Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 1
Procesos Estocásticos - IELE 4010

21-08-2021

1. Punto 1

Se considera el experimento aleatorio de lanzar un dado no cargado. De acuerdo con el resultado obtenido en el dado, una de seis monedas es seleccionada (la moneda seleccionada es aquella cuyo número corresponde al número obtenido por el lanzamiento del dado). Se procede entonces a lanzar dicha moneda.

1.1. a)

A continuación se encuentra el espacio de probabilidad del experimento.

Espacio de posibles resultados:

$$\mathbf{\Omega = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, S), (2, S), (3, S), (4, S), (5, S), (6, S)\}}$$

Conjunto de eventos:

$$\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\mathcal{P}$ hace referencia al power set del espacio de posibles resultados Ω, en este se incluyen todas las posibles combinaciones de los elementos presentes en Ω, que en total son 2^{12} combinaciones, es decir 4096 posibles resultados.

Composiciones de las probabilidades mostradas a continuación bajo la regla $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dan toda la ley de probabilidad.

$$P(1, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2^2} = \frac{1}{24}$$
$$P(1, S) = \frac{1}{6} * (1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{24}$$
$$P(2, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{3^2} = \frac{1}{54}$$
$$P(2, S) = \frac{1}{6} * (1 - \frac{1}{3^2}) = \frac{8}{54}$$

$$P(3, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{4^2}, P(3, S) = \frac{1}{6} * \frac{15}{4^2}$$
$$P(4, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{5^2}, P(4, S) = \frac{1}{6} * \frac{24}{5^2}$$
$$P(5, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6^2}, P(5, S) = \frac{1}{6} * \frac{35}{6^2}$$
$$P(6, C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{7^2}, P(6, S) = \frac{1}{6} * \frac{48}{49}$$

1.2. b)

Se usa el teorema de probabilidad total, la notación a usar será: $\mathbf{P(D_i)}$ que indica la probabilidad de obtener el número i en el dado y $\mathbf{P(S|D_i)}$ que indica la probabilidad de que caiga la moneda en sello dado que el número i salió en el dado. Los cálculos se realizan como se muestra a continuación:

$$\mathbf{P(S)} = \sum_{i=1}^{6} P(D_i)P(S|D_i) = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(S|D_i)$$

Teniendo en cuenta la probabilidad de que caiga la moneda en sello, dada la probabilidad de que caiga en cara, $\mathbf{P_i}(C) = \frac{1}{(i+1)^2}$ y $\mathbf{P_i}(S) = 1 - P_i(C)$, se puede deducir:

$$\mathbf{P(S)} = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(1 - P(C|D_i)) = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(1 - \tfrac{1}{(i+1)^2})$$

$$\mathbf{P(S)} = \tfrac{1}{6}(\tfrac{3}{4} + \tfrac{8}{9} + \tfrac{15}{16} + \tfrac{24}{25} + \tfrac{35}{36} + \tfrac{48}{49}) \approx 0{,}9147$$

1.3. c)

Se define la probabilidad del evento descrito como se muestra a continuación:

$$\mathbf{P(U_{i=1}^{2} D_{i\leq 2} \cap C)} = \mathbf{P(D_1 \cap C)} \cup \mathbf{P(D_2 \cap C)}$$

Se conoce que son eventos independientes, entonces se realizan los siguientes cálculos:

$$\mathbf{P(U_{i=1}^{2} D_{i\leq 2} \cap C)} = P(D_1 \cap C) + P(D_2 \cap C)$$

$$\mathbf{P(U_{i=1}^{2} D_{i\leq 2} \cap C)} = (P(D_1)P(D_1|C)) + (P(D_2)P(D_2|C))$$

$$\mathbf{P(U_{i=1}^{2} D_{i\leq 2} \cap C)} = \frac{1}{6}[P(C|D_1) + P(C|D_2)] = \frac{1}{6}[\frac{1}{4} + \frac{1}{9}]$$

Para así finalmente obtener:

$$\mathbf{P(U_{i=1}^{2} D_{i\leq 2} \cap C)} = 0{,}0602$$

2. Punto 2

Sean E_1 y E_2 dos eventos y $P(E_1) = \frac{1}{4}$. A continuación se evalúa $P(E_2)$ para diferentes casos:

2.1. a) $E_2 = E_1^C$

Sabiendo que $P(E_1) = \frac{1}{4}$ y que $P(E_2) = P(E_1^C) = 1 - P(E_1)$, se obtiene que

$$P(E_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2.2. b) E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos y $P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2}$

Se sabe que por propiedades de la ley de probabilidad,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Sin embargo, debido a que E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos, se tiene que

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

y por lo tanto

$$P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) - P(E_1)$$

$$P(E_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

2.3. c) E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos e independientes

Se sabe que como E_1 y E_2 son independientes, se cumple que

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

y además, como son mutuamente exclusivos, se cumple que

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

Esto quiere decir que

$$P(E_1)P(E_2) = 0$$

y como se sabe que $P(E_1) = \frac{1}{4}$, lo único posible para que se cumpla la igualdad es que

$$P(E_2) = 0$$

2.4. d) E_1 y E_2 son independientes y $P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2}$

Por ser eventos independientes, se sabe que

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

Además, por ley de probabilidad se sabe que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Reemplazando el término $P(E_1 \cap E_2)$ se obtiene

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2)$$

Se procede a despejar el término $P(E_2)$ de la anterior ecuación como sigue:

$$P(E_1 \cup E_2) - P(E_1) - P(E_2) = -P(E_1)P(E_2)$$

$$P(E_2) = -\frac{P(E_1 \cup E_2)}{P(E_1)} + 1 + \frac{P(E_2)}{P(E_1)}$$

$$P(E_2) - \frac{P(E_2)}{P(E_1)} = 1 - \frac{P(E_1 \cup E_2)}{P(E_1)}$$
$$P(E_2)\left(1 - \frac{1}{P(E_1)}\right) = 1 - \frac{P(E_1 \cup E_2)}{P(E_1)}$$
$$P(E_2) = \frac{\left(1 - \frac{P(E_1 \cup E_2)}{P(E_1)}\right)}{1 - \frac{1}{P(E_1)}}$$

Finalmente,

$$P(E_2) = \frac{1 - \frac{1/2}{1/4}}{1 - \frac{1}{1/4}} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

2.5. e) $P(E_1|E_2) = \frac{1}{2}$ y $P(E_2|E_1) = \frac{3}{4}$

Se sabe que $P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{2}$ y que $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{3}{4}$. Esto implica que

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{P(E_2)}{2}$$

y que

$$P(E_2 \cap E_1) = \frac{3P(E_1)}{4}$$

Ahora, debido a que $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_1)$, se igualan las dos anteriores ecuaciones, así obteniendo

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_1)$$
$$\frac{P(E_2)}{2} = \frac{3P(E_1)}{4}$$
$$P(E_2) = \frac{6P(E_1)}{4}$$
$$P(E_2) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

3. Punto 3

Los resultados de los experimentos requeridos pueden ser observados en los Cuadros 1-5 para los valores de $N = [10^1, 10^2, 10^3, 10^6, 10^8]$ respectivamente. Primero que nada, tomando en cuenta las probabilidades teóricas de los eventos:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0{,}4 \\
P(B) &= 0{,}3 \\
P(A \cup B) &= 0{,}5 \\
P(A \cap B) &= 0{,}2 \\
P(A|B) &= 0{,}666 \\
P(B|A) &= 0{,}5
\end{aligned}$$

Es claro que un incremento del valor de N conlleva a aproximarse más al valor esperado de estas frecuencias de observación. Esto se debe a una disminución de la varianza de la frecuencia de ocurrencia como variable aleatoria sucedida al dividir entre el numero total de experimentos. Así pues, los valores de los experimentos difieren significativamente con respecto a los teóricos en las iteraciones con 10 y 100 repeticiones pero son correctos con 4 cifras significativas para repeticiones grandes como $N = 10^8$. Un efecto también notorio de la disminución de la varianza es la atenuación de las diferencias entre experimentos para un mismo valor de N. Esto se traduce en un aumento de la reproducibilidad de los experimentos.

Cuadro 1: Resultados de 3 experimentos usando $N = 10^1$

$N = 10^1$	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\|B$	$B\|A$
Intento 1	0.4000	0.2000	0.5000	0.1000	0.5000	0.2500
Intento 2	0.5000	0.5000	0.6000	0.4000	0.8000	0.8000
Intento 3	0.3000	0.3000	0.4000	0.2000	0.6667	0.6667

Cuadro 2: Resultados de 3 experimentos usando $N = 10^2$

$N = 10^2$	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\|B$	$B\|A$
Intento 1	0.3500	0.2600	0.4300	0.1800	0.6923	0.5143
Intento 2	0.3300	0.3100	0.4100	0.2300	0.7419	0.6970
Intento 3	0.3300	0.2900	0.4500	0.1700	0.5862	0.5152

Cuadro 3: Resultados de 3 experimentos usando $N = 10^3$

$N = 10^3$	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\|B$	$B\|A$
Intento 1	0.3990	0.3140	0.5030	0.2100	0.6688	0.5263
Intento 2	0.4030	0.2940	0.4930	0.2040	0.6939	0.5062
Intento 3	0.4080	0.3070	0.5090	0.2060	0.6710	0.5049

Cuadro 4: Resultados de 3 experimentos usando $N = 10^6$

$N = 10^6$	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\|B$	$B\|A$
Intento 1	0.3996	0.3001	0.5000	0.1997	0.6654	0.4997
Intento 2	0.3996	0.3000	0.4993	0.2003	0.6675	0.5012
Intento 3	0.4004	0.3005	0.5007	0.2001	0.6660	0.4999

Cuadro 5: Resultados de 3 experimentos usando $N = 10^8$

$N = 10^8$	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\|B$	$B\|A$
Intento 1	0.4000	0.3000	0.5000	0.2000	0.6666	0.4999
Intento 2	0.4000	0.3000	0.5000	0.2000	0.6667	0.5001
Intento 3	0.3999	0.3000	0.4999	0.1999	0.6666	0.5000