

Punto 1

a)

Se considera un filtro de media móvil, el cual suaviza la señal que le entra. La salida de este filtro, denotada por $y[n]$, se caracteriza a través de la siguiente ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k] \quad (1)$$

para todo n . Los M coeficientes del filtro están dados por $1/M$. Como se puede ver en esta ecuación, para cada instante de tiempo n , la salida del filtro $y[n]$ es un promedio de los valores de la entrada en una ventana de tiempo de tamaño M . La respuesta al impulso de este filtro es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & n \in [0, M] \\ 0 & \text{dnc} \end{cases} \quad (2)$$

Se ejecutó el código en MATLAB denominado *filtrado.m* para valores de la ventana del filtro $M = 1, 5, 10, 100$. Los resultados se pueden observar en la figura 1.

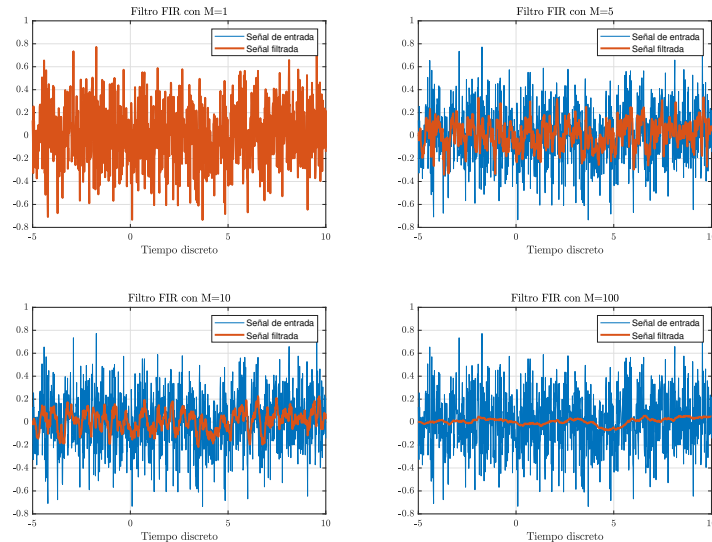


Figura 1: Filtro FIR para diferentes valores de M

Se puede notar de la anterior figura que incrementar el valor de la ventana del filtro M tiene el efecto de generar un filtrado de la señal más eficiente, mejorando la reducción del ruido de la señal de entrada. Viendo la ecuación (1), es claro que incrementar el valor de M hará que para calcular la salida, se divida la señal de entrada en un valor más grande, así obteniendo un valor más pequeño. Del mismo modo, como ahora se tiene una ventana de tiempo más grande, la señal de salida ahora está calculada como un promedio que tiene en cuenta más valores de entrada, así generando un efecto de suavización.

b)

Se considera el siguiente proceso estocástico conocido como ruido blanco en tiempo discreto $\forall n, r \in \mathbb{Z}, n \neq r$:

$$\{X[n]\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad (3)$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} E[X[n]] &= 0 \\ \text{var}(X[n]) &= \sigma^2 \\ \text{cov}(X[n], X[r]) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Se asume también que $X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \in \mathbb{Z}$.

Se sabe que la caracterización de segundo orden de un proceso estocástico en tiempo discreto está completamente definida por su **media** $\mu_X[n]$ y su **función de autocorrelación** $R_X[n, r]$. Se procede a encontrar cada uno de estos componentes.

Para hallar la media, se sabe que

$$\mu_X[n] = E[X[n]]$$

y por definición, sabemos que

$$E[X[n]] = 0$$

por lo tanto,

$$\mu_X[n] = 0 \quad (5)$$

Para hallar la función de autocorrelación, se sabe que, por definición, esta está dada por

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[r]]$$

Como sabemos que las variables aleatorias $X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \in \mathbb{Z}$, entonces

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[r]] = E[X[n]]E[X[r]]$$

Como ya vimos que $E[X[n]] = 0$, lo que además también implica que $E[X[r]] = 0$,

$$R_X[n, r] = 0$$

para todo $n \neq r$. Sin embargo, cuando $n = r$ se tiene que

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[n]] = E[X[n]^2]$$

Ahora se encuentra el valor de $E[X[n]^2]$. Sabemos que la varianza de $X[n]$ está dada por

$$\text{var}(X[n]) = E[X[n]^2] - (E[X[n]])^2$$

Pero como $E[X[n]] = 0$,

$$\text{var}(X[n]) = E[X[n]^2] = \sigma^2$$

Por lo tanto, se puede afirmar que

$$R_X[n, r] = \begin{cases} 0 & n \neq r \\ \sigma^2 & n = r \end{cases} \quad (6)$$

Si se introduce la variable $\tau = n - r$, la anterior ecuación se puede escribir como

$$R_X[\tau] = \sigma^2 \delta[\tau] \quad (7)$$

en donde la función $\delta[\tau]$ se define como

$$\delta[\tau] = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \text{d.l.c.} \end{cases} \quad (8)$$

Aquí es claro que cuando $\tau = 0$, se cumple que $n = r$ y cuando $\tau \neq 0$, se cumple que $n \neq r$. En la figura 2 se puede observar esta función de autocorrelación para un $\sigma^2 = 4$.

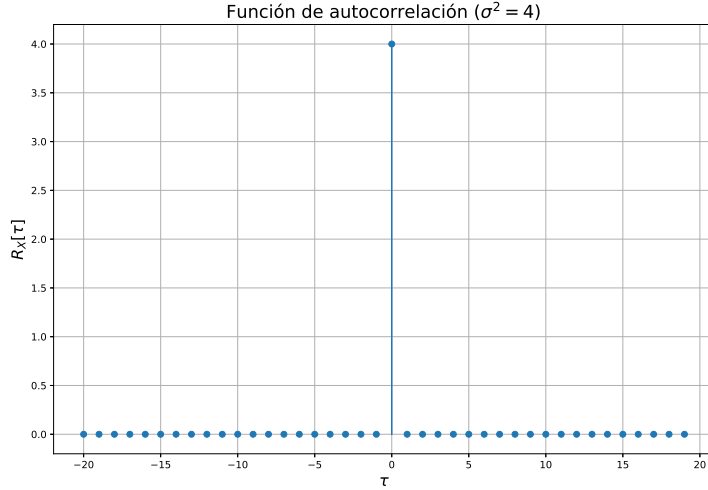


Figura 2: Función de autocorrelación $R_X[\tau]$

Se puede notar que esta función es igual a 0 para cualquier valor de $\tau \neq 0$. Esta función es solo un impulso de valor σ^2 en $\tau = 0$. Esta forma de la función $R_X[\tau]$ tiene sentido porque se sabe que $\text{cov}(X[n], X[r]) = 0$ (variables aleatorias no correlacionadas) y además se sabe que $X[n]$ y $X[r]$ son variables aleatorias independientes. Por lo tanto, se esperaría ver una correlación nula entre estas

variables para todo $n \neq r$, es decir, $\tau \neq 0$. Además, es claro que en $\tau = 0$ se tiene la correlación de una variable aleatoria consigo misma, lo que quiere decir que se está observando la varianza de dicha variable aleatoria. Como sabemos que $\text{var}(X[n]) = \sigma^2$, hace sentido que el único instante de tiempo donde se ve este valor de varianza es en $\tau = 0$, cuando $n = r$.

c)

Ahora se asume que el proceso estocástico $\{X[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de ruido blanco del enunciado b) es la entrada al filtro de media móvil del enunciado a). Eso quiere decir que la salida del filtro es un proceso estocástico también que ahora denotamos como $\{Y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Se procede a encontrar la media $\mu_Y[n]$ y la función de autocorrelación $R_Y[\tau]$ de este proceso estocástico.

Se sabe que si un proceso estocástico $X[n]$ con media $\mu_X[n]$ es la entrada a un filtro lineal e invariante en el tiempo, la media $\mu_Y[n]$ del proceso estocástico de salida $Y[n]$ va a estar dada por

$$\mu_Y[n] = \mu_X[n] * h[n] \quad (9)$$

La respuesta impulso del filtro FIR del enunciado a) está dada por la ecuación (2). Sin embargo, como sabemos que $\mu_X[n] = 0$, la convolución con cualquier señal será 0 también. Por lo tanto, ya se sabe que

$$\mu_Y[n] = 0 \quad (10)$$

Por otro lado, se sabe que la expresión para encontrar $R_Y[\tau]$ está dada por

$$R_Y[\tau] = R_X[\tau] * h[\tau] * h[-\tau] \quad (11)$$

Reemplazando el término conocido, sabemos que

$$R_Y[\tau] = \sigma^2 \delta[\tau] * h[\tau] * h[-\tau] \quad (12)$$

lo que es igual a

$$R_Y[\tau] = \sigma^2 (h[\tau] * h[-\tau]) \quad (13)$$

Para encontrar la convolución $\sigma^2 h[\tau] * h[-\tau]$, se sabe que tanto $h[\tau]$ como $h[-\tau]$ son pulsos discretos de longitud M . Por lo tanto, se sabe que convolucionar dos pulsos de la misma longitud (en este caso M) va a retornar un triángulo de longitud $2M+1$, cuya amplitud máxima va a estar dada por $\sigma^2(M+1)/M^2$. Una gráfica de esta función de autocorrelación se puede ver en el siguiente literal.

d)

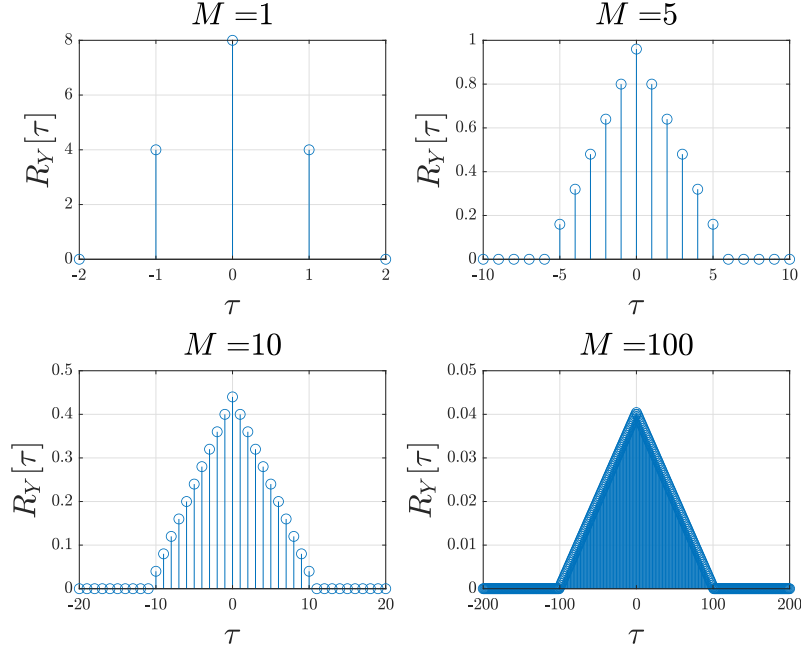


Figura 3: Gráficas de función de autocorrelación $R_Y[\tau]$ para valores de $M = [1, 5, 10, 100]$

En la figura 3 pueden observarse distintas funciones de autocorrelación $R_Y[\tau]$ variando el valor de M . Se observa en todas ellas que el pico del triángulo se encuentra en el valor esperado de $\sigma^2(M+1)/M^2$ y que abarcan un rango también esperado de $[-M, M]$. En este caso es evidente que esta señal se diferencia de la función de autocorrelación de la entrada. Esto se debe a que, al aplicar un filtro móvil, la salida del proceso toma en cuenta la entrada no solamente en el momento n sino en los M momentos anteriores. Es decir que la salida $Y[n]$ se encuentra correlacionada con la salida en $Y[n+1]$ debido a que los sumandos involucrados en su cálculo son bastante similares (diferenciándose solo 2 de ellos). Así pues, se puede decir que conocer el valor de la salida Y en un momento n nos puede aportar “información” de la salida en momentos anteriores y posteriores hasta una cota de $[n-M, n+M]$ puesto que estos son los límites del filtro promedio. Esta “información” (correlación) baja a medida que se aumenta la diferencia τ debido a que cada vez se comparten menos sumandos.

e)

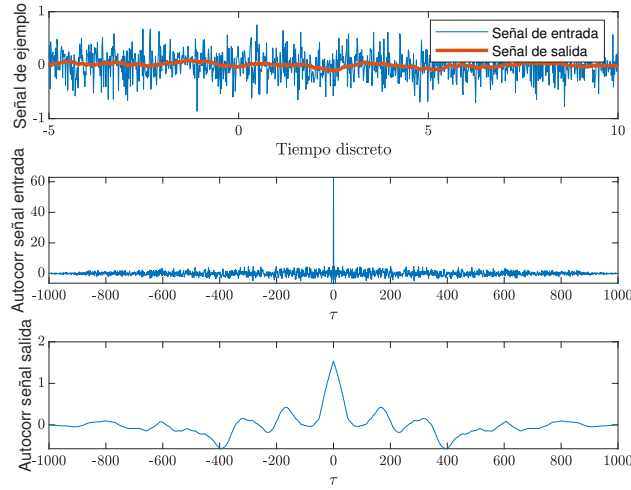


Figura 4: Gráficas de señal de entrada ($\{X[n]\}$), señal de salida ($\{Y[n]\}$) y estimación de la función de autocorrelación de la salida ($R_Y[\tau]$) para $P = 1$ repeticiones del proceso estocástico de filtrado.

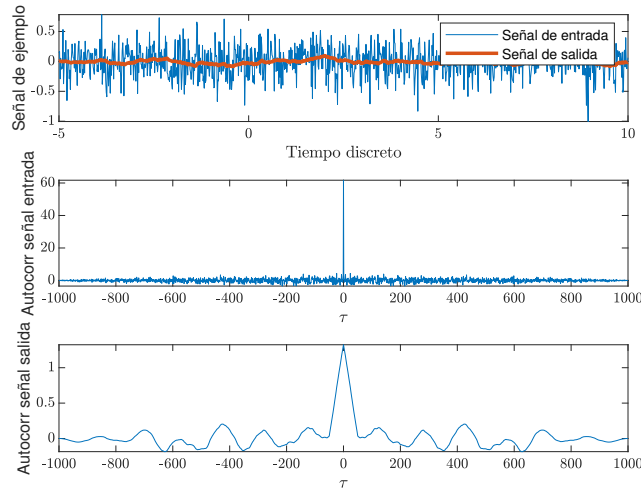


Figura 5: Gráficas de señal de entrada ($\{X[n]\}$), señal de salida ($\{Y[n]\}$) y estimación de la función de autocorrelación de la salida ($R_Y[\tau]$) para $P = 2$ repeticiones del proceso estocástico de filtrado.

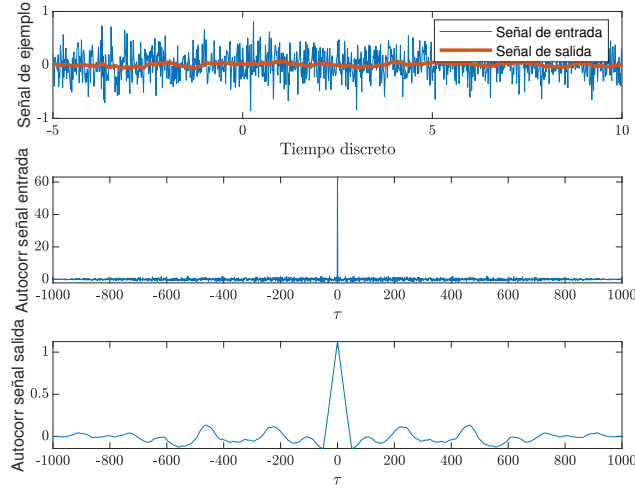


Figura 6: Gráficas de señal de entrada ($\{X[n]\}$), señal de salida ($\{Y[n]\}$) y estimación de la función de autocorrelación de la salida ($R_Y[\tau]$) para $P = 5$ repeticiones del proceso estocástico de filtrado.

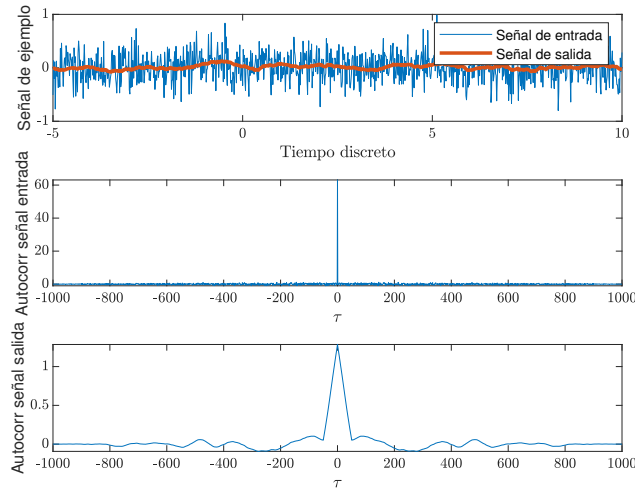


Figura 7: Gráficas de señal de entrada ($\{X[n]\}$), señal de salida ($\{Y[n]\}$) y estimación de la función de autocorrelación de la salida ($R_Y[\tau]$) para $P = 20$ repeticiones del proceso estocástico de filtrado.

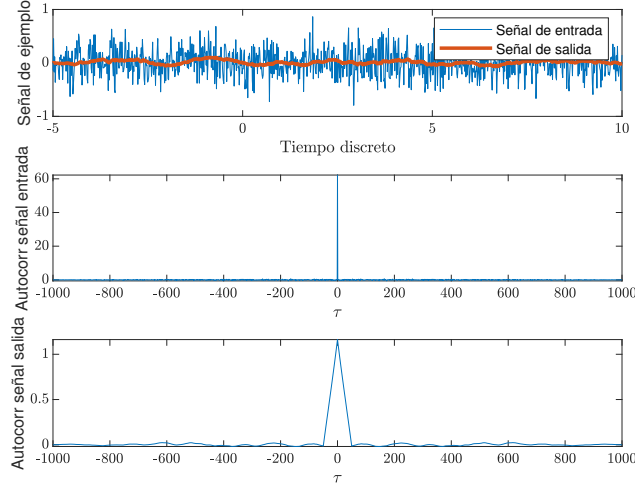


Figura 8: Gráficas de señal de entrada ($\{X[n]\}$), señal de salida ($\{Y[n]\}$) y estimación de la función de autocorrelación de la salida ($R_Y[\tau]$) para $P = 100$ repeticiones del proceso estocástico de filtrado.

Teniendo en cuenta los resultados presentados se evidencia que al incrementar las repeticiones P del proceso estocástico de filtrado se converge a la función triangular esperada. Lo anterior, es lo esperado debido a que se está trabajando con procesos estocásticos.

En la 8 se evidencia lo anterior para 100 repeticiones. Luego, al comparar con el literal **c)**, donde se define la longitud y amplitud máxima del triángulo, para $M = 50$ se tiene una longitud de 101 y una amplitud de $\frac{\sigma^2(51)}{50^2}$, sin embargo en nuestro caso se tiene una altura igual a uno, lo cual se debe a los intervalos de tiempo utilizados y a la falta de normalización de la función con respecto a la frecuencia de muestreo.

Además, cabe resaltar que la función de autocorrelación de la señal de entrada se asemeja cada vez más a un impulso.