Notas de Estudo - Microeconomia 2 (Versão Preliminar)

João P. M. Da Silva*

30 de outubro de 2025

Resumo

Esse documento compila as minhas notas de estudo para a disciplina de Microeconomia 2 do curso de graduação em economia da UFPE. As aulas foram ministradas pelo prof. Bladimir Carrillo no semestre 2022.2.
Os materiais destas notas NÃO são originais. Trata-se de uma coletânea de pedaços de livros texto e materiais, por vezes copiados *ipsis literis* do original. Eventuais erros nas notas são de minha responsabilidade.

Os livros/materiais que uso como referência são:

- Varian, H. Microeconomia: Princípios Básicos, uma Abordagem Moderna, 7a. Edição, Editora Campus, 2006.
- Pindyck, R.S. & Rubinfeld, D.L. Microeconomia, Makron Books do Brasil, 6a. Edição, 2005.
- Nicholson, W & Snyder, C., Microeconomic Theory: basic principles and extensions, 11 edição, South Western, 2012
- Material de Estudo do Prof. Rafael Costa Lima (PIMES/UFPE)(Link)
- Notas de Aula - Microeconomia do Prof. Gil Riella (FGV-EPGE) (Link)

*Email: jpmsilva02@gmail.com

Conteúdo

1 Monopólio **1**
1.1 Introdução ao Monopólio 1
1.2 Maximização de Lucros e Escolha de Produção 1
1.2.1 Exemplo 1 2
1.3 A regra do inverso da Elasticidade 3
1.4 Ineficiência do Monopólio 4
1.5 Discriminação de Preços 5
1.5.1 Discriminação de Primeiro Grau 5
1.5.2 Discriminação de Segundo Grau (Screening) 5
1.5.3 Discriminação de Terceiro Grau 8
1.5.4 Exemplo 2 8

2 Mercado de Fatores **10**
2.1 Monopólios Upstream e Downstream na cadeia de insumos 10
2.1.1 Exemplo 3 12

3 Oligopólio **13**
3.1 Modelo de Stackelberg 13
3.2 Modelo de Cournot 15
3.2.1 Cournot com n firmas 16
3.3 Modelo de Bertrand 17
3.4 Cartel (Conluio) 18

4 Equilíbrio Geral **19**
4.1 Caixa de Edgeworth 19
4.2 Trocas no Mercado 22
4.3 Álgebra do Equilíbrio 24
4.3.1 Exemplo algébrico de equilíbrio 25
4.3.2 Exemplo 4 26
4.4 Economia de Robinson Crusoé 28
4.5 Produção e os Teoremas do Bem-Estar 30
4.5.1 Primeiro Teorema 30
4.5.2 Segundo Teorema 30

5 Teoria dos Jogos **31**
5.1 Jogos estáticos com informação completa 32
5.2 Estratégias estritamente dominantes 32
5.3 Dominância iterada 33
5.4 Estratégicas fracamente dominantes 33
5.5 Equilíbrio de Nash 34
5.5.1 Solução por eliminação iterada de estratégias estritamente dominantes 35
5.6 Equilíbrio de Nash em estratégias puras 37
5.6.1 Dilema do Prisioneiro 37

5.6.2 Jogos repetidos 38
5.6.3 Guerra dos sexos (Luce e Raiffa, 1957) 39
5.6.4 Jogo da moeda 39
5.7 Estratégia Mista 39
5.7.1 Pagamento Esperado de um evento 40
5.7.2 Equilíbrio de Nash em estratégias mistas 40

6 Leilões **42**
6.1 Classificação dos Leilões 42
6.1.1 Leilão Inglês (Leilão Ascendente) 42
6.1.2 Leilão Holandês (Leilão Descendente) 42
6.1.3 Leilão de Lance Fechado de Primeiro Preço 42
6.1.4 Leilão de Vickrey (Lance Fechado de Segundo Preço) 43
6.2 Planejamento de Leilões: Objetivos 43
6.2.1 Eficiência de Pareto 43
6.2.2 Maximização da Receita 43
6.3 Problemas Comuns em Leilões 43
6.3.1 A Maldição do Vencedor 43
6.3.2 Conluio 44
6.4 Aplicações Modernas: Leilões de Posição 44

1 Monopólio

1.1 Introdução ao Monopólio

Iniciaremos dando uma breve definição para Monopólio:

Definição: Monopólio designa uma situação particular de concorrência imperfeita, em que uma única empresa detém o mercado de um determinado produto ou serviço conseguindo, portanto, influenciar o preço do bem comercializado. Barreiras à entrada impossibilitam novos entrantes no mercado, assim o poder de mercado será detido por essa única empresa.

Como há somente uma empresa no mercado, dificilmente essa empresa tomaria os preços como dado (como ocorre em C.P.). Pelo contrário, essa empresa reconheceria a sua influência sobre o mercado e escolheria o nível de preço e de produção que maximizasse os seus lucros totais.

1.2 Maximização de Lucros e Escolha de Produção

Vamos agora formalizar algumas questões do Monopólio.

Lucro do Monopólio: Para maximizar os lucros, um monopólio escolherá o nível de produção para o qual a receita marginal é igual ao custo marginal. Como o monopólio, em contraste com uma empresa perfeitamente competitiva, enfrenta uma curva de demanda de mercado com inclinação negativa, a receita marginal será menor que o preço de mercado. Para vender uma unidade adicional, o monopólio deve baixar o preço de todas as unidades a serem vendidas para gerar a demanda extra necessária para absorver essa unidade marginal.

$$Rmg = Cmg \tag{1}$$

Caso a receita marginal fosse menor que o custo marginal, ela incentivaria o monopolista a diminuir sua produção. Se caso a receita marginal fosse maior que o custo marginal, haveria um incentivo de aumentar a produção. Portanto, o único ponto em que haveria falta de incentivos de alterar a produção seria no ponto de ótimo.

Da cadeira de Economia 1 sabemos que o lucro de uma empresa é dado pela receita menos os custos. E que seu objetivo é maximizar o lucro. Podemos formalizar na seguinte função: Onde, p = preço, q = quantidade e CT = custo total.

$$\pi(p,q) = pq - CT(q) \tag{2}$$

Portanto,

$$\max_q \Pi(q) = p(q) * q - CT(q) \tag{3}$$

Agora derivando a função de lucro em relação a q,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = \frac{\partial p(q)}{\partial q} + p(q) - \frac{\partial CT}{\partial q} = 0 \tag{4}$$

Caso ainda não esteja claro, o exemplo que faremos no final dessa seção ajudará a esclarecer.

Bem, talvez seja bom por um gráfico para que esses conceitos possam ser possíveis de visualizar.

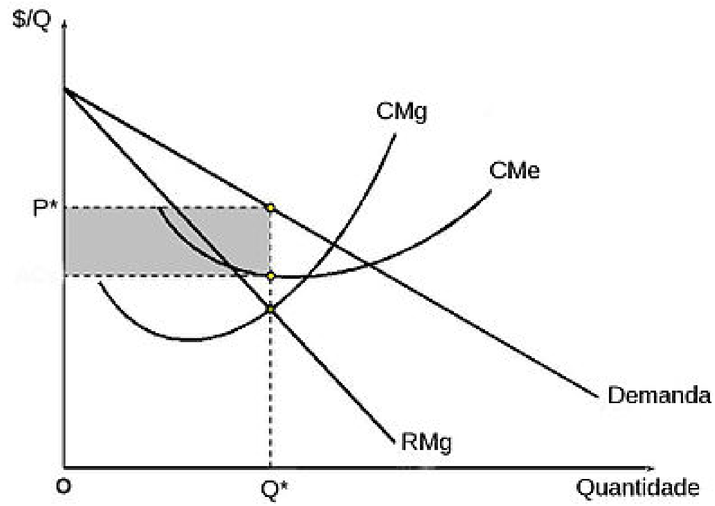


Figura 1: Um monopolista maximizador de lucros produz uma quantidade para qual a receita marginal seja igual ao custo marginal. Uma quantidade Q^* gera um preço de monopólio P^*. O lucro será representado pela área sombreada.

1.2.1 Exemplo 1

Agora vamos para o nosso exemplo de fixação. Farei esse exemplo explicando passo a passo, os próximos serão mais diretos.

Supondo que um monopolista incorre em uma função de demanda $Q = \frac{100-P}{2}$ e em uma função de custos $C(q) = \frac{q^2}{2}$.

Como precisaremos que as funções sejam expressas em relação a q, é necessário encontrar a função de demanda inversa. Para isso, isolaremos o P na função de demanda.

$$Q = \frac{100 - P}{2} \;\therefore\; P = 100 - 2q \tag{5}$$

Agora vamos montar nossa função lucro.
Lembrando que a função lucro é representada por:

$$\pi(q) = p(q) * q - CT(q) \tag{6}$$

E agora substituindo as funções de demanda inversa e custo,

$$\pi = [100 - 2q] * q - \frac{q^2}{2} \tag{7}$$

$$\pi = 100q - 2q^2 - \frac{q^2}{2} \tag{8}$$

Agora para encontrar o Q^*, iremos derivar a função lucro em relação a q.

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 100 - 5q = 0 \tag{9}$$

Agora isolando o q,

$$q = \frac{100}{5} \ \therefore \ q^* = 20 \tag{10}$$

Para encontrar o P^*, substituiremos o Q^* na função de demanda inversa [5] que encontramos anteriormente.

$$P = 100 - 2[20] = 60 \ \therefore \ P^* = 60 \tag{11}$$

Substituindo Q^* e P^* nas funções de demanda, custos e lucro, temos que:

$$ReceitaTotal = 20 * 60 = 1200 \tag{12}$$

$$CustoTotal = \frac{(20)^2}{2} = 200 \tag{13}$$

$$LucroTotal = 1200 - 200 = 1000 \tag{14}$$

1.3 A regra do inverso da Elasticidade

Eu separei essa subseção da anterior pra que possamos fazer uma análise com mais calma dessa questão.

Sabemos que a maximização de lucros implica que a diferença entre o preço que a firma estabelece e o seu custo marginal é inversamente relacionado com a elasticidade preço da demanda incorrida pela firma. Portanto, podemos expressar a recita marginal em termos da elasticidade pela formula:

$$Rmg(q) = p(q)\left[1 + \frac{1}{\epsilon(q)}\right] \tag{15}$$

E agora escrever em relação à condição de ótimo $Rmg = Cmg$,

$$p(q)\left[1 + \frac{1}{\epsilon(q)}\right] = Cmg(q) \tag{16}$$

Como a elasticidade é naturalmente negativa, poderíamos reescrever 16 como:

$$p(q)\left[1 - \frac{1}{|\epsilon(q)|}\right] = Cmg(q) > 0 \tag{17}$$

Onde,

$$1 - \frac{1}{|\epsilon(q)|} > 0 \ \therefore \ |\epsilon(q)| > 1 \tag{18}$$

Ou seja, o monopolista nunca opera em trecho inelástico da demanda. Pois, quando a demanda é inelástica, a quantidade varia menos proporcionalmente que o preço. Logo, o monopolista aumenta o preço, a quantidade varia e sua receita aumenta.
Ao mesmo tempo, seus custos totais diminuirão e consequentemente o lucro aumentará. Em outras palavras, sempre que a demanda for inelástica existe espaço para aumentar o lucro.

1.4 Ineficiência do Monopólio

Algo que devemos legar em conta é que o monopólio não representa uma situação eficiente no sentido de pareto.

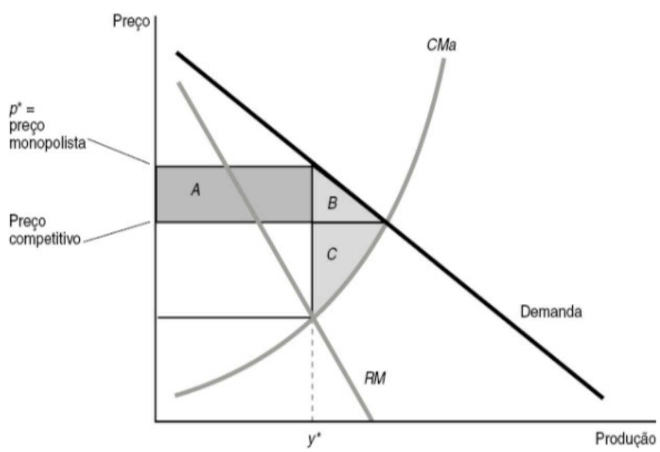


Figura 2: O peso morto do monopolista é representado pela soma dos triângulos B e C da figura acima.

É possível notar que o monopolista produz menos que se estivesse em C.P, com um nível de preço mais alto.

Obs.: Não irei entrar em muitos detalhes nessa parte. Caso queira uma análise mais profunda, sugiro olhar o livro do Varian.

1.5 Discriminação de Preços

Em algumas circunstâncias, o monopolista é capaz de aumentar seus lucros ao sair da política de preço único. A possibilidade de vender produtos a diferentes preços se chama discriminação de preços. Existem vários exemplos que vão desde a diferenciação simples e direta de consumidores (preço personalizado) até o oferecimento de pacotes diferenciados de preço e qualidade. De maneira geral existem três tipos de diferenciação de preços: De primeiro grau (discriminação perfeita); de segundo grau (pacotes de qualidade/preço e preços não lineares) e a discriminação de terceiro grau (preços diferentes para grupos de consumidores diferentes).

1.5.1 Discriminação de Primeiro Grau

Caso o monopolista possua informações perfeitas a respeito dos compradores, então pode ser possível cobrar um preço diferente para cada consumidor, ou seja, cobrar um preço "personalizado". Essa estratégia é chamada de discriminação perfeita de preços ou de primeiro grau.

Perceba que esta é uma situação eficiente já que o bem é oferecido até o ponto que a avaliação é maior ou igual ao custo marginal. Entretanto, se redistribuição é uma questão relevante, a discriminação de preços pode ser nociva, já que o monopolista fica com todo o excedente do mercado. Contudo, discriminação de preço de primeiro grau é muito pouco realista, já que, se um consumidor puder revender o bem, o monopolista não poderá mais diferenciar o preço cobrado por cada consumidor.

Um exemplo para ilustrar o caso seria de um prestador de serviços de uma pequena cidade, que por ser pequena, o prestador conhece todos os moradores. Portanto, por conhecer cada morador (se ele é rico ou pobre), o comerciante irá cobrar preços diferentes para cada consumidor a depender de seu nível de riqueza. Assim, o comerciante extrai todo o excedente do consumidor e por consequência aumenta seus lucros. Esse é um exemplo bem simples (muito simples mesmo), que ilustra o caso de discriminação de primeiro grau.

1.5.2 Discriminação de Segundo Grau (Screening)

A discriminação de preço de segundo grau está relacionada a heterogeneidade da preferência dos agentes. Em resposta a heterogeneidade, o monopolista oferece pacotes (preço/quantidade, preço/qualidade,etc.) para extrair mais excedente. A diculdade normalmente surge porque o monopolista não consegue diferenciar os consumidores. Isto signica que a única maneira de discriminar é induzindo os consumidores a escolher as cestas de acordo com as suas preferências (por exemplo passagens de primeira e segunda classe). Isto se chama induzir auto-seleção dos consumidores.

Tarifa em Duas Partes

A tarifa em duas partes é um caso de discriminação de segundo grau. Uma tarifa em duas partes é um tipo de preço não linear, onde os consumidores devem pagar uma taxa fixa pelo direito de consumir um bem e um preço uniforme por unidade do bem consumido.

Vamos agora formalizar essa questão: [1]

Seja $T(q) = A + pq$, onde A é um valor fixo e p um preço por unidade. O intuito do monopolista é escolher um A e p que maximizem seus lucros, dado a demanda pelo produto.

$$U = \begin{cases} \theta V(q) - T, & \text{caso o consumidor pague } T \text{ e consuma } q \\ 0, & \text{caso o consumidor não compre nada} \end{cases}$$

onde $V(0) = 0$, $V'(q) > 0$ e $V''(q) < 0$, ou seja, a utilidade marginal é decrescente. $\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ é um parâmetro da preferência que varia entre consumidores. Como $\theta_1 < \theta_2$, os consumidores do grupo dois têm maior utilidade marginal pelo bem. A proporção de indivíduos do tipo 1 é λ. Para manter a análise simples, vamos assumir que $V = \frac{1-(1-q)^2}{2}$. A partir destas preferências, podemos encontrar a função demanda dos consumidores. Assumindo que o consumidor compra alguma unidade, ele escolhe

$$\max_q \theta_i V(q_i) - pq, \tag{19}$$

que gera

$$\theta_i(1 - q_i) - p = 0, \tag{20}$$

Portanto,

$$q_i = 1 - \frac{p}{\theta_i} \tag{21}$$

Computando o excedente do consumidor como função do preço, temos

$$S_i(p) = \theta_i V(D_i(p)) - pD_i(p) \tag{22}$$

Pulando a álgebra, chegamos a

$$S_i(p) = \frac{(\theta_i - p)^2}{2\theta_i} \tag{23}$$

Seja θ a média harmônica de θ_1 e θ_2, assim $\frac{1}{\theta} = \frac{\lambda}{\theta_1} + \frac{1-\lambda}{\theta_2}$. A demanda agregada pode ser escrita como

$$D(p) = \lambda D_1 + (1 - \lambda)D_2(p) = 1 - \frac{p}{\theta} \tag{24}$$

Antes de construir o menu que induz a auto-seleção quando o monopolista não é capaz de identificar os consumidores, vamos encontrar o menu quando o monopolista pode identificar os consumidores. Neste caso, o monopolista pode cobrar preços e tarifas diferenciadas. Ele irá cobrar um preço igual ao custo marginal mais uma tarifa fixa igual ao excedente de cada grupo quando $p = c$. Ou seja,

$$A = S_i(c) = \frac{(\theta_i - c)^2}{2\theta_i} \tag{25}$$

O lucro será a soma do excedente dos dois grupos

$$\Pi_1 = \frac{(\theta_1 - c)^2}{2\theta_1} + (1 - \lambda)\frac{(\theta_2 - c)^2}{2\theta_2} \tag{26}$$

[1]Essa parte é baseada nas Notas de Estudo do Prof. Rafael Costa Lima. link para as notas se encontra no início deste documento.

O segundo caso a se considerar é aquele onde o monopolista não pode discriminar entre consumidores, e há arbitragem entre consumidores. Neste caso o monopolista cobra apenas um preço por unidade $T(q) = pq$. Este caso é exatamente o caso padrão de monopólio. Para a demanda em questão, o preço cobrado é $p_2 = \frac{c+\theta}{2}$ e o lucro é dado por $\Pi_2 = \frac{(\theta-c)^2}{4\theta}$.[2]
Agora vamos analisar o caso da tarifa em duas partes. Consideraremos o caso onde o monopolista cobra um único preço por unidade para os dois consumidores. Neste caso, a única tarifa fixa consistente com o consumidor 1 comprar algo do bem é $A = S_1(p)$.
Neste caso, o consumidor 2 também compra, já que

$$S_2(p) > S_1(p) = A \tag{27}$$

Neste caso, o monopolista resolve

$$\max_p S_1(p) + (p-c)D(p) \tag{28}$$

A solução para este problema é

$$\tilde{p} = \frac{c}{2 - \frac{\theta}{\theta_1}} \tag{29}$$

Neste caso é fácil perceber que o lucro de discriminação perfeita é maior que o de tarifa em duas partes. Enquanto o lucro na tarifa em duas partes é maior que o lucro do monopólio simples. Quanto aos preços, temos que

$$c < \tilde{p} < p^m \tag{30}$$

Em termos de bem estar, a tarifa em duas partes também está entre a discriminação perfeita e o monopólio com preços lineares.

Uma breve simplificação:
Talvez com toda essa álgebra, o problema de discriminação de segundo grau não tenha ficado tão claro. Iremos usar um exemplo para ilustrar essa questão.
Vamos usar o caso do setor de transportes aéreos. Existem dois tipos de consumidores, os que viajam a negócios e os que viajam por motivos pessoais, e que, em geral, têm propensão a pagar bem diferente. Embora haja várias empresas aéreas concorrentes no mercado, é muito comum ver apenas uma ou duas delas fazendo ligação entre duas cidades. Isso proporciona a essas empresas grande liberdade para fixar preços. Vamos imaginar o trecho Recife – Petrolina.
Vimos que a política de preço ótimo para um monopolista que lida com dois grupos de consumidores é vender ao mercado com mais propensão a pagar por preços altos e ofertar um produto de menor qualidade ao mercado com menos propensão a pagar. O modo que as empresas encontraram de implementar esse sistema é oferecendo "tarifa sem restrições" para quem viaja a negócios e uma "tarifa com restrições" para quem viaja a passeio. A tarifa com restrições sempre requer compra antecipada, escalas ou até pernoite. Essas imposições têm por objetivo possibilitar a discriminação entre os diferentes tipos de passageiros. Ao

[2] Aqui existe uma simplificação. Estamos excluindo a possibilidade do monopolista vender o bem apenas para consumidores do tipo 2.

oferecerem um produto de menor qualidade (no caso de tarifas com restrições), as empresas conseguem cobrar dos clientes que exigem condições flexíveis de viagem um valor consideravelmente mais elevado pelas passagens. Outro exemplo do mesmo segmento seria entre as passagens de primeira classe e classe econômica.

1.5.3 Discriminação de Terceiro Grau

O caso de discriminação de primeiro grau impõe ao monopolista a dificuldade de identificar a curva de demanda para cada comprador potencial. Um requisito menos rigoroso seria assumir que o monopólio pode separar seus compradores em relativamente poucos mercados identificáveis (ex. crianças - adultos, meia entrada - Inteira etc.) e seguir uma política de preços de monopólio separada em cada mercado. O conhecimento das elasticidades-preço da demanda nesses mercados é suficiente para seguir tal política. O monopólio então estabelece um preço em cada mercado de acordo com a regra da elasticidade inversa. Vamos formalizar essa questão.

Suponha que existam dois grupos distintos e identificáveis de consumidores que possuem as seguintes curvas de demanda

$$P_1(q_1) \quad e \quad P_2(q_2) \tag{31}$$

O monopolista fixa um preço para cada grupo, a fim de maximizar o lucro total obtido pela venda nos dois grupos.

$$\max_q \Pi = \underbrace{p_1 q_1}_{\text{Receita Cons. 1}} + \overbrace{p_2 q_2}^{\text{Receita Cons. 2}} - \underbrace{CT(q_1+q_2)}_{\text{Custos Totais}} \tag{32}$$

Agora derivando parcialmente em relação a q_1 e q_2

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0 \longrightarrow \quad p_1 = \frac{Cmg(q_1+q_2)}{1-\frac{1}{|\eta_1|}} \tag{33}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 0 \longrightarrow \quad p_2 = \frac{Cmg(q_1+q_2)}{1-\frac{1}{|\eta_2|}} \tag{34}$$

Vamos fazer um exemplo numérico para fixar melhor

1.5.4 Exemplo 2

Supondo que um monopolista identifica dois grupos de consumidores distintos com demandas $q_1 = 100 - p_1$ e $q_2 = 100 - 2p_2$ e $Cmg = 20$.

Primeiro resolveremos para o caso **com discriminação de preços de terceiro grau**.

As demandas inversas serão:

$$p_1 = 100 - q_1 \quad e \quad p_2 = 50 - \frac{1}{2}q_2 \tag{35}$$

Realizando a antiderivada do custo marginal para q_1 e q_2, temos:

$$Cmg = 20 \longrightarrow \quad CT = 20(q_1 + q_2) + C \tag{36}$$

A função lucro será:

$$\Pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - CT(q_1 + q_2) \tag{37}$$

Agora substituindo as equações (35) e (36) na função lucro (37), temos:

$$\Pi = (100 - q_1)q_1 + (50 - \frac{1}{2}q_2)q_2 - 20(q_1 + q_2) + C \tag{38}$$

$$\Pi = 100q_1 - q_1^2 + 50q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - 20q_1 - 20q_2 + C \tag{39}$$

Agora derivando para q_1 e q_2:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 100 - 2q_1 - 20 = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 50 - q_2 - 20 = 0 \tag{41}$$

Para achar q_1^* e q_2^*, isolamos q_1 e q_2 das equações (40) e (41), pulando a álgebra:

$$Q_1^* = 40 \tag{42}$$

$$Q_2^* = 30 \tag{43}$$

Substituindo (42) e (43) nas equações dispostas em (35), obtemos:

$$P_1^* = 60 \tag{44}$$

$$p_2^* = 35 \tag{45}$$

Portanto, o lucro total será de:

$$\Pi = 2400 + 1050 - 1400 = 2050 \tag{46}$$

Agora resolveremos para o caso **sem discriminação de preços de terceiro grau.** Como não estamos discriminando, haverá somente uma curva de demanda. Portanto, somaremos as curvas de demanda dispostas em (35).

$$q_1 + q_2 = 200 - 3p \longrightarrow \; q = 200 - 3p \tag{47}$$

Agora encontrando a curva de demanda inversa,

$$P = \frac{200}{3} - \frac{1}{3}q \tag{48}$$

Montando a função lucro,

$$\Pi = \left(\frac{200}{3} - \frac{1}{3}q\right) q - 20q - C \tag{49}$$

Agora maximizando a função lucro

$$\max_q \Pi = \left(\frac{200}{3} - \frac{1}{3}q\right) q - 20q - C \tag{50}$$

Derivando em relação q, temos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = \frac{200}{3} - \frac{2q}{3} - 20 = 0 \tag{51}$$

$$\pi' = \frac{140}{3} - \frac{2q}{3} = 0 \tag{52}$$

Portanto, $Q^* = 70$, $P^* = 43,3$ e o lucro total será de $\Pi^* = 1631$.

Agora vamos comparar os resultados obtidos nas duas situações.

	Q_1^*	Q_2^*	P_1^*	P_2^*	Lucro Total
Com Discriminação	40	30	60	35	2050
Sem Discriminação	70		43,3		1631

2 Mercado de Fatores

2.1 Monopólios Upstream e Downstream na cadeia de insumos

Nesse caso, a produção de um monopolista é utilizada como fator de produção por outro monopolista.

- **Monopolista Upstream:** Produz x a custo marginal constante c.
- **Monopolista Downstream:** Compra x do monopolista upstream a preço k. Utiliza x para produzir y_1 com a função de produção $y = f(x) = x$ e vende y num mercado cuja demanda é: $p = a - by$.

$\Longrightarrow$ **Monopolista Downstream**

O lucro é dado por receita menos custo:

$$\Pi = py - ky \tag{53}$$

Colocamos a demanda inversa dada por $p = a - by$:

$$\Pi = (a - by)y - ky \tag{54}$$

$$\Pi = ay - by^2 - ky \tag{55}$$

Agora derivamos o lucro em relação a y:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = a - k - 2by = 0 \tag{56}$$

Como $x = y$:

$$x = y = \frac{a-k}{2b} \quad \therefore \quad x = \frac{a-k}{2b} \tag{57}$$

O preço k será:

$$k = a - 2bx \tag{58}$$

$\Longrightarrow$ **Monopolista Upstream**

O lucro é dado por receita menos custo:

$$\Pi = kx - cx \tag{59}$$

Substituindo o k que achamos para o Monopolista Downstream e operando a álgebra, teremos:

$$\Pi = (a - 2bx)x - cx \tag{60}$$

$$\Pi = ax - 2bx^2 - cx \tag{61}$$

Derivando em relação a x:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = a - c - 4bx = 0 \tag{62}$$

Resolvendo para o x, teremos:

$$x^* = \frac{a-c}{4b} \tag{63}$$

Substituindo (63) em (58), temos:

$$k = a - 2b\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{4ab - 2ab + 2bc}{4b} = \tag{64}$$

$$= \frac{2a+2c}{4} = \quad k^* = \frac{a+c}{2}$$

$\Longrightarrow$ **Lucro Upstream**

Para achar o lucro, usaremos a função lucro do Upstream (59) e substituiremos com as equações encontradas acima.

$$\Pi = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{a-c}{4b}\right) - c\left(\frac{a-c}{4b}\right) \tag{65}$$

$$\Pi = \frac{(a^2 - c^2)}{8b} - \frac{ac + c^2}{4b} \tag{66}$$

$\Longrightarrow$ **Lucro Downstream**

Seguiremos o mesmo processo para o Downstream. Usaremos a função lucro (53).

$$\Pi = (a - by)y - \left(\frac{a+c}{2}\right) y =$$

$$\Pi = ay - by^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right) y = \tag{67}$$

Como $x = y$, podemos substituir:

$$\Pi = ax^* - bx^* - \left(\frac{a+c}{2}\right) x^* =$$

Substituímos os x^* e operando a álgebra, teremos:

$$\Pi^* = \frac{a^2 - ac}{4b} - \frac{(a-c)^2}{4} \tag{68}$$

$$\Pi^{\text{up}} + \Pi^{\text{down}} = \frac{a^2 - ac}{4b} - \frac{ac + c^2}{4b} - \frac{(a-c)^2}{4} = \tag{69}$$

$$= \frac{a^2 - 2ac + c^2}{4b} - \frac{(a-c)^2}{4} =$$

Finalmente obtendo:

$$\frac{(a-c)^2}{4b} - \frac{(a-c)^2}{16b} \tag{70}$$

2.1.1 Exemplo 3

Um mercado caracteriza-se pela presença de dois monopólios em sequência, um produzindo x para vender ao produtor y. Assumindo a função de produção $y = x$, a curva de demanda inversa de y, $p = 100 - 5y$, o custo marginal constante de produção de x, $Cmg_x = 20$ e preço de venda de $k = x$, calcule o preço e a quantidade de equilíbrio.

Começamos montando a função lucro para o monopolista Downstream:

$$\Pi^D = py - ky \tag{71}$$

Substituindo a demanda inversa, temos:

$$\Pi^D = (100 - 5y)y - ky$$
$$\Pi^D = 100y - 5y^2 - ky \tag{72}$$

Derivando em relação a y:

$$\frac{\partial \pi^D}{\partial y} = 100 - 10y - k = 0 \tag{73}$$

Resolvendo para k:

$$k = 100 - 10y \tag{74}$$

Dado que $y = x$ podemos reescrever o k como:

$$k = 100 - 10x \tag{75}$$

Agora iremos montar a função lucro para o monoposlista Upstream:

$$\Pi^U = kx - cx \tag{76}$$

Substituindo o k (75) em (76) e colocando o Cmg_x, temos:

$$\Pi^U = (100 - 10x)x - 20x$$

$$\Pi^U = 100x - 10x^2 - 20x$$

Agora derivando parcialmente em relação a x:

$$\frac{\partial \pi^U}{\partial x} = 100 - 20x - 20 = 0 \tag{77}$$

Resolvendo para x:

$$x^* = 4 \tag{78}$$

Substituindo (78) em $p = 100 - 5x$, teremos:

$$p^* = 80 \tag{79}$$

3 Oligopólio

3.1 Modelo de Stackelberg

No modelo de duopólio de Stackelberg (ou liderança na quantidade), uma das firmas, chamada líder, escolhe a quantidade que vai produzir primeiro. A outra firma, chamada seguidora, observa a escolha da firma líder e então escolhe a sua quantidade de produção.

Nesse modelo, a firma líder incorpora no seu problema de maximização a curva de reação da firma seguidora. Logo, o nível ótimo de produção é escolhido pela firma líder incorporando a função de reação da seguidora em sua decisão de produção. Assim, podemos demonstrar analiticamente que é melhor ser líder do que seguidora e que a firma líder obtém um lucro maior do que se estivesse em situação de Cournot, onde todas as firmas são iguais no sentido de tomarem suas decisões simultaneamente.

Exemplo: ANPEC 2005, QUESTÃO 14
Considere duas empresas duopolistas denominadas 1 e 2, atuando num mercado caracterizado por uma curva de demanda inversa igual a $100 - q$. Sabe-se que as curvas de custo total das empresas 1 e 2 são, respectivamente $C_1(q_1) = 100 + 45q_1$ e $C_2(q_2) = 50 + q_2^2$, em que q_1 e q_2 são as quantidades produzidas pelas empresas 1 e 2. Qual a quantidade que a empresa 1 irá produzir se ela puder decidir seu nível de produção antes da empresa 2, caracterizando um equilíbrio de stackelberg?

Resolução:
Nesse caso é necessário usar o método de backward induction para jogos dinâmicos com informação completa. Como a firma 1 é líder do mercado, resolveremos o problema de maximização da firma 2 e acharemos sua função de reação:

* O nível de produção da industria é: $Q = q_1 + q_2$.

* A curva de demanda inversa é: $P = 100 - q$

$\Longrightarrow$ **Problema da Firma 2:**

$$\max_{q_2} \Pi_2 = (100 - (q_1 + q_2))q_2 - (50 + q_2^2) \tag{80}$$

$$\max_{q_2} \Pi_2 = 100q_2 - q_1q_2 - q_2^2 - 50 - q_2^2 \tag{81}$$

Resolvendo as C.P.O e isolando q_2, encontraremos a função de reação da firma 2:

$$100 - q_1 - 2q_2 - 2q_2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{q_2^* = 25 - \frac{q_1}{4}} \tag{82}$$

$\Longrightarrow$ **Problema da Firma 1:**

O problema de maximização da firma 1 incorpora a função de reação da firma 2:

$$\max_{q_1} \Pi_1 = (100 - (q_1 + q_2^*))q_1 - (100 + 45q_1) \tag{83}$$

Substituindo (82) em (83), teremos:

$$\max_{q_1} \Pi_1 = \left[100 - \left(q_1 + 50 - \frac{q_1}{4}\right)\right] q_1 - (100 + 45q_1) \tag{84}$$

Realizando as C.P.O e isolando q_1, teremos:

$$100 - 25 - \frac{3}{2}q_1 - 45 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{q_1^* = 20} \tag{85}$$

Portanto, a resposta é $q_1 = 20$.

3.2 Modelo de Cournot

Suponha que duas firmas estão tentando decidir simultaneamente a quantidade que vão produzir. Nesse modelo temos apenas um período. Cada firma tem que prever a produção que a outra firma produzirá. Busca-se um equilíbrio nas predições.

$*$ O nível de produção da industria é: $Y = y_1 + y_2$.

$*$ O preço do mercado é: $P(Y) = P(y_1 + y_2)$.

$\Longrightarrow$ **Problema da Firma 1:**

$$\max_{y_1} \Pi_1 = P(y_1 + y_2)y_1 - c(y_1) \tag{86}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} = 0 \;\longrightarrow\; Rmg_1 = Cmg_1 \tag{87}$$

A função de reação de y_1 será:

$$y_1 = f(y_2) \tag{88}$$

Obs.: Isso mostra a decisão ótima da firma 1 como função da produção esperada da firma 2.

$\Longrightarrow$ **Problema da Firma 2:**

$$\max_{y_2} \Pi_2 = P(y_1 + y_2)y_2 - c(y_2) \tag{89}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} = 0 \;\longrightarrow\; Rmg_2 = Cmg_2 \tag{90}$$

A função de reação de y_2 será:

$$y_2 = f(y_1) \tag{91}$$

Obs.: Isso mostra a decisão ótima da firma 2 como função da produção esperada da firma 1.

Notem que cada firma escolhe seu nível de produção fazendo previsões sobre o comportamento da outra firma. Para obter um equilíbrio de previsões é necessário que:

$y_1^* = f_1(y_2^*) \;\longrightarrow\;$ A firma 1 escolha sua produto ótimo assumindo que a firma 2 também faz isso.

$y_2^* = f_2(y_1^*) \;\longrightarrow\;$ A firma 2 escolha sua produto ótimo assumindo que a firma 1 também faz isso.

Definição (Equilíbrio de Cournot): Cada firma maximiza seus lucros dadas as expectativas sobre a decisão de produção da outra firma, e essas expectatuvas de confirmarem.

3.2.1 Cournot com n firmas

Exemplo: ANPEC 2009, QUESTÃO 13
Considere uma indústria com 35 firmas, todas com a mesma função de custo dada por $c(q_i) = 2q_i$, em que q_i é a produção da firma i ($i = 1, ..., 35$). Defina $Q = \sum_{i=1}^{35} q_i$. A demanda de mercado é $p(Y) = 362 - 2Q$, onde Q é a quantidade total do mercado. Supondo que as firmas se comportam à la Cournot e dado que elas são idênticas, determine q^* (quantidade ótima de cada firma).

Resolução:

A demanda inversa é dada por $P(Q) = 362 - 2Q$, onde $Q = \sum_{i=1}^{35} q_i$.

• Para firma 1, temos:

$$\Pi = p \times q_1 - c(q_i)$$

Substituindo os dados na função lucro acima:

$$\Pi = \left[362 - 2q_1 - 2\sum_{i=1}^{34} q_i\right] q_1 - 2q_1 \tag{92}$$

$$\Pi = 362q_1 - 2q_1^2 - 2\underbrace{(q_2, q_3, \ldots, q_{35})}_{\text{x}} q_1 - 2q_1$$

$$\Pi = 362q_1 - 2q_1^2 - 2xq_1 - 2q_1 \tag{93}$$

Derivando em relação a q_1, temos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 362 - 4q_1 - 2x - 2 = 0 \tag{94}$$

Resolvendo para q_1:

$$q_1 = \frac{360 - 2x}{4} \longrightarrow \text{Função de reação firma 1} \tag{95}$$

Como as firmas são idênticas $(q_2, q_3, \ldots, q_{35}) = 34q_1$

$$q_1 = \frac{360 - 2(34q_1)}{4} \quad \therefore \quad q_i^* = 5 \tag{96}$$

3.3 Modelo de Bertrand

No modelo de Bertrand, diferentemente do de Cournot, a variável da escolha da firma é o preço a ser cobrado. Supondo um mercado onde duas firmas competem no preço. O custo marginal de cada firma é igual e constante. A firma que anunciar o menor preço conquista toda a demanda q^D pelo bem. Se as firmas anunciarem preços iguais, elas dividem o mercado. A demanda da firma 1 é (a demanda da firma 2 é semelhante:

$$q_1(p_1, p_2) = \begin{cases} q(p_1) & se \quad p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}q(p_1) & se \quad p_1 = p_2 \\ 0 & se \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

Suponha que o custo marginal é constante, igual nas duas firmas. A função lucro da firma 1 é:

$$\pi_1 = (p_1 - c) \times q_1(p_1, p_2) \tag{97}$$

Observe que como a função de demanda de cada firma é descontínua, a função lucro de cada firma também é descontínua.

Resultado: Equilíbrio de Bertrand. O único equilíbrio de Nash em um modelo de Bertrand é dado por $p_1 = p_2 = c$ (onde $\pi_1 = \pi_2 = 0$).

Logo, em um modelo de Bertrand, o único equilíbrio é as duas firmas cobrarem o preço de competição perfeita. Nesse caso, o lucro das firmas será zero.

Resumo do Modelo:

- No modelo de Bertrand as firmas competem no preço. Ou seja, cada firma escolhe o preço que vai anunciar no mercado, sabendo que a outra firma fará o mesmo.
- Mesmo que existam duas firmas, elas se comportam como firmas competitivas, sem tentar manipular o mercado e cobrando preço igual ao custo marginal.
- Nesse caso, não haverá ineficiência de mercado e nenhuma firma terá poder de mercado.

3.4 Cartel (Conluio)

Em todos os modelos de oligopólio analisados o lucro de equilíbrio das empresas é inferior o lucro que um monopolista obteria. Isto decorre da externalidade que uma empresa gera no lucro da outra no processo de maximizar o lucro. Considerando que a solução dos modelos de oligopólio é inferior à solução de monopólio, as empresas podem buscar arranjos alternativos visando obter um poder de mercado maior. Ou seja, as empresas se veem tentadas a abandonar a concorrência e estabelecer acordos para operar no mercado como um monopolista. Esse tipo de prática é chamada de conluio.

Assim, o problema de maximização do lucro com o qual as duas empresas se defrontam para escolher suas produções y_1 e y_2 de modo a maximizar os lucros totais do setor é:

$$\max_{y_1,y_2} p(y_1+y_2)\,[y_1+y_2] - c_1(y_1) - c_2(y_2) = \pi_1+\pi_2 \tag{98}$$

Nosso obejtivo será escolher y_1 e y_2 que maximize o lucro conjunto $(\pi_1+\pi_2)$.

• Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial(\pi_1+\pi_2)}{\partial y_1} \equiv p + \frac{\Delta p}{\Delta y}(y_1^*+y_2^*) = Cmg_1^* = 0 \tag{99}$$

$$\frac{\partial(\pi_1+\pi_2)}{\partial y_2} \equiv p + \frac{\Delta p}{\Delta y}(y_1^*+y_2^*) = Cmg_2^* = 0 \tag{100}$$

Essas condições implicam que a receita marginal é a mesma independente de onde é produzido os bens.

$*$ Logo, $Cmg_1^* = Cmg_2^* \longrightarrow$ Em equilíbrio

4 Equilíbrio Geral

Iniciaremos agora os estudos da análise de equilíbrio geral. Vamos estudar como as condições de oferta e demanda interagem em vários mercados para determinar os preços de muitos bens. Até agora analisamos mercados de um único bem. Não levamos em conta o preço de outros bens. Mas sabemos que os preços de dos bens substitutos e complementares de um bem influenciam na quantidade demandada e ofertada.

- Alguns pressupostos do modelo:
    - Estamos em um mercado competitivo com informações perfeitas.
    - 2 bens, 2 agentes representativos.
    - Os agentes possuem dotações iniciais e trocam elas entre si.

4.1 Caixa de Edgeworth

Existe um mecanismo gráfico que permite analisar as dotações e preferências dos agentes, bem como o processo de trocas. Esse mecanismo se chama de **Caixa de Edgeworth**.

Sejam A e B dois indivíduos e os bens 1 e 2:

$$X_A = (X_A^1, X_A^2) \rightarrow \text{cesta de consumo A.}$$

$$X_A^1 \dashrightarrow \text{consumo do bem 1 por parte de A.}$$

$$X_A^2 \dashrightarrow \text{consumo do bem 2 por parte de A.}$$

$$X_B = (X_B^1, X_B^2) \rightarrow \text{cesta de consumo B.}$$

$$X_B^1 \dashrightarrow \text{consumo do bem 1 por parte de B.}$$

$$X_B^2 \dashrightarrow \text{consumo do bem 2 por parte de B.}$$

Ao par de cestas de consumo (X_A, X_B) chamamos isso de alocação. Uma alocação é viável se a quantidade usada de cada bem é igual a quantidade disponível.

$$X_A^1 + X_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1$$

$$X_A^2 + X_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2$$

$$\omega_A^1 \dashrightarrow \text{alocação inicial de A (Bem 1)}$$

$$\omega_B^1 \dashrightarrow \text{alocação inicial de B (Bem 1)}$$

$$\omega_A^2 \dashrightarrow \text{alocação inicial de A (Bem 2)}$$

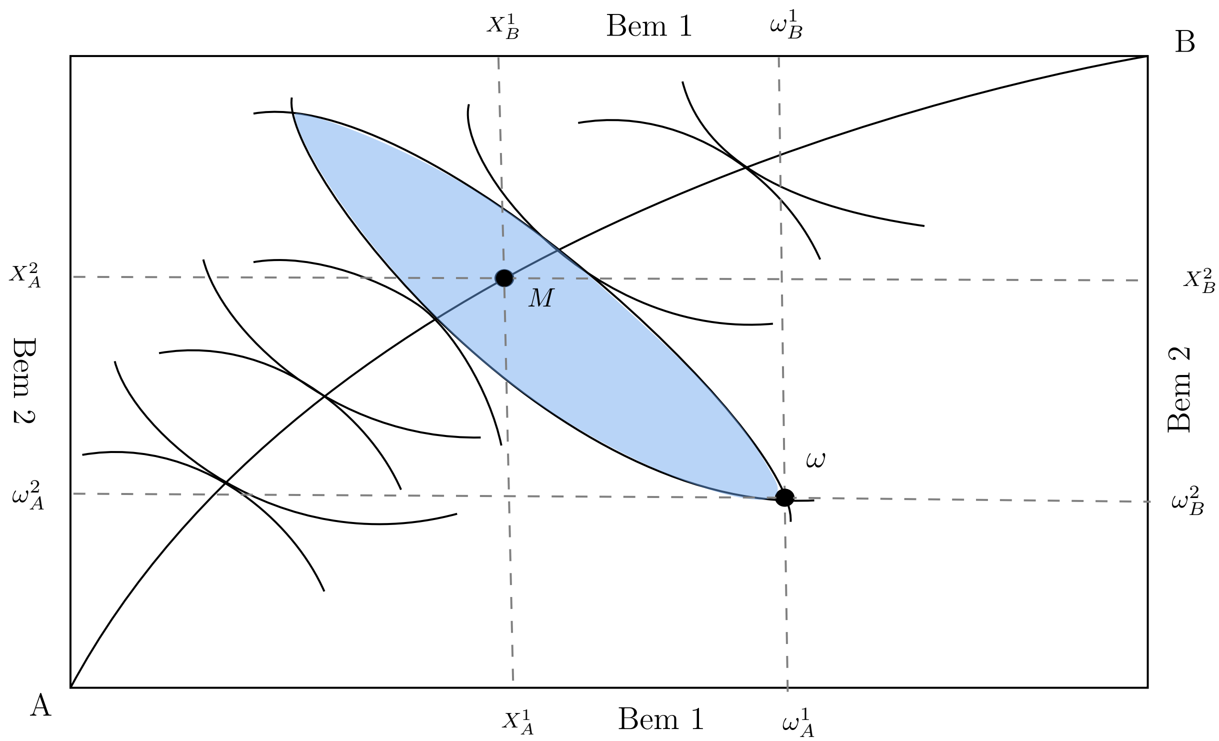
$$\omega_B^2 \dashrightarrow \text{alocação inicial de B (Bem 2)}$$

A alocação correspondentes à alocação inicial é:

$$\omega = [(\omega_A^1, \omega_A^2), (\omega_B^1, \omega_B^2)] \tag{101}$$

Essa é a dotação no qual os agentes começam. Após a troca do bem eles chegam à alocação final. Podemos visualizar isso através da Caixa de Edgeworth.

Caixa de Edgeworth



A largura da caixa mede a quantidade total do bem 1 na economia, enquanto a altura mede a quantidade total do bem 2. As escolhas de consumo da pessoa A são medidas a partir do canto baixo à esquerda, enquanto as escolhas da pessoa B são medidas a partir do canto de cima à direita.

Na caixa de Edgeworth, **M** é o ponto de eficiência e ω é a dotação inicial. Em relação às curvas de contrato de A e B, para A, quanto mais pra cima a direita, melhor. Para B, quanto mais pra baixo a esquerda, melhor. Vale lembrar que na nossa economia não há desperdício.

No ponto M, não tem como melhorar a situação de um sem piorar a situação do outro, chamamos isso de eficiência de Pareto. Portanto, o ponto M é uma AESP (Alocação eficiente no sentido de Pareto.)

- **Trocas:**

Começaremos pela dotação inicial ω.

$\rightarrow$A área a qual **A** teria um maior bem-estar está formada pelas cestas que estão acima da sua curva de indiferença mais alta que passa por ω.

$\rightarrow$A área a qual **B** teria um maior bem-estar está formada pelas cestas que estão acima da sua curva de indiferença mais alta que passa por ω.

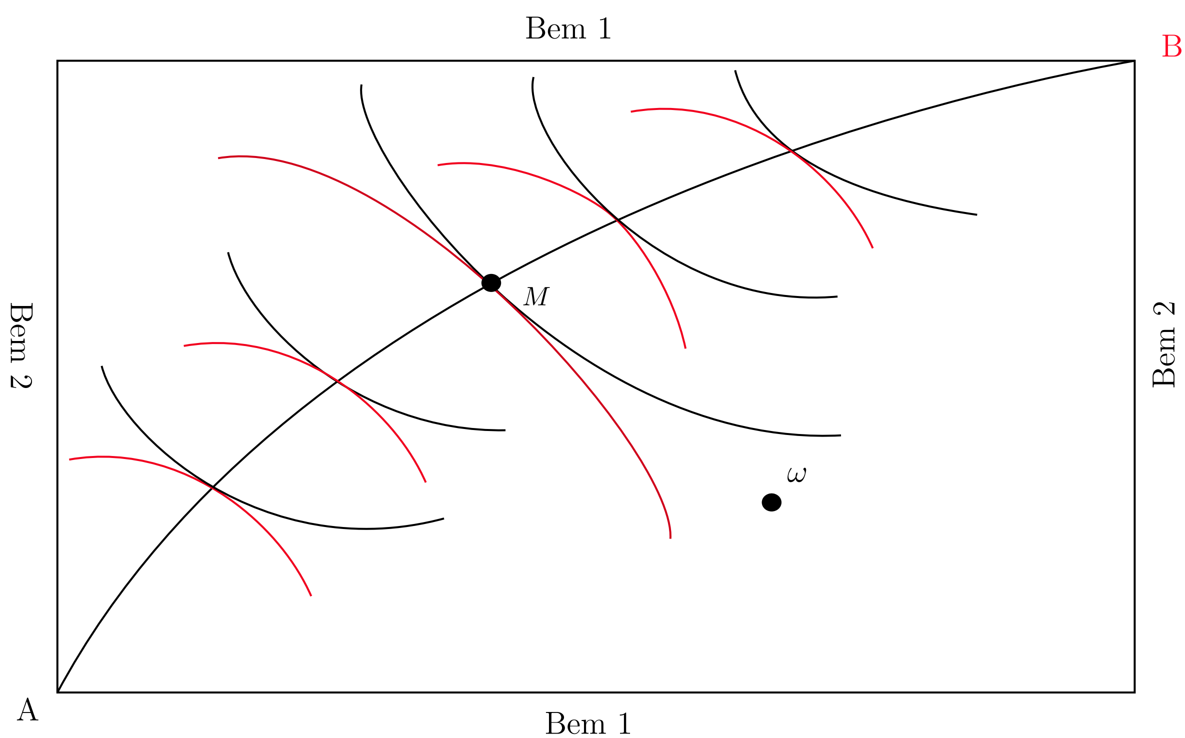
Portanto, a área entre as curvas (região sombreada) que passam pela dotação inicial ω é a região da caixa no qual haverá uma melhora no bem-estar de A e B. A partir da dotação inicial, os agentes encontrarão uma troca vantajosa para ambos.

A alocação M implica:

$\rightarrow$"A" abre mão de $|X_A^1 - \omega_A^1|$ unidades do bem 1 e adquire $|X_A^2 - \omega_A^2|$ do bem 2.

$\rightarrow$"B" abre mão de $|X_B^2 - \omega_B^2|$ unidades do bem 2 e adquire $|X_B^1 - \omega_B^1|$ do bem 1.

Modelo de Equilíbrio Geral



Como dito anteriormente, o ponto M é uma alocação eficiente no sentido de Pareto (AESP). Uma AESP é aquela que:

1. Não é possível melhorar o bem-estar de todos os agentes.

2. Não é possível melhorar o bem estar de um agente sem piorar o de outro.
3. Todas as possibilidades de ganhos por causa da troca foram esgotadas.
4. Não é possível fazer alguma outra troca mutuamente vantajosa.

No ponto M, as curvas de indiferença devem ser tangentes entre elas no interior da caixa de Edgeworth. Caso elas não sejam tangentes, as curvas devem-se cruzar entre si, ou seja, existe oportunidade de troca mutuamente vantajosa.

A partir da condição de tangência, existem infinitas AESP na caixa. O conjunto de todas as AESP denomina-se o conjunto de pareto ou curva de contrato. Em resumo, o conjunto de Pareto mostra todos os resultados possíveis de uma troca mutuamente vantajosa, partindo de uma dada dotação inicial.

4.2 Trocas no Mercado

Até agora analisamos uma alocação uma alocação na qual melhorava o bem-estar de ambos os agentes. Agora podemos tentar reproduzir as condições de um mercado competitivo.

Existem dois conceitos chaves no modelo de troca:

1. **Demanda Bruta:** quantidade que o indivíduo consome de cada bem.
2. **Demanda liquida:** diferença entre a demanda bruta e a dotação inicial.

Se a demanda bruta de A pelo bem 1 é X_A^1 e a sua dotação inicial é ω_A^1, então:

$e_A^1 = X_A^1 - \omega_A^1 \longrightarrow$ Demanda liquida do bem 1 do consumidor A.

• **Alguns Comentários:**

• Para os preços arbitrários (p_1, p_2), nada garante que a oferta iguale à demanda. Em termos de demanda líquida, isso significa que a quantidade que A deseja comprar (ou vender) não se igualará necessariamente à quantidade que B desejará vender (ou comprar). Em termos de demanda bruta, isso significa que a quantidade total de ambos os agentes querem ter desses bens não é igual à quantidade total disponível.

• Nesse caso, o mercado está em desequilíbrio.
• Neste modelo, existe uma terceira pessoa, chamada de "leiloeiro"(A mão invisível de Adam Smith). O papel dele é anunciar os preços e equilibrar os mercados.

• Se existe um excesso de demanda, o leiloeiro aumenta o preço.

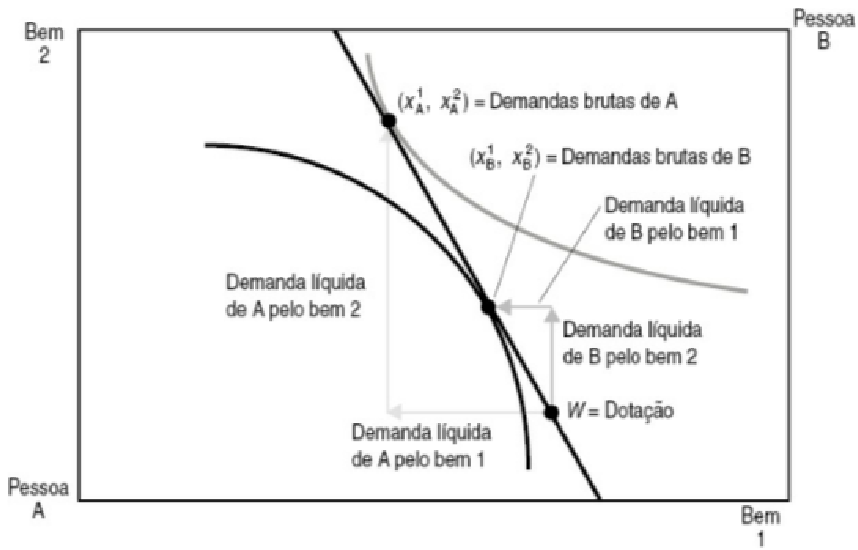
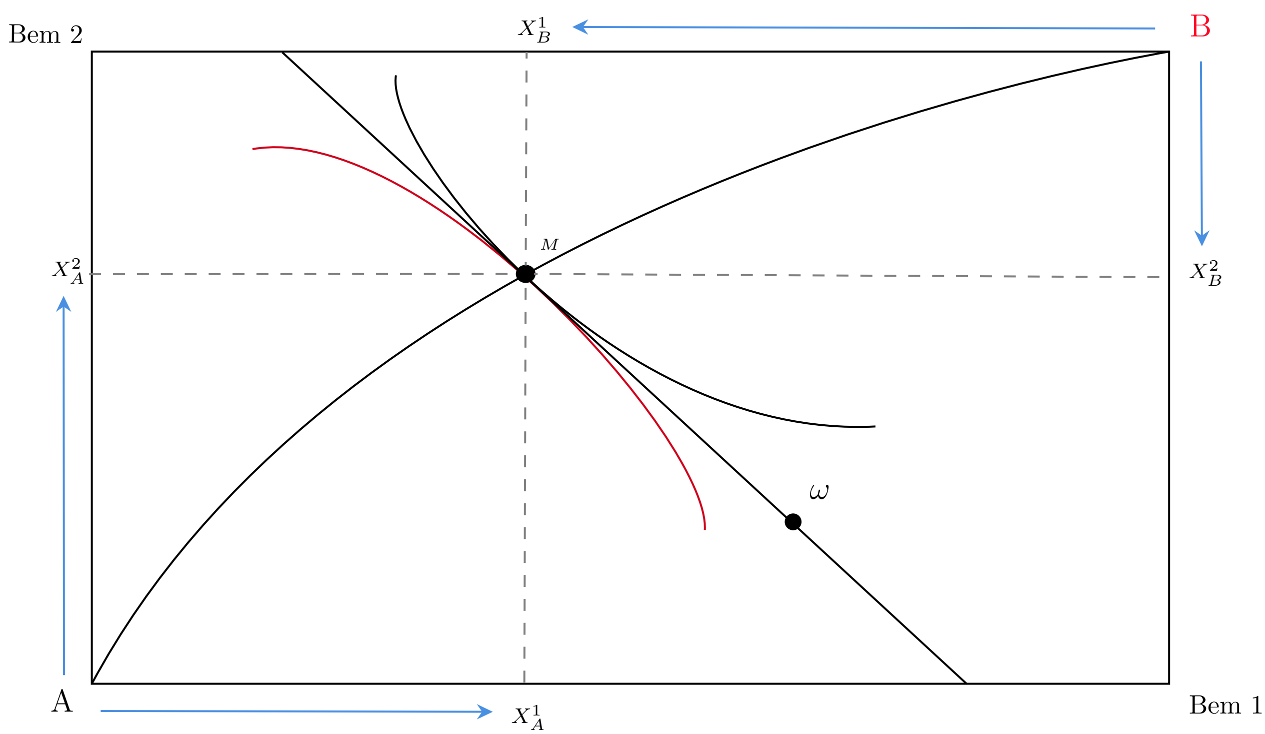


Figura 3: Demandas brutas e demandas líquidas. As demandas brutas são as quantidades que as pessoas desejam consumir. As demandas líquidas são as quantidades que as pessoas desejam comprar. Demandas brutas e demandas líquidas. As demandas brutas são as quantidades que as pessoas desejam consumir. As demandas líquidas são as quantidades que as pessoas desejam comprar.

Equilíbrio na Caixa de Edgeworth



No ponto M do gráfico acima, a quantidade total de cada bem que cada agente deseja comprar é igual a quantidade oferecida. Esse equilíbrio denomina-se **"Equilíbrio Walrasiano"**.

Definição: O equilíbrio Walrasiano é um conjunto de preços tal que cada agente escolhe a cesta que prefere entre aquelas acessíveis e todas as decisões dos agentes são compatíveis, no sentido de que a demanda se iguala à oferta em todos os mercados.

Matematicamente:

$$TMS_A = TMS_B = \frac{P_1}{P_2} \tag{102}$$

4.3 Álgebra do Equilíbrio

Se fizermos com que $X_A^1(p_1, p_2)$ seja a função de demanda do agente A pelo bem 1, $X_B^1(p_1, p_2)$ seja a função demanda do agente B pelo bem 1 e definirmos expressão análoga para o bem 2, poderemos descrever esse equilíbrio como o conjunto de preços (p_1^*, p_2^*) de modo que:

$$X_A^1(p_1^*, p_2^*) + X_B^1(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^1 + \omega_B^1$$

$$X_A^2(p_1^*, p_2^*) + X_B^2(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^2 + \omega_B^2$$

Em condições de equilíbrio walrasiano, a demanda total de cada bem será igual à oferta:

$$\left[X_A^1(p_1^*, p_2^*) - \omega_A^1\right] + \left[X_B^1(p_1^*, p_2^*) - \omega_B^1\right] = 0$$

$$\left[X_A^2(p_1^*, p_2^*) - \omega_A^2\right] + \left[X_B^2(p_1^*, p_2^*) - \omega_B^2\right] = 0$$

Essas equações dizem que a soma das demandas líquidas de cada agente por cada bem deve ser zero.

Portanto,

$$X_A^1(p_1^*, p_2^*) + X_B^1(p_1^*, p_2^*) = 0$$

$$X_A^2(p_1^*, p_2^*) + X_B^2(p_1^*, p_2^*) = 0$$

A soma das demandas líquidas são conhecidas como função de excesso de demanda agregada, assim:

$$z_1(p_1^*, p_2^*) = 0$$
$$z_2(p_1^*, p_2^*) = 0$$

• **Implicação:** Se o excesso de demanda do bem 1 é zero, então o excesso de demanda do bem 2 também é zero.

$$\text{Lei de Walras} \Longrightarrow \; p_1 z_1(p_1^*, p_2^*) + p_2 z_2(p_1^*, p_2^*) = 0 \tag{103}$$

• **Implicação Geral:** Se existem K mercados de bens, só é necessário encontrar um vetor de preços que garanta o equilíbrio em K-1 mercados. A lei de Walras garante que o mercado do bem K também estará em equilíbrio.

• Se (p_1^*, p_2^*) são preços de equilíbrio, então, $(\lambda p_1^*, \lambda p_2^*)$ também são $\forall\ \lambda > 0$. Podemos assim, escolher um dos preços e supor que é constante e interpretar o resto dos preços em relação a isto. Isto chama-se de numerário.
Numerário: Se escolhermos p_A^* como numerário, multiplicamos todos os preços pela constante

$$\lambda = \frac{1}{p_X^*}$$

4.3.1 Exemplo algébrico de equilíbrio

A função de utilidade de Cobb-Douglas tem forma:

$$U(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \tag{104}$$

Reescrevendo para o nosso caso, para o consumidor A:

$$u_A = (x_A^1, x_A^2) = \left(x_A^1\right)^{\alpha} \left(x_A^2\right)^{1-\alpha} \tag{105}$$

De modo semelhante será para o consumidor B.

De micro 1 vimos que essa função utilidade deu orgiem às seguintes funções de demanda:

$$x_A^1 = \alpha \frac{m_A}{p_1}$$

$$x_A^2 = (1-\alpha)\frac{m_A}{p_2}$$

$$x_B^1 = \beta \frac{m_B}{p_1}$$

$$x_B^2 = (1-\beta)\frac{m_B}{p_2}$$

Em que α e β são os parâmetros das funções de utilidade dos dois consumidores.

Sabemos que, no equilíbrio, a renda monetária de cada pessoa é dada pelo valor de sua dotação:

$$m_A = p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^2$$
$$m_B = p_1\omega_B^1 + p_2\omega_B^2$$

Assim, as demandas excedentes agregadas para os dois bens serão:

$$\begin{aligned} z_1(p_1,p_2) &= \alpha\frac{m_A}{p_1} + \beta\frac{m_B}{p_1} - \omega_A^1 - \omega_B^1 \\ &= \alpha\frac{p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^2}{p_1} + \beta\frac{p_1\omega_B^1 + p_2\omega_B^2}{p_1} - \omega_A^1 - \omega_B^1 \end{aligned} \tag{106}$$

E

$$z_2(p_1,p_2) = (1-\alpha)\frac{m_A}{p_2} + (1-\beta)\frac{m_B}{p_2} - \omega_A^2 - \omega_B^2$$
$$= (1-\alpha)\frac{p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^2}{p_2} + (1-\beta)\frac{p_1\omega_B^1 + p_2\omega_B^2}{p_2} - \omega_A^2 - \omega_B^2 \quad (107)$$

Obs.: Somente fizemos substituir as rendas monetárias m_A e m_B nas demandas excedentes. Agora devemos verificar se essas funções de demanda agregadas satisfazem a lei de Walras. Para isso, escolhemos p_2 como o preço numerário, de modo que as equações de tornem:

$$z_1(p_1,1) = \alpha\frac{p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^2}{p_1} + \beta\frac{p_1\omega_B^1 + p_2\omega_B^2}{p_1} - \omega_A^1 - \omega_B^1 \quad (108)$$

$$z_2(p_1,1) = (1-\alpha)p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^2 p_2 + (1-\beta)p_1\omega_B^1 + p_2\omega_B^2 p_2 - \omega_A^2 - \omega_B^2 \quad (109)$$

Tudo que fizemos foi estabelecer que $p_2 = 1$

Agora temos uma equação para a demanda excedente do bem 1 (108) e uma para o bem 2 (109), em cada equação é expressa como função do preço relativo do bem 1, p_1.

Para encontrar o preço de equilíbrio, igualamos essas duas equações a zero e resolvemos p_1. De acordo com a lei de Walras, **deveremos obter o mesmo preço de equilíbrio para as equações**.

Portanto, o preço de equilíbrio será:

$$p_1^* = \frac{\alpha\omega_A^2 + \beta\omega_B^2}{(1-\alpha)\omega_A^1 + (1-\beta)\omega_B^1} \quad (110)$$

4.3.2 Exemplo 4

Suponha uma economia na qual existem dois consumidores com preferências $U_A = lnx_A + 2y_a$ e $U_B = lnx_B + 2y_B$. Na alocação inicial, o indivíduo A possui toda a dotação do bem X ($\bar{x_A} = \bar{x} > 1$), enquanto o indivíduo B possui toda a dotação do bem y ($\bar{y_A} = \bar{y} > 1$).

a) Obtenha a função matemática da curva de contrato.

b) A dotação inicial é eficiente mo sentido de Pareto?

c) Determine a alocação e preços de equilíbrio geral competitivo.

Resolução:

a) A função matemática da curva de contrato descreve a relação entre as quantidades de bens que dois consumidores concordam em trocar a um determinado preço relativo. Para encontrar a curva de contrato, fazemos o seguinte.

Inicialmente encontramos as taxas marginais de substituição de cada consumidor:

$$TMS_A = \frac{\partial U_A \backslash \partial x_A}{\partial U_A \backslash \partial y_A} = \frac{\frac{1}{x_A}}{2} \quad \therefore \quad TMS_A = \frac{1}{2x_A} \tag{111}$$

$$TMS_B = \frac{\partial U_B \backslash \partial x_B}{\partial U_B \backslash \partial y_B} = \frac{\frac{1}{x_B}}{2} \quad \therefore \quad TMS_B = \frac{1}{2x_B} \tag{112}$$

Agora igualamos as TMS dos dois consumidores:

$$TMS_A = TMS_B \Longrightarrow \frac{1}{2x_A} = \frac{1}{2x_B} \tag{113}$$

$$x_A = x_B \tag{114}$$

Sabemos da lei de Walras que a soma das dotações iniciais é igual a alocação final, portanto:

$$x_A + x_B = \bar{x_A} + \bar{x_B} = \bar{x} \tag{115}$$

Logo,

$$x_A = \bar{x} - x_B \tag{116}$$

$$x_B = \bar{x} - x_A \tag{117}$$

Agora substituindo (113) em (116)

$$x_A = \bar{x} - x_A \quad \therefore \quad x_A = \frac{\bar{x}}{2} \tag{118}$$

Agora substituindo (118) em (117)

$$x_B = \bar{x} - \frac{\bar{x}}{2} \quad \therefore \quad x_B = \frac{\bar{x}}{2} \tag{119}$$

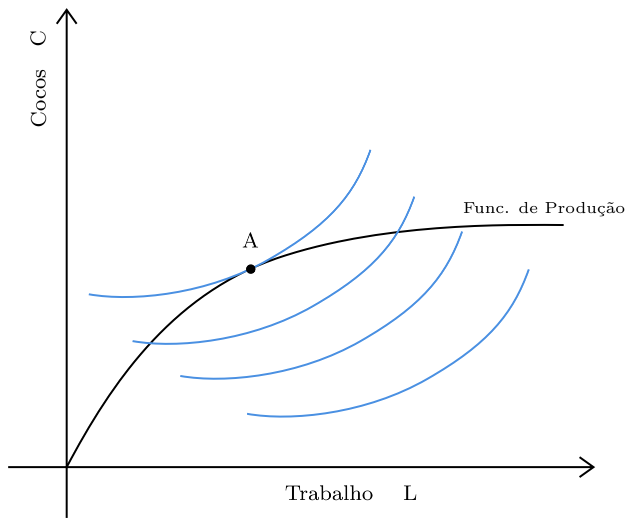
Assim determinamos a curva de contrato.

b)

4.4 Economia de Robinson Crusoé

Esse modelo incorpora produção no modelo de equilíbrio geral. Nesta economia Robinson tem um papel duplo: é ao mesmo tempo produtor e consumidor. Ele pode gastar seu tempo na praia relaxando (lazer) ou colhendo cocos. Quanto mais cocos ele juntar, maior será seu consumo e menor será seu lazer.

Economia de Robinson Crusoé



As curvas de indiferença descrevem as preferências de Robinson por cocos e lazer. A função de produção mostra a relação tecnológica que existe entre a quantidade de trabalho que ele despende e a quantidade de cocos que ele produz.

A função de produção possui rendimentos marginas decrescentes, ou seja, quanto mais Robinson trabalhar, mais cocos juntará, mas, deviso aos retornos decrescentes do trabalho, o produto marginal do seu trabalho diminuirá.

$$C = f(L) \longrightarrow \text{ Função de produção} \tag{120}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} > 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} < 0 \longrightarrow \text{ Rendimentos marginais decrescentes} \tag{121}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \text{Produto Marginal do Trabalho (PML)} \tag{122}$$

No ponto A, temos: $TMS_{C,L} = PML$.

Esquema do Modelo:

- Robinson é produtor um dia e consumidor outro dia.
- Existe um mercado de trabalho, com salário W a ser fixado.

- Existe um mercado de cocos.
- Robinson possui uma firma que vende cocos.

Papel de Robinson:

1. Trabalhador: Recebe salário como trabalhador na firma.
2. Dono: Recebe lucro da firma.
3. Consumidor: Decide quanto consumir de cocos.

Moeda: O preço de cada coco é de 1 Euro.

Questão: Qual deve ser o W(salário) para que funcione essa economia?

≫ **Problema da Firma:**

A firma quer maximizar seus lucros com o $P = 1$ e uma taxa de salário W.

$$\pi = P \times C - w \times L \tag{123}$$

Dado que, $P = 1$

$$\pi = C(L) - wL \tag{124}$$

$$\max_L \pi = C(L) - wL \tag{125}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial C(L)}{\partial L} - w = 0 \tag{126}$$

$$\frac{\partial C(L)}{\partial L} = w \quad \therefore \quad \boxed{P_{Mg}L = w} \tag{127}$$

≫ **Problema do Consumidor:**

∗ Deve decidir entre [C] e oferta de trabalho [L].

$$C = wL \tag{128}$$

$$L = t - L \tag{129}$$

$$c = w(t - L) \;\therefore\; C + wL = wt \tag{130}$$

$$\frac{P_C}{P_L} = \frac{UmgC}{UmgL} \tag{131}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{UmgC}{UmgL} \implies \boxed{TMS_{C,L} = w} \tag{132}$$

≫ **Equilíbrio:**

Em equilíbrio,

$$\boxed{TMS_{C,L} = P_{Mg}L = w} \tag{133}$$

4.5 Produção e os Teoremas do Bem-Estar

4.5.1 Primeiro Teorema

Definição: Todo equilíbrio walrasiano é eficiente no sentido de Pareto.

≫ Essa conclusão se mantém em uma economia com produção?

→ Sim, sempre quando as firmas se comportam como maximizadoras de lucro em uma economia competitiva.

Há 3 pontos a mencionar:

1. Não diz nada sobre a distribuição das dotações.
2. Só é válido no modelo competitivo.
3. Só é válido na ausência de externalidades no consumo.

4.5.2 Segundo Teorema

Definição: Qualquer alocação eficiente no sentido de Pareto (AESP) pode ser um equilíbrio walrasiano se as preferências dos agentes forem convexas.

≫ Isso é verdade no modelo com produção?

→ Sim, sempre e quando os conjuntos de produção forem convexos.

→ Exclui rendimentos crescentes à escala.

5 Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos é uma ferramenta para resolver situações de conflito simulando jogos. O comportamento estratégico dos agentes se modela através de um jogo em forma estratégica.

Propriedades do jogo:

- ▷ 2 jogadores, cada um terá jogadas \ decisões.
- ▷ Existem interações entre os agentes em um mercado.
- ▷ No momento de tomar suas decisões os agentes levam em consideração as decisões dos outros agentes.

Elementos do jogo:

- ▷ Os jogadores (agentes).
- ▷ As estratégias disponíveis.
- ▷ Os pagamentos de cada jogador.

Formalizando,

$$T = \{N, (c_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\} \;\longrightarrow \text{estrutura informacional} \tag{134}$$

Onde,

$$N = \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$c_i : \text{ estratégia dos jogadores}$$
$$u_i : \text{ pagamentos}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{ccc|cc|} & & & \text{J.2} & \\ & & & \text{C} & \text{D} \\ \text{J.1} & & \text{A} & 5\ ,\ 4 & 4\ ,\ 2 \\ & & \text{B} & 1\ ,\ 3 & 3\ ,\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} N = \{1,2\} & u_1(A,C) = 5 & u_2(A,C) = 4 \\ c_1 = \{A,B\} & u_1(B,C) = 1 & u_2(B,C) = 3 \\ c_2 = \{C,D\} & u_1(A,D) = 4 & u_2(A,D) = 2 \\ & u_1(B,D) = 3 & u_2(B,D) = 6 \end{array}$$

Comentários:

1. Informações:

   ▷ Se todos os jogadores conhecem em sua totalidade a estrutura do jogo, então dizemos que o jogo tem **informação completa**. Cada agentes conhecerá seus oponentes, estratégias e payoffs.

   ▷ Se alguma condição falha, dizemos que o jogo tem **informação incompleta.**

2. Tempo do jogo:

   ▷ Se quando um agente toma uma decisão e não conhece as outras decisões tomadas pelo os demais agentes, então dizemos que o jogo tem **informação imperfeita**.

   ▷ Caso contrário, dizemos que o jogo tem **informação perfeita**.

5.1 Jogos estáticos com informação completa

Voltando ao exemplo inicial,

$$\begin{array}{ccc|cc|} & & & \text{J.2} & \\ & & & C & D \\ \hline & & A & 5\ ,\ 4 & 4\ ,\ 2 \\ \text{J.1} & & & & \\ & & B & 1\ ,\ 3 & 3\ ,\ 6 \end{array}$$

▷ Todo jogo em bi-matriz é um jogo com informação completa mas imperfeita, ou seja, todos os jogadores conhecem a totalidade da estrutura do jogo, porém, não conhecem a decisão tomada pelo o outro jogador.

▷ Todo princípio de solução em teoria dos jogos se sustenta nos seguintes princípios:

   ⋙ "Os agentes são racionais, no sentido de que sempre preferem estratégias com pagamentos altos do que aquelas com pagamentos baixos"

5.2 Estratégias estritamente dominantes

Nesse caso, os jogadores escolhem estratégias que sejam estritamente dominantes.

Uma estratégia é **estritamente dominante** para um jogador se o pagamento que recebe de jogar essa estratégia é estritamente maior que o pagamento de qualquer outra estratégia, independente da decisão do outro jogador.

▷ Formalmente, para o jogador i, a estratégia c_i domina estritamente a outra estratégia $c_i^{'}$ se:

$$u_i(c_1, \ldots, c_i^{'}, \ldots, c_n) \;\; > \;\; u_i(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) \tag{135}$$

No exemplo anterior:

$$u_1(A, C) > u_i(B, C) \;\; \text{e} \;\; u_1(A, D) > u_1(B, D)$$

$$5 > 1 \;\; \text{e} \;\; 4 > 3$$

- ▷ Logo, a estratégia A domina estritamente a estratégia B para o jogador 1.
- ▷ O jogador 2 não tem estratégia dominante.

5.3 Dominância iterada

Para prever o comportamento do jogador 2, podemos refinar o princípio de ED e assumir não só que cada agente adotará estratégias estritamente dominantes, mas que também cada agente sabe que os outros farão a mesma coisa e agirá conforme isso.

- ▷ Por exemplo, jogador 2 sbae que jogador 1 escolherá A, dado que é a ED para ele. Portanto, o jogador 2 escolherá C.
- ▷ o princípio de dominância iterada pode ser resumido da seguinte maneira:
  - ⋙ "Todo jogador aplica o princípio ED e cada jogador sabe que os outros jogadores também aplicarão essa lógica, etc."
- ▷ Esse princípio é chamado de princípio de conhecimento comum entre jogadores.
- ▷ Esse princípio permite prever o que fará o jogador 2.
- ▷ Porém, nem sempre é possível aplicar esse princípio.

5.4 Estratégicas fracamente dominantes

Para o jogador i, a estratégia c_i domina fracamente a estratégia $c_i^{'}$ se:

$$u_i(c_1, \ldots, c_i^{'}, \ldots, c_n) \;\; \succeq \;\; u_i(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) \tag{136}$$

Exemplo:

		J.2	
		C	D
J.1	A	4,3	1,0
		↓	↓
	B	2,4	1,2

Para J.1, a estratégia A é fracamente dominante.

5.5 Equilíbrio de Nash

Definição: Nenhum jogador pode melhorar seu pagamento desviando unilateralmente, quando os outros jogadores se mantém na sua estratégia inicial.

Exemplo:

	C	D
A	5 , 4	4 , 2
B	1 , 3	3 , 6

- A combinação (A,C) é um equilíbrio de Nash.
- Se ambos os jogadores escolhem (A,C), nenhum tem incentivo de se desviar unilateralmente.

Proposição: Toda estratégia dominante contém um equilíbrio de Nash, mas não todo equilíbrio de Nash é um equilíbrio de estratégia dominante.

Comentário 1: Um jogo pode ter mais de um equilíbrio de Nash.

	C	D
A	2 , 1	0 , 0
B	0 , 0	1 , 6

Existem dois equilíbrios (A,C) e (B,D)

Comentário 2: Existem jogos nos quais não existe equilíbrio de Nash em estratégias puras.

	C	D
A	0 , 0	0 , -1
B	1 , 0	-1 , 3

Definição: (Estratégias Puras) são estratégias nas quais os jogadores fazem uma escolha e a mantém.

Exemplo (100% de chance cair na prova):

O equilíbrio é a estratégia (C,C)

		J.2 A	J.2 B	J.2 C	J.2 D
J.1	A	2 , 1	3 , 0	5 , 10	4 , 11
J.1	B	4 , 1	0 , 3	10 , 5	20 , 2
J.1	C	2 , 5	4 , 2	20 , 5	3 , 1

5.5.1 Solução por eliminação iterada de estratégias estritamente dominantes

A ideia é eliminar através de rondas de eliminação iterada de estratégias estritamente dominantes.

Exemplo 1:

	A2	B2
A1	8 , 5	6 , 4
B1	7 , 3	5 , 2

As estratégias B1 do jogador 1 e a estratégia B2 do jogador 2 são estritamente dominadas pelas estratégias A1 e A2. Ao eliminar essas estratégias, sobra (A1 e A2) como solução do jogo.

Exemplo 2:

	A2	B2	C2
A1	4 , 1	5 , 7	3 , 4
B1	0 , 3	4 , 1	7 , 0

Rondas de eliminação:

1. Elimina C2
2. Elimina B1
3. Elimina A2

Sobra (A1,B2)

Exemplo 3: Considere o seguinte exemplo, aparentemente complexo, mas na verdade simples:

		Jogador 2			
		A	B	C	D
Jogador 1	E	0 , 7	2 , 5	4 , 0	2 , 1
	F	5 , 2	3 , 3	5 , 2	0 , 1
	G	7 , 0	2 , 5	0 , 7	0 , 1
	H	0 , 0	0 , 0	0 , 0	9 , -1

Se você tiver paciência, você pode checar que nenhum jogador tem uma estratégia dominante no jogo acima. Por outro lado, vemos que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Portanto, se aplicarmos o raciocínio de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós podemos simplificar o jogo acima para:

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	E	0 , 7	2 , 5	4 , 0
	F	5 , 2	3 , 3	5 , 2
	G	7 , 0	2 , 5	0 , 7
	H	0 , 0	0 , 0	0 , 0

Mas agora, no jogo simplificado acima, vemos que a estratégia H é estritamente dominada pela estratégia F. Novamente, aplicando o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo, ainda mais simples:

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	E	0 , 7	2 , 5	4 , 0
	F	5 , 2	3 , 3	5 , 2
	G	7 , 0	2 , 5	0 , 7

Continuando com o mesmo procedimento, agora observe que a estratégia E é estritamente dominada pela estratégia F. O jogo reduz-se para:

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	F	5 , 2	3 , 3	5 , 2
	G	7 , 0	2 , 5	0 , 7

Agora a estratégia que é estritamente dominada é do jogador 2. Observe que A é estritamente dominada por B, o que nos dá o seguinte jogo:

		Jogador 2 B	Jogador 2 C
Jogador 1	F	3 , 3	5 , 2
	G	2 , 5	0 , 7

Agora G é estritamente dominada por F e o jogo simplifica-se para:

		Jogador 2 B	Jogador 2 C
Jogador 1	F	3 , 3	5 , 2

Finalmente, agora C é estritamente dominada por B, o que nos dá a previsão única de que no jogo acima os jogadores acabarão jogando F e B.

5.6 Equilíbrio de Nash em estratégias puras

Definição: Uma combinação de estratégias é um equilíbrio de Nash em estratégias puras se e somente se nenhum jogador pode aumentar seu payoff se desviando.

Teorema 1: Nenhuma estratégia estritamente dominada para um jogador pode fazer parte do perfil de estratégias puras.

Teorema 2: Quando o processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas fornece um único perfil de estratégias puras c_i^*, esse perfil é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Teorema 3: Se a combinação de estratégias c_i^* é um equilíbrio de Nash, então sobrevive ao processo de eliminação iterada d estratégias estritamente dominadas.

5.6.1 Dilema do Prisioneiro

Dois suspeitos de um crime são pegos e colocados em salas diferentes sem a possibilidade de se comunicarem. A pena máxima é de 5 anos, a única forma de haver condenação é se pelo menos um deles confessar.

		suspeito 2 confessar	suspeito 2 não confessar
suspeito 1	confessar	-4 , -4	0 , -5
	não confessar	-5 , 0	-1 , -1

A solução pro jogo é que os dois confessem $(-4, -4)$. Essa solução não é eficiente no sentido de pareto.

5.6.2 Jogos repetidos

Na subseção anterior, os jogadores só se encontram uma vez e jogam o dilema do prisioneiro também uma vez. No entanto, a situação é diferente se o jogo for repetido seguidamente pelos mesmos jogadores. Nesse caso, haverá novas possibilidades estratégias abertas para cada jogador. Caso o outro jogador burle uma jogada, você poderá escolher burlar na próxima.

Num jogo repetido, cada jogador tem a oportunidade de estabelecer uma reputação de cooperação e, assim, encorajar o outro jogador a fazer o mesmo. A viabilidade ou não desse tipo de estratégia irá depender de o jogo ser (ou não) jogado por um número fixo ou indefinido de vezes.

Consideramos o seguinte caso, em que ambos os jogadores sabem que o jogo, digamos, será repetido dez vezes **(jogo finito)**. Qual será o resultado? Vamos supor que consideramos a décima rodada. Esta é a última vez em que o jogo será realizado, por hipótese. Nesse caso, parece provável que cada jogador escolha o equilíbrio de estratégia dominante e burle. Afinal, jogar pela última vez é como jogar uma vez, de modo que deveríamos esperar o mesmo resultado.

Imaginaremos agora o que aconteceria na nona rodada. Acabamos de concluir que cada jogador burlará na décima rodada. Então porque cooperar na nona? Se você cooperar, o outro jogador poderá burlar e explorar sua boa índole. Cada jogador poderá pensar da mesma forma e burlar.

Pensemos agora na oitava rodada. Se a outra pessoa for burlar na nona jogada... e assim por diante. Se o jogo tiver um número fixo e conhecido de rodadas, então cada jogador burlará em todas as jogadas. Se não houver meio de impor a cooperação ma última rodada, não haverá meio de impor a cooperação na rodada anterior à última, e assim por diante.

Porém, se o jogo for **repetido um número indefinido de vezes**, então você realmente terá uma forma de influenciar o comportamento de seu oponente: se ele se recusar a cooperar nessa jogada, você pode se recusar a cooperar na próxima. Na medida em que ambas as partes preocupam-se bastante com seus ganhos futuros, a ameaça de não cooperação no futuro pode ser suficientemente forte para convencer as pessoas a jogarem a estratégia eficiente no sentido de Pareto.

Em resumo:

- **Jogo repetido finito:** Jogadores burlam na última rodada, tal que o resultado se assemelha a um jogo de uma única rodada.
- **Jogo repetido indefinido:** Os jogadores poderão influenciar o comportamento do seu oponente (“olho por olho”).

5.6.3 Guerra dos sexos (Luce e Raiffa, 1957)

Um casal deve decidir o que fazer no final de semana. As alternativas são:
F: Jogar Futebol
C: Ir ao cinema

		Esposa	
		F	C
Esposo	F	2 , 1	0 , 0
	C	0 , 0	1 , 2

- ▷ Esposo pode preferir F com sua esposa e a a esposa ir ao cinema com o seu esposo.
- ▷ Não há estratégia dominante.

5.6.4 Jogo da moeda

Dois jogadores têm uma moeda cada.

		J2	
		C	S
J1	C	1 , -1	-1 , 1
	S	-1 , 1	1 , -1

- ▷ Se ambas as moedas aparecem iguais cara ou coroa, J1 ganha a moeda do J2.
- ▷ Se as moedas aparecem diferentes, J2 ganha a moeda do outro.

5.7 Estratégia Mista

Definição: Jogadores atribuem probabilidades a cada ação e seguem elas.

- ▷ Em um jogo finito em forma estratégica:

$$\Gamma = (N, (c_i)_{i \in N}, (a_i)_{i \in N}) \tag{137}$$

Uma estratégia mista do jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras $\in i$. O conjunto de estratégias mistas do jogador i é denotado por Δi.

- ▷ Para $\Lambda_i \in \Delta_i$ e $c_i^* \in c_i$, $\Lambda_i(c_i)$ é a probabilidade que a distribuição Λ_i atribui para c_i.
- ▷ Uma estratégia mista do jogo Γ é uma combinação de distribuições:

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n), \quad \text{em que,} \ \ \Lambda_i \in \Delta_i \ \forall i$$

- ▷ O conjunto de estratégias mistas contém as estratégias puras.

5.7.1 Pagamento Esperado de um evento

$$\begin{cases} \text{a com probabilidade } \pi \\ \text{b com probabilidade } 1-\pi \end{cases}$$

$$\text{Valor esperado} = a\pi + b(1-\pi) \tag{138}$$

5.7.2 Equilíbrio de Nash em estratégias mistas

▷ Em um jogo finito em forma estratégica:

$$\Gamma = (N, (c_i)_{i\in N}, (a_i)_{i\in N}) \tag{139}$$

O perfil de estratégias mistas $\Lambda^* = (\Lambda_i)_{i\in N}$ forma um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se para cada jogador $i \in N$, a estratégia mista Λ_i do jogador i é uma melhor resposta às estratégias mistas dos demais jogadores.

▷ Λ^* é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas para o jogo Γ somente se:

$$u_i(\Lambda_1^*, \ldots, \Lambda_i^*, \ldots, \Lambda_n^*) \ \succeq \ u_i(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_i, \ldots, \Lambda_n) \ \ \forall\ \Lambda_i \in \Delta_i, \ \ \forall i \in N \tag{140}$$

Teorema: Se um jogador usa uma estratégia mista não degenerada em um equilíbrio de Nash misto, essa estratégia deve ser indiferente entre todas as estratégias puras às quais foram atribuídas probabilidades positivas.

Exemplo: Retornando ao exemplo da Guerra dos Sexos (5.6.3), temos a seguinte matriz:

		(q) F	Esposa	(1-q) C
(p)	F	2 , 1		0 , 0
Esposo				
(1 - p)	C	0 , 0		1 , 2

- Primeiramente, vamos achar o pay-off esperado para o **esposo**.

Sabemos de (138) que o valor esperado é dado por:

$$E(P) = a\pi + b(1-\pi)$$

Incorporando as probabilidades das escolhas da esposa para cada a decisão do esposo, temos:

$$E(F) = 2q + (1-q) \times 0 \ \longrightarrow \ \text{Valor esperado do Futebol}$$

$$E(C) = 0 \times q + (1-q) \times 1 \longrightarrow \text{Valor esperado do Cinema}$$

Em equilíbrio temos que $E(F) = E(C)$, logo:

$$2q + (1-q) \times 0 = 0 \times q + (1-q) \times 1$$
$$2q = 1 - q$$
$$2q + q = 1$$
$$q^* = \frac{1}{3} \quad \longrightarrow \quad 1 - q^* = \frac{2}{3}$$

- Agora acharemos para a **esposa**.

Seguiremos o mesmo procedimento de antes, incorporaremos as probabilidades das escolhas do esposo para as decisões da esposa:

$$E(F) = 1 \times p + 0 \times (1-p)$$
$$E(C) = 0 \times p + 2(1-p)$$

Em equilíbrio temos que $E(F) = E(C)$, logo:

$$p = 2(1-p)$$
$$3p = 2$$
$$p^* = \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad 1 - p^* = \frac{1}{3}$$

- Portanto, as escolhas em equilíbrio serão:

$$\Lambda^* = \left[(p^*, 1-p^*), (q^*, 1-q^*) \right]$$

$$\Lambda^* = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right] \tag{141}$$

6 Leilões

6.1 Classificação dos Leilões

A classificação econômica dos leilões envolve dois aspectos: o primeiro é a natureza do bem posto em leilão e o segundo, as regras do leilão. Em relação à natureza do bem, os economistas distinguem entre **leilões de valor privado e leilões de valor comum.** Em um leilão de valor privado, cada um dos participantes atribui, potencialmente, um valor diferente para o bem em pauta. Um objeto de arte pode valer \$500 para um colecionador, \$200 para outro e \$50 para outro, dependendo das respectivas preferências. Em um leilão de valor comum, o bem tem praticamente o mesmo valor para todos os participantes, embora cada um deles possa ter diferentes estimativas desse valor comum. O leilão de direitos de perfuração em águas costeiras tem essa característica: um dado local tinha determinada quantidade de petróleo ou não. Diversas empresas petrolíferas poderiam ter diferentes estimativas da quantidade de petróleo que seria encontrada, com base nos resultados de pesquisas geológicas, mas o petróleo tinha o mesmo valor de mercado, qualquer que fosse a empresa vencedora.

6.1.1 Leilão Inglês (Leilão Ascendente)

- **Regra:** O leiloeiro parte com um preço de reserva, que é o menor preço pelo qual o vendedor se desfará do bem. Os participantes oferecem, sucessivamente, preços mais altos; em geral, cada lance excede o anterior por algum incremento mínimo. Os participantes vão desistindo à medida que o preço sobe. O último participante a se manter no páreo ganha o bem, pagando o valor do seu lance final.

- **Característica:** É um leilão aberto, onde todos observam os lances dos outros.

6.1.2 Leilão Holandês (Leilão Descendente)

- **Regra:** O leiloeiro inicia com um preço muito alto e o reduz gradualmente. O primeiro participante a aceitar o preço corrente ganha o bem, pagando aquele valor.

- **Característica:** Também é um leilão aberto. É estrategicamente semelhante ao leilão de lance fechado de primeiro preço, como veremos.

6.1.3 Leilão de Lance Fechado de Primeiro Preço

- **Regra:** Cada participante submete um lance secreto, sem conhecer os lances dos outros. O maior lance vence e o vencedor paga o valor do seu próprio lance. Se houver preço de reserva e todos os lances forem inferiores a esse preço, o bem não será adquirido por ninguém.

- **Característica:** Os lances são secretos (fechados). Há um incentivo para dar um lance *menor* do que sua real valoração do bem, para tentar garantir algum excedente.

6.1.4 Leilão de Vickrey (Lance Fechado de Segundo Preço)

- **Regra:** Cada participante submete um lance secreto. O maior lance vence, mas o vencedor paga o valor do **segundo maior lance**.
- **Característica:** Esta é uma forma genial de leilão! Como Varian explica, a estratégia ótima para cada participante é dar um lance igual à sua verdadeira valoração do bem $(b_i = v_i)$. Isso o torna um mecanismo muito interessante do ponto de vista da eficiência.

6.2 Planejamento de Leilões: Objetivos

Ao desenhar um leilão, o vendedor (geralmente o governo ou uma empresa) tem dois objetivos principais :

6.2.1 Eficiência de Pareto

Um resultado é eficiente no sentido de Pareto se o bem for alocado para a pessoa que mais o valoriza. Matematicamente, se as valorações dos n participantes são $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a alocação é eficiente se o vencedor for o indivíduo i tal que $v_i \geq v_j$ para todo j.

- O **Leilão Inglês** tende a ser eficiente, pois os participantes continuam dando lances até que o preço atinja sua valoração. A pessoa com a maior valoração será a última a desistir.
- O **Leilão de Vickrey** é eficiente porque, como mencionado, a estratégia dominante é dar lances sinceros $(b_i = v_i)$, garantindo que a maior valoração corresponda ao maior lance .

6.2.2 Maximização da Receita

O vendedor quer obter o maior preço possível. Isso não é, necessariamente, o mesmo que eficiência. A estratégia mais comum para aumentar a receita é a introdução de um **preço de reserva** - um preço mínimo abaixo do qual o bem não será vendido.

- **Vantagem:** Evita que o bem seja vendido por um preço muito baixo se os lances forem fracos.
- **Desvantagem:** Risco do bem não ser vendido, mesmo que haja um participante disposto a pagar mais do que o valor do bem para o vendedor, mas abaixo do preço de reserva.

6.3 Problemas Comuns em Leilões

6.3.1 A Maldição do Vencedor

Este é um fenômeno crucial em **leilões de valor comum**, onde o valor do item é o mesmo para todos, mas cada participante tem uma estimativa diferente e incerta desse valor (ex: direitos de exploração de petróleo) .

- **A lógica:** O vencedor do leilão é, por definição, a pessoa que fez a estimativa *mais otimista* do valor do bem. Se a média das estimativas estiver correta, a estimativa do vencedor é provavelmente muito alta.
- **Consequência:** O vencedor paga mais do que o valor real do bem, resultando em prejuízo. Por isso, é chamada de "maldição".
- **Comportamento racional:** Licitantes experientes antecipam a maldição do vencedor e dão lances mais conservadores (abaixo de suas estimativas) para compensar esse efeito.

6.3.2 Conluio

Os participantes podem conspirar para manter os preços baixos. Eles podem, por exemplo, concordar que apenas um deles dará lances, e depois dividirão os lucros ou farão um segundo leilão entre si (conhecido como "knockout") . O Leilão Inglês é particularmente vulnerável a conluios, pois os participantes podem usar os lances para sinalizar uns aos outros.

6.4 Aplicações Modernas: Leilões de Posição

Os mecanismos de busca, como o Google, usam leilões para vender espaço publicitário. Este é um exemplo de **leilão de posição** .

- **O Bem:** Não é um único bem, mas uma série de "slots"(posições) na página de resultados. A primeira posição é a mais valiosa, a segunda é a segunda mais valiosa, e assim por diante.
- **O Mecanismo:** Geralmente é uma variação do leilão de Vickrey, conhecido como **Leilão Generalizado de Segundo Preço**. O anunciante na posição s paga o lance do anunciante na posição $s + 1$.
- **Índice de Qualidade:** A posição do anúncio não depende apenas do lance. Ela depende de uma pontuação, o **Ad Rank**, que é uma função do lance e do **Índice de Qualidade** do anúncio (relevância, taxa de cliques esperada, etc.) . Isso incentiva os anunciantes a criarem anúncios úteis para os usuários, e não apenas a darem lances altos.