Caso de Estudio 2
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo

---

1. Sea X una variable aleatoria con PMF:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\exp^{(-x^2)}}{a}, & \text{si } x = -3, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

   a) (10 puntos) Encuentre a, y $\mathbf{E}[X]$, y var(X).
   b) (10 puntos) Encuentre el PMF de la variable aleatoria discreta $Z = \exp^{-(X-\mathbf{E}[X])^2}$.
   c) (10 puntos) Encuentre $\mathbf{E}[Z]$, y var(Z).

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ variables aleatorias de Bernoulli independientes, con $\mathbf{E}[X_i] = p_i > 0$. Sea $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Los valores de p_i se eligen tal que $\mathbf{E}[X] = 5$.

   a) (10 puntos) Encuentre var(X).
   b) (20 puntos) Encuentre el valor de los p_i tal que var(X) es maximizada, sujeto a que $\mathbf{E}[X] = 5$. Puede utilizar alguna función para optimizar en Matlab o Python, o la teoría de multiplicadores de Lagrange para solucionar este problema. Anexe el código fuente (claro y comentado) o la demostración matemática al documento. Todo procedimiento tiene que estar justificado.

3. (20 puntos) Sea X_i, con $i = 1, \ldots, 5$ una variable de Bernoulli con media $\mathbf{E}[X_i] = 0{,}3$. Sea $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Calcule $\mathbf{E}[X_2|X = 2]$.
   Tenga en cuenta que X es una variable aleatoria Binomial, y que $\{X_2 = 1\}$ se puede ver como un evento independiente al evento $\{X_1+X_3+X_4+X_5 = 1\}$ (lo cual podría ser útil para calcular $P(X_2 = 1 \cap X = 2)$).

a) (10 puntos) Grafique las funciones de masa de probabilidad para las variables aleatorias Bernoulli, Binomiales, Geométrica, y Poisson para diferentes valores de los parámetros correspondientes. No puede utilizar funciones predeterminadas para graficar cada una de estas funciones (por ejemplo, la función `poisspdf` de Matlab no se puede utilizar).

b) (10 puntos) El archivo `dataCaso2.txt` contiene los valores de una variable aleatoria para 10000 repeticiones de un experimento aleatorio. De esta variable aleatoria sólo se sabe que puede ser Uniforme, Geométrica o de Poisson. Utilizando estos datos, determine la frecuencia relativa de cada uno de los valores que esta variable aleatoria toma. No puede utilizar funciones predeterminadas para calcular o graficar histogramas en este caso de estudio. Determine, a ojo, la función de masa de probabilidad que usted crea mejor se le ajustaría. En una figura, muestre las gráficas traslapadas de las frecuencias relativas y esa función de masa de probabilidad que usted sugiere es la que mejor se aproxima.

Cualquier inquietud con respecto a este caso de estudio por favor escribir a jc.ortegon@uniandes.edu.co .