Caso de Estudio 9
IELE-4010 Procesos Estocásticos 2021-II
Profesor: Luis Felipe Giraldo
En cada uno de los problemas hay que intentar resolver todos los enunciados. Si hay algún enunciado que no se intentó resolver, el ejercicio completo tendrá una nota de 0.0.

---

1. (20 puntos) Considere el proceso estocástico $X(t) = A + Bt + t^2$, donde A y B son variables aleatorias iid, y $A, B \sim N(0,1)$. De este proceso estocástico se conoce que

$$Z_{s,t} = [X(s), X(t)]^T = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$ utilizando los siguientes métodos:

a) Escriba el vector $Z_{s,t}$ de la forma $Z_{s,t} = HW + b$, donde $W = [A, B]^T$ y $b = [s^t, t^2]^T$. Encuentre la matriz de covarianza de W. Utilizando las propiedades de vectores aleatorios y matrices de covarianza vistos anteriormente, encuentre la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$ utilizando la matriz de covarianza de W y la matriz H.

b) Encuentre a mano la varianza de $X(t)$ y la covarianza entre $X(t)$ y X(s). Utilice estos dos resultados para construir la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$.

2. (40 puntos) Considere el proceso estocástico $X(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + t^4$, donde A, B, C, D son variables aleatorias iid, con distribución $N(0,1)$.

a) Encuentre la media, la autocorrelación, y la autocovarianza del proceso estocástico $X(t)$.

b) Encuentre la función de densidad de probabilidad de $X(t)$.

c) Sea $Z_{s,t}$ un vector aleatorio definido como $Z_{s,t} = [X(s), X(t)]^T$. Encuentre una expresión para $Z_{s,t}$ como una transformación del vector aleatorio $[A, B, C, D]^T$. Encuentre la media y la matriz de covarianza de $Z_{s,t}$.

3. (40 puntos) Considere el siguiente proceso estocástico: $X(t) = A\cos(2\pi ft + \Theta)$, donde $f = 0{,}1$ Hz es una constante. Las variables aleatorias A y Θ son variables aleatorias independientes tales que $A \sim U[0,5]$, $\Theta \sim U[0,\pi]$.

a) Encuentre la caracterización de segundo orden del proceso estocástico. Es decir, encuentre $\mu_X(t)$ y $R_X(t,s)$.

b) Asuma que $t \in \mathbb{N}$. Para $t = 1, \cdots, 50$, genere 10 realizaciones del proceso estocástico. Grafique $X(t)$ vs t para cada una de las 10 realizaciones de tal forma que todas las realizaciones queden traslapadas.