Juan Pablo Naranjo
201730006
Gabriel Mateo Mejía
201718064
Maria Fernanda Martinez
201716576

CASO DE ESTUDIO 3
Procesos Estocásticos - IELE 4010

04-09-2021

1. Punto 1

Se extraen los datos del archivo *datosCaso3punto1.txt*, que corresponden a observaciones de una variable aleatoria que sigue una distribución gamma. Se recuerda que la distribución de una variable Gamma con parámetros α y β está dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$$

con x, α, $\beta > 0$ en donde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Para el caso particular de todos los enteros positivos se tiene que

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

1.1. a)

Se pide construir un histograma con los datos obtenidos. Para hacer esto, se procedió a separar los datos en diferentes grupos. Cada grupo representa un intervalo de valores entre el cual se pueden encontrar los datos de la variable aleatoria. Se determinó que los datos cubrían un rango de valores entre 0 y 21. Por lo tanto, se decidió crear intervalos de longitud 1 para cubrir la extensión de los datos. Por ejemplo, en el intervalo de valores entre 0 y 1, se encontrarán todas las observaciones de la variable aleatoria cuyo valor se encuentre entre 0 y 1.

Se determinó la frecuencia relativa con la cual ocurren observaciones de la variable aleatoria para cada uno de los intervalos. Por ejemplo, si el intervalo entre 0 y 1 tiene una frecuencia relativa de 20, quiere decir que dentro de todos los datos, existen 20 de ellos cuyo valor se encuentra entre 0 y 1. En la figura 1 se puede encontrar el histograma construido para los datos, tal como se describió previamente.

1.2. b)

Se procedió a construir la función de distribución acumulada de la variable aleatoria partiendo del histograma de la figura 1. Para hacer esto, se tomó el valor de la frecuencia relativa del intervalo i y se le fue sumando a este valor la frecuencia del intervalo $i-1$, con la excepción de que para el intervalo 1 se usó directamente la frecuencia del intervalo 1. De esta forma, se construyó un vector cuya componente i es igual a la suma de todas sus anteriores componentes, y se

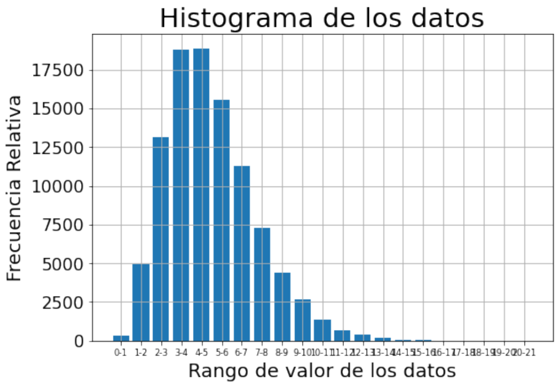

Figura 1: Histograma de los datos

graficó este vector contra el rango de los datos. Sin embargo, para normalizar los datos, primero se dividió cada componente de este vector por la longitud de los datos. La gráfica resultante de la estimación de la función de probabilidad acumulada se muestra en la figura 2.

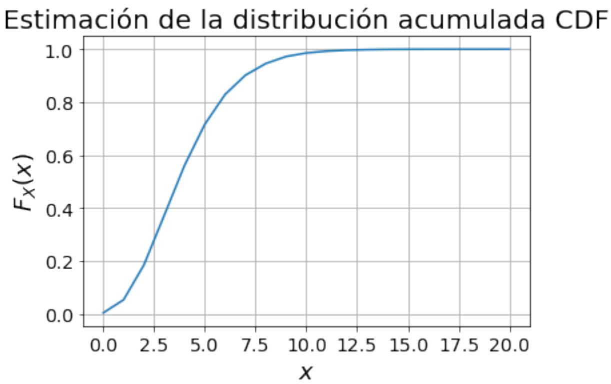

Figura 2: Estimación de la función de distribución acumulada

1.3. c)

Se procedió a construir una estimación de la función de densidad de probabilidad (PDF) de los datos a partir del histograma en la figura 1. Para hacer esto, simplemente se tomó la frecuencia de cada intervalo de datos y se dividió dicha frecuencia por el tamaño total de los datos, dándonos así una estimación de la densidad de probabilidad para cada intervalo del histograma. Esta estimación de la PDF se puede observar en la figura 3.

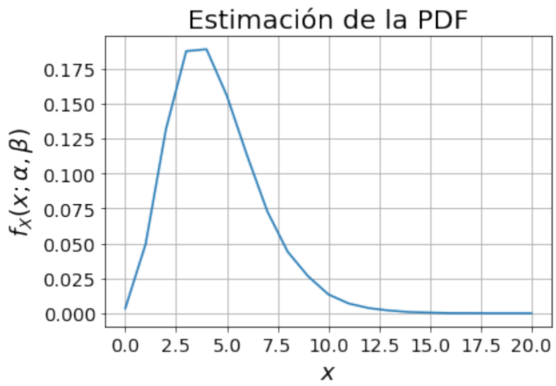

Figura 3: Estimación de la función de densidad de probabilidad

Por definición, se sabe que $P(a \leq z \leq b) = \int_a^b f_Z(z)dz$. Si asumimos que $\Delta = b - a$ es pequeño, tendríamos que $P(a \leq z \leq b) \approx f_Z(a)\Delta$, o en otras palabras, $f_Z(a) \approx P(a \leq z \leq b)/\Delta$.

En este caso, nuestro $\Delta = 1$, pues los intervalos decididos para nuestro histograma tienen longitud 1. Por lo tanto, para estimar la PDF de los datos, se usó

$$f_Z(a) \approx \frac{P(a \leq z \leq b)}{\Delta}$$

con $\Delta = 1$ y $P(a \leq z \leq b) = \frac{f_{rel}}{N}$, donde f_{rel} corresponde a la frecuencia relativa de cada intervalo de datos, información que se obtuvo a partir del histograma en el literal a) y N es el número total de datos (observaciones de la variable aleatoria).

1.4. d)

Basado en la estimación de la PDF encontrada en el literal anterior, se procedió a determinar qué parámetros puede tener esta estimación, comparándola con la PDF de una distribución gamma real". Para determinar estos parámetros, se establecieron algunos valores del parámetro α y β para mirar cómo se comporta la distribución gamma real con diferentes combinaciones de estos parámetros.

Se traslapó cada función gamma real con una diferente combinación de parámetros α y β sobre la PDF estimada que se encontró en el literal anterior y se comparó la forma resultante de cada una de las PDFs. En las figuras 4, 5, 6 y 7 se pueden observar algunos de los resultados de estas combinaciones.

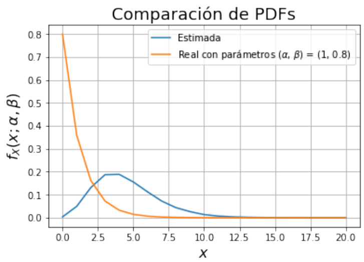

Figura 4: $(\alpha, \beta) = (1, 0{,}8)$

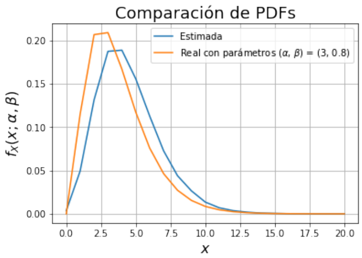

Figura 5: $(\alpha, \beta) = (3, 0{,}8)$

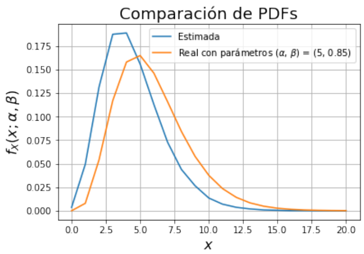

Figura 6: $(\alpha, \beta) = (5, 0{,}85)$

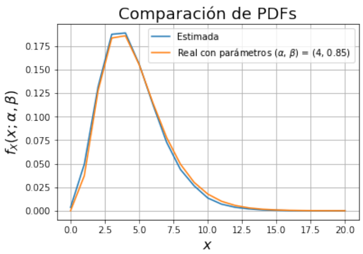

Figura 7: $(\alpha, \beta) = (4, 0{,}85)$

De la figura 4 se puede notar que una combinación de parámetros $(\alpha, \beta) = (1, 0{,}8)$ no es apropiada para los datos de las observaciones de la variable aleatoria en cuestión, mientras que de las figuras 5 y 6 se puede notar que la combinación de parámetros correspondiente a cada uno de estos casos se acerca un poco más a la PDF estimada. Finalmente, en la figura 7 se puede notar que la combinación $(\alpha, \beta) = (4, 0{,}85)$ se ajusta casi perfectamente a las observaciones de la variable aleatoria en cuestión, por lo que se seleccionan estos parámetros como los parámetros que definen la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria observada en este punto.

2. Punto 2

Se tiene que X es una variable aleatoria discreta, binaria, que toma valor de 1 o 2 con probabilidades $P(X = 1) = 0{,}6$ y $P(X = 2) = 0{,}4$. También se tiene una variable aleatoria $W \sim N(0, 1)$. Se sabe que X y W son variables aleatorias independientes entre sí. Finalmente, se tiene una variable aleatoria $Y = X + W$. Se pide encontrar $P(X = 2|Y = 3)$.

Para empezar, se define la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X como

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}6 & , \quad x = 1 \\ 0{,}4 & , \quad x = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Por otro lado, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria W está dada por

$$f_W(w; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-w^2}{2} \right\} \tag{2}$$

Para encontrar $P(X = 2|Y = 3)$, se parte del hecho de que esta probabilidad se puede ver como una PMF. Sin embargo, como la variable aleatoria discreta X está condicionada por el valor de Y, una variable aleatoria continua, se plantea el teorema de Bayes teniendo en cuenta que hay algunas funciones que son PMFs (p) y otras que serán PDFs (f). Aplicando dicho teorema para encontrar la probabilidad en cuestión, se tiene:

$$P(X = 2|Y = 3) = p_X(x)\frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)} \tag{3}$$

Reemplazando la información conocida dentro de la ecuación, se obtiene:

$$P(X = 2|Y = 3) = p_X(X = 2|Y = 3) = p_X(2)\frac{f_{Y|X}(y = 3|x = 2)}{f_Y(3)} \tag{4}$$

Se tienen dos incógnitas: $\frac{f_{Y|X}(y=3|x=2)}{f_Y(3)}$ y $f_Y(3)$. Para encontrar el primer término desconocido se parte de saber que $Y = X + W$. Como esta ecuación es cierta para todo X, se sabe, entonces, que

$$(Y|X = 2) = W + 2$$

es decir que, sabiendo que X vale 2, la variable Y va a ser la misma variable W, sumada 2. Teniendo esto en cuenta, se puede aplicar la teoría de transformación de variables aleatorias.

De manera general, cuando se tiene una variable aleatoria Y que es una combinación lineal de otra variable aleatoria X, es decir, $Y = g(X) = aX + b$, se sabe que la función de densidad de probabilidad de Y estará dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{5}$$

Aplicando esta teoría a este caso particular, se tiene que $b = 2$ y $a = 1$. Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de la variable Y dado que X vale 2 será:

$$f_{Y|X}(y|x = 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(y-2)^2}{2}\right\} \tag{6}$$

El efecto observado es que la media de la variable aleatoria X ahora está desplazada por 2.

Por otro lado, para encontrar la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria Y, se usa la ley de probabilidad total, que nos dice que

$$f_Y(y) = P(X = 1)f_{Y|X=1}(y) + P(X = 2)f_{Y|X=2}(y) \tag{7}$$

Para encontrar los términos $f_{Y|X=1}(y)$ y $f_{Y|X=2}(y)$ se usa la misma teoría de transformación de variables aleatorias explicada previamente. Como ya se conoce una expresión para calcular las dos incógnitas que se tenían, se procede a calcular $P(X=2|Y=3)$:

$$
\begin{aligned}
P(X=2|Y=3) &= p_X(x=2|Y=3)\\
p_X(x=2|Y=3) &= p_X(2)\frac{f_{Y|X}(y=3|x=2)}{f_Y(3)}\\
&= p_X(2)\frac{f_{Y|X}(y=3|x=2)}{P(X=1)f_{Y|X=1}(3)+P(X=2)f_{Y|X=2}(3)}\\
&= (0{,}4)\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(3-2)^2}{2}\right\}}{(0{,}6)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(3-1)^2}{2}\right\}+(0{,}4)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(3-2)^2}{2}\right\}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Finalmente,

$$
P(X=2|Y=3) = 0{,}7492 \approx 0{,}75 \tag{9}
$$

3. Punto 3

Para explorar la influencia del parámetro ρ en la función, se dejaron fijos los valores $\mu_x=\mu_y=0$ y se varió el valor de ρ en intervalos de 0.2 desde -0.8 hasta 0.8. Los resultados tanto para los contornos como para las superficies pueden ser observados a continuación:

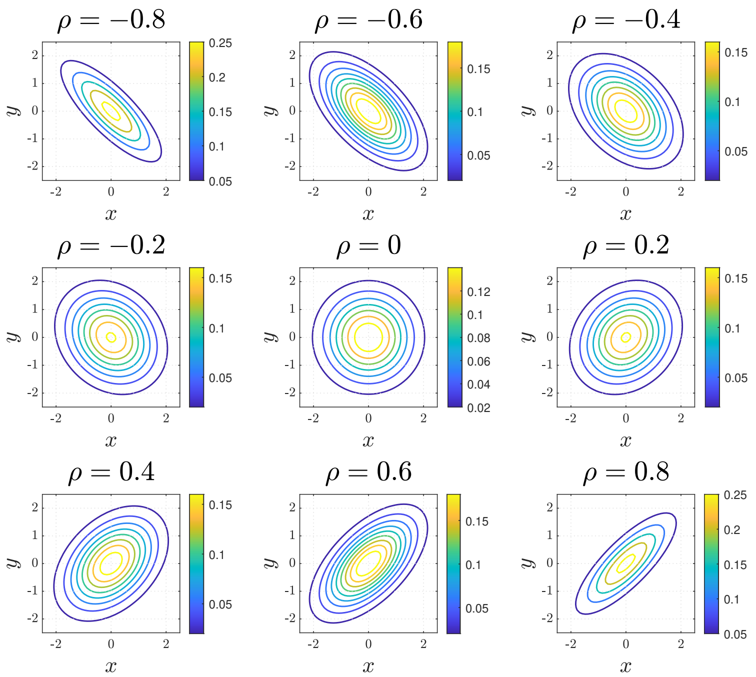

Figura 8: Gráficas de contornos de la función especificada dependiendo del parámetro ρ.

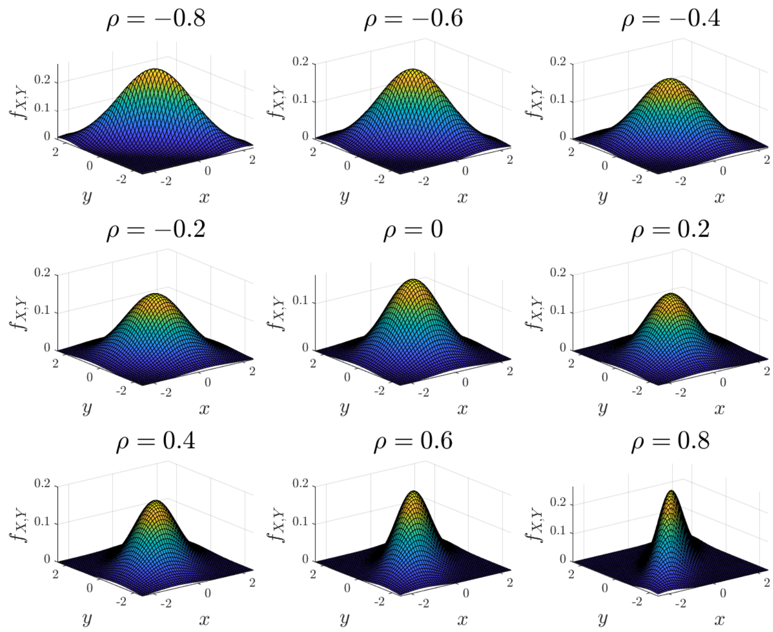

Figura 9: Gráficas de superficie de la función especificada dependiendo del parámetro ρ.

De donde es claro que ρ influencia el ángulo de inclinación y la excentricidad de las elipses generadas en las curvas de nivel. Haciendo uso de este conocimiento para realizar el ajuste manual de los datos, se escogió el conjunto de parámetros $[\mu_x, \mu_y, \rho] = [-1, 5, -0{,}5]$ obteniendo los resultados mostrados a continuación:

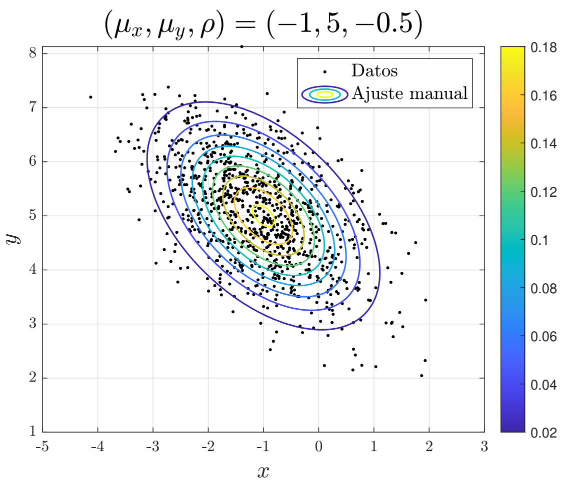

Figura 10: Ajuste manual de los datos propuesto.

4. Punto 4

La distancia al origen de un punto cartesiano bidimensional puede calcularse como:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10}$$

Aplicando para nuestro caso especifico tenemos:

$$D = \sqrt{X^2 + 1} \tag{11}$$

Por tanto, nos es posible determinar su función de densidad de probabilidad como sigue:

$$f_D(d) = \sum_k \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \tag{12}$$

Donde $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y x_k son las raíces de la ecuación $g(x) = d$. Así las cosas, las raíces de la ecuación son:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{d^2 - 1} \tag{13}$$

Y la primera derivada de $g(x)$ es:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \tag{14}$$

Evaluando se tiene:

$$|g'(x_1)| = |g'(x_2)| = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{d} \tag{15}$$

Y por ende la distribución de probabilidad quedaría:

$$f_D(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 - 1}} \left[f_X\left(\sqrt{d^2 - 1}\right) + f_X\left(-\sqrt{d^2 - 1}\right) \right] \tag{16}$$

Definiendo la función:

$$N(\mu, \sigma, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{17}$$

Es posible expresar la función de probabilidad final de la distancia como:

$$f_D(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 - 1}} \left[N\left(1, 5, \sqrt{d^2 - 1}\right) + N\left(1, 5, -\sqrt{d^2 - 1}\right) \right] \tag{18}$$

Cuyo desarrollo analítico es tan extenso que no sera consignado en el informe por facilidad de lectura. Además, la función de densidad acumulada es:

$$F_D(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \left[N\left(1, 5, \sqrt{\tau^2 - 1}\right) + N\left(1, 5, -\sqrt{\tau^2 - 1}\right) \right] d\tau \tag{19}$$

Donde, de nuevo, el desarrollo analítico es tan extenso que no sera consignado en el informe por facilidad de lectura. No obstante, a pesar de no desarrollarlas analíticamente, estas funciones son sencillas de simular computacionalmente. A continuación se observan sus comportamientos:

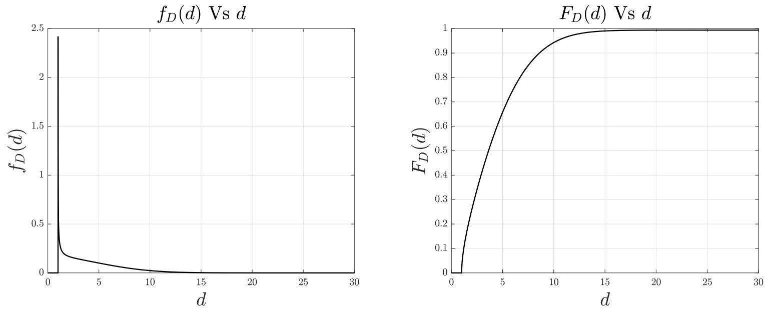

Figura 11: Función de densidad de probabilidad y probabilidad acumulada para la distancia al origen del punto especificado.

De donde es claro que la distancia tiene probabilidad cero de ser menor a 1. Lo cual es esperado partiendo de la formulación geométrica de nuestro problema.

5. Punto 5

Para este literal, se tienen dos variables aleatorias con distribución exponencial como se puede ver a continuación:

$$f_T(t|c_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \tag{20}$$

$$f_T(t|c_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{21}$$

Los valores del parámetro λ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 6$. A continuación, se encuentra la función de densidad de probabilidad $f_T(t)$, teniendo en cuenta la probabilidad con la que un cliente elije entre los cajeros 1 y 2. Donde la probabilidad para el cajero 1 es de $\frac{2}{3}$ y para el cajero 2 es de $\frac{1}{3}$.

Finalmente, se define la función de densidad de probabilidad como la suma ponderada de las funciones dadas y se grafica en un intervalo de tiempo entre 0 y 5.

$$f_T(t) = \frac{2}{3} * f_T(t|c_1) + \frac{1}{3} * f_T(t|c_2)$$

$$f_T(t) = \frac{2}{3} * 2 * e^{-2*t} + \frac{1}{3} * 6 * e^{-6*t}$$
$$f_T(t) = \frac{4}{3} * e^{-2*t} + 2 * e^{-6*t}$$

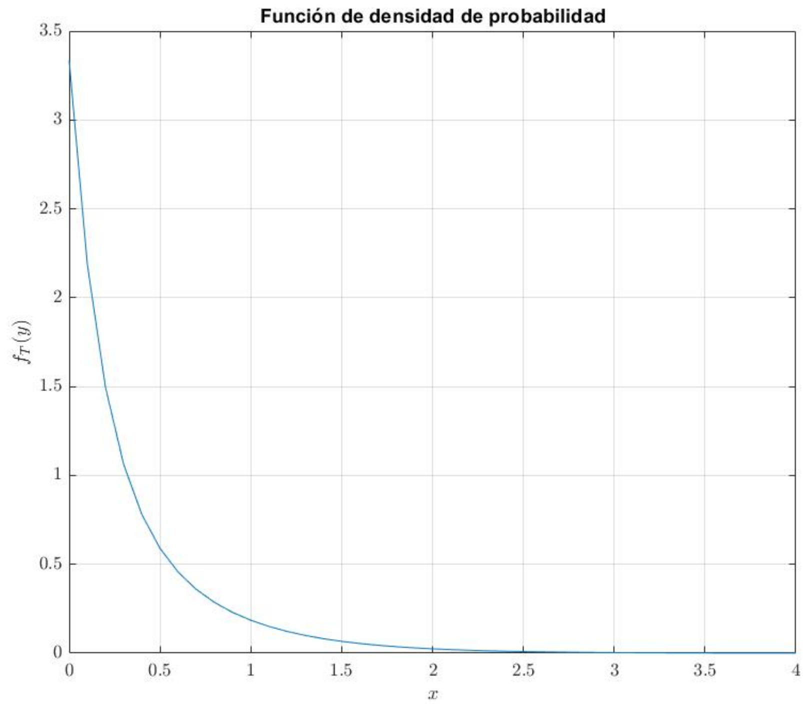

Figura 12: Función de densidad de probabilidad para el tiempo de atención

6. Anexos

6.1. Código punto 3

```
%% Punto 3.a.

%Limpiar ambiente
clear;
clc;
% Poner labels en latex
set(groot, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
set(0,'defaulttextInterpreter','latex');


% Construccion por pasos de la funcion grande
ex = @(x, y, mux, muy, r) -((x-mux).^2 + (y-muy).^2 -
    2*r.*(x-mux).*(y-muy))/(2*(1-r.^2));
```

```
fxy = @(x, y, mux, muy, r) ((1)/(2*pi*sqrt(1-r.^2))).*exp( ex(x, y, mux,
    muy, r) );

% Vectores de puntos
x = linspace(-2.5,2.5,50);
y = linspace(-2.5,2.5,50);
% Mesh de puntos
[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Declaracion de posibles rho
rho = -0.8:0.2:0.8;

figure;
%Ciclo para el subplot contornos
for i = 1:9
    % Calculo de funcion
    Z = fxy(X,Y, 0, 0, rho(i));
    % Contorno
    subplot(3,3,i)
    %contour(X,Y,Z,'ShowText','on', 'TextStep', 0.02)
    contour(X,Y,Z, "linewidth", 1)
    colorbar
    xlim([min(x),max(x)]);
    ylim([min(y),max(y)]);
    grid on;
    xlabel("$x$", 'fontsize',15)
    ylabel("$y$", 'fontsize',15)
    title("$\rho = "+num2str(rho(i))+"$", 'fontsize',19)
end


figure;
%Ciclo para el subplot superdicies
for i = 1:9
    % Calculo de funcion
    Z = fxy(X,Y, 0, 0, rho(i));
    subplot(3,3,i)
    %Superficie
    surf(X,Y,Z)
    xlim([min(x),max(x)]);
    ylim([min(y),max(y)]);
    grid on;
    xlabel("$x$", 'fontsize',15)
    ylabel("$y$", 'fontsize',15)
    zlabel("$f_{X,Y}$", 'fontsize',15)
    title("$\rho = "+num2str(rho(i))+"$", 'fontsize',19)
end

%% Punto 3.b.

% Lectura de los datos
dat3 = readmatrix("datosCaso3punto3.txt");

% Grafico de dispersion
```

```
plot(dat3(:,1),dat3(:,2),".k");
grid on;
hold on;

% Vectores de puntos
x = linspace(-5,3,100);
y = linspace(1,8,100);

% Mesh de puntos
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z_test = fxy(X,Y, -1, 5, -0.5);

% Grafico de contornos ajustado
contour(X,Y,Z_test, "linewidth", 1);
xlabel("$x$", 'fontsize',15)
ylabel("$y$", 'fontsize',15)
title("$(\mu_x,\mu_y,\rho) = (-1, 5, -0.5)$", 'fontsize',19);
legend("Datos", "Ajuste manual", 'fontsize', 12);
colorbar;
```

6.2. Código punto 4

```
%% P4

% Definicion de funcion de densidad de probabilidad
fd = @(d) ((d)./sqrt(d.^2-1)).*(normpdf(sqrt(d.^2-1),1,5) +
    normpdf(-sqrt(d.^2-1),1,5));
% Definicion de funcion acumulada de probabilidad
Fd = @(d) cumsum(fd(d));

%Rango maximo
max = 30;
% Numero de puntos
num = 10000;
% Vector de prueba
d = linspace(0,max,num);

% Realizacion de grafica
figure;
subplot(1,2,1)
plot(d,fd(d),'k','linewidth',1.2);
grid on;
xlabel("$d$", "Fontsize", 19);
ylabel("$f_D(d)$", "Fontsize", 19);
title("$f_D(d)$ Vs $d$", "Fontsize", 19);
subplot(1,2,2)
plot(d, Fd(d)*max/num,'k','linewidth',1.2);
grid on;
xlabel("$d$", "Fontsize", 19);
ylabel("$F_D(d)$", "Fontsize", 19);
title("$F_D(d)$ Vs $d$", "Fontsize", 19);
```