Métodos numéricos para la ciencia y la ingeniería
Tarea 2

Jean Paul Martel

1 de Octubre 2015

1 Introducción general

Se pretende a modelar una partícula de masa m que se mueve verticalmente en el eje Y rebotando contra un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω. Es decir con ecuación:

$$y_s = Asin(\omega t + \phi)$$

Y la ecuación de la partícula es (antes de chocar):

$$y_p = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Además el choque contra el suelo es inelástico siguiendo la siguiente regla de choque:

$$v_p'(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*)$$

donde t^* es el instante del bote, v_p y v_p' son las velocidades justo antes y justo después del bote, y v_s es la velocidad del suelo en ese instante y η es un coeficiente de restitución (η entre 0, y 1). Es importante conocer también las ecuaciones para la velocidad de la partícula y del suelo:

$$v_p = v_0 - gt$$

$$v_s = A\omega cos(\omega t + \phi)$$

Inicialmente la partícula está en contacto con el suelo y con velocidad hacia arriba mayor que la velocidad del éste. Los parámetros del problema son (A, ω, η, m, g) y la condición inicial (y(0), v(0)). Se adimensionaliza el problema con $m = 1$, $g = 1$, y $A = 1$. y(0) se escogió pegado al suelo.

2 Parte 1

2.1 Introducción

Se quiere crear una rutina que permita calcular (y_{n+1}, v'_{n+1}) dados (y_n, v'_n): la posición y velocidad luego del n-ésimo choque.

2.2 Procedimiento

Primero se define la función

$$f(t) = y_p - y_s = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} - [Asin(\omega t + \phi)]$$

Notar que al resolver $f(t^*) = 0$ se encuentra el tiempo t^* en que la partícula choca con el suelo. Para encontrar esta raíz se avanza evaluando $f(t)$ desde $t = 0$ y en intervalos de tiempo de 0.1 s. En cuanto al paso de tiempo es importante que sea mucho menor que el tiempo entre un rebote y el siguiente. Cuando para cierto tiempo t' se detecta que $f(t')$ es negativo significa que la partícula "ha pasado a estar debajo del suelo" y se busca un cero entre este instante t' y el anterior. Para encontrar esta raíz se utilizó el método de bisección, predefinido como bisect en el módulo scipy.optimize de python. Luego se calcula la velocidad después del choque v'_{n+1} y la posición y_{n+1} de la partícula.

La rutina $choque(v_n, y_n, w, eta)$ realiza esta operación entregando v'_{n+1} y y_{n+1} dependiendo de los parámetros del problema

3 Parte 2 y 3

3.1 Introducción

Se busca estimar N_{relax}, el número de botes necesarios para relajar el sistema. Usando $\eta = 0.15$ y para $\omega = 1.66$.

Luego se quiere comparar N_{relax} con otros dos valores para ω entre 1.66 y 1.7. Dejando los el resto de los parámetros y condiciones iniciales iguales.

3.2 Procedimiento

Se escogen arbitrariamente $y_0 = 0$ y $v_0 = 2$. Aunque notar que $+v_0$ debe ser mayor a la velocidad inicial del piso.

Se itera N veces el programa creado en la pregunta 1 para obtener N velocidades de la partícula luego del bote. En cada iteración se toman los valores anteriores de la posición y velocidad de la partícula por el choque para obtener los nuevos valores. Se elige $N = 50$.

Entonces, para reconocer un N_{relax} se grafica $v'_n vs.n$ y se chequea para qué valor de n, v'_n se ha estabilizado.

Para la parte 3 se repite el procedimiento de la Parte 2, graficando nuevamente $v'_n vs.n$ y reconociendo N_{relax}. Se usan los mismos valores que antes. A recordar: $\eta = 0.15$, $y_0 = 0$, $v_0 = 2$. Pero ahora con $\omega = 1.68$ y $\omega = 1.7$.

3.3 Resultados

El gráfico obtenido con las condiciones iniciales escogidas es

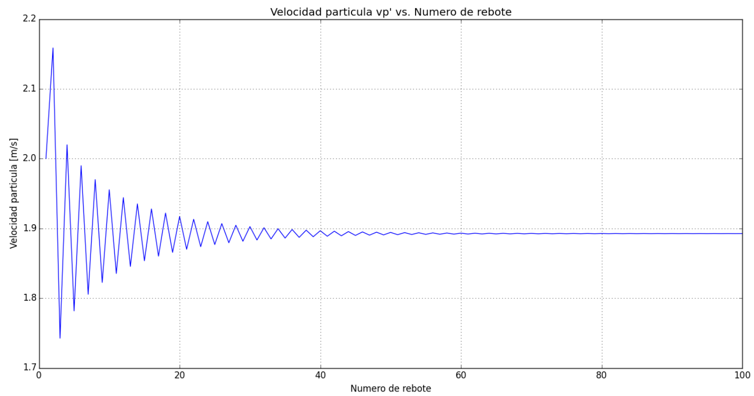

Figure 1: Parte 2. Velocidad luego del rebote vs. Número de rebote. Gráfico que muestra la evolución de v'_n según los parámetros iniciales $\eta = 0.15$, $\omega = 1.66$, $y_0 = 0$, $v_0 = 2$

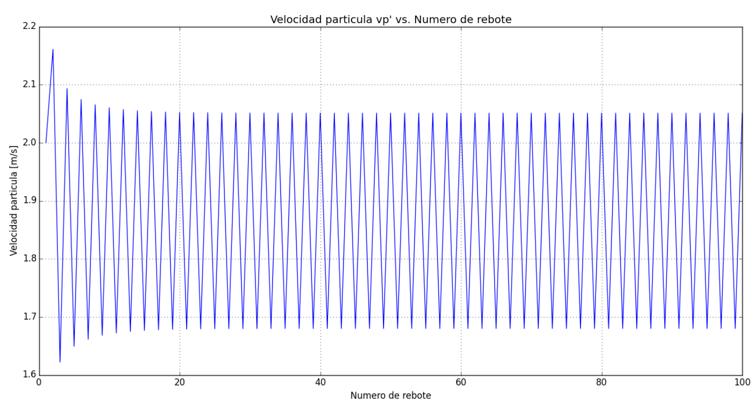

Figure 2: Parte 3. Velocidad luego del rebote vs. Número de rebote. Gráfico que muestra la evolución de v'_n según los parámetros iniciales $\eta = 0.15$, $\omega = 1.68$, $y_0 = 0$, $v_0 = 2$

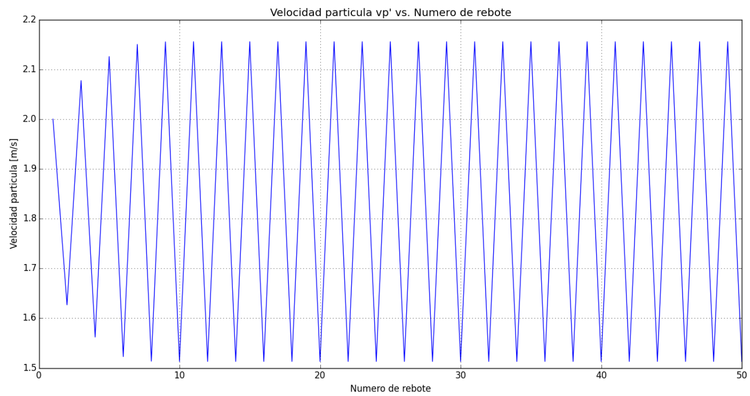

Figure 3: Parte 3. Velocidad luego del rebote vs. Número de rebote. Gráfico que muestra la evolución de v_n' según los parámetros iniciales $\eta = 0.15$, $\omega = 1.7$, $y_0 = 0$, $v_0 = 2$

3.4 Conclusiones

Del gráfico para $\omega = 1.66$ anterior puede observarse que luego de los primeros 60 rebotes (periodo de relajación) se llega a una solución relativamente estable, es decir, los valores de v_n son periódicos. Del gráfico para $\omega = 1.68$ se puede considerar $N_{relax} = 20$ Mientras que para el gráfico con $\omega = 1.68$ se estima $N_{relax} = 20$ Y recordamos también el valor que se tenía para $\omega = 1.70 (N_{relax} = 10)$. Existe una razonable diferencia entre el número de botes necesarios para relajar el sistema (N_{relax}) en los distintos casos, cumpliendo que para un pequeño aumento en la oscilación del suelo, el valor de la velocidad de la partícula justo después del rebote se estabiliza con menos botes.

4 Pregunta 4

4.1 Introducción

Se quiere hacer un gráfico de v_n' versus ω con ω entre 1.66 y 1.79 y n=$2xNrelax, ..., 2xNrelax+$ 49, es decir, se plotean 50 valores de v_n' por cada valor de ω. Se sigue usando $\eta = 0.15$.

4.2 Procedimiento

Se toma un N_{relax}=60. Además se eligen 40 frecuencias entre 1.66 y 1.79, tales que 10 de estas se encuentran entre 1.66 y 1.669 para comparar algunas frecuencias muy cercanas entre sí. Las otras 30 se encuentran más alejadas y en el intervalo 1.67-1.79. Dados las mismas condiciones iniciales de antes $y_0 = 0$

y $v_0 = 2$, además del parámetro $\eta = 0.15$. A través de un algoritmo que itera 170 veces la función *choque* definida anteriormente. Se grafica punto a punto las frecuencias con sus respectivas velocidades. Pero los puntos (v'_n) utilizados en el gráfico son desde $n = 2N_{relax} = 120$ hasta $n = 2N_{relax} + 49 = 169$.

4.3 Resultados

El gráfico con los puntos obtenidos pueden verse a continuación:

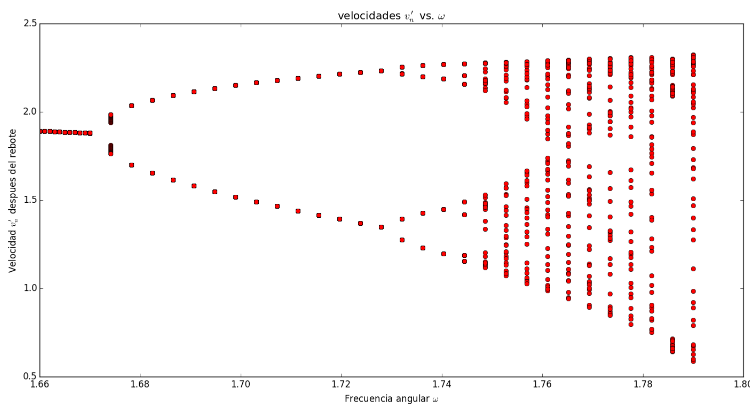

Figure 4: Parte 3. Velocidad luego del rebote vs. frecuencia. Gráfico que muestra 50 valores de v'_n por cada valor de ω

4.4 Conclusiones

El gráfico nos permite notar la evolución de la partícula en distintos casos. Observaciones importantes del gráfico anterior: Para valores menores $\omega = 1.7$ los valores de la velocidad de la partícula justo después del rebote son muy similares tanto para distintos n en una frecuencia (se mantiene la recupera la velocidad en cada rebote) como para las distintas frecuencias en ese intervalo . Luego se pasa a una región donde los valores de la velocidad varían periódicamente entre dos valores. Finalmente para frecuencias mayores son más dispersos, es decir con diferentes velocidades en los distintos rebotes.