MA4702. Programación Lineal Mixta : Teoría y Laboratorio. 2018.
Profesor: José Soto.
Profesor Auxiliar: Arturo Merino
Profesor Ayudante: Obed Ulloa

Tarea 2: Distintas formulaciones para ATSP.

Instrucciones.

- Dado que el plazo de la tarea es mayor al habitual, ésta será completamente individual. Sin embargo, durante el laboratorio usarán los modelos de la tarea (o modificaciones si así lo prefieren).
- Usted debe entregar en ucursos antes de la hora de entrada al primer laboratorio los siguientes archivos: **`atsp-apellido.mod`**, **`atsp-apellido.run`**, **`atsp-apellido.txt`**

1. ATSP

En esta tarea investigaremos modelos para el Asymmetric Traveling Salesman Problem (**ATSP**) en el digrafo simple completo $\vec{K}_n = (V, E)$ donde $V = [n]$ y $E = \{(i,j) \in [n] \times [n] \colon i \neq j\}$, con pesos $c_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in E$. El problema consiste en encontrar un tour C (es decir, un ciclo dirigido que pase por todos los vértices exactamente una vez) de costo mínimo. En general los costos no son necesariamente simétricos (i.e., no siempre se tendrá $c_{ij} = c_{ji}$) ni tampoco pseudométricos (no satisfacen desigualdad triangular necesariamente). Pero muchas instancias interesantes si serán simétricas y pseudométricas.

El problema es NP-difícil, por lo que es imposible (salvo que P = NP), resolverlo en tiempo polinomial. De cualquier forma, es posible escribir PLM que modelen **ATSP** y resolver instancias de tamaño moderado, incluso usando solo Branch and Bound.

1.1. Modelo Genérico

En lo que sigue usaremos las siguientes notaciones estándar. Para $X \subseteq V$, y para $i \in V$ se definen:

$$
\begin{aligned}
\text{aristas salientes de } X\text{:} \quad & \delta_E^+(X) = \{(a,b) \in E \colon a \in X, b \notin X\} \\
\text{aristas salientes de } i\text{:} \quad & \delta_E^+(i) = \delta_E^+(\{i\}) = \{(i,b) \in E \colon b \neq i\} \\
\text{aristas entrantes a } X\text{:} \quad & \delta_E^-(X) = \{(a,b) \in E \colon a \notin X, b \in X\} \\
\text{aristas entrantes a } i\text{:} \quad & \delta_E^-(X) = \delta_E^-(\{i\}) = \{(a,i) \in E \colon a \neq i\} \\
\text{aristas internas de } X\text{:} \quad & E[X] = \{(i,j) \in E \colon i,j \in X\}
\end{aligned}
$$

Además, un ciclo que no pasa por todos los vértices del grafo se llamará **subtour**.

Todas las formulaciones que veremos harán uso de variables naturales binarias $\{x_{ij} \colon (i,j) \in E\}$, que representan el vector indicatriz del tour buscado. El modelo básico es:

$$
\begin{aligned}
(\text{ATSP}) \quad \min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij} & & (1)\\
x(\delta_E^+(i)) = 1, & \quad \forall i \in V & (2)\\
x(\delta_E^-(i)) = 1, & \quad \forall i \in V & (3)\\
x_{ij} \geq 0, & \quad \forall ij \in E & (4)\\
x_{ij} \in \{0,1\}, & & (5)\\
\{(i,j) \in E \colon x_{ij} = 1, i \neq 1, j \neq 1\} \text{ no contiene subtours.} & & (6)
\end{aligned}
$$

Es directo que toda indicatriz de tour es factible para este modelo. Por otro lado, si x es factible, entonces al ser binario, x es la indicatriz de un conjunto F. Las restricciones (2) y (3) indican que solo 1 arco de F sale de cada i y que solo 1 arco de F entra en cada i. Con esto tenemos que F es una unión de ciclos. La restricción (6) indica que todos los ciclos deben contener al nodo 1, por lo que F debe ser un tour.

En las próximas secciones usted encontrará varios modelos propuestos. Todos harán uso de las variables x, los parámetros c, la función objetivo (1) y las restricciones (2), (3), (4), (5). Lo único que variará será la manera de escribir la restricción (6) usando desigualdades lineales. En la tarea se verán 3 formulaciones abreviadas DFJ, MTZ y WONG.

Problema 1: Escriba un modelo en AMPL llamado **atsp-apellido.mod** que siga el siguiente formato

```
 ## Archivo (atsp-apellido.mod) ##
param N integer > 2;   # Numero de nodos.
set V:= {1..N};
set E:= {(i,j) in V cross V: i<>j};
param c {E};  #costos
var x {(i,j) in E} >=0, binary;

minimize LargoTour: # Escriba (1)

subject to GradoSalida {i in V}: # Escriba (2)
subject to GradoEntrada {i in V}: # Escriba (3)

/* Agregue lista de variables y restricciones que modelen (6) en
DFJ, MTZ y WONG con nombres que pueda identificar */

problem DFJmodel: x, LargoTour, GradoSalida, GradoEntrada, #objetos extra DFJ;

problem MTZmodel: x, LargoTour, GradoSalida, GradoEntrada, #objetos extra MTZ;

problem WONGmodel: x, LargoTour, GradoSalida, GradoEntrada, #objetos extra WONG;
```

Problema 2: Cree un archivo script **atsp-apellido.mod** que corra cada modelo en tres instancias de prueba **test1.dat**, **test2.dat** y **test3.dat**. Debe imprimir un reporte en un archivo de salida **atsp-apellido.txt** que incluya, para cada instancia y modelo: el valor de la relajación inicialel valor , la mejor solución óptima encontrada usando branch and bound, los tiempos usados para construir el modelo (AMPL) y los tiempos usados para resolver el problema (en caso de no haber llegado al óptimo indicarlo).
El script debe tener el siguiente formato (puede borrar los comentarios con /*..*/)

```
## Archivo (atsp-apellido.run) ##

##Seleccionar solvers y opciones
option solver cplex;
option cplex_options
'presolve=0 probe=-1 mipsearch=1 heuristicfreq=-1 mipalg=2 \
mipcuts=-1 splitcuts=-1 mcfcuts=-1 mipdisplay=4 cutstats=1 \
mipinterval=1 threads=1 mipstartstatus=0 mipstartvalue=0 \
logfile=log1.txt branch=-1  presolvenode=-1' \
timing=15 timelimit=180 return_mipgap=7;
/* se puso limite de ejecucion en 180 segundos por instancia, se reporta mipgap.

 Resolver cada instancia con cada problema
 en cada instancia debe aparecer algo como
 problem DFJmodel;
 option DFJmodel.relax_integrality 1; solve;
 option DFJmodel.relax_integrality 0; solve;
 problem MTZmodel;
 option MTZmodel.relax_integrality 1; solve;
 option MTZmodel.relax_integrality 0; solve;
 problem WONGmodel;
 option WONGmodel.relax_integrality 1; solve;
 option WONG model.relax_integrality 0; solve;
 escribiendo reporte /*
```

El reporte debe tener el siguiente formato

```
## Archivo (atsp-apellido.txt) ##Instancia test1.dat
modelo DFJ
LP: xxxxx IP:xxxxx  GAP:xxxxx tiempo-ampl:xxxxx tiempo-solver:xxxxx
modelo MTZ
LP: xxxxx IP:xxxxx  GAP:xxxxx tiempo-ampl:xxxxx tiempo-solver:xxxxx
modelo WONG
LP: xxxxx IP:xxxxx  GAP:xxxxx tiempo-ampl:xxxxx tiempo-solver:xxxxx

Instancia test2.dat
...
```

1.2. Modelo DFJ

Dantzig, Fulkerson y Johnson (1954) propusieron las siguientes restricciones para eliminar subtour:

$$x(E[S]) \leq |S| - 1, \qquad \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, 2 \leq |S| \leq n-1 \tag{7}$$

No entregue este ejercicio pero es útil para el control:
Demuestre que (7) elimina subtours, mostrando DFJ es un modelo válido para **ATSP**

Indicación: Para modelar DFJ en AMPL deberá indexar sobre subconjuntos de V. AMPL no puede hacerlo directamente: la manera indirecta de hacerlo es asociarle a cada $S \subseteq [n]$ un número entero $\langle S\rangle \in [0, 2^n - 1]$ tal que si $\langle S\rangle$ se escribe en binario (con n bits), entonces el i-ésimo bit de $\langle S\rangle$ (de derecha a izquierda) es 1 si y solo si $i \in S$. Por ejemplo, si $n = 6$, el conjunto $S = \{1, 2, 5\}$ se representa en binario como 010011, y su índice es entonces $\langle S\rangle = 19$. Si en AMPL usted puede escribir:

```
set INDICES := 0 .. (2**n - 1); #conjunto de todos los numeros entre 0 y 2^n-1.
set CONJUNTO {k in VV} := {i in V: (k div 2**(ord(i)-1)) mod 2 = 1};
```

Entonces, por ejemplo si n es 6, el conjunto **`CONJUNTO[19]`** será exactamente $S = \{1, 2, 5\}$

1.3. Modelo MTZ

Miller, Tucker y Zemlin (1960) propusieron el primer modelo para **ATSP** de tamaño polinomial. Se basa en una formulación extendida, con variables adicionales $\{u_i : i \in V \setminus \{1\}\}$ que representan el orden en el cual el tour visita a cada nodo. Más precisamente si se asume que el tour C parte en el nodo 1 y v es el k-ésimo nodo visitado después de 1 entonces $u_v := k$ (por ejemplo si el tour visita $1, 4, 3, 5, 2$ entonces $u_4 = 1$, $u_3 = 2$, $u_5 = 3$, $u_2 = 4$).

Con esto las variables u_i son enteras entre 1 y $n-1$, y satisfacen que si el tour visita consecutivamente i y luego j, ($x_{ij} = 1$) entonces $u_i - u_j + 1 = 0$.

Miller, Tucker y Zemlin notaron que las restricciones

$$1 \leq u_i \leq n-1, \qquad \forall i \in [n] \setminus \{1\} \tag{8}$$
$$u_i \in \mathbb{Z}, \qquad \forall i \in [n] \tag{9}$$
$$x_{ij} = 1 \implies u_i - u_j + 1 = 0. \tag{10}$$

rompen subtours.

No entregue este ejercicio pero será útil para el control:
(a) Demuestre que (8), (9), (10) elimina subtours. **Indicación:** ¿Qué pasaría si existiera un ciclo en el soporte de x que no contuviera a 1?
(b) Demuestre que si se reemplaza (10) por

$$x_{ij} = 1 \implies u_i - u_j + 1 \leq 0 \tag{11}$$

y se elimina la integralidad de u, (9), entonces el conjunto de los (x, u) factibles es el mismo que antes.

El modelo (MTZ) a modelar, usa (8), (11) para eliminar subtour

Indicación:
Al escribir las restricciones en AMPL, reemplace la restricción lógica (11) por restricciones lineales.
Hint: ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar $u_i - u_j + 1$ en una solución (x, u) factible, si $x_{ij} = 0$?.

1.4. Modelo Wong

En 1980, Wong propuso un modelo de multiflujos para ATSP. Básicamente, WONG propone que los valores $\{x_{ij} : ij \in E\}$ sean visto como capacidades en una red que permita mandar de manera independiente:

- 1 unidad de flujo (f^k) desde el nodo 1 al nodo $k \neq 1$.
- 1 unidad de flujo (g^k) desde el nodo $k \neq 1$ hasta el nodo 1.

En otras palabras, la formulación WONG se puede ver como determinar la existencia de flujos $f^k, g^k \in \mathbb{R}^E$, $k \in V \setminus \{1\}$ que satisfagan:

$$f^k(\delta^+(i)) - f^k(\delta^-(i))) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ -1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \notin \{1, k\} \end{cases} \quad ; \qquad \forall k \in V \setminus \{1\} \tag{12}$$

$$g^k(\delta^+(i)) - g^k(\delta^-(i))) = \begin{cases} -1, & \text{si } i = 1 \\ 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \notin \{1, k\} \end{cases} \quad ; \qquad \forall k \in V \setminus \{1\} \tag{13}$$

$$0 \leq f_{ij}^k \leq x_{ij}, \qquad \forall ij \in E, \forall k \in V \setminus \{1\} \tag{14}$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq x_{ij}, \qquad \forall ij \in E, \forall k \in V \setminus \{1\}. \tag{15}$$

No entregue este ejercicio pero será útil para el control:
Demuestre que (12), (13), (14), (15) elimina subtours. **Indicación:** Use Flujo máximo - Corte mínimo.

Indicación:
Al escribir las restricciones en AMPL, use variables no negativas $\{f_{ijk}, g_{ijk} : (i, j) \in E, k \in V \setminus \{1\}\}$ de modo tal que f_{ij}^k, g_{ij}^k se representen por **`f[i,j,k], g[i,j,k]`**