Caso de Estudio 4
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo

---

1. Para obtener todos los puntos en este ejercicio, todos los enunciados tienen que tener un intento de desarrollo de solución. Si hay algún enunciado sin solución, el ejercicio completo tendrá una calificación de 0.
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ variables aleatorias discretas iid donde: $X_i = 0$ con probabilidad 0.3, $X_i = 1$ con probabilidad 0.4, y $X_i = 2$ con probabilidad 0.3. Sea $S = \sum_{i=1}^{200} X_i$.

   a) (5 puntos) Use la desigualdad de Markov para encontrar una cota superior para la probabilidad de que $S \geq 210$.
   b) (5 puntos) Use la desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota superior para la probabilidad de que $S \geq 210$. Compare con el resultado en a).
   Ayuda: Note que $P(S \geq 210) = P(S - 200 \geq 10) \leq P(|S - 200| \geq 10)$ (por qué?).
   c) (5 puntos) Use el teorema límite central para aproximar la probabilidad de que $S \geq 210$. Compare con los resultados en a) y b).
   d) (5 puntos) Use la desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota superior para la probabilidad de que $S \geq 200 + \epsilon$, donde $\epsilon > 0$. ¿Para qué valores de ϵ esta cota empieza a ser útil?.

2. Para obtener todos los puntos en este ejercicio, todos los enunciados tienen que tener un intento de desarrollo de solución. Si hay algún enunciado sin solución, el ejercicio completo tendrá una calificación de 0.
Sean X y Y dos variables aleatorias continuas independientes con PDFs f_X y f_Y. Considere la variable aleatoria $Z = X + Y$.

   a) (5 puntos) Muestre que la PDF de Z, denotada f_Z, es el resultado de convolucionar las funciones f_X y f_Y. Puede tomar la demostración del libro guía de Bertsekas en el capítulo 4.1.
   b) (20 puntos) Repase como convolucionar gráficamente dos funciones. El libro guía de Bertsekas contiene este repaso en el capítulo 4.1. Utilizando este conocimiento, encuentre la PDF de $Z = X + Y$, donde X y Y son variables aleatorias uniformes, independientes, e idénticamente distribuidas, siguiendo una distribución uniforme entre 0 y 1.

3. (10 puntos) Sean $M_X(s)$ y $M_Y(s)$ las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias X y Y. Estas variables aleatorias son independientes. Utilizando la definición de funciones generadoras, muestre que la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Z = X + Y$ es $M_Z(s) = M_X(s)M_Y(s)$. Conecte este resultado con la demostración del punto 2a (pero no utilice el resultado de 2a para resolver este ejercicio).

4. (10 puntos) El tiempo de atención a un cliente en un banco se modela como una variable aleatoria T. Un banco tiene dos cajeros. Si el cliente elige el cajero 1 (es decir, T dado que el cajero es el 1), entonces el tiempo de atención del cajero 1 es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro $\lambda_1 = 2$. Por otro lado, el tiempo de atención del cajero 2 está distribuido exponencialmente con parámetro $\lambda_2 = 6$.

El cliente elige un cajero aleatoriamente, con probabilidad $2/3$ de elegir el cajero 1, y probabilidad $1/3$ de elegir el cajero 2. Encuentre la función generadora de momentos de T.

5. **Experimentos en Matlab**. Para obtener todos los puntos en este ejercicio, todos los enunciados tienen que tener un intento de desarrollo de solución. Si hay algún enunciado sin solución, el ejercicio completo tendrá una calificación de 0.
Sean X_i, $i = 1, \ldots, n$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución uniforme entre 2 y 4. Sea $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = E[X_i]$, y $\sigma^2 = var(X_i)$ (tenga en cuenta que μ, y σ^2 se pueden calcular teóricamente).

   a) (10 puntos) Asuma que $n = 1$. Para la variable aleatoria X_1, genere 5000 realizaciones. Puede utilizar la función `rand` de Matlab, o su equivalente en Python. Calcule Y_n, y grafique el histograma de Y_n (tienen que haber 5000 realizaciones de esta variable aleatoria).

   b) (15 puntos) Asuma que $n = 2$. Para cada una de las variables aleatorias X_1 y X_2, genere 5000 realizaciones. Calcule Y_n, y grafique el histograma de Y_n (tienen que haber 5000 realizaciones de esta variable aleatoria).

   c) (15 puntos) Repita el procedimiento en b) para $n = 3, 5, 10, 100, 1000, 100000$. Analice los resultados, y explíquelos en términos del teorema del límite central.