Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 9
Procesos Estocásticos - IELE 4010

10-11-2021

Punto 1

Se considera el siguiente proceso estocástico

$$X(t) = A + Bt + t^2$$

donde A y B son variables aleatorias iid, con $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Este proceso estocásticos se puede describir como el siguiente vector aleatorio en tiempo t y s.

$$Z_{s,t} = \begin{bmatrix} X(s) & X(t) \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

a)

El objetivo es escribir el vector $Z_{s,t}$ como $Z_{s,t} = HW + b$ donde $W = [A\ B]^T$ y $b = [s^2\ t^2]^T$. Para esto, se debe hallar la matriz de covarianza de W. Para esto se toma el hecho de que A y B son independientes, entonces, su covarianza es 0 ($Cov(A, B) = 0$). Conociendo a priori la la varianza de cada variable aleatoria se tiene que la matriz de covarianza de W es la mostrada en la ecuación .

$$C_W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo esto, se encuentra la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$, se quiere escribir como una forma cuadrática. Luego, si se tiene un vector aleatorio $Y = AX$ y se escribe de la forma $C_Y = AC_XA^T$. En esta expresión, C_Y es la matriz de covarianza de Y y C_X es la matriz de covarianza de X. Aplicando esta propiedad se reemplaza $A = H$ obteniendo la expresión mostrada en la ecuación 1.

$$C_{Z_{s,t}} = HC_WH^T \tag{1}$$

Como $C_W = I_2$ entonces se tiene lo siguiente

$$C_{Z_{s,t}} = HH^\intercal$$

$$C_{Z_{s,t}} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & t \end{bmatrix}^\intercal$$

$$C_{Z_{s,t}} = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & st + 1 \\ st + 1 & t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

b)

Ahora se calcula la matriz de covarianza calculando la covarianza entre $X(t)$ y $X(s)$ y la varianza de $X(t)$. Para empezar, se calcula la varianza de $X(t)$ teniendo en cuenta que la varianza de una constante es 0 y la propiedad de varianzas indica que las constantes que acompañan a las variables aleatorias dentro de la varianza se sacan al cuadrado de la siguiente manera:

$$\text{var}(X(t)) = \text{var}(A) + \text{var}(Bt) + \text{var}(t^2)$$

$$\text{var}(X(t)) = \text{var}(A) + t^2\text{var}(B)$$

Adicionalmente, se conoce que la varianza de cada variable aleatoria es igual a 1:

$$\text{var}(X(t)) = 1 + t^2$$

Ahora, para calcular la covarianza se calcula primero el valor esperado de $X(t)$.

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[A\right] + \mathbb{E}\left[Bt\right] + \mathbb{E}\left[t^2\right]$$
$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = t^2$$

Ahora, se calcula la covarianza:

$$\text{cov}\left(X(t), X(s)\right) = \mathbb{E}\left[X(t)X(s)\right] - \mathbb{E}\left[X(t)\right]\mathbb{E}\left[X(s)\right]$$

Se hace la multiplicación entre $X(t)$ y $X(s)$:

$$X(t)X(s) = A^2 + ABs + As^2 + ABt + B^2st + Bts^2 + At^2 + Bt^2s + t^2s^2$$

Ahora, se obtiene el valor esperado:

$$E[X(t)X(s)] =$$
$$E[A^2]+sE[AB]+s^2E[A]+tE[AB]+tsE[B^2]+ts^2E[B]+t^2E[A]+t^2sE[B]+t^2s^2$$

Utilizando la siguiente propiedad se conoce el segundo momento de cada una de las variables aleatorias:

$$\text{var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2$$

Entonces, para A, B el valor esperado es cero, por ende el segundo momento es igual a la varianza.

$$\text{var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[X^2\right] \tag{2}$$

Por otro lado, para conocer el valor esperado de AB se usa la propiedad:

$$\mathbb{E}\left[AB\right] = \mathbb{E}\left[A\right]\mathbb{E}\left[B\right] \tag{3}$$

Como se conoce que el valor esperado de las VA A y B es 0 se tiene que $\mathbb{E}\left[AB\right] = 0$. Adicionalmente, como A y B son independientes el valor esperado de la multiplicación es la multiplicación de sus valores esperados, en este caso 0. Teniendo en cuenta lo anterior, se se tiene la siguiente expresión:

$$\mathbb{E}\left[X(t)X(s)\right] = 1 + ts + t^2 s^2$$

Usando $E[X(t)]E[X(s)] = t^2 s^2$ y la expresión de covarianza descrita anteriormente, se tiene que:

$$\operatorname{cov}\left(X(t), X(s)\right) = 1 + ts$$

Con esto se construye la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$.

$$C_{Z_{s,t}} = \begin{bmatrix} s^2+1 & st+1 \\ st+1 & t^2+1 \end{bmatrix}$$

Punto 2

Se considera el siguiente proceso estocástico

$$X(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4$$

donde A, B, C y D son variables aleatorias iid, con $A, B \sim \mathcal{N}(0,1)$.

a)

Se quiere encontrar la media, la autocorrelación y la autocovarianza del proceso estocástico $X(t)$, se empieza calculando el valor esperado.

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[A\right] + \mathbb{E}\left[Bt\right] + \mathbb{E}\left[Ct^2\right] + \mathbb{E}\left[Dt^3\right] + \mathbb{E}\left[t^4\right]$$
$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[A\right] + t\mathbb{E}\left[B\right] + t^2\mathbb{E}\left[C\right] + t^3\mathbb{E}\left[D\right] + t^4$$

Donde se obtiene:

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = t^4$$

Ahora, se calcula la autocorrelación:

$$R_X(s,t) = \mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right]$$

Primero, se calcula el producto entre $X(s)$ y $X(t)$:

$$X(s)X(t) = \left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4\right)\left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4\right)$$

$$\begin{aligned} X(s)X(t) = A^2 + ABs + ACs^2 + ADs^3 + As^4 \\ +ABt + B^2st + BCts^2 + BDts^3 + Bts^4 \\ +ACt^2 + BCt^2s + C^2t^2s^2 + CDt^2s^3 + Ct^2s^4 \\ +ADt^3 + BDt^3s + CDt^3s^2 + D^2t^3s^3 + Dt^3s^4 \\ +At^4 + Bt^4s + Ct^4s^2 + Dt^4s^3 + t^4s^4 \end{aligned}$$

Luego se calcula el segundo momento de las diferentes variables aleatorias y el valor esperado conjunto. De lo anterior, se obtiene la expresión:

$$\mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right] = 1 + ts + t^2s^2 + t^3s^3 + t^4s^4$$

Finalmente, se calcula la autocovarianza del proceso estocástico:

$$\gamma_X\left(s,t\right) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$$
$$\gamma_X\left(s,t\right) = 1 + ts + t^2s^2 + t^3s^3 + t^4s^4 - t^4s^4$$
$$\gamma_X\left(s,t\right) = 1 + ts + t^2s^2 + t^3s^3$$

b)

Para encontrar la función de densidad de probabilidad de X(t), se usa la caracterización del proceso estocástico del inciso anterior, con el propósito de hallar la varianza de la función de probabilidad x(t):

$$\sigma_{x(t)} = \gamma_x(t,t) = 1 + t^2 + t^4 + t^6$$

Sabemos que como X(t) es una función de densidad de una combinación lineal de las variables gaussianas A,B,C y D, ésta también es una gaussiana con los siguientes parámetros:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4 \sim N(t^4, 1 + t^2 + t^4 + t^6)$$

c)

Se considera el siguiente proceso estocástico

$$X(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4$$

donde A, B, C y D son variables aleatorias iid, con $A, B \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Primero se encuentra el vector Z remplazando s y t en la ecuación del proceso estocástico.Después, se genera el vector Z como se muestra a continuación:

$$Z_{s,t} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^4 \\ t^4 \end{bmatrix}$$

Se calcula el valor esperado al vector Z y por medio de propiedades se despeja:

$$E[Z_{s,t}] = E\begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} + E\begin{bmatrix} s^4 \\ t^4 \end{bmatrix}$$

Los procesos estocásticos A,B,C,D tienen media 0, además s y t son constantes.

$$E[Z_{s,t}] = 0 + \begin{bmatrix} s^4 \\ t^4 \end{bmatrix}$$

Con la varianzas y la covarianza encontradas en los puntos anteriores ahora se encuentra la matriz de covarianza del vector de variables aleatorias $[A\ B\ C\ D]^\intercal$. Se tiene que $C = I_4$ ya que son variables independientes y todas tienen varianza igual a 1. $C_{Z_{s,t}}$ es igual a:

$$C_{Z_{s,t}} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}^\intercal$$

$$C_{Z_{s,t}} = \begin{bmatrix} s^6 + s^4 + s^2 + 1 & s^3t^3 + s^2t^2 + st + 1 \\ s^3t^3 + s^2t^2 + st + 1 & t^6 + t^4 + t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Punto 3

Ahora se considera el proceso estocástico dado por

$$X(t) = A\cos(2\pi ft + \theta) \tag{4}$$

donde $f = 0.1\text{Hz}$ es una constante. Las variables aleatorias A y θ son independientes entre sí y tales que $A \sim \mathcal{U}[0, 5]$ y $\theta \sim \mathcal{U}[0, \pi]$.

a)

Se procede a encontrar la caracterización de segundo orden del proceso estocástico $X(t)$. Es decir, se procede a encontrar la media $\mu_X(t)$ y la función de autocorrelación $R_X(s, t)$ del proceso estocástico.

Para empezar, se encuentra la media $\mu_X(t)$ como

$$\mu_X(t) = E[A\cos(2\pi ft + \theta)] \tag{5}$$

Debido a que las variables aleatorias A y θ son independientes entre sí,

$$\mu_X(t) = E[A]E[\cos(2\pi ft + \theta)] \tag{6}$$

Aplicando una identidad trigonométrica para tratar con el término del coseno se obtiene

$$\mu_X(t) = E[A]\left(\cos(2\pi ft)E[\cos(\theta)] - \sin(2\pi ft)E[\sin(\theta)]\right) \tag{7}$$

Ahora, sabemos que

$$E[A] = \frac{5-0}{2} = \frac{5}{2} \tag{8}$$

Para encontrar $E[\cos(\theta)]$ y $E[\sin(\theta)]$, se parte de la definición del valor esperado de una función de una variable aleatoria:

$$E[g(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)f_\Theta(\theta)d\theta \tag{9}$$

en donde $f_\Theta(\theta)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria θ. Aplicando esta definición, se tiene que

$$\begin{aligned} E[\cos(\theta)] &= \int_0^\pi \cos(\theta)\frac{1}{\pi}d\theta \\ E[\cos(\theta)] &= \frac{1}{\pi}[\sin(\theta)]_0^\pi \\ E[\cos(\theta)] &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Por otro lado, para encontrar $E[\sin(\theta)]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E[\sin(\theta)] &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)\frac{1}{\pi}d\theta \\
E[\sin(\theta)] &= \frac{1}{\pi}[-\cos(\theta)]_0^{\pi} \\
E[\sin(\theta)] &= \frac{2}{\pi}
\end{aligned} \tag{11}$$

Reemplazando los tres anteriores resultados en la expresión para $\mu_X(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \frac{5}{2}\left(-\sin(2\pi ft)\frac{2}{\pi}\right) \\
\mu_X(t) &= -\frac{5}{\pi}\sin(2\pi ft)
\end{aligned} \tag{12}$$

Ahora se procede a encontrar la función de autocorrelación $R_X(s,t)$. Se empieza con la definición:

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] \tag{13}$$

Reemplazando en la expresión anterior se obtiene

$$R_X(s,t) = E[A^2\cos(2\pi ft+\theta)\cos(2\pi fs+\theta)] \tag{14}$$

Usando una identidad trigonométrica para simplificar la anterior expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) = \frac{1}{2}E[A^2](\cos(2\pi f(t-s)) + \cos(2\pi f(t+s))E[\cos(2\theta)] \\
- \sin(2\pi f(t-s))E[\sin(2\theta)])
\end{aligned} \tag{15}$$

En este punto nos damos cuenta de que, para encontrar el valor de $E[\cos(2\theta)]$ y $E[\sin(2\theta)]$ es necesario definir una nueva variable aleatoria $\hat{\theta} = 2\theta$ para poder aplicar la definición del valor esperado de una función de una variable aleatoria, pues la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria θ va a ser distinta de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $\hat{\theta}$.

Para encontrar la pdf de la variable aleatoria $\hat{\theta}$, se procede a usar el teorema fundamental de las funciones de una variable aleatoria. Se empieza por encontrar las raíces de la ecuación $\hat{\theta} = g(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= g(\theta) \\
\hat{\theta} &= 2\theta \\
\theta &= \frac{\hat{\theta}}{2}
\end{aligned} \tag{16}$$

por lo que solo hay una raíz $\theta_1 = \hat{\theta}/2$. Ahora se procede a encontrar la derivada de la función $g(\theta)$:

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= 2\theta \\
g'(\theta) &= 2
\end{aligned} \tag{17}$$

Ahora aplicando la fórmula del teorema fundamental, encontramos la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $\hat{\theta}$, dada por $f_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta})$:

$$\begin{aligned}
f_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta}) &= \sum_{k=1}^{1} \frac{f_{\Theta}(\theta_1)}{|g'(\theta_1)|} \\
f_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2} f_{\Theta}(\hat{\theta}/2)
\end{aligned} \tag{18}$$

En este punto, ya se pueden encontrar los valores de $E[\cos(2\theta)]$ y $E[\sin(2\theta)]$, sabiendo que $\hat{\theta} = 2\theta$ y que $f_{\hat{\Theta}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} f_{\Theta}(\hat{\theta}/2)$:

$$\begin{aligned}
E[\cos(2\theta)] &= E[\cos\hat{\theta}] \\
E[\cos\hat{\theta}] &= \int_0^{2\pi} \cos\hat{\theta} \left(\frac{1}{2} f_{\theta}(\hat{\theta}/2) \right) d\hat{\theta} \\
E[\cos\hat{\theta}] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\hat{\theta} d\hat{\theta} \\
E[\cos\hat{\theta}] &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
E[\sin(2\theta)] &= E[\sin\hat{\theta}] \\
E[\sin\hat{\theta}] &= \int_0^{2\pi} \sin\hat{\theta} \left(\frac{1}{2} f_{\theta}(\hat{\theta}/2) \right) d\hat{\theta} \\
E[\sin\hat{\theta}] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\hat{\theta} d\hat{\theta} \\
E[\sin\hat{\theta}] &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Adicionalmente, sabemos que

$$\begin{aligned}
E[A^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 f_A(a) dA \\
E[A^2] &= \int_0^5 A^2 \frac{1}{5} dA \\
E[A^2] &= \frac{1}{5} \left[\frac{A^3}{3} \right]_0^5 \\
E[A^2] &= \frac{25}{3}
\end{aligned} \tag{21}$$

Reemplazando todos estos valores en la ecuación (15), se encuentra que

$$R_X(s,t) = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} \right) (\cos(2\pi f(t-s))) \tag{22}$$

y simplificando:

$$R_X(s,t) = \frac{25}{6} \cos(2\pi f(t-s)) \tag{23}$$

b)

Ahora se asume que $t \in \mathbb{N}$, para $t = 1, \ldots, 50$. Se generaron 10 realizaciones diferentes del proceso estocástico $X(t)$ en Matlab y se graficó cada una de ellas contra el tiempo. Estas realizaciones se pueden observar en la figura 1.

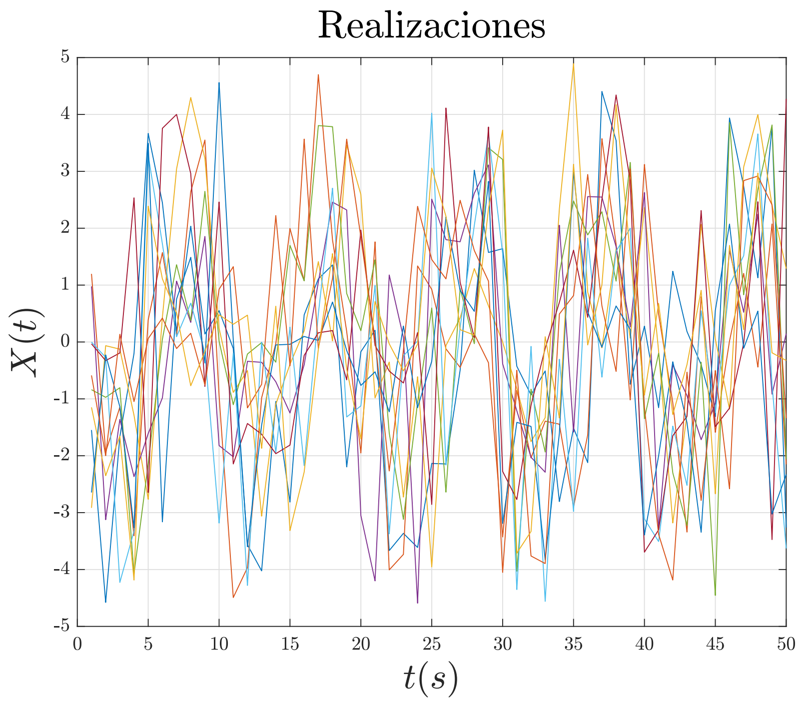

Figura 1: Realizaciones del proceso estocástico $X(t)$

Como se puede notar, cada realización tiene un comportamiento diferente debido al comportamiento aleatorio de las variables A y θ. Sin embargo, todas las realizaciones están acotadas por el mismo límite inferior y superior. Además, el desplazamiento de fase se ve acotado por un máximo de 5 segundos lo que corresponde a medio periodo de la señal pues se especifico un desplazamiento máximo de π.