Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 5
Procesos Estocásticos - IELE 4010

22-09-2021

Punto 1

Primero realizaremos el blanqueamiento del vector Y realizando la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} W &= C_Y^{-1/2} Y && (1) \\ \Rightarrow C_W &= C_Y^{-1/2} C_Y \left[C_Y^{-1/2}\right]^T = I_2 && (2) \end{aligned}$$

Como segundo paso definiremos una segunda transformación de W a X como sigue:

$$\begin{aligned} X &= C_X^{1/2} W && (3) \\ \Rightarrow C_X &= C_X^{1/2} I_2 \left[C_X^{-1/2}\right]^T = C_X && (4) \end{aligned}$$

Un resultado que se mantiene para cualquier matriz arbitraria C_Y y C_W. Asi pues, nuestra transformacion total esta definida por:

$$\begin{aligned} X &= C_X^{1/2} C_Y^{-1/2} Y = AY \quad \text{Donde se cumple:} && (5) \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^{-1/2} && (6) \end{aligned}$$

Calculando numéricamente estos valores se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1998 & 0.0055 \\ -0.0035 & 0.4718 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Punto 2

Se definen las matrices A, B y D como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a)

Para determinar cuáles de estas matrices pueden ser matrices de covarianza válidas para algún vector aleatorio X, se procede a encontrar los valores propios de cada una de ellas:

$$\mathrm{eig}(A) = \{38.5406, -4.5406\} \tag{8}$$

$$\mathrm{eig}(B) = \{5, 1\} \tag{9}$$

$$\mathrm{eig}(D) = \{4, 3, 5\} \tag{10}$$

Aunque todas las matrices son simétricas, se puede notar que solo B y D son positivas definidas, pues todos sus respectivos valores propios son mayores a cero. Mientras tanto, A tiene un valor propio negativo y otro positivo, y por lo tanto no es positiva definida ni positiva semidefinida. Por esta razón, solo B y D pueden ser matrices de covarianza válidas para algún vector aleatorio X.

b)

Asumiendo que B es la matriz de covarianza de un vector aleatorio $X = [X_1, X_2]^T$ y que $E[X_1] = E[X_2] = 0$, se procede a calcular el coeficiente de correlación entre estas variables aleatorias como

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)\mathrm{var}(X_2)}} \\
\rho &= \frac{-2}{\sqrt{(3)(3)}} \\
\rho &= -2/3 = -0.6666
\end{aligned} \tag{11}$$

c)

Para cada uno de los casos donde la matriz puede ser una matriz de covarianza de un vector aleatorio X, es decir, para las matrices B y D, se procede a encontrar la función de densidad de probabilidad marginal de cada una de las variables del vector X, asumiendo que los vectores de medias son cero y que estas variables forman vectores aleatorios Gaussianos conjuntos.

Para la matriz B, se tiene un vector aleatorio Gaussiano $X = [X_1, X_2]^T$ de media cero. Dada esta información, se sabe entonces que cada una de las variables aleatorias contenidas dentro de este vector aleatorio sigue una distribución Gaussiana de media cero. Por lo tanto, se sabe que $X_1 \sim N(0, 3)$ y que $X_2 \sim N(0, 3)$, pues la media es cero y la varianza es 3 ($\sigma_{X_i} = 3$, $i = 1, 2$) para cada una de las variables aleatorias dentro del vector aleatorio. La función de densidad de probabilidad para cada una de estas variables aleatorias es:

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_1}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{2\sigma_{X_1}^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{6}\right\} \\
f_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_2}} \exp\left\{\frac{-x_2^2}{2\sigma_{X_2}^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left\{\frac{-x_2^2}{6}\right\}
\end{aligned} \tag{12}$$

Para la matriz D, se tiene un vector aleatorio Gaussiano $X = [X_1, X_2, X_3]^T$ de media cero. Siguiendo la misma lógica del caso pasado, se sabe entonces que $X_1 \sim N(0,4)$, $X_2 \sim N(0,3)$ y $X_1 \sim N(0,5)$. Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad marginal de cada una de estas variables está dada a continuación, sabiendo (a partir de la matriz de covarianza D) que $\sigma_{X_1}^2 = 4$, $\sigma_{X_2}^2 = 3$ y $\sigma_{X_3}^2 = 5$:

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_1}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{2\sigma_{X_1}^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{8}\right\} \\
f_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_2}} \exp\left\{\frac{-x_2^2}{2\sigma_{X_2}^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left\{\frac{-x_2^2}{6}\right\} \\
f_{X_3}(x_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_3}} \exp\left\{\frac{-x_3^2}{2\sigma_{X_3}^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \exp\left\{\frac{-x_3^2}{10}\right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Punto 3

Se considera el vector $x = [x_1, x_2]^T$. Sea $q(x) = 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2$ y sea $g(x) = R\exp\{-q(x)\}$ con $R > 0$. Se sabe que $x = [x_1, x_2]^T$ es una observación del vector aleatorio $X = [X_1, X_2]^T$. A continuación se muestra el proceso para encontrar el valor de R para que $g(x)$ sea la función de densidad de probabilidad de X.

En primera instancia, es claro que $q(x)$ es una forma cuadrática que se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{aligned}
q(x) &= x^TQx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
q(x) &= 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Ahora, mirando la forma de la función $g(x)$, nos damos cuenta de que tiene una forma muy similar a la PDF de una variable aleatoria Gaussiana, pues se tiene $g(x) = R\exp\{-x^TQx\}$. Como R es una constante positiva, se sabe que al argumento de la exponencial le faltaría estar multiplicado por la constante $1/2$ para que se tenga la forma exacta de una variable aleatoria Gaussiana. Por lo tanto, se procede a factorizar el término $1/2$ de x^TQx para así obtener:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2 \\
q(x) &= \frac{1}{2}\left(18x_1^2 + 4x_1x_2 + 30x_2^2\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

De esta forma, se puede ver la definición de $g(x)$ como

$$g(x) = R\exp\{-x^TQx\} = R\exp\left\{-\frac{1}{2}x^TC_X^{-1}x\right\} \tag{16}$$

Por lo tanto, se puede notar que la matriz asociada a la forma cuadrática $18x_1^2 + 4x_1x_2 + 30x_2^2$ es

$$C_X^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 30 \end{bmatrix} \tag{17}$$

En este punto, se sabe que

$$R = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det(C_X)}} \tag{18}$$

pues este es el término que acompaña a la exponencial en la PDF Gaussiana y $X \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, se procede a encontrar la matriz C_X como

$$C_X = (C_X^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 30 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{15}{268} & \frac{-1}{268} \\ \frac{-1}{268} & \frac{9}{268} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\frac{1}{536}}} \\ R &= \frac{\sqrt{134}}{\pi} \end{aligned} \tag{20}$$

y la función $g(x)$ está dada de la forma

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det(C_X)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T C_X^{-1}(x-\mu_X)\right\} \\ g(x) &= \frac{\sqrt{134}}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T C_X^{-1}(x-\mu_X)\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Por lo tanto, el vector de medias μ y matriz de covarianza C_X asociadas a esta PDF Gaussiana multivariable son, respectivamente:

$$\mu_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad C_X = \begin{bmatrix} \frac{15}{268} & \frac{-1}{268} \\ \frac{-1}{268} & \frac{9}{268} \end{bmatrix}$$

Punto 4

a)

Si $f_Z(z)$ es una PDF de un vector Gaussiano $Z = [X, Y]^T$ esto implica que C_z es simétrica.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\det(C_Z)}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)^\intercal C_Z^{-1}(z-\mu)\right)$$

Asumiremos que se tiene la matriz de covarianza:

$$C_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}(x_1, x_2) \\ \operatorname{cov}(x_1, x_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante:

$$\det(C_z) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \operatorname{cov}(x_1, x_2)^2$$

Por lo anterior, se cumple:

$$1 - \rho^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \operatorname{cov}(x_1, x_2)^2$$

Luego, tenemos que C_z^{-1} sería:

$$C_z^{-1} = \frac{1}{\det(C_z)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\text{cov}(x_1, x_2) \\ -\text{cov}(x_1, x_2) & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(z-\mu)^T C_z^{-1}(z-\mu)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\det(C_z)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2(x-\mu_x)^2 + \sigma_1^2(y-\mu_y)^2 & -2\text{cov}(x_1, x_2)(x-\mu_x)(y-\mu_y) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_2^2(x-\mu_x)^2 + \sigma_1^2(y-\mu_y)^2 - 2\text{cov}(x_1, x_2)(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{2(1-\rho^2)}$$

$$= \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}$$

Expandiendo la expresión anterior:

$$\sigma_2^2 x^2 = x^2$$

$$\sigma_1^2 y^2 = y^2$$

Donde, los términos cuadráticos de x y y deben coincidir y los términos constantes también, por ende:

$$\sigma_2^2 = 1$$
$$\sigma_1^2 = 1$$

Si $\sigma_2^2\mu_1^2 + \sigma_1^2\mu_2^2 = 0$ se tiene que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, entonces se obtiene:

$$f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

De esta forma, es posible escribir la expresión como PDF de Z tal que:

$$Z \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

b)

Se tiene que la matriz de covarianza es:

$$C_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_1, x_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Donde usando la equivalencia del determinante se tiene: $1 - \rho^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \text{cov}(x_1, x_2)^2 = (1)(1) - \text{cov}(x_1, x_2)^2$. De esta forma, $\rho = \text{cov}(x_1, x_2)$

c)

Resolviendo $det(C_z - \lambda I) = 0$

$$det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - \rho^2 = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = \rho^2$$

Donde se tienen dos casos:

$$1-\lambda = \rho \Longrightarrow \lambda = 1-\rho$$

$$1-\lambda = -\rho \Longrightarrow \lambda = 1+\rho$$

Finalmente: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \rho$, donde se evidencia que como $\rho \in [-1, 1]$, entonces $\lambda_{1,2} \in [0, 2]$.

Lo anterior, hace que C_z sea una matriz positiva semidefinida y por lo tanto una matriz de covarianza válida.

d)

Usando la definición del vector aleatorio Gaussiano se tiene que:

$$X \sim N(0, 1)$$
$$Y \sim N(0, 1)$$

Punto 5

La gráfica del diagrama de dispersión de las observaciones X y su transformación lineal Y se observan a continuación:

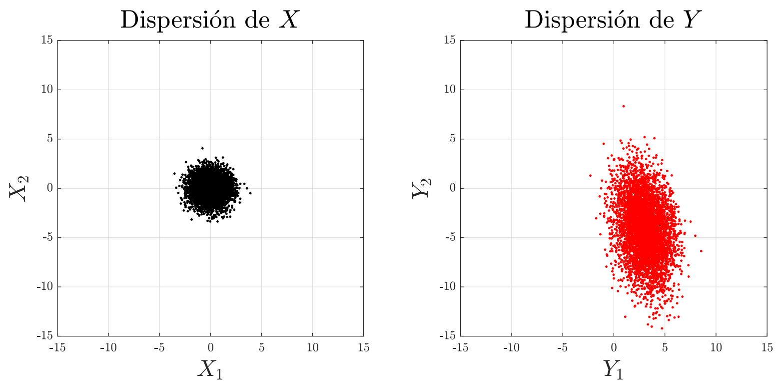

Figura 1: Diagramas de dispersión del vector aleatorio Gaussiano X y su transformación lineal Y.

La transformación lineal aplicada fue $Y = AX + b$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1.3957 & -0.2279 \\ -0.2279 & 2.9913 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

La dispersión obtenida de esta transformación es consistente pues se observa una mayor varianza de Y_2 con respecto a Y_1 (Forma elíptica de las curvas de nivel) y una tendencia a que Y_2 disminuye cuando Y_1 aumenta, esperado por una co-varianza (y correlación) negativa. Basados en la definición de vector aleatorio Gaussiano, Las funciones de probabilidad marginales son:

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 = 3, \sigma_1^2 = 2) \quad (24)$$

$$Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2 = -4, \sigma_2^2 = 9) \quad (25)$$

Sobreponiendo estas funciones de densidad de probabilidad con el histograma de las observaciones obtenidas para Y tenemos:

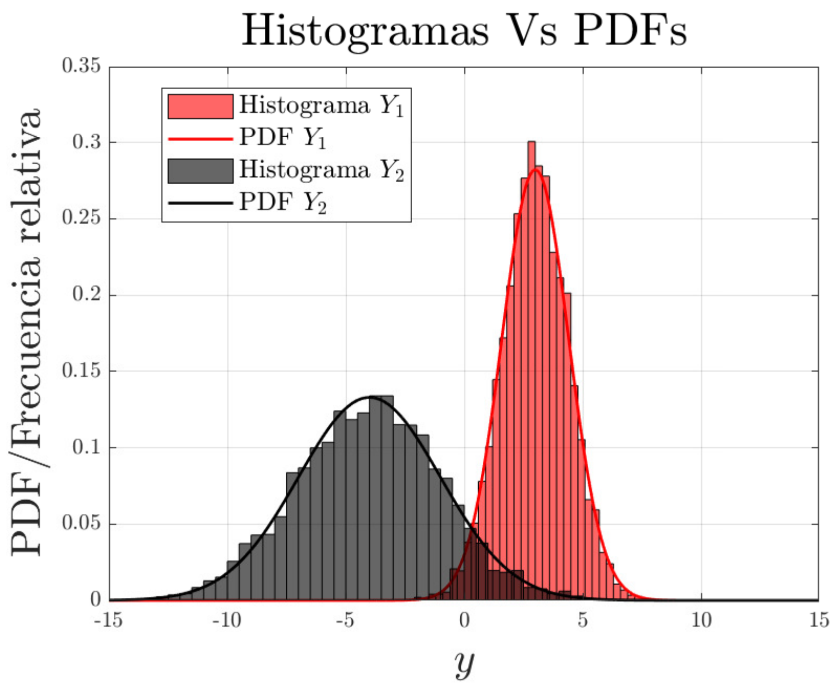

Figura 2: Superposición de los de las funciones de densidad de probabilidad de marginales de Y y el histograma normalizado de 5000 observaciones.

Esta ultima figura corresponde con lo esperado pues la distribución y el histograma se encuentran en concordancia mostrando las características deseadas de media y varianza especificadas para Y_1 y Y_2. Esto confirma la obtención directa de las funciones de probabilidad marginales.