

Trabalho de Implementação II

Daniela Cortes Ospina - RA 230142 - MT403

Fábio Henrique de Carvalho - RA 232926 - MT403

João Pedro do Nascimento Sandolin - RA 176146 - MS612

Martha Aurora Parra Pulido - RA 211681- MT403

Victor Lohan dos Santos Araújo - RA 233745 - MS612

Thiago Felipe Castro Carrenho - RA 224831 - MS612

18 de Novembro de 2020



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MT403A Análise Numérica I 2S2020

MS612A Análise Numérica II 2S2020

Prof.: Maicon Ribeiro Correa

Grupo III

Sumário

1	Situação Problema	3
2	Métodos de Euler	3
2.1	Desenvolvimento Inicial	3
2.2	Método de Euler Explícito	4
2.2.1	Implementação	5
2.2.2	Resultados	5
2.2.3	Conclusão	6
2.3	Método de Euler Implícito	6
2.3.1	Implementação	9
2.3.2	Resultados	9
2.3.3	Conclusão	10
3	Método de Runge-Kutta	10
3.1	Criação do Método	11
3.2	Implementação	13
3.3	Resultados	14
3.4	Conclusão	15

1 Situação Problema

O problema que vamos analisar é a resolução de um PVI que descreve o movimento de um pêndulo de comprimento L , sob a ação da gravidade g , onde o movimento é descrito pelo ângulo do pêndulo com o eixo vertical em função do tempo ($\theta(t)$), e os valores θ_0 e η_0 são dados iniciais:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) &= -\left(\frac{g}{L}\right) \sin(\theta(t)) \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= \eta_0 \end{cases} \quad (1)$$

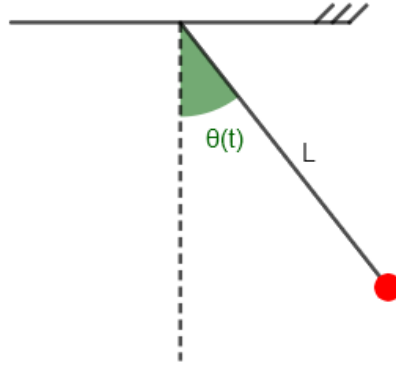


Figura 1: Pêndulo do Problema

Neste trabalho utilizamos os valores $L = 4.9 \text{ m}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ e $\eta_0 = 0 \text{ rad/s}$, e usamos a seguinte aproximação para a gravidade: $g = 9.8 \text{ rad/s}^2$.

2 Métodos de Euler

A primeira parte desta atividade consiste em transformar a equação do pêndulo em um sistema de primeira ordem em $v = \theta$ e $w = \dot{\theta}$ e resolver o PVI. A partir dos resultados, devemos apresentar os gráficos $v \times t$, $w \times t$ e $v \times w$, o que deve ser feito para o Método de Euler Explícito e o Método de Euler Implícito.

Depois de obter os resultados, é necessário comentar sobre a estabilidade destes métodos, e para esta análise, variaremos os valores de Δt .

2.1 Desenvolvimento Inicial

Introduzimos as variáveis $v = \theta$ e $w = \dot{\theta}$, então, obtemos as seguintes equações com as novas variáveis:

$$\begin{cases} \dot{w} &= \ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{L}\right) \sin(\theta(t)) = -\frac{g}{L} \sin v \\ \dot{v} &= \dot{\theta} = w \\ v(0) &= \theta(0) = \theta_0 \\ w(0) &= \dot{\theta}(0) = \eta_0. \end{cases}$$

O que nos confere o seguinte sistema de primeira ordem com duas variáveis

$$\begin{cases} \dot{v} &= w, & v_0 = v(0) = \theta_0 \\ \dot{w} &= -\frac{g}{L} \sin v, & w_0 = w(0) = \eta_0 \end{cases} \quad (2)$$

Logo, o sistema (1) de segunda ordem é equivalente ao sistema (2). Porém, carregamos a desvantagem do novo sistema ter mais variáveis que o sistema inicial.

2.2 Método de Euler Explícito

Consideremos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, da forma:

$$\dot{u}(t) = f(t), \quad t_0 < t < t_f. \quad (3)$$

Dado um intervalo $I = [t_0, t_f]$, onde $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_f$ são os pontos da nossa malha discretizada de forma uniforme com espaçamento Δt , isto é, $t_1 = t_0 + \Delta t$, \dots , $t_n = t_0 + n\Delta t$, \dots , $t_f = t_0 + N\Delta t$, o método de Euler explícito é dado pela expressão:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

onde $u_n \approx u(t_n)$ e $N = \frac{t_f - t_0}{\Delta t}$ define o refinamento da solução, note que, quanto maior o N ou menor o Δt , mais refinada será a nossa solução.

Para resolver o sistema (2) pelo método de Euler explícito, aplicaremos o método diretamente sobre cada uma das equações do sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = w \\ \dot{w} = -2 \sin v, \end{cases}$$

note que, foram substituídas as constantes g e L ; assim, obtemos um sistema com duas equações da forma

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \Delta t w_n \\ w_{n+1} = w_n - 2\Delta t \sin v_n, \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Ilustrando, para o caso $n = 0$, usando as condições iniciais $v_0 = v(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ e $w_0 = w(0) = \eta_0 = 0$, temos

$$\begin{cases} v_1 = v_0 + \Delta t w_0 = \pi/3 \\ w_1 = w_0 - 2\Delta t \sin v_0 = -2\Delta t \sin(\pi/3). \end{cases}$$

Lembremos que, o método de Euler explícito pode ser obtido usando a aproximação para frente da derivada de primeira ordem na Eq.(3) ou também como um caso particular do método de Taylor, mais especificamente, o método de Taylor de primeira ordem.

Com isso em mente, passamos agora à implementação.

2.2.1 Implementação

Algoritmo 1: Método de Euler Explícito

Entrada: $T = 20$ tempo total em segundos com $t_0 = 0s$ e $t_f = 20s$; Δt (no nosso caso $1/8$, $1/32$ ou $1/256$) intervalo de tempo; $g = 9.8$ aproximação da gravidade; $L = 4.9$ tamanho da corda do pêndulo em metros; $\theta_0 = \pi/3$ ângulo inicial em radianos; $\eta_0 = 0$ velocidade angular inicial em radianos por segundo.

- 1 Calcule $N = \frac{T}{\Delta t} + 1$ número de intervalos
- 2 Defina U uma matriz de zeros de N linhas duas colunas, a primeira para os valores de v , a segunda para os valores de w
- 3 Defina os valores iniciais $U[0, 0] = \theta_0$ e $U[0, 1] = \eta_0$
- 4 **Para** $i = 1, 2, \dots, N$ **faça:**
- 5 $U[i, 0] = U[i - 1, 0] + \Delta t U[i - 1, 1]$
- 6 $U[i, 1] = U[i - 1, 1] + \Delta t \left(\frac{-g}{L} \right) \sin(U[i - 1, 0])$

Saída: Matriz U , de onde se retiram os resultados plotados nos gráficos, de forma que as entradas $U[i, 0]$ converjam para o valor do ângulo do pêndulo com a horizontal $\theta(i\Delta t)$ e $U[i, 1]$ converjam para o valor da velocidade angular do pêndulo $\dot{\theta}(i\Delta t)$.

2.2.2 Resultados

Abaixo estão os três gráficos ($v \times t$, $w \times t$ e $v \times w$) obtidos pelo Método de Euler Explícito para os três valores de Δt : $1/8$, $1/32$ e $1/256$.

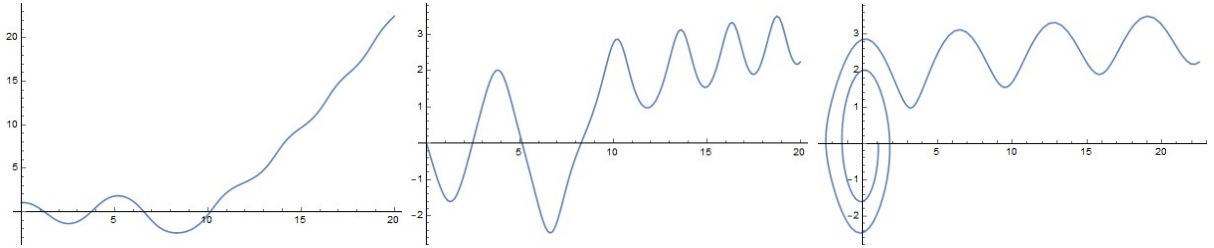


Figura 2: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Explícito para $\Delta t = 1/8$

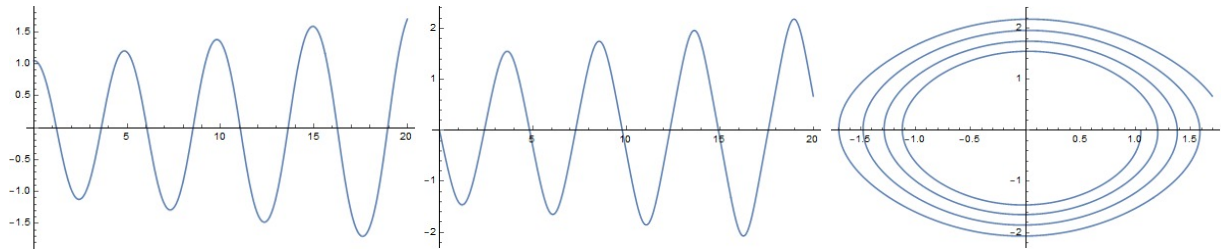


Figura 3: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Explícito para $\Delta t = 1/32$

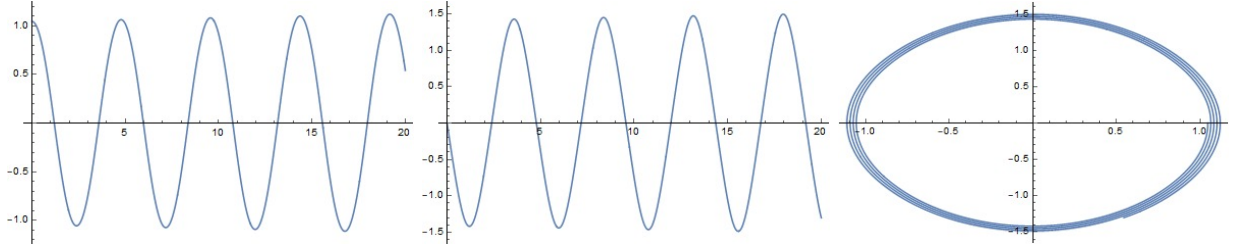


Figura 4: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Explícito para $\Delta t = 1/256$

2.2.3 Conclusão

Se sabe que o sistema (1) é um sistema conservativo, isto é, a energia do sistema se preserva. A energia inicial é dada por

$$E_0 = U_0 + K_0,$$

onde, $U_0 = m.g.l \cos(v_0)$ é a energia potencial e $K_0 = 0$ é a energia cinética. Portanto, o v_0 está relacionado com E_0 e pelo fato do sistema (1) ser conservativo nossa solução real é periódica, isto é, $\exists T_0$ tal que,

$$v(t + T_0) = v(t)$$

e,

$$w(t + T_0) = \dot{v}(t + T_0) = \dot{v}(t) = w(t),$$

a velocidade também é periódica.

Note que, na nossa implementação quando o Δt é mais próximo a zero (figuras 2, 3 e 4) nossos gráficos $v \times t$ e $w \times t$ serão periódicos conforme descrito no parágrafo anterior e assim podemos concluir que a solução aproximada converge para a solução real.

Também é importante resaltar, que pelo fato de estarmos trabalhando um sistema conservativo, o gráfico $v \times w$ deve ser uma curva fechada pois caso contrário implicaria que temos alguma fonte de energia externa. Isto pode ser conferido no último gráfico da figura (4) o qual é o caso mais próximo à solução real.

Observação: Dado que o valor de θ_0 é positivo a evolução da figura $v \times w$ é no sentido horário.

2.3 Método de Euler Implícito

Consideremos novamente a equação diferencial ordinária de primeira ordem,

$$\dot{u}(t) = f(t), \quad t_0 < t < t_f. \quad (4)$$

Dado um intervalo $I = [t_0, t_f]$, donde $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_f$ são os pontos da nossa malha discretizada de forma uniforme com espaçamento Δt , isto é, $t_1 = t_0 + \Delta t$, \dots , $t_n = t_0 + n\Delta t$, \dots , $t_f = t_0 + N\Delta t$, o método de Euler implícito é dado pela expressão:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

onde $u_n \approx u(t_n)$ e $N = \frac{t_f - t_0}{\Delta t}$ define o refinamento da solução.

Passaremos agora resolver o sistema (2) pelo Método de Euler Implícito de maneira similar ao que foi feito no Método de Euler Explícito aplicaremos o método diretamente sobre cada uma das equações do sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = w \\ \dot{w} = -2 \sin v, \end{cases}$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \Delta t w_{n+1} \\ w_{n+1} = w_n - 2\Delta t \sin v_{n+1}, \end{cases} \quad (5)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Observemos que o sistema (5) é um sistema de duas equações não lineares, pelo que se faz necessário usar um outro método para resolvê-lo, como por exemplo: método da bisseção, método de Newton ou método preditor-corretor.

Neste projeto, resolveremos o sistema (5) pelo método de Newton, tendo como objetivo aproximar a função não linear localmente por uma função linear.

Assim, dado um sistema da forma

$$F(u) = \begin{cases} f(v, w) = 0 \\ g(v, w) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

isto é, $F(u) = 0$. Será necessário que as funções f, g possuam derivadas contínuas para cada uma das variáveis v, w , de modo que conhecido um ponto inicial u_0 , a aproximação linear da função F é

$$L(u) = F(u_0) + J(u_0)(u - u_0).$$

O método de Newton determina, a cada iteração, a aproximação da função linear da função, então conhecido $u^{(k)}$, o método fornece $u^{(k+1)}$ como sendo a solução do sistema

$$L(u) = F(u^{(k)}) + J(u^{(k)})(u - u^{(k)}) = 0,$$

onde J representa a matriz jacobiana, isto é $u^{(k+1)}$ é tal que,

$$J(u^{(k)})(u^{(k+1)} - u^{(k)}) = -F(u^{(k)}),$$

tomando $s^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)} = -J^{-1}(u^{(k)})F(u^{(k)})$, sempre que a matriz jacobiana possua inversa, $u^{(k+1)} = s^{(k)} + u^{(k)}$. Esperamos que a sequência convirja para a solução u do sistema $F(u) = 0$, ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = u.$$

No nosso projeto, observemos que

$$F(u) = \begin{cases} v_{n+1} - v_n - \Delta t w_{n+1} = 0 \\ w_{n+1} - w_n + 2\Delta t \sin v_{n+1} = 0, \end{cases}$$

com matriz jacobiana dada por

$$J(u) = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 2\Delta t \cos v_{n+1} & 1 \end{pmatrix},$$

e ponto de partida $u^{(0)} = u_0 = (v_0, w_0) = (\pi/3, 0)$.

Ilustrando, para o caso $n = 0$, usando as condições iniciais $v_0 = v(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ e $w_0 = w(0) = \eta_0 = 0$, temos

$$s^{(0)} = u^{(1)} - u^{(0)} = -J^{-1}(u^{(0)})F(u^{(0)})$$

e, portanto, $u^{(1)} = s^{(0)} + u^{(0)}$.

Lembremos que, o método de Euler implícito pode ser obtido usando a aproximação para trás da derivada de primeira ordem na Eq.(3).

2.3.1 Implementação

Algoritmo 2: Método de Euler Implícito

Entrada: $T = 20$ tempo total em segundos com $t_0 = 0s$ e $t_f = 20s$; Δt (no nosso caso $1/8$, $1/32$ ou $1/256$) intervalo de tempo; $g = 9.8$ aproximação da gravidade; $L = 4.9$ tamanho da corda do pêndulo em metros; $\theta_0 = \pi/3$ ângulo inicial em radianos; $\eta_0 = 0$ velocidade angular inicial em radianos por segundo.

1 Função $F(x, u)$:

2 Defina y vetor de duas entradas nulas

3 Tome $y[0] = x[0] - u[0] - \Delta t x[1]$

4 Tome $y[1] = x[1] - u[1] + \Delta t (g/l) \sin(x[0])$

5 Retorne y ;

6 Função $JF(x)$:

7 Defina y matriz 2×2 de entradas nulas

8 Tome $y[0, 0] = 1$

9 Tome $y[0, 1] = -h$

10 Tome $y[1, 0] = \Delta t (g/l) \cos(x[0])$

11 Tome $y[1, 1] = 1$

12 Retorne y ;

13 Calcule $N = \frac{T}{\Delta t} + 1$ número de intervalos

14 Defina U uma matriz de zeros de N linhas duas colunas, a primeira para os valores de v , a segunda para os valores de w

15 Defina k um vetor nulo de duas entradas

16 Defina os valores iniciais $U[0, 0] = \theta_0$ e $U[0, 1] = \eta_0$

17 **Para** $i = 1, 2, \dots, N$ **faça:**

18 **Para** $j = 1, \dots, 6$ **faça:**

19 **Se** $j > 1$ **então**

20 $k[0] = U[i, 0]$

21 $k[1] = U[i, 1]$

22 $U[i] = U[i] - (JF(U[i]))^{-1} F(U[i], U[i-1])$

23 **Se** $\|k - U[i]\| > 10^{-5}$ **então**

24 $k[0] = U[i, 0]$

25 $k[1] = U[i, 1]$

26 **Senão**

27 pare

Saída: Matriz U , de onde se retiram os resultados plotados nos gráficos, de forma que as entradas $U[i, 0]$ converjam para o valor do ângulo do pêndulo com a horizontal $\theta(i\Delta t)$ e $U[i, 1]$ converjam para o valor da velocidade angular do pêndulo $\dot{\theta}(i\Delta t)$.

2.3.2 Resultados

Abaixo estão os três gráficos ($v \times t$, $w \times t$ e $v \times w$) obtidos pelo Método de Euler Implícito para os três valores de Δt : $1/8$, $1/32$ e $1/256$.

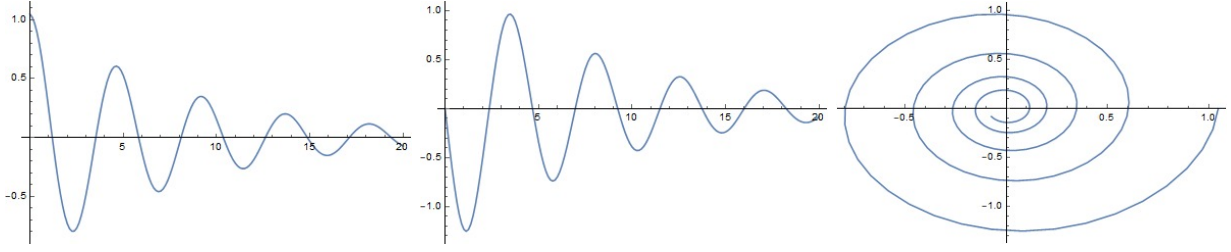


Figura 5: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Implícito para $\Delta t = 1/8$

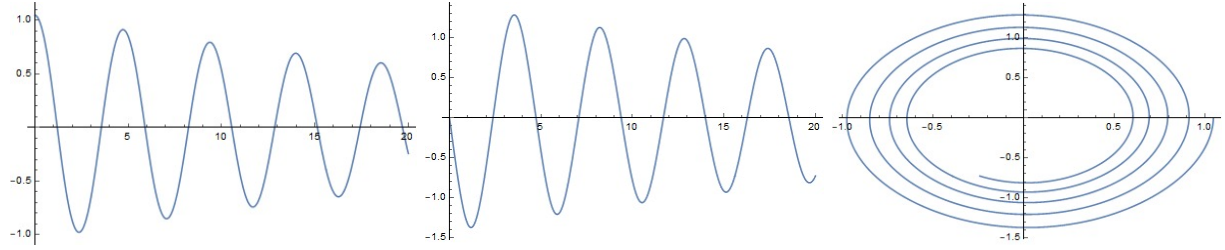


Figura 6: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Implícito para $\Delta t = 1/32$

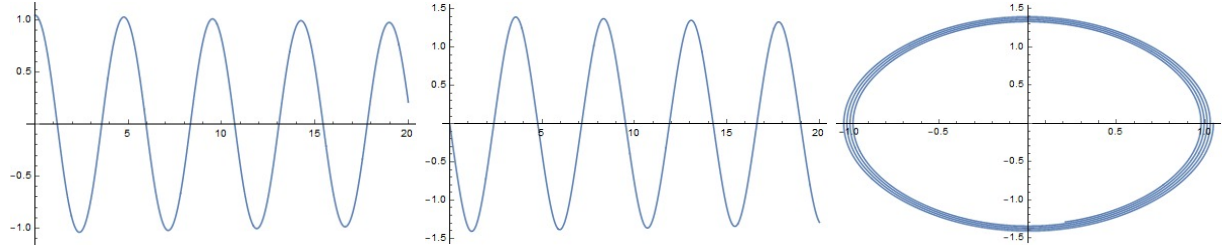


Figura 7: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Euler Implícito para $\Delta t = 1/256$

2.3.3 Conclusão

Pela teoria sabemos que os métodos de Euler explícito e implícito estão na mesma ordem $O(\Delta t)$. Logo, a figura (5) vai estar próxima à figura (2), a figura (5) vai estar próxima à figura (3) e a figura (7) à figura (4) e assim, o análise feito no método de Euler Implícito vai ser igual para o método de Euler Explícito. Logo, a solução numérica do sistema (1) pelos métodos de Euler Explícito e Implícito converge à solução real.

3 Método de Runge-Kutta

A segunda parte desta atividade consiste em criar um método de Runge-Kutta de segunda ordem particular, e usando este, fazer a mesma análise que foi feita na seção anterior, isto é, transformar a equação do pêndulo em um sistema de primeira ordem em $v = \theta$ e $w = \theta'$ e resolver o PVI. A partir dos resultados, devemos apresentar os gráficos $v \times t$, $w \times t$ e $v \times w$, o que se deve ser feito para o Método de Runge-Kutta de segunda ordem criado.

Depois de obter os resultados, é necessário comentar sobre a estabilidade destes métodos, e para esta análise, variaremos os valores de Δt .

3.1 Criação do Método

De forma geral, um Método de Runge-Kutta pode ser escrito como:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \varphi(u_n, t_n, \Delta t; f)$$

onde a função φ é escolhida de forma a aproximar $f(u, t)$, ou seja,

$$\varphi(u_n, t_n, \Delta t; f) \approx f(u(t), t).$$

Com o objetivo de encontrar um método de Runge-Kutta de segunda ordem, desenvolveremos primeiro o método de Taylor.

Método de Taylor

O método de Taylor consiste em aproximar f por suas derivadas, assim para um método de Taylor de ordem 3, temos

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + \Delta t \left(u'(t) \Big|_{t_n} + \frac{\Delta t}{2} u''(t) \Big|_{t_n} + \frac{\Delta t^2}{6} u'''(t) \Big|_{t_n} + O(\Delta t^3) \right). \quad (7)$$

A seguir, escreveremos as derivadas de u em função das derivadas de f , isto é,

$$\begin{cases} u' &= f \\ u'' &= f' = \nabla f \cdot (u', 1) = \nabla f \cdot (f, 1) = f f_u + f_t \\ u''' &= f'' = \nabla f \cdot (u', 1) f_u + \nabla f_u \cdot (u', 1) f + \nabla f_t \cdot (u', 1) \\ &= f_u^2 u' + f_t f_u + f_{uu} u' f + f_{ut} f + f_{tu} u' + f_{tt} \\ &= f_u^2 f + f_t f_u + f_{uu} f^2 + 2 f_{ut} f + f_{tt}. \end{cases}$$

Observemos que, a expressão (7) pode ser representada como

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + \Delta t \varphi(u_n, t_n, \Delta t; f). \quad (8)$$

Assim, usando os resultados das derivadas e substituindo na Eq.(8), temos a nossa função φ é dada por

$$\varphi = f + \frac{\Delta t}{2} (f f_u + f_t) + \frac{\Delta t^2}{6} (f_u^2 f + f_t f_u + f_{uu} f^2 + 2 f_{ut} f + f_{tt});$$

note que, neste caso temos uma aproximação do método de Taylor de quarta ordem.

Observemos que, podemos formar uma família de fórmulas de segunda ordem no método de Runge-Kutta quando temos a fórmula geral para φ , dada por:

$$\varphi(u_n, t_n, \Delta t, f) = b_1 f(u, t) + b_2 f(u + a \Delta t f(u, t), t + c \Delta t), \quad (9)$$

onde b_1 , b_2 , a e c são constantes a serem determinadas. Pela expansão em series de Taylor para funções de duas variáveis temos

$$f(u + w, t + r) = f(u, t) + w f_u + r f_t + \frac{w^2}{2} f_{uu} + \frac{r^2}{2} f_{tt} + r w f_{ut} + O(|v|^3),$$

onde $v = (w, h)$ e $|v| = \sqrt{w^2 + h^2}$.

Tomando $w = a\Delta t f$ e $r = c\Delta t$, temos

$$\begin{aligned} f(u + a\Delta t f, t + c\Delta t) &= f(u, t) + a\Delta t f f_u + c\Delta t f_t + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2 f^2 f_{uu} + \frac{1}{2}c^2\Delta t^2 f_{tt} \\ &\quad + ac\Delta t^2 f f_{ut} + O(\Delta t^3) \\ &= f + \Delta t (a f f_u + c f_t) + \Delta t^2 \left(\frac{a^2}{2} f^2 f_{uu} + \frac{c^2}{2} f_{tt} + ac f f_{ut} \right). \end{aligned}$$

Assim, a Eq.(9), pode ser escrita como:

$$\psi(u, t, \Delta t, f) = (b_1 + b_2)f + b_2\Delta t(a f f_u + c f_t) + b_2\Delta t^2 \left(\frac{a^2}{2} f^2 f_{uu} + \frac{c^2}{2} f_{tt} + ac f f_{ut} \right) + O(\Delta t^3). \quad (10)$$

Lembremos que nosso objetivo é aproximar f por uma função φ , ou seja, $\varphi(u, t, \Delta t; f) \rightarrow f(u, t)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, mas

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varphi(u, t, \Delta t; f) = (b_1 + b_2)f.$$

De modo que é necessário que,

$$b_1 + b_2 = 1. \quad (11)$$

relação chamada condição de consistência do método.

Para obtermos um método de ordem 2, iremos comparar o segundo termo da Eq.(10) com o segundo termo da Eq.(8) do método de Taylor (que já sabemos que é de ordem 2), assim

$$\begin{cases} b_2 a = 1/2 \\ b_2 c = 1/2 \end{cases} \quad (12)$$

será uma nova condição para termos um método de Runge-Kutta de segunda ordem. Observe que, das condições (11) e (12) temos o como solução

$$\begin{cases} b_1 = 1 - b_2 \\ a = c = \frac{1}{2b_2}. \end{cases}$$

O que nos mostra que basta escolher b_2 para criarmos um método de Runge-Kutta de dois estágios e de segunda ordem da forma:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left[(1 - b_2)f(u_n, t_n) + b_2 f \left(u_n + \frac{1}{2b_2}\Delta t f(u_n, t_n), t_n + \frac{1}{2b_2}\Delta t \right) \right]$$

Então, escolhendo $b_2 = \frac{3}{4}$, que é a média entre o $b_2 = 1$ do método do ponto médio e $b_2 = 1/2$ do método do trapézio, o nosso método é:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left[\left(1 - \frac{3}{4}\right) f(u_n, t_n) + \frac{3}{4} f \left(u_n + \frac{1}{2 \left(\frac{3}{4} \right)} \Delta t f(u_n, t_n), t_n + \frac{1}{2 \left(\frac{3}{4} \right)} \Delta t \right) \right].$$

Tendo feito esta análise, passaremos resolver o sistema (2) pelo nosso método de Runge-Kutta de segunda ordem da mesma forma que nos casos anteriores, aplicaremos o método diretamente sobre cada uma das equações do sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = w \\ \dot{w} = -2 \sin v, \end{cases}$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \Delta t \left[(1 - b_2) w_n + b_2 \left(w_n - \frac{\Delta t}{b_2} \sin v_n \right) \right] \\ w_{n+1} = w_n + \Delta t \left[-2 (1 - b_2) \sin v_n - 2 b_2 \sin \left(v_n + \frac{\Delta t}{2 b_2} w_n \right) \right], \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

3.2 Implementação

Algoritmo 3: Método de Runge-Kutta criado

Entrada: $T = 20$ tempo total em segundos com $t_0 = 0s$ e $t_f = 20s$; Δt (no nosso caso $1/8$, $1/32$ ou $1/256$) intervalo de tempo; $g = 9.8$ aproximação da gravidade; $L = 4.9$ tamanho da corda do pêndulo em metros; $\theta_0 = \pi/3$ ângulo inicial em radianos; $\eta_0 = 0$ velocidade angular inicial em radianos por segundo; $b_2 = 3/4$ que define o nosso método de Runge-Kutta de dois estágios e segunda ordem.

1 Calcule $N = \frac{T}{\Delta t} + 1$ número de intervalos

2 Defina U uma matriz de zeros de N linhas duas colunas, a primeira para os valores de v , a segunda para os valores de w

3 Defina k um vetor nulo de duas entradas

4 Defina os valores iniciais $U[0, 0] = \theta_0$ e $U[0, 1] = \eta_0$

5 **Para** $i = 1, \dots, N$ **faça:**

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} 6 \quad U[i, 0] = U[i-1, 0] + \Delta t \left((1 - b_2) U[i-1, 1] + b_2 \left(U[i-1, 1] - \frac{\Delta t}{2 b_2} \frac{g}{L} \sin(U[i-1, 0]) \right) \right) \\ 7 \quad U[i, 1] = U[i-1, 1] + \Delta t \left(\left(\frac{-g}{L} \right) (1 - b_2) \sin(U[i-1, 0]) - b_2 \frac{g}{L} \sin \left(U[i-1, 0] + \frac{\Delta t}{2 b_2} U[i-1, 1] \right) \right) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Saída: Matriz U , de onde se retiram os resultados plotados nos gráficos, de forma que as entradas $U[i, 0]$ converjam para o valor do ângulo do pêndulo com a horizontal $\theta(i\Delta t)$ e $U[i, 1]$ converjam para o valor da velocidade angular do pêndulo $\dot{\theta}(i\Delta t)$.

3.3 Resultados

Abaixo estão os três gráficos ($v \times t$, $w \times t$ e $v \times w$) obtidos pelo Método de Runge-Kutta criado para os três valores de Δt : $1/3$, $1/8$, $1/32$ e $1/256$.

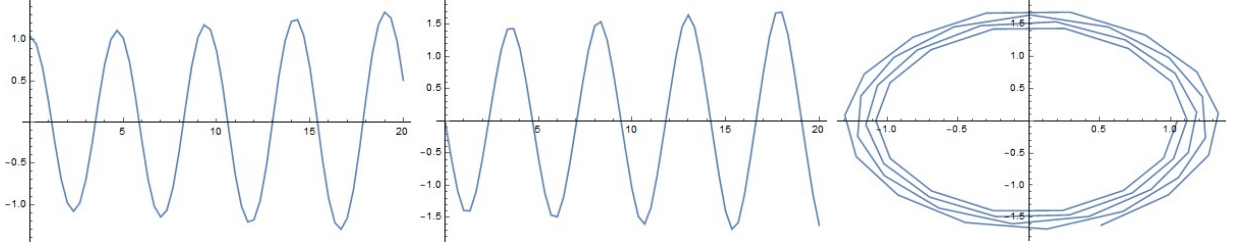


Figura 8: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Runge-Kutta para $\Delta t = 1/3$

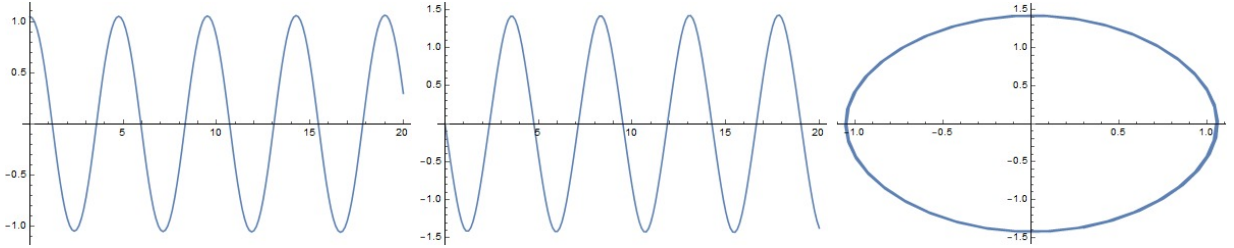


Figura 9: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Runge-Kutta para $\Delta t = 1/8$

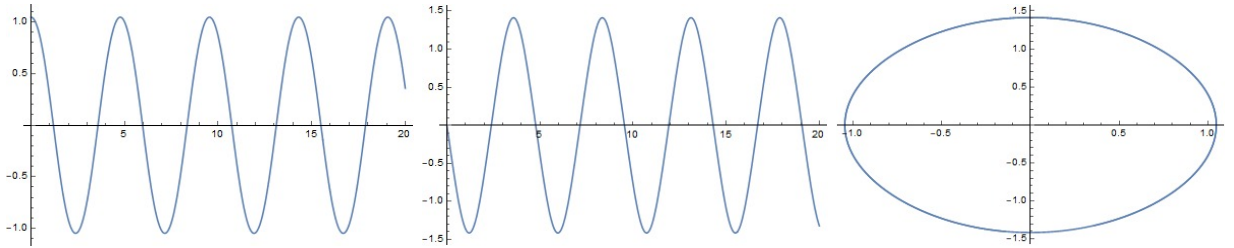


Figura 10: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Runge-Kutta para $\Delta t = 1/32$

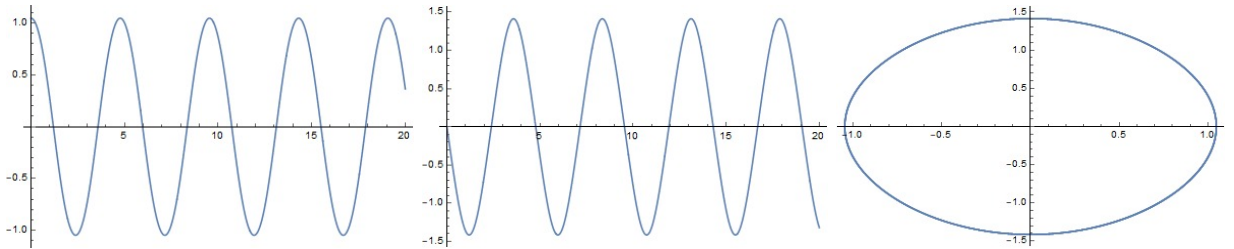


Figura 11: Gráficos $v \times t$, $w \times t$, $v \times w$ do Método de Runge-Kutta para $\Delta t = 1/256$

3.4 Conclusão

Pela construção do método sabemos que o erro de truncamento do nosso método de Runge-Kutta é de segunda ordem que é maior ao erro de truncamento dos métodos de Euler explícito e implícito. Assim, a solução numérica dos três métodos converge para a solução exata quando $(\Delta t \rightarrow 0)$. Porém, o método de Runge-Kutta de segunda ordem se aproxima à solução exata mais rapidamente, como pode ser visto comparando a figura (8), com as figuras (3) e (6), mostrando que com $\Delta t = 1/3$ o método de Runge-Kutta aproxima melhor a solução do que os métodos de Euler explícito e implícito com $\Delta = 1/32$.