Caso de Estudio 3
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo Trujillo

---

1. (30 puntos) Si alguno de los enunciados de este problema no tiene solución, el problema completo tendrá una calificación de 0 puntos.
Considere el archivo `datosCaso3punto1.txt`. Este archivo contiene 100.000 observaciones de una medición que se modela como una variable aleatoria continua. Se conoce que la distribución es de una variable Gamma. Como apéndice dentro del documento PDF que ud entrega, adjunte el código fuente utilizado para realizar este caso de estudio.

    a) Cree varios intervalos de igual tamaño donde la variable aleatoria puede tomar valores, y calcule la frecuencia relativa para cada uno de estos intervalos. Grafique la frecuencia relativa versus cada intervalo de los valores que toma la variable aleatoria. Esta gráfica se denomina histograma. No puede utilizar una función predefinida para calcular el histograma.
    b) A partir del histograma, encuentre una forma sencilla de estimar la CDF de la variable aleatoria, y grafique el resultado. Tenga en cuenta que la CDF es una distribución acumulada. Justifique su respuesta. No puede utilizar funciones predefinidas para hacer esta estimación.
    c) Utilizando el histograma en el punto a), encuentre una forma sencilla de estimar la PDF de esa variable aleatoria, y grafique el resultado. Tenga en cuenta que la PDF es una densidad de probabilidad, es decir, probabilidad por unidad de la variable aleatoria. No puede utilizar funciones predefinidas para hacer esta estimación.
    d) Basado en la estimación de la PDF, determine los parámetros que puede tener la variable aleatoria y los parámetros de la PDF real. Para hacer esto, traslape la gráfica de la PDF estimada y la PDF que usted considera es la real. Tenga en cuenta que la PDF de una variable Gamma se define por dos parámetros: forma (shape) k y escala θ. No puede utilizar una función predefinida para generar esta PDF real.
    Ayuda: Por definición, se sabe que $P(a \leq z \leq b) = \int_a^b f_Z(z)dz$. Si asumimos que $\Delta = b - a$ es pequeño, tendríamos que $P(a \leq z \leq b) \approx f_z(a)\Delta$, o en otras palabras, $f_z(a) \approx P(a \leq z \leq b)/\Delta$. Utilice esta aproximación para resolver este punto.

2. (15 puntos) Sea X una variable aleatoria discreta, binaria, que toma un valor de 1 o 2 con probabilidades $P(X = 1) = 0{,}6$ y $P(X = 2) = 0{,}4$. Esta variable modela una señal que se transmite a través de un sistema de comunicaciones. Sea $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ una variable modelando un ruido aleatoria. Se tiene que X y W son variables aleatorias independientes. La señal recibida se modela como $Y = X + W$. Encuentre $P(X = 2|Y = 3)$.
Ayuda: Utilice el teorema de Bayes.

3. (30 puntos) Si alguno de los enunciados de este problema no tiene solución, el problema completo tendrá una calificación de 0 puntos.
Considere la siguiente función de densidad de probabilidad con parámetros $-1 < \rho < 1$, y $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2 - 2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y) + (y-\mu_y)^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

    a) Elija unos valores fijos de μ_x y μ_y. Grafique la superficie y el contorno de $f_{X,Y}(x, y)$ para varios valores de ρ (recuerde que $-1 < \rho < 1$). Recomendación: si usted utiliza Matlab, puede utilizar las funciones `mesh` y `contour`.

b) Escriba en Matlab o Python una rutina que lea el archivo `datosCaso3punto3.txt`. Este archivo contiene una matriz de 1000×2, donde cada fila corresponde a una realización de una variable aleatoria que sigue la distribución $f_{X,Y}(x, y)$. A ojo, determine los parámetros ρ, μ_x y μ_y de esta distribución. Para esto, grafique las muestras en `datosCaso3punto3.txt` en el plano x-y, y traslape la gráfica del contorno de la función de densidad candidata.

4. (15 puntos) Sea A un punto en el espacio cartesiano 2-dimensional con coordenada $(X, 1)$, donde $X \sim \mathcal{N}(1, 5)$. Encuentre la función de distribución acumulada y la función de distribución de probabilidad de la distancia entre el origen y A.

5. (10 puntos) Un banco tiene dos cajeros. El tiempo de atención del cajero 1 es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro $\lambda_1 = 2$. El tiempo del cajero 2 está distribuido exponencialmente con parámetro $\lambda_2 = 6$. Un cliente elige un cajero aleatoriamente, con probabilidad $2/3$ de elegir el cajero 1, y probabilidad $1/3$ de elegir el cajero 2. Encuentre la función de densidad de probabilidad y grafíquela.