1 Pojęcia wstępne

1.1 Pojęcie normy

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ bądź zespolonych $\mathbb{C}$.

Definicja 1 *Odwzorowanie* $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$ *nazywamy normą w przestrzeni* V*, jeżeli dla wszystkich elementów* $x, y \in V$ *i skalarów* $\lambda \in K$ *spełnia następujące warunki:*

N1. $\|x\| \geqslant 0$,

N2. $\|x\| = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 0$,

N3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

N4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Definicja 2 *Niech* $(V, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią wektorową unormowaną oraz niech* $\{x_n\}$ *będzie nieskończonym ciągiem elementów z* V*. Element* $\overline{x} \in V$ *nazywamy granicą ciągu* $\{x_n\}$ *i piszemy* $x_n \to \overline{x}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\|x_n - \overline{x}\| \to 0$.

Definicja 3 *Nieskończony ciąg* $\{x_n\}$ *nazywamy ciągniem Cauchy'ego, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_0\colon \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definicja 4 *Przestrzeń wektorowa unormowana* $(V, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę.*

Przykład 1 *Przykładem przestrzeni, która nie jest zupełna są np. liczby wymierne lub* $\mathbb{Q}^n$*. Na przykład ciąg*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ *jest ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych, natomiast jego granicą jest liczba niewymierna* e. ▸

Definicja 5 *W* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *przez bazę kanoniczną będziemy rozumieli bazę zadaną przez wektory* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*, gdzie* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *ma 1 na* i*-tej pozycji.*

Twierdzenie 1 *Przestrzenie* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *oraz* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ *z dowolna normą* $\|\cdot\|$ *są zupełne.*

Twierdzenie 2 *Na przestrzeni skończenie wymiarowej* V *nad* $\mathbb{R}$ *(lub* $\mathbb{C}$*) wszystkie normy są równoważne, tzn. jeżeli* $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_2$ *są normami w* V*, to wtedy*

$$\exists c_1, c_2 > 0\ \forall x \in V\colon c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_2.$$

Zauważmy, że norma $\|\cdot\|_1$ w powyższym twierdzeniu nie jest w żaden sposób uprzywilejowana, gdyż

$$\frac{1}{c_2}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{1}{x_1}\|x\|_1,$$

czyli $\exists \overline{c_1}, \overline{c_2} > 0\ \forall x \in V\colon \overline{c_1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \overline{c_2}\|x\|_1$.

Załóżmy, że $\{e_i\}_{i=1}^n$ jest bazą w przestrzeni V i $x_k = \sum_{i=1}^n x_i^k e_i$ oraz $\overline{x} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} e_i$. Wówczas

$$x_k \to \overline{x} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall i = 1, \ldots, n \colon x_i^k \to \overline{x_i}. \tag{1}$$

> Skoro z twierdzenia 2 wiadomo, że w $\mathbb{R}^n$ wszystkie normy są równoważne, to wybierzmy normę maksimum, czyli $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| = \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|$. Zauważmy, że jeżeli $\|x - y\| = 0$, to $x_i = y_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, gdyż
>
> $$0 \leqslant \|x_i - y_i\| \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i - y_i\| = 0.$$
>
> Zatem jeżeli $x_k \to \overline{x}$, to z definicji $\|x_k - \overline{x}\| \to 0$, a to oznacza, że $\forall i = 1, \ldots, n \colon x_i^k \to \overline{x_i}$.

Remark 1 *W $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \approx \mathbb{R}^{n\times m}$ zbieżność $x_n \to \overline{x}$ nie zależy od wyboru normy (gdyż zbieżność według normy, zgodnie z (1), zawsze oznacza zbieżność po współrzędnych).*

1.2 Przekształcenia liniowe i macierze

Z każdym przekształceniem liniowym $L\colon V_1 \to V_2$ możemy skojarzyć macierz $L_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, zwaną macierzą przekształcenia w bazach (uporządkowanych) $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}, \mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$, dla której

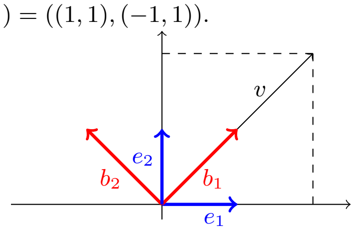
$$\forall\ V_1 \ni v = \sum_{i=1}^n v_i b_i \colon L(v) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \left(L_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)_{ij} v_j \right) c_i \in V_2,$$

Zatem macierzą będziemy nazywać po prostu odwzorowanie liniowe w pewnych bazach. Najczęściej nie będziemy zaznaczać baz w indeksach dolnych, gdyż ich wybór znany jest zwykle z kontekstu. Wówczas L oznaczać będzie zarówno odwzorowanie liniowe, jak i jego macierz.

Przykład 2 *Niech* $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. *Przekształcenie* $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_2)$ *jest przekształceniem liniowym nad* $\mathbb{R}$, *bo* $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}\colon L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ *oraz* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{C}\colon L(\lambda v) = \lambda L(v)$. *Jego macierz w pewnych ustalonych (dla* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^2$*) bazach to*

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Załóżmy, że A_L *jest macierzą przekształcenia* L *w bazach kanonicznych i oznaczmy to* $A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_2}$.
Teraz przyjmijmy, że w $\mathbb{R}^2$ *chcemy przyjąć bazę* $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, *gdzie wektory* b_1, b_2 *zapisane w bazie kanonicznej to* $(b_1, b_2) = ((1, 1), (-1, 1))$.



Rysunek 1: Wektor v w bazie kanonicznej (e_1, e_2) to $(2, 2)$, a w bazie (b_1, b_2) to $(2, 0)$.

Jak będzie wyglądać macierz dla L *w nowych bazach, czyli macierz* $A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{B}}$*?*
Zauważmy, że mnożąc wektor zapisany w bazie $\mathcal{B}$ *przez macierz* $P_{BK} = [b_1|b_2]$ *otrzymujemy wektor zapisany w bazie kanonicznej, np.*

$$\left[\begin{array}{c|c} b_1 & b_2 \\ & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zatem P_{BK} *to macierz przejścia z bazy* $\mathcal{B}$ *do bazy kanonicznej. Łatwo policzyć, że:*

$$P_{BK}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(faktycznie $P_{BK} \cdot P_{BK}^{-1} = P_{BK}^{-1} \cdot P_{BK} = Id$*). Zatem macierz* $A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{B}} = P_{KB} \cdot A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_2}$ *to*

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Faktycznie jest:

$$\begin{aligned} A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_2} \cdot (1, -2, 1)^T &= (2, 2)^T \\ A_L^{\mathcal{K}_3,\mathcal{B}} \cdot (1, -2, 1)^T &= (2, 0)^T \end{aligned}$$

▸

Remark 2 *Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie ich macierzy, czyli*

$$A_L \cdot A_G = A_{(L \circ G)}$$

Definicja 6 *Niech* $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi i niech* $A\colon V_1 \to V_2$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Normą operatorową* A *nazywamy taką stałą* L, *że*

$$\|A\| = L \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \begin{array}{l} \|Ax\|_2 \leqslant L \cdot \|x\|_1, \forall x \in V_1 \\ \text{oraz jeżeli } \forall x \in V_1 \|Ax\|_2 \leqslant L' \cdot \|x\|_1, \text{ to } L \leqslant L'. \end{array}$$

Czyli $\|A\|$ jest najmniejszą możliwą stałą Lipschitza dla odwzorowania A.

Twierdzenie 3

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2 \tag{2}$$

Dowód Pokażemy najpierw, że $\|A\| \leqslant L$, gdzie $L = \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2$. Zauważmy, że dla dowolnego wektora $x \in V_1$ zachodzi:

$$
\begin{array}{rcl|l}
\|Ax\|_2 & = & \left\| A \left(\|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right) \right\|_2 & \\
& = & \left\| \|x\|_1 \cdot A \left(\frac{x}{\|x\|_1} \right) \right\|_2 & \text{z liniowości } A \\
& = & \|x\|_1 \cdot \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|_1} \right) \right\|_2 & \\
& \leqslant & \|x\|_1 \cdot \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2 & x/\|x\| - \text{wektor z kuli jednostkowej}
\end{array}
$$

zatem faktycznie $\|A\| \leqslant \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2$.

Aby pokazać nierówność w drugą stronę, weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $v \in V_1$ takie, że oraz

$$
\|v\|_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad \|Av\|_2 \geqslant \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2 - \varepsilon \tag{3}
$$

Z definicji normy operatorowej $\|A\|$ wiemy, że zachodzi $\|Av\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|v\|_1$, zatem z (3) otrzymujemy

$$
\|A\| = \|A\| \cdot \underbrace{\|v\|_1}_{=1} \geqslant \|Av\|_2 \geqslant \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2 - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.
$$

Stąd $\|A\| \geqslant \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2$. ∎

Twierdzenie 4 *Podstawowe własności normy operatorowej:*
Niech $(V_i, \|\cdot\|_i)$ będą przestrzeniami unormowanymi nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

S0. Jeżeli $\dim V_1 < +\infty$, to $\|A\| = \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2$ jest skończone .

S1. $\|\cdot\|$ jest normą na przestrzeni odwzorowań liniowych z V_1 do V_2, którą dalej będziemy oznaczać przez $\mathrm{Lin}(V_1, V_2)$.

S2. $\|I\| = 1$, gdzie $I : V \to V$ jest odwzorowaniem identycznościowym.

S3. Niech $B : V_1 \to V_2$ $V_2 \to V_3$ będą liniowe liniowe, wtedy

$$
\|A \circ B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|
$$

.

Dowód

ad. S0. Wynika to z faktu, że w przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne, więc kula jednostkowa jest zwarta a każde odwzorowanie liniowe jest ciągłe — twierdzenie 2.

ad. S1. Sprawdzimy wprost z definicji 1, czy odwzorowanie $\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ spełnia własności normy:

N1. $\|\cdot\| \geqslant 0$ — Oczywiste.

N2. $\|A\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 0$

($\Leftarrow$) Oczywiste.

($\Rightarrow$) Zakładamy, że $\|A\| = 0$. Zatem dla dowolnego $x \in V_1$ zachodzi

$$0 \leqslant \|Ax\|_2 \leqslant \underbrace{\|A\|}_{=0} \cdot \|x\|_1 = 0,$$

czyli $\|Ax\|_2 = 0$. Ponieważ $\|\cdot\|_2$ jest normą, to $Ax = 0$. A skoro zachodzi to dla dowolnego x, to $A = 0$.

N3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

Skoro dla dowolnego $x \in V_1$ zachodzi:

$$\begin{array}{rcl|l} \|(A+B)x\|_2 & = & \|Ax + Bx\|_2 & (A+B) \text{ jest odwzorowaniem liniowym} \\ & \leqslant & \|Ax\|_2 + \|Bx\|_2 & \text{z własności normy } \|\cdot\|_2 \\ & \leqslant & \|A\| \cdot \|x\|_1 + \|B\| \cdot \|x\|_1 & \text{z definicji normy operatorowej } \|A\| \\ & = & \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{L} \cdot \|x\|_1 & L \text{ stała Lipschitza dla odwzorowania } (A+B), \end{array}$$

to $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

N4. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

Sprawdźmy:

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \sup_{\substack{x \in V_1, \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

ad. S2. Oczywiste jest $\|I\| = 1$.

ad. S3. Skoro dla dowolnego $x \in V_1$ zachodzi:

$$\|(A \cdot B)x\|_2 = \|A(Bx)\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|_1,$$

to $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

∎

Poniżej zaprezentujemy dwa przykłady użyteczności normy operatorowej.

Przykład 3 Nasze zadanie to policzyć $(I - A)^{-1}$ dla macierzy A, dla której $\|A\| < 1$. Analogiczne zadanie dla liczb przy założeniuu $|x| < 1$ ma znane rozwiązanie:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Czy można zastosować taki sam wzór dla macierzy:

$$(I - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \tag{4}$$

czyli czy

1) $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ — zbieżny?

2) $(I - A)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = I$?

ad. 1) W przestrzeniach zupełnych ($\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest zupełna) ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego, czyli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N \colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Sprawdzamy więc, czy $S_N = \sum_{n=0}^{N} A^n$ spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\begin{aligned}
\|S_{N+k} - S_N\| &= \|S_N = \sum_{n=N+1}^{N+k} A^n\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+k} \|A^n\| \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{N+k} \|A\|^n, \qquad \text{(z własności S2.)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A\|^{N+k} = \|A\|^N \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} \|A\|^k) \\
&= \frac{\|A\|^N}{1 - \|A\|}
\end{aligned}$$

Ponieważ $\|A\| < 1$, to dla dowolnego ε istnieje N takie, że $\|A\|^N/(1 - \|A\|) < \varepsilon$, zatem ciąg S_N spełnia warunek Cauchy'ego.
ad. 2)

$$(I - A)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = \lim_{k\to\infty} (I - A)\left(\sum_{n=0}^{k} A^n\right) = \lim_{k\to\infty} \left(I - A^{k+1}\right) =$$
$$I - \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = I.$$

2 Problem własny

Definicja 7 *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy A, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{C}^n$ taki, że*

$$Av = \lambda v. \tag{5}$$

Wektor v nazywam wówczas wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja jest sformułowana dla macierzy zespolonych, ale można ją tak samo wypowiedzieć dla macierzy rzeczywistych, czyli dla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Należy jednak zwrócić uwagę, że macierze rzeczywiste również mogą mieć zespolone wartości i wektory własne.

Definicja 8 *Problem własny to problem znalezienia wektora i wartości własnych macierzy A.*

Zauważmy, że dla $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ w (5) mamy n równań i $n + 1$ zmiennych (n współrzędnych wektora v i λ). Widać, że należy narzucić dodatkowy warunek, aby była szansa na izolowane (lokalnie jednoznaczne) rozwiązania. Wykorzystujemy fakt, że jeżeli v jest wektorem własnym odpowiadającym λ, to dla dowolnego $c \neq 0$ wektor cv również jest wektorem własnym dla λ. Możemy zatem ustalić jedną współrzędną v — jeżeli nie jest ona zerowa, to wciąż mamy n równań, ale tylko n zmiennych (przykład 4). Możemy też dopisać dodatkowe równanie, np. $\|v\| = 1$ — wówczas wciąż mamy $n + 1$, ale $n + 1$ równań (przykład 5).

Przykład 4 Policzmy wartości własne macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

czyli szukamy takiego λ i takiego $v = (x_1, x_2)$, że $Av = \lambda v$. Zaryzykujmy i załóżmy, że $x_1 = 1$ (o ile x_1 jest różne od zera, to może być dowolną wartością); wówczas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

To daje następujący układ równań:

$$\begin{cases} x_2 & = & \lambda \\ -1 - x_2 & = & \lambda x_2. \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy dwie zespolone pary własne:

$$\lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad v_1 = \left(1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad v_2 = \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

▶

Przykład 5 Tak jak w przykładzie 4, policzmy wartości własne macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dodajmy dodatkowe równanie $\|v\| = 1$; można to robić, gdyż jeśli v jest wektorem własnym, to dla dowolnego $c \neq 0$ wektor cv również jest wektorem własnym. Otrzymujemy zatem następujący układ równań:

$$\begin{cases} x_2 & = & \lambda x_1 \\ -x_1 - x_2 & = & \lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 & = & 1. \end{cases}$$

Rozwiązując go i skalując tak, aby $x_1 = 1$, otrzymujemy takie jak poprzednio pary własne.
▶

Definicja 9 *Wielomian stopnia n*

$$W_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A.

Twierdzenie 5 *λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definicja 10 *Spektrum A to zbiór wartości własnych macierzy A. Oznaczamy go jako* $\mathrm{Sp}\,(A)$.

Twierdzenie 6 *Macierz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ma dokładnie n wartości własnych (licząc z krotnościami).*

2.1 Wpływ zaburzeń na wartości własne

Ogólnie wpływ zaburzeń na wartości własne może być bardzo duży. Zbadajmy różne przypadki.

(1) Niech A_ε będzie postaci

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Niech λ_ε oznacza wartość własną dla macierzy A_ε. Jeżeli $\varepsilon = 0$, to wszystkie wartości własne są $\lambda_0 = a$ i jest jeden wektor własny $(0, \dots, 0, 1)$.

Aby wyznaczyć wartości własne dla $\varepsilon > 0$ skorzystajmy z twierdzenia 5. Policzmy wyznacznik $\det(A_\varepsilon - \lambda_\varepsilon I)$ rozwijając względem pierwszego wiersza:

$$\begin{aligned} \det(A_\varepsilon - \lambda_\varepsilon I) &= (a-\lambda_\varepsilon) \underbrace{\begin{vmatrix} a-\lambda_\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a-\lambda_\varepsilon & 0 & \dots \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & a-\lambda_\varepsilon \end{vmatrix}}_{n-1} \\ &\quad + (-1)^{n+1}\varepsilon \begin{vmatrix} 1 & a-\lambda_\varepsilon & 0 & 0 \\ & 1 & a-\lambda_\varepsilon & 0 \\ & \dots & 1 & a-\lambda_\varepsilon \\ 0 & & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda_\varepsilon)^n + (-1)^{n+1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Pytamy zatem, dla jakich wartości λ_ε zachodzi $(a-\lambda_\varepsilon)^n + (-1)^{n+1}\varepsilon = 0$? Wówczas

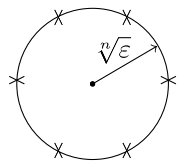
$$\begin{aligned} (a-\lambda_\varepsilon)^n &= (-1)^n \varepsilon \\ a - \lambda_\varepsilon &= \sqrt[n]{(-1)^n}\,\sqrt[n]{\varepsilon} \\ \lambda_\varepsilon &= a + \sqrt[n]{(-1)^n}\,\sqrt[n]{\varepsilon} \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| = \sqrt[n]{\varepsilon} \gg \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon} = 1, \qquad \frac{|\lambda_\varepsilon - \lambda_0|}{|\varepsilon|} \to \infty$$

czyli wpływ nawet malutkich zaburzeń ε może być duży.

Przypadek, gdy mamy wielokrotną wartość własną z jednowymiarową przestrzenią własną jest najgorszym z możliwych przypadków. Szczęśliwie jest to niezwykle rzadki przypadek.



Rysunek 2: Składnik $\sqrt[n]{(-1)^n}\sqrt[n]{\varepsilon}$ odpowiada za rozłożenie na okręgu n pierwiastków zespolonych z 1 lub -1 (czyli $\sqrt[n]{(-1)^n}$)

(2) Niech $A_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ będzie postaci

$$A_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} = \begin{bmatrix} a+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & b+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Wówczas są dwie pary własne postaci:

$$(\lambda_{\varepsilon_1}, \mathbf{v}_1) = (a+\varepsilon_1, (1,0)) \quad \text{oraz} \quad (\lambda_{\varepsilon_2}, \mathbf{v}_2) = (b+\varepsilon_2, (0,1)).$$

Zatem $|\lambda_{\varepsilon_i} - \lambda_0| = \varepsilon_i$; czyli jeśli zaburzenie jest malutkie, to zmiana wartości własnych też jest malutka i zależy liniowo od wielkości zaburzenia.

(3) Niech A_ε będzie postaci

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{bmatrix}$$

Sytuacja różni się od tej w punkcie (1) tym, że dla $\varepsilon = 0$ jest co prawda podwójna wartość własna, ale dwuwymiarowa przestrzeń własna, czyli

$$(\lambda_0^1, \mathbf{v}_1) = (a, (1,0)) \quad \text{oraz} \quad (\lambda_0^2, \mathbf{v}_2) = (a, (0,1)).$$

Dla $\varepsilon > 0$ są dwie pary własne postaci:

$$(\lambda_\varepsilon, \mathbf{v}_1) = (a+\varepsilon, (1,1)) \quad \text{oraz} \quad (\lambda_\varepsilon, \mathbf{v}_2) = (a-\varepsilon_2, (1,-1)).$$

Zatem w tym przypadku różnica $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| = \varepsilon$, a nie tak jak w (1) $\sqrt[2]{\varepsilon}$.

(4) Rozważmy teraz przypadek gdy na przekątnej są dwie różne wartości, tzn.

$$A_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & b \end{bmatrix},$$

gdzie $a \neq b$. Dla uproszczenia, załóżmy, że $a > b$. Aby wyznaczyć wartości własne ponownie skorzystamy z twierdzenia 5, czyli musimy rozwiązać równanie dla wielomianu charakterystycznego:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} - \lambda I) &= (a-\lambda)(b-\lambda) - \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - \varepsilon_1\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Rozwiązujemy zwykłe równanie kwadratowe licząc

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b)^2 - 4ab + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= (a-b)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wieloianu musimy wyliczyć $\sqrt{\Delta}$. Policzymy przybliżoną wartość korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora $\sqrt{1+x}$ dla małych x:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x^2(\ldots) = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) \approx 1 + \frac{x}{2}, \tag{6}$$

czyli:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{(a-b)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2} \\
&= (a-b)\sqrt{1 + \tfrac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(a-b)^2}} \\
&\approx (a-b)\left(1 + \tfrac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{(a-b)^2}\right) \quad \text{(ze wzoru (6))} \\
&= (a-b) + \tfrac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że możemy skorzystać ze wzoru (6), o ile $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll a - b$, czyli zaburzenia są małe w stosunku do elementów „niezaburzonej” macierzy $A_{(0,0)}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx \frac{(a+b) - (a-b) - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}}{2} = b - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b} \\
\lambda_2 &\approx \frac{(a+b) + (a-b) + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}}{2} = a + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}
\end{aligned}$$

Widać, że dla $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (czyli macierz bez zaburzeń) są dwie wartości własne λ_0:

$$\lambda_0^1 = b \quad \text{oraz} \quad \lambda_0^2 = a.$$

Przyjmijmy $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Wówczas błąd powstały w wyniku zaburzenia wynosi

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \approx \frac{\varepsilon^2}{a-b},$$

czyli jest rzędu ε^2. Jest to najlepsza z dotychczas rozważanych sytuacji: jeśli zaburzenie jest malutkie, to zmiana wartości własnych też jest malutka, ale zależy kwadratowo od wielkości zaburzenia.

Porównajmy wielkość błędu w wniku zaburzenia $\varepsilon = (10)^{-4}$ w przypadkach (2), (3) i (4):

(2) $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| = \varepsilon = (10)^{-4}$

(3) $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| = \sqrt{\varepsilon} = (10)^{-2}$

(4) $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \approx \varepsilon^2 = (10)^{-8}$.

3 Twierdzenia Gerszgorina

Definicja 11 *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie macierzą zespoloną. Zdefiniujmy*

$$R_i = \sum_{\substack{j=1,\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|. \tag{7}$$

Wówczas i-te koło Gerszgorina to

$$G_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \leqslant R_i\}.$$

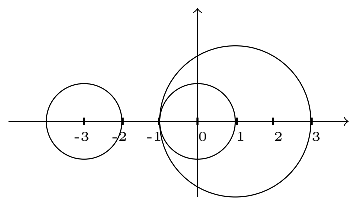
Przykład 6 Niech macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dla tej macierzy koła Gerszgorina

$$\begin{aligned} G_1 &= \overline{K(a_{11}, R_1)} = \overline{K(1,2)} \\ G_2 &= \overline{K(a_{22}, R_2)} = \overline{K(0,1)} \\ G_3 &= \overline{K(a_{33}, R_3)} = \overline{K(-3,1)}. \end{aligned}$$

są przedstawione na rysunku 3.



Rysunek 3: Koła Gerszgorina.

Poniższe twierdzenie mówi o tym, że każda wartość własna macierzy A leży w pewnym kole Gerszgorina, czyli $\operatorname{Sp}(A) \subset \bigcup G_i$.

Twierdzenie 7 *Jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to istnieje indeks i taki, że $\lambda \in G_i$, czyli*

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1,\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

Dowód Skoro λ jest wartością własną macierzy A, to z definicji, odpowiada jej pewien niezerowy wektor własny v. Ponieważ $v \neq 0$, to istnieje takie i_0, że dla każdego $j = 1, \ldots, n$ zachodzi $|v_{i_0}| \geqslant |v_j|$ (czyli v_{i_0} jest największą na moduł współrzędną wektora v).

Skoro dla pary (λ, v) zachodzi $Av = \lambda v$ (z definicji wektora i wartości własnej), to $Av_{i_0} = \lambda v_{i_0}$, czyli

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} v_j = \lambda v_{i_0}. \tag{8}$$

Rozpisując równość $Av = \lambda v$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \ldots \\ \lambda v_n \end{bmatrix}$$

otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i,$$

dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$, w szczególności dla $i = i_0$.

Przekształcając równość (8) otrzymujemy:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} v_j - \lambda v_{i_0} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} v_j + a_{i_0 i_0} v_{i_0} - \lambda v_{i_0}$$

czyli

$$(a_{i_0i_0} - \lambda)v_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0j}v_j. \tag{9}$$

Następnie obkładamy (9) modułem i stosujemy nierówność trókąta:

$$|a_{i_0i_0} - \lambda| \cdot |v_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0j}|\,|v_j|\,.$$

Wektor v jest niezerowy, więc największa na moduł współrzędna jest większa od zera, zatem możemy obustronnie podzielić przez $|v_{i_0}|$; dodatkowo v_{i_0} jest największą współrzędną, zatem $\frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1$. Otrzymujemy więc:

$$|a_{i_0i_0} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0j}|\,,$$

Pokazaliśmy, że $\lambda \in G_{i_0}$. ∎

Z twierdzenia 7 wiadomo, że wszystkie wartości własne leżą w kołach Gerszgorina, ale nie wiadomo, jak są rozłożone. Kolejne twierdzenie pozwala ustalić (z pewnym przybliżeniem) ich położenie.

Twierdzenie 8 *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i G_i będzie i-tym kołem Gerszgorina. Niech $I \subset \{1,\dots n\}$ będzie pewnym zbiorem indeksów. Wówczas jeżeli*

$$\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\notin I} G_i\right) = \emptyset, \tag{10}$$

to $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right)$ zawiera dokładnie $\#I$ wartości własnych macierzy A, licząc z krotnościami, gdzie $\#I$ oznacza liczność zbioru I.

Dowód wymaga zaawansowanych metod matematycznych (teoria lokalnego stopnia) , więc go tutaj pomijamy, ale zobaczmy na przykładach, o czym mówi to twierdzenie.

Przykład 7 Niech $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Wówczas A ma dokładnie 4 wartości własne, licząc z krotnościami — twierdzenie 6. Załóżmy, że sytuacja wygląda tak, jak na rysunku 4, czyli $I_1 = \{1\}$, a $I_2 = \{2, 3, 4\}$. Zarówno I_1, jak i I_2 spełniają założenia twierdzenia 8:

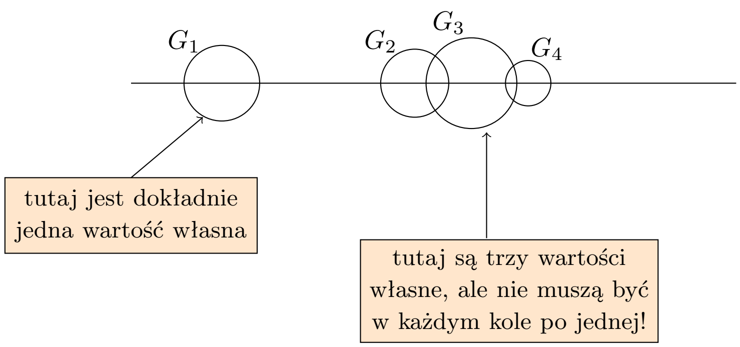
$$\underbrace{\bigcup_{i\in I_1} G_i}_{G_1} \cap \underbrace{\bigcup_{i\notin I_1} G_i}_{G_2\cup G_3\cup G_4} = \underbrace{\bigcup_{i\in I_2} G_i}_{G_2\cup G_3\cup G_4} \cap \underbrace{\bigcup_{i\notin I_2} G_i}_{G_1} = \emptyset,$$

więc w kole G_1 jest dokładnie 1 wartość własna (bo $\#I_1 = 1$), natomiast w sumie kół $G_2 \cup G_3 \cup G_4$ są dokładnie 3 wartości własne (bo $\#I_2 = 3$).

Zatem z twierdzenia 8 wiemy, że jeżeli koła G_i są rozłączne, to w każdym jest jedna wartość własna. Ale jeżeli mają część wspólną, to nic nie wiemy o rozłożeniu wartości własnych w obrębie tych kół. ▸

Przykład 8 Rozważmy macierz z przykładu 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

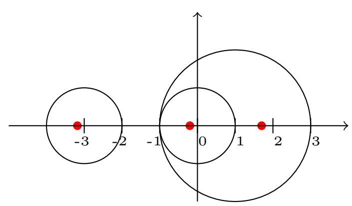


Rysunek 4: Koła Gerszgorina i wartości własne

Dla tej macierzy koła Gerszgorina i wartości własne

$$
\begin{array}{rcl|c}
G_1 = \overline{K(a_{11}, R_1)} = \overline{K(1, 2)} & & & \lambda_1 = 1.7734 \\
G_2 = \overline{K(a_{22}, R_2)} = \overline{K(0, 1)} & & & \lambda_2 = -0.51997 \\
G_3 = \overline{K(a_{33}, R_3)} = \overline{K(-3, 1)} & & & \lambda_3 = -3.2534
\end{array}
$$

są przedstawione na rysunku 5.



Rysunek 5: Koła Gerszgorina i położenie wartości własnych (czerwone punkty).

Zgodnie z powyższymi twierdzeniami w kole G_3 (które jest rozłączne z pozostałymi) jest jedna wartość własna, a w sumie kół $G_1 \cup G_2$ są dwie wartości własne. ▸

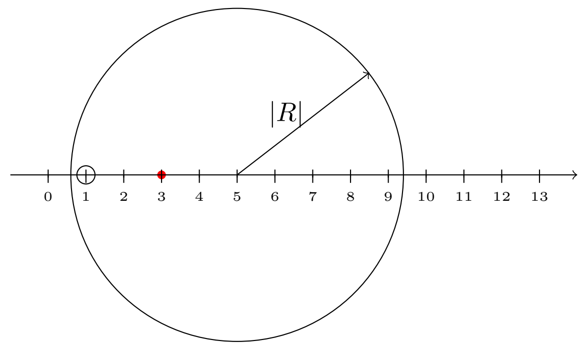
Przykład 9 Rozważmy macierz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ następującej postaci

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ R & 5 \end{bmatrix}
$$

gdzie $0 < \varepsilon \ll |R|$. Koła Gerszgorina (patrz rysunek 6) to $G_1 = \overline{K(1, \varepsilon)}$ (malutkie) oraz $G_2 = \overline{K(5, |R|)}$ (wielkie). Wartości własne macierzy A to

$$
\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{4 + \varepsilon R}}{2}. \tag{11}
$$

Widać, że jeżeli $4 + \varepsilon R \approx 0$, to obie wartości własne są w przybliżeniu równe 3, czyli w kole G_1 nie ma żadnej wartości własnej.



Rysunek 6: Koła Gerszgorina i położenie wartości własnych (czerwony punkt).

▶

Twierdzenia 7 i 8 nie charakteryzują wektorów własnych. Kolejne twierdzenie mówi o tym, że jeżeli wiemy, że pewne koło Gerszgorina jest izolowane, czyli z poprzedniego twierdzenia, istnieje w nim dokładnie jedna wartość własna, to w odpowiadającym jej wektorze własnym wiemy która współrzędna jest na moduł największa.

Twierdzenie 9 (o wektorach własnych z twierdzenia Gerszgorina) *Niech* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i niech* G_i *oznacza* i*-te koło Gerszgorina. Załóżmy, że* $G_1 = \overline{K(a_{11}, R_1)}$ *jest rozłączne z pozostałymi kołami. Wtedy istnieje dokładnie jedna wartość własna* $\lambda \in G_1$ *i* $v = (1, v_2, \ldots, v_n)$, $|v_i| < 1$ *oraz* $Av = \lambda v$.

Dowód Z rozłączności G_1 od pozostałych kół z twierdzenia 8 wynika, że istnieje dokładnie jedna wartość własna w G_1. Nazwijmy ją λ.

Chcemy zatem pokazać, że odpowiadający jej wektor własny v ma największą (na moduł) pierwszą współrzędną. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest i że dominuje współrzędna i-ta, czyli

$$\exists i \neq 1 \; \forall j: \; |v_i| \geqslant |v_j|.$$

Ale wówczas z dowodu pierwszego twierdzenia Gerszgorina (twierdzenie 7) wynika, że $\lambda \in G_i$.

> W dowodzie twierdzenia 7, jeśli λ jest wartością własną i należy do pewnej kuli G_{i_0}, to odpowiadający jej wektor własny ma największą (na moduł) współrzędną i_0.

Ale $\lambda \in G_1$ oarz $G_i \cap G_1 = \emptyset$, dla każdego $i \neq 1$ (G_1 jest rozłączne od pozostałych kul) — sprzeczność.
∎

4 Owale Brauera

Definicja 12 *Niech*

$$B_{ij} \quad = \quad \{z | \; |a_{ii} - z| \cdot |a_{jj} - z| \leqslant R_i R_j\}. \tag{12}$$

Zbiory B_{ij} *nazywamy owalami Brauera.*

Twierdzenie 10 *Weźmy macierz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \bigcup_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n \\ i\neq j}} \{z| \; |a_{ii} - z| \cdot |a_{jj} - z| \leqslant R_i R_j\}.$$

Z twierdzenia 6 wiemy, że $\#\mathrm{Sp}\,(A) \leqslant n$, natomiast zbiorów po prawej stronie inkluzji jest $n^2 - n$. Zatem nie może być tak, aby wszystkie były rozłączne i w każdym była jedna wartość własna.

Dowód Niech (λ, v) — para własna macierzy A, czyli $Av = \lambda v$ i niech $v = (v_1, \dots, v_n)$. Wybieramy dwie współrzędne, które dominują, czyli

$$|v_{i_1}| \geqslant |v_{i_2}| \geqslant |v_j|, \quad i_1 \neq i_2,\ j = 1, \dots, n \text{ oraz } j \neq i_1, j \neq i_2. \tag{13}$$

Skoro v wektor własny, to $|v_{i_1}| \neq 0$ (bo wektor własny jest niezerowy). Rozważmy przypadki:

1. Jeżeli $|v_{i_2}| = 0$, to $v = (0, \dots, 0, v_{i_1}, 0, \dots, 0)$ (jest to wektor bazowy).

   Rozpisując równość $Av = \lambda v$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ v_{i_1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda v_{i_1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   otrzymujemy $a_{i_1 i_1} v_{i_1} = \lambda v_{i_1}$, czyli $a_{i_1 i_1} = \lambda$.
   Zauważmy, że każde $R_i \geqslant 0$ jako suma modułów. Natomiast $|a_{i_1 i_1} - \lambda| = 0$, więc $|a_{i_1 i_1} - \lambda| \cdot |a_{jj} - \lambda| = 0 \leqslant R_{i_1} R_{R_j}$

   Stąd $a_{i_1 i_1} = \lambda \in \{z \mid |a_{i_1 i_1} - z| \cdot |a_{jj} - z| \leqslant R_{i_1} R_j\} = B_{i_1 j}$, dla dowolnego $j = 1, \dots, n$.

2. W przypadku $|v_{i_2}| \neq 0$ przeprowadzając rozumowanie "typu Gerszgorina" otrzymujemy

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \cdot \frac{|v_j|}{|v_i|}, \quad \text{o ile} |v_i| \neq 0. \tag{14}$$

$$\begin{array}{rcl|l}
Av & = & \lambda v & (\lambda, v) \text{ – para własna macierzy } A \\
(A - \lambda I)v & = & 0 & \text{odejmując obustronnie } \lambda v \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - \lambda v_i & = & 0 & \text{biorąc } i\text{-ty wiersz układu} \\
\sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} a_{ij} v_j + a_{ii} v_i - \lambda v_i & = & 0 & \\
(a_{ii} - \lambda) v_i & = & -\sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} a_{ij} v_j & \\
|a_{ii} - \lambda| \cdot |v_i| & = & |\sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} a_{ij} v_j| & \text{obkładając modułem} \\
|a_{ii} - \lambda| \cdot |v_i| & \leqslant & \sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \cdot |v_j| & \text{stosując nierówność trójkąta} \\
|a_{ii} - \lambda| & \leqslant & \sum_{\substack{j=1,\\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \cdot \frac{|v_j|}{|v_i|} & \text{dzieląc obustronnie przez } |v_i|
\end{array}$$

   Zauważmy, że z założenia (13) wiemy, że

$$\frac{|v_{i_2}|}{|v_{i_1}|} \geqslant \frac{|v_j|}{|v_{i_1}|}, \quad \text{dla dowolnego } j = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Zatem jeśli w (14) przyjmiemy $i = i_1$, to otrzymamy

$$\begin{array}{rcl|l} |a_{i_1 i_1} - \lambda| & \leqslant & \sum_{\substack{j=1,\\ i_1 \neq j}}^{n} |a_{i_1 j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_1}|} & \text{z (14)} \\ & \leqslant & \sum_{\substack{j=1,\\ i_1 \neq j}}^{n} |a_{i_1 j}| \frac{|v_{i_2}|}{|v_{i_1}|} & \text{z (15)} \\ & = & \frac{|v_{i_2}|}{|v_{i_1}|} \sum_{\substack{j=1,\\ i_1 \neq j}}^{n} |a_{i_1 j}| & \frac{|v_{i_2}|}{|v_{i_1}|} \text{ nie zależy od } j \\ & = & \frac{|v_{i_2}|}{|v_{i_1}|} R_{i_1} & \text{z definicji 7} \end{array}$$

Analogicznie dla $i = i_2$:

$$|a_{i_2 i_2} - \lambda| \leqslant \frac{|v_{i_1}|}{|v_{i_2}|} R_{i_2}.$$

Łącząc obie powyższe nierówności otrzymujemy

$$|a_{i_1 i_1} - \lambda| \cdot |a_{i_2 i_2} - \lambda| \leqslant R_{i_1} R_{i_2},$$

a to zgodnie z oznaczeniem (12) daje $\lambda \in B_{i_1 i_2}$.

Pokazaliśmy zatem, że dowolna wartość własna macierzy A należy do pewnego owalu B_{ij}, czyli

$$\mathrm{Sp}\,(A) \subset \bigcup_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,n\\ i \neq j}} B_{ij}.$$

∎

5 Kwadratowe oszacowania odległości wartości własnych

5.1 Oszacowanie z owali Brauera

Rozważmy macierz bliską diagonalnej, czyli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \varepsilon_{ij} \\ & \dots & \\ \varepsilon_{ij} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gdzie ε_{ij}, dla $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, są niewielkimi zaburzeniami poza przekątną. Niech $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że

(1) $R_i \leqslant \varepsilon$ dla każdego i, (czyli suma modułów współczynników w i-tym wierszu, oprócz współczynnika a_{ii} jest mała);

(2) $\min_{i \neq j} |a_{ii} - a_{jj}| = \Delta > 2\varepsilon$.

Twierdzenie 11 *Przy powyższych założeniach wartości własne λ_i mają krotność* 1 *oraz zachodzi*

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leqslant \frac{2\epsilon^2}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dowód

Z założeń (1) i (2) widać, że wszystkie koła Gerszgorina są rozłączne, czyli

$$G_i \cap G_j = \emptyset, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j.$$

Zatem z twierdzenia Gerszgorina (patrz twierdzenie 8 i rysunek 4) wynika, że dla dowolnego i istnieje dokładnie jedna wartość własna λ_i taka, że $\lambda_i \in G_i$, czyli jest

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Czy nie można uzyskać lepszego oszacowania? Chcielibyśmy mieć $|\lambda_i - a_{ii}| \leqslant C\varepsilon^2$ (oszacowanie kwadratowe względem ε).

Z tego, że koła są rozłączne i z twierdzenia 9 wiemy, że w wektorze v_i (wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_i) dominuje i-ta współrzędna, czyli z twierdzenia 10 istnieje $j \neq i$ takie, że

$$\lambda_i \in B_{ij} = \{z \mid |a_{ii} - z| \cdot |a_{jj} - z| \leqslant R_i R_j\}.$$

Skoro $\lambda_i \in B_{ij}$, to z założenia (1) wiadomo, że

$$|a_{ii} - \lambda_i| \cdot |a_{jj} - \lambda_i| \leqslant R_i R_j \leqslant \varepsilon^2. \tag{17}$$

Teraz

$$\begin{array}{rcl|l} |a_{jj} - \lambda_i| & = & |a_{jj} - a_{ii} + a_{ii} - \lambda_i| & \\ & \geqslant & |a_{jj} - a_{ii}| - |a_{ii} - \lambda_i| & \text{z nierówności trójkąta} \\ & \geqslant & \Delta - \varepsilon & \text{z założenia (2): } |a_{ii} - a_{jj}| \geqslant \Delta \text{ oraz} \\ & & & \text{z (16)} \\ & \geqslant & \Delta - \Delta/2 & \text{z założenia (2): } \varepsilon < \Delta/2 \\ & = & \Delta/2 & \end{array}$$

Stosując do (17) otrzymane oszacowanie $|a_{jj} - \lambda_i| \geqslant \Delta/2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |a_{ii} - \lambda_i| \cdot |a_{jj} - \lambda_i| &\leqslant \varepsilon^2 \\ |a_{ii} - \lambda_i| &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{|a_{jj} - \lambda_i|} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\Delta/2} = \frac{2}{\Delta}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$|a_{ii} - \lambda_i| \leqslant C\varepsilon^2,$$

gdzie $C = 2/\Delta$.

To kończy dowód twierdzenia 11. ∎

5.2 Oszacowanie z twierdzenia Gerszgorina

Niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Załóżmy, że

(A) koło $G_1 = \{z \mid |a_{11} - z| \leqslant R_1\}$ jest rozłączne z pozostałymi, czyli

$$G_1 \cap G_j = \emptyset, \quad \forall j > 1, \tag{18}$$

(B) wszystkie elementy w A poza przekątną są małe, czyli

$$R_i = \sum_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \leqslant \varepsilon, \quad \forall i \tag{19}$$

(C) oraz

$$|a_{11} - a_{jj}| \geqslant \Delta, \quad \forall j > 1. \tag{20}$$

Twierdzenie 12 *Przy powyższych założeniach, istnieje wartość własna* λ_1 *i wektor własny* $v = e_1 + \sum_{i>1} x_i e_i$ *takie, że*

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1 - a_{11}| &\leqslant \frac{2\epsilon^2}{\Delta}, \\
|x_i| &\leqslant \frac{2\epsilon}{\Delta}
\end{aligned}
$$

Dowód Z twierdzenia Gerszgorina wynika, że istnieje dokładnie jedna wartość własna λ_1 taka, że $|\lambda_1 - a_{11}| \leqslant \varepsilon$. Zmieniamy bazę (skalujemy pierwszy wektor bazowy, a pozostałych nie zmieniamy):

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_1 &= re_1 \\
\tilde{e}_j &= e_j, \quad \text{dla } j > 1,
\end{aligned}
$$

gdzie $r > 1$. W nowej bazie A ma postać

$$
\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|ccc}
a_{11} & a_{12}/r & \dots & a_{1n}/r \\
\hline
a_{21}r & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & & & \\
a_{n1}r & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right]
$$

Od tej pory $\tilde{R}_i$, $\tilde{x}_i$ itp będą odnosiły się do wielkości zdefiniowanych bazie $\{\tilde{e}_i\}$, a bez tild do oryginalnej bazy $\{e_i\}$.

Załóżmy, że macierz A jest macierzą pewnego przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ w bazie kanonicznej $\mathcal{K} = (e_1, \dots, e_n)$. W jaki sposób wyznaczyć macierz tego przekształcenia w nowej bazie $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$?
Niech v będzie wektorem, którego współrzędne wyrażone są w bazie $\mathcal{B}$ i niech P_{KB} będzie macierzą przekształcenia z bazy kanonicznej do bazy $\mathcal{B}$. Wówczas

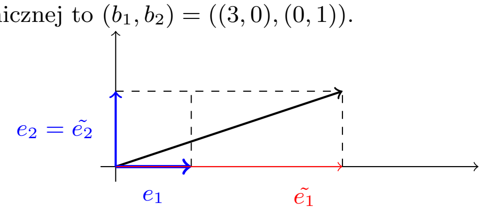
$$
\underbrace{P_{BK}^{-1}\, \overbrace{A\, \underbrace{(P_{BK} \overbrace{v}^{\text{w bazie } \mathcal{B}})}_{\text{w bazie } \mathcal{K}}}^{\text{w bazie } \mathcal{K}}}_{\text{w bazie} \mathcal{B}}
$$

Czyli macierz $P_{BK}^{-1} A P_{BK} = \tilde{A}$ jest macierzą przekształcenia φ w bazie $\mathcal{B}$.

Przykład 10 Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Chcemy wyznaczyć elementy macierzy w nowej bazie $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, gdzie wektory b_1, b_2 zapisane w bazie kanonicznej to $(b_1, b_2) = ((3,0),(0,1))$.



Rysunek 7: Wektor v w bazie kanonicznej (e_1, e_2) to $(3,1)$, a w bazie $(\tilde{e_1}, e_2)$ to $(1,1)$.

Zauważmy, że mnożąc wektor zapisany w bazie $\mathcal{B}$ przez macierz $[b_1|b_2]$ otrzymujemy wektor zapisany w bazie kanonicznej, np.

$$\left[\begin{array}{c|c} b_1 & b_2 \\ & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zatem jest to macierz P_{BK}. Następnie łatwo policzyć, że macierz P_{BK}^{-1} wygląda następująco

$$P_{BK}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(faktycznie $P_{BK} \cdot P_{BK}^{-1} = P_{BK}^{-1} \cdot P_{BK} = Id$). Zatem macierz $\tilde{A} = P_{BK}^{-1} A P_{BK}$ to

$$\begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12}/r \\ \hline a_{21} r & a_{22} \end{array}\right]$$

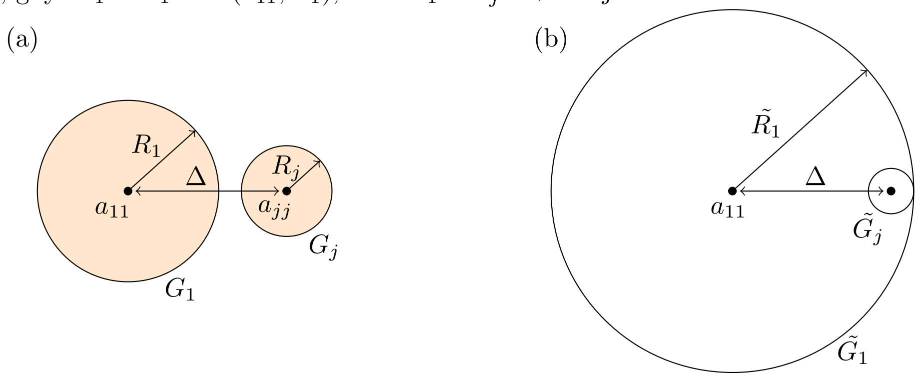
▶

Skoro $r > 1$, to

$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{r} R_1 \leqslant \frac{1}{r}\varepsilon \tag{21}$$

$$\tilde{R}_j \leqslant r R_j \leqslant r\varepsilon, \quad \text{dla } j > 1. \tag{22}$$

Zauważmy, że r nie może być zbyt duże (rysunek 8), bo musimy zachować rozłączność kół, gdyż $\lambda_1 \in \tilde{G_1} = K(a_{11}, \tilde{R_1})$, o ile $\tilde{G_1} \cap \tilde{G_j} = \emptyset$ dla $j > 1$.



Rysunek 8: Koła Gerszgorina przy zmianie bazy dla $r = 2$: (a) przed zmianą koła G_1 i G_j były rozłączne, (b) po zmianie (koła $\tilde{G_1}$ i $\tilde{G_j}$) przestają takie być.

Aby koła $\tilde{G_1}$ i $\tilde{G_j}$ były rozłączne, to musi zachodzić $\Delta > \tilde{R_1} + \tilde{R_j}$ dla dowolnego $j \neq 1$. Możemy zatem wziąć dowolne $r > 1$ spełniające

$$\Delta > r \cdot \varepsilon + \frac{\varepsilon}{r} > \tilde{R_1} + \tilde{R_j}.$$

To daje równanie

$$r^2 \cdot \varepsilon - \Delta \cdot r + \varepsilon < 0.$$

Zatem

$$r \in \left(\frac{\frac{\Delta}{\varepsilon} - \sqrt{(\frac{\Delta}{\varepsilon})^2 - 4}}{2}, \frac{\frac{\Delta}{\varepsilon} + \sqrt{(\frac{\Delta}{\varepsilon})^2 - 4}}{2} \right),$$

o ile $(\Delta/\varepsilon)^2 - 4 \geqslant 0$, czyli $\Delta \geqslant 2\varepsilon$. Widać, że największe możliwe r to to z prawego końca, ale (dla prostoty obliczeń) wystarczy wziąć r ze środka przedziału, czyli

$$r = \Delta/(2\varepsilon).$$

To daje

$$\tilde{R_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon}{\frac{\Delta}{2\varepsilon}} = \frac{2}{\Delta}\varepsilon^2.$$

Otrzymujemy także lepsze oszacowanie na wektor własny odpowiadający λ_1 który będziemy tutaj oznaczać przez v. Z tw. 9 wynika, że $v = \tilde{e_1} + \sum_{i>1} \tilde{x}_i \tilde{e}_i$, gdzie $|\tilde{x}_i| \leqslant 1$. Z postaci naszej nowej bazy wynika, że

$$v = re_1 + \sum_{i>1} \tilde{x}_i e_i$$

Możemy v znormalizawać tak

$$v = e_1 + \sum_{i>1} \frac{\tilde{x}_i}{r} e_i = \sum_i x_i e_i, \quad |x_i|/x_1 \leqslant \frac{2\epsilon}{\Delta}$$

To konczy dowód twierdzenia 12. ∎

6 Gładka zależność od macierzy dla pojedyńczych wartości własnych

wstawic twierdzenie z dowodem