Métodos numéricos para la ciencia y la ingeniería
Tarea 5

Jean Paul Martel

28 de Octubre 2015

1 Ecuación de Poisson

1.1 Introducción

La ecuación de Poisson en 2D para el potencial electrostático es:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y)$$

Se busca integrar dentro de una caja rectangular de dimensiones 10 [cm] x 15 [cm] conectada a tierra (con V = 0 en el borde). En el centro de la caja se tiene (x, y) = (0, 0). En la caja se encuentra la letra "J" contenida dentro del rectángulo centrado con lados 5 [cm] x 7 [cm]. El grosor de las lineas con las que se dibuja la letra es de 1 [cm]. La letra posee densidad de carga constante y la carga total encerrada en en ella es de 1 Coulomb, es decir:

$$Q = \int \rho(x,y) dxdy = 1[C]$$

Además, en la caja hay una linea tal que ocupa las coordenadas y = -5.5; x=[-3: 3]. Esta línea cumple condiciones de borde derivativas:

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1$$

Toma el valor 1 cuando la derivada perpendicular a la linea es calculada en $y > -5.5$ y vale -1 cuando la derivada se calcula para $y < -5.5$.

2 Procedimiento

Para integrar la ecuación se usará el método de sobre-relajación sucesiva ("successive Over-Relaxtion" o "SOR"). Se utiliza un reticulado con h=0.2[cm] En cada punto de la grilla existe un potencial $V(i,j)$ y con el método de sobre-relajación sucesiva, cada punto se obtiene con la fórmula:

$$V_{i,j} = (1-\omega)V_{i,j} + \frac{\omega}{4}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - h^2\rho_{i,j}]$$

Donde ω es una constante que debe estar en el intervalo [0,2] para que la iteración converja. Cuando $\omega > 1$ al método se le llama "sobre-relajación". En el programa, $\rho_{i,j}$ es determinado por la función *densidad* que entrega el valor de la densidad de cada punto, 0 fuera de la letra y puesto que en la letra se tiene densidad de carga constante y que la carga total es de 1[C], la densidad en las coordenadas de la letra se obtiene con (1/*puntos en la letra*).

Además por la condición de borde derivativa que se tiene, se usan las siguientes fórmulas para obtener el potencial alrededor de la línea (con g=1):

a) Arriba de la línea

$$V_{i,N+1} = (1-\omega)V_{i,N+1} + \frac{\omega}{3}[V_{i+1,N+1} + V_{i-1,N+1} + V_{i,N+2} - h^2\rho_{i,j} - h * g]$$

b) Abajo de la línea

$$V_{i,N-1} = (1-\omega)V_{i,N-1} + \frac{\omega}{3}[V_{i+1,N-1} + V_{i-1,N-1} + V_{i,N-2} - h^2\rho_{i,j} + h * g]$$

c) En la línea

$$V_{i,N} = V_{i,N-1} + h * g$$

Notar que cada punto depende de todos los que lo rodean. Esta formula debe iterarse varias veces hasta converger lo suficiente bajo algún criterio (o bien hasta que se llegue al máximo de iteraciones pedidas). En este caso el criterio de convergencia es que los valores del potencial en la caja para una iteración, no difiera de la anterior más de un valor dado (tolerancia).

Escrito formalmente:

$$max\|\mathbf{V^{k+1}} - \mathbf{V^k}\| < \epsilon$$

Este criterio está definido en la función *no_ha_convergido*. En este caso se pide que la diferencia (tolerancia) sea menor que 1e-4.

Además se itera para distintos valores de ω: 1.0, 1.2, 1.4, 1.8, 2. Con esto se observa la cantidad de iteraciones necesarias para converger en cada caso (rapidez de convergencia).

3 Resultados

En la siguiente tabla se muestran la cantidad de iteraciones para converger según el valor de ω usado:

Table 1: Número de iteraciones necesarias

ω (factor de convergencia)	Iteraciones necesarias
1.0	2554
1.2	1820
1.4	1251
1.8	381

Table 2: Número de iteraciones que el programa necesita realizar para lograr la tolerancia deseada, para distintos valores de ω

La figura 1 es un gráfico con código de colores que muestra la distribución del potencial electrostático en la caja **sin** considerar la condición de borde derivativa:

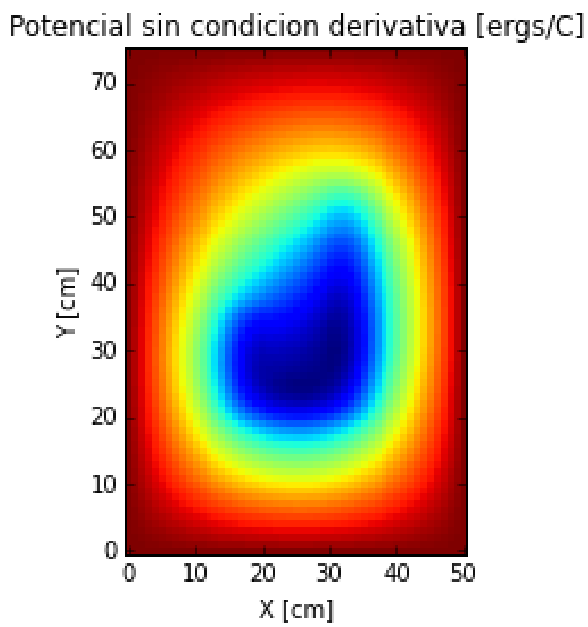

Figure 1: Gráfico de colores en 2D que presenta los valores para el potencial de la caja con una letra J dentro, de densidad constante y carga total 1[C]. Sin considerarse condición de borde derivativa. Colores más azules representan mayor potencial. Colores mas rojos corresponden a potenciales menores, hasta llegar a 0

La figura 2 es un gráfico con código de colores que muestra la distribución del potencial electrostático en la caja considerando la condición de borde derivativa:

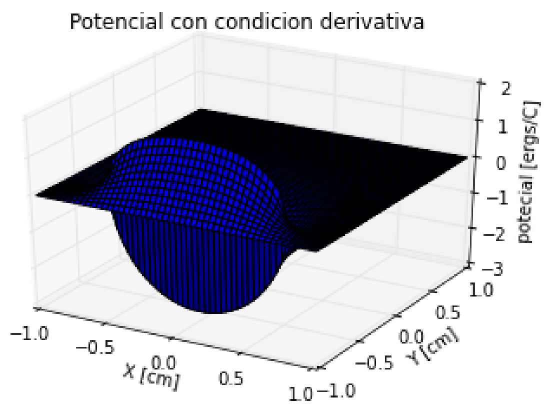

Figure 2: Gráfico en 3D que presenta los valores para el potencial con las coordenadas de la caja en un plano, y los valores para el potencial en un eje perpendicular a ese plano. Sí se considera la condición derivativa dentro de la caja

La figura 3 corresponde a un gráfico 3D con los valores del potencial en un eje perpendicular al plano de la caja. Sí se considera la condición derivativa dentro de la caja.

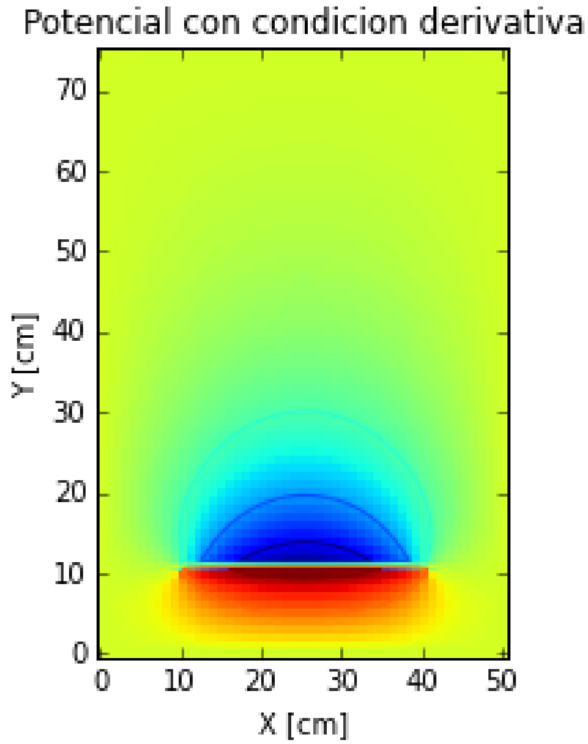

Figure 3: Gráfico de colores en 2D que presenta los valores para el potencial de la caja considerando condición de borde derivativa. Colores más azules representan mayor potencial. Color amarillo representa potencial 0

3.1 Conclusiones

El método SOR parece tener un buen comportamiento respecto al resultado esperado para el comportamiento del potencial dentro de la caja, cumpliendo correctamente con las condiciones de borde.

Previo a colocar una condición derivativa en la caja, se nota claramente el efecto de la densidad de carga de la letra "J" sobre el potencial dentro de la caja, produciendo un gradiente tal que existe mayor potencial electrostático cerca de la letra y disminuye mientras se aleja de ella.

Cuando se impone la línea con la condición derivativa, se genera un potencial discontinuo (a pesar de que la derivada se mantenga continua cuando pasa por la línea), y el efecto que genera sobre el potencial es dominante al producido por la letra, y de hecho en el gráfico se vuelve imperceptible identificar cual el cambio de potencial provocado sólo por la letra que se observaba en el caso anterior (sin condición derivativa).

En cuando al comportamiento del método para distintos valores de ω probados, no parece cambiar la solución para el potencial, si no que sólo determina la velocidad en que converge a dicha solución. Se obtiene que entre 1 y 1.8, de los números testeados, para valores más grandes del factor de convergencia, se necesitan menos iteraciones para cumplir con la tolerancia deseada.