Listas MS712

Thiago Felipe Castro Carrenho - RA224831

10 de abril de 2021

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MS712 Turma A - Análise Numérica III 1S2021
Prof.: Maicon Ribeiro Correa

Listas 1 e 2

Lista 1 - Método de Galerkin

Seja o seguinte problema de valor de contorno.

Problema D: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$- u'' + u = x \quad \forall\, x \in \Omega = (0,1), \tag{1}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\mathcal{U}$ é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis que satisfazem $u(0) = u(1) = 0$.

Um problema variacional associado ao **Problema D**, consiste em

Problema V: Encontrar $u \in \mathcal{V}$ tal que

$$\int_0^1 [u'v' + uv]dx = \int_0^1 xvdx \quad \forall\, v \in \mathcal{V}, \tag{2}$$

onde $\mathcal{V}$ é o espaço das funções diferenciáveis que satisfazem $v(0) = v(1) = 0$.

Exercício 1

Seja $\mathcal{V}_h = \text{span}\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{V}$.

Item a)

Apresente o Método de Galerkin para o **Problema V**.

R.: O Método de Galerkin busca encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ que seja a melhor aproximação de $u \in \mathcal{V}$, portanto, encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

Problema V$_h$: Encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$\int_0^1 [u_h'v_h' + u_h v_h]dx = \int_0^1 x v_h dx, \tag{3}$$

$\forall\, v_h \in \mathcal{V}_h$.

Item b)

Se a solução do Método de Galerkin for escrita como

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$$

mostre que o problema de dimensão finita pode ser associado à resolução de um sistema linear na forma

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{w}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, explicitando quais são os elementos a_{ij} da matriz A e f_i do vetor $\mathbf{f}$.

R.: Tomemos $u_h = \sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i(x)$, como sugerido no enunciado e $v_h = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\phi_j(x)$, substituindo estas expressões na equação do **Problema V**$_h$ e rearranjando termos, temos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i'(x)\sum_{j=1}^{n}\beta_j\phi_j'(x) + \sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i(x)\sum_{j=1}^{n}\beta_j\phi_j(x)\right]dx - \int_0^1 x\sum_{j=1}^{n}\beta_j\phi_j(x)dx \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left[\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j\right]dx - \int_0^1\sum_{j=1}^{n}\beta_j x\phi_j dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n}\beta_j \int_0^1 \left[\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j\right]dx - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\int_0^1 x\phi_j dx \\
&= \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\int_0^1 \left[\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j\right]dx - \int_0^1 x\phi_j dx\right).
\end{aligned}
$$

Tomando $\beta_1 = 1$ e $\beta_j = 0 \ \forall \ j \neq 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\int_0^1 \left[\phi_i'\phi_1' + \phi_i\phi_1\right]dx - \int_0^1 x\phi_1 dx = 0.$$

Tomando $\beta_2 = 1$ e $\beta_j = 0 \ \forall \ j \neq 2$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\int_0^1 \left[\phi_i'\phi_2' + \phi_i\phi_2\right]dx - \int_0^1 x\phi_2 dx = 0.$$

Fazendo isso para todo β_j, temos que, $\forall \ j = 1, \cdots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\int_0^1 \left[\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j\right]dx = \int_0^1 x\phi_j dx.$$

Dessa forma, podemos escrever a forma matricial como:

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f}$$

com os seguintes valores:

$$[A]_{ij} = a_{ij} = \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j)dx$$

$$[\mathbf{f}]_i = f_i = \int_0^1 x\phi_i dx$$

e tendo $\mathbf{w}$ o vetor de incógnitas, resposta da solução matricial que se torna a solução aproximada do problema ao substituir em $u_h = \sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i(x)$.

Item c)

Seja $\phi_i(x) = x^i(x-1)$. Encontre a solução aproximada do **Problema V** para n =1, 2 e 3.

$(\mathbf{n=1})\mathbf{R}$ **.:** Para $n=1$, temos o conjunto de funções $\{\phi_1\}=\{x(x-1)\}$, e derivando as funções obtemos $\{\phi_1'\}=\{2x-1\}$, assim temos o sistema:

$$\left[\int_0^1 ((2x-1)^2+x^2(x-1)^2)dx\right]\cdot[w_1]=\left[\int_0^1 x^2(x-1)\right].$$

Resolvendo computacionalmente o sistema temos a solução:

$$\mathbf{w}=[w_1]=\left[-\frac{5}{22}\right]$$

Dessa forma, a solução aproximada é:

$$u_h=w_1\phi_1(x)=-\frac{5}{22}x(x-1)$$

$$u_h=-\frac{5}{22}x(x-1) \tag{4}$$

$(\mathbf{n=2})\mathbf{R}$ **.:** Para $n=2$, temos o conjunto de funções $\{\phi_1,\phi_2\}=\{x(x-1),x^2(x-1)\}$, e derivando as funções obtemos $\{\phi_1',\phi_2'\}=\{2x-1,3x^2-2x\}$, assim temos o sistema (já calculada as integrais):

$$\begin{bmatrix}\frac{11}{30} & \frac{11}{60}\\ \frac{11}{60} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{20}\end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema temos a solução:

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{69}{473}\\ -\frac{7}{43}\end{bmatrix}.$$

Dessa forma a solução aproximada é

$$u_h=w_1\phi_1(x)+w_2\phi_2=-\frac{69}{473}x(x-1)-\frac{7}{43}x^2(x-1)=\frac{1}{473}x(69+8x-77x^2)$$

$$u_h=\frac{1}{473}x(69+8x-77x^2) \tag{5}$$

$(\mathbf{n=3})\mathbf{R}$ **.:**Para $n=3$, temos o conjunto de funções $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}=\{x(x-1),x^2(x-1),x^3(x-1)\}$, e derivando as funções obtemos $\{\phi_1',\phi_2',\phi_3'\}=\{2x-1,3x^2-2x,4x^3-3x^2\}$, assim temos o sistema (já calculada as integrais):

$$\begin{bmatrix}\frac{11}{30} & \frac{11}{60} & \frac{23}{210}\\ \frac{11}{60} & \frac{1}{7} & \frac{89}{840}\\ \frac{23}{210} & \frac{89}{840} & \frac{113}{1260}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{20}\\ -\frac{1}{30}\end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema temos a solução:

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{14427}{96406}\\ -\frac{6944}{48203}\\ -\frac{21}{1121}\end{bmatrix}.$$

Dessa forma a solução aproximada é

$$u_h = w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2 + w_3\phi_3 = -\frac{14427}{96406}x(x-1) - \frac{6944}{48203}x^2(x-1) - \frac{21}{1121}x^3(x-1)$$

$$u_h = -\frac{7}{96406}x(-2061 + 77x + 1726x^2 + 258x^3) \tag{6}$$

Exercício 2

Seja agora $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$.

Item a)

Utilize a propriedade de que

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \begin{cases} 0 & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n \neq m \\ \frac{1}{2} & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx = \begin{cases} 0 & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n \neq m \\ \frac{1}{2} & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n = m \end{cases}$$

e encontre a solução aproximada do **Problema V** para $n =$1, 2 e 3.

R.: Com a análise já feita no exercício acima, queremos encontrar $\mathbf{w}$ que resolva $A\mathbf{w} = \mathbf{f}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{w}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ com os seguintes valores:

$$[A]_{ij} = a_{ij} = \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j)dx$$

$$[\mathbf{f}]_i = f_i = \int_0^1 x\phi_i dx$$

E então substituir os valores encontrados de w_i em $u_h = \sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i(x)$, obtendo uma solução aproximada para o **Problema V**.

Derivando a função $\phi_i(x)$, temos $\phi_i'(x) = i\pi\cos(i\pi x)$, dessa forma, o valor de a_{ij} se torna:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j)dx \\ &= \int_0^1 (i\pi\cos(i\pi x))(j\pi\cos(j\pi x))dx + \int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi x)dx \\ &= ij\pi^2\int_0^1 \cos(i\pi x)\cos(j\pi x)dx + \int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi x)dx \end{aligned}$$

Tomando posse da propriedade apresentada, podemos resumir a:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, se } i \neq j \\ \dfrac{1}{2}(i^2\pi^2 + 1) & \text{, se } i = j \end{cases}$$

Assim, percebemos que nossa matriz A será diagonal, dessa forma, resolver o sistema linear se torna, simplesmente, resolver para $i = 1, \cdots, n$:

$$w_i = \frac{f_i}{a_{ii}}$$

$$w_i = \frac{\int\limits_0^1 x \sin(i\pi x) dx}{\frac{1}{2}(i^2\pi^2 + 1)}$$

Como queremos resolver o problema para $n = 1$, 2 e 3, calculamos w_1, w_2 e w_3:

$$w_1 = \frac{2}{\pi(1 + \pi^2)}$$

$$w_2 = -\frac{1}{\pi(1 + 4\pi^2)}$$

$$w_3 = \frac{2}{3\pi(1 + 9\pi^2)}$$

Portanto, substituindo em $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$, temos:

$$n = 1 \Rightarrow u_h = \frac{2\sin(\pi x)}{\pi + \pi^3} \tag{7}$$

$$n = 2 \Rightarrow u_h = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin(\pi x)}{1 + \pi^2} - \frac{\sin(2\pi x)}{1 + 4\pi^2}\right) \tag{8}$$

$$n = 3 \Rightarrow u_h = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{6\sin(\pi x)}{1 + \pi^2} - \frac{3\sin(2\pi x)}{1 + 4\pi^2} + \frac{2\sin(3\pi x)}{1 + 9\pi^2}\right) \tag{9}$$

que são as aproximações da solução para $n = 1$, 2 e 3 do **Problema V**.

Exercício 3

A solução exata do **Problema D** é dada por

$$u_e = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1} \tag{10}$$

Item a)

Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas nos **Exercícios 1** e **2**.

R.: Em todos os gráficos abaixo, a função exata, (10), é a linha azul, as linhas laranjas são as aproximações encontradas no Exercício 1, e as linhas verdes são as aproximações encontradas no Exercício 2, separando pelos valores de n.

Para $n = 1$, (10) é a solução exata (azul), (4) é a solução aproximada no Exercício 1 (laranja), (7) é a solução aproximada no Exercício 2 (verde).

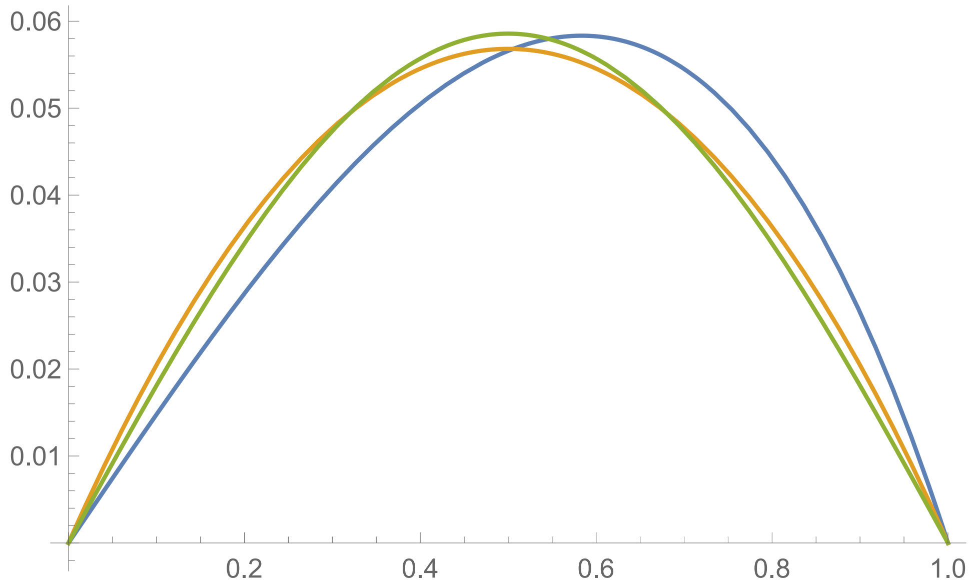

Figura 1: Comparação de soluções caso $n = 1$

Para $n = 2$, (10) é a solução exata (azul), (5) é a solução aproximada no Exercício 1 (laranja), (8) é a solução aproximada no Exercício 2 (verde). Ainda é possível ver uma diferença pequena entre o laranja e o azul, principalmente no máximo da função.

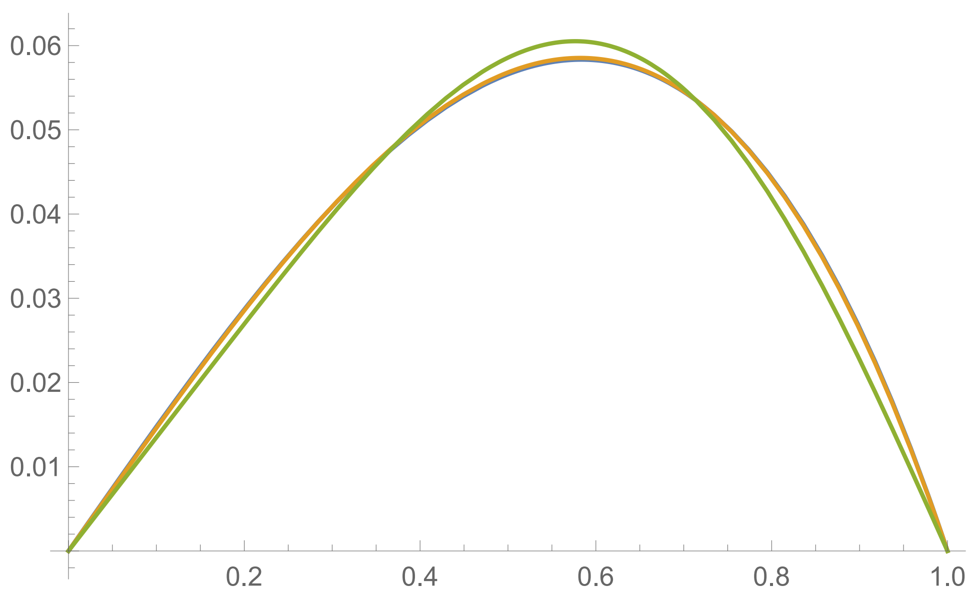

Figura 2: Comparação de soluções caso $n = 2$

Para $n = 3$, (10) é a solução exata (azul), (6) é a solução aproximada no Exercício 1 (laranja), (9) é a solução aproximada no Exercício 2 (verde). Neste caso, não é mais perceptível a linha azul, por estar junta da laranja.

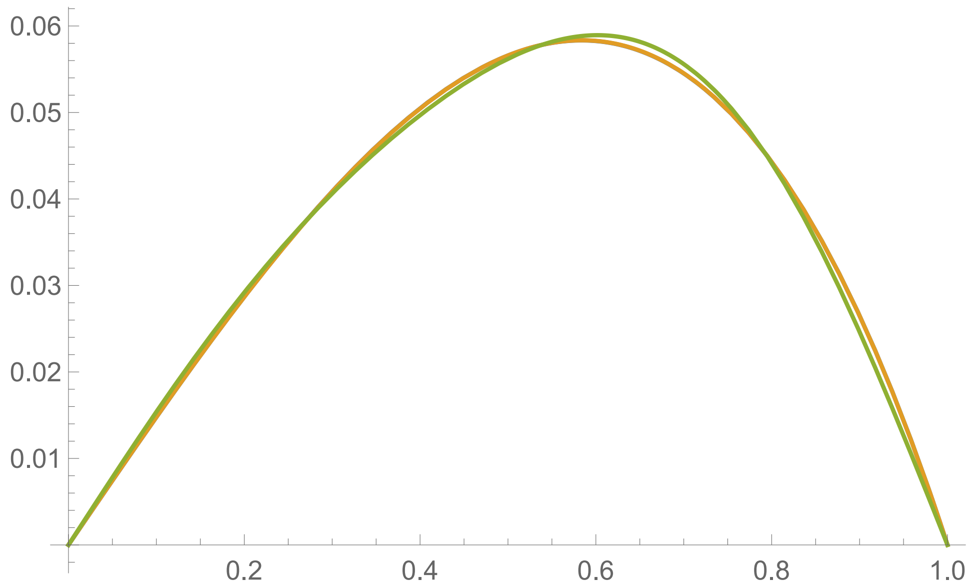

Figura 3: Comparação de soluções caso $n = 3$

Item b)

Construa gráficos comparando a derivada primeira da solução exata com as derivadas primeiras das soluções aproximadas obtidas nos **Exercícios 1** e **2**.

R.: Em todos os gráficos abaixo, a derivada da função exata, (10), é a linha azul, as linhas laranjas são as derivadas das aproximações encontradas no Exercício 1, e as linhas verdes são as derivadas das aproximações encontradas no Exercício 2, separando pelos valores de n.

Para $n = 1$, (10) é a derivada da solução exata (derivada em azul), (4) é a solução aproximada no Exercício 1 (derivada em laranja), (7) é a solução aproximada no Exercício 2 (derivada em verde).

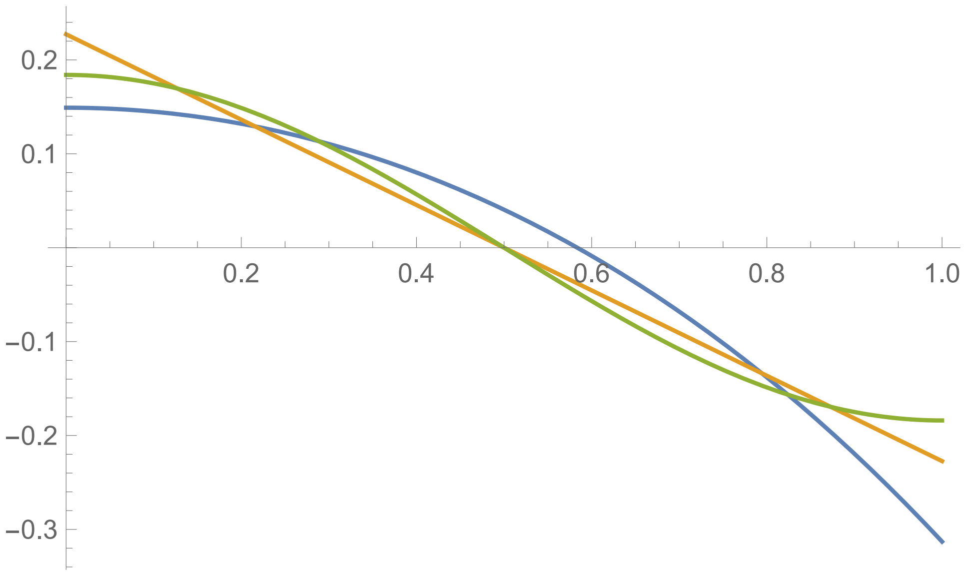

Figura 4: Comparação da derivada das soluções caso $n = 1$

Para $n = 2$, (10) é a derivada da solução exata (derivada em azul), (5) é a solução aproximada no Exercício 1 (derivada em laranja), (8) é a solução aproximada no Exercício 2 (derivada em verde).

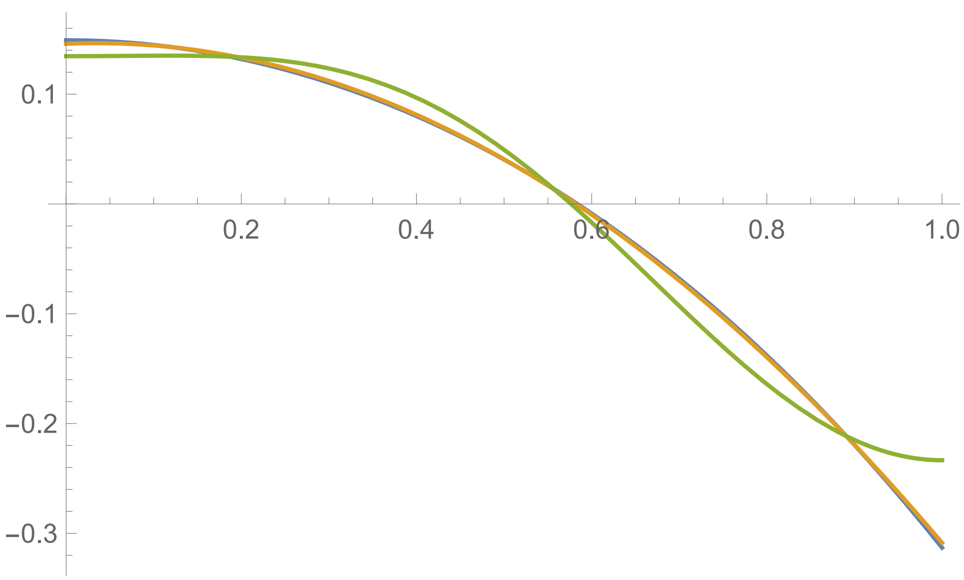

Figura 5: Comparação da derivada das soluções caso $n = 2$

Para $n = 3$, (10) é a derivada da solução exata (derivada em azul), (6) é a solução aproximada no Exercício 1 (derivada em laranja), (9) é a solução aproximada no Exercício 2 (derivada em verde). Neste caso, não é mais perceptível a linha azul, por estar junta da laranja.

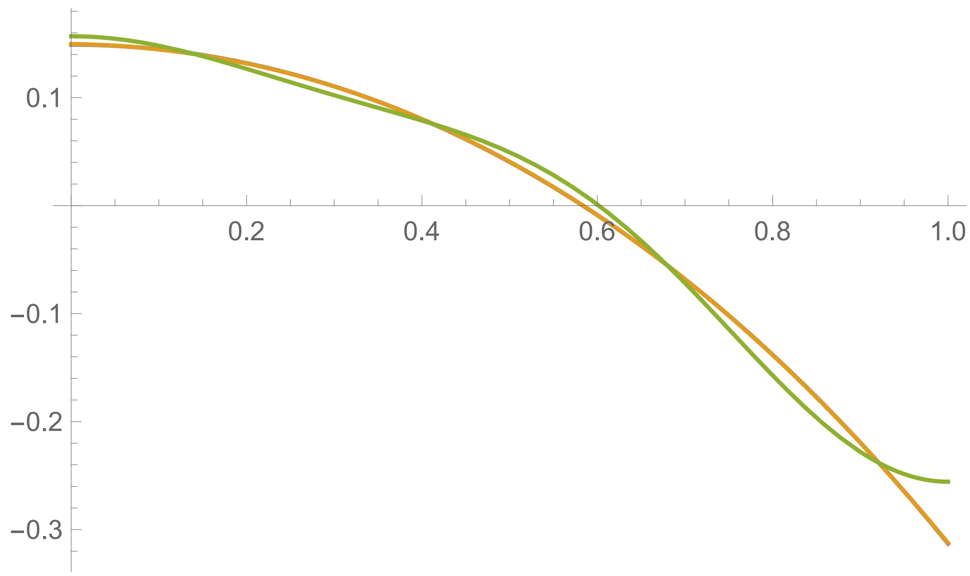

Figura 6: Comparação da derivada das soluções caso $n = 3$

Lista 2 - Método de Galerkin

Seja o seguinte problema de valor de contorno.

Problema D: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$-u'' + u = x \quad \forall\, x \in \Omega = (0,1), \tag{11}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\mathcal{U}$ é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis que satisfazem $u(0) = u(1) = 0$, cuja solução exata é dada por

$$u_e(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}.$$

A partir de uma forma fraca do **Problema D**, podemos apresentar o Método de Galerkin.

Problema Vh: Encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$\int_0^1 [u_h' v_h' + u_h v_h] dx = \int_0^1 x v_h dx \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h, \tag{12}$$

onde $\mathcal{V}_h$ um espaço de dimensão n, cujas funções satisfazem $v_h(0) = v_h(1) = 0$. Se a solução do Método de Galerkin for escrita como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x), \tag{13}$$

sabemos que o **Problema Vh** pode ser associado à resolução de um sistema linear na forma

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f}, \tag{14}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{w},\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 1

Seja $\mathcal{V}_h = \text{span}\{\phi_i(x)\}_i = 1^n \subset \mathcal{V}$, com $\phi_i(x) = x^i(x-1)$.

Item a)

Mostre que, neste caso, os coeficientes da matriz A e do vetor $\mathbf{f}$ são dados por

$$a_{ij} = \frac{ij}{i+j-1} - \frac{(1+i)j + (1+j)i}{i+j} + \frac{1 + (1+i)(1+j)}{i+j+1} - \frac{2}{i+j+2} + \frac{1}{i+j+3}$$

e

$$f_i = \frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2},$$

respectivamente.

R.:

Terminar

Item b)

Escreva um programa que utilize as expressões da letra a) para montar a matriz A e o vetor $\mathbf{f}$, resolva o sistema (14), encontre o vetor de coordenadas $\mathbf{w}$ e determine a solução do Método de Galerkin, equação (13).

R.:

Terminar

Item c)

Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas pelo programa da letra b), para $n = 2,\ 4$ e 8.

R.:

Terminar

Exercício 2

Seja agora $\phi_i = \sin(i\pi x)$.

Item a)

Determine quais são os valores dos coeficientes da matriz A e do vetor $\mathbf{f}$ e encontre uma expressão analítica para as coordenadas w_i. Escreva a solução (13) para este caso.

R.:

Terminar

Item b)

Mostre que $|w_i| > |w_{i+1}|$ e que $\lim\limits_{i\to\infty} w_i = 0$.

R.:

Terminar

Item c)

Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas pela expressão da letra a), para $n = 2,\ 4$ e 8.

R.:

Terminar

Exercício 3

Escreva um programa que utilize integração numérica pelo método dos trapézios composto, para montar a matriz A e o vetor $\mathbf{f}$, resolva o sistema (14), encontre o vetor de coordenadas $\mathbf{w}$ e determine a solução do Método de Galerkin, equação (13). O programa deverá ser capaz de usar como funções base tanto $\phi_i(x) = x^i(x-1)$ quanto $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$.

Item a)

Compare as coordenadas obtidas na letra a) do Exercício 1 com as obtidas pelo programa desenvolvido neste exercício para $n = 6$ usando 5 intervalos para a integração numérica. A matriz A obtida numericamente é diagonal? Os valores da diagonal são os esperados? Quais as possíveis causas da diferença? É possível identificar algum erro apenas analisando as coordenadas?

R.:

Terminar

Item b)

Compare as coordenadas obtidas pelo programa da letra b) do Exercício 1 com o programa desenvolvido neste exercício para $n = 10$ e utilizando 100 intervalos para a integração numérica. Quais as possíveis causas da diferença?

R.:

Terminar