Isabella Salgado *201730418*
Johan Hernández *201729696*
Juan Pablo Naranjo *201730006*

Tarea 1

1. *a)* Se tiene el conjunto

$$U_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = 2t, x_2 = -t, x_3 = 5t, t \in \mathbb{R}\right\}$$

A continuación se demuestra que dicho conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, empezando con reescribir todos los elementos x del subconjunto U_1 como

$$x = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 5t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Se puede notar a simple vista que la anterior ecuación describe una recta en $\mathbb{R}^3$, pues está expresada de la forma:

$$\left\{\vec{OP} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \tag{2}$$

Comparando las ecuaciones 1 y 2, se puede notar que en este caso, el vector $\vec{OP}$ sería igual al vector $\vec{0}$, y el vector $\vec{v}$ sería igual al vector $[2, -1, 5]^T$, que describe la dirección de la recta.
Se procede a probar que U_1 cumple con las condiciones necesarias para ser considerado un subespacio vectorial. Sean $\vec{x} = [2t_1, -t_1, 5t_1]^T$ y $\vec{y} = [2t_2, -t_2, 5t_2]^T$ con t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. La suma

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2(t_1 + t_2) \\ -1(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \end{bmatrix} \in U_1 \tag{3}$$

puesto que la suma de t_1 y t_2 también es un número real. Ahora se considera

$$\alpha\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha(2t_1) \\ \alpha(-t_1) \\ \alpha(5t_1) \end{bmatrix} \tag{4}$$

de donde se puede notar que al multiplicar un número real α por otro número real se obtiene un múltiplo del último número real. Por lo tanto, se puede afirmar que los elementos del subespacio U_1 cumplen con la propiedad de que el resultado de la multiplicación por escalar a un elemento del subespacio retorna otro elemento del subespacio.
Finalmente, se demuestra que el vector $\vec{0}$ hace parte del subespacio:

$$x = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 5t \end{bmatrix} \tag{5}$$

Si se toma $t = 0$, se obtiene el vector $\vec{0}$, probando así que dicho vector pertenece al subespacio U_1. Como cumple las condiciones de ser cerrado bajo suma, de multiplicación por escalar y la presencia del vector $\vec{0}$, se puede afirmar que U_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
La base de este subespacio vectorial es

$$\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$

pues este es el vector director de la recta en $\mathbb{R}^3$ que el subespacio U_1 genera, por lo que cualquier múltiplo del mismo también hará parte del subespacio.

b) Ahora se lleva a cabo el mismo procedimiento, pero con el conjunto:

$$U_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = 2t^2, x_2 = -t, x_3 = 5t, t \in \mathbb{R}\right\}$$

A continuación se demuestra que dicho conjunto **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, empezando con reescribir todos los elementos x del subconjunto U_1 como

$$x = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ -t \\ 5t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2t \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

de donde se hace aún más clara la presencia de un elemento no lineal. Sean $\vec{x} = [2t_1^2, -t_1, 5t_1]^T$ y $\vec{y} = [2t_2^2, -t_2, 5t_2]^T$ con t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. La suma

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2(t_1^2 + t_2^2) \\ -1(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \end{bmatrix} \notin U_2 \tag{7}$$

puesto que $t_1^2 + t_2^2 \neq (t_1 + t_2)^2$, que es la condición que debería cumplirse para que el subespacio fuera cerrado bajo suma. Como no es así, no se cumple con esta propiedad, y por lo tanto se puede afirmar que el conjunto U_2 no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. *a*) Tomando la base $e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$, se demuestra que las funciones de esta base son ortogonales.

$$\langle e^{j\frac{2\pi}{T}k_1 t}, e^{j\frac{2\pi}{T}k_2 t}\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{2\pi}{T}k_1 t} e^{-j\frac{2\pi}{T}k_2 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{2\pi}{T}(k_1 - k_2)t} dt$$

$$\langle e^{j\frac{2\pi}{T}k_1 t}, e^{j\frac{2\pi}{T}k_2 t}\rangle = \left.\frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(k_1 - k_2)t}}{j\frac{2\pi}{T}(k_1 - k_2)}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{j\pi(k_1 - k_2)} - e^{-j\pi(k_1 - k_2)}}{j\frac{2\pi}{T}(k_1 - k_2)}$$

$$\langle e^{j\frac{2\pi}{T}k_1 t}, e^{j\frac{2\pi}{T}k_2 t}\rangle = \frac{\sin(\pi(k_1 - k_2))}{\frac{\pi}{T}(k_1 - k_2)}$$

La anterior expresión es igual a cero cuando $k_1 \neq k_2$, lo que indica que el producto punto entre dos funciones cuando k es diferente es equivalente a cero. Por lo tanto, estas funciones son ortogonales.

b) Los coeficientes de la serie de Fourier de la señal se calculan de la siguiente manera:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{2}kt} dt = \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x(t) e^{-j\pi kt} dt$$

$$a_k = -\frac{1}{2}\left.\frac{e^{-j\pi kt}}{j\pi k}\right|_{-0,5}^{0,5} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}kt} - e^{-j\frac{\pi}{2}kt}}{j2\pi k} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k}$$

a_0 se calcula como el área de la función sobre el periodo.

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ impar} \end{cases}$$

c) (I) Para calcular el valor de potencia de la señal

$$\frac{1}{T}||x||^2 \tag{8}$$

Es necesario recordar que la norma de una señal, para las series de Fourier en tiempo continuo, está definida de la siguiente forma:

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \tag{9}$$

Por lo tanto, si se reemplaza la definición de la norma de un vector, ecuación 9, en la ecuación 8, obtenemos:

$$\frac{1}{T}\left(\sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}\right)^2 = \frac{1}{T}\int_a^b |x(t)|^2 dt$$

Dado que la señal tiene un valor de 1 para $t = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y 0 para cualquier otro valor de t, es posible definir los límites de la integral como $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, cabe aclarar que esto no modifica el periodo de la función, el cual sigue es 2. Por lo anterior, podemos obtener la potencia de la señal:

$$\frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} |1|^2 dt = \frac{1}{2}\cdot t\Big|_{-0,5}^{0,5} = \frac{1}{2}(0,5 - (-0,5)) = \frac{1}{2}$$

(II) El valor mínimo de N para obtener al menos 97 % de la potencia de la señal se define a continuación.

$$\sum_{k=-N}^{k=N} |a_k|^2 \geq 0,97\frac{1}{T}||x||^2 = 0,485$$

$$2\sum_{k=1}^{k=N} |a_k|^2 + |a_0|^2 \geq 0,485$$

$$2\sum_{k=1}^{k=N}\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{k\pi}\right|^2 + \frac{1}{4} \geq 0,485$$

La anterior desigualdad se cumple cuando $N = 7$:

$$2\sum_{k=1}^{k=7}\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{k\pi}\right|^2 + \frac{1}{4} \geq 0,485$$

$$0,487 \geq 0,485$$

(III) Como se demostró en el literal anterior, el valor mínimo de N tal que $\sum_{k=-N}^{k=N} |a_k|^2$ contenga el 97 % de la potencia de la señal es $N = 7$. Dado que el límite M de la sumatoria de la ecuación 10 debe ser un número entero, se utilizó la función *round* de *Matlab* para los valores de M solicitados.

$$S_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \tag{10}$$

- $M = 0$

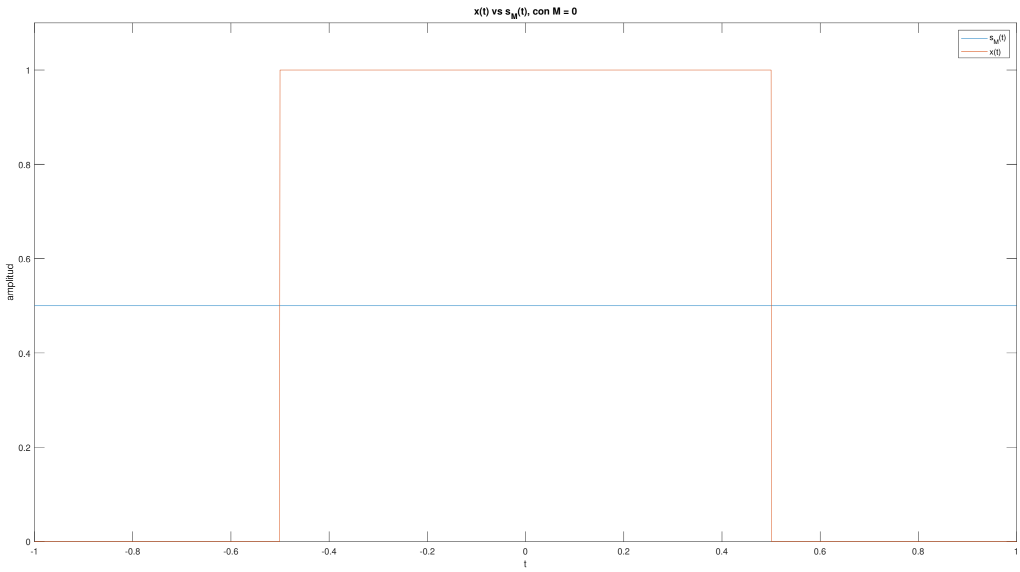

Figura 1: x(t) vs s$_M$(t) con M = 0

- $M = 1$

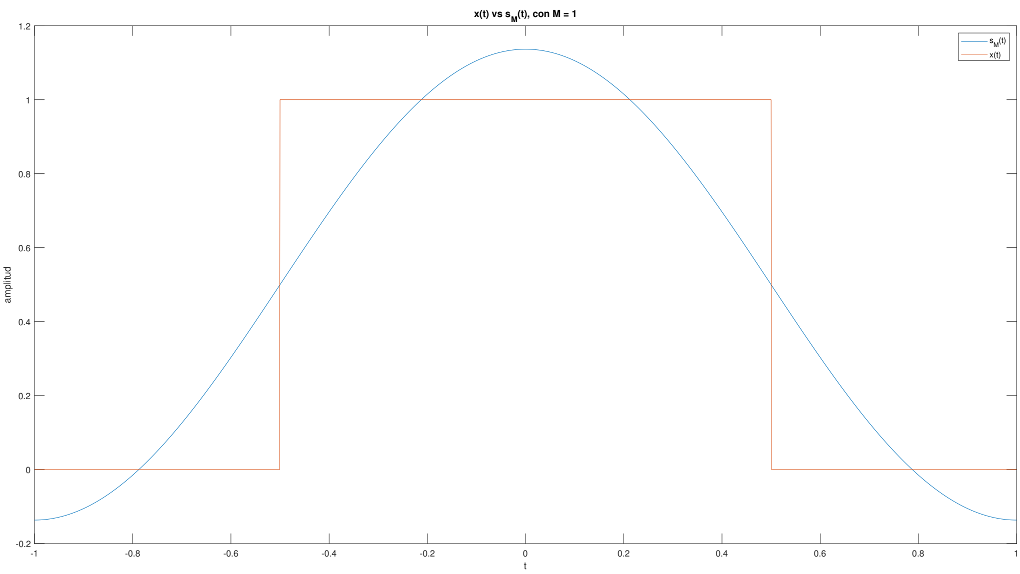

Figura 2: x(t) vs s$_M$(t) con M = 1

- $M = \frac{N}{4} = 2$

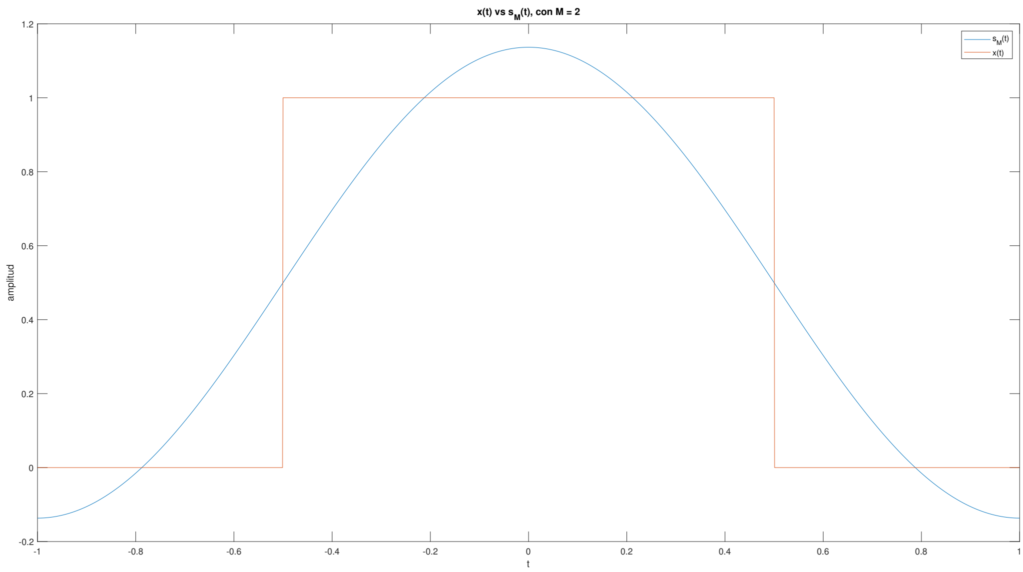

Figura 3: x(t) vs s_M(t) con M = 2

- $M = \frac{N}{2} = 4$

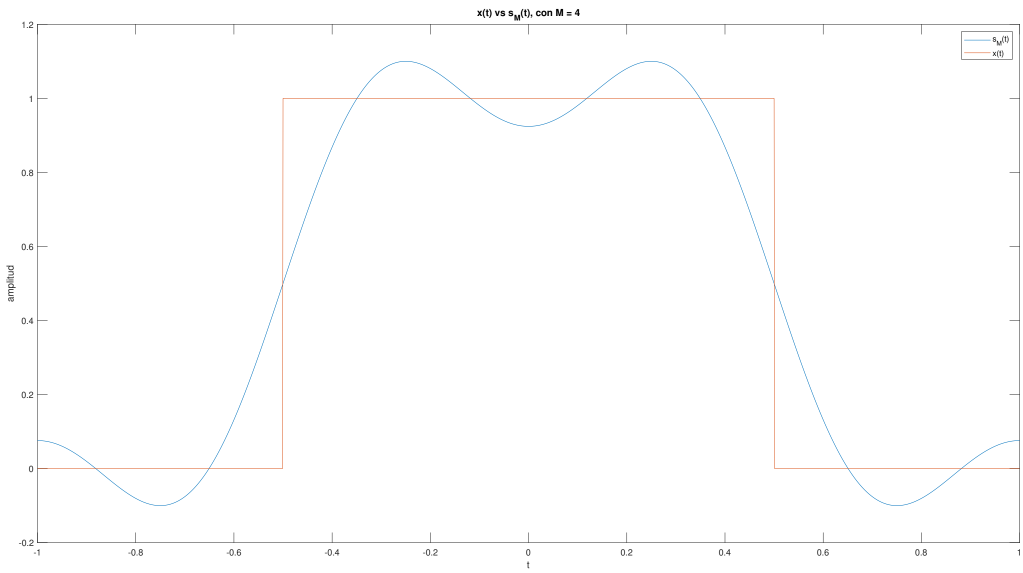

Figura 4: x(t) vs s_M(t) con M = 4

- $M = \frac{3N}{4} = 5$

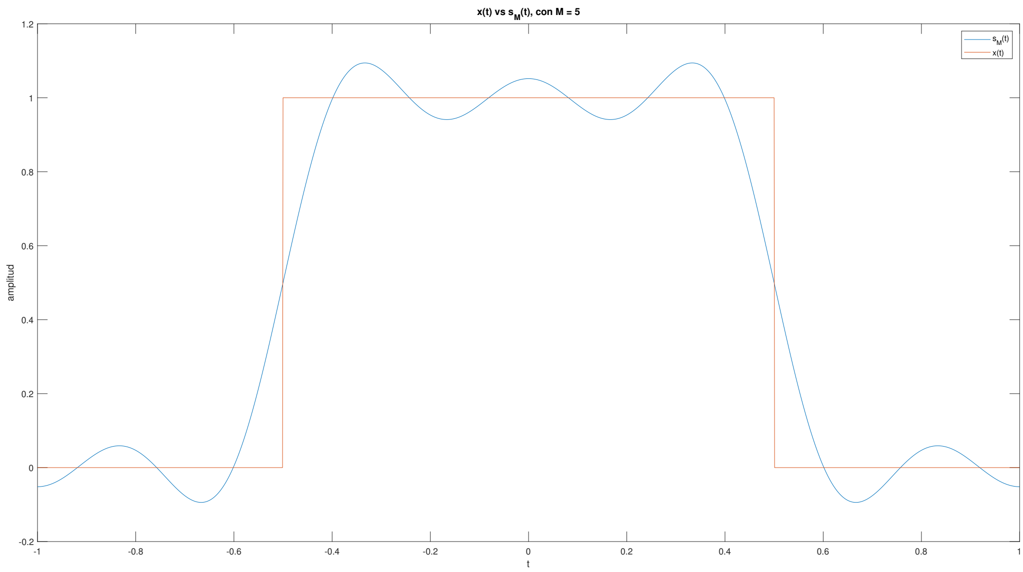

Figura 5: x(t) vs s_M(t) con M = 5

- $M = N = 7$

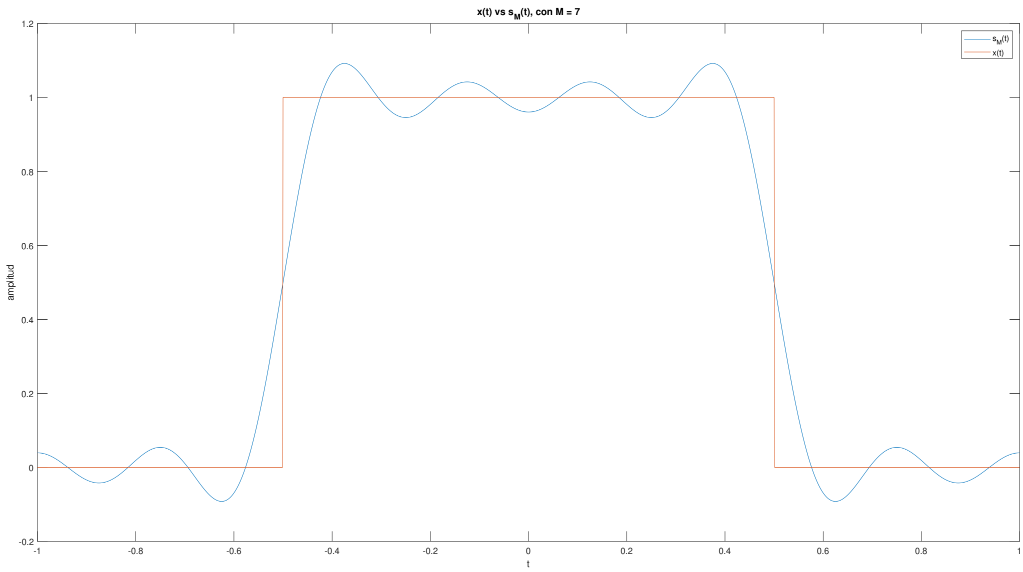

Figura 6: x(t) vs s_M(t) con M = 7

(IV) En este punto se pide graficar $||x - s_M||_2^2$ vs M, para los mismos valores de M solicitados en el literal anterior, esta gráfica puede observarse en la figura 7, cabe aclarar que cada valor obtenido fue ponderado entre el número total de datos del vector con el fin de poder obtener una mejor escala de los resultados.

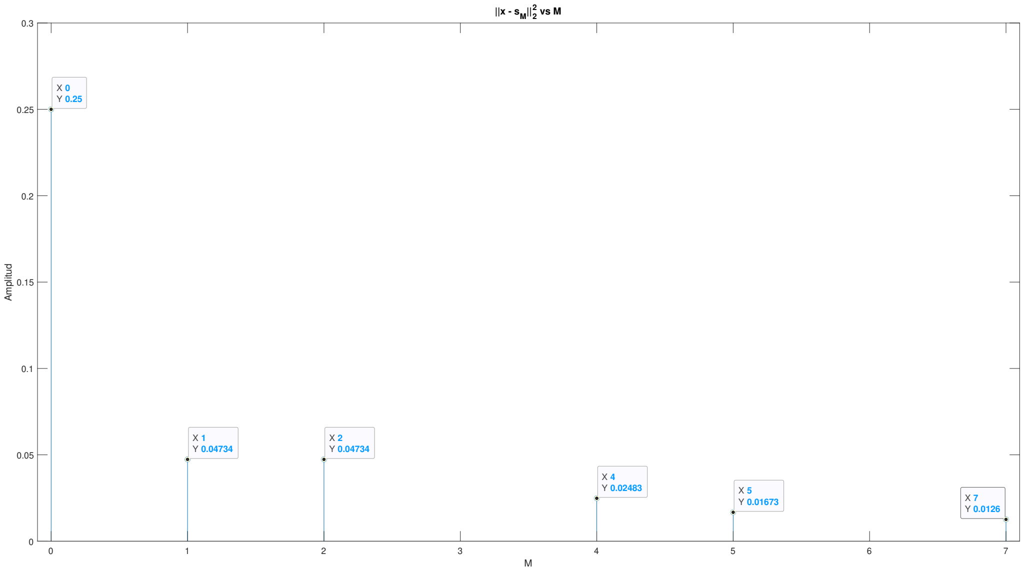

Figura 7: $||x - s_M||_2^2$ vs M

Analizando la figura 7 es fácil notar que a medida que el valor de M aumenta el error obtenido entre las dos funciones disminuye. Algo interesante es que el valor del error para $M = 1$ y $M = 2$ es el mismo, esto cuadra perfectamente con la teoría dado que los M pares no tienen ninguna incidencia en la información de la señal, recordando que para cualquier k par su a_k correspondiente es cero, por este motivo los valores de la figura 7 solo disminuyen después de que M aumenta un número impar de veces.
Otro aspecto importante a tener en cuenta es que el cambio más grande ocurre cuando se pasa de $M = 0$ a $M = 1$, esto puede explicarse observando las figuras 1 y 2, en el primer caso la aproximación obtenida es una señal continua en 0,5 que nunca *toca* la señal original, por otro lado, con $M = 1$ se puede observar que la función aproximada es más parecida a la función original e inclusive se llegan a *tocar* en ciertos puntos lo que resulta que exista un error de valor cero en dichos puntos.