1)

a)

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots} \\ x_n & 1 \end{bmatrix}_{N \times 2} \qquad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2\times 1} \qquad c = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Minimizar $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ $\rightarrow$ $\min_{x} \|Ax - c\|_2$

b) $A^T A x = A^T c$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 , & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 , & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}}_{\boxed{i.}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\boxed{ii}}$$

- É possível ver que $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$, assim conseguimos reformular para:

- $$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x[i]^2 & \sum_{i=1}^{n} x[i] \\ \sum_{i=1}^{n} x[i] & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x[i]y[i] \\ \sum_{i=1}^{n} y[i] \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ RESULTADO DA MULT. DAS MATRIZES EM i.

$\downarrow$ RESULTADO DA MULT. DA MATRIZ COM O VETOR EM ii.

3)

$$((1-t).p + tq)^2 \leq (1-t)p^2 + tq^2$$

$$(1-t)^2p^2 + 2.(1-t).p.tq + t^2q^2 \leq p^2 - tp^2 + tq^2$$

$$(1-2t+t^2)p^2 + 2ptq - 2pt^2q + t^2q^2 \leq p^2 - tp^2 + tq^2$$

$$\cancel{p^2} - \cancel{2}tp^2 + p^2t^2 + 2ptq - 2pt^2q + t^2q^2 \leq \cancel{p^2} - \cancel{tp^2} + tq^2$$

$$-tp^2 + p^2t^2 + 2ptq - 2pt^2q + t^2q^2 \leq tq^2$$

$$p^2t^2 - 2pt^2q + t^2q^2 \leq tp^2 - 2ptq + tq^2$$

$$\cancel{t}(p^2t - 2ptq + q^2t) \leq \cancel{t}(p^2 - 2pq + q^2)$$

$$p^2t - 2ptq + q^2t \leq p^2 - 2pq + q^2$$

$$(pt - qt)^2 \leq (p-q)^2$$

→ O que é verdade pois $t \in [0,1]$

- Se $t=0$: $0 \leq (p-q)^2$ VERDADE

- Se $t=1$: $(p-q)^2 \leq (p-q)^2$ VERDADE

→ E qualquer variação de t no intervalo também será verdade pois a parte esquerda da inequação vai variar entre um número de 0, $(p-q)^2$. Logo sempre será verdade.

x^2 é CONVEXA //

5.8

$x_1 = (a_1, b_1)$
$x_2 = (a_2, b_2)$
$t \in [0,1]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - [(ta_1 + (1-t)a_2)x_i + (tb_1 + (1-t)b_2)]|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - (ta_1x_i + (1-t)a_2x_2 + tb_1 + (1-t)b_2))))|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |(y_i - (ta_1x_i + tb_1)) + ((1-t)(y_i - (a_2x_i + b_2)))|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ta_1x_1 + tb_1)| + |(1-t)(y_i - (a_2x_1 + b_2))| = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

$$\rightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall t$$ //

Função LAD é convexa!