Atividade 3

Daniela Cortes - RA230142
João Pedro do Nascimento Sandolin - RA176146
Thiago Felipe Castro Carrenho - RA224831

19 de maio de 2021

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MT623 Turma A - Métodos dos Elementos Finitos 1S2021
MS712 Turma A - Análise Numérica III 1S2021
Prof.: Maicon Ribeiro Correa

Atividade 3
Exercícios 6, 7 e 8 da Lista 4

Seja a seguinte formulação variacional:

Problema V: Encontrar $u \in \mathcal{U} = \mathcal{H}_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 (\alpha u'v' + \gamma uv)dx = \int_0^1 v dx \quad \forall\ v \in \mathcal{U}, \tag{1}$$

com $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$.

Tome agora $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$ e considere o problema variacional

Problema D: Encontrar $u \in \mathcal{U} = \mathcal{H}_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 v dx \quad \forall\ v \in \mathcal{U}, \tag{2}$$

neste caso, a matriz de rigidez e o vetor de cargas associados a um elemento linear (dois nós), de tamanho h^e são dados por

$$K^e = \frac{1}{h^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^e = \frac{h^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Já para um elemento quadrático (três nós), também de tamanho h^e, temos

$$K^e = \frac{1}{3h^e}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^e = \frac{h^e}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6

Determine qual o número mínimo de pontos na fórmula de quadratura gaussiana necessário para integrar exatamente a matriz de rigidez elementar associada à forma bilinear do **Problema V**,

$$a(u,v) = \int_0^1 \Big(\alpha u'v' + \gamma uv\Big)dx \tag{3}$$

se são utilizados espaços lagrangeanos:

a) Lineares.

b) Quadráticos.

c) De grau n.

Resposta:

Para a forma bilinear, equação (3), temos que a matriz de rigidez associada é dada por:

$$K_{ij} = \int_0^1 \left(\alpha\Phi_i'\Phi_j' + \gamma\Phi_i\Phi_j\right)dx, \tag{4}$$

com $i, j \in 1, \ldots, n$ e Φ_i, Φ_j são as funções base.

Lembre que,

$$K_{ij} = \int_{\Omega_1} + \cdots + \int_{\Omega_n}, \tag{5}$$

onde, Ω_i denotam os elementos.

Logo, para o caso **linear** temos que a função a integrar em cada partição (Ω_i), vai ser no máximo de grau dois. Então, precisamos 2 pontos na fórmula de quadratura gaussiana, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, e com estes dois pontos conseguimos ter os dois pontos necessários em cada partição para que a integração numérica seja exata.

Agora, no caso **quadrático**, vemos que o polinômio de grau máximo a integrar em cada elemento (Ω_i) é de grau 4. Portanto, precisamos 3 pontos da quadratura gaussiana para integrar pois, a ordem do polinômio da quadratura é $2n-1$, e com os 3 pontos integrar em cada partição para que a integração seja exata.

Por último no caso de **grau n**, temos que em cada partição o polinômio a integrar vai ser de grau $2n$, logo precisamos de $n+1$ pontos da quadratura gaussiana para integrar exatamente, e com os $n+1$ pontos conseguimos integrar em cada partição e assim obter a integração numérica exata.

Exercício 7

Repita o exercício anterior para a forma bilinear do **Problema D**.

Resposta:

A análise deste é similar ao da anterior, entretanto, a matriz de rigidez para a forma bilinear do **Problema D**, equação (2) é:

$$K_{ij} = \int_0^1 \Phi_i' \Phi_j' dx, \tag{6}$$

logo, em cada partição o polinômio a integrar vai ser de, no máximo, grau $2(n-1)$, então, precisamos de n pontos na quadratura gaussiana para obter a integração numérica exata.

Exercício 8

Utilize os resultados dos **Exercícios 5 e 6**, para construir um programa baseado em quadratura gaussiana que calcule exatamente a matriz de rigidez de um elemento finito de tamanho h^e, associado ao **Problema V**. O programa deverá cobrir o uso de polinômios lineares, quadráticos e cúbicos pelo menos.

a) Utilize o programa para resolver problemas em que sejam conhecidas as soluções analíticas e calcule a norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro

$$||u - u_h||_0 = \left(\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx \right)^{1/2},$$

comparando seu valor para uso de polinômios de diferentes graus, com diferentes refinamentos da malha.

b) Repita, para a seminorma $\mathcal{H}^1(0,1)$ do erro

$$|u - u_h|_1 = \left(\int_0^1 \left[\frac{du(x)}{dx} - \frac{du_h(x)}{dx} \right]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Resposta a):

Para calcular as normas, foi utilizada a seguinte aproximação baseada nos pontos de quadratura gaussiana:

$$||u - u_h||^2 = \sum_{e}^{N_e} \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx^{1/2} = \int_e f(x)dx =$$

$$\sum_{e}^{N_e} \frac{h^e}{2} \int_{-1}^{1} f(x(\xi))d\xi \approx \sum_{e}^{N_e} \frac{h^e}{2} \sum_{l}^{N_G} w_l f(x(\xi_l))d\xi$$

Com $f = [u - u_h]^2$ para a norma $\mathcal{L}^2(0,1)$
e $f = \left[\frac{du(x)}{dx} - \frac{du_h(x)}{dx}\right]^2$ para a seminorma $\mathcal{H}^1(0,1)$

A partir do **Exercício 6**, temos que para integrar exatamente polinômios lineares, quadráticos e cúbicos, ele deve usar, pelo menos, 4 pontos na integração numérica por quadratura gaussiana. Exemplificamos com as seguintes equações diferenciais:

Problema I: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$-u'' + u = x \quad \forall\, x \in \Omega = (0,1), \tag{7}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\mathcal{U}$ é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis que satisfazem $u(0) = u(1) = 0$.
A solução analítica desse problema é

$$u_e(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1} \tag{8}$$

Para este problema, temos $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $f(x) = x$. Computamos a solução aproximada para $n = 5$ e $n = 10$, onde n é o número de pontos usados na integração numérica pelo método da quadratura gaussiana, com intervalos regulares, usando elementos lineares e elementos quadráticos, obtendo os seguintes resultados, em forma de gráfico:

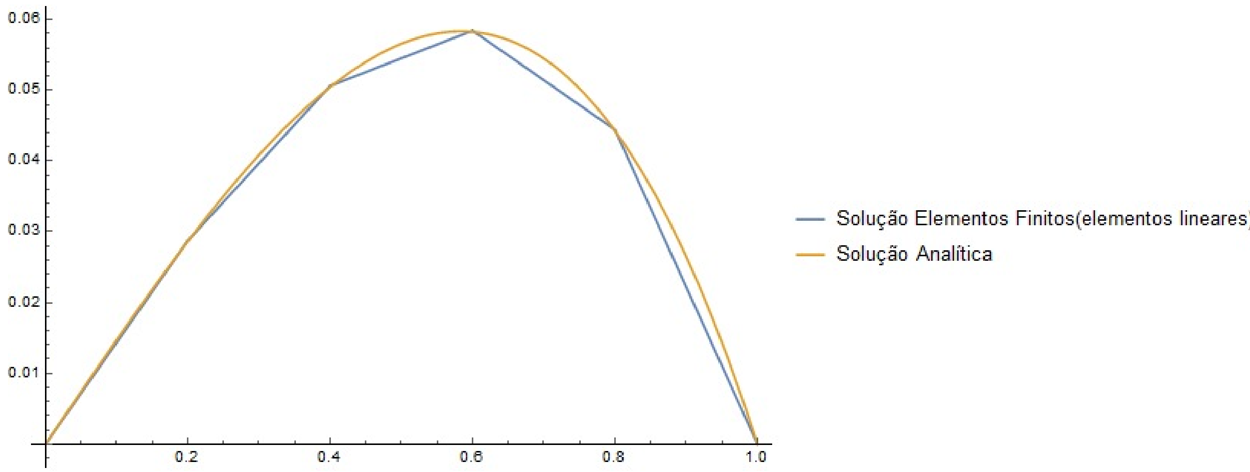

Figura 1: Comparação da solução exata com a solução aproximada do Problema 1 com $n = 5$ usando elementos lineares

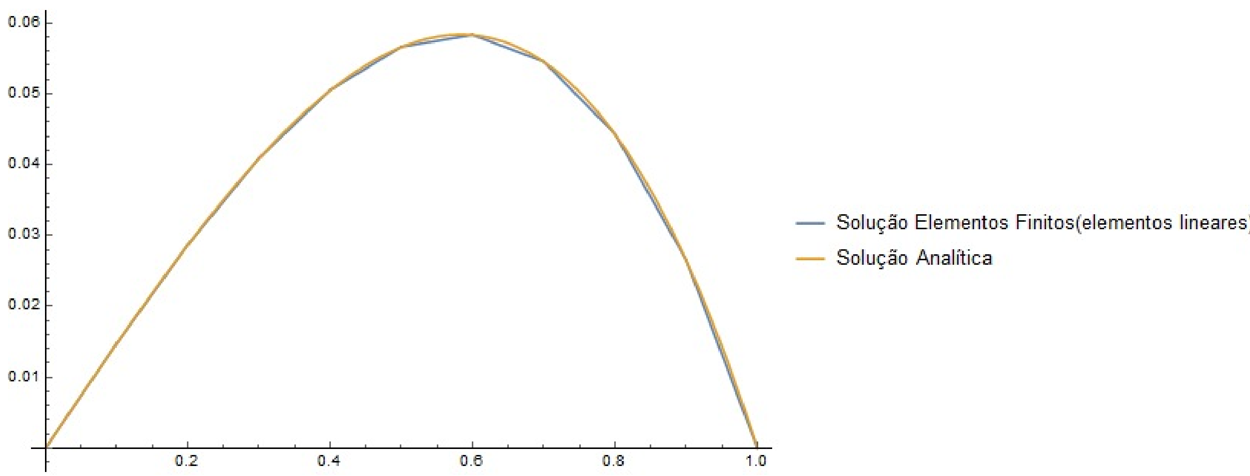

Figura 2: Comparação da solução exata com a solução aproximada do Problema 1 com $n = 10$ usando elementos lineares

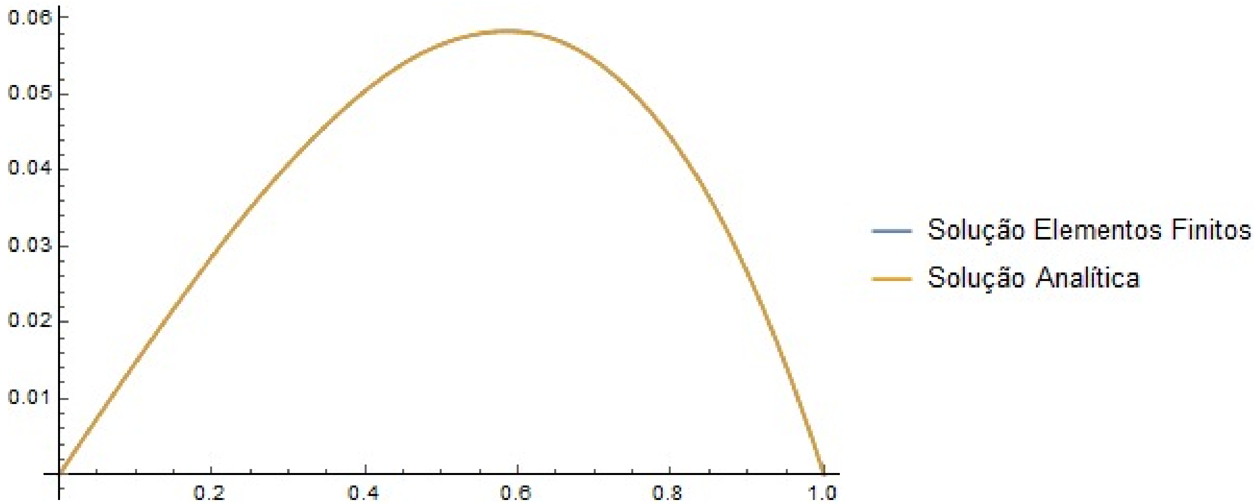

Figura 3: Comparação da solução exata com a solução aproximada do Problema 1 com $n = 5$ usando elementos quadráticos

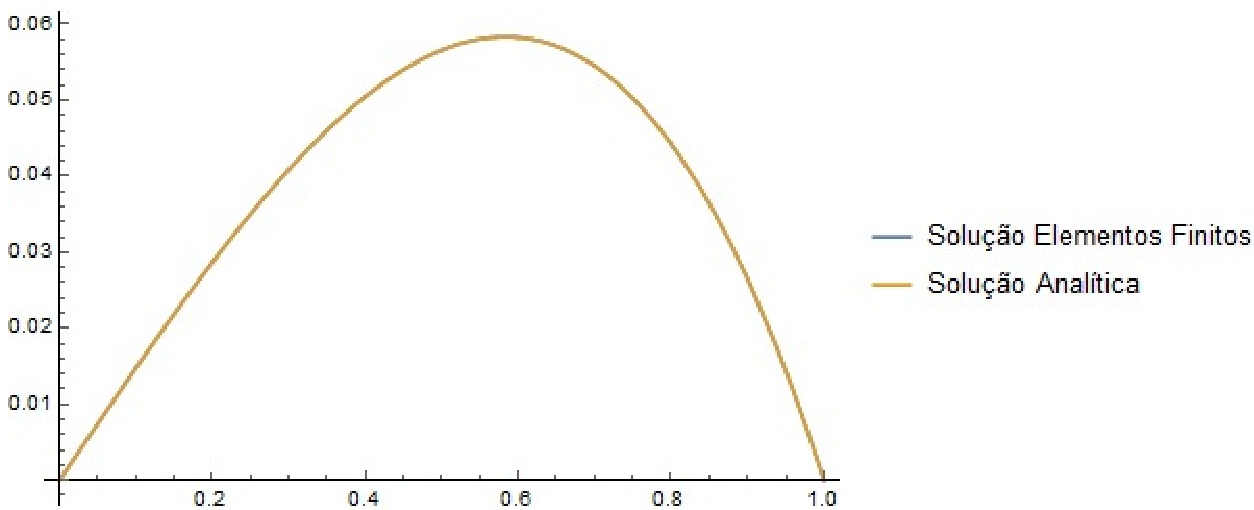

Figura 4: Comparação da solução exata com a solução aproximada do Problema 1 com $n = 10$ usando elementos quadráticos

A norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro para cada uma das soluções aproximadas acima está apresentada na tabela abaixo:

n	Elementos	Gráfico	$\|\|u - u_h\|\|_0$
5	Lineares	Figura 1	0.0204359
10	Lineares	Figura 2	0.00644424
5	Quadráticos	Figura 3	0.0203493
10	Quadráticos	Figura 4	0.00642696

Tabela 1: Norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro para as soluções aproximadas.

Com estas informações, podemos, primeiro, concluir a convergência do método, e que o aumento de pontos significa um aumento da precisão do algoritmo. É possível ver nos algoritmos em que foram usados elementos lineares a estrutura linear por partes da solução. Além disso, para um mesmo n, a solução com elementos quadráticos mostrou cometer um erro levemente menor que a solução com elementos lineares. Por fim, é interessante mostrar que, apesar de na "norma do olho", o gráfico da Figura 3 mostrar uma melhor aproximação que o gráfico da Figura 2, isto é, parece que as linhas estão mais próximas, numericamente, a melhor solução (a que cometeu menor erro) entre essas duas foi a que usa elementos lineares com 10 pontos.

Problema II: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$-u'' + u = -1 + \frac{x(x-1)}{2} \quad \forall\, x \in \Omega = (0,1), \tag{9}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\mathcal{U}$ é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis que satisfazem $u(0) = u(1) = 0$.
A solução analítica dessa EDO é

$$u_e(x) = \frac{x(x-1)}{2} \tag{10}$$

Para este problema, tomamos $\alpha = 1, \gamma = 1$ e $f = -1 + \frac{x(x-1)}{2}$ e diferentes refinamentos para $n = 5$, $n = 10, n = 15$ e $n = 20$, onde n é o número de elementos. A continuação apresentamos os resultados usando elementos lineares:

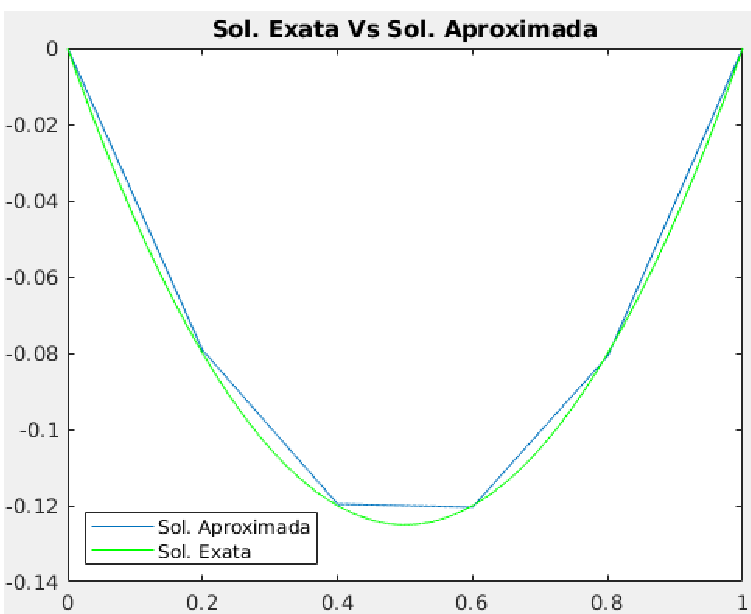

Figura 5: Comparação da solução exata com a solução aproximada com $n = 5$

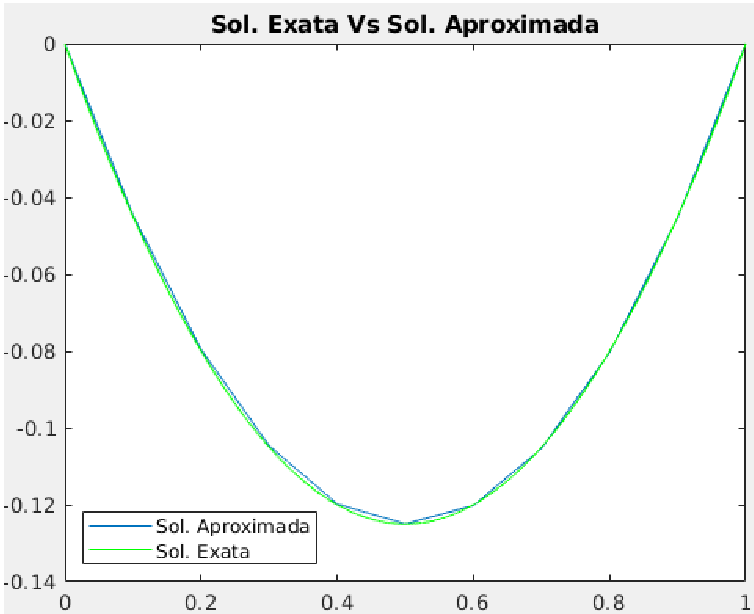

Figura 6: Comparação da solução exata com a solução aproximada com $n = 10$

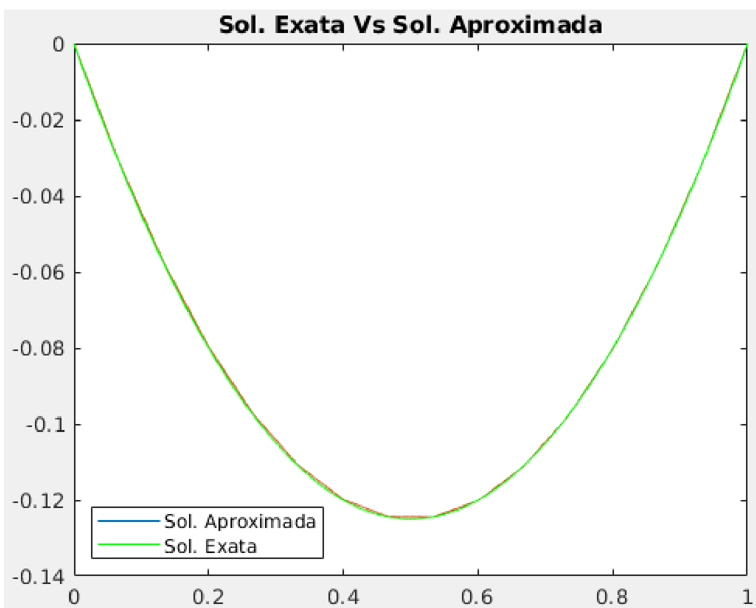

Figura 7: Comparação da solução exata com a solução aproximada com $n = 15$

Nos gráficos 5, 6 e 7, podemos observar que geometricamente a solução numérica está muito próxima da solução exata do (problema II).

Agora, fazemos uma tabulação da norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro para cada uma das soluções aproximadas e do erros relativos com o objetivo de apreciar melhor a aproximação numérica. Lembrando que,

$$\text{Erro Relativo na } ||.||_\beta = \frac{||U_e - \text{Sol. Aprox.}||_\beta}{||U_e||_\beta}$$

n	Elementos	$\lVert u - u_h \rVert_0$	Erro Relativo na $\lVert \dot{} \rVert_0$
5	Lineares	0.00368	4.035%
10	Lineares	0.00095	1.043%
15	Lineares	0.00044	0.488%
20	Lineares	0.00026	0.292%

Tabela 2: Norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro para as soluções aproximadas.

Note que na tabela 2, a partir de $n = 15$ o erro relativo é menor que 1%.

Resposta b):

Para o **Problema I**, a seminorma $\mathcal{H}^1(0,1)$ do erro para cada uma das soluções aproximadas encontradas no item a) está apresentada na tabela abaixo:

n	Elementos	Gráfico	$\lvert u - u_h \rvert_1$
5	Lineares	Figura 1	0.193586
10	Lineares	Figura 2	0.116969
5	Quadráticos	Figura 3	0.191067
10	Quadráticos	Figura 4	0.115918

Tabela 3: Seminorma $\mathcal{H}^1(0,1)$ do erro para as soluções aproximadas.

Com estes resultados, vemos que esta seminorma apresenta valores um pouco maiores que a norma analisada no item a), mostrando que o valor exato é mais bem aproximado que sua derivada, mas esta ainda sim é aproximada. O padrão de erro é o mesmo do item anterior, melhorando (diminuindo), conforme n cresce, e para um mesmo n, levemente menor para os casos em que elementos quadráticos foram usados.

Para o **Problema II**, a seminorma $\mathcal{H}^1(0,1)$ do erro para cada uma das soluções aproximadas encontradas no item a) está apresentada na tabela abaixo:

n	Elementos	$\lvert u - u_h \rvert_1$	Erro Relativo na *Seminorma* $\mathcal{H}^1(0,1)$
5	Lineares	0.005782	20.032%
10	Lineares	0.028922	10.018%
15	Lineares	0.01928	6.679%
20	Lineares	0.01446	5.009%

Tabela 4: Norma $\mathcal{L}^2(0,1)$ do erro para as soluções aproximadas.

Note que na tabela 4, há uma grande diferença entre os erros relativos e a norma $\mathcal{L}^2(0,1)$, isto tal vez acontece pelo fato de que as funções bases lineares definidas não são diferenciáveis e o operador derivada não é contínuo.