Caso de Estudio 10
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo

Se tiene que intentar resolver todos los enunciados planteados en cada ejercicio para obtener puntos en el mismo. La falta de solución de alguno de los enunciados implicará automáticamente una calificación de 0 puntos en todo el ejercicio.

---

1. Considere el siguiente proceso estocástico conocido como *ruido blanco en tiempo discreto*:

$$\{X[n]\}_{n=0}^{\infty}, \quad E\left[X[n]\right]=0, \quad \text{var}(X[n])=\sigma^2, \quad \text{cov}(X[n],X[r])=0, \quad \forall n,r \geq \mathbb{N}.$$

Este proceso estocástico es muy utilizado para modelar incertidumbre en mediciones. Asuma también que $X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \geq \mathbb{N}$.

a) (5 puntos) Encuentre la caracterización de segundo orden de este proceso estocástico.

b) (10 puntos) Ahora asuma que $X[n]$ es una variable aleatoria continua que sigue una distribución Gaussiana (el proceso estocástico es en tiempo discreto, pero las variables aleatorias son continuas). Sea $Z_{n,r}=[X[n],X[r]]^T$. Encuentre la PDF del vector aleatorio $Z_{n,r}$, y claramente especifique cuál es el vector de valores esperados y la matriz de covarianza.

c) (5 puntos) Simule una realización del proceso estocástico {X[n]} para valores de n desde 0 hasta 1000, asumiendo que $\sigma^2=4$ y que $X[n]$ es Gaussiana para todo n. Grafíquelo y analícelo.

d) (10 puntos) Para la realización del proceso estocástico en el enunciado c) calcule el contenido frecuencial a través de la magnitud de la transformada de Fourier (TF). Pueden utilizar la función adjunta *espectro.m*.

e) (10 puntos) Genere otras 9999 realizaciones del proceso estocástico en el enunciado c), y calcule la magnitud de la TF para cada una, de la misma forma como lo hizo en d). Grafique el promedio de todas las TF para cada instante de frecuencia (es decir, magnitud vs frecuencia). Analice los resultados con el hecho de que el proceso estocástico se denomina ruido blanco.

2. Se quiere modelar el proceso de escritura de un artículo de investigación por parte de un estudiante de posgrado. Se asume que en este proceso el estudiante está haciendo alguna de estas cuatro actividades: pensar (P), escribir (E), ver email (V), o navegando en internet (N). Asuma que **los instantes de tiempo son cada minuto**. Se sabe que:

- Si el estudiante está pensando, la probabilidad de que al siguiente minuto el estudiante siga pensando es 0.6, que verifique su email es 0, y que escriba es 0.2.
- Si el estudiante está escribiendo, la probabilidad de que al siguiente minuto el estudiante se ponga a pensar es 0.4, que verifique su email es 0.1, y que navegue es 0.2.
- Si el estudiante está viendo su email, la probabilidad de que al siguiente minuto el estudiante se ponga a pensar es 0.1. Las probabilidades de que en el siguiente minuto siga verificando su email, o de que se ponga navegar, o de que se ponga a pensar son iguales.

- Si el estudiante está navegando en internet, la probabilidad de que al siguiente minuto el estudiante se ponga a pensar es 0, que escriba es 0.2, y que siga navegando es 0.7.

Asumiendo que este proceso estocástico se caracteriza a través de una cadena de Markov, resuleva los siguientes puntos.

a) (10 puntos) Escriba la matriz de transición M del proceso y grafique el diagrama de estados. **Para plantear la matriz asuma el siguiente orden de los estados es P, E, V y N.**

b) Determine matemáticamente si las probabilidades de estar en P, E, V y N escritas en el vector

$$\alpha = [0.3, 0.1, 0.5, 0.1]$$

son probabilidades en estado estacionario.

c) (10 puntos) Dado que el estudiante está pensando a las 9:00 am, encuentre la probabilidad de que el estudiante desde las 9:01am hasta las 9:05am esté pensando **y** que a las 9:06am esté escribiendo (es decir, hay que encontrar la probabilidad de la secuencia específica desde las 9:01am hasta las 9:06am, dado que se sabe que a las 9:00am está en un estado específico).

d) (10 puntos) Las probabildades de que el estudiante a las 4:00pm esté en cada una de las actividades P, E, V y N son $[0.6, 0.3, 0.1, 0]$. Encuentre las probabilidades de que el estudiante esté en cada una de las actividades P, E, V y N a las 4:56pm.

e) (20 puntos) Escriba una rutina en Matlab o Python que simule cada salto en una realización de esta cadena de Markov de 4:00pm a 4:56pm, conociendo que las probabilidades de que el estudiante esté a las 4:00pm en cada una de las actividades P, E, V y N son $[0.6, 0.3, 0.1, 0]$. **Esta rutina sólo debe utilizar las probabilidades de transición de estados para determinar a qué estado saltar dado que está en un estado determinado (no puede utilizar la ecuación de recurrencias)**. Defina aleatoriamente el estado inicial de acuerdo con las probabilidades iniciales dadas. Corra esta rutina, y en una gráfica muestre la trayectoria del proceso (es decir, estado vs tiempo).

   Ayuda: Para determinar hacia qué estado saltar, haga un procedimiento equivalente a correr una ruleta. Por ejemplo, asuma que tenemos tres estados: A, B, y C. Asumiendo que estamos en el estado A, las probabilidad de hacer la transición hacia A es 0.1, de saltar de A a B es 0.5, y de saltar de A a C es 0.4. Se genera un número aleatorio con distribución uniforme entre 0 y 1. Si este número cae en el intervalo $[0, 0{,}1]$ entonces la transición es hacia el estado A; si cae en el intervalo $(0{,}1, 0{,}6]$ entonces la transición es hacia el estado B; y si cae en el intervalo $(0{,}6, 1]$ entonces la transición es hacia el estado C.

f) (10 puntos) Genere 10.000 realizaciones del proceso estocástico del enunciado e). Calculando la frecuencia relativa en estas 10.000 realizaciones en la hora 4:56pm, estime las probabilidades de que el estudiante esté en cada una de las actividades P, E, V y N a las 4:56pm y compare con el cálculo matemático hecho en d).