Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 10
Procesos Estocásticos - IELE 4010

22-11-2021

Punto 1

Se considera el siguiente proceso estocástico conocido como ruido blanco en tiempo discreto $\forall n, r \in \mathbb{N}$:

$$\{X[n]\}_{n=0}^{\infty} \tag{1}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} E[X[n]] &= 0 \\ \mathrm{var}(X[n]) &= \sigma^2 \\ \mathrm{cov}(X[n], X[r]) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Este proceso estocástico es muy utilizado para modelar incertidumbre en mediciones. Se asume también que $X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \in \mathbb{N}$.

a)

Se sabe que la caracterización de segundo orden de un proceso estocástico en tiempo discreto está completamente definida por su **media** $\mu_X[n]$ y su **función de autocorrelación** $R_X[n, r]$. Se procede a encontrar cada uno de estos componentes.

Para hallar la media, se sabe que

$$\mu_X[n] = E[X[n]]$$

y por definición, sabemos que

$$E[X[n]] = 0$$

por lo tanto,

$$\mu_X[n] = 0 \tag{3}$$

Para hallar la función de autocorrelación, se sabe que, por definición, esta está dada por

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[r]]$$

Como sabemos que las variables aleatorias $X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \in \mathbb{N}$, entonces

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[r]] = E[X[n]]E[X[r]]$$

Como ya vimos que $E[X[n]] = 0$, lo que además también implica que $E[X[r]] = 0$,

$$R_X[n, r] = 0$$

para todo $n \neq r$. Sin embargo, cuando $n = r$ se tiene que

$$R_X[n, r] = E[X[n]X[n]] = E[X[n]^2]$$

Ahora se encuentra el valor de $E[X[n]^2]$. Sabemos que la varianza de $X[n]$ está dada por

$$\mathrm{var}(X[n]) = E[X[n]^2] - (E[X[n]])^2$$

Pero como $E[X[n]] = 0$,

$$\mathrm{var}(X[n]) = E[X[n]^2] = \sigma^2$$

Por lo tanto, se puede afirmar que

$$R_X[n, r] = \begin{cases} 0 & n \neq r \\ \sigma^2 & n = r \end{cases} \tag{4}$$

b)

Asumiendo que $X[n]$ es una variable aleatoria continua que sigue una distribución Gaussiana, se define el vector $Z_{n,r} = [X[n], X[r]]^\intercal$. Se procede a encontrar la PDF del vector aleatorio $Z_{n,r}$, sabiendo que es un vector aleatorio Gaussiano conjunto.

Teniendo lo anterior en cuenta, la PDF del vector aleatorio $Z_{n,r}$ está dada por

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(C_Z)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu_Z)^\intercal C_Z^{-1}(z - \mu_Z)\right)$$

donde

$$\mu_Z = \begin{bmatrix} \mu_X[n] \\ \mu_X[r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X[n]] \\ E[X[r]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathrm{cov}(X[n], X[r]) \\ \mathrm{cov}(X[n], X[r]) & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

c)

Se simuló una realización del proceso estocástico $\{X[n]\}$ para valores de n desde 0 hasta 1000, asumiendo que $\sigma^2 = 4$ y que $X[n]$ es Gaussiana para todo n. En la figura 1 se puede observar el resultado.

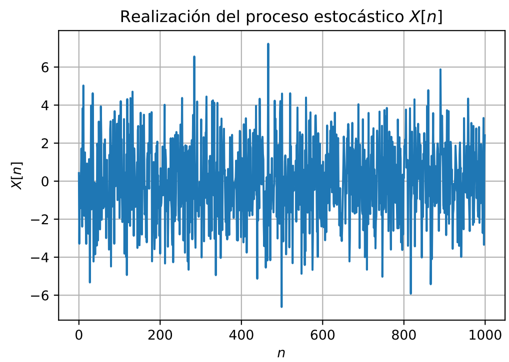

Figura 1: Realización del proceso estocástico $X[n]$

Se puede notar que el proceso estocástico está centrado alrededor de 0, tal como lo indica su media, y para cada n en el eje de tiempo, el valor de la realización varía en valores alrededor del 4 indicado por su varianza.

d)

Ahora se calculó el contenido frecuencial de esta realización del proceso estocástico con ayuda de la transformada de Fourier. Al aplicar dicha transformada sobre la realización del proceso estocástico mostrada en el literal anterior, se obtuvo el resultado mostrado en la figura 2, en donde se muestra la magnitud de la transformada de Fourier del proceso estocástico graficada contra la frecuencia.

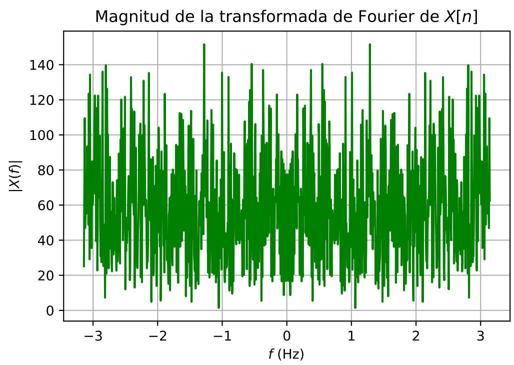

Figura 2: Magnitud de la transformada de Fourier de la realización del proceso estocástico $X[n]$

e)

Ahora se generaron otras 9,999 realizaciones del proceso estocástico para la misma media y varianza. Junto con la realización mostrada dos literales atrás, se tuvo un total de 10,000 realizaciones. A cada una de estas realizaciones se le encontró su respectiva magnitud de la transformada de Fourier. Se procedió a realizar un promedio de cada una de estas magnitudes para cada valor en el eje de frecuencia. El resultado de este promedio de las 10,000 magnitudes de la transformada de Fourier se puede observar en la figura 3.

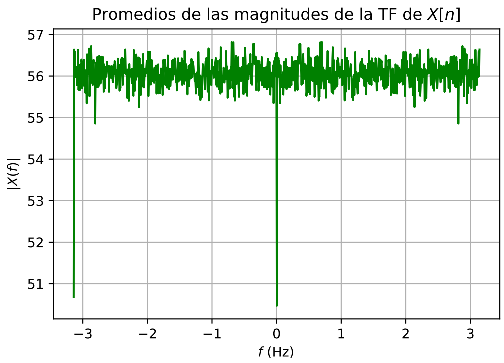

Figura 3: Magnitud de la transformada de Fourier del promedio de las 10,000 realizaciones del proceso estocástico $X[n]$

Se puede notar que el contenido frecuencial de esta señal muestra que no hay una prevalencia de unas frecuencias sobre otras, sino que es una señal cuyo contenido frecuencial abarca todas las frecuencias. Por esta razón se denomina ruido **blanco**, pues la señal contiene todas las frecuencias del espectro.

Punto 2

Se pretende modelar el proceso de escritura de un artículo de investigación por parte de un estudiante de posgrado.

a)

En este inciso se plantea la matriz de transición M del proceso y se grafica el diagrama de estados en la Figura 4.

$$M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

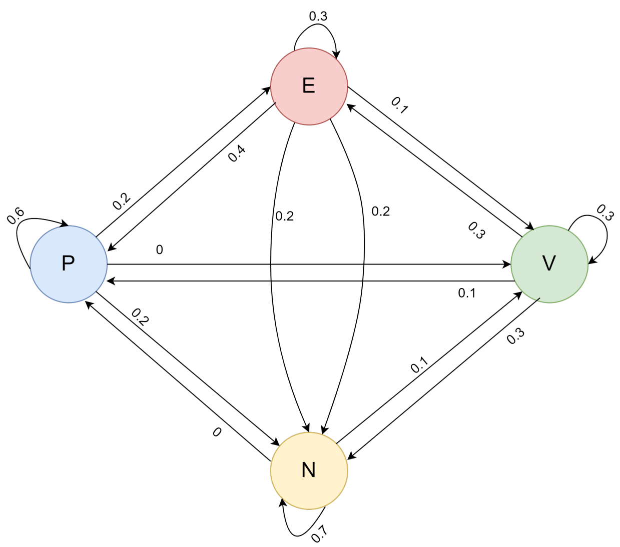

Figura 4: Diagrama de estados

b)

Si α es estado estacionario, entonces:

$$\alpha = \alpha M$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.26 & 0.17 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Por tanto α no son probabilidades en estado estacionario.

c)

Se requiere encontrar la probabilidad de la secuencia específica desde las 9:01am hasta las 9:06am, dado que se sabe que a las 9:00am el estudiante está pensando.

Dado $X_0 = P$ se pide encontrar:

$$P([X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6] = [P, P, P, P, P, E] | X_0 = P)$$
$$P_{11}^5 P_{12} = (0.6)^5 (0.2) \approx 1.56\%$$

d)

Para este inciso, se busca calcular las probabilidades de que el estudiante esté en cada una de las actividades P, E, V y N a las 4:56pm.

Usando la matriz de transición se sabe que:

$$a^{(56)} = a^{(0)} M^{56}$$

$$a^{(56)} = \begin{bmatrix} 0.2558 & 0.2326 & 0.0930 & 0.4186 \end{bmatrix}$$

e)

Utilizando el software Matlab se formuló una rutina que simula cada salto en la cadena de Markov de 4:00pm a 4:56pm conociendo las probabilidades de que el estudiante esté a las 4:00pm en cada una de las actividades. Los saltos entre estados a lo largo del tiempo se pueden evidenciaren la Figura 5

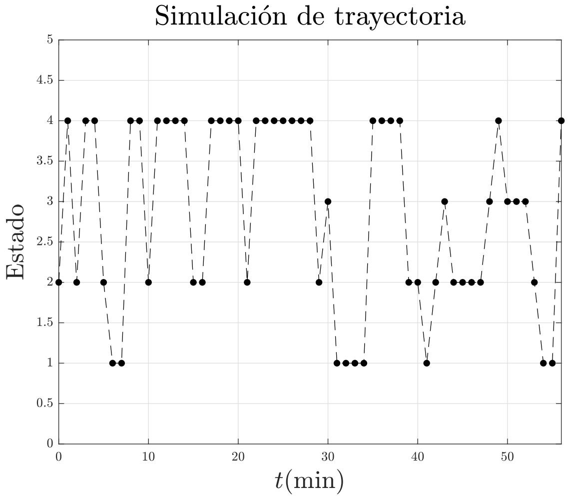

Figura 5: Rutina de simulación de trayectoria de estados

f)

Se estiman las probabilidades de que el estudiante esté en cada una de las actividades P, E, V y N a las 4:56pm generando 10.000 realizaciones. Se calculan las probabilidades de cada estado para todas las fracciones de minuto, donde estos puntos se comparan con la tendencia teórica, en la Figura 6 se puede observar que los valores teóricos son muy cercanos a los simulados.

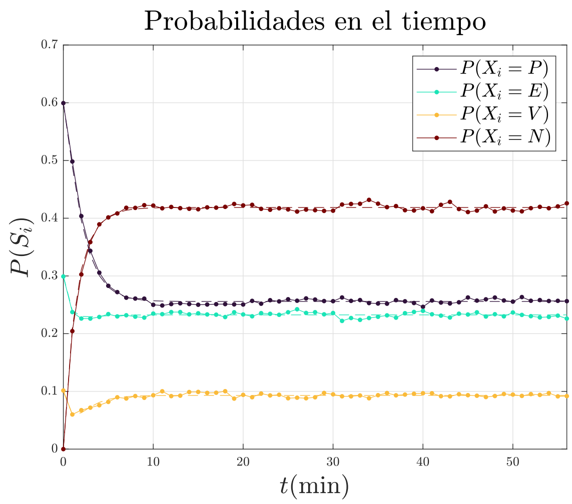

Figura 6: Probabilidades para cada fracción de minuto

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la Figura 6, se puede evidenciar que en el minuto 56 las probabilidades resultan aproximadamente iguales a las calculadas en el inciso d. Cabe resaltar que el vector **a** converge, el vector simulado es:

$$a^{(56)} = \begin{bmatrix} 0.2563 & 0.2261 & 0.0918 & 0.4258 \end{bmatrix}$$