

Proste całkowanie z szacowaniem wariancji

Metody Monte Carlo w Fizyce

Julia Potempa (411073)



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

2. kwietnia 2025r.

Cel ćwiczenia

Zastosowanie metody całkowania Monte Carlo do oszacowania powierzchni wspólnej dwóch kół oraz sprawdzenie, czy metoda jest zbieżna i jak zmienia się odchylenie standardowe losowanych wartości.

1 Wstęp

Rozkład jednorodny w kole

Do wygenerowania punktów w zadanym kole wykorzystywany jest rozkład normalny sferycznie konturowany, który następnie zostaje przetransformowany, tak, aby znalazł się w zadanym kole. Koło definiujemy następująco:

$$K_\alpha = \{(x, y) : (x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2 \leq R_\alpha^2\}$$

Następnie ponawiamy kroki przeanalizowane już na laboratorium dotyczącym generatorów dwuwymiarowych, czyli:

$$\begin{aligned}U_1 &\sim U(0, 1), \quad U_2 \sim U(0, 1) \\X &= \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2) \\Y &= \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2) \\X' &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad Y' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\end{aligned}$$

Przy zadanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $h(r) = 2r$:

$$r = \sqrt{U_1}$$

$$X'' = r \cdot X' \cdot R_\alpha + x_\alpha$$

$$Y'' = r \cdot Y' \cdot R_\alpha + y_\alpha$$

gdzie dla ostatecznych wartości wylosowanych zarówno dla X jak i dla Y wprowadzamy dodatkowo promień koła, ponieważ niekoniecznie musi ono być jednostkowe oraz przesunięcie środka koła.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa w kole

Dla rozkładu jednorodnego w kole funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_\alpha(x, y) = \text{const} = C$ żądamy spełnienia warunku normalizacji:

$$\int_{(x,y) \in K_\alpha} f_\alpha(x, y) dx dy = 1$$

$$C \int_{(x,y) \in K_\alpha} 1 dxdy = C \pi R_\alpha^2 = 1$$

$$C = \frac{1}{\pi R_\alpha^2}$$

Powierzchnia koła i części wspólnej oraz wariancja wyniku

Powierzchnię koła można wyznaczyć za pomocą całki z 1 obliczanej po powierzchni koła K_α :

$$S_\alpha = \int_{(x,y) \in K_\alpha} 1 dxdy = \int_{(x,y) \in K_\alpha} \frac{1}{f_\alpha(x,y)} f_\alpha(x,y) dxdy = \pi R_\alpha^2 \int_{(x,y) \in K_\alpha} f_\alpha(x,y) dxdy$$

Ze względu na normalizację funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz wymóg znalezienia się punktów w obszarze obu kół możemy wprowadzić funkcję wskaźnikową θ o wartości binarnej, która w łatwy sposób zaimplementuje nam metodę eliminacji.

$$S_{\alpha,\beta} = \pi R_\alpha^2 \int_{(x,y) \in K_\alpha} \theta_{\alpha,\beta}(x,y) dxdy$$

$$\theta_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x,y) \in K_\alpha \wedge (x,y) \in K_\beta \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Ostatecznie pole powierzchni części wspólnej zostaje obliczone jako średnia z N wartości funkcji podcałkowej, czyli pierwszy moment rozkładu:

$$\mu^{(1)} = \bar{S}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i, y_i) \quad (1)$$

Mając pierwszy moment możemy policzyć w łatwy sposób drugi moment:

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i, y_i) \right)^2 = \pi R_\alpha^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i, y_i) \right) = \pi R_\alpha^2 \mu^{(1)}$$

Teraz można obliczyć wariancję wartości średniej:

$$\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}}^2 = \frac{\mu^{(2)} - (\mu^{(1)})^2}{N}$$

oraz odpowiednio odchylenie standardowe wartości średniej:

$$\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)} - (\mu^{(1)})^2}{N}} \quad (2)$$

2 Metodyka

Opisana metoda została zaimplementowana w języku C++ wykorzystując do generowania liczb pseudolosowych generator `rand()` z biblioteki `<cstdlib>`. Dla całego ćwiczenia przyjęto parametry:

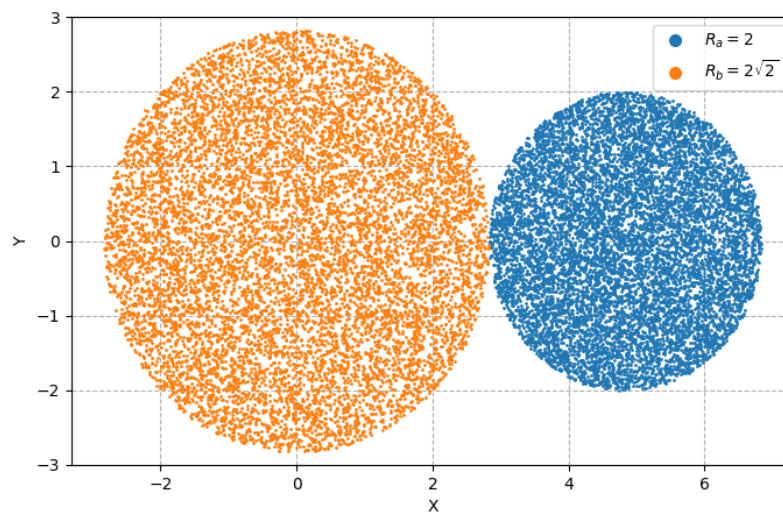
- $R_A = 2, R_B = \sqrt{2} \cdot R_A,$
- $\vec{r}_A = [x_A, 0], \vec{r}_B = [0, 0].$

Na początku został przeprowadzony test generatora dla $N = 10^4$ punktów w kole K_A dla $x_A = R_A + R_B$ oraz w kole K_B . Następnie właściwy skrypt, który generował $N = 10^6$ punktów wewnątrz koła K_α z zapisem w punktach $n \in [10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6]$ dla parametrów:

- $\alpha = A, x_a = R_B + 0,5 \cdot R_A,$
- $\alpha = B, x_a = R_B + 0,5 \cdot R_A,$
- $\alpha = A, x_a = 0,$
- $\alpha = B, x_a = 0,$

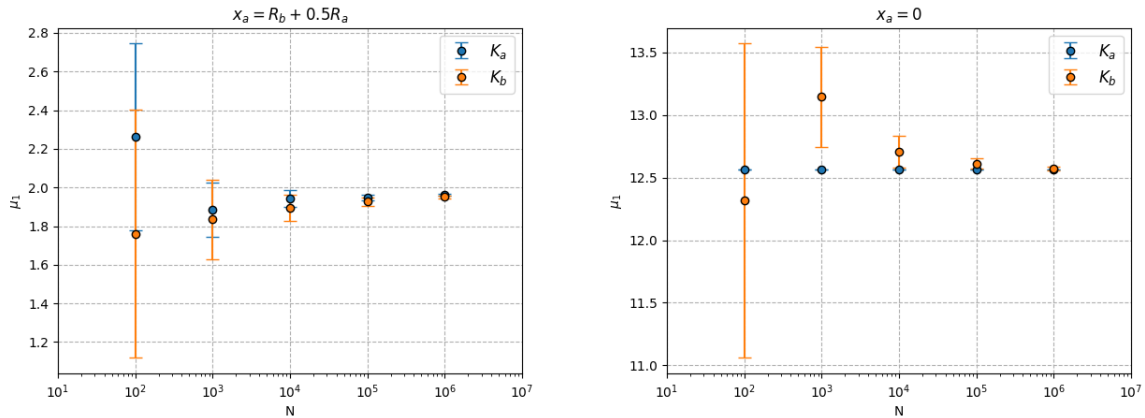
Na koniec na podstawie uzyskanych wyników zostały zestawione wykresy pola powierzchni (1) ze słupkami błędów wyznaczanymi przez odchylenie standardowe (2) w funkcji ilości wylosowanych punktów n .

3 Wyniki



Rysunek 1: Test generatora rozkładu jednorodnego w dwóch stycznych zewnętrznie kołach.

Test generatora przedstawiony na wykresie 1 potwierdził jego poprawne działanie.



Rysunek 2: Wartości pola powierzchni wspólnej w funkcji ilości wylosowanych punktów uzyskane dla przesunięcia koła A o odpowiednie x_a podane nad wykresami.

Na wykresach pola powierzchni wspólnej widzimy, że wartości na początku są od siebie oddalone i obarczone bardzo dużym błędem, ale w miarę zwiększania ilości wylosowanych punktów zmniejsza się błąd i wartości stabilizują się wokół poprawnego wyniku.

4 Podsumowanie

W ćwiczeniu została zastosowana metoda całkowania Monte Carlo do oszacowania powierzchni wspólnej dwóch kół. Test generatora rozkładu jednorodnego w kole o zadanym promieniu i przesunięciu wykazał jego poprawne działanie. Wyniki oszacowania pola wspólnego pokazują, że spełnione jest prawo wielkich liczb, czyli wzrost dokładności przy większej liczbie losowań. Wskazuje na to nie tylko dokładność wyniku liczbowego, ale i zmniejszające się odchylenie standardowe.