Estructuras III – Aplicaciones Multilineales (Tensores)

Investigación: José Portillo

En [1] se estudiaron las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Una aplicación lineal

$$T : E \to F$$

es una función que satisface, para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in K$,

$$T(x +_E y) = T(x) +_F T(y), \qquad T(\alpha \circ x) = \alpha \circ T(x).$$

La linealidad lleva dentro de si la idea de que la aplicación respeta la estructura algebraica del espacio vectorial. Sin embargo, muchas construcciones en matemáticas dependen de funciones que toman *varios* argumentos vectoriales simultáneamente, manteniéndose lineales en cada argumento cuando los demás se mantienen fijos.

Esta observación conduce de manera natural a la noción de multilinealidad.

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K.

Definición 1 (Aplicación multilineal)**.** Una aplicación

$$T : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$$

se llama *multilineal* si es lineal en cada argumento por separado. En otras palabras, para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$, y para todos los vectores

$$x_i, y_i \in E_i, \quad \alpha \in K,$$

se cumple que

$$T(x_1, \ldots, x_i +_{E_i} y_i, \ldots, x_n) = T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) +_F T(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

y

$$T(x_1, \ldots, \alpha \circ x_i, \ldots, x_n) = \alpha \circ T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

manteniendo fijos todos los demás argumentos.

Cuando $n = 1$, una aplicación multilineal es simplemente una aplicación lineal. Por lo tanto, las aplicaciones multilineales no constituyen un nuevo tipo de objeto, sino una generalización directa de las transformaciones lineales.

Las aplicaciones multilineales aparecen de manera natural en muchos contextos: productos bilineales, emparejamientos entre vectores y funcionales lineales, e interacciones de orden superior que no pueden reducirse a una sola entrada. Su estudio sistemático conduce al concepto de tensor.

—

De manera informal, un tensor es un objeto que implica un comportamiento multilineal de forma intrínseca y libre de coordenadas.

Existen dos puntos de vista equivalentes que se utilizarán a lo largo de este documento. El primero trata a los tensores directamente como aplicaciones multilineales.

Sea E un espacio vectorial sobre K, y sea E^* su espacio dual, es decir, el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en K.

Definición 2 (Tensor como aplicación multilineal)**.** Un *tensor de tipo* (k, ℓ) sobre E es una aplicación multilineal

$$T : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\ell \text{ veces}} \longrightarrow K.$$

Dicho tensor toma como entradas k funcionales lineales y ℓ vectores, y produce un escalar. Se requiere linealidad en cada argumento por separado.

Esta definición formaliza varios casos familiares:

- Un escalar en K puede verse como un tensor de tipo $(0, 0)$.
- Un vector en E corresponde a un tensor de tipo $(0, 1)$.
- Un funcional lineal en E^* es un tensor de tipo $(1, 0)$.
- Una forma bilineal sobre E es un tensor de tipo $(0, 2)$.
- Una aplicación lineal $T : E \to E$ puede identificarse con un tensor de tipo $(1, 1)$.

Así, los vectores y las matrices no desaparecen en la teoría de tensores; reaparecen como los casos de orden menor dentro de un marco único unificado.

En este nivel de abstracción, no intervienen coordenadas, arreglos ni interpretaciones geométricas. Un tensor se define completamente por la manera en que actúa sobre vectores y funcionales lineales, y por la multilinealidad de dicha acción.

La definición de tensores como aplicaciones multilineales es conceptualmente clara, pero presenta una limitación práctica: las aplicaciones multilineales no forman un espacio vectorial de manera natural que sea compatible con la composición y la manipulación algebraica. Para superar esto, la multilinealidad se reduce a linealidad mediante una construcción universal.

Esta construcción es el *producto tensorial*.

Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Considérese el conjunto de todas las aplicaciones multilineales

$$T : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$$

con valores en un espacio vectorial arbitrario F. El producto tensorial se define de tal manera que toda aplicación multilineal de este tipo corresponda de forma única a una aplicación lineal definida sobre un único espacio vectorial.

Definición 3 (Producto tensorial)**.** El *producto tensorial* de los espacios vectoriales $E_1, \ldots, E_n$ es un espacio vectorial, denotado por

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n,$$

junto con una aplicación multilineal

$$\otimes : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \otimes \cdots \otimes E_n,$$

que satisface la siguiente propiedad universal:
Para todo espacio vectorial F y toda aplicación multilineal

$$T : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F,$$

existe una única aplicación lineal

$$\widetilde{T} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \longrightarrow F$$

tal que

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todo $x_i \in E_i$.

Esta propiedad caracteriza completamente al producto tensorial. Los elementos $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ se llaman *tensores simples*. Todo elemento del espacio producto tensorial es una combinación lineal finita de tensores simples.

Por lo tanto, el producto tensorial no se define mediante una fórmula, sino por lo que *hace*: convierte problemas multilineales en problemas lineales de manera canónica.

Consecuencia de esto, el estudio de aplicaciones multilineales es equivalente al estudio de aplicaciones lineales definidas sobre productos tensoriales. En particular,

$$\text{Aplicaciones multilineales } E_1 \times \cdots \times E_n \to F \quad \longleftrightarrow \quad \text{Aplicaciones lineales } E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F.$$

Esta equivalencia constituye el fundamento conceptual de la teoría de tensores. Explica por qué los tensores pueden manipularse algebraicamente, componerse con aplicaciones lineales y representarse de forma concreta una vez que se eligen bases.

Volviendo al caso de un solo espacio vectorial E, un tensor de tipo (k, ℓ) puede verse de manera equivalente como una aplicación lineal

$$T : \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k} \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{\ell} \longrightarrow K.$$

Así, los tensores no son objetos misteriosos de dimensión elevada. Son aplicaciones lineales definidas sobre productos tensoriales, y su aparente complejidad surge únicamente cuando se introducen coordenadas.

Nota: Una vez que se eligen bases, los productos tensoriales se convierten en espacios vectoriales de dimensión finita, y los tensores admiten representaciones en coordenadas como arreglos multidimensionales. Estas representaciones dependen de las bases elegidas y no definen al tensor en sí.

Nota. Este memorando es la Parte III de un trabajo en curso, compuesto por tres partes, sobre estructuras lineales y geométricas abstractas. Se utilizó un modelo de lenguaje de IA como herramienta de apoyo para la discusión, aclaración de conceptos y refinamiento estilístico. Todas las decisiones matemáticas y la redacción final son responsabilidad del autor.

References

[1] Portillo, José, *Estructuras I – Transformaciones Lineales, Matrices y Composición*, 2025.