Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 2
Procesos Estocásticos - IELE 4010

28-08-2021

1. Punto 1

Se tiene una variable aleatoria X con PMF como se muestra a continuación:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\exp\{-x^2\} & x = -3, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

Literal a)

Sabiendo que para toda función de masa de probabilidad se cumple:

$$\sum_k p_X(k) = 1 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in\{-3,-1,0,1,2\}} \frac{\exp\{-x^2\}}{a} = 1 \tag{2}$$

$$\Rightarrow a = 1 + 2e^{-1} + e^{-4} + e^{-9} \tag{3}$$

$$\Rightarrow a \approx 1{,}7542 \tag{4}$$

Calculando el valor esperado tenemos:

$$E[X] = \sum_{k\in\{-3,-1,0,1,2\}} k\frac{\exp\{-x^2\}}{a} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{a}\left[2e^{-4} - 3e^{-9}\right] \tag{6}$$

$$E[X] \approx 0{,}0207 \tag{7}$$

Finalmente calculando la varianza de X tenemos:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \tag{8}$$

$$= \frac{1}{a}\left[2e^{-1} + 4e^{-4} + 9e^{-9}\right] - E[X]^2 \tag{9}$$

$$Var(X) \approx 0{,}4613 \tag{10}$$

Literal b) y c)

Debido a que los cálculos de trasformación a la variable $Z = \exp\{-(X - E[X])^2\}$ dejan de ser sencillos analíticamente, se optó por una solución numérica directa en Excel cuyos resultados se muestran a continuación:

X	Z	$p_Z(z)$	$zp_Z(z)$	$z^2p_Z(z)$
-3	$1{,}09 \times 10^{-4}$	$7{,}04 \times 10^{-5}$	$7{,}67 \times 10^{-9}$	$8{,}35 \times 10^{-13}$
-1	$3{,}53 \times 10^{-1}$	$2{,}10 \times 10^{-1}$	$7{,}40 \times 10^{-2}$	$2{,}61 \times 10^{-2}$
0	1,00	$5{,}70 \times 10^{-1}$	$5{,}70 \times 10^{-1}$	$5{,}70 \times 10^{-1}$
1	$3{,}83 \times 10^{-1}$	$2{,}10 \times 10^{-1}$	$8{,}04 \times 10^{-2}$	$3{,}08 \times 10^{-2}$
2	$1{,}99 \times 10^{-2}$	$1{,}04 \times 10^{-2}$	$2{,}08 \times 10^{-4}$	$4{,}13 \times 10^{-6}$

Cuadro 1: Calculo numérico de función de masa de probabilidad para la variable transformada Z y de los sumandos de su primer y segundo momento ($E[X]$, $E[X^2]$).

La segunda y tercera columna de la tabla nos muestran la función de masa de probabilidad de la variable Z y sumando la cuarta y quinta columnas se puede encontrar el valor esperado y la varianza como sigue:

$$E[Z] \approx 0{,}7243 \tag{11}$$

$$E[Z^2] \approx 0{,}6265 \tag{12}$$

$$Var(Z) \approx 0{,}1017 \tag{13}$$

2. Punto 2

Sean $X_1, \ldots, X_{10}$ variables aleatorias de Bernoulli independientes, con $E[X_i] = p_i > 0$. Sea $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Los valores de p_i se eligen tal que $E[X] = 5$.

2.1. Literal a)

Se pide encontrar la varianza de la variable aleatoria X.
Como X es una suma de variables independientes de Bernoulli, se sabe que

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = E[X_1] + ... + E[X_{10}] = 5$$

Adicionalmente, se sabe que para una variable aleatoria de Bernoulli X_i, $E[X_i] = p_i$. Por lo tanto,

$$E[X] = p_1 + ... + p_{10} = 5$$

Se sabe que $var(X) = p_i(1-p_i)$ porque X es una suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli. Como las variables X_i son independientes se tiene que

$$var(X) = var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = var(X_1 + ... + X_{10}) = var(X_1) + ... + var(X_{10})$$

Luego

$$var(X) = p_1(1 - p_1) + ... + p_{10}(1 - p_{10})$$

2.2. Literal b)

En este literal se pide encontrar el valor de los p_i tal que $var(X)$ sea maximizada, sujeto a la condición de que $E[X] = 5$ y sabiendo que $0 \leq p_i \leq 1$. El problema de optimización que se pide resolver es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & var(X) = p_1(1 - p_1) + ... + p_{10}(1 - p_{10}) \\ \text{s.a.} \quad & p_1 + \cdots + p_{10} = 5 \\ & 0 \leq p_i \leq 1 \qquad\qquad\qquad\qquad i \in [1, 10] \end{aligned} \tag{14}$$

Este problema de optimización se puede resolver analíticamente por medio del método de multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, en este caso se usó la función *fmincon* de MATLAB para resolverlo, usando como condición inicial un vector columna de 10 componentes, en el que cada componente corresponde al número 0,9.

Una vez finalizada la optimización, el resultado arrojado por *fmincon* determinó que el vector de p_i, $i \in [1, 10]$ que maximiza la función de varianza $var(X)$ fue

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix}$$
$$p = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Con estos valores para cada p_i, se obtuvo que la función objetivo toma un valor máximo de

$$var(X) = 2{,}5$$

El código fuente de MATLAB claramente comentado que permitió realizar esta optimización se encuentra adjunto a este informe bajo el nombre *P_2_AND_3.m*.

3. Punto 3

Se tiene una variable de Bernoulli X_i con $i = 1, .., 5$ con media $E[X_i] = 0{,}3$ donde X es una variable aleatoria Binomial y $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$. A continuación se calcula $E[X_2|\bar{X} = 2]$:

$$P_{X_2|X}(X_2|X) = \frac{P(X_2 \cap X)}{P(X)} \tag{15}$$

$$P_{X_2|X=2}(X_2|X = 2) = \frac{P(X_2 \cap X = 2)}{P_X(2)} \tag{16}$$

$$P(X_2|X=2) = \frac{P(X_2 \cap X = 2)}{\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} p^2(1-p)^3} \tag{17}$$

$$Donde: P(X_2 = 1 \cap X_1 + X_3 + X_4 + X_5 = 1)$$
$$P(X_2 = 1)P(X_1 + X_3 + X_4 + X_5 = 1)$$
$$p \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} p(1-p)^3$$
$$4p^2(1-p)^3$$
$$P(X_2 = 1|\bar{X} = 2) = \frac{4p^2(1-p)^3}{\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} p^2(1-p)^3} = \frac{4}{\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}}$$

$$Finalmente: E[X_2|\bar{X} = 2] = (1) * P(X_2 = 1|\bar{X} = 2) + (0) * P(X_2 = 0|X_2 = 2)$$

$$E[X_2|X = 2] = \frac{4}{\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Literal a)

Se grafican las diferentes funciones de densidad de probabilidad para las variables aleatorias con distribuciones indicadas a continuación. El objetivo es observar cómo varía su comportamiento respecto a los parámetros de entrada.

Variable aleatoria de Bernoulli

Se define la variable aleatoria $X =$ Número de éxitos obtenidos de la siguiente forma:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } E \\ 0 & \text{si } E^c \end{cases}$$

Donde E es un evento de interés, cuya variable aleatoria tiene PMF igual a:

$$P_x(X) = \begin{cases} p & \text{si } X = 1 \\ 1-p & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Donde p es la probabilidad de que ocurra el evento E.

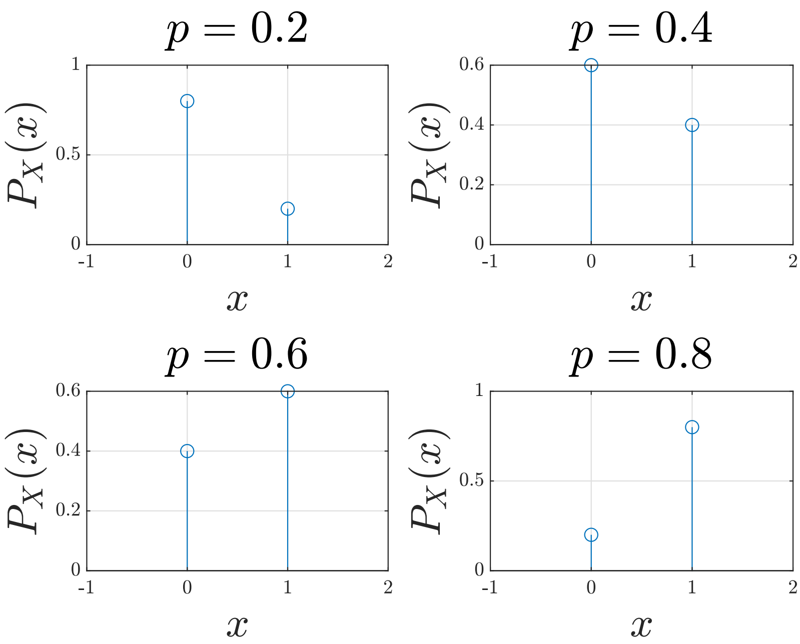

Figura 1: Función de masa de probabilidad para distintos parámetros de una variable aleatoria de Bernoulli.

Se observan diferentes funciones de masa de probabilidad para la variable aleatoria de Bernoulli, donde p es la probabilidad de que suceda el evento y 1-p de que no suceda.

Variable aleatoria binomial

La variable aleatoria Y está definida como el número de éxitos obtenidos en n repeticiones del experimento E con p como probabilidad de ocurrir el evento. La PMF correspondiente se define a continuación:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$$

Donde k es un número entero (k=0,1,2,3...). Se realizaron múltiples variaciones en los parámetros para observar los cambios. La imagen de la Figura 2 muestra la PMF con n=10, n= 20 y n=40 variando p en el rango de 0.2 hasta 0.8 con pasos de 0.2 para cada n.

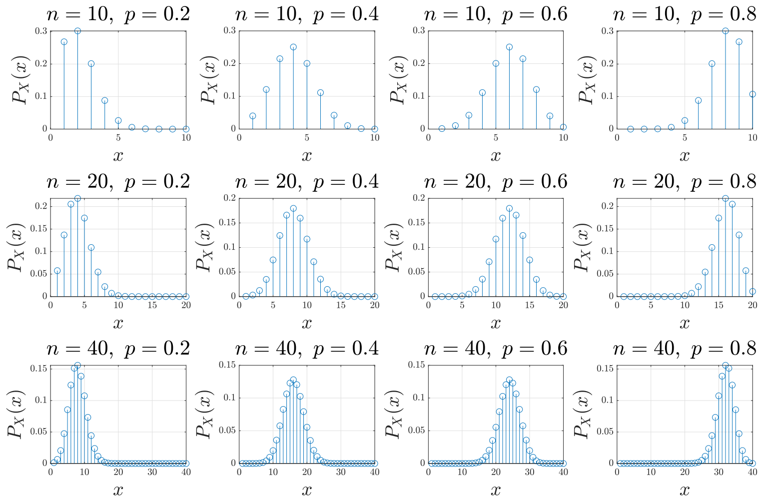

Figura 2: Función de masa de probabilidad para distintos parámetros de una variable aleatoria binomial.

Se evidencia que a medida que cambia la probabilidad p se desplaza la PMF donde este cambio implica desplazar la probabilidad entre los distintos valores, manteniendo la simetría.

Por otro lado, se puede observar que el parámetro n distribuye la probabilidad entre los diferentes k, la PMF se vuelve más ancha y menor en altura esto hace que se tenga el efecto de distribuir más la probabilidad en los distintos k.

Variable aleatoria geométrica

Se define la variable aleatoria X como el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito de un evento con probabilidad de ocurrir de p. La PMF correspondiente a esta variable aleatoria se muestra a continuación:

$$P(X = k) = P_X(k) = p \cdot (1 - p)^{k-1},\ \text{con } k = 0, 1, 2, ..$$

Donde k es un valor entero (0,1,2..). El parámetro que se varió para observar el comportamiento de la PMF fue p. Los resultados se muestran en la Figura 3.

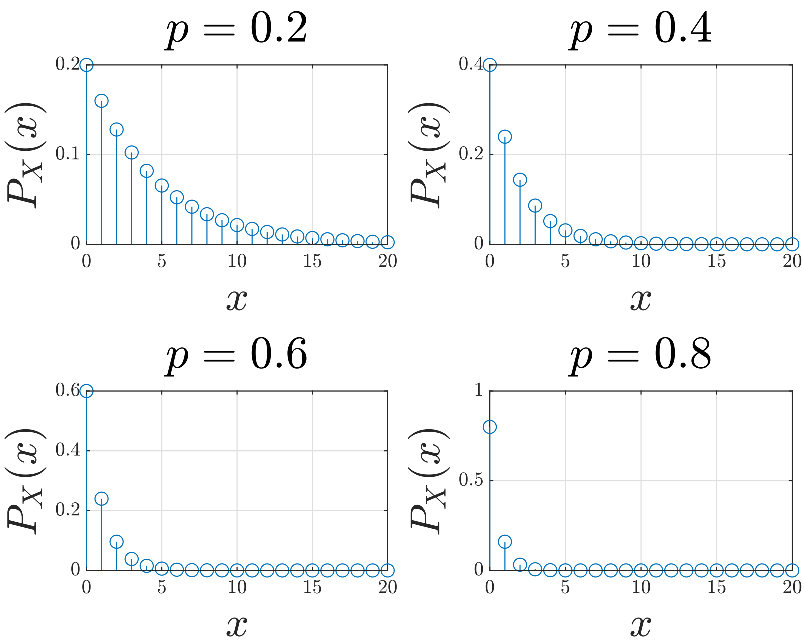

Figura 3: Función de masa de probabilidad para distintos parámetros de una variable aleatoria geométrica.

Como se puede observar en la Figura 3 el parámetro p tiene el efecto de volver más lenta la disminución de la PMF a medida que incrementa k. A menor p la probabilidad se concentra más en las primeras repeticiones, mientras a mayor p se tiene menos en las últimas repeticiones.

Variable aleatoria Poisson

Se tiene la variable aleatoria X (número de éxitos que suceden en un intervalo determinado por λ, conociendo que $\lambda > 0$). Asimismo, se tiene que la PMF se define como:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Donde es un valor entero (0,1,2...). El parámetro que se varió es λ y se obtuvo la gráfica mostrada en la Figura

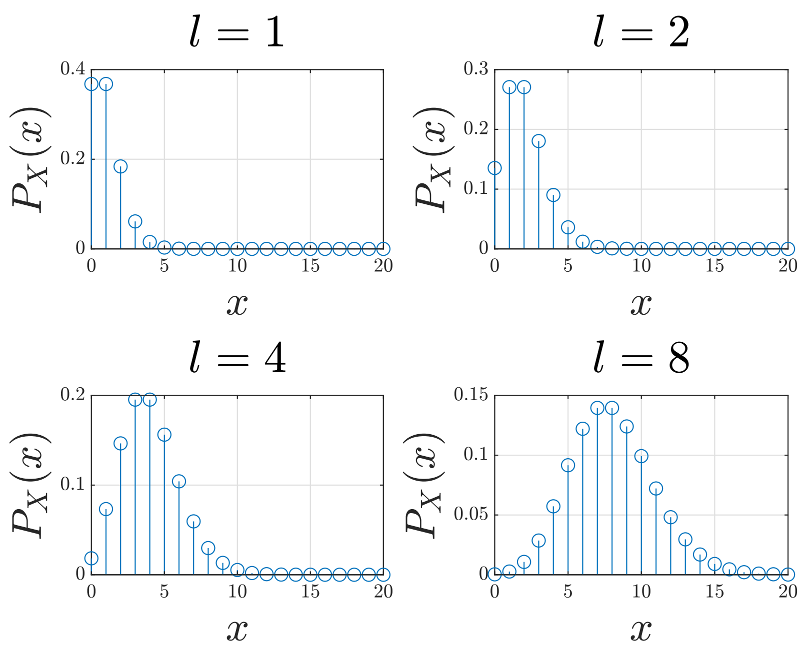

Figura 4: Función de masa de probabilidad para distintos parámetros de una variable aleatoria de Poisson.

Literal b)

A partir del archivo `dataCaso2.txt`, que contiene los resultados de $N = 10000$ experimentos de una variable aleatoria X, se buscan encontrar los distintos elementos de dicha variables y sus respectivas frecuencias relativas.

$$F_i = \frac{N_{E_i}}{N}, \quad i = 0, 1, 2, ..., 8 \tag{18}$$

Donde N es el número total de experimentos realizados y N_{E_i} es el número de veces que se obtuvo el evento E_i perteneciente a la variable aleatoria X. Se grafican los resultados para ver como se comporta la PMF.

Se realiza una aproximación a la variable aleatoria X, luego de varios ajustes manuales se encontró que por medio de una variable aleatoria de Poisson con un $\lambda = 15$ se puede hacer una aproximación adecuada. Ambas PMF se superponen para evidenciar la aproximación, esto se muestra en la Figura 5.

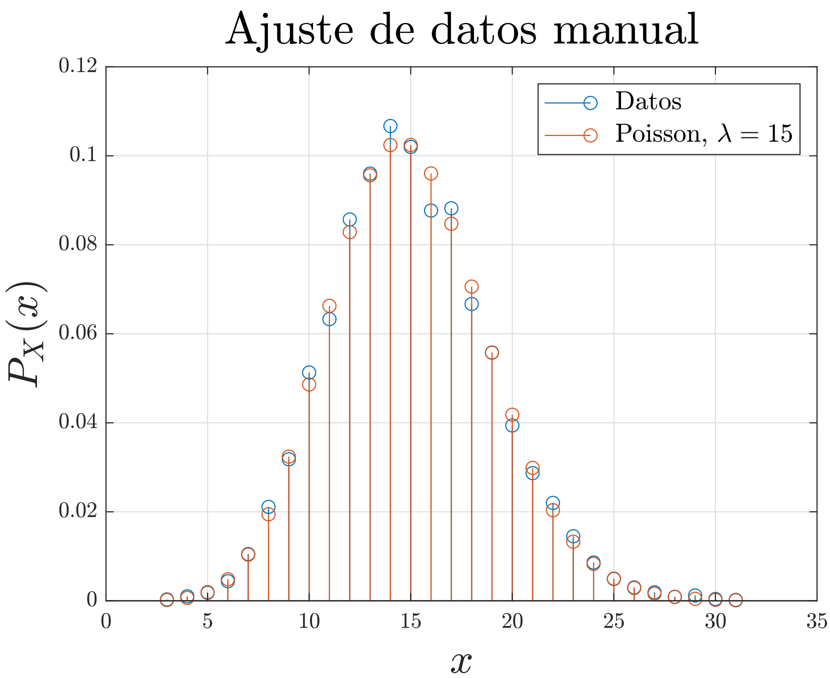

Figura 5: Ajuste manual de frecuencias relativas de los datos entregados a variable aleatoria de Poisson.