

Métodos numéricos para la ciencia y la ingeniería

Tarea 3

Jean Paul Martel 19055257-8

8 de Octubre 2015

1 Parte 1 Oscilador de van del Pol

1.1 Introducción

El oscilador de van der Pol describe la dinámica de algunos circuitos eléctricos. La ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2) \frac{dx}{dt}$$

donde k es la constante elástica y μ es un coeficiente de roce. Si $|x| > a$ el roce amortigua el movimiento, pero si $|x| < a$ el roce inyecta energía.

Se puede hacer el siguiente cambio de variable:

$$x(t) = ay(s)$$

$$s = t\sqrt{k}$$

con lo que $\frac{dx}{dt} = a \frac{dy}{ds} \sqrt{k}$ y entonces $\frac{d^2x}{dt^2} = ak \frac{d^2y}{ds^2}$. De esta manera se obtiene la nueva ecuación:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1) \frac{dy}{ds}$$

con $\mu^* = \frac{\mu a}{\sqrt{k}}$

Ahora se busca implementar el método de Runge-Kutta de orden 3 (con un algoritmo propio) para integrar la ecuación de movimiento hasta $T = 20\pi$ y encontrar la solución, usando $\mu^* = 1.257$; con las siguientes condiciones iniciales:

$$1) \frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$$

$$2) \frac{dy}{ds} = 0; y = 4.0$$

Además se quiere graficar $y(s)$ y la trayectoria en el espacio $(\frac{dy}{ds})$.

1.2 Procedimiento

El método de Runge-kutta puede ser usado en ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$y'' = f(x, y, y')$$

En nuestro caso $x = s$ y $f(s, y, y') = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$. Además f en este caso no depende de s , es decir $f = f(y, y')$. con esto las relaciones para Runge-kutta de tercer orden quedarán:

$$\begin{aligned} l_1 &= hy'_n \\ k_1 &= hf(y_n, y'_n) \\ l_2 &= h(y'_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_2 &= hf(y_n + \frac{l_1}{2}, y'_n + \frac{k_1}{2}) \\ l_3 &= h(y'_n - k_1 + 2k_2) \\ k_3 &= hf(y_n - l_1 + 2l_2, y'_n - k_1 + 2k_2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3) \\ y'_{n+1} &= y'_n + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3) \end{aligned}$$

Para hacer esto se define la función "rk_o3" que recibe la función a integrar y el paso de tiempo escogido. Se utiliza una discretización de tiempo de 1000 pasos desde 0 a 20π donde el paso h está definido como $\frac{Tiempointegracion}{N. de pasos} = \frac{20\pi}{1000}$. Lo que corresponde a decir $h = t(i+1) - t(i)$, es decir la diferencia entre dos medidas de tiempo. Luego la función repite los pasos de RK3 hasta completar el tiempo de integración y entrega los arreglos para la posición y y la derivada $\frac{dy}{ds}$ correspondientes a cada tiempo, con estos se plotean dos gráficos por cada condición inicial (señaladas en "introducción"):

1- $y(s)$ vs. s

2- $\frac{dy}{ds}$ vs. $y(s)$

1.3 Resultados

Aquí se presentan ambos gráficos obtenidos:

- 1- Condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$

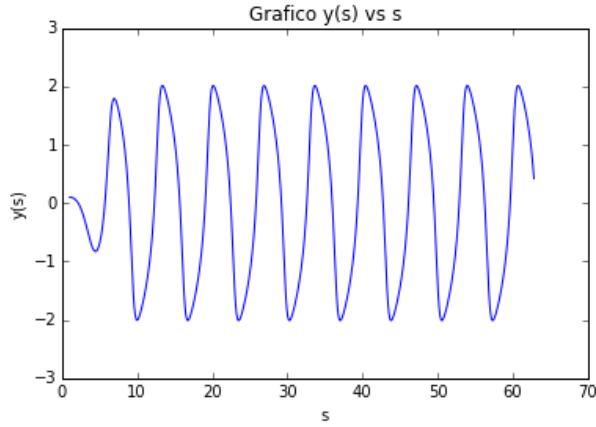


Figure 1: Gráfico de solución para oscilador de van der Pol con parámetro $\mu^* = 1.257$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$

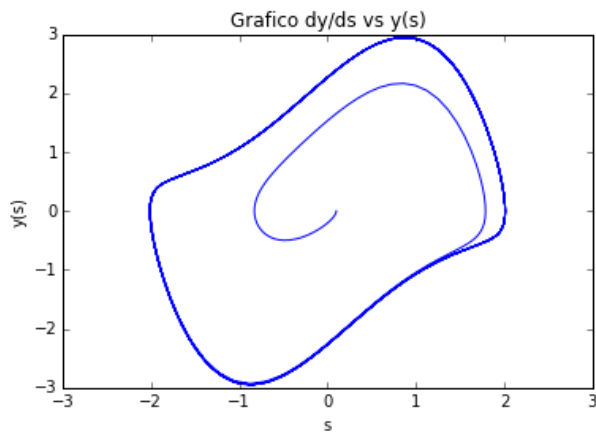


Figure 2: Gráfico de trayectoria en el plano de fases para oscilador de van der Pol con parámetro $\mu^* = 1.257$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$

2- Condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$

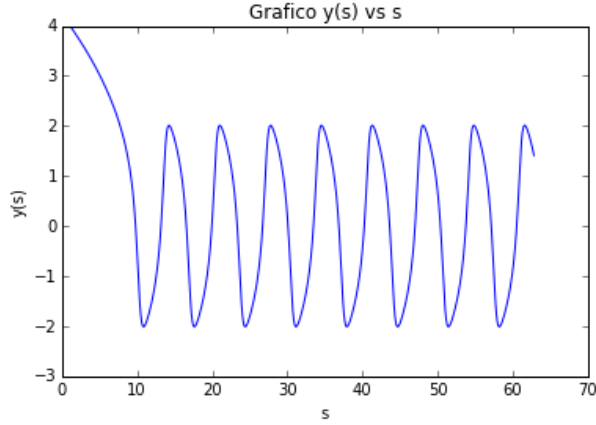


Figure 3: Gráfico de solución para oscilador de van der Pol con parámetro $\mu^* = 1.257$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$

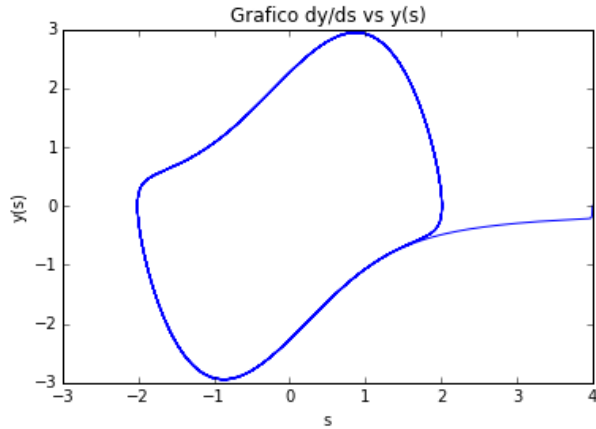


Figure 4: Gráfico de trayectoria en el plano de fases para oscilador de van der Pol con parámetro $\mu^* = 1.257$ y condiciones iniciales $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$

1.4 Conclusiones

Puede notarse de los gráficos para $y(s)$ vs. s que el punto de equilibrio del oscilador de Van der Pol siempre está en el origen independiente de la posición

inicial. Además en ambos casos se llega al mismo estado estacionario con una amplitud cercana a 2.

En los gráficos del plano de fase ($\frac{dy}{ds}$ vs. $y(s)$), también se obtiene que a pesar de comenzar con distintas condiciones iniciales, terminan en las mismas trayectorias cerradas que encierran el origen.

Estos resultados son los esperados para este tipo de oscilador, por lo que se confirma que el método RK3 implementado resuelve correctamente la ecuación diferencial para el oscilador de van der Pol.

2 Parte 2: Ecuaciones diferenciales de Lorenz

2.1 Introducción

El sistema de Lorenz es un set de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Se utilizan los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Con estos se obtiene la solución famosa, el atractor de Lorenz. Se quiere luego usar el algoritmo Runge-Kutta de orden 4 (RK4) para encontrar las soluciones $(x(t), y(t), z(t))$.

2.2 Procedimiento

Primero se definen en la función "lorenz" el sistema de ecuaciones que quiere resolverse junto a los parámetros ya nombrados de $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Se utiliza 'dopri5' desde la clase *scipy.integrate.ode* para resolver las ecuaciones con el método de RK4. Se elige un tiempo de integración de 100 segundos, y además las condiciones iniciales $x = 1, y = 1, z = 0$. Las soluciones obtenidas se muestran en un gráfico de 3 dimensiones.

2.3 Resultados

El gráfico obtenido con las condiciones iniciales escogidas es

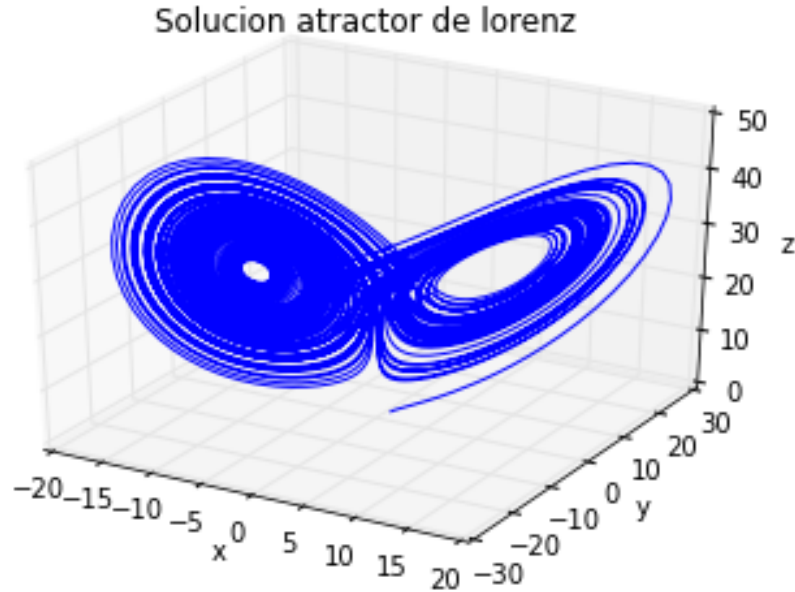


Figure 5: Gráfico $x(t)$ vs. $y(t)$ vs. $z(t)$. Soluciones a las ecuaciones de Lorenz, con parámetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ y condiciones iniciales: $x = 1, y = 1, z = 0$

2.4 Conclusiones

Se obtiene el resultado esperado en cuanto a la forma de la solución, es decir, se observa que la solución es estable en torno a un punto fijo, aunque no es estacionaria. En otras palabras, existe una oscilación acotada en torno al punto mencionado (atractor caótico).

La condición inicial, aunque sí determina drásticamente los valores de la solución, y de que está alejada del resto de la estructura, no cambia la forma mencionada de la solución, al menos hasta un tiempo de 100s como fue calculado. Así, con el método Runge-Kutta de orden 4 se resuelve con una correcta aproximación las ecuaciones de Lorenz.