**Caso de Estudio 5**
**IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II**
**Profesor: Luis Felipe Giraldo**

---

Si algún enunciado de un ejercicio no tiene intento de solución, el ejercicio completo tendrá una nota de 0.0 así otros enunciados hayan sido resueltos correctamente en ese ejercicio.

1. (10 puntos) Un vector aleatorio $Y = [Y_1, Y_2]^T$ tiene matriz de covarianza

$$C_Y = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

   **Utilizando el concepto de raíz de una matriz**, encuentra la matriz $A$ tal que el vector aleatorio $X = AY$ tiene matriz de covarianza

$$C_X = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. (15 puntos) Las matrices $A$, $B$, y $D$ se definen como:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine cuáles de las matrices A, B, y D pueden ser matrices de covarianza válidas para algún vector aleatorio $X$.

   (b) Asumiendo que $B$ puede ser una matriz de covarianza de un vector aleatorio $X = [X_1, X_2]^T$, encuentre el coeficiente de correlación entre $X_1$ y $X_2$, asumiendo que sus valores esperados son cero.

   (c) Para cada uno de los casos donde la matriz puede ser una matriz de covarianza de un vector aleatorio $X$, encuentre la función de densidad de probabilidad marginal de cada una de las variables del vector $X$, asumiendo que los vectores de medias son cero y que estas variables forman vectores aleatorios Gaussianos conjuntos.

3. (20 puntos) Considere el vector $x = [x_1, x_2]^T$. Sea $q(x) = 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2$, y sea $g(x) = R\exp(-q(x))$, donde $R$ es una constante. Asuma que $x = [x_1, x_2]^T$ es la observación de un vector aleatorio $X = [X_1, X_2]^T$. Determine el valor de $R$ para que $g(x)$ sea la PDF del vector aleatorio $X$. Identifique el vector de valores esperados y la matriz de covarianza de $X$.

4. (25 puntos) Considere la siguiente función de densidad de probabilidad con parámetro $-1 < \rho < 1$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

   para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Algebraicamente, muestre que $f_{X,Y}(x,y)$ se puede escribir como la función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio Gaussiano $Z = [X, Y]^T$. Es decir, escriba $f_{X,Y}(x,y)$ de la forma:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\det(C_Z)}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)^T C_Z^{-1}(z-\mu)\right).$$

   Encuentre el vector de medias $\mu$ y la matriz de covarianza $C_Z$ en términos de $\rho$. No puede partir del hecho de que $\rho$ es la covarianza entre $X$ y $Y$.

b) Muestre que $\rho = \operatorname{cov}(X, Y)$. Utilice $C_Z$ encontrado en el nunciado anterior para esto.

c) Encuentre los valores y vectores propios de $C_Z$ en términos de $\rho$. Conecte este resultado con los resultados del punto 2 del caso de estudio 5.

d) Encuentre la función de densidad de probabilidad marginal tanto de $X$ como de $Y$.

5. (30 puntos) Experimento en Matlab.

   a) Genere $5000$ vectores 2-dimensionales con media 0 y covarianza $I_2$ (matriz identidad de $2 \times 2$). Grafique los puntos en el plano (ud debería ver que los puntos indican un PDF circular).

   b) Se desea transformar $X$ en un vector aleatorio Gaussiano $Y = AX + b$ tal que

   $$Y \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

   Encuentre el vector $b$ y la matriz $A$ para hacer esto. Utilice el concepto de raiz cuadrada de una matriz obtenida a partir de la factorización usando valores y vectores propios.

   c) Genere $5000$ muestras de $Y$ a partir de las muestras de $X$, utilizando $A$ y $b$ (en un plano). No puede utilizar una función predefinida para generar estos puntos. Sólo a partir de las observaciones de $X$. Grafique estas nuevas muestras. ¿Esta gráfica tiene sentido?

   d) Encuentre teóricamente el PDF de la primera coordenada de $Y$ y el PDF de la segunda coordenada de $Y$ (llámelas $Y_1$ y $Y_2$). Grafique el histograma de $Y_1$ y $Y_2$ utilizando las 5000 muestras del enunciado anterior, y traslápelo con la gráfica de las PDF verdaderas correspondientes (es decir, las PDFs calculadas teóricamente).