Relaciones de Equivalencia - caso de uso: construcción de Sistemas Numericos

Relaciones de Equivalencia: Motivación Intuitiva

Una *relación de equivalencia* en un conjunto es una forma rigurosa de declarar que ciertos elementos deben considerarse "iguales" o "indistinguibles" dentro del contexto que se estudia. No es igualdad literal, sino una *igualdad estructural* o *modulada por contexto.* Son herramientas fundamentales en la manera como los matemáticos organizan, clasifican y construyen cosas, incluidos los sistemas numéricos.

Formalmente, una relación binaria $\sim$ sobre un conjunto A es una *relación de equivalencia* si satisface las siguientes tres propiedades para todo $a, b, c \in A$:

1. **Reflexiva:** $a \sim a$
2. **Simétrica:** Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$
3. **Transitiva:** Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$

Una relación de equivalencia en un conjunto es una forma de decir: *Estos dos elementos son, en cierto sentido, iguales o indistinguibles para mí en este contexto.* Pero ojo: no es igualdad literal, sino una especie de igualdad customizada.

Estas relaciones son esenciales en matemáticas porque permiten agrupar elementos en *clases de equivalencia* y formar nuevos conjuntos más estructurados, llamados *conjuntos cocientes.* Esto es crucial en la construcción de los sistemas numéricos más amplios a partir de los más básicos.

Construcción de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$

Queremos extender el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ para obtener un nuevo conjunto que contenga también los números negativos y permita operaciones como la resta de forma generalizada.

Paso 1: Considerar pares ordenados

Comenzamos considerando el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

La idea es que el par (a, b) representa una especie de "saldo neto" entre dos cantidades: una cantidad poseída (a) y una cantidad adeudada (b). El valor neto conceptual se interpreta como el resultado de una operación que aún no hemos definido formalmente.

Paso 2: Definir una relación de equivalencia

Queremos identificar pares que representen la misma situación neta. Por ejemplo, los pares $(3, 1)$ y $(4, 2)$ representan el mismo "saldo neto" intuitivo.

Definimos entonces una relación $\sim$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como sigue:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a + d = b + c$$

Esta relación verifica las tres propiedades de equivalencia:

- **Reflexividad:** $a + b = b + a \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$
- **Simetría:** Si $a + d = b + c$, entonces $c + b = d + a \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- **Transitividad:** Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, entonces $a+d = b+c$ y $c+f = d+e$. Se puede demostrar que esto implica $a + f = b + e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Paso 3: Clases de equivalencia como enteros

El conjunto de todas las clases de equivalencia bajo $\sim$ se denota:

$$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

Cada clase de equivalencia representa un número entero. Por ejemplo:

$$[(3, 1)] = [(4, 2)] = [(5, 3)] \quad \text{(todas representan el mismo número)}$$

$$[(2, 5)] \quad \text{representa un número "negativo"}$$

$$[(n, n)] \quad \text{representa el número cero}$$

Paso 4: Definición de la suma

Definimos la suma de clases de equivalencia como sigue:

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

Se puede demostrar que esta operación está bien definida, es decir, no depende de los representantes elegidos.

Paso 5: Elemento neutro y opuesto aditivo

El elemento neutro (cero) es la clase:

$$[(n,n)] \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}$$

El opuesto aditivo de $[(a,b)]$ es:

$$-[(a,b)] := [(b,a)]$$

porque:

$$[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, b+a)] = [(n,n)] = 0$$

Paso 6: Interpretación formal del signo "−"

Ahora que hemos construido $\mathbb{Z}$, podemos definir el símbolo "−" como una notación para la clase de equivalencia correspondiente a $[(b,a)]$, es decir:

$$-(a-b) := [(b,a)]$$

Antes de este punto, el símbolo "−" no tiene significado algebraico formal, y sólo se utiliza como una herramienta intuitiva.

Construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$

Construir el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ a partir del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, sin asumir el concepto de fracción, división o cociente de manera informal. La construcción se basa nuevamente en una relación de equivalencia entre pares ordenados.

Paso 1: Considerar pares ordenados de enteros

Partimos del conjunto:

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

donde a será interpretado como el numerador y b como el denominador. Sin embargo, aún no hemos definido qué significa un "cociente".

Paso 2: Definir una relación de equivalencia

Queremos identificar pares que representen el mismo número racional. Por ejemplo, $(1,2)$ y $(2,4)$ deberían representar lo mismo.

Definimos la relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ por:

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad ad = bc$$

Verificación de que $\sim$ es una relación de equivalencia

- **Reflexividad:** $ab = ba \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$
- **Simetría:** Si $ad = bc$, entonces $cb = da \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- **Transitividad:** Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, entonces $ad = bc$ y $cf = de$. Se puede demostrar que esto implica $af = be \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Paso 3: Clases de equivalencia como racionales

El conjunto cociente:

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \sim$$

es el conjunto de números racionales.

Cada clase de equivalencia se denota por $[(a, b)]$, y representa lo que más adelante llamaremos $\frac{a}{b}$, aunque por ahora solo es una clase de pares que satisfacen la condición $ad = bc$.

Paso 4: Definición de la suma y el producto

Dadas dos clases $[(a, b)]$ y $[(c, d)]$, definimos:

- **Suma:**
$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$
- **Producto:**
$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

Ambas operaciones están bien definidas, es decir, el resultado no depende del representante elegido en cada clase. Esto se puede demostrar con álgebra básica y uso de la relación $\sim$.

Paso 5: Elementos especiales

- **Elemento neutro de la suma:** $0 := [(0, 1)]$
- **Elemento neutro del producto:** $1 := [(1, 1)]$
- **Opuesto aditivo:** Dado $[(a, b)]$, su opuesto es $[(-a, b)]$
- **Inverso multiplicativo:** Dado $[(a, b)]$ con $a \neq 0$, su inverso es $[(b, a)]$

Paso 6: Interpretación formal de las fracciones

Una vez que $\mathbb{Q}$ ha sido construido como conjunto de clases de equivalencia, podemos introducir la notación:

$$\frac{a}{b} := [(a,b)]$$

donde $b \neq 0$. Esta notación tiene ahora un significado riguroso como clase de equivalencia bajo la relación $\sim$.

A partir del conjunto de los enteros, y sin usar la noción informal de fracción, hemos construido los números racionales como clases de equivalencia de pares ordenados. Esta estructura posee operaciones bien definidas de suma y multiplicación, y cumple con las propiedades de un cuerpo conmutativo, excepto que aún no se ha demostrado esa estructura aquí.

Esta construcción muestra nuevamente el poder del concepto de *relación de equivalencia* para construir nuevos objetos matemáticos a partir de estructuras previas.

Construcción de los Números Reales $\mathbb{R}$ a partir de los Números Racionales $\mathbb{Q}$

Motivación

A partir del conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, hemos visto que existen "huecos" en la recta numérica, es decir, hay sucesiones racionales que intuitivamente deberían tener un límite, pero dicho límite no es un número racional. Por ejemplo, la sucesión que aproxima $\sqrt{2}$.

Para "llenar" esos huecos y obtener un sistema completo, definiremos los números reales $\mathbb{R}$ como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

Definiciones previas

Definición 0.1 (Sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$)**.** *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{Q}$ *es una* sucesión de Cauchy *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Intuitivamente, los términos de la sucesión se acercan cada vez más entre sí.

Denotamos el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ por

$$C := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n) \text{ es sucesión de Cauchy en } \mathbb{Q}\}.$$

Relación de equivalencia en C

Definimos la relación $\sim$ en C por:

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$, $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

Es fácil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia:

- **Reflexividad:** $|x_n - x_n| = 0$.
- **Simetría:** $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$.
- **Transitividad:** Si $(x_n) \sim (y_n)$ y $(y_n) \sim (z_n)$, entonces $(x_n) \sim (z_n)$ por desigualdad triangular.

Definición del conjunto de números reales

El conjunto de números reales se define como el conjunto cociente:

$$\mathbb{R} := C/\sim = \{[(x_n)] : (x_n) \in C\}.$$

Cada número real es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Operaciones en $\mathbb{R}$

Definimos suma y producto entre clases por:

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)], \quad [(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n y_n)],$$

donde las sumas y productos son término a término en $\mathbb{Q}$.

Estas operaciones están bien definidas (no dependen de la elección de representantes) y hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo.

Orden en $\mathbb{R}$

Definimos la relación de orden parcial:

$$[(x_n)] \leq [(y_n)] \iff \liminf_{n\to\infty}(y_n - x_n) \geq 0,$$

es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$, $y_n - x_n > -\varepsilon$.

Esta relación es total y compatible con las operaciones.

Propiedades estructurales

- **Completitud:** Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$ tiene un supremo sup en $\mathbb{R}$.
- **Métrica:** La función
$$d([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$$
es una métrica bien definida en $\mathbb{R}$.
- **Topología:** La métrica induce una topología τ en $\mathbb{R}$.
- **Norma:** Se define la norma $\|x\| := d(x, 0)$.

- **Producto interno:** Para $x, y \in \mathbb{R}$, definimos

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y,$$

que satisface las propiedades de producto interno en dimensión uno.

Conclusión final

Así hemos construido, desde los naturales y paso a paso, el conjunto

$$\mathbb{R} = \big(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, \sup, d, \tau, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle\big),$$

una estructura rica que sustenta el análisis matemático clásico y moderno, partiendo sólo de la noción rigurosa de relación de equivalencia y sucesiones.

Construcción alternativa de los Números Reales $\mathbb{R}$ mediante los Cortes de Dedekind

Motivación

Otra forma clásica y fundamental para construir los números reales es a través de los *cortes de Dedekind*, propuesta por Richard Dedekind en 1872. Esta construcción parte del conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y define los números reales como particiones especiales de $\mathbb{Q}$, que "llenan" los huecos de manera ordenada.

Esta perspectiva complementa la construcción mediante sucesiones de Cauchy, aportando una visión más ordenada y estática, en contraste con la construcción dinámica por sucesiones.

Definición de corte de Dedekind

Definición 0.2 (Corte de Dedekind)**.** *Un* corte de Dedekind *en $\mathbb{Q}$ es un par (A, B) de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Q}$ tales que:*

1. *$A \cup B = \mathbb{Q}$, y $A \cap B = \emptyset$ (partición de $\mathbb{Q}$),*
2. *Para todo $a \in A$ y $b \in B$, se cumple $a < b$,*
3. *A no tiene máximo (no existe $a_0 \in A$ tal que $a \leq a_0$ para todo $a \in A$),*
4. *A es cerrado hacia abajo: si $x \in A$ y $y < x$, entonces $y \in A$.*

Interpretación

Intuitivamente, el corte (A, B) representa un punto real "entre" todos los números de A y todos los números de B. Si A tiene máximo, este corresponde a un número racional; si no, representa un número irracional.

Así, los cortes *rellenan* los huecos de $\mathbb{Q}$.

Definición del conjunto $\mathbb{R}$

Definimos el conjunto de números reales como el conjunto de todos los cortes de Dedekind en $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{R} := \{(A, B) \mid (A, B) \text{ es corte de Dedekind en } \mathbb{Q}\}.$$

Operaciones y orden

Podemos definir suma, producto y orden en $\mathbb{R}$ mediante operaciones sobre los cortes. Por ejemplo, el orden es:

$$(A, B) \leq (C, D) \iff A \subseteq C.$$

Esta relación es total y compatible con las operaciones definidas.

Equivalencia con la construcción por sucesiones de Cauchy

Ambas construcciones, por sucesiones de Cauchy y por cortes de Dedekind, son isomorfas y producen el mismo conjunto completo $\mathbb{R}$ con las mismas propiedades algebraicas y topológicas.

Mientras que la construcción por sucesiones de Cauchy enfatiza la *aproximación* dinámica de números reales mediante racionales, la construcción por cortes de Dedekind enfatiza el *orden* y la partición estática de $\mathbb{Q}$.

Ambas rutas son clásicas, rigurosas y fundamentales para entender a fondo el conjunto de los números reales y sus propiedades.

Con esto concluimos la presentación de los principales caminos para construir rigurosamente $\mathbb{R}$ *desde* $\mathbb{N}$*, usando la noción clave de relación de equivalencia y orden.*

Conclusión

Mediante el uso de relaciones de equivalencia y clases de equivalencia, hemos construido el conjunto de los números reales a partir de los naturales. Esta técnica es un ejemplo clásico del poder estructurador de las relaciones de equivalencia en matemáticas.

Apéndice A. Demostración por inducción en la construcción de los enteros

Recordemos que definimos los enteros $\mathbb{Z}$ como clases de equivalencia de pares (a, b), donde $a, b \in \mathbb{N}$, con la relación de equivalencia

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Queremos demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el par (n, n) pertenece a la clase de equivalencia que representa el número entero cero, es decir,

$$(n, n) \sim (0, 0).$$

Esto significa demostrar que:

$$n + 0 = n + 0,$$

lo cual parece trivial, pero lo haremos formalmente usando inducción matemática para ilustrar el método.

Demostración por inducción

Definimos la propiedad $P(n)$ como:

$$P(n) : (n, n) \sim (0, 0).$$

Paso base: $n = 0$. Demostramos que $P(0)$ es verdadera:

$$(0, 0) \sim (0, 0) \quad \text{porque} \quad 0 + 0 = 0 + 0.$$

Paso inductivo: Supongamos que $P(n)$ es verdadera para un n arbitrario, es decir,

$$(n, n) \sim (0, 0) \implies n + 0 = n + 0.$$

Queremos demostrar que $P(n + 1)$ también es verdadera, o sea,

$$(n + 1, n + 1) \sim (0, 0),$$

lo que equivale a

$$(n + 1) + 0 = (n + 1) + 0,$$

que es claramente cierto.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, la propiedad $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Apéndice B. Definición recursiva de la suma en $\mathbb{N}$

En la construcción formal de los números naturales $\mathbb{N}$ siguiendo los axiomas de Peano, los números se generan a partir de:

1. El número $0 \in \mathbb{N}$.
2. La función *sucesor* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $S(n)$ representa el *número que sigue a* n.

Por lo tanto, los naturales pueden representarse formalmente como:

$$0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots$$

que luego identificamos informalmente como:

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde

$$1 = S(0), \quad 2 = S(S(0)), \quad 3 = S(S(S(0))), \; \ldots$$

Definición recursiva de la suma

Para definir la operación de suma $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se procede de forma recursiva:

1. **Caso base:**
$$a + 0 := a$$
Sumar cero no cambia el número.

2. **Paso recursivo:**
$$a + S(b) := S(a + b)$$
Es decir, sumar el sucesor de b equivale a sumar uno más al resultado de $a + b$.

En notación usual (identificando $S(b) = b + 1$), la definición recursiva se ve como:

$$a + 0 = a, \qquad a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

Por qué esta definición es importante

- Permite **definir la suma en $\mathbb{N}$ sin asumir propiedades previas**, solo usando 0 y el sucesor.
- Facilita **demostraciones por inducción**, ya que cada paso depende directamente del anterior.
- Es la base para **demostrar propiedades fundamentales** de la suma, como:
$$a + 0 = a, \quad 0 + a = a, \quad a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Una vez definida la suma así, podemos construir el producto $\cdot$ de manera análoga:

1. **Caso base:**
$$a \cdot 0 := 0$$

2. **Paso recursivo:**
$$a \cdot S(b) := a \cdot b + a$$

Estas definiciones recursivas son la base de muchas demostraciones por inducción que aseguran que nuestras operaciones cumplen las propiedades habituales y permiten construir sistemas numéricos más complejos como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.