Caso de Estudio 11
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo

Se tiene que intentar resolver todos los enunciados planteados en cada ejercicio para obtener puntos en el mismo. La falta de solución de alguno de los enunciados implicará automáticamente una calificación de 0 puntos en todo el ejercicio.

---

a) (5 puntos) Considere el filtro de media móvil, el cual suaviza la señal que le entra. La salida de este filtro, denotada por $y[n]$, se caracteriza a través de la siguiente ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k] \tag{1}$$

para todo n. Los M coeficientes del filtro están dados por $1/M$. Como se puede ver en esta ecuación, para cada instante de tiempo n, la salida del filtro $y[n]$ es un promedio de los valores de la entrada en una ventana de tiempo de tamaño M. La respuesta al impulso de este filtro es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & n \in [0, M] \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

De ahí a que este filtro haga parte de la familia de sistemas con respuesta finita al impulso o tipo FIR por sus siglas en inglés. Ejecute el archivo de Matlab llamado `filtrado.m` para valores de la ventana del filtro $M = 1, 5, 10, 100$, y grafique la entrada y la salida del filtro para cada caso. Analice el efecto de incrementar M y explíquelo utilizando la Ecuación (1).

b) (25 puntos) Considere el siguiente proceso estocástico conocido como *ruido blanco en tiempo discreto*:

$$\{X[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad E\left[X[n]\right] = 0, \quad \text{var}(X[n]) = \sigma^2, \quad \text{cov}(X[n], X[r]) = 0, \quad \forall n, r \geq \mathbb{Z}, n \neq r.$$

$X[n]$ y $X[r]$ son independientes para todo $n, r \geq \mathbb{Z}$. Muestre que $\mu_X[n] = 0$ para todo n y $R_X(\tau) = \sigma^2 \delta[\tau]$, donde

$$\delta[\tau] = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Grafique la autocorrelación $R_X[\tau]$ y explique por qué tiene sentido que tome esta forma.

c) (30 puntos) Asuma que el proceso estocástico $\{X[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de ruido blanco en el enunciado b) es la entrada al filtro de media móvil del enunciado a). Eso quiere decir que la salida del filtro es un proceso estocástico también que ahora denotamos como $\{Y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Encuentre μ_Y y $R_Y[\tau]$. Para encontrar $R_Y[\tau]$ puede utilizar métodos computacionales (por ejemplo, la función `conv` de Matlab).
Ayuda 1: En clase vimos que para un proceso estocástico wss, $\mu_Y = \mu_X \sum_{-\infty}^{\infty} h[n]$ y $R_Y[\tau] = R_X(\tau) * h[\tau] * h[-\tau]$, donde la operación $a[k] * b[k]$ denota la convolución entre a y b.
Ayuda 2: Recuerde que, para cualquier función $z[n]$, se tiene que $z[n] * \delta[n] = z[n]$.

d) (25 puntos) Grafique la autocorrelación $R_Y[\tau]$ del enunciado c) y explique, utilizando la Ecuación (1), por qué tiene sentido que tome esta forma y por qué ya no tiene una forma de un impulso como R_X.

e) (15 puntos) Corra el código en `estimacionAutocorrelacion.m`. Esta rutina ejecuta P realizaciones del proceso estocástico $\{X[n]\}$ y la correspondiente salida del filtro $\{Y[n]\}$. Además, estima las autocorrelaciones R_X y R_Y utilizando esas P realizaciones. Grafique $\{X[n]\}$, $\{Y[n]\}$, R_X y R_Y para $P = 1, 2, 5, 20, 100$ (el código fuente ya hace esas gráficas para un P fijo). Analice los resultados y compare con los resultados en c) y d).