

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 1

Decisiones Bajo Incertidumbre y Árboles de Decisión

Continuamente nos vemos enfrentados a la necesidad de tomar decisiones. Frecuentemente las decisiones se toman en presencia de incertidumbre: existen factores relevantes para el resultado cuyo comportamiento no se conoce al momento de decidir, sino que se observará cuando la decisión ya esté tomada. Por lo general, la solución a este tipo de problemas depende de la experiencia del *tomador de decisiones* y de ciertas características personales como su aversión al riesgo. Ello hace que no exista una solución única a un problema de decisión bajo incertidumbre, sino que más bien ésta depende de la persona que debe decidir. Por ejemplo, salir de casa una mañana de invierno y decidir si llevar o no paraguas es una decisión bajo incertidumbre que puede cambiar mucho entre una persona de 20 años y una de 70 años. Lo que se busca entonces es encontrar la mejor solución dado un cierto *criterio*.

En este capítulo se presenta la teoría básica de decisión bajo incertidumbre. En primer lugar se describe los elementos básicos de un proceso de decisión.

1.1 Elementos del Proceso de Toma de Decisión Bajo Incertidumbre

En esta sección revisaremos los elementos esenciales de un problema de decisión bajo incertidumbre, los cuales es necesario especificar para conseguir una adecuada descripción del problema. Lo haremos a partir del ejemplo que se describe a continuación.

Un agricultor debe decidir qué uso dar a su terreno para el próximo período productivo. Las características del terreno lo hacen favorable para el cultivo de trigo, espárragos, papas y tomates. El factor preponderante en la calidad de la producción es el clima, cuyos posibles estados son:

- Clima Seco
- Clima Normal
- Clima Lluvioso

El agricultor sabe que el clima Normal es dos veces más probable que el clima Seco o Lluvioso. Además, por experiencia él conoce cuáles son sus utilidades en función del producto escogido y el tipo de clima observado, las que se detallan en la siguiente tabla:

TABLA DE UTILIDADES [\$]

	Trigo	Espárragos	Papas	Tomates
Seco	1	3	5	4
Normal	4	7	6	5
Lluvioso	8	6	6	5

Por último, el agricultor puede arrendar el terreno por el período en 5.5.

1.1.1 Conjunto de Acciones Posibles

En todo proceso de toma de decisión, el tomador de decisión debe escoger alguna acción a de un conjunto de acciones posibles A .

En el ejemplo anterior el agricultor debe decidir en primer lugar si cultivar o arrendar el terreno, y en el caso de decidir cultivar, debe escoger el tipo de cultivo. Luego, las posibles acciones a seguir son:

1. a_1 : cultivar trigo
2. a_2 : cultivar espárragos
3. a_3 : cultivar papas
4. a_4 : cultivar tomates
5. a_5 : arrendar

1.1.2 Conjunto de Estados Posibles del Mundo

Los procesos de toma de decisión bajo incertidumbre se caracterizan por el hecho que el mundo o sistema en estudio pueda adoptar más de un estado posible, el cual no se conoce al momento de tomar la decisión. Denotaremos por S al conjunto de estados posibles del mundo.

En el ejemplo anterior, los posibles estados del mundo están relacionados con el tipo de clima, es decir:

1. s_1 : clima Seco
2. s_2 : clima Normal
3. s_3 : clima Lluvioso

1.1.3 Ley de Probabilidades

Para hacer de la incertidumbre un elemento manejable, es necesario conocer alguna Ley de Probabilidades que rijan el comportamiento de los posibles estados del mundo, es decir conocer, para cualquier conjunto $B \subseteq S$, la probabilidad que el estado que adopte el mundo sea alguno de los pertenecientes al conjunto B . Si S es un conjunto discreto denotaremos por p_s la probabilidad que el mundo adopte el estado $s \in S$.

En el ejemplo, $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.5$ y $p_3 = 0.25$.

1.1.4 Matriz de Beneficios

El último elemento básico requerido para describir un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre corresponde a los beneficios (o costos) asociados al resultado combinado de la acción elegida y el estado adoptado por el mundo. Vale decir debemos conocer una función $R: A \times S \rightarrow \mathbb{R}$, donde $R(a, s)$ indica cuál es el beneficio (o premio, pago, costo, utilidad, castigo, etc.) obtenido si la acción elegida fue a y el estado adoptado por el mundo fue s . Si los conjuntos A y S son numerables ordenaremos los beneficios en una matriz de beneficios $R = [r_{ij}]$, donde r_{ij} corresponde al beneficio percibido si la acción tomada es a_i y el estado del mundo es s_j .

En el ejemplo se tiene:

MATRIZ DE BENEFICIOS

	Trigo	Espárragos	Papas	Tomates	Arrendar
Seco	1	3	5	4	5.5
Normal	4	7	6	5	5.5
Lluvioso	8	6	6	5	5.5

Una vez identificados y conocidos estos elementos se cuenta con una adecuada descripción de un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre; podemos decir que conocemos el problema. El siguiente paso es resolverlo, i.e. determinar cuál es la acción que conviene seguir. Tengamos un poco de paciencia, y respondamos primero otra pregunta: ¿Cuál es la acción que *no* se debe tomar? Observemos por un momento la matriz de beneficios que enfrenta nuestro agricultor. ¿Resulta conveniente plantar tomates? Supongamos que dos agricultores enfrentan este mismo problema, y uno planta tomates y el otro papas. ¿Cuál de ellos obtendrá un mayor beneficio? Casos como éste nos llevan a definir el concepto de *Acción Dominada*.

Definición 1.1 (Acción Dominada) *Una acción a_1 es dominada por una acción a_2 , si*

$$\begin{aligned} R(a_1, s) &\leq R(a_2, s) && \forall s \in S \\ R(a_1, s) &< R(a_2, s) && \text{para algún } s \in S \end{aligned} \quad (1.1)$$

Reconocer dentro del conjunto de acciones posibles cuáles son *Acciones Dominadas* permite reducir el número de posibilidades de acción, pues una acción Dominada nunca será elegida como la acción a seguir independiente del criterio que se utilice (criterio racional maximizador de utilidad).

En el ejemplo, la acción cultivar tomates es dominada por la acción cultivar papas. Luego, desde el punto de vista de la maximización de utilidades, el agricultor preferirá plantar papas a tomates pues independiente del estado climático las papas le reportarán mayores ingresos que los tomates.

Pasemos ahora a la pregunta que nos interesa ¿Qué debe hacer nuestro agricultor con su terreno? Estudie los beneficios y probabilidades asociadas a los distintos estados y tome su decisión. Pregunte enseguida a otras personas. ¿Coinciden las respuestas? A menos que haya preguntado a un grupo de personas bastante homogéneo, las respuestas no coincidirán. En cualquier problema de toma de decisiones bajo incertidumbre veremos que distintos individuos toman distintas decisiones, pues deciden en base a distintos *criterios*.

1.2 Criterios de Decisión

En un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre no sabemos a priori cuál es el beneficio que reportaría tomar una acción determinada, pues éste en general depende del estado que adopte el mundo, el cual no es conocido. De esa forma, cuando el tomador de decisiones evalúa qué tan buena es una acción lo hace considerando simultáneamente todos los resultados o escenarios posibles, y “mezclándolos” de alguna manera. Los distintos tomadores de decisiones difieren en su manera de combinar los escenarios (“buenos” y “malos”) asociados a una acción al momento de evaluarla y es por ello es que sus decisiones difieren. Estas diferencias en la manera de evaluar una acción dada a partir de la totalidad de sus escenarios posibles da cuenta de distintos grados de *Aversión al Riesgo* entre los tomadores de decisiones. El concepto de aversión al riesgo es fundamental en la toma de decisiones bajo incertidumbre. No es, sin embargo, nuestro propósito discutirlo aquí (si ud. no lo ha estudiado antes puede consultar en textos de Economía, como los de Varian o Kreps), sino que sencillamente consideraremos que los distintos tomadores de decisiones difieren en la función objetivo que buscan maximizar, a la que llamaremos el *Criterio de Decisión* que utilizan.

A continuación se detallan algunos ejemplos de criterios de decisión.

1.2.1 Criterio MAXIMIN

El criterio *MAXIMIN* busca, como su nombre lo abrevia, escoger la acción que maximice el menor resultado que es posible obtener con dicha acción. Es decir, para cada decisión, se determina el peor escenario (el de beneficio menor) y se escoge la acción que tenga el Mejor Peor Resultado. Así, un tomador de decisiones que utiliza el criterio MaxiMin resuelve:

$$\max_{a \in A} \left(\min_{s \in S} R(a, s) \right)$$

En el ejemplo se tiene:

CRITERIO MAXIMIN

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	1	3	5	5.5
Normal	4	7	6	5.5
Lluvioso	8	6	6	5.5

Para cada posible acción (eliminando las acciones dominadas) se ha **destacado** el peor escenario. En los casos de cultivos el peor escenario se encuentra en un estado climático Seco, para la decisión de arrendar el beneficio es constante y por tanto todos los escenarios climáticos son equivalentes.

Aplicando el criterio MAXIMIN se tiene que la decisión de arrendar presenta el mayor menor valor de 5.5 . El agricultor al arrendar el terreno nunca ganará menos de 5.5, y ninguna de las otras acciones ofrece semejante garantía. Este criterio de decisión puede ser visto como un caso de extrema aversión al riesgo.

1.2.2 Criterio MAXIMAX

El criterio MAXIMAX busca escoger la acción que maximice el mayor resultado que es posible escoger.

$$\max_{a \in A} \left(\max_{s \in S} R(a, s) \right)$$

En la siguiente tabla se encuentran destacados los mayores posibles resultados de cada acción:

CRITERIO MAXIMAX				
	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	1	3	5	5.5
Normal	4	7	6	5.5
Lluvioso	8	6	6	5.5

De acuerdo al criterio MAXIMAX , la decisión de plantar trigo es la que presenta el mayor mejor resultado, que es de 8, el que se alcanza en un escenario climático Lluvioso. El inconveniente de este criterio es que deja de lado los peores escenarios, y en el ejemplo anterior si bien plantar trigo puede traducirse en el mayor beneficio (8), también puede transformarse en el peor beneficio (1) si es que el clima resulta seco.

1.2.3 Criterio Mínimo Arrepentimiento

El criterio de Mínimo Arrepentimiento (desarrollado por L.J. Savage, 19??) se apoya en el concepto de costo de oportunidad asociado a una decisión. Para cada posible estado del mundo s , se busca la acción $a^*(s)$ que maximice $R(a, s)$. Es decir, $a^*(s)$ es la mejor acción a elegir si el estado del mundo es s . Luego, para cualquier acción a y estado s el Arrepentimiento de esa decisión viene dado por:

$$Arr(a, s) = R(a^*(s), s) - R(a, s) \quad (1.2)$$

Para cada posible acción se determina el mayor Arrepentimiento y luego se selecciona aquella acción con el menor mayor arrepentimiento, es decir, se resuelve:

$$\min_{a \in A} \max_{s \in S} \{Arr(a, s)\}$$

Si se aplica este método al ejemplo, el primer paso es la determinación de $a^*(s)$. En la siguiente tabla aparecen destacados los mejores resultados posibles para cada estado del mundo.

MINIMO ARREPENTIMIENTO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	1	3	5	5.5
Normal	4	7	6	5.5
Lluvioso	8	6	6	5.5

por ejemplo, en caso de existir clima Normal la mejor acción a tomar es cultivar Espárragos.

Una vez identificado $a^*(s)$ se debe construir la matriz de arrepentimiento $Arr(a, s)$.

MATRIZ DE ARREPENTIMIENTO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco	4.5	2.5	0.5	0
Normal	3	0	1	1.5
Lluvioso	0	2	2	2.5

A partir de la matriz de arrepentimiento se determina para cada acción el mayor arrepentimiento (valor destacado) y finalmente se busca la acción que tenga el menor mayor arrepentimiento. En este caso corresponde a la decisión de cultivar papas cuyo mayor arrepentimiento es de 2 y se produciría en caso de existir clima Lluvioso.

1.2.4 Criterio del Valor Esperado

El criterio del *Valor Esperado* elige la acción que tenga el mayor valor esperado. El valor esperado asociado a una acción $a \in A$ viene dado por :

$$VE(a) = \sum_j R(a, s_j) \cdot p_j \quad \text{Si } S \text{ es numerable, o bien}$$

$$VE(a) = \int_{s \in S} R(a, s) dF(s),$$

donde F representa la función de distribución sobre S .

Luego el criterio de *Valor Esperado* busca la acción a^* tal que $VE(a^*) = \max_{a \in A} VE(a)$.

En el ejemplo se tiene:

VALOR ESPERADO

	Trigo	Espárragos	Papas	Arrendar
Seco (0.25)	1	3	5	5.5
Normal (0.5)	4	7	6	5.5
Lluvioso (0.25)	8	6	6	5.5
V. Esperado	4.25	5.75	5.75	5.5

Según este criterio, el agricultor es indiferente entre cultivar Espárragos o Papas.

1.3 Comparación entre los Criterios Presentados

CRITERIO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
MAXIMIN (visión pesimista)	- Disminuye el riesgo asociado a escenarios malos.	- No incorpora en la toma de decisión los escenarios favorables. - No utiliza la distribución de probabilidades.
MAXIMAX (visión optimista)	- Decide en función de los escenarios favorables	- No incorpora los escenarios desfavorables. - No utiliza la distribución de probabilidades
ARREPENTIMIENTO (visión neutral)	- Incorpora los escenarios favorables y desfavorables. - Busca reducir el riesgo	- No distingue escenarios buenos y malos. - No utiliza la distribución de probabilidades
VALOR ESPERADO (visión de largo plazo)	- Incorpora la ley de probabilidades. - Muy bueno en problemas de toma de decisión que se repiten muchas veces en el tiempo	- No incorpora medida de variabilidad en los resultados.

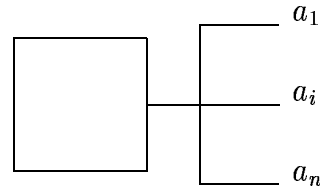
1.4 Árboles de Decisión

Los árboles de decisión representan un método ordenado de trabajo para resolver un problema de toma de decisiones. Su utilidad aumenta al aumentar la complejidad y tamaño del problema en estudio y su principio básico es la *descomposición*, es decir transformar un problema grande en varios problemas pequeños y sencillos. Árboles de decisión son particularmente provechosos en situaciones en que se verifican dos características: (i) se debe tomar decisiones en diferentes momentos del tiempo y (ii) entre una decisión y la siguiente se obtiene nueva información (relevante para las decisiones que siguen).

1.4.1 Notación

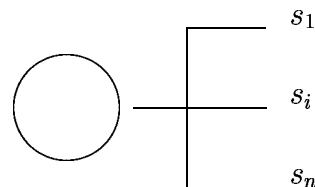
Un árbol de decisión se representa mediante un grafo dirigido con estructura arborescente (sin ciclos). Existe un nodo inicial o raíz, y de cada nodo salen ramas (arcos) que lo conectan con otros nodos. Un nodo al que llega una rama representa un evento que ocurre *después* del evento representado por el nodo del que sale dicha rama. En el proceso de toma de decisión bajo incertidumbre se distinguen dos tipos de eventos, los cuales en un árbol de decisión se denotan mediante dos tipos de nodos.

1. Nodos de Decisión: representan las decisiones, aquellos puntos en el proceso de decisión en que el tomador de decisiones puede (debe) escoger una acción de un conjunto de acciones posibles. La notación utilizada en los árboles de decisión para este evento es



El nodo cuadrado indica que se debe tomar una decisión, y las ramas que de él salen representan las posibles acciones a seguir.

2. Nodos de Eventos Aleatorios: representan la realización de un evento aleatorio, aquellos instantes en el proceso de decisión en los que se observa una variable aleatoria (cuyo valor era, hasta ese momento, incierto). La notación utilizada para describir el Evento Aleatorio es:



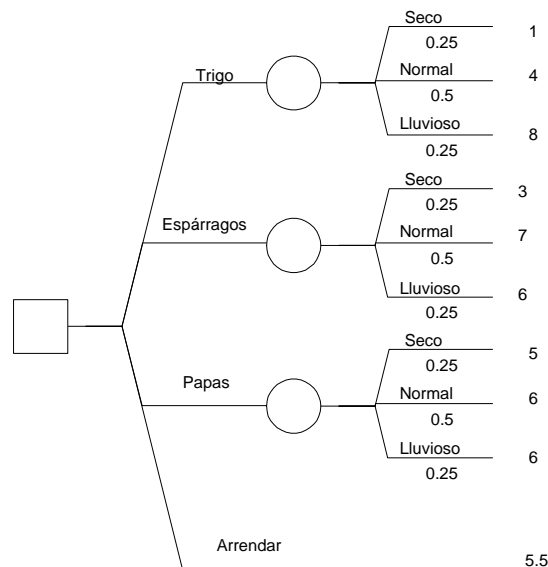
El nodo circular indica la realización de un evento aleatorio, y las ramas que de él salen representan los posibles valores que la variable aleatoria puede tomar.

Suponiendo que se deba tomar un número finito de decisiones, cualquier camino que parte desde la raíz y avanza de un nodo a otro a través de las ramas del árbol tendrá un final (un punto en el que ya se han realizado todas las variables aleatorias y no quedan decisiones a tomar). En esos puntos se ubican nodos terminales (hojas) en los cuales se especifica el beneficio obtenido si se han tomado las decisiones asociadas a ese camino y las variables aleatorias han tomado los valores asociados a ese camino.

EJEMPLO: El problema del agricultor, representado mediante un árbol de decisión, se presenta en la Figura 1.1.

Este problema es muy sencillo, se debe tomar sólo una decisión y sólo interviene un evento aleatorio. Primero se decide qué uso dar al terreno, en seguida se observa el clima, y en función de ello se obtienen los beneficios asociados. Los valores indicados en las ramas que salen de los nodos aleatorios son las probabilidades asociadas a cada uno de los posibles resultados.

Figura 1.1: Árbol de Decisión para el Problema del Agricultor



1.4.2 Resolución

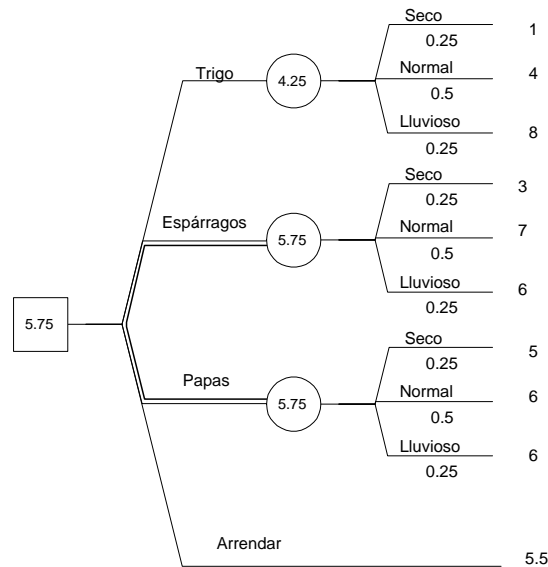
Los árboles de decisión no corresponden a un criterio de decisión, sino que es necesario definir el criterio a utilizar. En lo que sigue se utiliza como criterio la *Maximización del Valor Esperado*, pero la estructura de árbol no impone la utilización de ese criterio (se podría haber utilizado cualquier otro).

Para resolver un árbol de decisión se realiza un barrido del árbol desde las ramas terminales hacia la raíz. En cada nodo aleatorio se calcula un indicador agregado del beneficio asociado a ese nodo, combinando los beneficios que se alcanzan a partir de cada una de las ramas que salen de él y las probabilidades asociadas a ellas (la manera de combinarlos depende del criterio de decisión utilizado). Dicho indicador es considerado el beneficio asociado a ese nodo. En cada nodo de decisión se selecciona la acción que reporte el mayor beneficio, y se considera que dicho beneficio es el beneficio asociado al nodo en cuestión.

En la Figura 1.2 se presenta la resolución del problema del agricultor mediante la utilización de árboles de decisión:

En primer lugar se calcula el beneficio asociado a los nodos aleatorios, combinando los beneficios asociados a los nodos terminales y las probabilidades de cada estado climático. Dado que estamos utilizando el criterio de maximización del valor esperado, el beneficio asociado a estos nodos es el valor esperado de los beneficios que se pueden obtener a partir de ellos. Así, por ejemplo, para el caso del trigo, el beneficio esperado es 4.25. En seguida, se calcula el beneficio asociado al nodo de decisión, el cual es el máximo de los beneficios (esperados) alcanzables a través de las distintas acciones posibles. En este caso, dicho máximo es 5.75, y se alcanza ya sea cultivando papas o espárragos. Para señalar gráficamente la acción elegida

Figura 1.2: Resolución del Problema del Agricultor



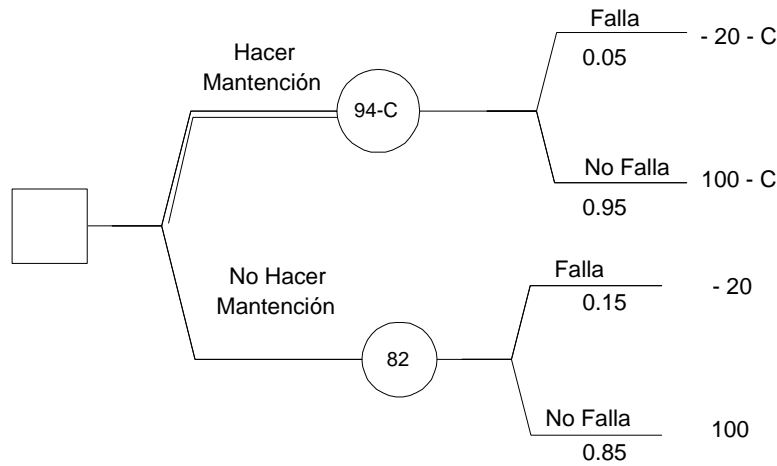
se la destaca con una doble línea.

A medida que un árbol de decisión crece los eventos aleatorios y decisiones están, en general, condicionados por los eventos anteriores.

Ejemplo: supongamos que se debe decidir si hacer o no mantención a una máquina. Si no se le hace mantención existe una probabilidad de un 15% de que la máquina falle. Si se hace mantención dicha probabilidad se reduce a la tercera parte. Si la máquina no falla, su operación arrojará utilidades por \$100. Si la máquina falla, habrá pérdidas por \$20. El costo de la mantención es $C = 10$. La Figura 1.3 muestra la solución del ejemplo anterior: conviene realizar la mantención (si C fuera mayor que 12 sería mejor no realizarla). Se debe notar que la probabilidad de falla está condicionada por la decisión (previa) de hacer o no mantención. En general, en un árbol de decisión, la ley de probabilidades asociada a un nodo aleatorio es una ley condicional en las decisiones previas y en los valores de las variables aleatorias ya observadas (puede ser, por supuesto, independiente de algunas de ellas: en el ejemplo del agricultor discutido antes la probabilidad de tener clima Normal, Seco o Lluvioso no depende de qué haya decidido cultivar el agricultor). En el cálculo de la Ley de Probabilidades Condicional el **Teorema de Bayes** aparece como una herramienta muy importante.

Teorema 1.1 (*Teorema de Bayes*): Sea $\{A_i\}_1^n$ una partición del conjunto fundamental de eventos (Ω) de un cierto fenómeno aleatorio y sea E un evento cualquiera contenido en Ω . La probabilidad de ocurrencia de un elemento A_i de la partición, dada la ocurrencia de E

Figura 1.3: Ejemplo



puede escribirse como:

$$P(A_i/E) = \frac{P(E/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(E/A_j) \cdot P(A_j)} \quad (1.3)$$

O bien, utilizando el teorema de las probabilidades totales $P(E) = \sum_{j=1}^n P(E/A_j) \cdot P(A_j)$ se tiene:

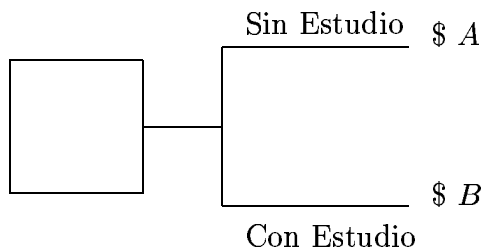
$$P(A_i/E) = P(E/A_i) \cdot \frac{P(A_i)}{P(E)} \quad (1.4)$$

1.4.3 Valor Esperado de la Información

Cuando se desea resolver un problema con incertidumbre, mientras *menor* sea la incertidumbre mejor será la decisión tomada. Considere nuevamente el problema del agricultor planteado al comienzo de este capítulo. Ya vimos en la Figura 1.2 que decide cultivar ya sea papas o espárragos, obteniendo un beneficio esperado de sólo \$5.75. Revise la matriz de beneficios presentada en la Sección 1.1.4. Si el agricultor pudiera saber de antemano que el clima resultará ser lluvioso, entonces cultivaría trigo, y obtendría un beneficio de \$8; si supiera de antemano que el clima resultará ser normal, entonces cultivaría espárragos, y obtendría un beneficio de \$7; si supiera de antemano que el clima resultará ser seco, entonces arrendaría el terreno, y obtendría un beneficio de \$5.5. Vale decir, si el pudiera conocer el estado el clima antes de decidir, tomaría decisiones distintas (y para cada caso mejores) a las que toma cuando el clima es incierto.

Cuando hablamos de *valor de la información* nos referimos a la mejora en la calidad de las decisiones (aumentos en los beneficios) debidos a la disminución de incertidumbre que la información proporciona.

Figura 1.4: Valor de un Estudio



Al momento de tomar una decisión cualquiera puede existir la posibilidad de comprar un estudio que entregue información adicional (i.e. disminuya la incertidumbre). Luego, la existencia de un estudio agrega una nueva decisión en el problema y ésta es la de tomar o no el estudio representada en la Figura 1.4. Es claro que al incorporar un estudio las decisiones tomadas mejoran y por tanto los beneficios esperados de dichas decisiones aumentan ($B > A$)¹. Por lo tanto es posible calcular el valor esperado de la información (que corresponde al valor máximo a pagar por el estudio, si el criterio de decisión utilizado es el de maximización del valor esperado) como la diferencia entre los beneficios esperados asociados a la toma de decisión con y sin el estudio.

Valor Máximo Dispuesto a Pagar por el Estudio = $\$ (B - A)$

1.4.4 Valor Esperado de la Información Perfecta

Resulta normal pensar que todo estudio tiene un margen de error y que mientras menor sea este margen mejor es el estudio. Cuando un estudio carece de error en sus predicciones se dice que entrega información perfecta. Lo anterior no significa que las fuentes de incertidumbre desaparecen o dejan de afectar el resultado final de la operación, lo que ocurre es que los resultados de ellas son conocidas antes de tomar la decisión. Al igual que en la sección anterior, el valor de la información perfecta se calcula como la diferencia entre el beneficio esperado con información perfecta y el beneficio esperado de la mejor alternativa sin estudio.

1.4.5 Probabilidad de las distintas respuestas de un estudio

A continuación se describe mediante un ejemplo el cálculo de probabilidades en los casos en que se realizan estudios o “tests” para “mejorar” la información sobre los posibles estados aleatorios de la naturaleza.

Se sabe que el 40% de la población en Santiago ha tenido varicela (peste cristal), virus

¹El beneficio asociado a las decisiones tomadas con estudio ($\$ B$) no incorpora el costo del estudio.

que permanece en la sangre de por vida ².

1. Mediante un test de sangre es posible detectar si la persona ha tenido la enfermedad con absoluta certeza, es decir, si el test resulta positivo la persona efectivamente ha tenido varicela y si el test es negativo la persona no ha tenido la enfermedad.

Según el enunciado anterior sabemos que si el test es positivo, entonces la persona tuvo varicela con probabilidad uno, y si es negativo la persona no ha tenido la enfermedad, también con probabilidad uno.

¿Cuál es la probabilidad de que el test a una persona cualquiera entregue un resultado positivo?

Dado que el test nunca se equivoca, “la fracción de veces que detecta la enfermedad” debe corresponder a la fracción de portadores de virus que existe en la realidad, es decir, un 40%. Podemos formalizar esta afirmación usando probabilidades totales.

Definición de notación:

V = la persona ha tenido varicela.

N = la persona no ha tenido varicela.

TV = el test es positivo, es decir el test dice que la persona ha tenido varicela.

TN = el test es negativo, es decir el test dice que la persona no ha tenido varicela.

$$\Pr(V) = \Pr(V|TV) \Pr(TV) + \Pr(V|TN) \Pr(TN)$$

Sabemos que $\Pr(V) = 0.4$, $\Pr(V|TV) = 1$ y $\Pr(V|TN) = 0$. Además $\Pr(TV) + \Pr(TN) = 1$.

Reemplazando tenemos:

$$0.4 = 1 \cdot \Pr(TV) + 0 \cdot (1 - \Pr(TV)).$$

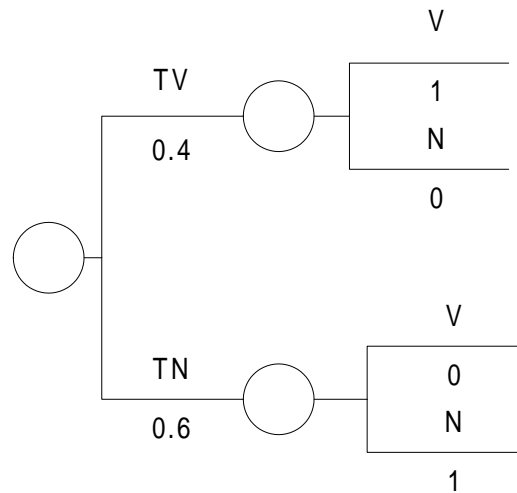
Por lo tanto, $\Pr(TV) = 0.4$ y $\Pr(TN) = 0.6$, vale decir la probabilidad de obtener un determinado resultado en el test es igual a la probabilidad que ese resultado se dé efectivamente en la naturaleza (en este caso la fracción de la población que ha tenido o no varicela).

Observación: Notar que no hemos incluido ninguna decisión para centrarnos en el cálculo de probabilidades. En general se podrá decidir la aplicación o no del test y, una vez conocido el resultado, se podrá tomar otras decisiones (tratamientos?).

2. Suponga ahora que el test disponible verdaderamente no es tan preciso como el anterior. Mediante un muestra de sangre sabemos que el test tiene la siguiente precisión: si el test sale positivo (es decir, dice que la persona tiene la enfermedad) entonces con probabilidad 80% efectivamente la persona tuvo varicela. Por otra parte, si el test sale

²Por favor, no se alarme. La información es completamente ficticia.

Figura 1.5: Test con información perfecta



negativo (el test dice que la persona no tuvo la enfermedad) entonces con probabilidad 90% la persona efectivamente no tuvo la enfermedad.

Al igual que en el caso anterior, nos preguntamos:

¿Cuál es la probabilidad de que el test a una persona cualquiera entregue un resultado positivo?

Una respuesta apresurada podría ser que se conservan las mismas probabilidades de toda la población (0.4 de que sea positivo). Sin embargo es fácil darse cuenta que eso no es necesariamente cierto. Imaginemos un test que, de resultar negativo, entonces es seguro que la persona no ha contraído la enfermedad; sin embargo, de resultar positivo, no es seguro que la persona haya tenido varicela: el test puede estar equivocado. Ese examen arroja positivo a todas aquellas personas que han tenido la enfermedad, y además arroja positivo a personas que no la han sufrido, vale decir arroja un resultado positivo con una mayor frecuencia de la que se da la enfermedad en la población. Más aún, un test podría tener más (o menos) resultados posibles que estados hay en la naturaleza. En nuestro ejemplo, el examen de sangre podría tener tres resultados posibles: positivo, incierto y negativo (donde obtener un resultado incierto podría significar, por ejemplo, que es igualmente probable que la persona haya tenido varicela o que nunca haya estado enferma).

¿Cuál es entonces la respuesta a nuestra pregunta? Notemos que *la posibilidad de hacer* un test no afecta a la naturaleza: la probabilidad a priori que una persona haya tenido varicela sigue siendo de un 40% (es la probabilidad a posteriori la que se ve modificada según sea el resultado del test). Podemos utilizar esa condición para calcular las probabilidades de obtener uno u otro resultado en el test.

Nuevamente podemos escribir:

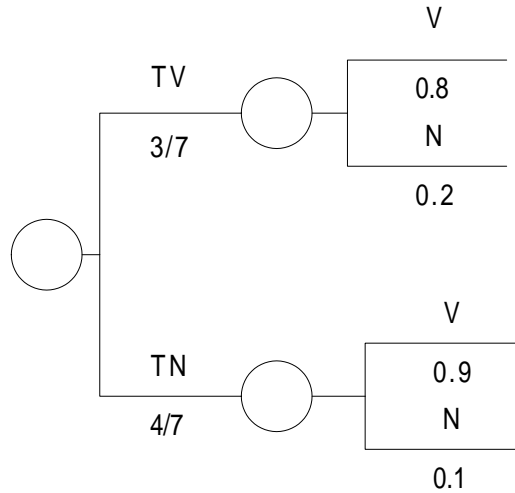
$$\Pr(V) = \Pr(V|TV) \Pr(TV) + \Pr(V|TN) \Pr(TN)$$

donde las únicas incógnitas son $\Pr(TV)$ y $\Pr(TN)$, que además deben sumar 1. Poniendo $\Pr(TN) = 1 - \Pr(TV)$ en la ecuación anterior y despejando $\Pr(TV)$ tenemos

$$\Pr(TV) = \frac{\Pr(V) - \Pr(V|TN)}{\Pr(V|TV) - \Pr(V|TN)},$$

suponiendo $\Pr(V|TV) \neq \Pr(V|TN)$ (si fueran iguales el test no aporta ninguna información: el conocer el resultado del test no modifica nuestra opinión respecto de lo verosímil que es que la persona haya tenido la enfermedad). Con los números del ejemplo $\Pr(TV) = \frac{3}{7}$ y $\Pr(TN) = \frac{4}{7}$, como se muestra en la Figura 1.6.

Figura 1.6: Test con información imperfecta



Generalizando, tenemos estados posibles en la naturaleza X_1, \dots, X_n , con probabilidades de ocurrencia p_1, \dots, p_n . Un test arroja m resultados posibles, T_1, \dots, T_m , y, dado el resultado del test, conocemos la probabilidad de ocurrencia de los distintos estados, vale decir conocemos $r_{ij} = \Pr[X_i|T_j] \quad \forall i = 1, n \text{ y } j = 1, m$. Nos interesa determinar q_1, \dots, q_m , la probabilidad que el test arroje cada uno de los posibles resultados. Aplicar probabilidades totales al igual que en el ejemplo permite escribir:

$$p = R \cdot q$$

$$\sum_{j=1}^m q_j = 1$$

En dicho sistema al menos una (cualquiera) de las ecuaciones es redundante, pues $\{p_i\}_{i=1}^n$ y $\{r_{ij}\}_{i=1}^n$ son leyes de probabilidad, y por tanto la suma de los elementos de cada uno de esos conjuntos debe ser 1. El sistema de ecuaciones puede estar sobre o sub determinado, según sea la relación entre el número de estados posibles en la naturaleza y el número de resultados posibles del test. En la medida que la descripción corresponda a un test que efectivamente puede existir el sistema tendrá solución, si bien ésta podría no ser única (caso en el que se requiere de más información respecto del test).

EJEMPLO:

Volvamos al problema del agricultor utilizado a lo largo de este capítulo, pero supongamos ahora que él puede acceder a un estudio climático antes de tomar su decisión. Las características del estudio son las siguientes:

- El resultado del estudio es un pronóstico de Clima Seco, Normal o Lluvioso.
- La probabilidad que el clima corresponda al señalado por el estudio es 80% y 10% a cualquiera de los dos restantes. Por ejemplo, la probabilidad que el clima sea Seco dado que el estudio pronosticó Clima Seco es 80%, y la probabilidad que el clima sea Seco dado que el estudio pronosticó clima Normal es 10%.

Con esta información se desea determinar el máximo valor que el agricultor está dispuesto a pagar por el estudio. La resolución del problema se presenta en la Figura 1.7.

La rama del árbol correspondiente a la situación “Sin Estudio” no se ha detallado, pues es la misma que la presentada en la Figura 1.1. El primer paso para resolver el problema es determinar la probabilidad de obtener cada uno de los pronósticos en el estudio. La información que poseemos respecto a la confiabilidad del estudio, sumada a que sabemos que las probabilidades de ocurrencia del Clima Seco, Normal y Lluvioso en la realidad son 0.25, 0.5 y 0.25 respectivamente, nos permite determinar (aplicando probabilidades totales) que la probabilidad que el estudio pronostique Clima Seco es $3/14$, la probabilidad de obtener un pronóstico de Clima Normal es de $8/14$ y con probabilidad $3/14$ el pronóstico será de Clima Lluvioso. Se debe notar que, en las ramas que salen de los nodos aleatorios, las probabilidades asociadas son las condicionales en el resultado del estudio.

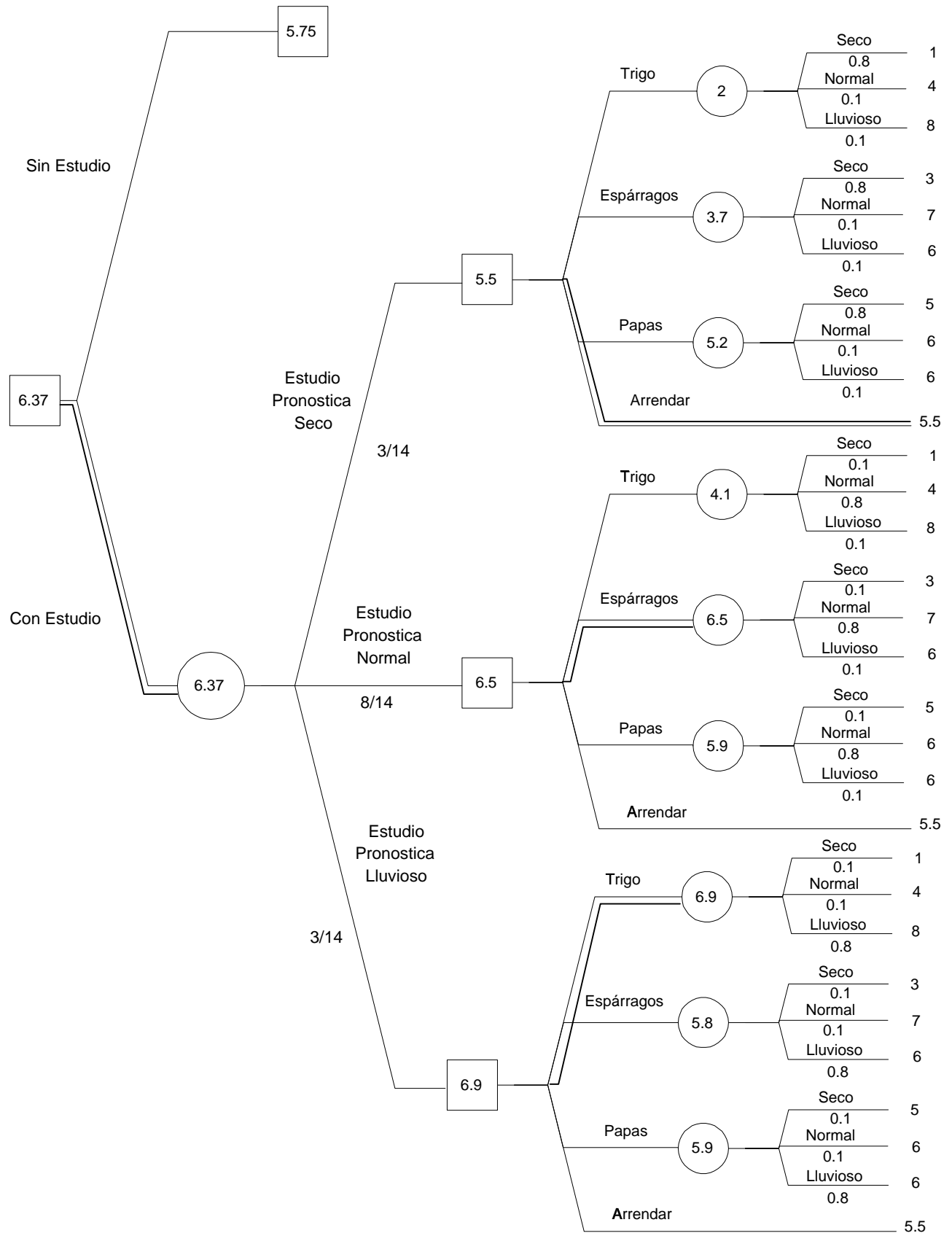
Del árbol es posible calcular el valor del estudio (el mayor valor que el agricultor estaría dispuesto a pagar por él) como

$$\text{Valor del Estudio} = \$ 6.37 - \$ 5.75 = \$ 0.62$$

La solución presentada gráficamente en el árbol debe leerse como sigue: “Realizar el estudio Climático. Si el pronóstico obtenido es de Clima Seco, arrendar el terreno; si el pronóstico es Clima Normal, cultivar espárragos; si el estudio pronostica Clima Lluvioso, cultivar Trigo”.

A modo de ejercicio, verifique que el agricultor estaría dispuesto a pagar \$ 1.125 por un estudio climático que arrojará información perfecta (i.e. un estudio que predice exactamente lo que ocurrirá con el clima).

Figura 1.7: El problema del Agricultor con Estudio Climático



1.5 Ejercicios

1. Una empresa está evaluando la posibilidad de lanzar un nuevo producto al mercado. Para ello dispone de tres alternativas:

- Realizar un test de mercado y decidir si lanzar o no el producto en función de los resultados del estudio.
- Lanzar el producto inmediatamente.
- No lanzar el producto al mercado.

En ausencia del estudio, la empresa estima que con un 55% de probabilidad el lanzamiento del nuevo producto será exitoso. Si el producto es exitoso la empresa obtendrá utilidades por \$ 300.000, pero si fracasa el producto se obtendrán pérdidas por \$ 100.000.

El costo de realizar el estudio es de \$ 30.000, y tiene 60% de probabilidad de entregar resultados favorables y 40% de entregar resultados desfavorables. Si el estudio entrega resultados favorables, con un 85% de probabilidad el producto será exitoso, mientras que si el resultado del estudio es desfavorable con un 10% de probabilidad el producto será exitoso.

Determine la estrategia a seguir por parte de la empresa. Cuál es el beneficio resultante de dicha estrategia?. Determine el valor de un estudio que entregue información perfecta sobre el éxito o fracaso del producto.

2. Un paciente entra al hospital con fuertes dolores abdominales. Basado en experiencias pasadas, el Doctor Palma cree que con 28% de probabilidad el paciente tiene apendicitis y que con 72% de probabilidad tiene algún problema menor. El Dr. Palma puede operar al paciente inmediatamente o esperar 12 horas hasta obtener los resultados del examen. En 12 horas el doctor sabrá exactamente si el paciente tiene o no apendicitis. El problema es que en 12 horas el apéndice del paciente puede perforarse (si es que tiene apendicitis), haciendo la operación mucho más riesgosa. El Dr. Palma cree que si espera las 12 horas para obtener los resultados del examen, existe un 6% de probabilidad que el paciente se encuentre con un apéndice perforado, 22% de probabilidad que el paciente se encuentre con una apendicitis normal y 72% de probabilidad que tenga un problema menor. De experiencias pasadas, el Dr. Palma ha determinado la probabilidad de muerte durante la operación dependiendo del estado del paciente, la que se muestra en la siguiente tabla:

Estado	Probabilidad
Apendicitis Normal	0.009
Apéndice Perforado	0.064
Problema Menor	0.004

Un paciente con un problema menor que no es operado, siempre vive.

Suponiendo que el objetivo del doctor es maximizar la probabilidad de sobrevivencia del paciente, determine la estrategia a seguir.

3. Resuelva los problemas 1 y 2 usando los criterios de MAXIMIN y de Mínimo Arrepentimiento.
4. Un exportador de manzanas tiene en estos momentos una partida cuya procedencia no conoce con exactitud. El cree, sin embargo, que con probabilidad p es del productor A y con probabilidad $1 - p$ es del productor B . La partida proviene de un solo productor. Las manzanas pueden ser de calidades “Calidad Premium” o “Calidad Standard”. Los dos productores producen ambos tipos de manzanas, habiendo en una partida tanto cajas Premium como Standard. Las manzanas no son clasificadas por los productores. Por experiencia se sabe que una partida de manzanas tiene la siguiente proporción de cajas de calidades Premium y Standard según sea el productor:

CALIDAD	PRODUCTOR	
	A	B
PREMIUM	0.9	0.7
STANDARD	0.1	0.3

La partida de manzanas, actualmente en poder del exportador, puede ser exportada o vendida en el mercado nacional. Si es exportada al llegar a su destino será sometida a un control de calidad, que consiste en sacar 1 caja de la partida. Si esta caja contiene manzanas Premium, el comprador pagará US\$ 1000 por la partida, y si es Standard pagará US\$100. En lugar de exportar, la partida puede venderse en el mercado nacional a US\$800.

- (a) Represente el problema mediante un árbol de decisión y explicita todas las probabilidades.
- (b)Cuál es el menor valor de p que hace atractivo exportar las manzanas.
- (c) Suponga que a un costo muy menor, que se puede asumir cero, el exportador puede repetir en Chile el experimento que realizará el comprador extranjero. ¿Para qué valores de p conviene hacer el experimento en Chile? Asuma que en caso de indiferencia entre hacer y no hacer el experimento, la decisión es no hacerlo, ya que siempre el experimento tiene un costo, aunque este sea muy menor.
- (d) si $p=0.5$. ¿Cuánto es lo máximo que el exportador está dispuesto a pagar por el experimento que se realiza en suelo nacional?
5. El ministro de Salud desea determinar si los inmigrantes al país deben ser testeados para determinar si son portadores de una enfermedad contagiosa. Asuma que la decisión es tomada en base a criterios económicos.
- Asuma que cada inmigrante que ingresa al país y tiene la enfermedad le cuesta \$100.000 y que cada inmigrante que entra al país y no tiene la enfermedad contribuye \$10.000 a la economía nacional. Asuma que 10% de todos los inmigrantes potenciales tienen la enfermedad.

El gobierno puede admitir a todos los inmigrantes, admitir ningún inmigrante o testear los inmigrantes para detectar si son portadores de la enfermedad antes de decidir si admitirlos o rechazarlos. El test cuesta \$100 por persona; el resultado del test es positivo o negativo. Si el resultado del test es positivo, la persona definitivamente tiene la enfermedad. Sin embargo, 20% de todas las personas que efectivamente tienen la enfermedad tienen un resultado negativo al hacer el test (es decir, 20% de los casos el test no detecta la enfermedad, estando presente). El test siempre resulta negativo si la persona no tiene la enfermedad.

El objetivo del gobierno es maximizar el beneficio esperado menos el costo esperado por inmigrante potencial. Determine la estrategia óptima para el gobierno.

¿Cuánto es el máximo precio que estaría dispuesto a pagar por un test médico que determinará con exactitud si la persona tiene o no la enfermedad?

Bibliografía

- [1] Varian, H.R. *Microeconomic Analysis*. W.W. Norton & Co.
- [2] Kreps, D. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press.

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 2

Introducción a la Programación Dinámica

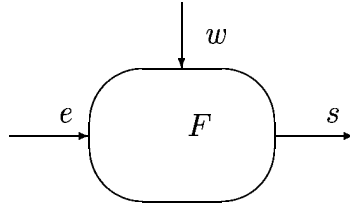
Muchos problemas de decisión de la vida real no corresponden simplemente en determinar la acción a seguir en un instante aislado, sino que se debe tomar una secuencia de decisiones a través del tiempo las cuales interactúan entre sí.

Por ejemplo, consideremos un problema clásico de manejo de inventarios en el que el administrador de una tienda debe decidir cada mes cuántas unidades de cierto producto debe ordenar para enfrentar una demanda aleatoria. Supongamos que el producto en cuestión puede ser vendido por un período máximo de un año y que pasado este período todas las unidades sobrantes pierden la totalidad o la mayor parte de su valor (para fijar ideas piense en agendas, el modelo 99 de un automóvil, artículos con el logo “01/01/00”, etc.). Bajo este marco, la decisión de cuánto ordenar un mes dado debe considerar no sólo las ventas de ese mes ya que lo que sobra un período es inventario para el siguiente. De esta forma, la decisión de cuánto ordenar un mes debe ser capaz de incluir el comportamiento de compra de todo el período que resta hasta el final del año.

Para resolver este tipo de problemas se revisará en este capítulo una técnica conocida como *Programación Dinámica* la cual en esencia es una forma ordenada de manejar la información necesaria para la toma de decisión en cada instante.

2.1 Formulación General

Consideremos un sistema dinámico caracterizado por tres conjuntos E , S y W y una función $F : E \times W \rightarrow S$. Donde E es el conjunto de variables de entrada (acciones), S el conjunto de variables de salida (estados del sistema), W el conjunto de variables aleatorias y F la función característica del sistema o simplemente función del sistema. De esta forma conocidos un vector de variables de entrada $e \in E$ y una realización de las variables aleatorias $w \in W$ se obtiene un vector de salida $s = F(e, w)$.



Se asumirá que las variables de entrada e son escogidas por el tomador de decisión mientras que las variables aleatorias w son escogidas por la *Naturaleza* de acuerdo a algún mecanismo probabilístico conocido.

Para el ejemplo de manejo de inventarios planteado al comienzo, una entrada $e = (e_1, e_2, \dots, e_{12})$ corresponde a las cantidades ordenadas cada uno de los doce meses del año, de forma que el conjunto de entradas posibles, E queda definido por $E = \{e \in \mathbb{N}^{12} | e_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 12\}$. Cada elemento del conjunto $W = \{w = (w_1, \dots, w_{12})\}$ es un vector de 12 componentes, que corresponden a las demandas observadas cada mes. El conjunto $S = \{s = (s_1, \dots, s_{12})\}$ contiene los niveles de inventario observado al comienzo de cada mes. Por último, la función característica del sistema para este ejemplo establece la conservación del inventario es decir

$$s = F(e, w) \iff s_{k+1} = \max\{0, s_k + e_k - w_k\}$$

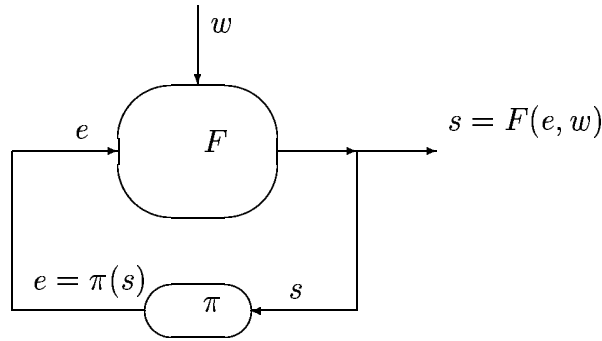
.

Definición 2.1 Se dice que $\pi : S \rightarrow E$ es una función de decisión o una política para el sistema si $\forall w \in W$ la ecuación

$$e = \pi(F(e, w))$$

tiene solución única en e .

Luego, para cada posible realización de las variables aleatorias w , una política π genera una entrada única e y una salida única s .



Para el ejemplo de manejo de inventarios, algunos ejemplos de políticas de decisión son:

1. Ordenar todos los meses una unidad.
2. Ordenar 2 si el inventario vigente es 0 y ordenar 1 si el inventario es 1.
3. Ordenar 1 sólo si el inventario del próximo mes es 0.

No es difícil ver que los tres criterios anteriores definen una única secuencia de acciones a seguir a lo largo del año para niveles fijos de demanda y por tanto son efectivamente políticas de decisión. Sin embargo, el tercer criterio no puede ser aplicado en la práctica, pues con él se toman decisiones basados en información que no está disponible: al momento de decidir cuánto pedir este mes no sabemos cuál va a ser el inventario del próximo mes. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2 Se dice que una política de decisión es No Anticipativa si las decisiones tomadas con ella dependen sólo de la información disponible al momento de tomarlas.

Más formalmente, la política π es no anticipativa ssi se cumple lo siguiente: dados $w, \tilde{w} \in W$, $e, \tilde{e} \in E$ soluciones de $e = \pi(F(e, w))$ y $\tilde{e} = \pi(F(\tilde{e}, \tilde{w}))$ respectivamente, si existe $k \geq 1$ tal que $w_1 = \tilde{w}_1, w_2 = \tilde{w}_2, \dots, w_k = \tilde{w}_k$, entonces $e_1 = \tilde{e}_1, \dots, e_k = \tilde{e}_k$.

Sólo consideraremos políticas de decisión admisibles aquellas que sean no anticipativas. En lo que sigue designaremos por Π al conjunto de políticas de decisión no anticipativas.

Una política $\pi \in \Pi$ y una realización $w \in W$ generan una única tripleta (e, w, s) , donde e es la solución de $e = \pi(F(e, w))$ y $s = F(e, w)$. Lo anterior nos permite garantizar la existencia de una función $f : W \times \Pi \rightarrow E \times W \times S$ tal que $(e, w, s) = f(w, \pi)$.

Sea $U : E \times W \times S \rightarrow \mathbb{R}$ una función que represente la utilidad del tomador de decisión. Para resolver el problema de decisión se requiere conocer qué tipo de criterio adopta el tomador

de decisión frente a la incertidumbre. Por ejemplo para los criterios de *MAXMIN* y de *Valor Esperado* los problemas a resolver son:

- **Criterio MaxMin:**

$$\max_{\pi \in \Pi} \min_{w \in W} \{U(f(w, \pi))\}$$

- **Criterio del Valor Esperado:**

$$\max_{\pi \in \Pi} \{E_w [U(f(w, \pi))]\}$$

En los dos casos anteriores se tiene que el problema de decisión bajo incertidumbre se reduce a un problema de maximización sobre Π de una función numérica. La dificultad que presentan estos problemas está en que Π es un conjunto de funciones que satisfacen la condición de ser no anticipativas y por tanto se hacen en general inaplicables las técnicas clásicas de optimización como programación matemática. Para resolver este tipo de problema se utiliza una técnica conocida como *Programación Dinámica* (PD), la que consiste básicamente en descomponer el problema de maximización sobre Π en una secuencia de problemas de optimización mucho más simples los que son construidos y resueltos partiendo desde el final del horizonte de planificación y retrocediendo en el tiempo.

Nuestro interés se concentrará en un caso especial de problemas, aquellos en que se puede actuar sobre el sistema (tomar decisiones) sólo en un conjunto discreto de instantes, de forma que la evolución del sistema puede ser modelada con un eje de tiempo discreto.

2.2 Modelo de Decisión Secuencial en Tiempo Discreto

Consideremos un sistema que evoluciona a través del tiempo durante N períodos. Al comienzo de cada período se observa el estado del sistema, se puede decidir actuar sobre el sistema de alguna forma, y una vez tomada la decisión se observa la realización de alguna variable aleatoria. Llamando s_k el estado del sistema en el período k , e_k acciones tomadas en el período k y w_k el comportamiento de la naturaleza en el período k , se tiene que el estado del sistema en el período $k + 1$ está determinado por s_k , e_k y w_k de acuerdo a la ecuación de recurrencia:

$$s_{k+1} = f_k(s_k, e_k, w_k) \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

2.2.1 Supuestos

- Se asume que w_k se selecciona de acuerdo a algún mecanismo probabilístico que en principio puede depender de s_k y e_k pero que no depende de w_0, w_1, \dots, w_{k-1} (si dependiera de ellas entonces w_0, w_1, \dots, w_{k-1} deberían estar incluidas en la información que define s_k).

- Existe *Información Perfecta*, es decir, el tomador de decisión escoge e_k conociendo perfectamente el estado del sistema s_k .
- La función de utilidad es *Aditiva*, es decir,

$$U(e, w, s) = \sum_{k=0}^{N-1} U_k(e_k, w_k, s_k) + U_N(s_N)$$

El término $U_N(s_N)$ representa el beneficio residual que se obtiene por terminar la evolución del sistema en el estado s_N .

- Se utiliza como criterio de decisión la maximización del valor esperado de la utilidad.

2.2.2 Resolución

De acuerdo a los supuestos establecidos y a las características discretas del modelo una política de decisión π toma la forma:

$$\pi = (\pi_0(s_0), \pi_1(s_1), \dots, \pi_{N-1}(s_{N-1})),$$

tal que la acción a seguir en el período k es $e_k = \pi_k(s_k)$. Vale decir es una regla que indica qué acción tomar en el período k si el estado del sistema es s_k , para todo período k y estado posible s_k .

El problema a resolver consiste entonces en determinar la función $\pi^* = (\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_{N-1}^*)$ que maximice

$$E_w \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} U_k(\pi_k(s_k), w_k, s_k) + U_N(s_N) \right\},$$

sujeto a la restricción $s_{k+1} = f_k(s_k, e_k, w_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$.

Para resolver este problema se construyen en forma secuencial y retrocediendo en el tiempo las funciones π_k^* , de la forma que se explica a continuación.

1. Cálculo de π_{N-1}^* . Sea s_{N-1} el estado del sistema en el período $N-1$. Entonces si se escoge una acción e a seguir la utilidad esperada que se obtendrá desde el período $N-1$ hasta el final ($V_{N-1}(e, s_{N-1})$) será:

$$V_{N-1}(e, s_{N-1}) = E_{w_{N-1}} \{U_{N-1}(e, w_{N-1}, s_{N-1}) + U_N(f_{N-1}(s_{N-1}, e, w_{N-1}))\}$$

Luego $\pi_{N-1}^*(s_{N-1}) = \arg \max_e \{V_{N-1}(e, s_{N-1})\}$. Al valor de dicho máximo lo denotamos $V_{N-1}^*(s_{N-1}) \equiv V_{N-1}(\pi_{N-1}^*(s_{N-1}), s_{N-1})$.

2. Cálculo de π_k^* , $k = 0, 1, \dots, N-1$. En forma análoga consideramos un estado del sistema s_k en el período k y buscamos la acción que maximice la utilidad esperada acumulada del período k hasta el final ($V_k(e, s_k)$). En forma recursiva $V_k(e, s_k)$ se construye como:

$$V_k(e, s_k) = E_{w_k} \{U_k(e, w_k, s_k) + V_{k+1}^*(f_k(s_k, e, w_k))\}$$

De donde $\pi_k^*(s_k) = \arg \max_e \{V_k(e, s_k)\}$ y $V_k^*(s_k) = \max_e \{V_k(e, s_k)\} = V_k(\pi_k^*(s_k), s_k)$.

El procedimiento anterior permite encontrar la estrategia óptima de acción a lo largo de los N períodos de tal forma de maximizar la utilidad esperada. Para ello se apoya en la construcción de funciones auxiliares V_k^* que representan la utilidad máxima en términos esperados que se puede obtener desde el período k hasta el final. La idea básica en su formulación es la siguiente: si actualmente el sistema se encuentra en el período k , todo lo que ha pasado antes de k está definido y sólo se puede optimizar la evolución futura del sistema.

La principal desventaja de este método está en la cantidad de subproblemas de optimización que deben ser resueltos: en efecto, para conocer V_k^* se debe determinar la acción óptima $\pi_k^*(s_k) \forall s_k \in S$, es decir, en cada período se deben resolver tantos problemas de maximización como estados posibles tenga el sistema.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Problema de Inventarios

Retomemos el problema de manejo de inventarios expuesto al comienzo de esta sección. Supongamos que restan 3 meses para el final del período de comercialización y que actualmente existe una unidad disponible en inventario. La demanda mensual es estocástica con las siguientes características: con probabilidad $p_0 = 0.2$ no existen compradores interesados por el producto, con probabilidad $p_1 = 0.5$ existe un comprador interesado por el producto y con probabilidad $p_2 = 0.3$ existen dos clientes interesados en el producto. El precio de venta del producto es $\$P = 10$, el costo del producto es $\$c = 5$, el costo de poner una orden es $\$K = 10$ y el costo de rechazar una venta (no vender el producto a un cliente que lo demanda) es $\$I = 8$. ¿Cuál es la mejor estrategia para ordenar producto durante los próximos tres meses?

Sea s_k el nivel de inventario al comienzo del período k antes de realizar la orden (variable de estado), e_k la cantidad de producto a ordenar en el período k (variable de decisión) y w_k la demanda observada en el período k .

De esta forma la relación recursiva que satisface el inventario $s_{k+1} = f(s_k, e_k, w_k)$ toma la forma:

$$s_{k+1} = \max\{0, s_k + e_k - w_k\}$$

La función de utilidad para un mes k cualquiera $U_k(e_k, w_k, s_k)$ viene dada por:

$$U_k(e_k, w_k, s_k) = P \cdot \min(w_k, e_k + s_k) - c \cdot e_k - K \cdot r_k - I \cdot \max(0, w_k - e_k - s_k),$$

donde $r_k = 1$ si se ordena producto en el período k y $r_k = 0$ si no.

Las funciones de beneficio esperado acumulado toman la forma:

$$V_k(e_k, s_k) = E_{w_k} \{U_k(e_k, w_k, s_k) + V_{k+1}^*(s_{k+1})\}$$

Ahora bien para resolver este problema debemos construir en forma recursiva las funciones V_k^* . Para ello aprovecharemos el carácter discreto del conjunto de acciones posibles para representar matricialmente el problema. Si consideramos que a lo más pueden venderse 2 unidades por mes y que sólo restan tres meses de venta y se dispone de una unidad de inventario inicial, a lo más se pueden ordenar 5 unidades al comienzo, 4 unidades después del primer mes y sólo 2 en el último mes.¹ Esto limita a 6 las acciones posibles en el primer período, a 5 en el segundo y a 3 en el tercero.

- **período 4**

Al comenzar el cuarto mes ya no es posible vender más unidades y por tanto se tiene $V_4^*(s) = 0 \quad \forall s \geq 0$.

- **período 3**

$$V_3^*(s_3) = \max_{e_3} V_3(e_3, s_3) = \max_{e_3} \{E_{w_3} [U_3(e_3, w_3, s_3) + V_4^*(s_4)]\}$$

s_3	$V_3(e_3, s_3)$			$V_3^*(s_3)$	e_3^*
	$e_3 = 0$	$e_3 = 1$	$e_3 = 2$		
0	-8.8	-9.4	-9	-8.8	0
1	5.6	-4	-9	5.6	0
2	11	-4	-9	11	0
3	11	-4	-9	11	0
4	11	-4	-9	11	0
5	11	-4	-9	11	0
6	11	-4	-9	11	0

En la tabla anterior la primera columna representa los posibles estados (inventario disponible) al comenzar el último mes (período 3). Las siguientes 3 columnas presentan, para cada estado posible, el beneficio esperado si se escoge la acción no ordenar, ordenar 1 unidad u ordenar 2 unidades respectivamente. La penúltima columna presenta V_3^* , el máximo beneficio esperado que se puede alcanzar para cada estado, mientras que la última columna indica cuál es la mejor acción posible para cada estado. Se puede ver que independiente de s_3 la acción óptima a seguir es no ordenar.

Por ejemplo, el elemento asociado a $s_3 = 1$ y $e_3 = 1$ se calcula como

$$\begin{aligned}
 V_3(1, 1) &= E_{w_3} \left[U_3(1, w_3, 1) + \overbrace{V_4^*(s_4)}^0 \right] \\
 &= -K - c + p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot P + p_2 \cdot 2P \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

¹Esto supone un tomador de decisiones racional.

- período 2

$$V_2^*(s_2) = \max_{e_2} \{E_{w_2} [U_2(e_2, w_2, s_2) + V_3^*(s_3)]\}$$

s_2	$V_2(e_2, s_2)$					$V_2^*(s_2)$	e_2^*
	$e_2 = 0$	$e_2 = 1$	$e_2 = 2$	$e_2 = 3$	$e_2 = 4$		
0	-17.6	-15.32	-6.64	-4.62	-8	-4.62	3
1	-0.32	-1.64	0.38	-3	-8	0.38	2
2	13.36	5.38	2	-3	-8	13.36	0
3	20.38	7	2	-3	-8	20.38	0
4	22	7	2	-3	-8	22	0
5	22	7	2	-3	-8	22	0
6	22	7	2	-3	-8	22	0

Por ejemplo, el elemento asociado a $s_2 = 1$ y $e_2 = 0$ se calcula como

$$\begin{aligned}
 V_2(0, 1) &= E_{w_2} [U_2(0, w_2, 1) + V_3^*(s_3)] \\
 &= p_0 \cdot (0P + \underbrace{V_3^*(1)}_{5.6}) + p_1 \cdot (P + \underbrace{V_3^*(0)}_{-8.8}) + p_2 \cdot (P - I + \underbrace{V_3^*(0)}_{-8.8}) \\
 &= -0.32
 \end{aligned}$$

Para el segundo período conviene ordenar 3 unidades si el inventario inicial en este período es 0, conviene ordenar 2 si el inventario inicial es 1 y conviene no ordenar si el inventario inicial es superior o igual a 2 unidades.

- período 1

$$V_1^*(s_1) = \max_{e_1} \{E_{w_1} [U_1(e_1, w_1, s_1) + V_2^*(s_2)]\}$$

s_1	$V_1(e_1, s_1)$						V_1^*	e_1^*
	$e_1 = 0$	$e_1 = 1$	$e_1 = 2$	$e_1 = 3$	$e_1 = 4$	$e_1 = 5$		
1	1.98	-2.524	1.87	4.598	2.514	-2	4,598	3

Para el primer período el inventario inicial es conocido y vale 1. La mejor acción a seguir es ordenar 3 unidades y el beneficio acumulado que se obtiene para los tres meses es de \$4.598.

2.3.2 Problema de Asignación

La formulación del modelo de programación dinámica de este capítulo se enmarcó en un contexto de problemas de decisión secuencial a través del tiempo. En general, la programación dinámica puede ser usada para resolver una gama mucho más amplia de problemas que no necesariamente incluyen decisiones a través del tiempo. Con el objeto de introducir otras aplicaciones de la programación dinámica formularemos y resolveremos un problema de asignación mediante esta técnica.

Consideremos el problema de encontrar las cantidades no negativas (u_0, \dots, u_{N-1}) de N productos a comprar de modo de satisfacer la restricción

$$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \cdot u_k = A$$

al menor costo

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_k(u_k)$$

donde $A, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ son constantes positivas conocidas y g_0, \dots, g_{N-1} son funciones reales a valores positivos conocidas.

Definamos como variables de estado $\{x_k\}$ que representan el aporte agregado de los k primeros productos a la restricción $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \cdot u_k = A$, es decir,

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot u_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

De esta forma el problema a resolver consiste en

$$\min \sum_{k=0}^{N-1} g_k(u_k) \quad (1)$$

s.a

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot u_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

$$x_0 = 0 \quad (3)$$

$$x_N = A \quad (4)$$

Claramente el problema anterior es susceptible de ser resuelto usando las técnicas de programación dinámica vistas en este capítulo. Tiene una función de utilidad aditiva (1), las variables de estado están ligadas mediante una relación recursiva (2) y se tienen condiciones de borde inicial (3) y final (4).

2.4 Ejercicios

1. Considere el problema de asignación anterior. Suponga que la canasta de productos está constituida por cuatro bienes B, C, D y E . Se sabe que $\lambda_B = 1$, $\lambda_C = 2$, $\lambda_D = 4$, $\lambda_E = 7$, $A = 20$ y $g_B(x) = 3x$, $g_C(x) = 6x$, $g_D(x) = x \cdot e^x$ y $g_E(x) = x^2$. Determine los niveles de productos x_B, x_C, x_D, x_E que minimizan el costo de la compra utilizando una formulación de programación dinámica.

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Parte II

Procesos Estocásticos

Capítulo 3

Proceso de Poisson

3.1 Introducción a los Procesos Estocásticos

Se designa bajo el nombre de *Modelo Estocástico* todo esquema abstracto de naturaleza probabilística, susceptible de representar algún fenómeno real. En la medida en que los modelos se adecuan a lo observado, permiten prever las consecuencias de ciertas situaciones, entregando así la posibilidad de efectuar elecciones razonadas.

En una breve descripción de un modelo aleatorio, se reconocen los siguientes elementos:

1. Un conjunto de estados posibles del sistema \mathbf{E} .
2. Un conjunto de eventos elementales posibles Ω .
3. Una distribución \mathbf{D} de probabilidades sobre Ω .

Veamos a través de algunos ejemplos qué representa cada uno de los elementos anteriores:

- Ejemplo 1: *Ventas mensuales*

Una empresa vende dos productos A y B . Las cifras de ventas mensuales observadas son:

$$\begin{aligned}\text{Producto } A &: a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n ; \dots \\ \text{Producto } B &: b_1 ; b_2 ; b_3 ; \dots ; b_n ; \dots\end{aligned}$$

El conjunto de estados fundamentales \mathbf{E} en este caso corresponde a los posibles niveles de venta observados en un mes particular (a_n, b_n) , los que toman valores enteros no negativos y por tanto se tiene $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

El conjunto de eventos elementales Ω para este modelo agrupa todas las posibles secuencias de ventas observables para los productos a lo largo del periodo de interés. Por lo tanto, si interesa estudiar los niveles de venta mensuales por un periodo de dos años

(24 meses) se tiene que $\Omega = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{24}$.

Por último, sobre la ley de distribución de probabilidades \mathbf{D} es muy poco lo que se puede decir sin entrar en detalles más específicos del modelo, pero en términos generales se define sobre el conjunto Ω .

- Ejemplo 2: Panes de un aparato eléctrico

En un laboratorio se dispone de un aparato eléctrico, el cual cae en pane cada cierto tiempo. Se supone que las panes son todas del mismo tipo, es decir, que necesitan del mismo tiempo de reparación y significan el mismo costo para el laboratorio. La única incógnita es entonces la sucesión de instantes en los que las panes comienzan:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < \dots$$

Los estados posibles del aparato son en este caso dos: en operación (0), en pane (1), es decir, $E = \{0, 1\}$. El evento aleatorio elemental asociado es una sucesión de instantes en los que el equipo falla, es decir, una sucesión de “puntos” en el eje del tiempo. Es lo que se llama un proceso puntual (que definiremos más adelante).

3.1.1 Procesos Estocásticos

Los modelos aleatorios que se han presentado son funciones aleatorias pero con la particularidad muy importante que el argumento de estas funciones es el tiempo. Se dice entonces que son *Procesos Estocásticos o Aleatorios*. En este tipo de modelos se busca saber cómo el futuro de un sistema está ligado (correlacionado) con su pasado y presente.

Definición 3.1 Se dice que $\{X_t\}_{t \in T}$ es un Proceso Estocástico en E si, $\forall t \in T$, X_t es una variable aleatoria con valores en E .

Un proceso estocástico es, entonces, un conjunto de variables aleatorias. Habitualmente los valores $t \in T$ se interpretan como instantes de tiempo. El conjunto E corresponde al conjunto de estados posibles para algún sistema en estudio. De esa forma X_t puede interpretarse como el estado de un sistema en el instante t , estado que, visto desde un instante “anterior” a t , es una variable aleatoria.

El proceso estocástico (la colección completa de variables X_t) corresponde a la evolución (aleatoria) del sistema. Una realización de un proceso estocástico es un conjunto de valores en E : los valores **observados** para el estado del sistema en cada instante del tiempo. Vale decir una realización de un proceso estocástico puede ser vista como una función de T en E , que a cada $t \in T$ asocia el valor observado para el estado del sistema en t .

Para describir en probabilidad un proceso estocástico se debe ser capaz de construir la función de distribución conjunta para cualquier subconjunto de él, es decir conocer, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$\forall x \in E^m, \forall t \in T^m$ t.q. $t_1 < t_2 < \dots < t_m$,

$$F_X(x, t) = \Pr [X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_m} \leq x_m]$$

Mientras más general y descriptivo es el modelo usado al representar un proceso estocástico más problemas teóricos y prácticos aparecen en su modelamiento y posterior aplicación. Es por ello que se suelen estudiar algunas familias o tipos de procesos estocásticos que presenten alguna característica simplificatoria. Las diversas simplificaciones que se pueden adoptar caen, en general, en alguno de los siguientes puntos:

- Naturaleza del conjunto T .
- Naturaleza del conjunto E .
- Tipos de funciones X_t posibles.
- Tipos de leyes de probabilidad de los eventos aleatorios.

Las simplificaciones o particularidades pueden corresponder a más de uno de los puntos anteriores y se expresan por relaciones axiomáticas sobre el proceso. En las secciones que siguen definiremos, a través de sucesivas simplificaciones, algunos procesos estocásticos que resultan de interés.

3.1.2 Procesos de Conteo

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in R_+}$ es un *Proceso de Conteo* si X_t representa el número de veces que ha ocurrido algún fenómeno aleatorio hasta el instante t .

Ejemplos:

- Número de votos en una urna a lo largo de un día de votación.
- Número de accidentes de tránsito acumulados a lo largo de un año.
- Llegadas de camiones a un punto de carga.
- Ventas de un cierto producto en un supermercado.

En otras palabras, es un proceso estocástico en que el conjunto de estados posibles corresponde a los enteros no negativos y que es creciente en el tiempo (si $t_1 \geq t_2$ entonces $X_{t_1} \geq X_{t_2}$ con probabilidad 1). Además, se suele incorporar como supuesto que en $t = 0$ no han ocurrido eventos ($X_0 = 0$ con probabilidad igual a 1).

En una realización de un proceso de conteo el valor observado de X_t es una constante (como función de t) hasta que ocurre un *evento* que lo hace cambiar de estado, y dichos eventos ocurren “sólo ocasionalmente”.

3.1.3 Definición en Probabilidad de un Proceso de Conteo

Para especificar en probabilidad un proceso de conteo se pueden adoptar dos puntos de vista, los que se explican a continuación:

Primera Definición

Sea un conjunto de k intervalos disjuntos $(t_1, t'_1); (t_2, t'_2); \dots, (t_k, t'_k)$ y N_1, N_2, \dots, N_k el número de realizaciones aleatorias del fenómeno en estudio que se produce en cada uno de esos intervalos. Para definir en probabilidad el Proceso de Conteo es necesario conocer $\forall k$ y en función de $(t_1, t'_1; \dots; t_k, t'_k)$ la función de repartición del evento aleatorio (N_1, \dots, N_k) .

Segunda Definición

Otra forma para definir en probabilidad un proceso de conteo es definir los intervalos sucesivos U_1, U_2, \dots, U_k que separan los eventos tomados en orden cronológico ¹. Como el número de intervalos puede ser arbitrariamente grande, en lugar de definir directamente una ley de probabilidades sobre este conjunto, se debe definir una sucesión infinita de leyes de probabilidad. El procedimiento más simple consiste en definir un sistema fundamental de leyes de probabilidad dado por:

- Ley de U_1 .
- Ley condicional de U_2 dado $U_1 = u_1$.
- ⋮
- Ley condicional de U_k dado $U_1 = u_1, U_2 = u_2, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}$.
- etc.

Sin embargo especificar toda esta información en un caso general podría resultar una enorme cantidad de trabajo. Introduciremos (en forma de axiomas) dos supuestos simplificadorios, que nos llevarán a definir el llamado *Proceso de Poisson*.

3.2 Proceso Poisson

Se designa bajo el nombre de Proceso Poissoniano una categoría más o menos amplia de procesos. Para evitar ambigüedad, es bueno señalar que en esta sección se describe el Proceso Uniforme de Poisson, también llamado Proceso Clásico de Poisson, que corresponde al modelo más simple y particular. En la Sección 3.3 se estudian algunas extensiones.

¹Este procedimiento supone que los eventos son aislados, es decir, que la probabilidad que dos o más eventos simultáneos se produzcan es nula.

3.2.1 Definición de un Proceso Uniforme de Poisson

Como se menciona más arriba definiremos el Proceso de Poisson Uniforme a partir de 2 supuestos simplificadorios que introduciremos como axiomas.

Axioma de Independencia (Incrementos Independientes)

Si N_1, \dots, N_k representan el número de eventos que se producen en los intervalos disjuntos $(t_1, t'_1), \dots, (t_k, t'_k)$, entonces N_1, \dots, N_k son Mutuamente Independientes en Probabilidad y esto para cualquier k y $t_1 < t'_1 < \dots < t_k < t'_k$.

Se supone también por otra parte que la intensidad del fenómeno es independiente del tiempo, de donde la segunda condición.

Axioma de Uniformidad (Incrementos Estacionarios)

La ley del conjunto (N_1, \dots, N_k) queda invariante si los $2 \cdot k$ valores $(t_1, t'_1; \dots; t_k, t'_k)$ son aumentados (o disminuidos) en una misma cantidad.

Si los dos axiomas anteriores se cumplen, para definir el proceso basta conocer una sola familia de leyes dependiendo de un sólo argumento: La ley de $N(h)$, número de realizaciones que se producen sobre un intervalo $(t, t+h)$.

Introduciremos además un tercer axioma, para descartar situaciones que no revisten de interés: suponemos que la probabilidad que ningún evento se produzca sobre un intervalo finito no es ni nula ni igual a 1.

Axioma 3

Si $p_0(h)$ es la probabilidad que ningún evento se produzca en $(t, t+h)$, se tiene para $\forall h > 0$:

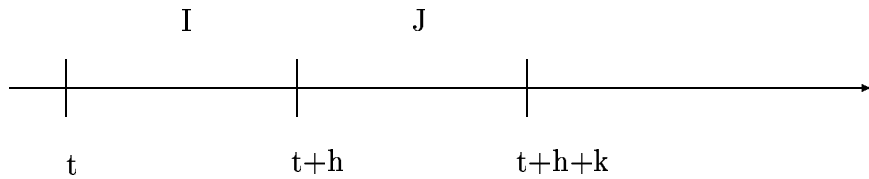
$$0 < p_0(h) < 1$$

Si $p_0(h)$ fuese igual a 1, nunca se produciría un evento. Si fuese nula el conjunto de eventos instantáneos sería denso y el evento se produciría continuamente. Estos son casos sin interés.

3.2.2 Ley del Intervalo Aleatorio que separa dos Eventos Consecutivos

Sea $p_0(t, h)$ la probabilidad que ningún evento se produzca entre t y $t+h$. Por el Axioma 1 esta probabilidad es independiente de las realizaciones fuera de $(t, t+h)$ y depende exclusivamente de t y h . Mas aún, por el axioma 2 es independiente de t . Por lo tanto se tiene $p_0(t, h) = p_0(h)$.

Sean dos intervalos consecutivos I y J separados por los instantes t , $t+h$ y por $t+h$, $t+h+k$.



La probabilidad que ningún evento se produzca sobre I y J puede escribirse de dos maneras.

$$\text{Ningún evento en } I \cup J \Leftrightarrow [\text{Ningún evento en } I] \cap [\text{Ningún evento en } J]$$

Como el número de eventos en I y en J son v.a. independientes, las probabilidades asociadas a esos eventos satisfacen:

$$p_0(h+k) = p_0(h) \cdot p_0(k).$$

Luego para $h > 0$ se tiene:

$$\frac{p_0(k+h) - p_0(k)}{h} = p_0(k) \cdot \left(\frac{p_0(h) - 1}{h} \right) \quad (3.1)$$

con lo cual, tomando límite cuando h tiende a 0 y observando que $p_0(0) = 1$,

$$\frac{dp_0(k)}{dk} = p_0(k) \cdot \left. \frac{dp_0(k)}{dk} \right|_{k=0} \quad (3.2)$$

Llamando $\lambda = -\left. \frac{dp_0(k)}{dk} \right|_{k=0}$ se tiene que la solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$p_0(k) = e^{-\lambda k} \quad k \geq 0 \quad (3.3)$$

De este resultado fundamental se puede deducir fácilmente todo el estudio del Proceso Uniforme de Poisson. Lo primero es encontrar la función de repartición de los intervalos de tiempo que separan dos eventos consecutivos.²

Supongamos que en el instante t_i se ha producido un evento, y llamemos t_{i+1} al instante (aleatorio) en que se producirá el siguiente. Denotemos además por h al intervalo de tiempo que separa ambos eventos, $h = t_{i+1} - t_i$. La probabilidad que $h > k$ corresponde a la probabilidad que en un intervalo de duración k no se produzca ningún evento, es decir, $p_0(k)$. Luego, del resultado previo,

$$\Pr[h > k] \equiv p_0(k) = e^{-\lambda \cdot k} \quad (3.4)$$

Llamando $F(k)$ la función de distribución de h , se tiene de (3.4):

$$F(k) = 1 - \Pr[h > k] = 1 - e^{-\lambda \cdot k} \quad \forall k \geq 0 \quad (3.5)$$

es decir, h tiene una distribución exponencial de parámetro λ .

A partir de este resultado se puede observar que la probabilidad que ocurran 2 o más eventos simultáneamente es nula (el intervalo de tiempo entre 2 eventos sería igual a cero).

3.2.3 Primera Definición en Ley de un Proceso Uniforme de Poisson

El Proceso Uniforme de Poisson es un proceso de conteo en el cual los intervalos separando dos eventos consecutivos son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de acuerdo a una ley Exponencial.

$E(h) = \frac{1}{\lambda}$ es el periodo medio entre dos eventos consecutivos; su inverso λ representa la frecuencia media, o si se quiere la densidad media del proceso puntual en el eje del tiempo y sus unidades son (Número de ocurrencias/ Unidad de tiempo). A dicho parámetro se le denomina la *tasa* del proceso.

Algunos resultados importantes que es posible extraer de la definición de un Proceso Uniforme de Poisson son los siguientes:

²Recordar que al definir la función de repartición

de los intervalos se está definiendo completamente la ley de probabilidades asociada a un proceso de conteo como el poissoniano (ver definición de procesos de conteo).

3.2.4 Propiedades de un Proceso Uniforme de Poisson

Antes de detallar un conjunto de propiedades que satisface el proceso uniforme de Poisson conviene definir la siguiente notación para las distintas variables que intervienen:

Definiciones

- Sea $N(t)$ el número de eventos que se han producido en el intervalo $[0, t]$.
- Sea $N(t; t')$ el número de eventos producidos en el intervalo $(t, t']$.

$$N(t, t') = N(t') - N(t)$$

- Sea U_i el tiempo que transcurre entre los eventos consecutivos $i - 1$ e i .
- Sea S_n el tiempo que transcurre hasta que se produce el n -ésimo evento.

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Propiedad 3.1 *El Proceso Uniforme de Poisson no tiene Memoria. Si U representa el tiempo entre dos eventos consecutivos, se cumple entonces que:*

$$\Pr[U > t + s | U > s] = \Pr[U > t]$$

Propiedad 3.2 Incrementos Independientes

Sea $A = N(t_1, t_2)$ y $B = N(t_3, t_4)$, donde $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ entonces en un proceso uniforme de Poisson se cumple que A y B son independientes.

Propiedad 3.3 Incrementos Estacionarios

$N(t, t')$ tiene la misma distribución que $N(t' - t)$.

Propiedad 3.4 S_n tiene una distribución Erlang de parámetros n y λ , es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Propiedad 3.5 $N(t)$ tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda \cdot t$. Luego su función de repartición es:

$$\Pr[N(t) = k] = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Propiedad 3.6 Sea (a, b) un intervalo de tiempo dado. Si se sabe que n eventos se produjeron en (a, b) y t_1, t_2, \dots, t_n son los instantes en los que estos eventos ocurrieron ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$), entonces los n eventos se reparten Uniformemente en el intervalo (a, b) . Es decir, la función de distribución conjunta de los t_1, t_2, \dots, t_n viene dada por:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \quad a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$$

Las propiedades de incrementos independientes e incrementos estacionarios no requieren demostración, pues las introducimos como axiomas para definir el Proceso de Poisson. La demostración de las demás propiedades se encuentra en el Apéndice 3-A.

3.2.5 Segunda Definición de un Proceso Uniforme de Poisson

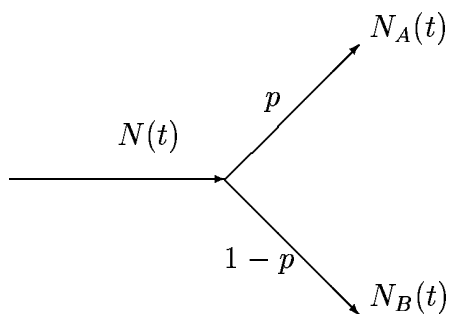
A partir de la propiedad (3.5) es posible enunciar una segunda definición para un proceso de Poisson.

El Proceso Uniforme de Poisson es un proceso de conteo tal que sobre todo conjunto de k intervalos disjuntos $(t_1, t'_1), (t_2, t'_2), \dots, (t_k, t'_k)$ los números de eventos aleatorios que se producen N_1, N_2, \dots, N_k son independientes en probabilidad y cada uno de ellos obedece a una ley de probabilidades de Poisson, donde el parámetro para N_i es $\lambda \cdot (t'_i - t_i)$.

Muchas veces en un proceso de conteo nos interesará no sólo el número total de eventos sino distinguir distintos tipos de eventos. En otras oportunidades observaremos distintos de eventos independientemente, pero estaremos interesados sólo en el total de ellos. En lo que sigue estudiaremos ese tipo de fenómenos para el caso en que los procesos involucrados son Poissonianos.

3.2.6 División de un Proceso Uniforme de Poisson

Sea $N(t)$ un proceso uniforme de Poisson de tasa λ , tal que los eventos asociados a $N(t)$ pueden clasificarse en dos categorías, A y B . Con probabilidad p un evento de $N(t)$ es tipo A y con probabilidad $1-p$ es tipo B . De esta forma a partir del proceso $N(t)$ pueden definirse dos procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$ en donde $N_A(t)$ ($N_B(t)$) representa el número de eventos tipo A (B) que se han producido hasta t .

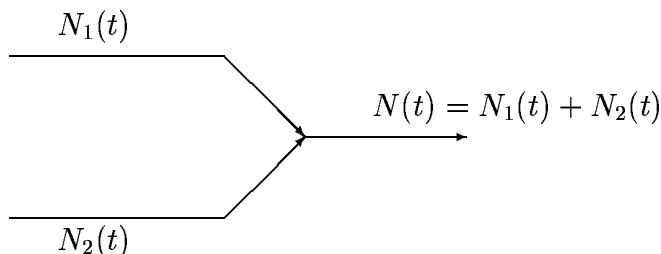


Proposición 3.1 *Los procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$ son dos procesos uniformes de Poisson independientes de tasas $\lambda_A = p \cdot \lambda$ y $\lambda_B = (1 - p) \cdot \lambda$.*

La demostración se encuentra en el Apéndice 3-A.

3.2.7 Mezcla de dos Procesos Uniformes de Poisson Independientes

Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ dos procesos uniformes de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. A partir de estos dos procesos es posible construir un tercero que corresponda a la suma, es decir $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.



Proposición 3.2 *El proceso $N(t)$ es un proceso Uniforme de Poisson de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.*

La demostración se encuentra en el Apéndice 3-A.

A lo largo de esta sección se han caracterizado los procesos de Poisson mediante dos definiciones que corresponden las formas más comunes de representarlo. La Definición 1 lo caracteriza mediante los tiempos entre eventos sucesivos, mientras que la Definición 2 lo hace a través del número de eventos producidos en un intervalo de tiempo dado. A continuación se enuncia una tercera forma de caracterizar un proceso uniforme de Poisson.

3.2.8 Tercera Definición de un Proceso de Poisson

El proceso de conteo $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ es un Proceso Uniforme de Poisson con tasa λ si:

1. $\Pr[N(t+h) - N(t) = 0] = 1 - \lambda \cdot h + o(h)$
2. $\Pr[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda \cdot h + o(h)$
3. $\Pr[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$
4. $N(t+h) - N(t)$ es independiente de $N(s)$ con $s \leq t$, $h > 0$ (es decir, posee incrementos independientes).

Donde $o(h)$ representa funciones que cumplen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Corresponde ahora verificar que las tres definiciones de procesos uniformes de Poisson que se han dado son efectivamente equivalentes. Para ello se utilizará el siguiente esquema.

$$Def_1 \Rightarrow Def_2 \Rightarrow Def_3 \Rightarrow Def_1$$

- $Def_1 \Rightarrow Def_2$

La demostración de esta primera implicancia ya fue hecha al demostrarse la Propiedad (3.5) de un Proceso Uniforme de Poisson.

- $Def_2 \Rightarrow Def_3$

Para demostrar esta implicancia se debe probar que la segunda definición de proceso uniforme de Poisson implica los 5 puntos que conforman la tercera definición.

1. Para probar el primero basta con observar que de acuerdo a la definición 2, $N(t; t+h)$ sigue una distribución Poisson de parámetro $\lambda \cdot h$ y por tanto la probabilidad que $N(t; t+h) = 0$ viene dada por $e^{-\lambda \cdot h}$. Ahora bien, desarrollando la función exponencial como una serie de potencias se tiene:

$$\Pr(N(t; t+h) = 0) = e^{-\lambda \cdot h} = 1 - \lambda \cdot h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-\lambda \cdot h)^k}{k!} \quad (3.6)$$

Luego definiendo $o_1(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-\lambda \cdot h)^k}{k!}$ se tiene que $\Pr(N(t; t+h) = 0) = 1 - \lambda \cdot h + o_1(h)$. Es fácil verificar que $o_1(h)$ efectivamente es $o(h)$ (i.e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h)}{h} = 0$).

2. El segundo punto se puede probar de manera similar: dado que $N(t; t+h)$ sigue una ley de Poisson de parámetro λh , entonces $\Pr[N(t; t+h) = 1] = e^{-\lambda \cdot h} \lambda \cdot h = \lambda \cdot h \Pr[N(t; t+h) = 0] = \lambda \cdot h (1 - \lambda \cdot h + o_1(h)) = \lambda \cdot h - \lambda^2 h^2 + \lambda h o_1(h)$. Llamando

$o_2(h) = -\lambda^2 h^2 + \lambda h o_1(h)$ se tiene $\Pr[N(t; t+h) = 1] = \lambda h + o_2(h)$ (verificar que $o_2(h)$ es $o(h)$).

3. El punto 3 es directo, recordando que las probabilidades de los eventos $N(t; t+h) = 0$, $N(t; t+h) = 1$ y $N(t; t+h) \geq 2$ deben sumar 1, y verificando que la suma (diferencia) de funciones $o(h)$ es también $o(h)$.

4. Tomando los intervalos disjuntos $(0; s)$ y $(t; t+h)$ es directo de la definición 2 que el número de realizaciones al interior de cada uno de ellos son independientes entre sí.

• $Def_3 \Rightarrow Def_1$

Supóngase que en el instante t_0 se produjo un evento de proceso $N(t)$ y sea T el tiempo que transcurre hasta el próximo evento. Interesa probar que bajo las hipótesis de la definición 3, T es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$. Para ello conviene expresar la probabilidad que T sea mayor $h+q$ de dos formas equivalentes. Por un lado usando el punto 1 de la definición 3 se tiene que:

$$\Pr(T > h+q) = \Pr(N(t_0; t_0+h+q) = 0) = 1 - \lambda \cdot (h+q) + o(h+q) \quad (3.7)$$

Por otro lado

$$\Pr(N(t_0; t_0+h+q) = 0) = \Pr(N(t_0; t_0+h) = 0 \wedge N(t_0+h; t_0+h+q) = 0) \quad (3.8)$$

además por punto 3, $N(t_0; t_0+h)$ y $N(t_0+h; t_0+h+q)$ son independientes. Usando el punto 4 de la definición 3 $N(t_0+h; t_0+h+q)$ tiene la misma distribución que $N(t_0; t_0+q)$. Por lo tanto uniendo estos dos resultados se tiene que :

$$\Pr(N(t_0; t_0+h+q) = 0) = \Pr(N(t_0; t_0+h) = 0) \cdot \Pr(N(t_0; t_0+q) = 0) \quad (3.9)$$

o bien

$$\Pr(T > h+q) = \Pr(T > h) \cdot \Pr(T > q) \quad (3.10)$$

es decir,

$$\frac{\Pr(T > h+q) - \Pr(T > q)}{h} = \Pr(T > q) \cdot \frac{-\lambda \cdot h + o(h)}{h} \quad (3.11)$$

tomando límite cuando h tiende a cero y ocupando el punto 5 de la definición 3 se tiene:

$$\frac{d\Pr(T > q)}{dq} = -\lambda \cdot \Pr(T > q) \Rightarrow \Pr(T > q) = e^{-\lambda \cdot q} \quad (3.12)$$

y por tanto T sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$, que es lo que se quería probar. ■

3.3 Extensiones

3.3.1 Proceso de Poisson no Homogéneo

El proceso poissoniano estudiado hasta ahora obedece a los axiomas de Independencia y Uniformidad, lo que significa en la práctica que mantiene siempre la misma intensidad (independiente del número de eventos ya realizados y del tiempo).

En particular sobre todo intervalo $(t, t + dt)$ existe una probabilidad $\lambda \cdot dt$ de observar un evento (para dt pequeño). Sea $P(t, h)$ la probabilidad que al menos un evento se produzca en $[t, t + h]$, entonces el proceso se dice *continuo* si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(t, h) = 0 \quad (3.13)$$

condición que se verifica en el proceso clásico. Además, el cociente $\frac{P(t, h)}{h}$ admite, en el modelo clásico un límite el cual es independiente de t y corresponde a λ : densidad del proceso puntual.

Se obtiene una extensión al modelo clásico si se supone que la intensidad λ puede variar con t . Tal modelo se desarrolla fácilmente a partir del modelo clásico efectuando un *Cambio de Reloj*.

Cambio de Reloj

Sea sobre un eje de tiempo OU un proceso de Poisson de tasa λ . Designemos por u_1, u_2, \dots la secuencia de instantes en que se producen eventos.

Sea por otro lado, $u = G(t)$ una función continua, estrictamente creciente y derivable.

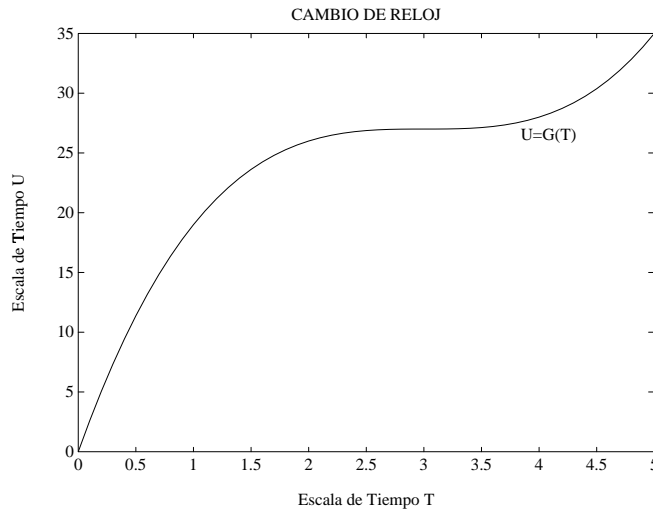
Esta función define una aplicación de (T) sobre (U) y reciprocamente de (U) sobre (T) biunívocas (G define un homomorfismo de T sobre U). Como T y U miden el tiempo: G define entonces un *Cambio de Reloj*.

Una realización del proceso descrita por la sucesión u_1, u_2, \dots en U es descrita por t_1, t_2, \dots en T con:

$$u_i = G(t_i)$$

Visto desde la escala de tiempo T la sucesión de eventos también define un proceso de conteo, que satisface las siguientes propiedades:

- Sobre intervalos disjuntos S_1, S_2, \dots de T los números n_1, n_2, \dots de eventos son independientes en probabilidad.
- Sobre todo intervalo $S = [t, t']$ de T el número de eventos $n(t, t')$ obedece a una distribución Poisson.



En efecto, el número $n(t, t')$ es igual al número de eventos realizados en $[u, u']$ en el proceso uniforme con $u = G(t)$ y $u' = G(t')$. Además, intervalos disjuntos en T están asociados a intervalos disjuntos en U a través de G .

$n(t, t')$ obedece a la ley de Poisson de parámetro $\lambda(G(t') - G(t))$

Por último, decir que un evento se produce en el intervalo $(t, t + dt)$ es equivalente a que se produzca en $(u, u + du)$ cuya probabilidad es $\lambda \cdot du$. Como $du = g(t)dt$ con $g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$, se tiene:

$$Pr [1 \text{ evento en } [t, t + dt]] = g(t)dt \quad \text{y} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

El modelo así desarrollado sobre T es un proceso puntual que obedece al axioma de Independencia además es continuo, pero no es uniforme.

3.3.2 Proceso de Poisson en Batch

Otra extensión al proceso clásico se logra admitiendo que se produzcan 2 o más eventos simultáneamente; se dice que se produjo un evento en batch. El proceso puede ahora ser definido en probabilidad como sigue:

- La sucesión de instantes en los que se producen eventos (en batch) forman un proceso de Poisson (uniforme o no uniforme) definido por algún parámetro $\lambda(t)$.
- Cada batch agrupa un número aleatorio de realizaciones simultáneas k . El número de realizaciones en dos batch distintos son independientes en probabilidad y obedecen todos a la misma ley (arbitraria).

De acuerdo a lo anterior el número de eventos en batch que se producen en un intervalo obedece a una ley de Poisson, sin embargo, el número de eventos vistos como unidades en general no se comporta de acuerdo a una ley Poisson.

Caso Particular

Sea un proceso uniforme en batch tal que la ocurrencia de los eventos batch forman un proceso puntual uniforme de poisson de densidad λ . Sea p_k la probabilidad que k realizaciones se produzcan simultáneamente en un batch. Se estudiará la ley de probabilidad del número de eventos individuales que se producen en un intervalo de amplitud t .

Sobre este intervalo el número de batch de tamaño k (s_k) que se producen obedece a una ley Poisson de parámetro $\lambda \cdot p_k \cdot t$. La transformada z para s_k es:

$$\tilde{g}_k(z) = E(z^{s_k}) = e^{\lambda \cdot p_k \cdot t(z-1)} \quad (3.14)$$

Sea $x_k = k \cdot s_k$ el número de eventos cuyas realizaciones provienen de un batch de tamaño k , la transformada z para x_k , que se designa por $g_k(z)$ es:

$$g_k(z) = E(z^{x_k}) = E(z^{k \cdot s_k}) = \tilde{g}_k(z^k) = e^{\lambda \cdot p_k \cdot t(z^k-1)} \quad (3.15)$$

Por último, el número total de eventos (individuales) que se han producido hasta t corresponde a la suma de los $\{x_k\}$, de modo que su transformada z , $G(z)$, viene dada por:

$$\begin{aligned} G(z) &= \prod_k g_k(z) \\ &= e^{\sum_k [\lambda \cdot p_k \cdot t(z^k-1)]} \\ &= e^{\lambda \cdot t \sum_k [p_k \cdot z^k] - \lambda \cdot t \sum_k p_k} \end{aligned} \quad (3.16)$$

además, $\sum_k [p_k \cdot z^k] = \gamma(z)$ es la transformada z del número de realizaciones por batch mientras que $\sum_k p_k = 1$, con lo cual

$$G(z) = e^{\lambda \cdot t(\gamma(z)-1)} \quad (3.17)$$

La ley de probabilidades del número de eventos durante un intervalo de amplitud t puede, en principio, obtenerse invirtiendo la transformada en la Ecuación 3.17. Sin embargo dicha transformada depende del término $\gamma(z)$ que en general es arbitrario. Habitualmente invertirla analíticamente resultará inmanejable. Sin embargo, muchas veces puede ser invertida numéricamente, o bien a partir la Ecuación 3.17 es posible obtener los momentos de la distribución buscada mediante diferenciación sucesiva.

Por ejemplo el valor promedio de eventos durante el intervalo considerado (\bar{N}), puede obtenerse como:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \frac{dG(z)}{dz}\bigg|_{z=1} \\ &= \lambda \cdot t \cdot \frac{d\gamma(z)}{dz}\bigg|_{z=1} \\ &= \lambda \cdot t \cdot \bar{k}\end{aligned}\tag{3.18}$$

con \bar{k} tamaño promedio de un batch. Este resultado podría haber sido obtenido por simple inspección.

3.4 EJERCICIOS

1. Sea un proceso uniforme de Poisson de densidad λ representado por una secuencia de puntos $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se construye un nuevo proceso a partir del anterior a través de una secuencia de puntos $\{P_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidos por:

$$P_n^k = M_{k \cdot n}$$

es decir, se conservan del proceso original los puntos tomados de k en k .

Estudiar el proceso obtenido, determinando la ley de los intervalos entre ocurrencias.

2. Sea $P(\lambda)$ un proceso uniforme de Poisson de densidad λ . Se designan por $\{M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$ la secuencia de puntos obtenida. Sea la secuencia de puntos $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ definidos como $A_n = \text{centro de } (M_{n-1}, M_n)$. Estudie el proceso $R(\lambda)$ de los puntos A_n . Compare $R(1)$ y $P(2)$. Determine si los intervalos sucesivos entre ocurrencia del proceso $R(\lambda)$ son independientes. Calcule el coeficiente de correlación entre dos intervalos sucesivos.
3. Sea $P(\lambda) = \{M_1, M_2, \dots\}$ un proceso uniforme de Poisson de densidad λ . Sea A un punto sobre el eje del tiempo. Cuál es la ley de probabilidad de la amplitud del intervalo (M_n, M_{n+1}) que contiene a A .
 -) Suponga primero que el proceso opera desde $t = -\infty$.
 -) Suponga que el proceso opera desde $t = 0$.
4. Sea un proceso de Poisson en batch en el cual las ocurrencias de los batch obedecen a un proceso uniforme de Poisson y para el cual el tamaño de cada batch es una variable aleatoria con la misma ley de probabilidad L . Determine las leyes L para las cuales el número de eventos aleatorios elementales observados sobre todo intervalo obedece a una ley Poisson.

Apéndice

3-A Demostración Propiedades Procesos de Poisson

Propiedad 3.1 *El Proceso Uniforme de Poisson no tiene Memoria. Si U representa el tiempo entre dos eventos consecutivos, se cumple entonces que:*

$$\Pr(U > t + s / U > s) = \Pr(U > t)$$

Demostración

$$\Pr(U > t + s / U > s) = \frac{\Pr(U > t + s)}{\Pr(U > s)} \quad (3.19)$$

Como U sigue una distribución exponencial de parámetro λ se cumple que:

$$\begin{aligned} \Pr(U > t + s) &= e^{-\lambda \cdot (t+s)} \\ \Pr(U > s) &= e^{-\lambda \cdot s} \end{aligned} \quad (3.20)$$

por lo tanto, reemplazando las expresiones anteriores en (3.19) se tiene:

$$\Pr(U > t + s / U > s) = e^{-\lambda \cdot t} = \Pr(U > t) \quad \blacksquare \quad (3.21)$$

Propiedad 3.4 *S_n tiene una distribución Erlang de parámetros n y λ , es decir, su función de densidad viene dada por:*

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in N$$

Demostración

Se tiene que $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, es decir, S_n es la convolución de los n primeros U_i .

Recordemos que si X e Y son v.a. independientes. la transformada de la convolución de X e Y es igual al producto de las transformadas de X e Y .

Usando ese resultado se tiene que la transformada de S_n es el producto de las transformadas de los U_i (pues los $\{U_i\}$ son independientes). Ahora

$$T_{U_i}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s} \quad (3.22)$$

luego, la transformada de S_n es:

$$T_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^n T_{U_i}(s) = \left[\frac{\lambda}{\lambda + s} \right]^n \quad (3.23)$$

la inversa de la transformada anterior corresponde a

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in N$$

es decir, una distribución Erlang. ■

Propiedad 3.5 $N(t)$ tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda \cdot t$. Luego su función de repartición es:

$$\Pr[N(t) = k] = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \quad \forall k \in N$$

Demostración

Sea $(AB) = T$ un intervalo de tiempo dado. Designemos por p_k la probabilidad que se produzcan k eventos exactamente en (AB) y P_{i_k} la probabilidad que se produzcan al menos k , luego $\Pi_k = p_k + p_{k+1} + \dots$. Sean $\{t_i\}_{i=1}^k$ los instantes en que se producen eventos $(A < t_1 < t_2 < \dots < t_k)$.

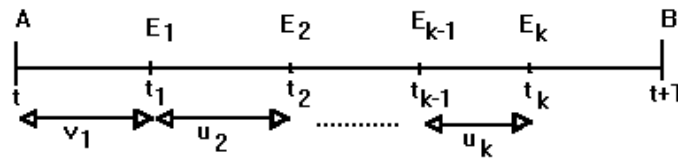


Fig. A.1

La duración $(AE_k) = v_1 + u_2 + \dots + u_k$. Como u_2, u_3, \dots, u_k son duraciones aleatorias independientes, cada una de ellas sigue una distribución exponencial de parámetro λ , además como la distribución exponencial no tiene memoria v_1 también tiene una distribución exponencial de parámetro λ . Luego (AE_k) es la suma de k variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, la suma obedece a una distribución Erlang de parámetros (λ, k) . Luego

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \text{Prob}((AE_k) < T) \\ &= \int_0^T \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} dt \\ p_k &= \Pi_k - \Pi_{k+1} \\ &= \int_0^T \lambda \left[\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{(\lambda T)^k \cdot e^{-\lambda T}}{k!} \end{aligned} \quad (3.24)$$

que es lo que se quería probar. ■

Propiedad 3.6 Sea (AB) un intervalo de tiempo dado. Sea $OA = a$ y $OB = b$. Si se sabe que n eventos se produjeron en (AB) y t_1, t_2, \dots, t_n son los instantes en los que

estos eventos ocurrieron ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$), entonces los n eventos se reparten Uniformemente en el intervalo (AB) . Es decir, la función de distribución conjunta de los t_1, t_2, \dots, t_n viene dada por:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \quad a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$$

Demostración

Sea (AB) un intervalo de tiempo tal que $(OA) = a$ y $(OB) = b$ y n eventos se han producido en (AB) .

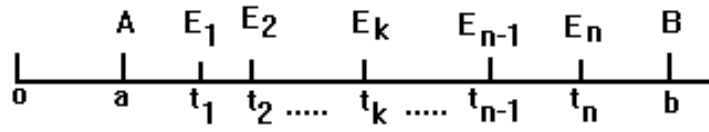


Fig. A.2

la probabilidad de obtener n eventos en los instantes $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$ o más exactamente en los intervalos $(t_1; t_1 + dt_1), (t_2; t_2 + dt_2), \dots, (t_k; t_k + dt_k), \dots, (t_n; t_n + dt_n)$ es:

$$\begin{aligned} P &= [e^{-\lambda(t_1-a)} \lambda dt_1] \cdot [e^{-\lambda(t_2-t_1)} \lambda dt_2] \cdots [e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})} \lambda dt_n] \cdot e^{-\lambda(b-t_n)} \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda(b-a)} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \end{aligned} \quad (3.25)$$

Además la probabilidad de obtener n eventos en (AB) es:

$$Q = \frac{\lambda(b-a)^n \cdot e^{-\lambda(b-a)}}{n!} \quad (3.26)$$

Finalmente la probabilidad buscada es el cuociente entre P y Q es decir:

$$\frac{n!}{(b-a)^n} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \quad a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \quad (3.27)$$

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 4

Cadenas de Markov

4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos una familia particular de procesos estocásticos en tiempo discreto (más específicamente en tiempo entero) definidos en conjuntos finitos. Vale decir, procesos estocásticos de la forma $\{X_n / n \in \mathbb{N}\}$ donde $\forall n$ X_n es una variable aleatoria en algún conjunto finito E .

El estudio de esta familia de procesos tiene su origen en una publicación de 1907 de A.A. Markov. El esquema de Markov es a la vez suficientemente general para permitir representar numerosas situaciones y suficientemente simple para permitir estudiarlas en detalle.

4.1.1 Notación

Un sistema S evoluciona en el tiempo de manera aleatoria. El estado del sistema se observa en un conjunto de instantes que asumiremos igual a \mathbb{N} . El estado del sistema en el instante n , X_n , es una variable aleatoria que toma valores en un conjunto de estados $E = \{E_1, \dots, E_r\}$.

Denotaremos por $\pi_i(n)$ la probabilidad a priori de alcanzar el estado E_i en el instante n , i.e. $\Pr[X_n = E_i] = \pi_i(n)$. Así, los valores $\pi_i(n)_{i=1,\dots,r}$ constituyen la ley de probabilidades asociada a X_n , y las consideraremos como las componentes de un vector:

$$\pi(n) = [\pi_1(n) \ \pi_2(n) \ \dots \ \pi_r(n)]$$

4.1.2 Representación por Desarrollo Temporal

Una manera de describir en probabilidad un proceso como el que aquí nos interesa es a través de un *Sistema de Leyes Condicionales Fundamentales*, vale decir conocer:

- Ley Inicial del Sistema: Corresponde a la ley de probabilidades de X_0 y está definida

por el vector $\pi(0)$:

$$\pi(0) = [\pi_1(0) \ \dots \ \pi_r(0)]$$

- Ley Condicional de X_n : Se describe en forma recursiva la ley de probabilidades de X_n dado los estados alcanzados por el sistema en todos los instantes previos, i.e. se debe conocer

$$\Pr [X_n = E_{i_n} | X_0 = E_{i_0}; X_1 = E_{i_1}; \dots; X_{n-1} = E_{i_{n-1}}] \quad \forall (i_0, \dots, i_n) \in \{1, 2, \dots, r\}^{n+1}$$

4.2 Cadenas de Markov

La descripción recién realizada vale para cualquier proceso estocástico en tiempo discreto que toma valores en un conjunto de estados finito. El cálculo del sistema de leyes condicionales fundamentales para un caso tan general suele tornarse extremadamente engorroso y complejo. A continuación describiremos un caso particular, conocido como *Cadenas de Markov*, cuyo tratamiento es más sencillo.

4.2.1 Condición de Markov

Comenzaremos introduciendo un supuesto simplificador denominado *Condición de Markov*: la ley condicional de X_{n+1} conocidos $X_0 = E_{i_0}, \dots, X_n = E_{i_n}$ depende solamente del último estado E_{i_n} alcanzado por el sistema. O bien

$$\Pr [X_{n+1} = E_i | X_0 = E_{i_0}, X_1 = E_{i_1}, \dots, X_n = E_{i_n}] = \Pr [X_{n+1} = E_i | X_n = E_{i_n}]$$

Es decir, si se conoce la historia del sistema hasta el instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su comportamiento futuro.

A un proceso $\{X_n / n \in \mathbb{N}\}$ que satisface la condición de Markov se le denomina *Cadena de Markov*.

4.2.2 Representación Temporal

El sistema de leyes condicionales fundamentales del sistema se simplifica notablemente al incluir la condición de Markov. En esta situación se tiene:

- Ley Inicial: Vector de probabilidades $\pi(0)$.

- **Leyes de Evolución del Sistema:** En este caso basta definir la ley de probabilidades de X_n condicionada por X_{n-1} . Es decir, conocer la *Matriz de Probabilidades de Transición* P_n^{n-1} definida por

$$P_n^{n-1}[i, j] = \Pr[X_n = E_j | X_{n-1} = E_i] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

De esta forma la evolución en probabilidad del sistema está completamente determinada si se conoce el conjunto de leyes condicionales fundamentales definido por:

$$\pi(0) \quad \text{y} \quad \{P_n^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.1)$$

4.2.3 Ley de Probabilidad para el Estado del Sistema

El sistema (4.1) define la evolución en probabilidad del proceso. A partir de él es posible determinar las leyes de probabilidad (a priori) para el estado del sistema en cualquier instante del tiempo.

Supongamos que conocemos la ley inicial $\pi(0) = [\pi_1(0) \dots \pi_r(0)]$. Calculemos primero la ley de probabilidad para X_1 . Hemos definido $\pi_i(1) = \Pr[X_1 = E_i]$. Esa probabilidad puede calcularse utilizando la ley condicional de X_1 por X_0 y aplicando probabilidades totales:

$$\pi_i(1) = \pi_1(0) \cdot P_1^0[1, i] + \dots + \pi_r(0) \cdot P_1^0[r, i] = \sum_{k=1}^r \pi_k(0) \cdot P_1^0[k, i] \quad (4.2)$$

o bien, con notación matricial:

$$\pi(1) = \pi(0) P_1^0 \quad (4.3)$$

Un razonamiento idéntico al anterior permite escribir

$$\pi(n) = \pi(n-1) P_n^{n-1} \quad (4.4)$$

Usando inductivamente la Ecuación (4.4) se obtiene:

$$\pi(n) = \pi(0) P_1^0 P_2^1 \dots P_n^{n-1} \quad (4.5)$$

El resultado anterior señala que la ley de probabilidades a priori para el estado del sistema en un instante n depende exclusivamente de la ley de probabilidades iniciales del sistema $\pi(0)$ y del conjunto de matrices de transición $\{P_n^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que conforman el sistema fundamental de leyes condicionales.

4.2.4 Condiciones de Chapman-Kolmogorov

Supongamos que nos interesa calcular la ley de probabilidades de X_{n+2} . A partir del resultado anterior sabemos que esto es posible si conocemos la ley de X_{n+1} y la matriz de probabilidades

de transición entre el instante $n + 1$ y el $n + 2$ a través de la relación:

$$\pi(n + 2) = \pi(n + 1) P_{n+2}^{n+1}$$

Ahora bien, si en lugar de conocer la ley de probabilidades del instante $n + 1$ se conoce la ley de probabilidades del instante n se tiene que:

$$\pi(n + 2) = \pi(n) P_{n+1}^n P_{n+2}^{n+1}$$

De esta forma es posible definir una matriz de probabilidades de transición ya no de un período sino de dos períodos, P_{n+2}^n como:

$$P_{n+2}^n = P_{n+1}^n P_{n+2}^{n+1},$$

cuyos elementos $P_{n+2}^n[i, j]$ representan la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j en el instante $n + 2$ si está en el estado E_i en el instante n .

En forma análoga se puede definir la matriz de evolución de k períodos P_{n+k}^n cuyo elemento $[i, j]$ corresponde a la probabilidad de evolucionar del estado E_i en el instante n al estado E_j en el instante $n + k$. Razonando inductivamente a partir de lo expuesto en el párrafo anterior es fácil ver que se cumple:

$$P_m^n = P_q^n P_m^q \quad \forall n, q, m \quad n \leq q \leq m \quad (4.6)$$

en donde P_n^n es la matriz identidad. Esta relación se conoce como *Ecuación de Chapman-Kolmogorov* y es una consecuencia directa de la definición de probabilidades condicionales. En términos escalares la condición anterior se escribe como:

$$\Pr[X_m = E_j | X_n = E_i] = \sum_{k=1}^r \Pr[X_m = E_j | X_q = E_k] \cdot \Pr[X_q = E_k | X_n = E_i] \quad \forall i, j \quad (4.7)$$

4.3 Cadenas de Markov Homogéneas

En lo que sigue centraremos nuestra atención en los casos en que la probabilidad de evolucionar del estado E_i en el instante n al estado E_j en el instante $n + k$ es independiente de n . Esta condición es equivalente a imponer que la matrices de probabilidades de transición de un período P_{n+1}^n son constantes, independientes de n , es decir:

$$P_{n+1}^n = P \quad \forall n \quad (4.8)$$

La evolución del sistema queda ahora definida solamente por $\pi(0)$ ley inicial del sistema y por P matriz de probabilidades de transición de un período. Los elementos de la matriz P los notaremos como p_{ij} y corresponden a la probabilidad de evolucionar del estado E_i al E_j en un período cualquiera.

En este caso las leyes de probabilidades a priori del estado del sistema en el período n se determinan en función de las potencias de P según:

$$\pi(n) = \pi(0) (P)^n \quad \forall n \quad (4.9)$$

En lo que sigue nos concentraremos en el estudio del caso homogéneo y se utilizará la notación P^n para describir la potencia de orden n de la matriz P .

A partir de (4.9) el estudio de la evolución del sistema se limita al de las potencias sucesivas de P y el comportamiento de largo plazo del sistema queda definido por $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Estudiaremos este comportamiento más adelante.

4.3.1 Representación de una Cadena Homogénea mediante un Grafo

Para el caso de cadenas de Markov homogéneas es posible representar su comportamiento evolutivo (caracterizado por la matriz de probabilidades de transición P) mediante un grafo dirigido en donde los nodos representan los distintos estados posibles del sistema y los arcos entre nodos señalan la existencia de una probabilidad no nula de evolucionar en un período entre un par de estados.

Consideremos, por ejemplo, un proceso de Markov homogéneo con 6 estados: A, B, C, D, E y F . La ley de evolución del sistema viene dada por la matriz de probabilidades de transición de un período:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El grafo representante de dicha cadena de Markov es el que se presenta a continuación:

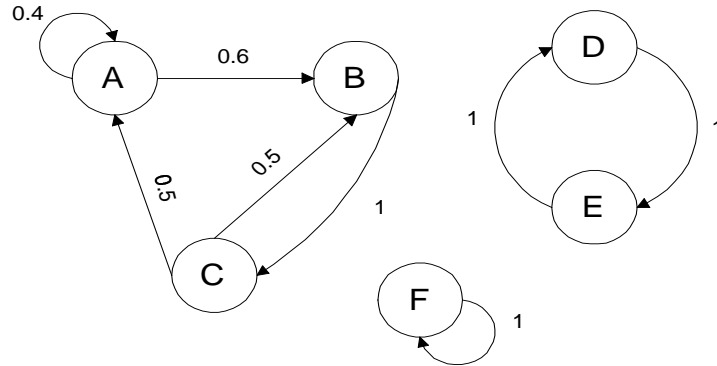
4.3.2 Clasificación de los Estados

A continuación estableceremos distinciones entre los estados de una cadena de Markov de acuerdo a algunas propiedades relevantes en términos de la evolución de ella. Para ello debemos introducir primero una relación en el conjunto de estados.

Sea $E = E_1, \dots, E_r$ el conjunto de estados posibles de una cadena de Markov.

Definición 4.1 (*Accesibilidad*) *Un estado E_j es accesible desde un estado E_i si existe un entero $n \geq 0$ tal que la probabilidad de evolucionar de E_i a E_j en n períodos es no nula*

Figura 4.1: Ejemplo de Grafo Representante



$p_{ij}^n > 0$. En este caso se denotará:

$$E_i \rightarrow E_j$$

La relación de accesibilidad en E es refleja y transitiva. Para ver que es refleja basta tomar $n = 0$. Para demostrar la transitividad basta usar en forma adecuada la condición de Chapman-Kolmogorov. En el ejemplo de la sección anterior se tiene que $A \rightarrow C$, $C \rightarrow A$, $D \rightarrow E$, $B \not\rightarrow F$.

A partir de la relación de Accesibilidad construiremos la relación de Comunicación.

Definición 4.2 (*Comunicación*) Los estados E_i y E_j están comunicados si E_j es accesible desde E_i y E_i es accesible desde E_j , en este caso se denotará:

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

Para nuestro ejemplo se tiene que $B \leftrightarrow C, A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow E, F \not\leftrightarrow A$.

La relación “estar comunicados” es una relación de equivalencia en E (verifíquelo). Por lo tanto, induce una partición del conjunto de estados E . Sea $E/\leftrightarrow = C_1, C_2, \dots, C_s$ el conjunto de clases de equivalencia (conjunto cociente) definidas en E a través de la relación de comunicación. Vale decir $E_i, E_j \in C_k \Rightarrow E_i \leftrightarrow E_j$; y se cumple $\emptyset \neq C_i \subseteq E \forall i; i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset; \bigcup_i C_i = E$.

Definiremos ahora una relación en el conjunto cociente de la relación de Comunicación.

Definición 4.3 (*Accesibilidad entre Clases*) La clase C_j es accesible desde la clase C_i si existe un estado $E_k \in C_j$ que es accesible desde algún estado $E_m \in C_i$. Es decir

$$[C_i \rightarrow C_j] \iff (\exists E_k \in C_j \exists E_m \in C_i) [E_m \rightarrow E_k]$$

La relación de accesibilidad al interior de E/\leftrightarrow es refleja, antisimétrica y transitiva, y es por tanto una relación de orden en ese conjunto (i.e. una relación de orden entre clases).

Es claramente refleja pues todo estado es accesible desde sí mismo.

Es antisimétrica, en efecto si (i): $C_i \rightarrow C_j$ y (ii): $C_j \rightarrow C_i$ entonces por (i) todos los estados de C_j son accesibles desde C_i y por (ii) todos los estados de C_i son accesibles desde C_j por lo tanto los estados de C_i están comunicados a los estados de C_j , es decir, $C_j \equiv C_i$.

Es transitiva, en efecto si (a): $C_i \rightarrow C_j$ y (b): $C_j \rightarrow C_k$ luego por (a) existe $E_{i_1} \in C_i$ y $E_{j_1} \in C_j$ tal que $E_{i_1} \rightarrow E_{j_1}$, por otro lado de (b) se tiene que existe $E_{j_2} \in C_j$ y $E_{k_1} \in C_k$ tal que $E_{j_2} \rightarrow E_{k_1}$. Como E_{j_1} y E_{j_2} pertenecen a C_j entonces $E_{j_1} \leftrightarrow E_{j_2}$ y por tanto se tiene:

$$E_{i_1} \rightarrow E_{j_1} \leftrightarrow E_{j_2} \rightarrow E_{k_1},$$

como la relación (\rightarrow) es transitiva se tiene que

$$E_{i_1} \rightarrow E_{k_1}$$

con lo cual el resultado queda probado.

Los elementos de C pueden clasificarse mediante la relación (\rightarrow) en dos tipos: clases *Transientes* o de *Paso* y clases *Recurrentes* o *Finales*

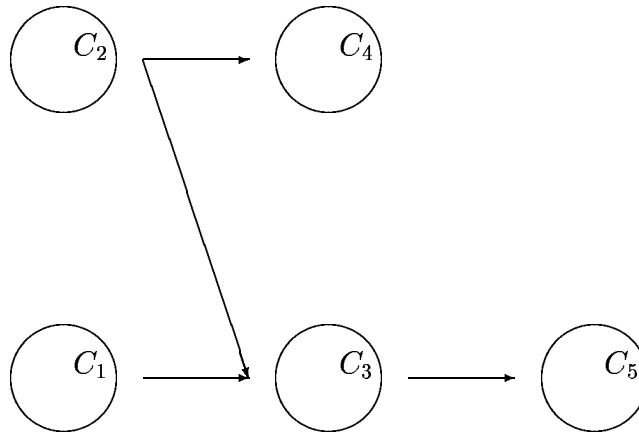
Definición 4.4 (*Clase Transiente*) Una clase C_i se llama de *Paso* o *Transiente* si existe al menos una clase accesible desde C_i

En otras palabras una clase C_i es Transiente si es posible salir de ella en términos de la evolución del sistema. Si una clase es transiente se dirá que los estados que la constituyen son *Estados Transientes*.

Definición 4.5 (*Clase Recurrente*) Una clase es *Recurrente* o *Final* si no hay otra clase accesible desde ella.

Una clase es Recurrente si una vez dentro de ella no es posible salir. En cadenas de Markov con número finito de estados siempre existe al menos una clase Recurrente. Si una clase es recurrente se dirá que los estados que la constituyen son *Estados Recurrentes*

La relación de accesibilidad entre clases permite representar el conjunto de clases de una cadena de Markov mediante un grafo dirigido sin ciclos (árbol), en donde los nodos representan las distintas clases y los arcos orientados establecen la condición de accesibilidad entre clases. Ello se ejemplifica en la siguiente figura:



En la figura se muestra una cadena con 5 clases, tres de ellas son transientes (C_1, C_2, C_3) y dos recurrentes (C_4, C_5). La clase C_5 es accesible desde todas las transientes, mientras que la clase C_4 es accesible sólo desde C_2 (además de sí misma).

Por último una clase Recurrente puede subclasificarse en términos de su *Periodicidad*.

Definición 4.6 (*Periodicidad*) Una clase Recurrente se dice *cíclica o periódica* de período d si los estados que la conforman pueden agruparse en d subclases S_1, S_2, \dots, S_d tal que:

$$X_n \in S_i \Rightarrow X_{n+1} \in S_{i+1}$$

con probabilidad 1.¹

Si una clase Recurrente tiene una sola subclase S se dice que es *aperiódica*. Si una clase es periódica de período d los estados que la constituyen se dirán *Estados periódicos*, de período d .

4.3.3 Definición Alternativa para la Clasificación de Estados

Hemos definido los conceptos de estado transiente y estado recurrente a partir de una relación de orden entre clases. Una definición alternativa (y consecuente con la anterior) es hacerlo a partir de la probabilidad de retornar a un estado.

Notación

1. Sea $f_{ij}(n)$ la probabilidad que el sistema entre al estado E_j por primera vez en el período n si parte del estado E_i . Formalmente $f_{ij}(n) = \Pr[X_n = E_j \wedge X_k \neq E_j \forall k < n \mid X_0 = E_i]$.

¹ $S_{d+1} \equiv S_1$.

2. Sea f_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione alguna vez al estado E_j si actualmente se encuentra en E_i , es decir,

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

Definición: E_i se dice un Estado Transiente si y sólo si $f_{ii} < 1$. Por su parte E_j se dice un Estado Recurrente si y sólo si $f_{jj} = 1$.

Distinguiemos ahora distintos tipos de estados recurrentes. Para ello llamemos μ_{ij} al tiempo esperado para la primera pasada por E_j partiendo en E_i , es decir $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}(n)$ (sólo para estados recurrentes de la misma clase). Un estado recurrente E_j se dice *recurrente positivo* si $\mu_{jj} < \infty$ y *recurrente nulo* si $\mu_{jj} = \infty$.

Se deja propuesto al lector el probar que si E_i y E_j son dos estados recurrentes de una misma clase entonces $f_{ij} = 1$, así como verificar que las definiciones dadas aquí son equivalentes a las presentadas en la Sección 4.3.2 (estos resultados se pueden encontrar en la mayor parte de los textos de procesos estocásticos, como por ejemplo el de Ross).

4.3.4 Probabilidades de Evolución desde una Estado Transiente a una Clase Recurrente

Consideremos un sistema cuya evolución puede modelarse mediante una cadena de Markov finita y homogénea, la cual posee al menos una clase transiente. Supongamos que el sistema está inicialmente en un estado transiente, y nos preguntamos por la probabilidad que el sistema evolucione, alguna vez, a cierta clase recurrente. Si hay más de una clase recurrente accesible desde la clase transiente en que comenzamos, la respuesta puede no ser trivial. En esta sección nos preocuparemos de responder esa pregunta.

Supongamos que la cadena de Markov considerada admite s clases recurrentes las que denotaremos por F_1, \dots, F_s . Sea además I_T el conjunto de índices asociado a los estados transientes de la cadena es decir $i \in I_T$ si $f_{ii} < 1$. Sea A_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione del estado $i \in I_T$ a la clase F_j (la que queremos calcular) y a_{ij} la probabilidad que el sistema evolucione desde el estado $i \in I_T$ a F_j en una transición. Entonces la probabilidad de evolución desde E_i a F_j puede expresarse como:

$$A_{ij} = \sum_{k \in I_T} [p_{ik} \cdot A_{kj}] + a_{ij} \quad (4.10)$$

Definiendo las matrices $A = [A_{ij}]$, $a = [a_{ij}]$ y $P^{Tran} = [p_{ik}]$ con $i, k \in I_T$, $j = 1, 2, \dots, s$ la condición (4.10) puede reescribirse en forma matricial como:

$$A = P^{Tran} A + a \quad (4.11)$$

Vale la pena notar que la matriz P^{Tran} no es más que la matriz de probabilidades de transición entre los estados transientes (i.e. es el resultado de eliminar todas las filas y columnas

asociadas a estados recurrentes de la matriz de probabilidades de transición). Ahora bien, es posible mostrar que la matriz $I - P^{Tran}$ es invertible (la demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.1). Utilizando eso en la Ecuación (4.11) se tiene

$$A = (I - P^{Tran})^{-1} a \quad (4.12)$$

La ecuación anterior permite determinar las probabilidades de evolución desde un estado transiente hacia una clase recurrente. Además al interior de una clase recurrente siempre es posible acceder cualquier estado desde cualquier otro y por tanto $\forall E_k \in F_j$ se cumple que $f_{ik} = A_{ij} \forall i \in I_T$.

4.4 Leyes Estables y Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos ocuparemos del comportamiento de largo plazo del sistema. Es decir, si $\pi(n)$ representa la ley de probabilidades del sistema después de n períodos partiendo desde una ley inicial $\pi(0)$ interesa estudiar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) \quad (4.13)$$

4.4.1 Leyes Estables

Sea P la matriz de transición de un período asociada a una cadena de Markov finita homogénea. Hemos visto anteriormente que el comportamiento de $\pi(n)$ puede ser descrito a través de $\pi(n-1)$ y P mediante la relación:

$$\pi(n) = \pi(n-1) P \quad (4.14)$$

Si el límite (4.13) existe entonces se tiene que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = [\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n-1)] P \quad (4.15)$$

Por lo tanto si $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$ se tiene de (4.15) que:

$$\pi = \pi P \quad (4.16)$$

Definición 4.7 (*Ley Estable*) Una cadena de Markov finita homogénea con matriz de transición de un período P admite al vector π como ley estable del sistema si π satisface (4.16) y es tal que $\pi \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$.

Proposición 4.1 Toda cadena de Markov finita y homogénea admite al menos una ley estable.

Dem: La demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.2.

Ahora bien, la existencia de leyes estables para una cadena de Markov no nos asegura la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$, por ejemplo consideremos la siguiente cadena de Markov de dos estados representada por la matriz de transición P dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz P admite como ley estable $\pi = [0.5, 0.5]$. Sin embargo, no es difícil ver que el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de $\pi(n)$ no necesariamente existe. En efecto, si inicialmente el sistema se encuentra en el primer estado, es decir, $\pi(0) = [1, 0]$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(2n) &= [0 \ 1] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(2n - 1) &= [1 \ 0] \end{aligned}$$

Mediante este ejemplo hemos visto que el cálculo del $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$ no corresponde simplemente a la determinación de las leyes estables para el sistema, sin embargo, en caso de existir el límite anterior, éste corresponde a una ley estable.

4.4.2 Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos preocuparemos de analizar en qué situación existe un comportamiento estacionario de largo plazo en la evolución de un sistema modelado como una cadena de Markov finita y homogénea. Entenderemos como comportamiento estacionario de largo plazo la existencia del $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$.

Definición 4.8 (*Probabilidades estacionarias*) Un vector π es un vector de Probabilidades Estacionarias para una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P si independiente de $\pi(0)$ (condición inicial) se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi$$

De la definición anterior y de (4.16) es directo que todo vector de probabilidades estacionarias es una ley estable para el sistema.

Las probabilidades estacionarias representan el comportamiento de largo plazo del sistema, en el sentido que después de “mucho” tiempo de evolución la probabilidad de encontrar el sistema en algún estado particular E_j tiende a ser independiente del número de transiciones que se han producido y del estado inicial, y converge a un valor constante π_j . Otra interpretación para las probabilidades estacionarias es la fracción del tiempo que el sistema pasa en

cada estado: π_j representa la fracción del tiempo que el sistema pasará en el estado E_j (si se lo deja evolucionar durante mucho tiempo).

Las afirmaciones anteriores suponen que el vector de probabilidades estacionarias es único; de no serlo estaríamos diciendo que para algún estado la fracción del tiempo que el sistema ocupa dicho estado durante su evolución permanente puede tomar dos valores distintos lo que no tiene sentido. El siguiente resultado aclara este punto.

Proposición 4.2 *Si una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite vector de probabilidades estacionarias π entonces este corresponde a la única solución del sistema :*

$$\pi = \pi P \quad \pi \geq 0 \quad \sum_j \pi_j = 1$$

Dem: La demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.3.

Como hemos visto no todas las cadenas de Markov admiten una ley de probabilidades estacionarias, el siguiente resultado entrega una primera caracterización de los casos en que estas existen.

Proposición 4.3 *Una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite un vector de probabilidades estacionarias π si y sólo si:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi$$

con Π matriz de probabilidades tal que su columna k -ésima es de la forma $\pi_j [1, 1, \dots, 1]$.

Dem: la demostración se encuentra en el Apéndice 4-A.4.

Consideremos una cadena de Markov con dos clases recurrentes, digamos F_1 y F_2 . Si el sistema se encuentra inicialmente en F_1 , por ser ésta una clase recurrente, durante la evolución del sistema éste nunca abandonará F_1 y por lo tanto de existir un vector de probabilidades estacionarias π se verifica que $\pi_i = 0 \quad \forall E_i \notin F_1$. El razonamiento es equivalente para F_2 . De lo anterior, y recordando que de existir vector de probabilidades estacionarias éste debe ser único, se deduce que para cadenas de Markov con más de una clase recurrente no existe vector de probabilidades estacionarias. La Proposición 4.4 generaliza lo anterior:

Definición 4.9 *(Cadena Ergódica)*

1. *Un estado se dice ergódico ssi es recurrente positivo y aperiódico.*
2. *Una clase se dice ergódica ssi contiene (sólo) estados ergódicos.*

3. Una cadena se dice *ergódica* ssi está constituida por una única clase, la cual es *ergódica*.^{2,3}

Proposición 4.4 Una cadena de Markov admite vector de probabilidades estacionarias si y sólo si es *ergódica* (o *ergódica + transiente*).

En este punto es bueno destacar la siguiente observación. Si un estado es transiente es posible salir de él y nunca regresar. Por lo tanto para un sistema evolucionando en forma permanente la probabilidad de encontrarlo en el largo plazo en un estado transiente es nula. De esta forma, en caso de existir vector de probabilidades estacionarias π , se debe cumplir que $\pi_i = 0$ para todo estado transiente E_i .

Para concluir esta sección determinaremos la relación que existe entre las probabilidades estacionarias y el tiempo esperado de retorno, μ_{ii} .

Sea E_i un estado recurrente en una cadena de Markov que admite vector de probabilidades estacionarias π . Sea $\pi_i \neq 0$ la probabilidad estacionaria asociada a E_i y sea x_{ii} la variable aleatoria que representa el tiempo de retorno a E_i . Supongamos que dejamos evolucionar el sistema desde su (única) clase recurrente. Sean $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ los instantes en los cuales el sistema alcanzó el estado E_i . Por ejemplo t_n es el período en el cual el sistema alcanzó por vez n -ésima el estado E_i . Como E_i admite probabilidad estacionaria, $\frac{t_n}{n}$ converge en probabilidad a π_i , es decir

$$\frac{t_n}{n} \xrightarrow{\text{Prob}} \frac{1}{\pi_i} \quad (4.17)$$

Por otro lado, $(t_2 - t_1), (t_3 - t_2), \dots, (t_n - t_{n-1})$ son realizaciones independientes de x_{ii} , además como

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \dots + (t_n - t_{n-1}) \\ &= t_1 + x_{ii}^1 + x_{ii}^2 + \dots + x_{ii}^{n-1} \\ \frac{t_n}{n} &= \frac{t_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{ii}^k}{n-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

como $\frac{t_1}{n}$ converge en probabilidad a 0 y de la ley de los grandes números la suma anterior converge al valor esperado de x_{ii} , es decir a μ_{ii} se tiene que

$$\frac{t_n}{n} \xrightarrow{\text{Prob}} \mu_{ii} \quad (4.19)$$

²Habitualmente admitiremos también la existencia de una o más clases transientes con un número finito de estados, caso en que hablaremos de “*ergódica + transiente*”.

³Aquellos lectores que no están familiarizados con el término Ergódico encontrarán interesante la sección (4.5.3).

luego por (4.17) y (4.19) se tiene que

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

4.5 Extensiones

4.5.1 Cadenas de Markov en Sentido Inverso

Sea $\{X_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ una cadena de Markov homogénea con matriz de transición de un período $P = [p_{ij}]$ y con ley de probabilidades inicial $\pi(0)$.

Suponiendo conocido el estado del sistema en el instante n ($X_n = E_{t_n}$) es posible describir en probabilidad el comportamiento pasado del sistema condicionado por su comportamiento en el período n , determinando la distribución de $X_{n-1}/X_n = E_{t_n}$, $X_{n-2}/X_n = E_{t_n}$, etc. Lo que se obtiene con este procedimiento es una nueva cadena de Markov (en sentido inverso) que en general no es homogénea.

Para ver esto recordemos que $\pi(k) = [\pi_1(k), \pi_2(k), \dots, \pi_r(k)]$ representa la distribución de probabilidad a priori del k -ésimo período, y definamos

$$e_{k,i}^{n,j} = \text{Prob}(X_k = E_i / X_n = E_j)$$

1. La Ley Condicional de X_k dado $X_{k+1} = E_j$ viene dada por $\{e_{k,i}^{k+1,j}\}_{i=1,2,\dots,r}$:

$$e_{k,i}^{k+1,j} = \frac{\pi_i(k) \cdot p_{ij}}{\pi_j(k+1)}$$

2. La Ley Condicional de X_{k+1} dado $X_{k+2} = E_j$ viene dada por $\{e_{k+1,i}^{k+2,j}\}_{i=1,2,\dots,r}$:

$$e_{k+1,i}^{k+2,j} = \frac{\pi_i(k+1) \cdot p_{ij}}{\pi_j(k+2)}$$

3. Ley Condicional de X_k dado $X_{k+1} = E_j$ y $X_{k+2} = E_s$

$$\text{Prob}(X_k = E_i / X_{k+1} = E_j, X_{k+2} = E_s) = \frac{\pi_i(k) \cdot p_{ij} \cdot p_{js}}{\pi_j(k+1) \cdot p_{js}} = e_{k,i}^{k+1,j}$$

De 1 y 3 se tiene que la cadena en sentido inverso satisface la condición markoviana. De 1 y 2 se aprecia que no es en general homogénea.

4.5.2 Cadenas de Markov de Segundo Orden

Al definir las cadenas de Markov vimos que el principal supuesto que ellas tienen es la condición markoviana, que señala que el comportamiento futuro del sistema depende exclusivamente de su comportamiento presente y no de su pasado.

$$Prob(X_{k+1} = E_i / X_k = E_{j_k}, \dots, X_0 = E_{j_0}) = Prob(X_{k+1} = E_i / X_k = E_{j_k})$$

Una extensión natural al modelo clásico de Markov es suponer que el comportamiento de X_{k+1} depende tanto de X_k como de X_{k-1} y no sólo de X_k , en este caso se dice que la cadena de Markov es de segundo orden. Si suponemos que la condición de homogeneidad se sigue manteniendo, es necesario conocer r^3 probabilidades del tipo

$$p_{ijk} = Prob(X_n = E_k / X_{n-1} = E_j, X_{n-2} = E_i)$$

para describir la evolución en probabilidad del sistema.

Una forma alternativa de modelación es definir un nuevo sistema para el cual el estado del sistema al instante n es un par ordenado de estados del sistema original en los instantes n y $n - 1$. De esta forma si el sistema inicial evolucionó como $E_i, E_j, E_i, E_s, E_r, E_r, \dots$, el nuevo sistema presentaría una evolución del tipo $(E_i, E_j), (E_j, E_i), (E_i, E_s), (E_s, E_r), \dots$. Este nuevo sistema se comporta como una cadena de Markov homogénea de orden uno, pero contiene r^2 estados. Su matriz de probabilidades de transición de un período $W = [w_{(i,j),(s,k)}]$ satisface:

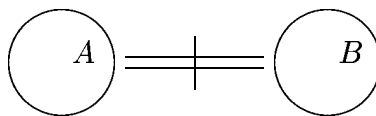
$$w_{(i,j),(s,k)} = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ p_{ijk} & j = s \end{cases}$$

donde $w_{(i,j),(s,k)}$ es la probabilidad que el sistema evolucione del estado (E_i, E_j) al estado (E_s, E_k) en un período.

Resulta natural la extensión a cadenas de orden superior, en que la ley de probabilidades para X_n depende de los últimos k estados alcanzados, $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_{n-k}$. En ese caso se definirá $|E|^k$ nuevos estados correspondientes a una k -tupla con los últimos k estados elementales alcanzados.

4.5.3 Ergodicidad

Supongamos que disponemos de dos estanques A y B unidos por una cañería, la que contiene un llave de paso originalmente cerrada.



El estanque A contiene oxígeno a una presión p_a y el B helio a una presión p_b . Si la válvula se abre las moléculas de oxígeno evolucionan hacia el estanque B , mientras que las de *helio* lo hacen hacia el estanque A . Un esquema aleatorio puede perfectamente representar la evolución de las presiones parciales de las mezclas en cada estanque. Se constata que rápidamente un equilibrio se alcanza, las presiones en los estanques A y B se igualan y mantiene este comportamiento aunque se mantengan los intercambios moleculares entre ambos estanques.

Un estado permanente se ha alcanzado, en el cual el estado del sistema definido por las presiones parciales únicamente se mantiene constante. Más aún, el estado final del sistema es independiente de las condiciones iniciales del sistema, el resultado sería el mismo si las cantidades de oxígeno y helio hubiesen sido repartidas arbitrariamente en los estanques A y B .

Comportamientos como el anterior son frecuentemente observados en sistemas físicos con un gran número de grados de libertad, esto llevó a físicos como L. Boltzmann a enunciar el “*Principio de Ergodicidad*”. En su forma más general, este principio señalaba que para un sistema complejo evolucionando en forma aleatoria su repetición en el tiempo tendía a regularizar su comportamiento pese a los caprichos del azar que interviene a cada instante.

Los matemáticos retomaron el término *ergódico* para designar propiedades precisas del comportamiento de modelos abstractos. Algunos autores definieron “sistema ergódico” como un sistema en evolución markoviana, homogéneo en el tiempo con una única clase recurrente aperiódica. La definición más común que se adoptó, dada por Maxwell fue aquella que expresaba que “ergodicidad” correspondía a igualar medias temporales con medias estadísticas, o también la convergencia de las medias temporales cuando el tiempo de evolución tiende a infinito.

Para entender de que representa está definición, consideremos un sistema compuesto por r estados $\{E_1, \dots, E_r\}$ evolucionando en forma aleatoria. Designemos por X_t el estado alcanzado por el sistema en el instante t . Consideremos dos tipos de frecuencias observadas.

1. *Media Estadística:* $Z_i^n(t)$

Para ello se observan n realizaciones independientes del proceso y se denota por $Z_i^n(t)$ el número de veces que el sistema alcanzó el estado E_i en el instante t . $Z_i^n(t)$ representa la frecuencia absoluta de un evento en una muestra de tamaño n . Si $p_i(t) = \text{Prob}(X_t = E_i)$, la ley de los grandes números nos señala que si n tiende a infinito, $Z_i^n(t)/n$ converge en probabilidad a $p_i(t)$.

2. *Media Temporal:* S_i^T

Se observa ahora una sola realización del proceso entre los instantes 0 y T . Denotamos por S_i^T el tiempo durante el cual el sistema ocupó el estado E_i . La razón S_i^T/T es una media temporal.

4.6 Ejercicios

1. Considere un sistema de Markov homogéneo con cuatro estados A, B, C, D . La matriz de probabilidades de transición de un período viene dada por:

	(A)	(B)	(C)	(D)
(A)	0	0	0.75	0.25
(B)	0	0	0.5	0.5
(C)	1	0	0	0
(D)	0	1	0	0

- Cuáles son las leyes estables del sistema?
 - Si el sistema se encuentra originalmente en C , cuál es la ley límite de los estados X_{2n} y X_{2n+1} cuando n tiende a infinito.
 - Responda el punto anterior si la ley inicial es $\pi(0) = [0.4, 0.2, 0.2, 0.2]$.
 - Se extraen de la evolución aleatoria del sistema anterior los estados obtenidos de dos en dos, es decir, $X_t, X_{t+2}, \dots, X_{t+2n}$. Es esta sucesión de Markov, cuáles son sus leyes estables.
2. Considere una cadena de Markov finita y homogénea. En qué caso la cadena definida en sentido inverso a partir del período n es homogénea.
3. Muestre que si E_i y E_j son estados de una misma clase recurrente entonces $f_{ij} = 1$.
4. Considere una cadena de Markov finita y homogénea representada por la siguiente matriz de transición de un período.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
B	p	0	q	0	0	0	r	0	$1 - p - q - r$
C	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
D	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0
E	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0
F	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1

- Construya el grafo asociado a la cadena y clasifique todos sus estados identificando las distintas clases existentes y su periodicidad.

- (b) Muestre que $f_{AC}(n) = \frac{1}{2}f_{AC}(n-1) + \frac{p}{2}f_{AC}(n-2) \forall n \geq 3$ y concluya que

$$f_{AC} = \frac{q}{1-p}$$

Deduzca el valor de f_{AG} y f_{AI} .

- (c) Si el sistema evoluciona durante un número suficientemente grande de períodos partiendo en A . Cuál es la probabilidad de encontrarlo en H ?
- (d) Suponga que luego de evolucionar por un tiempo el sistema se encuentra actualmente en C . ¿Cuál es la probabilidad de encontrarlo n períodos más tarde en E ?

Bibliografía

- [1] Ross, S.M. *Stochastic Processes*. 2da edición, Wiley, 1996.
- [2] Markov, A.A. Extension of the Limit Theorems of Probability Theory to a Sum of Variables Connected in a Chain. *The Notes of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg*, VIII Series, Physio-Mathematical College, Vol. XXII, No 9, 1907.

Apéndice

4-A Demostración propiedades cadenas de Markov

4-A.1 Invertibilidad de la Matriz de Probabilidades de Transición entre los Estados Transientes

Proposición 4.5 *Sea P^{Tran} la matriz de probabilidades de transición entre los estados transientes de una cadena de Markov finita y homogénea (i.e. es el resultado de eliminar todas las filas y columnas asociadas a estados recurrentes de la matriz de probabilidades de transición). Entonces la matriz $(I - P^{Tran})$ es invertible.*

Dem: Supongamos que $I - P^{Tran}$ no admite inversa; entonces el sistema $(I - P^{Tran})Z = 0$ admite solución no trivial Z . Supongamos que Z tiene todas sus componentes iguales. En tal caso la ecuación $(I - P^{Tran})Z = 0$ obliga a que todas las filas de P^{Tran} sumen 1. Pero esto no es posible, puesto que desde algunos de los estados transientes se debe poder acceder a estados recurrentes, y las filas asociadas a esos estados en P^{Tran} no podrán sumar uno. De esa forma, los elementos de Z no pueden ser todos iguales.

Sea Z_m la componente de mayor valor absoluto de Z , y supondremos $Z_m > 0$ (el caso $Z_m < 0$ es análogo). Sea $I_M = \{i / Z_i = Z_m\}$ (puede haber más de una componente que alcance ese valor máximo). La ecuación $(I - P^{Tran})Z = 0$ equivale a $Z = P^{Tran}Z$ lo cual en particular obliga a que

$$Z_k = \sum_j P_{kj}^{Tran} \cdot Z_j \quad \forall k \in I_M \quad (4.20)$$

Sabemos que para $k \in I_M$ se tiene que $0 \leq P_{kj}^{Tran} \leq 1 \quad \forall j$ y que $\sum_j P_{kj}^{Tran} \leq 1$. Además $Z_j = Z_k$ si $j \in I_M$ y $Z_j < Z_k$ si $j \notin I_M$. Así, la única manera de cumplir la Ecuación (4.20) es

$$\sum_{j \in I_M} P_{kj}^{Tran} = 1 \quad \forall k \in I_M.$$

Vale decir desde cualquier estado E_k con $k \in I_M$ sólo se puede acceder a otros estados cuyos índices también estén en I_M . Ello implica que esos estados constituyen una (o más) clases recurrentes, lo cual es una contradicción (son estados transientes).

De esa forma no puede haber solución Z no trivial para $(I - P^{Tran})Z = 0$, de donde $(I - P^{Tran})$ es invertible. ■

4-A.2 Demostración de la Proposición 4.1

Toda cadena de Markov finita y homogénea admite al menos un vector π como ley estable.

Para verificar la validez del enunciado anterior basta observar primero que según la (4.16) π debe satisfacer:

$$\pi(P - I) = 0 \quad (4.21)$$

con I matriz identidad. Como P es una matriz de probabilidad entonces se cumple que $\det(P - I) = 0$ pues la suma de los términos de cada fila es nulo. Por lo tanto, el sistema (4.21) admite solución no trivial ⁴. Por lo tanto siempre existe $\pi \neq 0$ tal que $\pi = \pi P$.

Lo siguiente es demostrar que entre las soluciones que existen alguna satisface con $\pi \geq 0$. Para ello, verificaremos primero que si π es solución de (4.21) entonces todos sus elementos tienen el mismo signo. En efecto, sea π alguna solución y supongamos que sus elementos tienen distintos signos. Sea I_1 el conjunto de índices tal que $\pi_i < 0$ $i \in I_1$ e I_2 el complemento de I_1 ; el resultado es directo si alguno de estos conjuntos de índices es vacío. Entonces de (4.16) se tiene que:

$$\pi_k = \sum_{j \in I_1} [\pi_j \cdot p_{jk}] + \sum_{i \in I_2} [\pi_i \cdot p_{ik}] \quad k \in I_1 \quad (4.22)$$

Luego sumando la ecuación anterior sobre $k \in I_1$ y reordenando se tiene:

$$\sum_{k \in I_1} [\pi_k (1 - \sum_{j \in I_1} p_{kj})] = \sum_{k \in I_1} [\sum_{i \in I_2} \pi_i \cdot p_{ik}] \quad (4.23)$$

por ser P una matriz de probabilidad, $1 - \sum_{j \in I_1} p_{kj} \geq 0$ y por tanto el lado de la izquierda de la ecuación anterior es negativo mientras que el lado derecho es positivo, esta contradicción se debe a suponer que tanto I_1 como I_2 son distintos de vacío, y por tanto se concluye que todas las componentes de π son de igual signo.

Ahora bien, es fácil ver que si π satisface (4.21) entonces $\lambda \pi$ también será solución ($\lambda \in \mathbb{R}$). Entonces escogiendo $\lambda = \sum_i \pi_i$ se tendrá que $\lambda \neq 0$ pues $\pi \neq 0$ y todas sus componentes son del mismo signo. De esta forma $\bar{\pi} = \frac{\pi}{\lambda}$ es solución de (4.21) con todas sus componentes no negativas y con suma igual a 1, es decir, $\bar{\pi}$ es una ley estable del sistema. ■

4-A.3 Demostración de la Proposición 4.2

Si una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P admite vector de probabilidades estacionarias π entonces este corresponde a la única solución del sistema :

$$\pi = \pi P$$

Demostración

⁴También es posible concluir que P admite a 1 como valor propio.

Sabemos de la Sección 4.4.1 que de existir vector de probabilidades estacionarias éste corresponde a una ley estable del sistema, de modo que sólo resta probar que, de existir, es único.

Para verificar la unicidad del vector de probabilidades estacionarias π consideremos la posibilidad que exista otra ley estable distinta π^* con $\pi^* \neq \pi$. Supongamos que el sistema comienza su evolución con un vector de probabilidades iniciales $\pi(0) = \pi^*$. Como π^* es una ley estable se verifica que $\pi^* = \pi^* P$ por lo tanto $\pi(1) = \pi(0) P = \pi^* P = \pi^*$, en general se tiene que $\pi(n) = \pi^*$ y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi^*$. Como π es un vector de probabilidades estacionarias independiente de la ley inicial $\pi(0)$ (en este caso $\pi(0) = \pi^*$) se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi$, por lo tanto se tiene que $\pi = \pi^*$. ■

4-A.4 Demostración de la Proposición 4.3

Una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período admite un vector de probabilidades estacionarias π si y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi$$

con Π matriz de probabilidades tal que su columna k -ésima es de la forma $\pi_j [1, 1, \dots, 1]$.

Demostración

Si existe un vector π de probabilidades estacionarias entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$ además como $\pi(n) = \pi(0) P^n$ se tiene que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Sea la matriz Π este valor límite para P^n . Como π es independiente de $\pi(0)$ se tiene que el producto $\pi(0) \Pi$ tiene que ser constante para todo vector de probabilidades $\pi(0)$, es claro de esto que la única posibilidad es que las columnas de Π tienen que ser de la forma $\pi_j [1, 1, \dots, 1]$.

Supongamos ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi$ matriz de probabilidades tal que cada una de sus columnas es de la forma $\pi_j [1, 1, \dots, 1]$. Por lo tanto, $\forall \pi(0)$ vector de probabilidades iniciales se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(0) P^n = \pi(0) \Pi = \pi$$

Luego π es un vector de probabilidades estacionarias. ■

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 5

Cadenas de Markov con Beneficio

5.1 Introducción

Hasta aquí nos hemos dedicado a describir la evolución en probabilidad de un sistema que puede modelarse como una cadena de Markov. ¿Por qué queríamos, sin embargo, efectuar dicha descripción?. Presumiblemente porque no nos resulta indiferente que el sistema tome en uno u otro estado: la evolución del sistema tiene consecuencias, las cuales estamos interesados en predecir.

Supongamos, por ejemplo que una persona posee acciones de cierta empresa, cuyas utilidades anuales constituyen un proceso estocástico (y por ende el dividendo que recibe por sus acciones también). Esa persona puede estar interesada en cuantificar el flujo acumulado de dividendos a lo largo de varios años. Con ese propósito en mente le resultará necesario conocer la ley de probabilidades para los resultados de la empresa en cada año, que es el tipo de preguntas que nos hacíamos en el capítulo anterior.

En este capítulo nos interesaremos en determinar el beneficio esperado asociado a la evolución del sistema a través de tiempo, específicamente en el caso en que los beneficios dependen de un proceso estocástico subyacente el cual puede modelarse como una cadena de Markov.

5.2 Formulación del Modelo

Consideremos un sistema cuya evolución en el tiempo puede ser descrita a través de una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de transición de un período P .¹ Supongamos que para cada par de estados E_i y E_j es posible asignar un beneficio r_{ij} asociado a la transición desde E_i a E_j , y que estamos interesados en cuantificar el beneficio total acumulado a lo largo de un número dado de períodos (i.e. la suma de los beneficios asociados

¹En la práctica muchos sistemas pueden modelarse como una cadena de Markov haciendo el número de estados suficientemente grande y la duración de los períodos suficientemente pequeña

a las transiciones realizadas durante esos períodos). En tal caso diremos que el sistema es susceptible de ser modelado como una cadena de Markov con beneficios. Los valores r_{ij} no necesariamente corresponden a beneficios o costos económicos, sino cualquier función real de las transiciones, con tal que tenga sentido acumularlos de un período a otro.

Muchas veces seremos capaces de identificar beneficios que están asociados al hecho de alcanzar un estado en particular, más que a la transición de un estado a otro. En esas situaciones denotaremos por r_i al beneficio asociado a ocupar el estado E_i . En rigor esta notación adicional es innecesaria, pues ese beneficio asociado al estado E_i podría haber sido incorporado en todos los beneficios r_{ij} asociados a transiciones partiendo desde E_i . Sin embargo el identificarlos separadamente muchas veces aporta claridad a la modelización.

Si sabemos que en un período dado el sistema alcanza el estado E_i , el beneficio que se percibirá durante ese período es todavía probabilístico, pues no sabemos hacia qué estado evolucionará el sistema (y existen beneficios asociados a las transiciones). Podemos definir \hat{r}_i como el beneficio esperado en un período asociado al estado E_i . Si p_{ij} es la probabilidad que el sistema evolucione de E_i a E_j , se tiene que

$$\hat{r}_i = r_i + \sum_j p_{ij} \cdot r_{ij},$$

es decir \hat{r}_i es la suma del beneficio percibido por alcanzar dicho estado (r_i) más el valor esperado de los beneficios asociados a las posibles transiciones desde E_i . Denotaremos por \hat{r} al vector de beneficios esperados en un período asociados a los distintos estados del sistema.

Supongamos que nos interesa describir el valor esperado del beneficio acumulado asociado a la evolución del sistema en un horizonte de n períodos. Sea $V_k(i)$ el beneficio total esperado si faltan k períodos para el final del horizonte y el sistema se encuentra actualmente en el estado E_i .² Denotaremos por $V_0(i)$ al beneficio de terminar en el estado E_i , al que se denomina valor residual del estado E_i (usualmente los valores residuales no guardan directa relación con la estructura de beneficios propios de la evolución del sistema los que vienen dados por \hat{r}).

5.3 Ejemplo

Imagine una empresa que al comenzar cada año invierte todo su patrimonio en su operación. Al finalizar el año observa sus resultados. Si obtuvo ganancias entonces capitaliza la mitad de ellas y el resto lo reparte como dividendos entre sus accionistas. Si hubo pérdidas entonces no reparte dividendos. Las ganancias o pérdidas de un año son una variable aleatoria cuya distribución depende sólo del patrimonio con que comienza ese año (mientras mayor es el patrimonio aumenta la probabilidad de obtener mayores ganancias). Además, por simplicidad supondremos que dicha variable aleatoria sólo puede tomar valores enteros múltiplos de 2.

² V_k corresponde al vector de beneficios acumulados esperados si faltan k períodos para el final.

Bajo los supuestos realizados la evolución del patrimonio de un año a otro puede modelarse como una cadena de Markov. Llamando X_n el patrimonio en el año n , la ley de probabilidades para X_{n+1} depende sólo de X_n . Las probabilidades de transición vienen dadas por

$$\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i] \equiv p_{ij} = \begin{cases} \Pr[\text{ganancia} = 2k | \text{patrimonio} = i] & \text{Si } j = i + k \\ \Pr[\text{ganancia} = -2k | \text{patrimonio} = i] & \text{Si } j = i - 2k \\ 0 & \text{Si } j = i - 2k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

Suponga ahora que ud. posee acciones de dicha empresa, y tiene intenciones de mantenerlas en su poder durante 10 años. Pasado ese lapso venderá las acciones, y con el dinero obtenido por la venta y por los dividendos acumulados durante los 10 años se retirará a descansar en algún agradable rincón de este planeta (¿si todavía quedan?). El precio de venta de las acciones dentro de 10 años es una función (determinística) del patrimonio de la empresa en ese momento. Si el patrimonio de la empresa es j ud. podrá vender las acciones que posee en $z(j)$.

¿Cual es el valor esperado del capital con el que ud. se retirará? Para responder esa pregunta construiremos un modelo de Markov con beneficios que dé cuenta de sus ingresos. Ya hemos descrito como la evolución del patrimonio puede modelarse como una cadena de Markov. Toca ahora identificar los beneficios asociados a estados y transiciones.

Resulta natural asociar beneficios a las transiciones (cambios de valor del patrimonio). Si el patrimonio aumenta de un año a otro es porque la empresa obtuvo utilidades, y parte de ellas serán percibidas por usted como dividendos. Si el patrimonio cae, ud. no recibirá nada ese año (la empresa tuvo pérdidas). Definimos entonces

$$r_{ij} = \begin{cases} \alpha \frac{j-i}{2} & \text{Si } j > i \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

donde α representa la fracción de la propiedad de la empresa que ud. posee. En este caso no es necesario asociar beneficios directamente a los estados ($r_i = 0 \forall i$). Así

$$\hat{r}_i = 0 + \sum_j p_{ij} \cdot r_{ij}.$$

Finalmente, la venta de las acciones (al cumplirse los 10 años) la incorporamos como un beneficio residual:

$$V_0(i) = z(i) \quad \forall i.$$

5.4 Expresión General para el Beneficio Acumulado

Debido a la propiedad markoviana el cálculo de $V_k(i)$ es independiente del comportamiento del sistema en los períodos anteriores y sólo depende de los k períodos que restan. Teniendo en cuenta este hecho y suponiendo que los valores residuales son conocidos podemos calcular el beneficio acumulado esperado si falta 1 período para el final, V_1 .

Si faltando un período para el final el sistema se encuentra en el estado E_i entonces el beneficio acumulado esperado se calcula como el beneficio esperado de estar en el estado E_i más el beneficio residual esperado, es decir

$$V_1(i) = \hat{r}_i + \sum_j p_{ij} \cdot V_0(j) \quad (5.1)$$

De igual forma si faltan k períodos para el final, el beneficio acumulado esperado de encontrarse en el estado E_i viene dado por el beneficio esperado en el período presente (\hat{r}_i) más el beneficio esperado desde el período siguiente en adelante ($V_{k-1}(j)$) el cual depende del estado que el sistema alcance en el período siguiente, por lo que debemos condicionar y sumar sobre los estados posibles (ponderados por sus respectivas probabilidades):

$$V_k(i) = \hat{r}_i + \sum_j p_{ij} \cdot V_{k-1}(j) \quad (5.2)$$

Vectorialmente (5.2) queda como

$$V_k = \hat{r} + P V_{k-1} \quad (5.3)$$

donde \hat{r}, V_k, V_{k-1} son vectores columnas.

Ahora bien, sustituyendo en (5.3) k por $k-1$ y reemplazando en (5.3) se tiene

$$V_k = \hat{r} + P \hat{r} + P^2 V_{k-2} \quad (5.4)$$

si el procedimiento anterior se aplica en forma recursiva se tiene:

$$V_k = \hat{r} + P \hat{r} + P^2 \hat{r} + \dots + P^k V_0 \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) permite calcular el valor de V_k conocidos P, \hat{r} y V_0 , sin embargo, la expresión es aún incómoda de manejar sobre todo para valores grandes de k . Para obtener una expresión más simplificada para V_k es necesario exigir una condición más a la cadena de Markov.

5.5 Caso Cadena de Markov Ergódica

Supongamos que la cadena de Markov con beneficios que estudiamos es ergódica (o ergódica + transiente), es decir, admite una única clase recurrente la que es aperiódica. Bajo estas condiciones la sucesión $P^n_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una matriz Π con todas sus filas iguales al vector de probabilidades estacionarias π . Ahora bien, reemplazando k por $k-1$ en (5.5) y restándola a (5.5) se obtiene:

$$V_k - V_{k-1} = P^{k-1} \hat{r} + [P^k - P^{k-1}] V_0 \quad (5.6)$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito en (5.6) se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (V_k - V_{k-1}) = \Pi \hat{r} \quad (5.7)$$

Llamando $g = \sum_i \pi_i \cdot \hat{r}_i$ y e al vector columna de 1's se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (V_k - V_{k-1}) = g \cdot e \quad (5.8)$$

Observamos que el beneficio adicional que se obtiene por aumentar en un período el horizonte de planificación converge a un valor constante, el cual no depende del estado inicial. Este resultado es intuitivo, pues el beneficio asociado a ese período extra es el beneficio esperado asociado a una transición que será realizada dentro de mucho tiempo; ese beneficio esperado depende del estado en que se encuentre el sistema, y la probabilidad de estar en cada estado converge a la ley de probabilidades estacionaria independiente del estado inicial. Es decir, g es el incremento límite de V_k por unidad de crecimiento de k . De este resultado es razonable pensar que $V_k - kge$ converge a un cierto vector límite u , lo cual por el momento lo asumiremos como cierto (este resultado se desprende de la Proposición 5.1, que enunciaremos más abajo). Resulta útil escribir $u = W + \alpha e$ con $W = (W_1, W_2, \dots, W_r)$ y $W_1 = 0$.³

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k - kge = W + \alpha e \quad W_1 = 0 \quad (5.9)$$

Ahora bien, como P es una matriz de probabilidad se tiene que $Pe = e$ con lo cual (5.3) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} V_k - kge &= \hat{r} + PV_{k-1} - kge \\ &= \hat{r} - ge + P[V_{k-1} - (k-1)ge] \end{aligned} \quad (5.10)$$

por lo tanto tomando límite en la expresión anterior se tiene por (5.9)

$$W + \alpha e = \hat{r} - ge + P[W + \alpha e] \quad W_1 = 0 \quad (5.11)$$

la que puede simplificarse a

$$W + ge = \hat{r} + PW \quad W_1 = 0 \quad (5.12)$$

El sistema anterior admite solución única bajo el supuesto de una cadena ergódica. El vector W solución del sistema anterior es independiente de V_0 y es este el motivo que originó la separación en W y α . W se conoce como el vector asintótico de beneficios relativos debido a que satisface $W = \lim_{k \rightarrow \infty} [V_k - V_k(1)e]$. En efecto,

³La elección de W_1 es arbitraria considerando que siempre es posible reordenar los estados de la cadena pudiendo ser cualquiera E_1 .

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} [V_k - V_k(1)e] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [V_k - kge - (V_k(1)e - kge)] \\
&= W + \alpha e - (W_1e + \alpha e) \\
&= W - W_1e \\
&= W
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Es decir W_i representa el beneficio adicional de largo plazo de empezar la evolución en el estado E_i en lugar de E_1 .

Proposición 5.1 *Sea una cadena de Markov finita, homogénea y ergódica con matriz de transición de un período P . Sea W la única solución de (5.12). Entonces el beneficio esperado acumulado durante k períodos (V_k) viene dado por:*

$$V_k = kge + W + [P]^n (V_0 - W)$$

donde $g = \sum_j \pi_j \cdot \hat{r}_j$ es el beneficio esperado por transición en régimen estacionario. Además, en el límite se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [V_k - kge] = W + \alpha e \quad \alpha = \sum_j \pi_j [V_0(j) - W_j]$$

La demostración se encuentra en el Apéndice 5-A.

5.6 Aplicación: Tiempo Esperado en el Transiente

Consideremos una cadena de Markov ergódica con al menos una clase transiente. Mediante una formulación de cadena de Markov con beneficios seremos capaces de determinar el valor esperado del tiempo (Nº de períodos) necesario para llegar desde un estado transiente cualquiera hasta la única clase recurrente del sistema.

Para ello, definamos $\hat{r}_i = 1$ si E_i es un estado transiente y $\hat{r}_j = 0$ si E_j es recurrente. De esta forma el tiempo promedio para llegar desde E_i a la clase recurrente viene dado por:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(i)$$

Para calcular el límite anterior debemos primero determinar los valores para W a partir de la ecuación (5.12). Ahora bien para este caso particular el valor de g es 0 pues los estados recurrentes tienen un beneficio $\hat{r} = 0$ y los estados no recurrentes tienen una probabilidad estacionaria $\pi = 0$. Por lo tanto el sistema a resolver es en este caso:

$$W = \hat{r} + P W$$

Si se ordenan adecuadamente los estados el sistema anterior toma la forma:

$$\begin{pmatrix} W_R \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_T \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} P_{RR} & P_{RT} \\ P_{TR} & P_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_R \\ W_T \end{pmatrix} \quad P_{RT} = 0$$

en donde los subíndices T y R representan los estados transientes y recurrentes respectivamente. Para el sistema anterior se obtienen dos ecuaciones vectoriales

$$W_R = P_{RR}W_R$$

$$W_T = e_T + P_{TR}W_R + P_{TT}W_T$$

En la primera ecuación la matriz P_{RR} es una matriz de probabilidad (todos sus elementos son no negativos y la suma de sus elementos por fila es igual a 1) asociada a una cadena ergódica por lo tanto la solución W_R toma la forma:

$$W_R = \lambda \cdot e_R \quad \lambda = cte$$

Además, el sistema de ecuaciones anterior tiene un grado de libertad, luego escogiendo $\lambda = 0$ se tiene que $W_R = 0$. Reemplazando este resultado en la segunda ecuación y despejando W_T se obtiene:

$$W_T = (I_T - P_{TT})^{-1}e_T$$

La matriz $(I_T - P_{TT})$ es invertible, pues P_{TT} es la matriz de probabilidades de transición entre los estados transientes (el razonamiento para verificarlo se expuso en la Sección ?? 4.3.4).

Finalmente, el cálculo del tiempo promedio de evolución desde un estado transiente a uno recurrente viene dado por:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \lim_{k \rightarrow \infty} W - [P]^k W = W - \Pi W$$

Como $W_i = 0$ si E_i es recurrente y $\pi_j = 0$ si E_j es transiente se tiene que $\Pi W = 0$ con lo cual se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = W$$

con

$$W = \begin{pmatrix} W_R \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (I_T - P_{TT})^{-1}e_T \end{pmatrix}$$

Note que este resultado es consecuente con la interpretación de W como vector de beneficios relativos: para cualquier estado transiente E_i y cualquier estado recurrente E_j se tiene que $W_i - W_j = W_i$ representa cuánto tiempo más, en promedio, se está en el transiente por partir desde E_i en lugar de hacerlo desde E_j (caso en el que no se pasa por el transiente).

5.7 EJERCICIOS

1. Considere un juego de azar con las siguientes características.

- En cada jugada el jugador tiene una probabilidad p de ganar.
 - Si el jugador gana en una jugada recibe el pozo de $\$P$ y se termina el juego.
 - El jugador no se puede retirar del juego mientras no haya ganado.
 - La primera jugada vale \$1000, la segunda vale \$2000, la tercera vale \$4000, la k -ésima jugada vale $\$1000 \cdot 2^{k-1}$.
- (a) Determine la cantidad esperada de dinero que un jugador debe gastar antes de ganar el juego.
- (b) Determine el número esperado de jugadas a realizar.

Apéndice

5-A Demostración Propiedades cadenas de Markov con Beneficio

Demostración de la Proposición 5.1

Sea una cadena de Markov finita, homogénea y ergódica con matriz de transición de un período P . Sea W la única solución de (5.12). Entonces el beneficio esperado acumulado durante k períodos (V_k) viene dado por:

$$V_k = kge + W + [P]^n (V_0 - W)$$

donde $g = \sum_j \pi_j \cdot \hat{r}_j$ es el beneficio esperado por transición en régimen estacionario. Además, en el límite se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [V_k - kge] = W + \alpha e \quad \alpha = \sum_j \pi_j [V_0(j) - W_j]$$

Demostración

Consideremos otra cadena de Markov con beneficios idéntica a la anterior salvo por su vector de beneficios residuales, el cual consideraremos igual al vector de beneficios relativos, W . Denotemos por V'_k el beneficio esperado acumulado en esta nueva situación. Hemos impuesto $V'_0 = W$. Se tiene entonces que

$$V'_1 = \hat{r} + P W = W + ge \quad (\text{por la condición (5.12)}) \quad (5.14)$$

De igual forma

$$V'_2 = \hat{r} + P V'_1 = \hat{r} + P (W + ge) = W + 2ge \quad (5.15)$$

razonando inductivamente es fácil ver que en general se cumple

$$V'_k = kge + W \quad (5.16)$$

además, usando (5.5) se tiene

$$V'_k = \hat{r} + P \hat{r} + \dots + P^k W \quad (5.17)$$

Luego considerando V_k como el beneficio esperado acumulado para un vector de valores residuales arbitrario dado por la ecuación (5.5) y restando la expresión (5.17) se tiene:

$$V_k - V'_k = P^k [V_0 - W] \quad (5.18)$$

con lo cual reemplazando (5.16) en la ecuación anterior se tiene

$$V_k = kge + W + P^k[V_0 - W] \quad (5.19)$$

Finalmente de (5.19) se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k - kge = W + \alpha e$ con $\alpha = \sum_j \pi_j (V_0(j) - W_j)$ (por la convergencia de P^k cuando $k \rightarrow \infty$). ■

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 6

Modelos de Decisión Markovianos

6.1 Introducción

Hasta ahora nuestro rol en el estudio de procesos markovianos ha sido puramente descriptivo: describimos primero la evolución en probabilidad de un sistema modelable como una cadena de Markov, y después el valor esperado del beneficio acumulado, una vez que habíamos construido una estructura de beneficios sobre la cadena en cuestión. Sin embargo en las situaciones interesantes de la vida real no somos meros espectadores, sino que podemos tomar decisiones que afecten el comportamiento de los sistemas que estamos estudiando.

Consideremos por ejemplo una máquina productiva sujeta a posibles fallas, y a la cual se le pueden hacer distintos tipos de mantenciones preventivas a distintos costos. Supongamos que la ocurrencia de las fallas de la máquina responde a un proceso estocástico que se ve afectado por las mantenciones realizadas. En semejante situación desearemos escoger los tipos de mantención preventiva a realizar y los instantes en que conviene efectuarlas, de tal forma de maximizar los beneficios asociados a la operación del equipo.

El problema anterior es lo que llamaríamos un problema de decisión estocástico. En este capítulo estudiaremos un caso particular de problemas de decisión estocásticos y que son aquéllos en que el proceso estocástico corresponde a una cadena de Markov.

6.2 Definiciones

Consideremos un sistema cuya evolución en el tiempo está contenida al interior de un conjunto de estados finito $E = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ y un cierto conjunto A que denominaremos conjunto de acciones posibles. Para todo $a \in A$ el par (E, a) representa una cadena de Markov finita y homogénea con matriz de probabilidades de transición de un período $P(a) = [p_{ij}(a)]$. Si además se conocen matrices de beneficio $R(a) = [r_{ij}(a)]$ $a \in A$ en donde $r_{ij}(a)$ representa el beneficio de evolucionar del estado E_i al estado E_j durante un período usando la política a entonces el trío $(E, a, R(a))$ constituye a una cadena de Markov con beneficio.

6.3 Modelo de Horizonte Finito

El problema que nos interesa resolver en esta sección es determinar la secuencia de acciones que se deben tomar de tal forma de maximizar el valor esperado del beneficio acumulado durante n períodos. Dado que no conocemos de antemano cuál va a ser la evolución del sistema, no podemos decir a priori cuál es la acción que se debe elegir en cada período, sino que debemos entregar una regla de decisión que nos indique qué acciones tomar en función de la trayectoria (de estados) que siga el sistema. Ahora bien, como estamos limitados a reglas de decisión no anticipativas, la acción elegida cuando faltan n períodos para el final sólo puede depender del estado del sistema en ese momento y de la trayectoria previa (no puede depender de los estados que va a alcanzar el sistema después). Más aún, la condición de Markov nos indica que la información de la trayectoria previa es redundante, pues toda la información relevante para describir en probabilidad la evolución futura del sistema se encuentra en su estado actual. Así, lo que buscamos es una regla de decisión que nos indique qué acción tomar cuando faltan n períodos para el final del horizonte en función del estado del sistema en ese momento. Vale decir buscamos una función $s : E \times \mathbb{N} \rightarrow A$, que para cada período n y cada posible estado E_i nos indique la mejor acción a seguir, $a = s(E_i, n)$.

Dada la estructura de nuestro problema resulta natural abordarlo con una formulación de programación dinámica. Definamos $V_k(i)$ como el beneficio esperado máximo si el sistema se encuentra actualmente en el estado E_i , faltan k períodos para el final del horizonte de planificación y en cada período se toman decisiones óptimas. La construcción de $V_k(i)$ (y de $s(E_i, k)$) se puede realizar recursivamente mediante la relación:

$$V_k(i) = \max_{a \in A} \left\{ \sum_{j=1}^r [r_{ij}(a) + V_{k-1}(j)] \cdot p_{ij}(a) \right\} \quad (6.1)$$

en donde $V_0(i)$ corresponde al valor residual de terminar la evolución en el estado E_i . La solución del problema anterior se realiza mediante las técnicas usuales de programación dinámica.

6.4 Modelo de Horizonte Infinito

La resolución del problema para el caso de horizonte infinito difiere considerablemente a la del caso finito debido a que las técnicas de programación dinámica ya no son aplicables. Además, en muchos casos el beneficio acumulado esperado será una función divergente en el largo del horizonte de planificación, de modo que puede no tener sentido preguntarse por las acciones que maximizan el beneficio acumulado esperado en el largo plazo. En tales casos resulta un mejor indicador de desempeño la tasa de crecimiento del beneficio acumulado esperado: buscaremos las acciones o reglas de decisión que maximicen el beneficio esperado por unidad de tiempo: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V_k(i)}{k}$.

6.4.1 Políticas Estacionarias

Supongamos que en un período dado el sistema se encuentra en el estado E_i y somos capaces de determinar que la acción óptima es $a \in A$. Si k períodos más tarde el sistema vuelve al estado E_i , ¿qué acción convendrá elegir ahora? Dado que el horizonte de planificación es infinito, el problema a resolver es el mismo que k períodos antes, de modo que la acción óptima será nuevamente a . De esta forma vemos que, a diferencia del caso con horizonte finito, la acción óptima a seguir si el sistema se encuentra en E_i es independiente del período y depende exclusivamente del estado del sistema. Es por ello que la solución al modelo de horizonte infinito es lo que llamamos una *política estacionaria*.

Definición 6.1 Una Política Estacionaria es una función $s : E \rightarrow A$ que a cada estado $E_i \in E$ asocia una acción $s(E_i) \in A$.

Designemos por $\mathcal{S} = \{s : E \rightarrow A\}$ el conjunto de todas las políticas estacionarias posibles. Si el conjunto de acciones es finito, la cardinalidad de \mathcal{S} , $\|\mathcal{S}\| = \|A\|^{|E|}$ representa, como veremos más adelante, una medida de la dificultad para resolver un problema de horizonte infinito.

Ahora bien, toda política estacionaria s tiene asociada una matriz de probabilidades de transición en un período $P^s = [p_{ij}^s]$ tal que la fila i -ésima de P^s es igual a la fila i -ésima de $P(s(E_i))$. De la misma forma toda política estacionaria tiene asociada una matriz de beneficios $R^s = r_{ij}^s$ donde la fila i -ésima de R^s es exactamente igual a la fila i -ésima de $R(s(E_i))$.

De esta forma para toda política estacionaria s el trío (E, P^s, R^s) representa una cadena de Markov con beneficios y resolver el problema en horizonte infinito equivale a determinar aquella política $s \in \mathcal{S}$ que maximice el beneficio esperado por unidad de tiempo en el largo plazo (o el beneficio acumulado esperado en el largo plazo, según cuál de ellos tenga sentido).

6.4.2 Caso Ergódico

Supongamos que $\forall s \in \mathcal{S}$ la cadena de Markov representada por P^s es ergódica. Luego definiendo V_n^s el vector de beneficios esperados si faltan n períodos para el final y la política estacionaria escogida es s (note que no hay ningún proceso de optimización involucrado) y utilizando los resultados del capítulo anterior se tiene que:

$$V_n^s = ng^s e + W^s + [P^s]^n (V_0 - W^s), \quad (6.2)$$

donde g^s es el beneficio esperado por transición en estado estacionario y W^s es el vector asintótico de beneficios relativos cuando la política estacionaria usada es s .

Resolver el problema en horizonte infinito equivale a:

$$\max_{s \in \mathcal{S}} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n^s}{n} \right\} \quad (6.3)$$

Ahora bien, de (6.2) vemos que el comportamiento de $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^s$ está en general regulado por el término ng^se (salvo cuando $g^s = 0$). Por lo tanto resolver (6.3) equivale a determinar:

$$\max_{s \in \mathcal{S}} \{g^s\} \quad (6.4)$$

Una forma de resolver (6.4) es determinar para cada política estacionaria s el valor de g^s y luego escoger aquella con mayor valor. El principal problema de este procedimiento radica en el número de políticas estacionarias que un problema puede tener ($\|\mathcal{S}\| = \|A\|^{|E|}$ si A es finito), por ejemplo un problema con 10 estados y 3 acciones posibles tiene $3^{10} = 59049$ políticas estacionarias.

Una caracterización del óptimo de (6.4) que resulta útil para resolver el problema es la dada en el siguiente resultado.

Teorema 6.1 *Si para cada política estacionaria s la cadena de Markov representada por P^s es ergódica entonces dadas $s, s^* \in \mathcal{S}$ se tiene*

$$\begin{aligned} r^{s^*} + P^{s^*}W^{s^*} &\geq r^s + P^sW^{s^*} \Rightarrow g^{s^*} \geq g^s, \\ r^{s^*} + P^{s^*}W^{s^*} &\leq r^s + P^sW^{s^*} \Rightarrow g^{s^*} \leq g^s, \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde r^s , es el vector de beneficios esperados en una transición asociado a la política s , $r^s(i) = \sum_{j=1}^r r_{ij}^s \cdot p_{ij}^s$. W^s y g^s corresponden al beneficio esperado por transición en estado estacionario y al vector asintótico de beneficios relativos cuando la política estacionaria usada es s .

Corolario 6.1 $s^* \in \mathcal{S}$ es óptima para (6.4) si y sólo si satisface:

$$r^{s^*} + P^{s^*}W^{s^*} \geq r^s + P^sW^{s^*} \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (6.6)$$

La demostración se puede encontrar en Howard (1960), Gallager (1995) o Ross (1987), entre otros.

Es necesario destacar que en las desigualdades vectoriales de las ecuaciones (6.5) y (6.6) el cumplimiento de la condición para la componente i depende sólo de la acción tomada en el estado E_i por las políticas comparadas. El Teorema 6.1 sugiere la utilización de un algoritmo para encontrar la política estacionaria óptima, el que se conoce como algoritmo de Howard.

Algoritmo de Howard

1. Seleccionar una política estacionaria $\bar{s} \in \mathcal{S}$.
2. Calcular $W^{\bar{s}}$.

3. Construir la política estacionaria s de la siguiente forma:

$$s(E_i) = \arg \max_{a \in A} \left\{ r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) W_j^{\bar{s}} \right\}$$

4. Si s es igual a \bar{s} , entonces \bar{s} es óptima (salir). Si no, reemplazar \bar{s} por s y volver a 2.

Una pregunta natural que aparece al existir dos procedimientos de resolución de (6.4) es cuál de ellos requiere de menos esfuerzo; en este caso es fácil responder pues el primer procedimiento calcula todos los g^s y por tanto requiere en general más esfuerzo que el algoritmo de Howard. Ahora bien, qué tanto más rápido es el algoritmo de Howard respecto del método de enumeración no es tan directo de responder. En principio calcular para una política g^s tiene una complejidad comparable a calcular W^s . Luego si decimos que el método de enumeración tiene una complejidad de orden $\|S\|$, el algoritmo de Howard tiene una complejidad dada por el número de iteraciones que realiza.

6.5 Ejercicios

1. **Un modelo simple de inventarios.** Suponga que ud. es el encargado de planificación de la producción en la empresa Y , la cual fabrica y vende el producto X .

La demanda por el producto X en una semana dada puede tomar sólo dos valores: 0 o 1 [unidades]. El comportamiento de la demanda es susceptible de ser modelado como una cadena de Markov: la probabilidad que la demanda sea igual a 1 en una semana dada es α si la demanda fue 1 la semana anterior y β si la demanda fue 0 la semana anterior, independiente de lo que haya ocurrido 2 o más semanas antes.

El precio venta de una unidad de X es de $A[\$]$ y el costo variable de producción es de $C[\$]$ ($A > C$). Cada semana se puede fabricar a lo más 1 unidad de X . Además, cada vez que se inicia un ciclo productivo (entendido como una secuencia de semanas en todas las cuales se produce) se incurre en un costo de setup $S[\$]$ ($S > 0$). A modo de ejemplo: si se produce X durante 4 semanas seguidas el costo de producción total es $4C + S$, mientras que si se produce durante 2 semanas, luego se detiene la producción una semana, y en seguida se produce durante 2 semanas más, el costo total de producción es $4C + 2S$.

- ¿Qué información es relevante para tomar la decisión de producir o no en una semana cualquiera? Formule (no resuelva) un modelo de decisión markoviano que permita tomar esa decisión.
- ¿Qué forma toma una política estacionaria para este problema? Dé un ejemplo de una política estacionaria.

- (c) ¿Qué indicador utilizaría para decir que una política estacionaria es mejor que otra? Muestre que la política estacionaria “producir siempre” no es la óptima, argumentando que la siguiente política estacionaria es mejor que ella para algún valor de T : comenzar un ciclo productivo cada vez que el inventario caiga a 1 y continuar produciendo hasta que el inventario llegue a T . Si gusta apoye su argumento en el caso particular (y determinístico) en que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Bibliografía

- [1] Howard, R. A. *Dynamic Programming and Markov Processes*. Wiley, New York, 1960.
- [2] Gallager, Robert G. *Discrete Stochastic Processes*. Kluwer, Boston, 1995.
- [3] Ross, Sheldon *Applied Probability Models with Optimization Applications*. Dover Books, 1992.

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldentey Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondsch@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 7

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

El estudio de cadenas de Markov que hasta este momento hemos realizado se ha concentrado en aquellos procesos estocásticos compuestos por un número finito de estados y cuya evolución en el tiempo está representada por un conjunto discreto de instantes. Ahora bien, en muchos problemas prácticos conocer el comportamiento del sistema en instantes específicos del tiempo no es suficiente, pues el sistema puede cambiar su condición en cualquier instante del tiempo.

Por ejemplo, consideremos la operación de un equipo a través del tiempo el cual falla en forma aleatoria y supongamos que modelamos el estado del equipo al final de cada semana como una cadena de Markov en tiempo discreto con objeto de predecir su evolución futura. Con dicha formulación estaremos suponiendo que el estado del equipo permanece invariante a lo menos durante una semana completa; el tiempo que el equipo permanece sin fallar estará siendo modelado como una variable aleatoria discreta con una distribución geométrica (en número de semanas), lo cual puede ser bastante alejado de la realidad. Lo que realmente estamos interesados en describir es cuál será el itinerario que seguirá el estado del equipo a través del tiempo, es decir, determinar en qué momentos fallará. Claramente la incertidumbre asociada a las fallas imposibilita conocer a priori este itinerario, por lo que se debe buscar una caracterización probabilística, es decir, determinar la probabilidad a priori que el equipo esté operando en un instante cualquiera del tiempo.

En este capítulo se formulará un modelo que permita resolver algunos problemas como el anterior. Este modelo es un caso particular de procesos estocásticos en tiempo continuo y se conoce como *Cadenas de Markov en Tiempo Continuo*.

7.1 Formulación

Recordemos que un proceso estocástico en tiempo continuo en un conjunto de estados E discreto es una colección de variables aleatorias a valores en E , $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$. Para describir en probabilidad un proceso estocástico de este tipo se debe conocer la ley de probabilidades para X_t para cualquier instante futuro t y condicional en la información que se disponga respecto de la historia pasada del proceso, vale decir conocer

$$\Pr[X_{t_{n+1}} = E_i | X_{t_1} = E_j, X_{t_2} = E_k, \dots, X_{t_n} = E_l]$$

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \\ &\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} \\ &\forall E_i, \dots, E_l \in E \end{aligned}$$

Dichas leyes de probabilidad pueden llegar a ser extremadamente complejas. Imponiendo un supuesto simplificador llamado *condición de Markov* se da origen a un grupo de procesos estocásticos en tiempo continuo denominado *cadena de Markov en Tiempo Continuo*.

Definición 7.1 (Cadena Markov en Tiempo Continuo)

Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X_t : t \in T\}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo si verifica que:

$$\Pr[X_{t_{n+1}} = E_i | X_{t_n} = E_j, X_{t_{n-1}} = E_k, \dots, X_{t_1} = E_l] = \Pr[X_{t_{n+1}} = E_i | X_{t_n} = E_j] \quad (7.1)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, y para toda secuencia $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$,
o equivalentemente

$$\Pr[X_t = E_j | X_{\tau_1} = E_i, \tau_1 < \tau < \tau_2 < t] = \Pr[X_t = E_j | X_{\tau_2} = E_i] \quad \forall \tau_1 < \tau_2 < t \quad (7.2)$$

La ecuación (7.1) (o la ecuación (7.2)) corresponde a la ya referida condición de Markov. La interpretación de esta condición es exactamente la misma que se dio para el caso discreto, es decir, la evolución futura del sistema depende del pasado única y exclusivamente a través de su estado actual o bien del último estado conocido.

Nuestra atención se centrará en el estudio de procesos estocásticos en tiempo continuo que satisfacen la condición de Markov. Además, se supondrá que el proceso es **homogéneo** en el tiempo, es decir la probabilidad que el sistema pase desde un determinado estado a otro en un intervalo de tiempo dado depende sólo de la magnitud de ese intervalo:

$$\Pr[X_{t_1} = E_j | X_{t_2} = E_i] = \Pr[X_{t_1+s} = E_j | X_{t_2+s} = E_i] \quad \text{con } (t_1 > t_2) \text{ y } (s > 0).$$

7.2 Tiempo de Permanencia en un Estado

Aceptar la condición de Markov impone una fuerte restricción sobre la forma que puede tomar la ley de distribución del tiempo de permanencia del sistema en un estado dado. Para verificar esto, supongamos que el sistema ha permanecido en el estado E_j durante t unidades de tiempo, y nos preguntamos por la probabilidad que permanezca en él durante otras s unidades de tiempo, $\Pr[X_\tau = E_j \mid t < \tau \leq t+s \mid X_t = E_j]$. De la condición (7.2) es posible ver que esa probabilidad es igual a $\Pr[X_\tau = E_j \mid t < \tau \leq t+s \mid X_t = E_j]$, vale decir la probabilidad que el sistema no salga de E_j durante las próximas s unidades de tiempo no depende de cuánto tiempo haya permanecido en ese estado. Lo anterior es equivalente a decir que la distribución del tiempo de permanencia del sistema en un estado dado debe presentar la propiedad de pérdida de memoria, y la única distribución continua con esas características es la exponencial.

Proposición 7.1 *Para una cadena de Markov en tiempo continuo homogénea, el tiempo de permanencia del sistema en un estado está exponencialmente distribuido.*

Demostración:

Análoga a la realizada en el Capítulo ?? 3, a partir de los supuestos de independencia y uniformidad, para probar que en procesos Poisson el tiempo entre eventos se distribuye exponencialmente.

7.3 Distribución de Probabilidades

Como se dijo al comienzo del capítulo lo que se desea determinar es la evolución en probabilidad del sistema a través del tiempo, esto es conocer la probabilidad que el sistema se encuentre en algún estado particular en un instante cualquiera del tiempo.

Para ello, definamos $m_{ij}(\tau, \tau+t)$ como la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j en el instante $\tau+t$ dado que está en el estado E_i en el instante τ . Ahora bien, como hemos restringido nuestro estudio a procesos homogéneos la probabilidad anterior es independiente de τ , por lo que podemos simplificar la notación a

$$m_{ij}(t) \equiv m_{ij}(\tau, \tau+t) = \Pr[X_{\tau+t} = E_j \mid X_\tau = E_i] \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

Lo que se busca entonces es determinar $m_{ij}(t) \quad \forall t \geq 0$.

Al igual que en el caso discreto, se puede considerar que la evolución desde un estado inicial E_i a un estado final E_j en t unidades de tiempo se realiza pasando por algún estado intermedio E_k . En efecto, para cualquier $s < t$ el estado del sistema en s (X_s) es una variable aleatoria y en principio puede ser cualquiera de los estados posibles del sistema (E_1, E_2, \dots, E_n). Por lo tanto, la probabilidad que el sistema evolucione de E_i a E_j en t unidades de tiempo puede escribirse usando probabilidades totales como:

$$\begin{aligned}
m_{ij}(t) &= \Pr[X_t = E_j | X_0 = E_i] \\
&= \sum_k \Pr[X_t = E_j | X_s = E_k] \cdot \Pr[X_s = E_k | X_0 = E_i] \\
m_{ij}(t) &= \sum_k m_{ik}(s) \cdot m_{kj}(t-s) \quad \forall 0 \leq s \leq t
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\text{donde } m_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

La relación (7.3) se conoce como ecuación de *Chapman-Kolmogorov*. Definiendo $M(t) = [m_{ij}(t)]$, la condición de Chapman-Kolmogorov puede escribirse matricialmente como:

$$M(t) = M(s) \cdot M(t-s) \quad \forall 0 \leq s \leq t \tag{7.4}$$

(con $M(0) = I$ matriz identidad).

De (7.4) se tiene que:

$$M(t + \Delta t) - M(t) = (M(\Delta t) - I) \cdot M(t) = M(t) \cdot (M(\Delta t) - I) \tag{7.5}$$

Dividiendo la ecuación anterior por Δt y tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t} \cdot M(t) = M(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t} \tag{7.6}$$

Llamando $Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\Delta t) - I}{\Delta t}$ se tiene

$$\frac{dM(t)}{dt} = Q \cdot M(t) = M(t) \cdot Q \tag{7.7}$$

De esta forma, determinar la distribución de probabilidades para la evolución del sistema en el tiempo equivale a resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (7.7) con la condición de borde $M(0) = I$. La matriz Q se conoce como *generador infinitesimal* de $M(t)$, o bien como matriz de *tasas de transición*, y sus elementos $[q_{ij}]$ están definidos como:

$$q_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \tag{7.8}$$

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad i \neq j \tag{7.9}$$

Estos límites pueden interpretarse de la siguiente forma: si el sistema se encuentra en E_i entonces la probabilidad que después de Δt unidades de tiempo haya abandonado E_i es

$1 - m_{ii}(\Delta t)$ que es igual a $-q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$.¹ Es por ello que se dice que $-q_{ii}$ representa la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_i . En forma análoga, para $i \neq j$, $m_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ es la probabilidad que el sistema, estando en E_i , evolucione a E_j antes de Δt unidades de tiempo, por lo que q_{ij} representa la tasa a la cual el sistema evoluciona de E_i a E_j . Además, como $\sum_j m_{ij}(\Delta t) = 1$ es fácil ver que $\sum_j q_{ij} = 0$ (que no es más que decir que la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_i es igual a la suma de las tasas a las que evoluciona a todos los demás estados).

La solución de (7.7) es igual a

$$M(t) = e^{Q \cdot t} = I + Q \cdot t + Q^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + Q^3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Un punto aún no resuelto es como determinar explícitamente la matriz de tasas de cambio Q . Para ello, se necesita conocer un poco más del comportamiento evolutivo del sistema. De la proposición (7.1) sabemos que el tiempo de permanencia del sistema en un estado E_i cualquiera se distribuye en forma exponencial. Llamaremos ν_i al parámetro de dicha distribución. Cómo se comporta el sistema una vez que ha abandonado un estado, es una pregunta que debemos ser capaces de responder, es decir, cuando el sistema deja un estado, mediante qué mecanismo aleatorio escoge su próximo estado. Designemos por $p_{ij}(t)$ la probabilidad que el sistema evolucione al estado E_j si abandona el estado E_i en el instante t . Dado que hemos centrado nuestro interés en procesos homogéneos, esas probabilidades deben ser independientes de t y por tanto las denotaremos simplemente por p_{ij} , la probabilidad que el sistema pase al estado E_j cuando abandone el estado E_i .

Conocidos ν_i y $p_{ij} \forall i, j$ se tiene una descripción adecuada del sistema, y es posible calcular $q_{ij} \forall i, j$.

Comencemos por calcular $m_{ii}(\Delta t)$ para valores de Δt suficientemente pequeños. Si $i = j$ $m_{ii}(\Delta t)$ es igual a la probabilidad que el sistema no abandone el estado E_i en un periodo de duración Δt . Por lo tanto, $m_{ii}(\Delta t) = \Pr(\tau_i > \Delta t) = e^{\nu_i \cdot \Delta t}$. Desarrollando la función exponencial en serie de potencias se tiene entonces que $m_{ii}(\Delta t) = 1 - \nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

En el caso que $i \neq j$, $m_{ij}(\Delta t)$ es equivalente a la probabilidad que el sistema abandone el estado E_i antes de Δt y luego escoja el estado E_j como destino. La probabilidad que deje E_i viene dado por $\nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ y la probabilidad que escoja a E_j es p_{ij} . Como abandonar un estado y escoger el siguiente son eventos independientes se tiene entonces que $m_{ij}(\Delta t) = \nu_i \cdot \Delta t \cdot p_{ij} + o(\Delta t)$. En resumen

$$m_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - \nu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t) & i = j \\ \nu_i \cdot p_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \end{cases}$$

Reemplazando estas últimas expresiones en las ecuaciones (7.8) y (7.9), y tomando los límites correspondientes, se tiene

¹Con $o(t)$ una función que va a cero más rápido que t , i.e. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

$$q_{ij} = \begin{cases} -\nu_i & i = j \\ \nu_i \cdot p_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

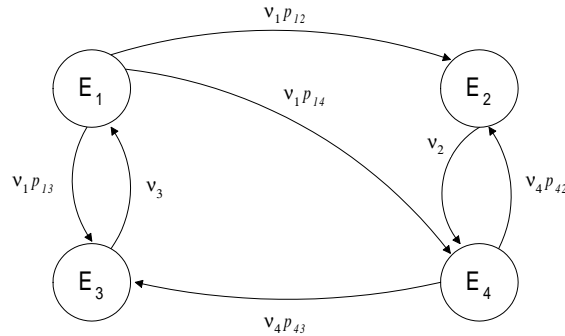
De esta forma, el sistema matricial $\frac{dM(t)}{dt} = Q \cdot M(t)$ se escribe en forma escalar como:

$$\frac{dm_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq i} [\nu_i \cdot p_{ik} \cdot m_{kj}(t)] - \nu_i \cdot m_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} [m_{ik}(t) \cdot \nu_j \cdot p_{jk}] - \nu_j \cdot m_{ij}(t) \quad (7.10)$$

7.4 Representación mediante Grafo

Al igual que en el caso de cadenas de Markov en tiempo discreto, habitualmente representaremos la cadena de Markov mediante un grafo, en que los nodos corresponden a los estados. En este caso en los arcos ubicaremos ya no las probabilidades de transición, sino las tasas de transición entre los distintos estados (i.e. los elementos del generador infinitesimal). La figura 7.1 muestra un ejemplo de esta representación.

Figura 7.1: Ejemplo de grafo representante



Ejemplo

Retomemos el problema de determinar el estado de un equipo que falla en forma aleatoria expuesto al comienzo del capítulo. Consideremos el sistema que describe el estado del equipo compuesto por dos estados $\{0, 1\}$, en donde $X_t = 0$ significa que el equipo está funcionando en el instante t y $X_t = 1$ señala que el equipo está en reparaciones en el instante t . Supongamos conocidas las siguientes distribuciones:

- El tiempo de operación del equipo se distribuye en forma exponencial con tasa λ .
- El tiempo de reparación del equipo se distribuye exponencial con tasa μ .

De esta forma, el tiempo de permanencia del sistema en los estados $\{0, 1\}$ se distribuye exponencialmente, de modo que es posible representar su evolución mediante una cadena de Markov en tiempo continuo.

Para este problema con dos estados es fácil ver que $p_{01} = 1$ y $p_{10} = 1$, con lo cual se tiene:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema $\frac{dM(t)}{dt} = Q \cdot M(t)$, se calculan los valores y vectores propios de Q . Los valores propios son $w^1 = 0$ y $w^2 = -(\lambda + \mu)$ y los vectores propios asociados son:

$$v^1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^2 = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$$

Con lo cual la solución es

$$\begin{bmatrix} m_{00}(t) & m_{01}(t) \\ m_{10}(t) & m_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} e^{w^1 \cdot t} + \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1^2 \\ v_2^2 & v_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} e^{w^2 \cdot t}$$

donde c_1, c_2, b_1, b_2 son constantes apropiadas, las que se determinan imponiendo la condición de borde $M(0) = I$. De esta forma la solución queda:

$$\begin{bmatrix} m_{00}(t) & m_{01}(t) \\ m_{10}(t) & m_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} e^0 + \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -\mu & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} e^{-(\lambda+\mu) \cdot t}$$

La última expresión muestra la probabilidad que el sistema se encuentre en cualquiera de los dos estados dentro de t unidades de tiempo sabiendo cuál es el estado actual. Una observación interesante sale de tomar límite cuando $t \rightarrow \infty$ en la expresión anterior, de donde se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_{00}(\infty) & m_{01}(\infty) \\ m_{10}(\infty) & m_{11}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

Se puede ver que, independiente del estado inicial, la probabilidad de encontrar el equipo operando en el largo plazo es $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ y la de encontrarlo en reparación es $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. En la próxima sección estudiaremos bajo qué condiciones una cadena de Markov presenta comportamientos límites como este.

7.5 Probabilidades Estacionarias

En esta sección nos preocuparemos de estudiar el comportamiento de largo plazo del sistema. En principio, este estudio se puede realizar estudiando el $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)$. Las características del

límite anterior, al igual que en el caso discreto, están fuertemente ligadas a la estructura de la cadena en términos del número de clases recurrentes que tenga. Para evitar dificultades en este sentido, centraremos nuestro interés en un tipo especial de cadenas, que son las *irreducibles*.

Definición

Una cadena de Markov se dice irreducible si $\forall E_i, E_j$ estados del sistema existe $t > 0$ tal que:

$$m_{ij}(t) > 0$$

Una cadena es irreducible si está compuesta por una única clase. Si pensamos en el grafo representante de la cadena de Markov, una cadena de Markov en tiempo continuo es irreducible si para cualquier par de estados E_i y E_j existe un camino de E_i a E_j y otro de E_j a E_i . Un resultado importante para las cadenas irreducibles es el siguiente.

Proposición 7.2 Si $M(t) = [m_{ij}(t)]$ es la matriz de transición de una cadena de Markov en tiempo continuo irreducible y homogénea entonces se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{ij}(t) = \pi_j$$

El resultado anterior señala que para cadenas irreducibles la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado E_j después de mucho tiempo de evolución partiendo de E_i es independiente de E_i . Si la cadena de Markov es finita este resultado garantiza la existencia de probabilidades estacionarias, dadas por $\{\pi_j\}$. Busquemos ahora un método para calcular esos valores límites. Para ello basta considerar de nuevo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dm_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq j} [m_{ik}(t) \cdot \nu_k \cdot p_{kj}] - \nu_j \cdot m_{ij}(t) \quad (7.11)$$

y examinar la forma que adquiere al tomar el límite $t \rightarrow \infty$:

$$0 = \sum_{k \neq j} [\pi_k \cdot \nu_k \cdot p_{kj}] - \nu_j \cdot \pi_j \quad (7.12)$$

o bien,

$$\nu_j \cdot \pi_j = \sum_{k \neq j} [\nu_k \cdot p_{kj} \cdot \pi_k] \quad (7.13)$$

El sistema (7.13) señala que la tasa a la cual el sistema abandona el estado E_j en régimen estacionario, $\nu_j \cdot \pi_j$, es igual a la tasa a la cual el sistema evoluciona hacia el estado E_j desde los demás estados, $\sum_{k \neq j} [\nu_k \cdot p_{kj} \cdot \pi_k]$. Vale la pena notar que este sistema de ecuaciones se puede escribir matricialmente como $\Pi Q = 0$, donde $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \dots]$.

El sistema de ecuaciones (7.13) junto con la condición $\sum_k \pi_k = 1$ permite determinar las probabilidades estacionarias del sistema. En una cadena infinita el sistema completo podría no tener solución, teniéndose $\lim_{t \rightarrow \infty} m_{ij}(t) = 0 \forall j$.

Ejemplo

Considerando nuevamente el problema de las fallas de un equipo del ejemplo anterior, determinar qué fracción del tiempo, en promedio, el equipo está en reparaciones.

Al igual que en el caso discreto, las probabilidades estacionarias pueden interpretarse como el porcentaje del tiempo que el sistema se encuentra en cada estado. Para determinar entonces las probabilidades estacionarias se debe resolver el sistema (7.13), es decir:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \pi_0 &= \mu \cdot \pi_1 \\ \mu \cdot \pi_1 &= \lambda \cdot \pi_0 \end{aligned} \quad \pi_0 + \pi_1 = 1$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}$$

Que corresponde, por supuesto, a los valores que habíamos obtenido tomando límite a la solución encontrada para las probabilidades de transición en función del tiempo.

7.6 Procesos de Nacimiento y Muerte

Un tipo especial de procesos susceptibles de ser modelados como cadenas de Markov en tiempo continuo son los procesos llamados de *Nacimiento y Muerte*.

Consideremos un sistema formado por un conjunto numerable de estados que denotaremos por $\{0, 1, 2, \dots\}$. Si en cada instante sólo está permitido que el sistema:

- Mantenga su estado actual.
- Evolucione al estado siguiente, es decir, de n a $n + 1$ (Nacimiento).
- Evolucione al estado anterior, es decir de n a $n - 1$ ($n \geq 1$) (Muerte).

entonces diremos que el sistema se comporta bajo un esquema de Nacimiento y Muerte.

Para que el proceso de nacimiento y muerte pueda ser modelado como una cadena de Markov en tiempo continuo se asumirá que, cuando el sistema está en el estado i , el tiempo hasta la próxima muerte (T_M) se distribuye exponencialmente con parámetro μ_i y que el tiempo hasta el próximo nacimiento (T_N) se distribuye exponencialmente con parámetro λ_i . De esta forma si el sistema se encuentra en un estado $i \geq 1$ el tiempo de permanencia en dicho estado es $T_i = \min(T_M, T_N)$, es decir, se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda_i + \mu_i$. Ahora

bien, si el sistema se encuentra en el estado 0 el tiempo de permanencia en dicho estado es igual al tiempo hasta el próximo nacimiento $T_0 = T_N$ que está exponencialmente distribuido con parámetro λ_0 . Se tiene entonces que, para cualquier estado, el tiempo que el sistema permanece en él está exponencialmente distribuido y por tanto el sistema se comporta como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Las probabilidades de transición a los estados vecinos corresponden a la probabilidad que una variable aleatoria exponencialmente distribuida sea menor que otra (un nacimiento ocurra antes que una muerte o al revés, según la transición considerada), probabilidades que ya hemos calculado al estudiar procesos Poisson, y que vienen dadas por:

$$i \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \end{array} \right.$$

$$i = 0 \left\{ p_{0,1} = 1 \right.$$

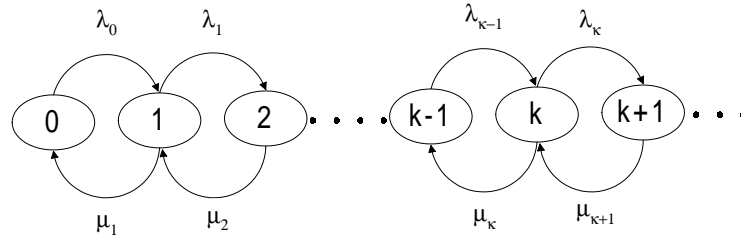
Luego como las tasas de cambio q_{ij} se calculan como $q_{ij} = p_{ij} \cdot \nu_i$ se tiene que:

$$i \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} q_{i,i+1} = p_{i,i+1} \cdot \nu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \cdot (\lambda_i + \mu_i) = \lambda_i \\ q_{i,i-1} = p_{i,i-1} \cdot \nu_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \cdot (\lambda_i + \mu_i) = \mu_i \end{array} \right.$$

$$i = 0 \left\{ q_{0,1} = p_{0,1} \cdot \nu_0 = 1 \cdot \lambda_0 = \lambda_0 \right.$$

El grafo asociado a esta cadena de Markov toma la forma que se muestra en la Figura 7.6.

Figura 7.2: Grafo Representante de un Proceso de Nacimiento y Muerte



Ahora bien, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{dM}{dt} = Q \cdot M$ ya no es tan directo como en el ejemplo anterior por cuanto el sistema no es en este caso de dimensión finita. Sin embargo, es posible determinar las probabilidades estacionarias del sistema resolviendo en forma recursiva el sistema de ecuaciones $\Pi \cdot Q = 0$ (imponiendo además la condición $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$). Para el caso particular en que las tasas de nacimiento y muerte no dependen del estado del sistema ($\lambda_i = \lambda \forall i$ y $\mu_i = \mu \forall i$) dicho sistema de ecuaciones toma la forma:

$$\begin{cases} \pi_i \cdot (\lambda + \mu) = \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+1} \cdot \mu & i \geq 1 \\ \pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \cdot \mu \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

Para resolver este sistema postulamos una solución del tipo $\pi_i = A \cdot \rho^i$ (el lector puede tomar transformada z a la ecuación (7.14) para verificar que ésa es la forma de la solución) la cual reemplazada en la ecuación (7.14) la transforma en:

$$\begin{aligned} A \cdot \rho^i \cdot (\lambda + \mu) &= A \cdot \rho^{i-1} \cdot \lambda + A \cdot \rho^{i+1} \cdot \mu \\ \rho \cdot (\lambda + \mu) &= \lambda + \rho^2 \cdot \mu \end{aligned} \quad (7.15)$$

La ecuación de segundo grado anterior admite como solución $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ y $\rho_2 = 1$. Es fácil ver que $\rho_2 = 1$ no puede ser solución del sistema pues de serlo implicaría que $\pi_i = A$ constante que es incompatible con $\sum_i \pi_i = 1$. Ahora bien, para $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ se tiene que $A = \pi_0$ y la solución toma la forma

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \quad \forall i \geq 0 \quad (7.16)$$

Además la condición $\sum_i \pi_i = 1$ permite calcular π_0 resolviendo:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \quad (7.17)$$

La ecuación (7.17) admite solución para π_0 si y sólo si se cumple que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ en cuyo caso se tiene que $\pi_0 = 1 - \rho$ y

$$\pi_i = \rho^i \cdot (1 - \rho) \quad (7.18)$$

Vemos del desarrollo anterior que sólo existen probabilidades estacionarias para el sistema si se cumple que $\rho < 1$ o equivalentemente $\lambda < \mu$. Esta condición puede interpretarse de la siguiente manera: si λ fuese mayor o igual a μ entonces se tendría que la tasa de nacimientos es mayor que la tasa de muertes y por tanto para una evolución de largo plazo el sistema tiende a crecer indefinidamente (sobrepoblación) con lo cual $\pi_i = 0 \forall i$ (la ley de probabilidades sobre el número de personas en el sistema no converge, sino que a medida que el tiempo transcurre la masa de probabilidad se concentra en estados cada vez más poblados, i.e. se desplaza progresivamente hacia la derecha).

Queda propuesto al lector mostrar que para el caso en que las tasas de nacimiento y muerte dependen el estado del sistema las probabilidades estacionarias vienen dadas por

$$\pi_i = \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j}$$

donde $\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}$, siempre que la serie en el denominador del lado derecho de la última igualdad sea convergente.

7.7 Ejercicios

1. Al interior de una línea de producción la operación de uno de sus equipos se ha convertido en el cuello de botella debido a las reiteradas fallas que tiene. El equipo funciona correctamente un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con parámetro λ . Las fallas del equipo pueden ser de dos tipos, una falla menor cuyo tiempo de reparación está exponencialmente distribuido con tasa μ_1 , o una falla mayor cuyo tiempo de reparación es exponencial con tasa μ_2 ($\mu_2 < \mu_1$). Se ha observado que si el equipo falla con probabilidad p esta falla es menor.

En base a la información anterior determine:

- (a) La fracción promedio del tiempo que el equipo esta en reparación.
 - (b) Suponga que se adquiere otro equipo con las mismas características que el anterior. De esta forma si uno de los equipos fallas y el otro está operativo entonces la producción no se detiene. Determine que fracción del tiempo la producción está detenida si se dispone de un sólo mecánico.
 - (c) Como cambia su respuesta anterior si se dispone dos mecánicos.
2. En cierto pueblo viven actualmente kN habitantes. Este pueblo cuenta con un sólo hospital con capacidad para N pacientes. Cada habitante mantiene una vida sana un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_A . Cuando una persona enferma, no concurre inmediatamente al hospital sino que permanece en observación en su casa un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_B . Pasado este periodo de observación, el paciente puede ser dado de alta o bien mantener su estado enfermo en cuyo caso es llevado al hospital. Con probabilidad p un paciente en observación va al hospital. El periodo de hospitalización de un paciente es una v.a. exponencialmente distribuida con tasa λ_C , después de dicho periodo el paciente es dado de alta. Si el hospital está lleno los pacientes que requieren hospitalización son desviados a una zona medianamente acondicionada en espera que un lugar se desocupe, suponga que la recuperación de estos pacientes sigue siendo exponencial con tasa λ_C .

En base a la información anterior determine el número esperado de pacientes que están siendo atendidos en la zona de espera en un momento dado.

(IND: Represente el estado de salud de un habitante como una cadena de Markov en tiempo continuo con tres estados.)

3. Don José maneja el único taxi colectivo que parte desde el paradero A. Al paradero llegan grupos de clientes de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro λ [$\frac{\text{grupos}}{\text{hr}}$]. Los grupos pueden ser de uno o dos clientes, con probabilidades conocidas q_1 y q_2 respectivamente ($q_1 + q_2 = 1$). El taxi de don José tiene capacidad para 4 pasajeros. El permanece estacionado en el paradero leyendo el diario o conversando con los pasajeros hasta que haya al menos 3 pasajeros en el taxi; una vez que esto ocurre comienza su recorrido, el cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\mu}$ [hr]. Cuando llega de vuelta al paradero el taxi siempre viene vacío. Además, los clientes que llegan al paradero cuando Don José no está se van, y optan por algún otro medio de transporte.

Don José ha visto afectado su sistema nervioso producto del mucho conducir en esta ciudad y su neurólogo desea saber qué parte de su tiempo dedica él a conducir, a leer el diario y a conversar con los clientes.

- (a) Muestre que el quehacer de Don José se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo continuo y dibuje el grafo que la representa. ¿Qué estados definiría? Calcule las probabilidades estacionarias, y responda a las preguntas del médico.
- (b) Repita los cálculos anteriores, pero suponga ahora que el tiempo que le toma a don José hacer un recorrido sigue una distribución Erlang de parámetros n y μ , donde n es el número de pasajeros que parten en el taxi. Recuerde que la suma de variables aleatorias i.i.d. exponencialmente distribuidas sigue una distribución Erlang (si no lo recuerda, tal vez quiera refrescar sus conocimientos en la sección ?? 3.2.4).

MODELOS DE DECISIÓN EN AMBIENTES INCIERTOS

(APUNTE DE CLASES PARA EL CURSO INVESTIGACIÓN OPERATIVA IN44A)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL - UNIVERSIDAD DE CHILE

René A. Caldenteý Susana V. Mondschein ¹

Enero, 1999

¹La presente es una versión preliminar de este apunte docente, el cual se encuentra en construcción. Los autores agradecen los comentarios y correcciones de eventuales errores que aún permanezcan en el texto, los cuales pueden ser comunicados a smondschi@dii.uchile.cl, rcaldent@mit.edu o hawad@dii.uchile.cl

Capítulo 8

Teoría de Espera

8.1 Introducción

El origen de la *Teoría de Espera* o *Teoría de Colas* se encuentra en el año 1909 en una publicación de A. Erlang sobre congestión en el tráfico de llamadas telefónicas. Posteriormente Kendall durante los años 1951-1953 formula en términos más formales la teoría de espera bajo un enfoque de procesos estocásticos. Su trabajo tuvo amplia aceptación y generó en los años posteriores un importante desarrollo a nivel teórico y práctico. Una cola o línea de espera se forma cuando un conjunto de entidades (personas, productos, documentos, etc) demandan un cierto servicio en un momento dado del tiempo excediendo la capacidad para prestarlo en ese instante. Por ejemplo, consideremos un banco al cual llegan personas a realizar diversos trámites. Si en un momento dado todos los cajeros del banco están ocupados, las personas que sigan llegando formarán una cola en espera de ser atendidas. Los elementos básicos que caracterizan un sistema de espera son los siguientes:

1. Proceso de Llegada: El proceso de llegada de las entidades al sistema representa la forma en que las llegadas ocurren. Usualmente se caracteriza por el tiempo entre llegadas sucesivas, el cual puede ser determinístico en cuyo caso es constante, o bien estocástico en cuyo caso se representa mediante una distribución de probabilidades. El proceso de llegadas también define si las llegadas son individuales o en grupos (batch), en este último caso se especifica la forma en que se constituye el tamaño del batch.
2. Proceso de Atención: El proceso de atención representa la forma en que el servicio es entregado. Lo usual es caracterizarlo mediante el tiempo necesario para completar el servicio. Este tiempo puede ser determinístico, es decir cada entidad demora lo mismo en ser atendida, o bien estocástico en cuyo caso es necesario especificar una distribución de probabilidades. Además debe definir si la atención es individual o en grupo y en este último caso la forma en que se selecciona el tamaño del batch.
3. Número de Servidores: Un sistema puede tener un sólo servidor o varios en paralelo. Un sistema con varios servidores puede tener una cola común, o bien tener para cada

servidor una cola. Si una entidad llega y encuentra más de un servidor desocupado escogerá en forma aleatoria uno para su atención.

4. Capacidad del Sistema: Un sistema de atención puede tener una capacidad infinita, es decir que el tamaño de la cola puede crecer indefinidamente, o bien tener una capacidad finita en cuyo caso el número de entidades en el sistema (o cola) está acotado. Si un sistema tiene capacidad finita y en un momento dado se alcanza, entonces las entidades que sigan llegando no podrán ingresar al sistema y lo abandonarán.
5. Disciplina de Atención: La disciplina de atención indica la forma en que se seleccionan las personas de la cola para ser atendidas. Lo usual es que se use un enfoque FIFO, es decir el primero en la cola es el primero en ser atendido. También se pueden usar enfoques LIFO, random o de prioridad.

La formulación matemática de una línea de espera requiere que cada uno de los 5 elementos anterior sean perfectamente conocidos. Mediante dicha formulación se persigue en general responder preguntas relevantes relacionadas con la operación de estos sistemas, como por ejemplo:

- ¿Cuál es el número de entidades en la cola en un instante cualquiera?
- ¿Cuál es el valor esperado del tiempo que una entidad permanece en el sistema?
- ¿Qué fracción del tiempo permanece desocupado el servidor?
- ¿Cuál es el número mínimo de servidores necesarios para que al menos el 95% de las entidades permanezca no más de 12 minutos en el sistema?

Por otro lado, el estudio de sistemas de espera puede realizarse desde dos perspectivas describiendo el comportamiento en estado transiente o en estado estacionario. Un sistema se encuentra en estado transiente si las condiciones iniciales bajo las cuales comenzó su evolución afectan su estado actual, por lo general describir analíticamente el estado transiente de un sistema es difícil y es preferible muchas veces utilizar técnicas de simulación. Un sistema ha alcanzado el estado estacionario si las condiciones de borde iniciales no afecta su estado actual, esta condición se presenta en sistemas que llevan evolucionando mucho tiempo. En este capítulo nos centraremos principalmente en el estudio de sistema de espera en estado estacionario, sin embargo, explicaremos como es posible determinar la conducta transiente en algunos casos especiales. Antes de entrar de lleno en el estudio de los sistemas de espera, se describirá primero la notación introducida por Kendall para clasificarlos y en segundo lugar se deducirán algunas propiedades generales que se satisfacen en estado estacionario.

8.2 Notación

Como se vio anteriormente los sistemas de espera están compuestos por 5 elementos básicos que son (i): Un proceso de llegada de las entidades al sistema, (ii): Un proceso de atención de

las entidades, (iii): Un número de servidores, (iv): Una capacidad para el sistema, (v): Una disciplina de atención. La notación que introdujo Kendall (1951) tiene por objeto simplificar la forma de especificar los 4 primeros elementos señalados. Para ello hace uso del siguiente esquema: $A/B/C/D/E$ en donde los símbolos A, B, C, D, E representan:

1. **A**: Distribución del tiempo entre llegadas sucesivas.
2. **B**: Distribución del tiempo de atención.
3. **C**: Número de servidores en paralelo.
4. **D**: Capacidad máxima del sistema.

El símbolo **E** corresponde a un elemento que no habíamos discutido: indica el tamaño de la población que da origen a las llegadas. Si el tamaño de la población es finito, la distribución del tiempo entre llegadas se verá afectada por el número de entidades que haya en el sistema (mientras más entidades en el sistema hay menos “afuera”, i.e. menos llegadas potenciales).

Las cantidades C y D se representan numéricamente por su valor en cambio A y B corresponden a distribuciones de probabilidad, los símbolos usados en los casos más comunes son:

- M : para la distribución exponencial (satisface la propiedad Markoviana).
- E_k : para la distribución Erlang- k .
- D : en el caso determinístico.
- G : para una distribución general.

Así por ejemplo la notación $M/M/1$ señala un sistema cuyo proceso de llegada es Poisson (tiempo entre llegadas exponencial), cuyo tiempo de atención es exponencial y que tiene un sólo servidor, si se omite el cuarto símbolo D se entiende que el sistema tiene capacidad infinita ($M/M/1 \equiv M/M/1/\infty$). Un sistema $G/D/k/K$ tiene un proceso de llegada arbitrario, con tiempo de atención determinístico, con k servidores y con capacidad K . En algunos casos se agrega un quinto símbolo que representa el tamaño de la fuente de donde provienen las entidades. Por ejemplo, consideremos un sistema que represente el taller mecánico de una empresa de transporte que dispone de 20 camiones, entonces el tamaño de la fuente de entidades es 20 y por ejemplo el sistema se podría representar por $M/M/3/5/20$.

8.3 Conducta Transiente y Estacionaria

Designemos por $N(t)$ el número de entidades en el sistema (en la cola más las que se están atendiendo) en el instante t y sea

$$p_n(t) = \text{Prob}(N(t) = n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

la distribución de probabilidades de $N(\cdot)$. Determinar el comportamiento en estado transiente del sistema corresponde a encontrar $p_n(t) \quad \forall n, t$ lo que en general puede llegar a ser muy difícil. En muchas aplicaciones prácticas sin embargo, se necesita conocer la conducta de equilibrio del sistema, es decir, cuando el sistema lleva operando un tiempo suficientemente largo y las condiciones iniciales ya no influyen en la evolución del sistema. En otras palabras lo que se busca es determinar:

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que representa en el largo plazo la fracción del tiempo que el sistema a contenido n entidades. No siempre el límite anterior existe y es necesario determinar bajo que condiciones es posible encontrar p_n . Estas condiciones se discutirán más adelante. Si el límite anterior existe $\forall n$ se dice que el sistema alcanza un estado estacionario y p_n se conoce como la probabilidad estacionaria de encontrar n entidades en el sistema.

8.3.1 Fórmulas de Conservación, Fórmula de Little

Existen algunas relaciones en la teoría de colas que se satisfacen bajo condiciones bastantes generales, las cuales se basan principalmente en principios de *Conservación* en estado estacionario. Una de las más importantes es

$$L = \lambda \cdot W$$

donde λ es la tasa promedio de llegada de entidades al sistema, L es el número promedio de entidades en el sistema y W es el tiempo promedio de permanencia de una entidad en el sistema en estado estacionario. En forma equivalente denotando el número promedio de entidades en la cola y el tiempo promedio de permanencia de una entidad en la cola en estado estacionario por L_Q y W_Q respectivamente se tiene que

$$L_Q = \lambda \cdot W_Q$$

Esta relación se conocía desde hace ya mucho tiempo, sin embargo fue recién en 1961 que Little dio una prueba formal de ella y es por ello que se conocen como *Fórmula de Little*. Una forma intuitiva para justificar la fórmula de Little es observando que para un sistema cualquiera en estado estacionario la tasa de entrada de las entidades al sistema debe ser igual a la tasa de salida (conservación del flujo de entidades a través del sistema). De no ser así, o bien el sistema se estaría llenando (tasa de entrada mayor que tasa de salida), o bien el sistema se estaría vaciando (tasa de entrada menor que tasa de salida). En cualquiera de los dos casos no existiría estado estacionario que es condición necesaria para la fórmula de Little. La tasa de entrada al sistema es simplemente λ . Para determinar la tasa de salida basta observar lo siguiente. Si una entidad llega al sistema en estado estacionario encontrará, en promedio, que junto con ella hay L entidades en el sistema, además ella dejará el sistema, en promedio, en W unidades de tiempo por lo tanto encuentra que existe un flujo de salida de L entidades en W unidades de tiempo es decir una tasa de $\frac{L}{W}$ entidades por unidad de tiempo. Finalmente, igualando λ con $\frac{L}{W}$ se obtiene el resultado. Una demostración simple

de la fórmula de Little es la dada por Eilon (1961) (ver apéndice VII). La importancia de la fórmula de Little radica principalmente en lo general que es. Para cualquier sistema que alcanza un comportamiento estacionario se cumple $L = \lambda \cdot W$ independiente del número de servidores, de la capacidad del sistema, de los tiempos de atención, etc. Algunas relaciones adicionales que se pueden deducir de la fórmula de Little son las siguientes:

1. $L = L_Q + L_S$
2. $W = W_Q + W_S$
3. $L_Q = \lambda \cdot W_Q$
4. $L_S = \lambda \cdot W_S$

en donde L_S y W_S son el número promedio de entidades siendo atendidas y el tiempo promedio de atención de una entidad respectivamente. Por otro lado, el principio de conservación del flujo de clientes en estado estacionario permite determinar una condición necesaria para la existencia de estado estacionario. Tomemos un ejemplo, consideremos un sistema $G/G/c$ en donde la tasa media de llegada es λ , cada servidor tiene una tasa promedio de atención μ y existe una cola única. Supongamos que existe estado estacionario y sea $\{p_n\}$ el conjunto de probabilidades estacionarias del sistema. De esta forma, la tasa promedio de salida del sistema se calcula como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(k, c) \cdot \mu \cdot p_k \quad (8.1)$$

Ahora bien, igualando la tasa de entrada con la tasa de salida se tiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \min(k, c) \cdot \mu \cdot p_k \\ \frac{\lambda}{c \cdot \mu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \min\left(\frac{k}{c}, 1\right) \cdot p_k \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Luego para que exista estado estacionario es necesario que $\frac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1$. El resultado es intuitivo si se piensa que la tasa máxima de atención del sistema se alcanza cuando están todos los servidores ocupados y en este caso en promedio vale $c \cdot \mu$. Por lo tanto, para que el sistema no se congestione la tasa de entrada tiene que ser menor que la mayor tasa de salida, de donde se obtiene el resultado anterior. El término $\frac{\lambda}{c \cdot \mu}$ se conoce como intensidad de tráfico y se suele denotar por ρ . Es fácil ver que el número promedio de servidores ocupados en estado estacionario es $c \cdot \rho$. En el caso particular que $c = 1$ igualar la tasa de entrada con la tasa de salida equivale a

$$\lambda = \mu \cdot (1 - p_0) \quad (8.3)$$

es decir, $p_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$ que corresponde a la probabilidad estacionaria de encontrar al sistema vacío o equivalentemente a la fracción del tiempo que el servidor está desocupado (tiempo ocioso).

8.4 Teoría de Espera en modelos exponenciales de Nacimiento y Muerte

Muchos problemas de líneas de espera son susceptibles de modelarse como procesos de nacimiento y muerte. Es decir, que el sistema evoluciona lo hace a estados vecinos. Denotando el estado k como aquel en el cual el sistema tiene k entidades entonces para que el sistema evolucione sólo a estados vecinos es necesario que las llegadas y las atenciones sean individuales. En esta sección nos preocuparemos de estudiar sistemas de espera con la característica anterior y que además presenta un comportamiento exponencial tanto en la llegada como en la atención, es decir, sistemas del tipo $M/M/\dots$, además el estudio se centrará en el estado estacionario de estos sistemas. Como se vio en el capítulo anterior, un

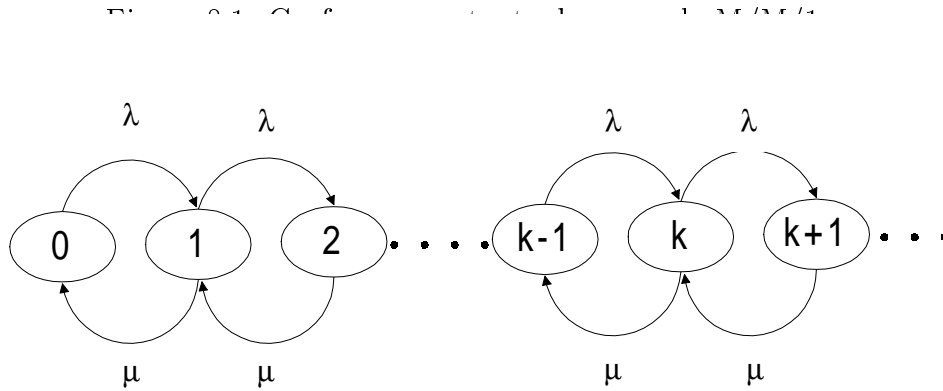
proceso de nacimiento y muerte con tiempos de permanencia en cada estado exponenciales es un tipo especial de cadena de Markov en tiempo continuo y por tanto se cumple, en estado estacionario, que *la tasa a la cual el sistema entra en un estado k cualquiera es igual a la tasa a la cual lo abandona*. A continuación veremos como este resultado es suficiente para determinar el comportamiento en estado estacionario de los sistemas de interés, entre los que se encuentran $M/M/1$, $M/M/c$, $M/M/c/k$, $M/M/\infty$, entre otros.

8.4.1 Sistema $M/M/1$

Consideremos un sistema para el cual las entidades llegan de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ , existe un único servidor que atiende a una entidad a la vez y se demora un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa μ . Supongamos además que el sistema tiene capacidad infinita y que la disciplina de atención es FIFO. El número de entidades en este sistema se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo continuo, más específicamente como un proceso de nacimiento y muerte, con el grafo representante que se muestra en la Figura 8.1:

Si aplicamos el principio de igualdad de tasas en los distintos estados del sistema se tiene que:

- **Estado 0:** $\lambda p_0 = \mu p_1$
- **Estado 1:** $\lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2$
-



- **Estado** $k > 1$: $\lambda p_k + \mu p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$

El sistema anterior más la condición de normalización $\sum_k p_k = 1$ determinan completamente la solución $\{p_k\}$. Para resolver el sistema anterior basta observar que:

$$\begin{aligned}
 \lambda p_k - \mu p_{k+1} &= \lambda p_{k-1} - \mu p_k \\
 &= \lambda p_{k-2} - \mu p_{k-1} \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \lambda p_0 - \mu p_1 = 0
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

luego

$$p_{k+1} = (\lambda \text{ over } \mu) p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_{k-1} = \dots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0 \tag{8.5}$$

usando $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ se tiene que

$$p_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_k = 1 \tag{8.6}$$

la ecuación anterior admite solución si sólo si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, en dicho caso se tiene que

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \tag{8.7}$$

y en general

$$p_k = (1 - \rho) \cdot \rho^k \tag{8.8}$$

es decir tiene una distribución geométrica. Anteriormente vimos que la condición $\lambda < \mu$ era necesaria para la existencia de probabilidades estacionarias en un sistema $G/G/1$. Ahora bien, del desarrollo anterior vemos que para el caso $M/M/1$ la condición es además suficiente.

Medidas de Efectividad

El estudio práctico de un sistema de espera no se limita a conocer cual es la distribución de probabilidades estacionarias, en lo que realmente se está interezado es en determinar las

medidas de efectividad del sistema como por ejemplo número promedio de entidades, tiempo promedio de permanencia en el sistema, fracción del tiempo que el servidor está ocupado, etc. Estas medidas de efectividad reflejan el funcionamiento del sistema y permiten apoyar decisiones sobre el manejo de los sistemas de espera. Por ejemplo si al momento de diseñar una cola se considera un sólo servidor y se calcula que en estas condiciones el 98% del tiempo el servidor estará ocupado entonces parece razonable pensar en aumentar el número de servidores a utilizar, la conclusión sería distinta si se hubiese obtenido una fracción de ocupación del 40%. Sea N la variable aleatoria número de entidades en el sistema y W la

variable aleatoria tiempo de permanencia en el sistema. En forma análoga se pueden definir N_Q y W_Q para la cola. El número promedio de entidades en el sistema se calcula como ¹

$$L = E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - \rho) \rho^k = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (8.9)$$

Utilizando la formula de Little se tiene que

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (8.10)$$

Además, es directo que $W_S = \frac{1}{\mu}$ y por tanto es posible calcular $W_Q = W - W_S$, es decir

$$W_Q = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \rho \cdot W \quad (8.11)$$

Finalmente conocido W_Q , L_Q se obtiene usando Little

$$L_Q = \lambda \cdot W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \rho \cdot L \quad (8.12)$$

Las medidas de efectividad anteriormente calculadas representan los valores medios del número de entidades en el sistema o en la cola (L , L_Q) y también del tiempo de permanencia en el sistema o en la cola (W , W_Q). Si bien esta información es de por sí es muy útil para el estudio de un sistema, puede ser insuficiente por no entregar una medida de la variabilidad. Es necesario conocer también como es la varianza de N y W por ejemplo para tener una visión más completa del funcionamiento del sistema. Varianza de N

La varianza del número de entidades en el sistema $var(n)$ se puede calcular fácilmente usando la relación:

$$var(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 \quad (8.13)$$

Dejamos propuesto al lector chequear que:

$$E(N^2) = \frac{\rho^2 + \rho}{(1 - \rho)^2} \quad (8.14)$$

y que por tanto $var(N) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$. Se puede ver tanto de $E(N)$ como de $var(N)$ que el comportamiento del sistema se hace más inestable cuando $\rho \rightarrow 1$. En estos casos el número

¹El resultado se obtiene facilmente utilizando la relación $\sum_n n \rho^n = \rho \cdot \frac{d}{d\rho} (\sum_n \rho^n)$.

promedio de entidades en el sistema es muy grande al igual que la varianza lo que implica que el número de entidades observadas en el sistema en un instante cualquiera tiene una probabilidad alta de ser muy diferente del valor medio. Varianza de W

Para poder calcular $var(W)$ es necesario conocer cuál es la distribución de probabilidades de esta variable. Para ello observemos los siguiente, supongamos que una entidad E llega al sistema y encuentra n entidades en su interior, entonces el tiempo que deberá permanecer antes de salir W_n puede escribirse como:

$$W_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1} \quad (8.15)$$

en donde v_1' representa el tiempo residual de atención de la entidad que está siendo atendida cuando llega E , v_2, \dots, v_n representan los tiempos de atención de las $n - 1$ entidades en la cola al momento de llegar E y v_{n+1} es el tiempo de atención de E . Como el proceso de atención es exponencial entonces v_2, \dots, v_{n+1} son claramente variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas, más aún la falta de memoria de la distribución exponencial permite asegurar que v_1 también está exponencialmente distribuida. Por lo tanto, W_n es la suma de $n + 1$ variables aleatorias exponencial independientes de tasa μ por lo que W_n tiene una distribución gamma de parámetros μ y $n + 1$ y su función de densidad viene dada por:

$$f_{W_n}(w) = \frac{\mu^{n+1} \cdot w^n \cdot e^{-\mu \cdot w}}{\Gamma(n+1)} \quad (8.16)$$

Sea por otro lado $f_W(w)$ la función de densidad del tiempo de permanencia en el sistema. Entonces la probabilidad que una entidad permanezca en el sistema un tiempo comprendido entre $[w, w + dw]$ viene dada por:

$$Prob(w \leq W \leq w + dw) = f_W(w) \cdot dw \quad (8.17)$$

Además la probabilidad anterior puede reescribirse condicionándola al número de entidades que nuestra entidad de prueba E detecta al llegar como:

$$\begin{aligned} Prob(w \leq W \leq w + dw) &= \sum_{n=0}^{\infty} Prob(w \leq W_n \leq w + dw) \cdot p_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{n+1} \cdot w^n \cdot e^{-\mu \cdot w}}{\Gamma(n+1)} \cdot (1 - \rho) \rho^n \cdot dw \\ &= \mu(1 - \rho) e^{-\mu \cdot w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu w \rho)^n}{\Gamma(n+1)} dw \\ &= \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)w} dw \end{aligned} \quad (8.18)$$

Luego igualando 8.17 con 8.18 se tiene que

$$f_W(w) = \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)w} \quad (8.19)$$

Por lo tanto W sigue una distribución exponencial de tasa $\mu(1 - \rho)$. Luego la varianza de W viene dada por $var(W) = \frac{1}{(\mu(1-\rho))^2}$ y nuevamente los problemas de variabilidad para W se alcanzan cuando $\rho \rightarrow 1$.

8.4.2 Sistema M/M/c

Consideremos un sistema de espera cuyo proceso de llegada es poissoniano de tasa λ y que dispone de c servidores en paralelo, teniendo cada uno un tiempo de atención exponencialmente distribuido con tasa μ .

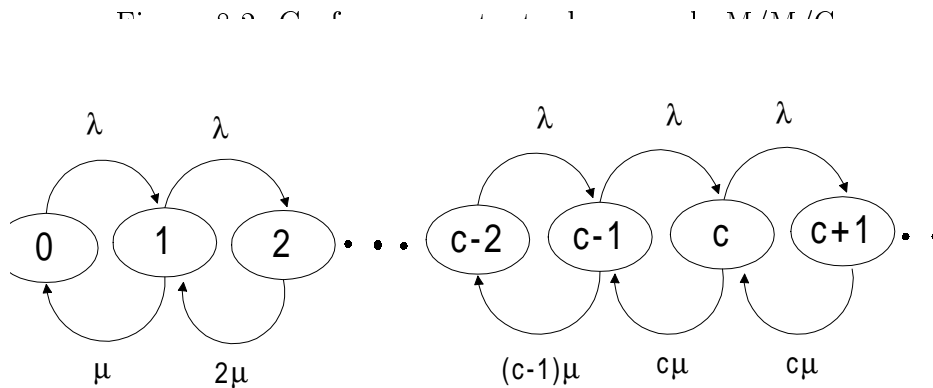
Probabilidades Estacionarias

El sistema $M/M/c$ corresponde a un sistema de nacimiento y muerte para el cual las tasa de transición entre estados no son siempre iguales. En efecto si existen n entidades en el sistema y $n < c$ entonces sólo n servidores estarán ocupados y el tiempo entre dos salidas consecutivas del sistema está exponencialmente distribuidas con tasa $n \cdot \mu$. Si se tiene en cambio que $n \geq c$ entonces todos los servidores estarán ocupados y el tiempo entre salidas consecutivas del sistema está exponencialmente distribuido con tasa $c \cdot \mu$. Por lo tanto, el sistema $M/M/c$ es un proceso de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento constante $\lambda_n = \lambda$ y con tasa de muerte μ_n dependiente del estado n del sistema con:

$$\mu_n = n \cdot \mu \quad n = 0, 1, 2, \dots, c-1$$

$$\mu_n = c \cdot \mu \quad n = c, c+1, \dots$$

El grafo representante se muestra en la Figura 8.2:



Suponiendo que el estado estacionario existe entonces la probabilidad estacionaria de que el sistema se encuentre en el estado n (p_n) viene dada por:

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} p_0 \quad (8.20)$$

es decir,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} p_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, c-1 \\ p_n &= \frac{\lambda^n}{c! \cdot c^{n-c} \cdot \mu^n} p_0 \quad n = c, c+1, \dots \end{aligned} \quad (8.21)$$

Utilizando el resultado anterior y el hecho que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ se obtiene

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu} + \frac{\lambda^c}{c! \cdot \mu^c \cdot (1 - \frac{\lambda}{c\mu})} \right]^{-1} \quad (8.22)$$

El resultado anterior asume que se satisface la condición $\lambda < c\mu$ que es condición necesaria y suficiente para la existencia del estado estacionario para un sistema $M/M/c$. Una pregunta interesante en este modelo es la que tiene relación con la probabilidad que una entidad que llega al sistema tenga que esperar para ser atendida o equivalentemente que encuentre a los c servidores ocupados.

$$C \equiv Prob(N \geq c) = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{p_c}{1 - \rho}$$

donde $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$. La expresión anterior se conoce como la fórmula C de Erlang y aparece tabulada para valores diferentes de c y $\frac{\lambda}{\mu}$.

Medidas de Efectividad

Número Esperado de Servidores Ocupados

Una medida de efectividad para estudiar el dimensionamiento en términos del número de servidores a utilizar es el número promedio de servidores que están ocupados en un momento dado. Mientras más cercano es este valor al número de servidores totales mayor será la tasa de ocupación de estos. A partir de las relaciones de Little se tiene que $L = \lambda W$ y $L_Q = \lambda W_Q$ y por tanto $L - L_Q = \lambda(W - W_Q)$. El término $L - L_Q$ representa el número promedio de entidades que están siendo atendidas en un momento dado del tiempo y es exactamente igual al número de servidores ocupados en ese momento. Por otro lado, $W - W_Q$ representa el tiempo de atención de una entidad el cual viene dado por $\frac{1}{\mu}$. Por lo tanto, el número promedio de servidores ocupados es igual a $\frac{\lambda}{\mu} = c\rho$. Número Esperado de entidades en el sistema

El número esperado de entidades en el sistema se puede calcular como la suma del número esperado de entidades siendo atendidas más el número esperado de entidades en la cola. Del punto anterior el número esperado de entidades siendo atendidas es $c\rho$. Por otro lado, el número esperado de entidades en la cola viene dado por:

$$L_Q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) \cdot p_n$$

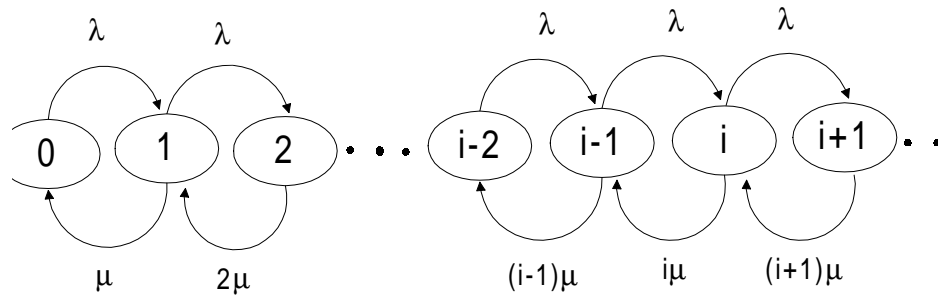
$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \frac{\lambda^n}{\mu^n \cdot c! \cdot c^{n-c}} p_0 \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} \text{Prob}(N \geq c)
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Por lo tanto, el número esperado de entidades en el sistema es igual a $L = c\rho + \frac{\rho C}{1-\rho}$ con $C = \text{Prob}(N \geq c)$. A partir de la fórmula de Little se pueden deducir fácilmente los valores de W y W_Q .

$$\begin{aligned}
W_Q &= \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{C}{c \cdot \mu \cdot (1-\rho)} \\
W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + W_Q
\end{aligned} \tag{8.24}$$

8.4.3 Sistema M/M/ ∞

Consideremos un sistema con llegadas poissonianas, tiempos de atención exponenciales y que tenga un número ilimitado de servidores. Este tipo de modelos se ajusta bien a situaciones de autoservicio, es decir, en donde cada entidad que llega al sistema se proporciona el servicio. Este sistema puede modelarse como un proceso de nacimiento y muerte con el grafo representante que se muestra en la Figura 8.3:



Las probabilidades estacionarias vienen dadas en este caso por:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n \cdot n!} p_0 \tag{8.25}$$

Luego imponiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ se tiene que:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n \cdot n!} e^{\frac{-\lambda}{\mu}} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \tag{8.26}$$

Es decir, el número de personas en el sistema tiene una distribución Poisson de media $L = \frac{\lambda}{\mu}$. El tiempo promedio de permanencia de una entidad en este sistema es claramente $\frac{1}{\mu}$, ya al existir capacidad ilimitada en la atención no se forma cola y el tiempo en el sistema es igual al tiempo de atención cuya media es $\frac{1}{\mu}$.

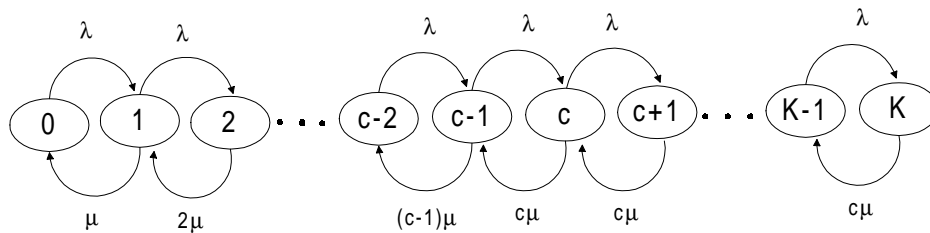
8.4.4 Sistema M/M/c/K

Consideremos un sistema de espera cuyo proceso de llegada es Poisson de tasa λ y que dispone de c servidores en paralelo, teniendo cada uno un tiempo de atención exponencialmente distribuido con tasa μ . El sistema tiene capacidad finita, no pudiendo haber más de K entidades simultáneamente en el sistema (i.e. sólo hay $K - c$ lugares de espera). Podemos asumir $c \leq K$ pues si $c > K$ el sistema se comporta igual que un $M/M/K/K$.

Probabilidades Estacionarias

El sistema $M/M/c/K$ corresponde a un sistema de nacimiento y muerte en el cual las tasas de transición entre estados son iguales a las del sistema $M/M/c$ para los estados $0, 1, \dots, K$ y la tasa de transición a estados con índice mayor que K es nula. Si existen n entidades en el sistema y $n < c$ entonces sólo n servidores estarán ocupados y el tiempo entre dos salidas consecutivas del sistema (muertes) está exponencialmente distribuidas con tasa $\mu_n = n \cdot \mu$. Si se tiene en cambio que $n \geq c$ entonces todos los servidores estarán ocupados y el tiempo entre salidas consecutivas del sistema está exponencialmente distribuido con tasa $\mu_n = c \cdot \mu$. Por otro lado, si hay $n < K$ entidades en el sistema la tasa de nacimiento es $\lambda_n = \lambda$, mientras que si hay $n = K$ entidades la tasa de nacimiento es $\lambda_n = 0$. El grafo representante se muestra en la Figura 8.4:

Figura 8.4: Grafo representante de una cola M/M/C/K



Como vemos, la evolución del número de entidades en el sistema puede ser representado mediante una cadena de Markov en tiempo continuo irreducible y *finita*, de modo que con seguridad existe una ley de probabilidades estacionarias, no importa cuál sea la relación entre λ, μ, c y K (asumiendo $\lambda > 0, \mu > 0, 0 < c \leq K < \infty$).

La probabilidad estacionaria de tener n entidades en el sistema, p_n viene dada por:

$$p_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 \quad (8.27)$$

es decir,

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} p_0 & n < c \\ \frac{\lambda^n}{c! \cdot c^{n-c} \cdot \mu^n} p_0 & c \leq n \leq K \end{cases} \quad (8.28)$$

Utilizando el resultado anterior y el hecho que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ se obtiene

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} + \frac{\lambda^c \cdot c^c}{c! \cdot \mu^c} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} \right]^{-1} \quad (8.29)$$

Medidas de Efectividad

Entre las medidas de efectividad para este sistema resulta de especial interés la tasa de pérdida de entidades en el largo plazo. Una entidad que llega cuando el sistema está lleno no puede entrar, y se retira sin haber recibido servicio. Diremos que esa entidad se ha perdido. Dado que el proceso de llegadas es Poisson, la probabilidad que una entidad que llega encuentre el sistema lleno es igual a p_K , la probabilidad estacionaria que el sistema esté lleno (recordar “PASTA”). Así, en el largo plazo una fracción p_K de las entidades encuentra el sistema lleno, y se pierden, de modo que la tasa de pérdida de entidades es igual a λp_K [entidades/u. de tiempo].

Podemos calcular el número medio de entidades en el sistema como

$$L = \sum_{i=0}^K i \cdot p_i$$

. Una vez conocido L podemos calcular el tiempo medio que pasa una entidad en el sistema, W , a partir de la Fórmula de Little. Sin embargo se debe tener cuidado al aplicar aquí la fórmula de Little: hay que tomar en cuenta que al sistema sólo entran las entidades que no lo encuentran lleno, de manera que la tasa efectiva de entrada al sistema es $\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_K)$ [entidades/u. de tiempo]. De esa forma se tiene

$$W = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{L}{\lambda(1 - p_K)}$$

8.4.5 Sistema $M/M/1/\infty/N$

Consideramos ahora un sistema en que las llegadas provienen de una población finita, de N entidades. Una entidad que está fuera del sistema llegará a él en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ [u. de tiempo], independiente de las demás. Los tiempos de atención son variables aleatorias i.i.d con distribución exponencial con media $1/\mu$ [u. de tiempo].

Probabilidades Estacionarias

Este sistema es susceptible de ser modelado como un proceso de nacimiento y muerte. Cuando hay i entidades en el sistema hay $N - i$ fuera de él. El tiempo que transcurre hasta la llegada de la próxima entidad es el mínimo de los tiempos de llegada de cada una de las $N - i$ entidades que están fuera del sistema, y como todos ellos son exponenciales de tasa λ , la tasa de nacimientos es $(N - i)\lambda$, para $0 \leq i < N$. Cuando hay N entidades en el sistema la tasa de nacimientos es nula (no hay ninguna entidad fuera que pueda llegar al sistema). La tasa de muerte es constante e igual a μ mientras haya un número positivo de entidades en el sistema. El grafo representante se muestra en la Figura 8.5.

