 + \cdots$$

Il en résulte que lorsque l'on fait croître la pression centrale, le rayon ($p = 0$) augmente d'abord, passe par un maximum sur la première enveloppe, décroît ensuite jusqu'à la seconde enveloppe, puis croît à nouveau et tend en oscillant vers un point limite sur la limite des enveloppes.

Pour $\lambda = 0$, le premier maximum a lieu pour

$$u = 0.083$$

et le point limite est à

$$u = 0.05 .$$

On peut se rendre assez facilement compte du mécanisme de ce résultat apparemment paradoxal.

Lorsqu'on augmente la pression centrale, on tend naturellement à augmenter le rayon, mais en même temps on augmente l'énergie contenue dans la matière

$$\rho = \delta + 3p\,;$$

L'effet gravifique de cette énergie finit par compenser l'effet de la pression et les deux influences l'emportent tour à tour.

En d'autres termes, dans l'hypothèse d'Eddington, il n'est plus question de variations adiabatiques, on ne peut augmenter la pression sans apporter de l'extérieur de l'énergie et l'effet gravifique de cette énergie supplémentaire finit par l'emporter.

Pour certaines valeurs du rayon, il existe plusieurs configurations d'équilibre; il est clair que, sauf celle d'énergie mininum, ces configurations sont instables.

7. Instabilité de l'univers d'Einstein.

Après avoir étudié les champs sphériques quasi-statiques, nous nous proposons d'examiner comment peut se produire la rupture d'équilibre d'un champ quasi-statique et en particulier la rupture d'équilibre de l'univers d'Einstein.

Nous imaginons que par un processus que nous tâcherons de conserver aussi général que possible, on modifie soit l'équation d'état de la matière, soit sa répartition. Nous supposerons qu'au moment de la rupture d'équilibre on a encore

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \tag{7.1}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{7.2}$$

comme pour les champs quasi-statiques; mais ces relations ne sont plus maintenant des identités. Nous reportant à l'équation (3.7) de l'accélération et tenant compte des relations (7.1), (7.2), nous voyons que la rupture de l'équilibre ne peut provenir que d'une modification de p ou de $\frac{\partial c}{\partial \chi}$.

Nous avons vu plus haut des exemples de telles modifications, mais alors ces modifications étaient ajustées de manière à ne pas troubler l'équilibre.

Il est clair que si p et $\frac{\partial c}{\partial \chi}$ ne varient pas, il est impossible de rompre l'équilibre, et cela même si p et $\frac{\partial c}{\partial \chi}$ varient autre part qu'au point considéré. Si on met en mouvement une région intérieure par exemple, bien entendu en conservant la symétrie sphérique, cela n'aura aucune influence sur la région extérieure, pourvu que la pression et la force de gravitation $\frac{\partial c}{\partial \chi}$ n'y soient pas modifiées.

La condition

$$\frac{\partial c}{\partial \chi} = 0$$

peut encore être considérée comme la condition pour que les lignes d'univers χ constant définies par la matière soient des géodésiques.

Pour étudier la rupture d'équilibre de l'univers d'Einstein sous l'effet de la formation de condensations locales distribuées uniformément dans l'espace, nous imaginons un grand nombre de centres de condensation distribués plus ou moins uniformément. Il n'y a pas moyen de les supposer distribués d'une manière parfaitement homogène, car, dans l'espace elliptique, il n'y a pas l'équivalent des réseaux cubiques ou des piles de boulets de l'espace euclidien. Mais statistiquement la distribution peut être supposée uniforme.

Le processus de condensation est supposé se développer d'une manière semblable autour de chaque centre de condensation, et il existe naturellement un réseau de surfaces formant des cellules entourant les centres de condensation et qui sont le lieu des points qui ne sont pas davantage sous l'influence de l'une ou de l'autre des deux condensations qu'ils séparent. Ces cellules forment la zone neutre entre les champs de gravitation des condensations.

En vertu de l'homogénéité globale que nous avons supposée, il est clair que toutes les cellules se comportent de même; elles sont toutes en équilibre, ou elles se dilatent ou se contractent toutes ensemble. Il suffit donc d'étudier le mouvement d'une seule d'entre elles pour se rendre compte de l'équilibre ou du mouvement de l'ensemble de l'univers.

Fixant notre attention sur une cellule, zone neutre d'une condensation particulière, nous supposons que cette condensation jouit de la symétrie sphérique, et que nous pouvons tenir compte de l'influence des condensations voisines en les remplaçant par une distribution de matière de symétrie sphérique. La zone neutre est alors une sphère.

Les points de cette sphère jouissent de la propriété que leurs lignes d'univers sont des géodésiques, ou encore que la force de gravitation y est nulle, puisque ni la condensation interne ni les condensations voisines ne peuvent y avoir une influence prépondérante. On doit donc avoir à la zone neutre

$$\frac{\partial c}{\partial \chi} = 0,$$

et, par conséquent, l'équilibre ne peut être rompu que si les modifications apportées à l'état de la matière ont fait varier p, la pression radiale à la zone neutre.

Si donc nous voulons comparer un univers globalement homogène mais comportant un grand nombre de condensations uniformément réparties avec un univers d'Einstein parfaitement homogène, nous avons à considérer le réseau de cellules formé par les zones neutres séparant les condensations. L'univers homogène doit, pour ainsi dire, être tangent en ces points à l'univers présentant des condensations, et la pression normalement aux zones neutres, doit être la pression adoptée pour l'univers homogène. Alors l'équilibre, ou l'expansion de l'univers homogène tangent, nous fait connaître l'équilibre ou l'expansion du réseau de zones neutres.

Les deux univers peuvent avoir des masses différentes ou des volumes différents. On ne peut rien conclure de cela, le facteur déterminant est la pression à la zone neutre.

L'intérêt de ce résultat est qu'il est complètement indépendant du processus particulier suivant lequel se développent les condensations. Il donne le moyen pour tout processus particulier de prévoir l'effet de ce processus sur l'équilibre de l'univers.

En particulier, si la pression est nulle et reste nulle aux zones neutres, les condensations ne modifient pas l'équilibre. La pression radiale à la zone neutre est la densité d'énergie traversant cette zone, et mesure donc l'intensité des échanges entre les condensations. Nous avons appelé une diminution de ces échanges d'énergie, une « stagnation de l'univers ». Seul ce processus de stagnation peut déterminer la rupture de l'équilibre dans le sens de l'expansion.

8. Condensations dans l'univers en expansion.

Dans les applications à l'univers réel la pression est généralement négligeable vis-à-vis de la densité. Dans le cas de l'équilibre nous avons bien dû en tenir compte, puisque l'étude d'une rupture d'équilibre dépend naturellement de forces minimes, mais pour l'étude de l'expansion de l'univers et le développement de condensations au cours de l'expansion, nous pouvons la négliger.

Dans ce cas, l'équation (3.4) nous apprend que m n'est fonction que de χ, et l'équation (3.8), pour $p = \tau = 0$, que c n'est fonction que de t. Moyennant un changement de variable, nous pouvons donc supposer c constant et poser

$$c = c_0$$

Nous avons alors, par (3.6)

$$\frac{1}{a}\,\frac{\partial r}{\partial \chi} = f(\chi),$$

et (3.1) devient

$$ds^2 = -\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 \frac{d\chi^2}{f^2(\chi)} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + c^2\,dt^2 \tag{8.1}$$

où r est une fonction de χ et de t satisfaisant à (3.5)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = -c^2\,[1 - f^2(\chi)] + \frac{2Km}{r} + \frac{\lambda c^2}{3}\,r^2 \tag{8.2}$$

où par (3.3)

$$4\pi\rho\,r^2\,\frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{dm}{d\chi}. \tag{8.3}$$

Enfin, l'équation (3.7) devient

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{Km}{r^2} + \frac{\lambda c^2}{3}\,r. \tag{8.4}$$

L'élément de longueur à un instant t est d'après (8.1)

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{f^2(\chi)} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\ .$$

Lorsque $f(\chi) = 1$, la géométrie est donc euclidienne. Les équations ne diffèrent alors des équations de la mécanique classique que par l'introduction de la répulsion cosmique et, en outre, par le fait que la constante d'énergie dans (8.2) qui, au point de vue classique, pourrait avoir une valeur arbitraire, est maintenant nulle.

Dans le cas général, on peut encore considérer r comme la distance à l'origine, et la constante d'énergie en chaque point matériel, c'est-à-dire pour chaque valeur de χ, peut être choisie arbitrairement. Mais alors la géométrie n'est plus euclidienne. On peut en faire une carte dans un espace euclidien où les longueurs normales au rayon vecteur sont représentées en vraie grandeur. Les longueurs suivant le rayon vecteur sont alors représentées à une échelle

$$\frac{dr}{d\sigma} = f(\chi).$$

L'échelle des longueurs radiales ne dépend que de χ, c'est-à-dire reste la même pour chaque point matériel pendant tout son mouvement, et elle est liée à la constante d'énergie dans l'équation du mouvement de ce point d'après l'équation (8.2).

La coordonnée χ peut naturellement être choisie arbitrairement. Lorsque $f(\chi)$ est inférieur ou égal à un, on pourra choisir la coordonnée χ de telle sorte que

$$f(\chi) = \cos\chi,$$

alors (8.2) s'écrira plus simplement

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = -c^2\sin^2\chi + \frac{2Km}{r} + \frac{\lambda c^2}{3}\,r^2. \tag{8.21}$$

Ce choix des coordonnées convient lorsque l'espace est fermé. Pour un espace du type simplement elliptique, tout l'espace est décrit lorsque χ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Il importe de remarquer que m n'est pas la masse réelle intérieure à la sphère χ, mais bien la masse calculée à partir de la densité ρ sans tenir compte de la courbure de l'espace. La masse réelle est

$$M(\chi) = \int_0^{\chi} \frac{dm}{\cos \chi} \tag{8.5}$$

et, tout comme m, elle est indépendante du temps.

Dans le cas particulier où m est proportionnel à $\sin^3 \chi$, nous avons

$$m = \frac{4}{3\pi} M \sin^3 \chi \tag{8.6}$$

où $M = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est la masse totale de l'univers (simplement elliptique).

Dans ce cas, on peut écrire

$$r = \cdot R(t) \sin \chi \tag{8.7}$$

et on obtient l'univers de Friedmann

$$ds^2 = - R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] + c^2 dt^2, \tag{8.8}$$

avec

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = - c^2 + \frac{8KM}{3\pi R} + \frac{\lambda c^2}{3} R^2. \tag{8.9}$$

Utilisant la même méthode qu'au § 7, nous pouvons étudier le développement d'une condensation dans l'univers en expansion. Nous supposons cette condensation de symétrie sphérique, et nous remplaçons les condensations extérieures par une distribution moyenne. Cela revient à supposer que m est proportionnel à $\sin^3 \chi$ en dehors de la condensation, mais suit une autre loi dans la région centrale.

Pour l'univers au large, les trajectoires des couches matérielles concentriques seront homothétiques (8.7). Dans la région centrale au contraire, elle pourront se rapprocher ou s'écarter davantage, marquant ainsi le progrès ou l'atténuation de la condensation.

Il pourrait arriver que les trajectoires correspondant à des valeurs différentes de χ arrivent à se couper. Dans ce cas, notre solution devient inadmissible, car χ est une coordonnée et ne peut donc avoir deux valeurs pour le même point. Physiquement cela veut dire que l'hypothèse que nous avons introduite que la pression est nulle devient inadmissible à partir d'une certaine valeur de χ.

En particulier, si des trajectoires retombent sur le centre, il ne sera plus permis de traiter le problème sans introduire la pression Notre but est simplement d'étudier la tendance des condensations à se développer, plutôt que de suivre leur ajustement final pour lequel nous ne pouvons évidemment plus supposer c (potentiel gravifique résiduel) constant, ni

non plus négliger les effets de rotation exclus par notre hypothèse sur la symétrie sphérique.

Il est bien connu que les équations de Friedmann admettent les types de solutions suivants :

1° expansion illimitée de 0 à l'∞, lorsque les racines du second membre de (8.21) sont imaginaires ;

2° cas limite des racines positives confondues, r variant de zéro à la distance d'équilibre, ou de cette distance d'équilibre à l'infini ;

3° cas des racines réelles :

a) branche élastique d'un minimum à l'infini, avec comme cas limite la solution de de Sitter ;

b) branche quasi-périodique de zéro à un maximum.

Ces différentes éventualités se présentent suivant que

$$\frac{3 Km \sqrt{\lambda}}{c^2 \sin^3 \chi}$$

est plus grand, égal ou plus petit que l'unité.

Si, par exemple, m est proportionnel à $\sin^4 \chi$, la région centrale sera du type quasi-périodique retombant finalement sur le centre, tandis que la région extérieure sera du type d'expansion illimitée. Un tel modèle nous permet donc, sous réserve des remarques faites plus haut, d'étudier la formation de condensations dans un univers du type d'expansion illimitée.

Il est tentant d'appliquer ce modèle à la formation des nébuleuses. Il paraît pourtant préférable d'attendre un développement ultérieur de la théorie qui nous affranchirait de l'hypothèse de la symétrie sphérique qui n'est manifestement pas réalisée pour les nébuleuses spirales. Ce développement sort du cadre de cet article qui ne considère que des solutions exactes des équations de la gravitation.

Dans le paragraphe suivant, nous développons la solution de Friedmann par les fonctions elliptiques de Weierstrass. Le problème est le même pour l'univers à condensations et l'univers homogène Nous considérerons le premier cas, et le passage à l'univers homogène se fait par les équations (8.6) et (8.7), ou plus simplement en posant $\chi = \frac{\pi}{2}$, $r = R$, $m = \frac{4M}{3\pi}$.

Dans le cas de l'univers homogène, il y a une grandeur

$$U = \int \frac{cdt}{R} \tag{8.10}$$

qui a une importance particulière : c'est la distance angulaire parcourue par la lumière. Elle peut servir à mesurer le temps. Sa signification n'est plus si immédiate pour l'univers à condensations.

9. Intégration de l'équation de Friedmann par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

L'équation (8.21) peut s'écrire, lorsque nous ne considérons que la variation en t,

$$(9.1)\qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{r}(r+2r_o)\left[r-r_o(1-\eta)\right]\left[r-r_o(1+\eta)\right],$$

où

$$(9.2)\qquad \begin{cases} A^2 = \dfrac{\lambda c^2}{3} \\ A^2 r_o^2(3+\eta^2) = c^2 \sin^2\chi \\ A^2 r_o^3(1-\eta^2) = \mathrm{K}m. \end{cases}$$

Introduisons une fonction de Weierstrass $p(u)$ ayant pour racines

$$(9.3)\qquad e_1 = 6-2\eta^2, \quad e_2 = -3+6\eta+\eta^2, \quad e_3 = -3-6\eta+\eta^2,$$

et posons

$$(9.4)\qquad p(u) = 3+\eta^2-6(1-\eta^2)\frac{r_o}{r},$$

(9.1) devient

$$(9.5)\qquad 432(1-\eta^2)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = -A^2\left[p(u)-3-\eta^2\right]^2.$$

Considérons une valeur v telle que

$$(9.6)\qquad p(v) = 3+\eta^2,$$

d'où

$$(9.7)\qquad [p'(v)]^2 = -432(1-\eta^2)^2,$$

il vient

$$(9.8)\qquad \pm A\frac{dt}{du} = \frac{p'(v)}{p(u)-p(v)} = 2\zeta(v)-\zeta(u+v)+\zeta(u-v),$$

d'où, en intégrant

$$(9.9)\qquad \pm At = C + 2u\,\zeta(v) + \log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}.$$

Les équations (9.4) et (9.9) fournissent une représentation paramétrique du mouvement.

La variable u est proportionnelle à la quantité U introduite à la fin du paragraphe précédent ; on a en effet

$$(9.9')\qquad U^2 = -12(3+\eta^2)\,u^2.$$

Le calcul de la période ω correspondant à e_1 se fait par les formules suivantes :

$$(9.10)\qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}} = \frac{\sqrt[4]{(1+\eta)(3-\eta)}-\sqrt[4]{(1-\eta)(3+\eta)}}{\sqrt[4]{(1+\eta)(3-\eta)}+\sqrt[4]{(1-\eta)(3+\eta)}}$$

Lorsque η est imaginaire $=\bar{\eta}i$, on pose

$$(9.11)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\bar{\eta}}{3+\bar{\eta}^2},$$

et on obtient

$$(9.12)\qquad l = i\operatorname{tg}\frac{\psi}{4}.$$

On a ensuite

$$(9.13)\qquad q = \frac{l}{2}+2\left(\frac{l}{2}\right)^5+15\left(\frac{l}{2}\right)^9+\cdots$$

et

$$(9.14)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} &= \frac{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,\frac{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}{\sqrt[4]{(1+\eta)(3-\eta)}+\sqrt[4]{(1-\eta)(3+\eta)}} \\ &= \frac{1+2q^4+\cdots}{2\cos\frac{\psi}{4}}\sqrt[4]{\frac{\cos\psi}{3(3+\bar{\eta}^2)}}. \end{aligned}$$

Pour le calcul pratique, il nous faut remplacer p et σ par leur expression au moyen des fonctions θ.

Posant

$$(9.15)\qquad u = \frac{2\omega}{\pi}\alpha \qquad\qquad \beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

Nous avons

$$(9.16)\qquad \begin{aligned} p(u) &= e_1+\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left[\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)}\right]^2 \\ &= e_1+\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left[\frac{\theta_1(\beta)}{\theta_2(\beta)}\right]^2 \end{aligned}$$

et

$$\sigma(u) = C^{te}\, e^{\frac{\pi^2}{2\eta\omega}\alpha^2}\,\theta_1(\alpha).$$

On a

$$(e_1-e_2)(e_1-e_3) = 9(9-\eta^2)(1-\eta^2)$$

et

$$p(v)-e_1 = -3(1-\eta^2).$$

Il vient donc par (9.4) et 9.6)

$$(9.17)\qquad \frac{2r_o}{r} = \frac{p(v)-p(u)}{3(1-\eta^2)} = -1-\sqrt{\frac{9-\eta^2}{1-\eta^2}}\left[\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)}\right]^2$$

$$= -1 - \sqrt{\frac{9-\eta^2}{1-\eta^2}}\left[\frac{\theta_1(\beta)}{\theta_2(\beta)}\right]^2$$

Désignant par α_0 et β_0 les valeurs de α et β correspondant à $u=v$, vient pour t

$$\pm At = C_1 + \log\frac{\theta_1(\alpha+\alpha_0)}{\theta_1(\alpha-\alpha_0)} - 2\alpha\,\frac{\theta_1'(\alpha_0)}{\theta_1(\alpha_0)}$$

(9.18) $$= C_2 + \log\frac{\theta_2(\alpha-\beta_0)}{\theta_2(\alpha+\beta_0)} + 2\alpha\,\frac{\theta_2'(\beta_0)}{\theta_2(\beta_0)}$$

$$= C_3 + \log\frac{\theta_1(\beta+\beta_0)}{\theta_1(\beta-\beta_0)} - 2\beta\,\frac{\theta_2'(\beta_0)}{\theta_2(\beta_0)}.$$

On a

$$\frac{1}{q^{1/4}}\,\theta_1(\alpha) = \sin\alpha - q^2\sin 3\alpha + q^6\sin 5\alpha \cdots$$

$$\frac{1}{q^{1/4}}\,\theta_2(\alpha) = \cos\alpha + q^2\cos 3\alpha + q^6\cos 5\alpha \cdots$$

Naturellement α et β sont imaginaires.

Dans le cas de racines réelles on voit aisément que pour α imaginaire pur, r est réel et positif et part de zéro pour $\alpha = 0$. Cela correspond à l'univers quasi-périodique. Pour β imaginaire pur r est infini pour $\beta=\beta_0$ et diminue lorsque β augmente en valeur absolue.

Il nous reste à transformer les lignes trigonométriques imaginaires. Dans ce but nous posons

(9.19) $$x = e^{\frac{\alpha}{i}} \qquad y = e^{\frac{\beta}{i}}.$$

Nous obtenons pour l'univers quasi-périodique

(9.20) $$\frac{2r_0}{r} = -1 + \sqrt{\frac{9-\eta^2}{1-\eta^2}}\left[\frac{x+x^{-1}+q^2(x^3+x^{-3})+q^6(x^5+x^{-5})+\cdots}{x-x^{-1}-q^2(x^3-x^{-3})+q^6(x^5-x^{-5})+\cdots}\right]^2$$

et pour l'univers élastique

(9.21) $$\frac{2r_0}{r} = -1 + \sqrt{\frac{9-\eta^2}{1-\eta^2}}\left[\frac{y-y^{-1}-q^2(y^3-y^{-3})+q^6(y^5-y^{-5})+\cdots}{y+y^{-1}+q^2(y^3+y^{-3})+q^6(y^5+y^{-5})+\cdots}\right]^2,$$

qui donne pour $r=\infty$ la valeur de y_0 correspondant à β_0.

Nous avons ensuite pour l'équation en t pour la branche quasi-périodique

(9.22) $$\pm At - C_2 = \mathrm{Log}\,\frac{xy_0^{-1}+x^{-1}y_0+q^2(x^3y_0^{-3}+x^{-3}y_0^3)+q^6(x^5y_0^{-5}+x^{-5}y_0^5)+}{xy_0+x^{-1}y_0^{-1}+q^2(x^3y_0^3+x^{-3}y_0^{-3})+q^6(x^5y_0^5+x^{-5}y_0^{-5})+}$$

$$+\,2\,\frac{y_0-y_0^{-1}+3q^2(y_0^3-y_0^{-3})+5q^6(y_0^5-y_0^{-5})+\cdots}{y_0+y_0^{-1}+q^2(y_0^3+y_0^{-3})+q^6(y_0^5+y_0^{-5})+\cdots}\,\mathrm{Log}\,x$$

et pour la branche élastique

(9.23) $$\pm At - C_3 = \mathrm{Log}\,\frac{yy_0-y^{-1}y_0^{-1}-q^2(y^3y_0^3-y^{-3}y_0^{-3})+q^6(y^5y_0^5-y^{-5}y_0^{-5})+\cdots}{yy_0^{-1}-y^{-1}y_0-q^2(y^3y_0^{-3}-y^{-3}y_0^3)+q^6(y^5y_0^{-5}-y^{-5}y_0^5)+\cdots}$$

$$-\,2\,\frac{y_0-y_0^{-1}+3q^2(y_0^3-y_0^{-3})+5q^6(y_0^5-y_0^{-5})+\cdots}{y_0+y_0^{-1}+q^2(y_0^3+y_0^{-3})+q^6(y_0^5+y_0^{-5})+\cdots}\,\mathrm{Log}\,y.$$

Ces formules s'appliquent tout aussi bien au cas où les racines sont imaginaires. Alors q est imaginaire pur, et puisqu'il n'intervient qu'au carré, il en résulte un simple changement de signe.

On peut d'ailleurs identifier les deux expressions en posant

(9.24) $$y = \frac{i}{qx}.$$

Les doubles signes se correspondent et

(9.25) $$C_3 - C_2 = -4\,\mathrm{Log}\,y_0 + 2\,\frac{y_0-y_0^{-1}+3q^2(y_0^3+y_0^{-3})+\cdots}{y_0+y_0^{-1}+q^2(y_0^3+y_0^{-3})+\cdots}\,\mathrm{Log}\,\frac{i}{q}.$$

Il est avantageux d'employer les premières formules pour x compris entre 1 et $1/\sqrt{-qi}$, et les secondes pour les valeurs plus grandes de x.

Pour q réel, le maximum ou le minimum de r a lieu pour x ou y égal $1/\sqrt{q}$.

Lorsqu'on se donne r, le calcul de x et y peut se faire par les formules $(l = l_1 i)$

(9.26) $$\frac{\sqrt{1+2r_0/r}+\sqrt[4]{(9-\eta^2)/(1-\eta^2)}}{\sqrt{1+2r_0/r}-\sqrt[4]{(9-\eta^2)/(1-\eta^2)}} = \frac{\mathrm{tg}\,2\varphi}{l_1} = \frac{\sin 2\theta}{l},$$

où l'un des angles φ ou θ est réel. On a alors $(q = q_1 i)$

(9.27) $$x^2 = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{q_1}\left(1+4q_1^4\,\frac{\mathrm{ctg}\,2\varphi}{\sin 2\varphi}+\cdots\right) = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{q}\left(1-4q^4\,\frac{\mathrm{ctg}\,2\theta}{\sin 2\theta}+\cdots\right)$$

(9.28) $$y^2 = \frac{\mathrm{ctg}\,\varphi}{q_1}\left(1-4q_1^4\,\frac{\mathrm{ctg}\,2\varphi}{\sin 2\varphi}+\cdots\right) = -\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{q}\left(1+4q^4\,\frac{\mathrm{ctg}\,2\theta}{\sin 2\theta}+\cdots\right).$$

Pour q réel, la branche quasi-périodique correspond aux valeurs de θ comprises entre zéro et 45°, la branche élastique, aux valeurs de θ comprises entre 135 et 90 degrés. Pour q imaginaire, l'angle φ doit être pris entre zéro et 90 degrés.

10. Les amas de nébuleuses.

Un des traits caractéristiques de l'univers tel qu'il nous est révélé par les observations astronomiques, est que, s'il existe des nébuleuses isolées, il y a aussi des agglomérations de nébuleuses dont la population varie depuis quelques dizaines jusque des centaines de nébuleuses.

Nous nous proposons de discuter l'hypothèse suivant laquelle ces amas de nébuleuses seraient sensiblement en équilibre et formeraient comme un morceau d'un univers d'Einstein. Nous montrerons ensuite quelles informations sur l'expansion de l'univers pourraient se déduire de cette hypothèse.

Si les amas sont en équilibre, le rayon actuel de l'univers est nettement plus grand que le rayon d'équilibre, de telle sorte que le rapport de Hubble

$$\frac{r}{v} = 1{,}8 \times 10^9 \text{ années} \tag{10.1}$$

de la distance des nébuleuses à leur vitesse spectroscopique d'éloignement est une mesure de la constante cosmologique. Adoptant

$$\lambda = 10^{-54},$$

nous pouvons calculer par la formule (8.4) à quelle distance r_e la répulsion cosmique et la force de gravitation due à une masse m se font équilibre; on a

$$r_e^3 = \frac{3\,\mathrm{K}m}{\lambda c^2}, \tag{10.2}$$

ou

$$r_e = 80\sqrt[3]{m}, \tag{10.3}$$

les distances étant comptées en années de lumière, et la masse du soleil étant prise comme unité.

Si les amas de nébuleuses sont en équilibre, r_e doit être le rayon de la zone neutre correspondant à chaque nébuleuse. La distance moyenne entre les nébuleuses doit être $2\,r_e$.

S'il y a N nébuleuses réparties d'une façon plus ou moins sphérique, le volume de l'amas doit être

$$\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{N}r_e^3$$

et son diamètre

$$2\,r_e\sqrt[3]{\mathrm{N}} = 160\sqrt[3]{\mathrm{N}m}\,.$$

Nous pouvons estimer la distance D et le diamètre angulaire d de l'amas, nous devons donc avoir comme condition d'équilibre

$$\mathrm{D}\,d = 160\sqrt[3]{\mathrm{N}m}\,. \tag{10.4}$$

Si d est exprimé en degrés et D en mégaparsecs, le diamètre en années de lumière est

$$\frac{\mathrm{D}d}{0{,}31 \times 57{,}3} \times 10^6 = 160\sqrt[3]{\mathrm{N}m}$$

d'où

$$\mathrm{N}m\,10^{-9} = 0{,}043\,\mathrm{D}^3 d^3. \tag{10,5}$$

Les estimations de Hubble (M[t] Wilson Contr. n° 427) permettent de calculer la masse moyenne d'une nébuleuse dans l'hypothèse de l'équilibre. Pour certains amas, les données de la table IX ne correspondent pas avec les indications données dans le texte ; nous avons alors fait le calcul pour les deux valeurs.

AMAS	N	D	d		$m\,10^{-9}$	
Virgo	(500)	1,8	12°	11°	0,9	0,7
Pegasus	100	7,3	1		0,2	
Pisces	20	7	0,5	1	0,1	0,7
Cancer	150	9	1,5	1	0,7	0,2
Perseus	500	11	2,0		0,9	
Coma	800	14	1,7		0,7	
Urs. Maj.	300	22	0,7		0,5	
Leo	400	32	0,6		0,8	

Ces données sont évidemment de très inégale valeur. En particulier, pour l'amas de Virgo, Shapley trouve une distance beaucoup plus grande et un nombre moindre de nébuleuses. Pour les amas A, B, C, D de Virgo, Shapley trouve pourtant des diamètres et des nombres de nébuleuses du même ordre de grandeur.

Si on tient compte de l'incertitude dans les données sur lesquelles sont basés ces calculs, et en particulier de la forme irrégulière de la plupart des amas, on peut considérer le résultat comme favorable à l'hypothèse de l'équilibre des amas de nébuleuses.

La valeur numérique de la masse trouvée pour les nébuleuses, est de l'ordre de grandeur indiqué par les recherches de Hubble.

Les données relatives à l'amas de Coma paraissent les plus sûres, d'autant plus que cet amas semble avoir une forme assez globulaire. Nous adopterons donc comme estimation de la masse moyenne des nébuleuses

$$0{,7}\;\;10^9\,\odot,$$

et donc, comme distance moyenne entre les nébuleuses,

140 000 années de lumière .

Comparant cette valeur à la distance moyenne des nébuleuses isolées, estimée par Hubble à

1.800.000 années de lumière,

nous avons pour le coefficient d'expansion de l'univers

$$\frac{R}{R_e} = 13. \qquad (10.6)$$

L'hypothèse de l'équilibre des amas semble donc fournir le moyen de préciser, en les confirmant, les estimations de Hubble.

Elle a encore l'intérêt de donner une signification cosmologique à la fréquence relative des amas et des nébuleuses isolées.

Sans que nous soyons déjà à même de développer une théorie bien précise, il est clair que si l'expansion ne s'est pas attardée quelque peu au voisinage de la position d'équilibre, il est à peu près impossible que des parties de cet univers aient pu en nombre considérable dévier du mouvement moyen au point d'être en équilibre, et peut-être pourra-t-on montrer que si l'expansion s'est attardée trop au voisinage de l'équilibre, les amas devraient être plus nombreux et plus importants qu'ils ne le sont réellement. Il y a là une nouvelle ligne d'attaque qui pourrait nous faire connaître la valeur de η^2, ou au moins exclure le voisinage des deux valeurs critiques $\eta^2 = -3$ et $\eta^2 = 0$.

Ceci suffirait à déterminer l'ordre de grandeur du rayon de l'univers et de la durée de l'expansion.

Nous avons, en effet, par (9.2) et (10.2)

$$R_o^3 (1 - \eta^2) = R_e^3 \qquad (10.7)$$

$$A^2 R_o^2 (3 + \eta^2) = c^2 \qquad (10.8)$$

soit

$$R_o = \frac{c}{A\sqrt{3+\eta^2}} = \frac{10^{27}\text{ cm}}{\sqrt{1+\eta^{2/3}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^{2/3}}} 10^9 \text{ années de lumière} \qquad (10.9)$$

d'où

$$R = 13\, R_e = 13 \frac{\sqrt[3]{1-\eta^2}}{\sqrt{1+\eta^{2/3}}} 10^9 \text{ années de lumière.}$$

Si η^2 n'est pas voisin de -3, l'ordre de grandeur du rayon de l'univers est donc connu.

Il en est de même pour la durée de l'expansion.

Le cas limite $\eta^2 = -3$ donne la solution exacte

$$R = 2\, R_o\, sh^{\frac{2}{3}} \frac{3\, At}{2} \cong R_o \sqrt[3]{2}\, e^{At} \qquad (10.10)$$

avec

$$R_e = \sqrt[3]{4}\, R_o ,$$

d'où

$$2\, At = 2 \times 2{,}303 \log 13 \sqrt[3]{2} = 5{,}6. \qquad (10.11)$$

Comme $2A \cong 10^{-9}$ années, la durée de l'expansion est $5{,}6 \times 10^9$ années.

Pour $\eta^2 = -0{,}1$ on trouve par les formules du paragraphe précédent

$$2\, At = 8{,}437. \qquad (10.12)$$

Lorsque η^2 tend vers zéro, on peut aisément trouver une valeur asymptotique de la durée de l'expansion depuis $R = 0$ jusqu'à une valeur plus grande que R_o. Posant

$$X^2 = \frac{R}{R + 2R_o}, \qquad (10.13)$$

on obtient

$$At = \text{Log}\frac{1+X}{1-X} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log}\frac{X\sqrt{3}-1}{X\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log}\frac{1}{q_1^2} - 2\,\text{Log}(2+\sqrt{3}). \qquad (10.14)$$

Cette équation montre comment la solution tend vers la solution limite (R_o, ∞), lorsque q tend vers zéro.

On a

$$q_1^2 = \frac{-\eta^2}{144} + \cdots \qquad (10.15)$$

et

$$\frac{\kappa M \sqrt{\lambda}}{2\pi^2} = 1 - \frac{3}{2}\eta^2 + \cdots = 1 + \mu \qquad (10.16)$$

où μ représente l'approximation avec laquelle la masse est ajustée à la constante cosmique pour réaliser la position d'équilibre.

Pour le coefficient d'expansion = 13, on trouve

$$2At = 5{,}93 + 2{,}66 \log_{10} \frac{1}{\mu}. \qquad (10.17)$$

Pour l'univers élastique on aurait de même

$$At = \text{Log}\frac{1+X}{1-X} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log}\frac{X\sqrt{3}-1}{X\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log}\frac{1}{q} - \text{Log}(2+\sqrt{3}) \qquad (10.18)$$

le temps étant compté à partir du minimum du rayon, soit

$$2\, At = 5{,}46 + 1{,}33 \log_{10} \frac{-1}{\mu}. \qquad (10.19)$$

Lorsque η^2 tend vers -3, le rayon tend vers l'infini, mais U, la distance angulaire que la lumière est capable de franchir durant l'expansion, tend vers zéro.

Il est intéressant de calculer $R_e U$, la distance au moment de l'équilibre des points les plus éloignés qui peuvent se transmettre de la lumière. On a par (9.9¹), (10.7) et (10.8)

$$R_e U = 2\sqrt{3}\, \frac{u}{i} \sqrt[3]{1-\eta^2}\, \frac{c}{A} \qquad (10.20)$$

et

$$\frac{u}{i} = \frac{\omega}{\pi} \log x^2$$

On trouve pour $\eta^2 = -3$,

(10.21) $$R_e\,U = 4{,}46 \frac{c}{2A} = 4{,}46 \times 10^9 \text{ années de lumières.}$$

11. Champ extérieur de Schwarzschild.

Les équations de l'univers de Friedmann admettent pour une masse non nulle, des solutions où le rayon de l'univers tend vers zéro. Ceci est en opposition avec le résultat généralement admis qu'une masse donnée ne peut avoir un rayon plus petit que

$$\frac{2Km}{c^2}$$

ou $2m$ en unités naturelles ($K = c = 1$).

Ce résultat se déduit de la solution du problème extérieur de Schwarzschild,

(11.1) $$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)d\tau^2$$

Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on a voulu employer des coordonnées pour lesquelles le champ est statique.

Dans le vide, m est une constante. Considérons le cas euclidien $f(x) = 1$ et posons

(11.2) $$r_o^3 = \frac{Km}{4A^2}, \qquad A^2 = \frac{\lambda c^2}{3}$$

(8.2) devient

(11.3) $$r\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = A^2\left(r^3 + 8r_o^3\right)$$

d'où

(11.4) $$r = 2r_o\,\mathrm{Sh}^{\frac{2}{3}} \frac{3A}{2}(t - \chi).$$

Nous pourrions écrire $F(\chi)$ au lieu de χ, mais cela n'introduirait aucune généralisation.

Comme

$$\frac{\partial r}{\partial \chi} = -\frac{\partial r}{\partial t}$$

nous avons alors

(11.5) $$ds^2 = -A^2(r^3 + 8r_o^3)\frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2 dt$$

qui est une solution du champ dans le vide.

A chaque instant l'espace est euclidien, et il n'y a pas de singularité sauf pour $r = 0$.

Si nous prenons r comme coordonnée, il doit y avoir moyen de définir une coordonnée τ de manière à mettre le champ sous la forme de Schwarzschild.

On a alors

$$dr^2 = \frac{A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)(dt - d\chi)^2$$

d'où

$$\frac{A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)\,d\chi^2 = dr^2 - \frac{A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)(dt^2 - 2d\chi\, dt)$$

et

$$ds^2 = -dr^2 \quad r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left[c^2 + \frac{A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)\right]dt^2 + \frac{2A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)\,d\chi\, dt$$

et éliminant χ,

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta)\,d\varphi^2 + \left[c^2 - \frac{A^2}{r}(r^3 + 8r_o^3)\right]dt^2 + 2A\sqrt{\frac{r^3 + 8r_o^3}{r}}\,dr\,dt\,.$$

Posant

(11.6) $$d\tau = dt + \frac{A\sqrt{\frac{r^3 + 8\,r_o^3}{r}}}{c^2 - \frac{A^2}{r}(r^3 + 8\,r_o^3)}\,dr,$$

il vient

(11.7) $$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\,A^2 r_o^3}{c^2 r} - \frac{A^2 r^2}{c^2}} - r^2(d\theta^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\left(1 - \frac{8\,A^2 r_o^3}{c^2 r} - \frac{A^2 r^2}{c^2}\right)d\tau^2,$$

ce qui est la forme de Schwarzschild (11.1) du champ d'une masse ponctuelle.

La singularité s'introduit parce que l'expression qui figure au dénominateur dans l'expression de $d\tau$ (11.6) s'annule pour des valeurs suffisamment petites de r.

τ dépend d'une intégrale elliptique. Dans le cas particulier où λ tend vers zéro, l'intégration peut être effectuée. Pour simplifier, prenons des coordonnées pour lesquelles K et c sont égaux à un.

On a à la limite pour A tendant vers zéro

$$8\,A^2 r_o^3 = 2m\,, \tag{11.8}$$

d'où

$$d\tau = dt + \frac{\sqrt{\frac{2m}{r}}}{1 - \frac{2m}{r}}\,dr\,, \tag{11.9}$$

et, en intégrant,

$$\tau = t + 2\sqrt{2mr} + 2m\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{r} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r} + \sqrt{2m}}\,, \tag{11.10}$$

transformation inadmissible pour des valeurs de r inférieures à $2m$. L'équation (11.4) devient de même

$$\chi = t + \frac{2}{3}\,\frac{r^{3/2}}{\sqrt{2m}}\,, \tag{11.11}$$

et la nouvelle forme du champ s'écrit sans singularité

$$ds^2 = -2m\,\frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2\,, \tag{11.12}$$

où

$$r = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2m}\,(t-\chi)\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{11.13}$$

La singularité du champ de Schwarzschild est donc une singularité fictive, analogue à celle qui se présentait à l'horizon du centre dans la forme originale de l'univers de de Sitter.

12. L'ÉVANOUISSEMENT DE L'ESPACE.

Le rayon de l'espace peut passer par la valeur zéro. Nous nous proposons de discuter ce passage, et d'examiner en particulier s'il y a moyen d'interpréter physiquement cette valeur zéro du rayon comme représentant simplement une quantité petite et, dans ce cas, d'en fixer l'ordre de grandeur.

Pour l'étude du point zéro, nous pouvons négliger la constante cosmologique ; posant

$$\frac{Km}{c^2} = a\,, \tag{12.1}$$

nous avons alors

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -1 + \frac{2a}{R}\,. \tag{12.2}$$

Introduisant la distance angulaire U parcourue par la lumière pendant le temps t,

$$dU = \frac{c\,dt}{R}\,, \tag{12.3}$$

nous trouvons aisément l'univers cycloïdal d'Einstein

$$\begin{cases} R = a(1 - \cos U)\,, \\ ct = a(U - \sin U)\,. \end{cases} \tag{12.4}$$

Lorsque U varie de 0 à π, R revient à sa valeur initiale zéro, et la lumière a eu juste le temps de faire le tour de l'espace simplement elliptique.

La question est de savoir s'il y a moyen d'émousser la pointe de la cycloïde.

On peut se demander tout d'abord, si on n'obtiendrait pas ce résultat en tenant compte de l'effet de la pression qui ne doit plus être nécessairement négligeable. Il est facile de voir, en se reportant à l'équation (3.7), que la pression ne fait que renforcer l'action de la gravitation. La question a d'ailleurs été traitée en détail par Tolman.

Il est plus important d'examiner l'effet d'un manque d'isotropie dans la répartition des tensions.

Nous nous proposons d'examiner, suivant une idée que nous a communiquée Einstein, un univers défini par

$$ds^2 = -b_1^2 dx_1^2 - b_2^2 dx_2^2 - b_3^2 dx_3^2 + dx_4^2\,, \tag{12.5}$$

où b_1, b_2, b_3 sont des fonctions de $x_4 = t$.

Un tel univers serait naturellement inadmissible à beaucoup de points de vue, mais il a l'intérêt d'introduire une anisotropie marquée et laissée largement arbitraire.

Nous pouvons aisément calculer le tenseur matériel par les formules du paragraphe 1.

Nous avons, pour k et i différents de 4, par (1.9), les accents désignant les dérivées par rapport à t,

$$\beta_{ik} = \frac{b'_i\, b'_k}{b_i\, b_k} \tag{12.6}$$

et

$$\beta_{i4} = \frac{b''_i}{b_i}\,. \tag{12.7}$$

Les composantes $T_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) s'annulent.

(12.8) $$\sqrt{-g} = b_1 b_2 b_3 = R^3$$

mesure le volume occupé par une portion déterminée de matière. R n'est plus ici le rayon de l'univers, puisque l'espace est euclidien, mais le volume de l'espace tend vers zéro si R tend vers zéro.

Nous avons

$$\frac{3R'}{R} = \frac{b_1'}{b_1} + \frac{b_2'}{b_2} + \frac{b_3'}{b_3}$$

et

$$3\left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2}\right) = \frac{b_1''}{b_1} + \frac{b_2''}{b_2} + \frac{b_3''}{b_3} - \frac{b_1'^2}{b_1^2} - \frac{b_2'^2}{b_2^2} - \frac{b_3'^2}{b_3^2}$$

Posant

(12.9) $$I^2 = \left(\frac{b_1'}{b_1} - \frac{b_2'}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{b_2'}{b_2} - \frac{b_3'}{b_3}\right)^2 + \left(\frac{b_3'}{b_3} - \frac{b_1'}{b_1}\right)^2$$

nous obtenons

$$3\frac{R''}{R} = \frac{b_1''}{b_1} + \frac{b_2''}{b_2} + \frac{b_3''}{b_3} - \frac{1}{3}I^2$$

ou par (1.12)

(12.10) $$3\frac{R''}{R} = \frac{\kappa}{2}(T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_4^4) - \frac{1}{3}I^2.$$

Dans toute application raisonnable, $T_1^1\, T_2^2\, T_3^3$ seront négatifs, en tout cas inférieurs en valeur absolue à $T_4^4 = \rho$. R″ sera donc essentiellement négatif. Si donc à un certain moment R′ est négatif, il faut que R atteigne la valeur zéro et donc que le volume s'annule.

On voit que pas plus l'anisotropie que la pression n'empêche l'évanouissement de l'espace.

Ce qui précède n'est pas une preuve formelle de l'impossibilité d'éviter le volume zéro par l'anisotropie, puisque (12.5) n'est pas la forme la plus générale concevable, mais elle indique tout de même dans un cas déjà fort général que l'anisotropie agit dans le sens opposé.

Il faut pourtant bien que la matière trouve un moyen d'éviter l'évanouissement de son volume.

Tant que la matière est formée d'étoiles, ceci est manifestement impossible.

Lorsqu'elle est condensée en une seule masse, il est clair qu'elle doit avoir acquis une grande température bien supérieure à la température critique des liquides et que rien ne l'empêche d'atteindre un degré de concentration comparable à l'intérieur du compagnon de Sirius.

Même pour un gaz dégénéré il semble que rien ne puisse s'opposer à la concentration, puisque l'énergie disponible M/R est indéfinie.

Lorsque les distances entre les noyaux d'atomes et les électrons deviennent de l'ordre de 10^{-12} cm, les forces non-maxwelliennes qui empêchent la pénétration réciproque des particules ultimes, doivent devenir prédominantes et sont sans doute capables d'arrêter la contraction. L'univers serait alors comparable à un noyau atomique colossal. Si la contraction est arrêtée, le processus doit reprendre un sens inverse.

Adoptant, suivant Eddington, 10^{78} comme nombre des protons existants, nous avons comme ordre de grandeur du rayon de l'univers réduit à l'état atomique

$$10^{\frac{78}{3} - 12} = 10^{14} \text{ cm},$$

soit une dizaine de fois la distance du soleil.

Nous conclurons donc, que seules les forces subatomiques nucléaires semblent capables d'arrêter la contraction de l'univers, lorsque le rayon de l'espace est réduit aux dimensions du système solaire.

Du point de vue cosmologique, le zéro de l'espace doit donc être traité comme un commencement, en ce sens que toute structure astronomique d'une existence antérieure y aurait été complètement détruite.

L'époque de ce commencement, ou si on veut de ce recommencement, date certainement d'avant la formation de l'écorce terrestre et l'organisation du système solaire, soit au strict minimum d'après l'étude des roches radioactives

$$1.6 \times 10^9 \text{ années.}$$

Comparant cette valeur au rapport de Hubble,

$$\frac{r}{v} = 1.8 \times 10^9 \text{ années,}$$

nous concluons que toute solution où la vitesse d'expansion a toujours été plus grande qu'elle ne l'est maintenant, est exclue.

En particulier, pour l'univers cycloïdal d'Einstein (12.4) ou la solution (10.10) pour R/R_0 petit, on aurait

$$t = \frac{2}{3}\frac{r}{v} = 1.2 \times 10^9 \text{ années.}$$

Nous devons donc exclure les solutions où la valeur du rayon est inférieure au rayon d'équilibre et, en particulier, les solutions quasi-périodiques.

D'un point de vue purement esthétique, on peut peut-être le regretter. Ces solutions où l'univers se dilatait et se contractait successivement en se réduisant périodiquement à une masse atomique des dimensions du système solaire, avaient un charme poétique incontestable et faisaient penser au phénix de la légende.