Recursividade

Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins

Baseado nos materiais: Prof. Autran Macêdo, Prof. Bruno Tranvençolo e Profa. Denise Guliato

Definições

Definição de recursão / recursividade:

Matemática: o ato de definir um objeto (geralmente uma função) em termos do próprio objeto

Definições

Definição de recursão / recursividade:

Matemática: o ato de definir um objeto (geralmente uma função) em termos do próprio objeto

Computação: o ato de um algoritmo chamar a si mesmo para resolver um dado problema

- Um ou mais passos do algoritmo invocam sua repetição
- A recursão pode ser **direta ou indireta**

Definições

Definição de recursão / recursividade:

Matemática: o ato de definir um objeto (geralmente uma função) em termos do próprio objeto

Computação: o ato de um algoritmo chamar a si mesmo para resolver um dado problema

- Um ou mais passos do algoritmo invocam sua repetição
- A recursão pode ser **direta ou indireta**

Um **procedimento** que utiliza-se da recursão é dito **recursivo**

- Qualquer **objeto** resultante desse tipo de procedimento também é dito **recursivo**

Definições

- A **recursão** pode ser usada para obter **sequências infinitas** a partir de **componentes finitos**
  - Permite pensar no "**passo chave**" **da resolução** sem a necessidade de integrá-lo aos demais

Definições

A **recursão** pode ser usada para obter **sequências infinitas** a partir de **componentes finitos**

Permite pensar no "**passo chave**" **da resolução** sem a necessidade de integrá-lo aos demais

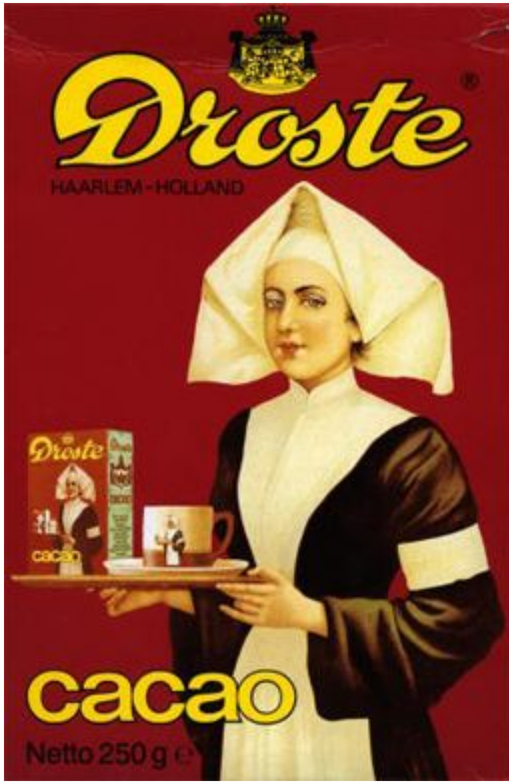
Exemplo:

O conjunto dos números naturais pode ser definido por:

Seja 0 um número natural

Cada número natural ***n*** tem um sucessor ***n + 1***, o qual também é um número natural.

Recursividade visual



Fonte: http://beachpackagingdesign.com/boxvox/droste-effect-p

Recursão e computação

Propriedades dos problemas com estrutura recursiva:

- Só sabe resolver o caso mais simples (**solução trivial**)
- Cada instância do problema é resolvida a partir de uma instância menor do mesmo problema

Recursão e computação

Propriedades dos problemas com estrutura recursiva:

- Só sabe resolver o caso mais simples (**solução trivial**)
- Cada instância do problema é resolvida a partir de uma instância menor do mesmo problema

Resolução de problemas recursivos:

- Se a instância é **simples**, resolva-a diretamente

Recursão e computação

Propriedades dos problemas com estrutura recursiva:

- Só sabe resolver o caso mais simples (**solução trivial**)
- Cada instância do problema é resolvida a partir de uma instância menor do mesmo problema

Resolução de problemas recursivos:

- Se a instância é **simples**, resolva-a diretamente
- Senão:
  - Reduza-a a uma **instância menor** do mesmo problema
  - Aplique o método para essa instância menor
  - Utilize o resultado para responder a instância original

Recursão e computação

Propriedades dos problemas com estrutura recursiva:

- Só sabe resolver o caso mais simples (**solução trivial**)
- Cada instância do problema é resolvida a partir de uma instância menor do mesmo problema

Resolução de problemas recursivos:

- Se a instância é **simples**, resolva-a diretamente
- Senão:
  - Reduza-a a uma **instância menor** do mesmo problema
  - Aplique o método para essa instância menor
  - Utilize o resultado para responder a instância original

O uso dessa estratégia produz um **algoritmo recursivo**

- Caracterizado por possuir uma chamada a si mesmo

Etapas de implementação

1ª etapa: definir o **caso base**

- Parte **não recursiva**
- Identifica quando a "jornada" já terminou
  - **Critério de parada (caso mais simples)**
- Instância do problema que tem um **solução trivial**
- Essa etapa é **muito importante** para evitar **recursividade infinita**

Etapas de implementação

2ª etapa: definir o **passo recursivo**

Parte **recursiva**

Determina como a solução de um problema é obtido a partir do seu precedente (problema menor)

- **Solução geral ou genérica** para o problema

Envolve:

- Analisar o problema e dividi-lo em **problemas menores**
- Encontrar uma forma da função **chamar a si mesma**, passando como parâmetro esses problemas menores

Etapas de implementação

3ª etapa: integrar o caso base e o passo recursivo

Utiliza uma estrutura condicional (**seleção**)

4ª etapa: verificar a adequação da solução

Envolve:

- Verificar a condição de término
- Verificar a eficiência do algoritmo (memória e tempo)
  - **Árvores de recursão**

Exemplo 1

Cálculo do fatorial:

Dado um número inteiro positivo *n*, como implementar recursivamente uma função que retorne seu fatorial (*n*!)?

Exemplo 1

Cálculo do fatorial:

Dado um número inteiro positivo *n*, como implementar recursivamente uma função que retorne seu fatorial (*n*!)?

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ (}\textbf{caso base}\text{)} \\ n \times (n-1)! & \text{se } n > 0 \text{ (}\textbf{passo recursivo}\text{)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Cálculo do fatorial:

Dado um número inteiro positivo n, como implementar recursivamente uma função que retorne seu fatorial ($n!$)?

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ (}\textbf{caso base}\text{)} \\ n \times (n-1)! & \text{se } n > 0 \text{ (}\textbf{passo recursivo}\text{)} \end{cases}$$

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Exemplo 2

Gramáticas de linguagens de programação:

Na especificação de uma gramática, a estrutura de expressões pode ser modelada como:

<expr> ::= <numero>

| *(<expr> * <expr>)*

| *(<expr> + <expr>)*

Exemplo 2

Gramáticas de linguagens de programação:

Na especificação de uma gramática, a estrutura de expressões pode ser modelada como:

<expr> ::= <numero>

| (<expr> * <expr>)

| (<expr> + <expr>)

A referência recursiva à ***<expr>*** permite a formação de **expressões complexas**

Uso de mais de um produto ou soma em uma única expressão

Ex: (5 * ((3 * 6) + 8))

Exemplo 2

Gramáticas de linguagens de programação:

Na especificação de uma gramática, a estrutura de expressões pode ser modelada como:

<expr> ::= <numero>

| (<expr> * <expr>)

| (<expr> + <expr>)

A referência recursiva à ***<expr>*** permite a formação de **expressões complexas**

Uso de mais de um produto ou soma em uma única expressão

Ex: (5 * ((3 * 6) + 8))

Questões:

Qual é o caso base e o passo recursivo?

Exemplo 2

Gramáticas de linguagens de programação:

Na especificação de uma gramática, a estrutura de expressões pode ser modelada como:

<*expr*> *::=* <*numero*> **caso base**

| *(<expr> * <expr>)*

| *(<expr> + <expr>)* **passos recursivos**

A referência recursiva à **<*expr*>** permite a formação de **expressões complexas**

Uso de mais de um produto ou soma em uma única expressão

Ex: (5 * ((3 * 6) + 8))

Questões:

Qual é o caso base e o passo recursivo? O que eles representam?

Exemplo 3

O que faz a função ***xyz( )*** ?

```
int xyz (int n)
{
   if (n == 0)
      return 0;
   return n + xyz (n-1);
}
```

Exemplo 3

O que faz a função ***xyz( )*** ?

```
int xyz (int n)
{
   if (n == 0)
      return 0;
   return n + xyz (n-1);
}
```

Implementa o somatório: $\sum_{i=0}^{n} i$

Implementação de Recursividade

Como é implementada uma recursão?

Implementação de Recursividade

Como é implementada uma recursão?

O compilador implementa um procedimento recursivo através de uma **pilha**

Implementação de Recursividade

Como é implementada uma recursão?

O compilador implementa um procedimento recursivo através de uma **pilha**

Nela são armazenados os **dados usados em cada chamada** de uma função que ainda não terminou de processar

Implementação de Recursividade

Fluxo de execução:

A função começa a execução do seu primeiro comando cada vez que é chamada

Novas e distintas cópias dos parâmetros passados por valor e variáveis locais são criadas

A **posição** da chamada da função **é colocada em estado de espera**

O nível gerado recursivamente é executado

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

[4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } >]

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

[4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } >]

[4 * < 3 * { 2 * 1 } >]

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
   else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

[4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } >]

[4 * < 3 * { 2 * 1 } >]

[4 * < 3 * 2 >]

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

[4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } >]

[4 * < 3 * { 2 * 1 } >]

[4 * < 3 * 2 >]

[4 * 6]

```
int fat(int n) {
   if (n == 1 || n == 0)
      return 1;
   else
      return n*fat(n-1);
}
```

Implementação de Recursividade

Exemplo do fluxo de execução:

fatorial(4)

[4 * fatorial(3)]

[4 * < 3 * fatorial(2) >]

[4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } >]

[4 * < 3 * { 2 * 1 } >]

[4 * < 3 * 2 >]

[4 * 6]

24

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Recursão de cauda

- Em uma **recursão comum**, a cada chamada recursiva é necessário armazenar:
  - Cópia dos argumentos de entrada e variáveis locais
  - Posição do código onde foi feita a chamada para continuar posteriormente

Recursão de cauda

Em uma **recursão comum**, a cada chamada recursiva é necessário armazenar:

- Cópia dos argumentos de entrada e variáveis locais
- Posição do código onde foi feita a chamada para continuar posteriormente

Em uma **recursão de cauda**, a chamada recursiva é a **última operação** que deve ser executada

Recursão de cauda

- Em uma **recursão comum**, a cada chamada recursiva é necessário armazenar:
  - Cópia dos argumentos de entrada e variáveis locais
  - Posição do código onde foi feita a chamada para continuar posteriormente
- Em uma **recursão de cauda**, a chamada recursiva é a **última operação** que deve ser executada
  - Usa menos memória de pilha (**eficiência de memória**)
    - **Reduz** a quantidade de dados armazenados na pilha

Recursão de cauda

- Em uma **recursão comum**, a cada chamada recursiva é necessário armazenar:
  - Cópia dos argumentos de entrada e variáveis locais
  - Posição do código onde foi feita a chamada para continuar posteriormente

- Em uma **recursão de cauda**, a chamada recursiva é a **última operação** que deve ser executada
  - Usa menos memória de pilha (**eficiência de memória**)
    - **Reduz** a quantidade de dados armazenados na pilha
  - Torna a recursão mais rápida (**eficiência de tempo**)
    - Simplifica o empilhamento e desempilhamento

Recursão de cauda

Exemplo 1:

Faça uma função recursiva que retorne o endereço do nó de uma lista simplesmente encadeada que contenha o elemento informado

```
struct nodo {
        int info;
        struct nodo * prox;
}

typedef struct nodo Lista;
```

```
Lista* get_nod(Lista *L, int elem)
{
   if (L == NULL || L->info == elem )
      return L;
   else
      return get_nod(L->prox, elem);
}
```

Recursão de cauda

Facilita conversão entre versões (**recursiva ↔ iterativa**)

```
Lista* get_nod(Lista *L, int elem) {
    if (L == NULL || L->info == elem )
        return L;
    else
        return get_nod(L->prox, elem);
}
```

conversão

```
Lista* get_nod(Lista *L, int elem) {
    while (L != NULL && L->info != elem)
        L = L->prox;
    return L;
}
```

Recursão de cauda

Exemplo 2: Função recursiva do fatorial

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Recursão comum

Recursão de cauda

Exemplo 2: Função recursiva do fatorial

```
int fat(int n) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return 1;
    else
        return n*fat(n-1);
}
```

Recursão comum

```
int fat_cauda(int n, int parcial) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return parcial;
    else
        return fat_cauda(n-1, parcial*n);
}

int fat(int n) {
    return fat_cauda(n, 1);
}
```

Recursão de cauda

Recursão de cauda

Conversão entre versões (**recursiva ↔ iterativa**)

```
int fat_cauda(int n, int parcial) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return parcial;
    else
        return fat_cauda(n-1, parcial*n);
}

int fat(int n) {
    return fat_cauda(n, 1);
}
```

Recursão de cauda

Conversão entre versões (**recursiva ↔ iterativa**)

```
int fat(int n) {
    int parcial = 1;

    while (n > 1) {
        parcial *= n;
        n = n-1;
    }

    return parcial;
}
```

```
int fat_cauda(int n, int parcial) {
    if (n == 1 || n == 0)
        return parcial;
    else
        return fat_cauda(n-1, parcial*n);
}

int fat(int n) {
    return fat_cauda(n, 1);
}
```

conversão

Recursão vs. iteração

Versão recursiva	Versão iterativa
Usa estruturas de seleção (*if*, *if-else* ou *switch*)	Usa estruturas de repetição (*for, while* ou *do-while*)
Repetição implícita através das chamadas à função	Repetição explícita
Termina ao atingir o caso base	Termina quando o teste do laço falha
Pode ocorrer infinitamente	Pode ocorrer infinitamente
Lento	Rápido
Implementação mais simples e de fácil manutenção	Implementação mais elaborada que pode dificultar a manutenção

Fonte: notas de aula do Prof. Rodrigo de Oliveira

Cuidados com as funções recursivas

Garantir a **parada da recursão**:

O caso base deve estar implementado no código da função (**existência**)

Cuidados com as funções recursivas

Garantir a **parada da recursão**:

O caso base deve estar implementado no código da função (**existência**)

A condição de parada deve ser atingível em algum momento (**corretude**)

Cuidados com as funções recursivas

Garantir a **parada da recursão**:

- O caso base deve estar implementado no código da função (**existência**)
- A condição de parada deve ser atingível em algum momento (**corretude**)

Evita a **recursão infinita**

- Na prática, o programa **não** executará infinitamente
  - Ocorre um **estouro de memória** provocado pela limitação no tamanho da pilha

Cuidados com as funções recursivas

Parada da recursão:

```
int fat(int n) {
   return (n*fat(n-1));
}
```

∄ critério de parada

Cuidados com as funções recursivas

Parada da recursão:

```
int fat(int n) {
   return (n*fat(n-1));
}
```

∄ critério de parada

```
int fat(int n) {
    if (n == 0)
        return (1);
   else return (n*fat(n));
}
```

Critério de parada inatingível

Cuidados com as funções recursivas

Parada da recursão:

```
int fat(int n) {
   return (n*fat(n-1));
}
```

∄ critério de parada

```
int fat(int n)
{
    if (n == 0)
        return (1);
    else return (n*fat(n-1));
}
```

Implementação correta (critério de parada definido e atingível)

```
int fat(int n) {
    if (n == 0)
        return (1);
    else return (n*fat(n));
}
```

Critério de parada inatingível

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Exemplo:

fat(4)

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Exemplo:

$$\mathit{\mathbf{fat(4)}}$$

$$\underbrace{4 * \mathbf{fat(3)}}$$

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Exemplo:

fat(4)

*4 * **fat(3)***

*3 * **fat(2)***

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Exemplo:

fat(4)

*4 * **fat(3)***

*3 * **fat(2)***

*2 * **fat(1)***

Cuidados com as funções recursivas

Implementar o **passo recursivo**:

- O tamanho do problema deve diminuir
- A cada recursão o problema deve se aproximar do caso base

Exemplo:

fat(4)

*4 * **fat(3)***

*3 * **fat(2)***

*2 * **fat(1)***

1 (**caso base**)

Cuidados com as funções recursivas

A **ordem** das chamadas recursivas afeta o resultado

Cuidados com as funções recursivas

A **ordem** das chamadas recursivas afeta o resultado

implementação 1

```
void recursiveFunction(int num) {
    if (num < 5) {
        printf("%d\n", num);
        recursiveFunction(num+1);
    }
}
```

1	recursiveFunction (0)
2	printf (0)
3	recursiveFunction (0+1)
4	printf (1)
5	recursiveFunction (1+1)
6	printf (2)
7	recursiveFunction (2+1)
8	printf (3)
9	recursiveFunction (3+1)
10	printf (4)

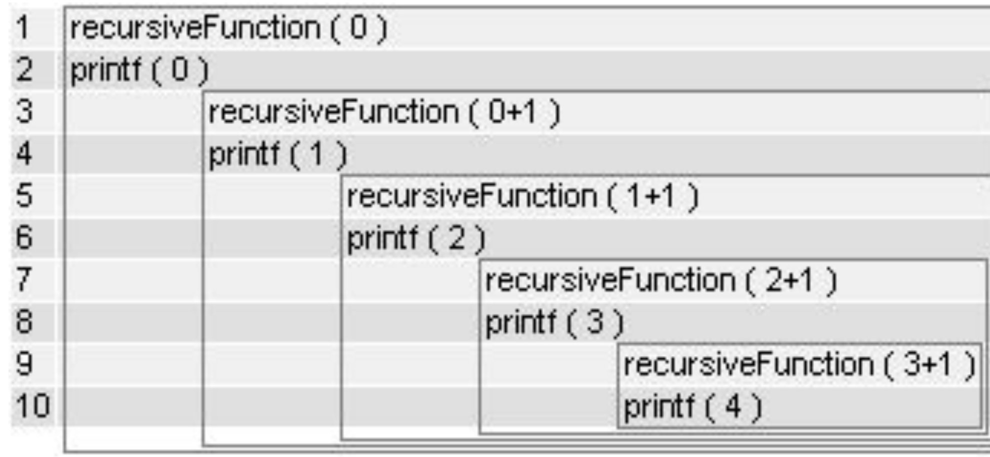
execução para *num* = 0

Cuidados com as funções recursivas

A **ordem** das chamadas recursivas afeta o resultado

implementação 1

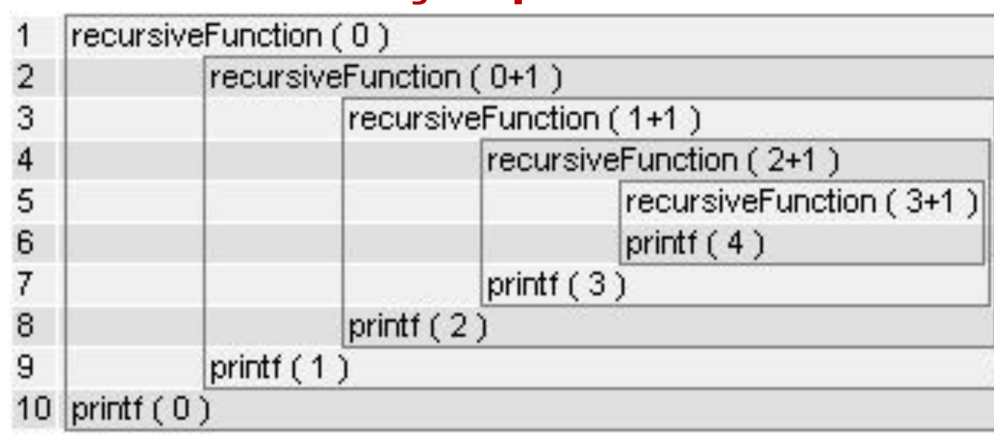
```
void recursiveFunction(int num) {
    if (num < 5) {
        printf("%d\n", num);
        recursiveFunction(num+1);
    }
}
```



implementação 2

```
void recursiveFunction(int num) {
    if (num < 5) {
        recursiveFunction(num+1);
        printf("%d\n", num);
    }
}
```

execução para *num* = 0



Cuidados com as funções recursivas

Tentar limitar a **profundidade da recursão**:

Cuidados com as funções recursivas

Tentar limitar a **profundidade da recursão**:

A quantidade das chamadas recursivas deve ser **finita e pequena**

Evitar **problemas de memória**

Cuidados com as funções recursivas

Tentar limitar a **profundidade da recursão**:

A quantidade das chamadas recursivas deve ser **finita** e **pequena**

- Evitar **problemas de memória**

Exemplo:

Qual a profundidade da recursão da função para calcular o fatorial de *n*?

Cuidados com as funções recursivas

Tentar limitar a **profundidade da recursão**:

A quantidade das chamadas recursivas deve ser **finita e pequena**

Evitar **problemas de memória**

Exemplo:

Qual a profundidade da recursão da função para calcular o fatorial de *n*?

linear: *O(n)*

Cuidados com as funções recursivas

Evitar uma **"explosão" exponencial das chamadas** recursivas:

- Crescimento rápido do número de chamadas
  - **Limita o tamanho da entrada**

- **Geram retrabalho** (repetição de cálculos)
  - Instâncias do problema são resolvidas mais de uma vez

- **Fato:** alguns problemas não são eficientes quando implementados recursivamente

  - **Exemplo:** cálculo da série de *Fibonacci*

Série de *Fibonacci*

Definição informal:

Sequência numérica iniciada com 0 e 1 e cujo os demais termos são obtidos pela soma dos dois anteriores

Alguns termos da série de *Fibonacci*:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Definição recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \text{ (\textbf{caso base})} \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ (\textbf{caso base})} \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{se } n > 1 \text{ (\textbf{passo recursivo})} \end{cases}$$

Série de *Fibonacci*

Exemplos de aplicação:

Inicialmente relacionada com a velocidade de reprodução dos coelhos

Série de *Fibonacci*

Exemplos de aplicação:

- Inicialmente relacionada com a velocidade de reprodução dos coelhos
- É observada em muitos fenômenos biológicos

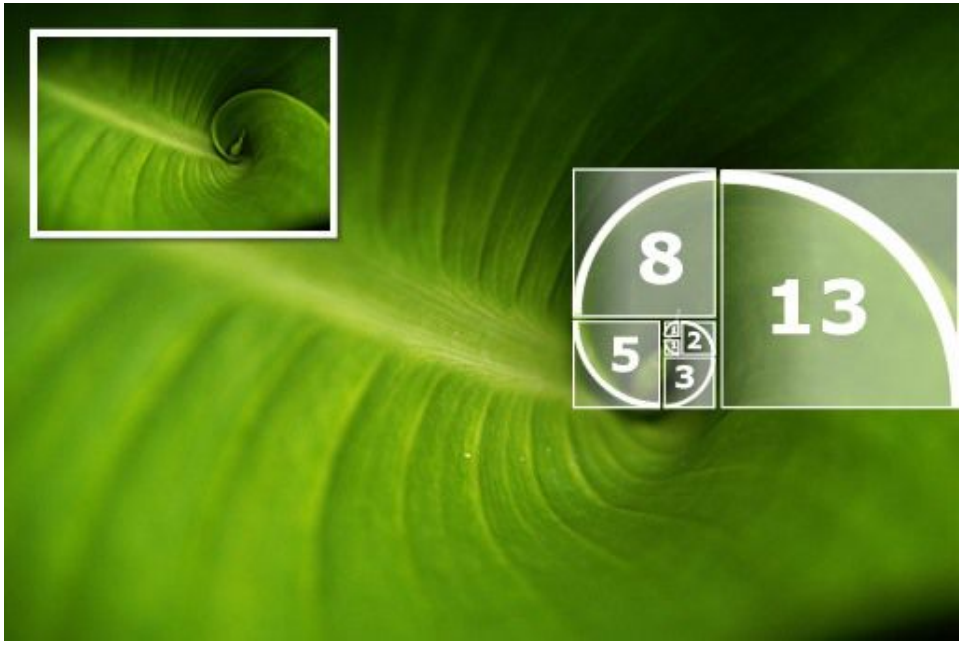


Figura: Evolução da espiral da folha da bromélia

Série de *Fibonacci*

Exemplos de aplicação:

- Inicialmente relacionada com a velocidade de reprodução dos coelhos
- É observada em muitos fenômenos biológicos
- Possui aplicações em computação, matemática, teoria dos jogos, artes e música

Conversão (aproximada) de milhas para km:

5 milhas ≈ 8 km

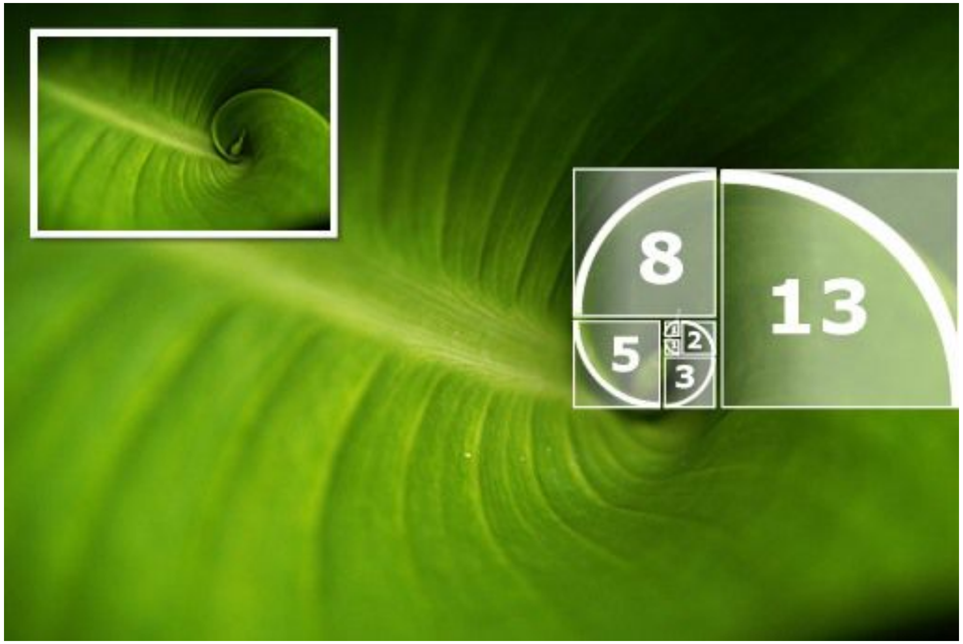


Figura: Evolução da espiral da folha da bromélia

Série de *Fibonacci*

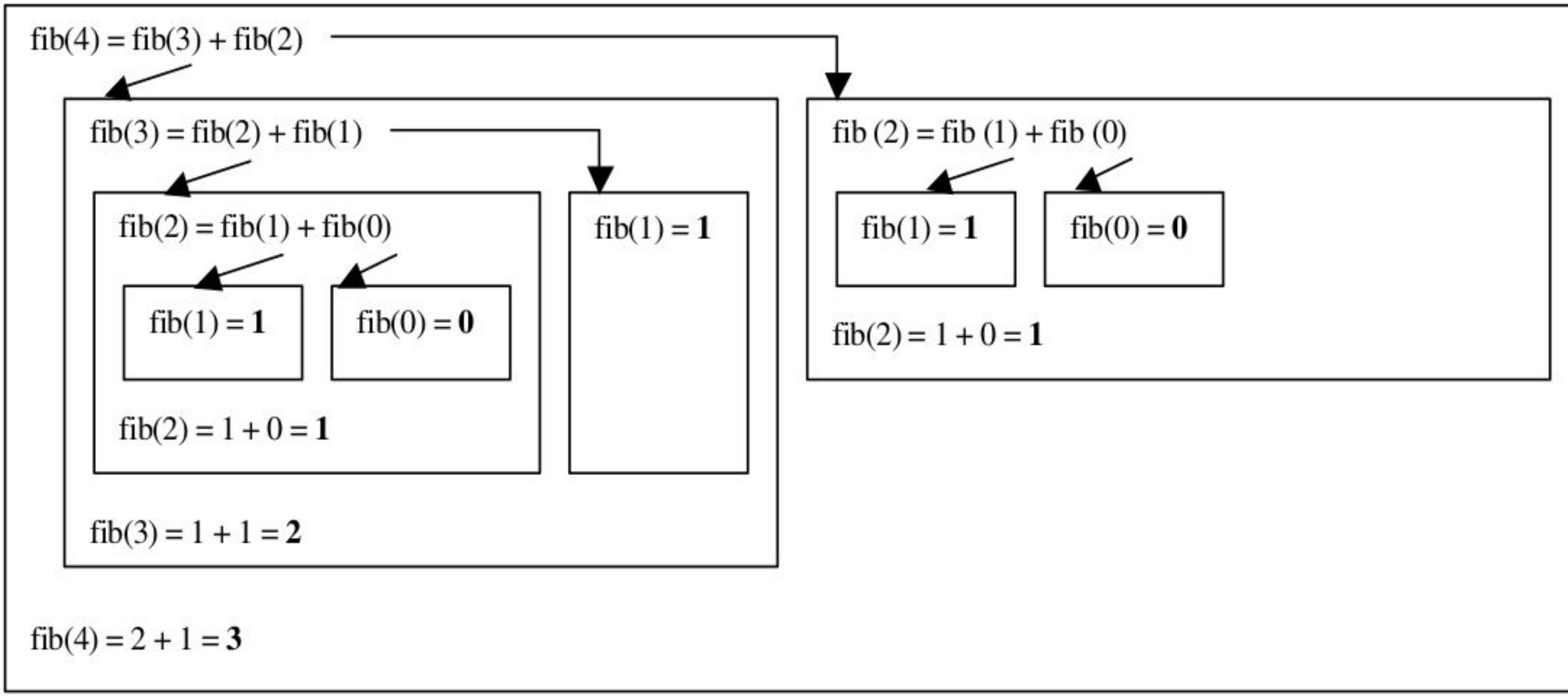
Implementação recursiva:

- Rápido para o cálculo de poucos termos
- Processamento começa a demorar para valores de entrada maiores (***n > 40***)

```
int fib(int n)
{
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Série de *Fibonacci*

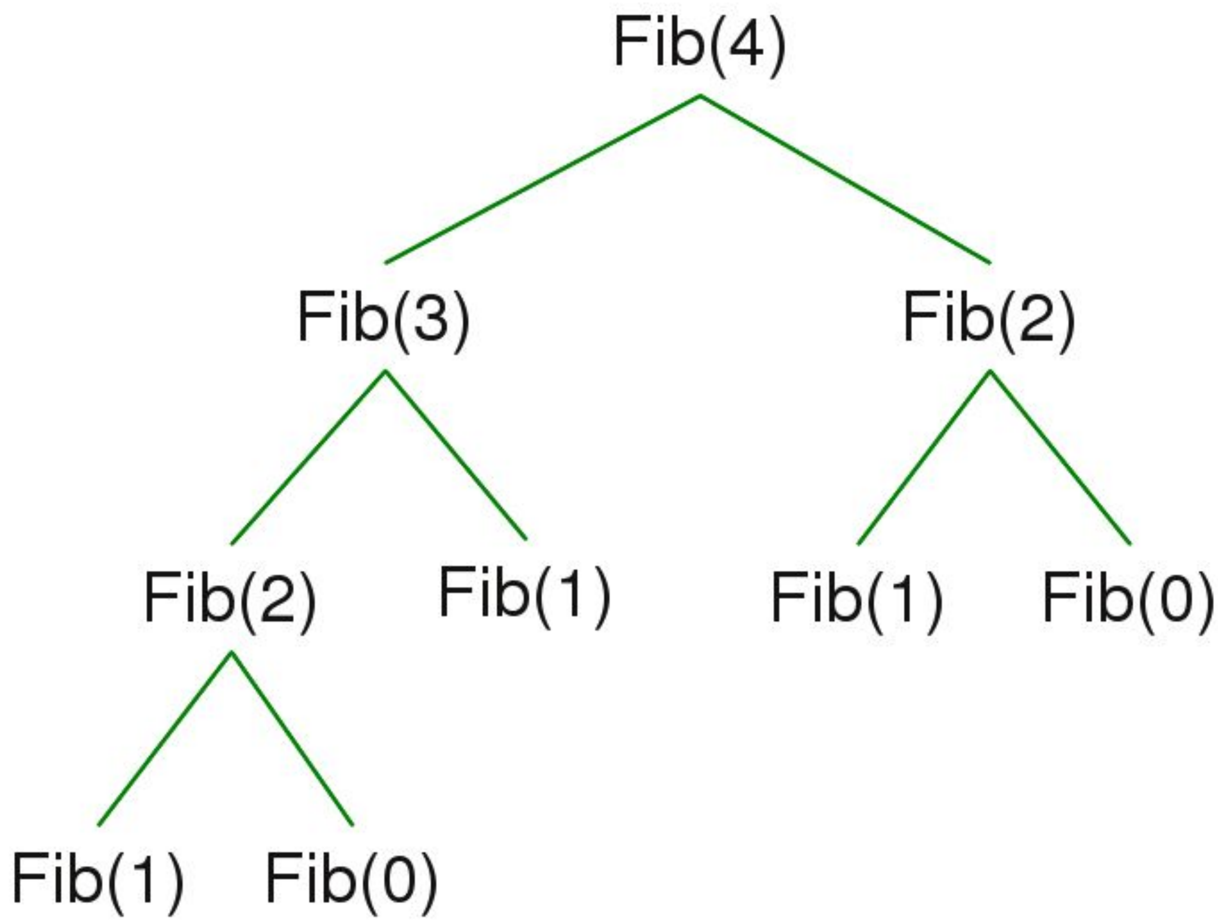
Esquema das chamadas recursivas para *n* = 4 é:



Fonte: notas de aula do Prof. Rodrigo de Oliveira

Série de *Fibonacci*

Árvore de recursão:



Análise de complexidade

- Analisar a complexidade de uma função recursiva **não** é uma tarefa trivial
  - Envolve a **resolução de uma recorrência**

Análise de complexidade

- Analisar a complexidade de uma função recursiva **não** é uma tarefa trivial
  - Envolve a **resolução de uma recorrência**

- **Recorrência** é uma expressão que define uma função em termos dos seus valores "anteriores"
  - **Ex:** $f(n) = f(n-1) + 5n - 8$

Análise da complexidade

Analisar a complexidade de uma função recursiva **não** é uma tarefa trivial

Envolve a **resolução de uma recorrência**

Recorrência é uma expressão que define uma função em termos dos seus valores "anteriores"

Ex: $f(n) = f(n-1) + 5n - 8$

Resolver uma recorrência é:

> encontrar uma **fórmula fechada** que dê o valor diretamente em termos de seu parâmetro.

Geralmente resulta em uma combinação de polinômios, quocientes de polinômios, logaritmos, exponenciais, etc.

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Caso base:

2 instruções: comparação e retorno

Custo constante: ***O(1)***

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Caso base:

2 instruções: comparação e retorno

Custo constante: ***O(1)***

Passo recursivo:

5 instruções: comparação, 2 chamadas recursivas, soma e retorno

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Caso base:

2 instruções: comparação e retorno
Custo constante: ***O(1)***

Passo recursivo:

5 instruções: comparação, 2 chamadas recursivas, soma e retorno

Custo 1º passo (k = 1):

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 5$

$\approx 2T(n-1) + 5,$ se considerármos $\boldsymbol{T(n-1) \approx T(n-2)}$

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Caso base:

2 instruções: comparação e retorno

Custo constante: ***O(1)***

Passo recursivo:

5 instruções: comparação, 2 chamadas recursivas, soma e retorno

Custo 1º passo (k = 1):

$T(n) = T(n\text{-}1) + T(n\text{-}2) + 5$

$\approx 2T(n\text{-}1) + 5,$ se considerármos $\boldsymbol{T(n\text{-}1) \approx T(n\text{-}2)}$

Agregando o custo do 2º e 3º passos (k = 2 e K = 3), temos:

$T(n) \approx 2(\mathbf{2T(n\text{-}2) + 5}) + 5 \approx 4T(n\text{-}2) + 15$ $(\mathbf{K = 2})$

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

```
int fib(int n) {
    if (n < 2)          // caso base
      return n;
    else                // passo recursivo
      return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

Caso base:

2 instruções: comparação e retorno

Custo constante: ***O(1)***

Passo recursivo:

5 instruções: comparação, 2 chamadas recursivas, soma e retorno

Custo 1º passo (k = 1):

$T(n) = T(n\text{-}1) + T(n\text{-}2) + 5$

$\approx 2T(n\text{-}1) + 5,$ se considerármos $\boldsymbol{T(n\text{-}1) \approx T(n\text{-}2)}$

Agregando o custo do 2º e 3º passos (k = 2 e K = 3), temos:

$T(n) \approx 2(\mathbf{2T(n\text{-}2) + 5}) + 5 \approx 4T(n\text{-}2) + 15$ $(\mathbf{K = 2})$

$T(n) \approx 4(\mathbf{2T(n\text{-}3) + 5}) + 15 \approx 8T(n\text{-}3) + 35$ $(\mathbf{K = 3})$

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

Passo recursivo:

Analisando a evolução obtemos a **generalização da recorrência**:

$T(n) \approx 2T(n-1) + c$ $\quad$ ($\mathbf{K = 1}$)

$T(n) \approx 4T(n-2) + 3c$ $\quad$ ($\mathbf{K = 2}$)

$T(n) \approx 8T(n-3) + 7c$ $\quad$ ($\mathbf{K = 3}$)

...

$\mathbf{T(n) \approx 2^K T(n-K) + (2^K-1)c}$

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

Passo recursivo:

Analisando a evolução obtemos a **generalização da recorrência**:

$T(n) \approx 2T(n-1) + c$ $\quad(\boldsymbol{K = 1})$

$T(n) \approx 4T(n-2) + 3c$ $\quad(\boldsymbol{K = 2})$

$T(n) \approx 8T(n-3) + 7c$ $\quad(\boldsymbol{K = 3})$

...

$\boldsymbol{T(n) \approx 2^K T(n-K) + (2^K-1)c}$

A complexidade é obtida quando ***T(n)*** é dado em função de ***T(0)*** (**último nível da recursão**):

$n-K = 0 \equiv \boldsymbol{K = n}$

$\boldsymbol{T(n) \approx 2^n T(0) + (2^n-1)c \approx O(2^n)}$

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão recursiva**):

Passo recursivo:

Analisando a evolução obtemos a **generalização da recorrência**:

$T(n) \approx 2T(n\text{-}1) + c$ $\quad$ $(\mathbf{K = 1})$

$T(n) \approx 4T(n\text{-}2) + 3c$ $\quad$ $(\mathbf{K = 2})$

$T(n) \approx 8T(n\text{-}3) + 7c$ $\quad$ $(\mathbf{K = 3})$

...

$\boldsymbol{T(n) \approx 2^K T(n-K) + (2^K-1)c}$

A complexidade é obtida quando ***T(n)*** é dado em função de ***T(0)*** (**nível + profundo da recursão**):

$n\text{-}K = 0 \ \equiv \ \boldsymbol{K = n}$

$\boldsymbol{T(n) \approx 2^n T(0) + (2^n-1)c \approx O(2^n)}$

exponencial:

$\boldsymbol{O(1) + O(2^n) = O(2^n)}$

Série de *Fibonacci*

Algoritmo iterativo:

```
int Fib_iter(int n) {
    int k, i = 1, F = 0;
    for (k = 1; k <= n; k++) {
        F = F + i;
        i = F - i;
    }
    return F;
}
```

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão iterativa**):

```
int Fib_iter(int n) {
    int k, i = 1, F = 0;            constante: O(1)
    for (k = 1; k <= n; k++) {
        F = F + i;
        i = F - i;
    }
    return F;                       constante: O(1)
}
```

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão iterativa**):

```
int Fib_iter(int n) {
    int k, i = 1, F = 0;
    for (k = 1; k <= n; k++) {
        F = F + i;
        i = F - i;
    }
    return F;
}
```

constante: ***O(1)***

linear: ***O(n)***

constante: ***O(1)***

Análise da complexidade

Série de *Fibonacci* (**versão iterativa**):

```
int Fib_iter(int n) {
    int k, i = 1, F = 0;
    for (k = 1; k <= n; k++) {
        F = F + i;
        i = F - i;
    }
    return F;
}
```

constante: ***O(1)***

\+

linear: ***O(n)***

\+

constante: ***O(1)***

Complexidade: *O(n)*

Série de *Fibonacci*

Comparação entre as versões recursiva e iterativa:

n	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
Recursiva	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^9 anos
Iterativa	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

Série de *Fibonacci*

Comparação entre as versões recursiva e iterativa:

n	10	20	30	40	50
Recursiva	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^9 anos
Iterativa	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

Conclusão: devemos evitar o uso de recursividade quando existe uma solução iterativa

- Para alguns tipos de problemas não é trivial obter a versão iterativa

Exercícios

1) Faça uma função recursiva que, dado um intervalo [*a*,*b*] (sendo $a \leq b$), calcule o valor do somatório:

$$\sum_{i=a}^{b} i^2$$

Exercícios

1) Faça uma função recursiva que, dado um intervalo [a,b] (sendo $a \leq b$), calcule o valor do somatório:

$$\sum_{i=a}^{b} i^2$$

$$\begin{cases} f(a,b) = a*a & \text{se } a = b \\ f(a,b) = a*a + f(a+1,b) & \text{se } a < b \end{cases}$$

```
int somaQ(int a, int b) {
    if (a == b)
        return (a*a);
    else
        return (a*a + somaQ(a+1,b));
}
```

Exercícios

2) Escreva uma função recursiva que recebe como parâmetros um número real ***x*** e um inteiro ***N*** e retorne o valor de x^N. (**obs: *x*** e ***N*** podem ser negativos).

Exercícios

2) Escreva uma função recursiva que recebe como parâmetros um número real ***x*** e um inteiro ***N*** e retorne o valor de x^N. (**obs: *x*** e ***N*** podem ser negativos).

$$
\begin{cases}
f(x, 0) = 1 & \text{se } N = 0 \\
f(x,N) = x * f(x,N-1) & \text{se } N > 0 \\
f(x,N) = (1/x) * f(x, N+1) & \text{se } N < 0
\end{cases}
$$

```
float exp(float x, int N) {
     if (N==0)
         return 1;
    if (N >0)
        return (x * exp( x ,N-1));
   else
       return(1/x * exp( x, N+1));
}
```

Exercícios

3) Faça um algoritmo recursivo que realize uma contagem regressiva a partir de um valor *n*.

Ex: a *contagem regressiva de 5 mostra na tela:*

5 ... 4 ... 3 ... 2 ... 1 ... Fogo!

Exercícios

3) Faça um algoritmo recursivo que realize uma contagem regressiva a partir de um valor *n*.

Ex: a *contagem regressiva de 5 mostra na tela:*

5 ... 4 ... 3 ... 2 ... 1 ... Fogo!

f(0) = printf("Fogo!);
f(*n*) = {printf("%d...",*n*); *f(n-1);*}

```
void cont_regressiva(int n) {
      if (n < 0)
         exit();
      if (n == 0)
         printf(" Fogo!");
     else {
        printf("%d…", n);
        cont_regressiva(n-1);
     }
}
```

Exercícios

4) Um problema típico em ciência da computação consiste em converter um número decimal para sua forma binária. A forma mais simples de fazer isso é dividir o número sucessivamente por 2. O resto da *i-ésima* divisão é o dígito *i* do binário (da direita para a esquerda).

Ex: O número **12** corresponde ao binário **1100**.

12 / 2 = 6, resto **0** (1º dígito da direita para esquerda)

6 / 2 = 3, resto **0** (2º dígito da direita para esquerda)

3 / 2 = 1, resto **1** (3º dígito da direita para esquerda)

1 / 2 = 0, resto **1** (4º dígito da direita para esquerda)

Escreva uma função recursiva ***void Dec2Bin(int n)*** que, dado um número decimal, escreva na tela sua representação binária corretamente.

Exercícios

$$\begin{cases} f(n) = \text{printf("\%d", n);} & \text{se } n \le 1 \text{ (caso base)} \\ f(n) = f(n/2)\text{; printf("\%d", n\%2);} & \text{se } n > 1 \text{ (passo recursivo)} \end{cases}$$

```
void Dec2Bin(int n)
{
    if (n <=1)
        printf("%d", n);
    else {
        Dec2Bin(n/2);
        printf("%d", n%2);
    }
}
```

Exercícios para casa

1. Implemente as versões recursiva e iterativa da função para obter a série de *Fibonacci*. Utilize a biblioteca *time.h* para medir e observar o tempo necessário para calcular *n* = 15, 30, 45 e 60.

2. Implemente uma função recursiva para encontrar o maior elemento de um arranjo. Para isto, encontre o maior valor do arranjo sem o último elemento e depois compare-o com o último.

3. Implemente uma função que exiba todas as *substrings* de uma cadeia com *n* caracteres. Para isto, enumere todas as *substrings* que começam com o 1º caractere (serão *n substrings*). Depois, repita o processo para a string após remover o 1º caractere.

   Ex: para a string UFA temos: U, UF, UFA, F, FA, A

Exercícios para casa

4. Dada a definição da função abaixo, avalie *f(1,10)* através de sua árvore de recursão.

```
double f(double x, double y) {
    if (x >= y)
        return (x+y)/2;
    else
        return (f(x+2,y-1) + f(x+1,y-2))/2;
}
```

5. Determine a complexidade assintótica (pior caso) dessa função.

Bibliografia

Slides adaptados do material do Prof. Dr. Bruno Travençolo, do Prof. Autran Macedo, da Profa. Dra. Denise Guliato e do Prof. Dr. Moacir Ponti Jr. (ICMC-USP)

CORMEN, T.H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática, Campus, 2002

ZIVIANI, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C (2ª ed.), Thomson, 2004

MORAES, C.R. Estruturas de Dados e Algoritmos: uma abordagem didática (2ª ed.), Futura, 2003

Bibliografia

FEOFILOFF, P. **Recursão e algoritmos recursivos.** Disponível em: http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aula/recu.html

CALDAS, R. B. **Introdução a Computação**. Disponível em: http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/

de OLIVEIRA, R. **Notas de Aula de Algoritmos e Programação de Computadores**.