# Generatory liczb pseudolosowych - rozkłady skorelowane w dwóch wymiarach

Metody Monte Carlo w Fizyce

Julia Potempa (411073)

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

26. marca 2025r.

# Cel ćwiczenia

Wygenerowanie rozkładu normalnego w dwóch wymiarach, jednorodnego w kole oraz zastosowanie transformacji afinicznej do przetransformowania rozkładu jednorodnego i normalnego do elipsy. Dodatkowo została skonstruowana macierz kowariancji dla obu elips i obliczony współczynnik korelacji zmiennych.

# 1 Wstęp

## 1.1 Rozkład normalny w dwóch wymiarach

Generując liczby pseudolosowe o rozkładzie normalnym w układzie dwuwymiarowym otrzymujemy rozkład sferycznie konturowany, ponieważ jego gęstość zależy jedynie od odległości od środka rozkładu.

$$U_1 \sim U(0,1),\ U_2 \sim U(0,1)$$

$$X = \sqrt{-2\ln(1-U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2),\ X \sim N(0,1) \tag{1}$$

$$Y = \sqrt{(-2\ln(1-U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2),\ Y \sim N(0,1) \tag{2}$$

## 1.2 Rozkład jednorodny w kole jednostkowym

Za pomocą rozkładu otrzymanego w poprzednim podpunkcie możemy umieścić punkty na jednostkowym okręgu poprzez normalizację uzyskanych poprzednio zmiennych:

$$X' = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{3}$$

$$Y' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{4}$$

Następnie należy te punkty przesunąć do środka okręgu, a żeby zapewnić ich jednorodny rozkład można je przeskalować za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$h(r) = kr^{k-1}$$

gdzie k to liczba wymiarów, czyli w naszym przypadku 2. Na tej podstawie wyznaczamy dystrybuantę:

$$F(r) = r^2 = U_1 \sim U(0,1)$$

$$r = \sqrt{U_1}$$

$$X'' = r \cdot X',\ Y'' = r \cdot Y' \tag{5}$$

zatem wektory $X''$ oraz $Y''$ mają rozkład jednorodny w kole o promieniu 1.

## 1.3 Transformacja afiniczna

Otrzymane poprzednio rozkłady (normalny oraz jednorodny) możemy poddać transformacji afinicznej, czyli liniowej, która przeprowadzi koło w elipsę. Możemy tego dokonać podając wektory określające półosie główne

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \end{bmatrix},\ \overrightarrow{r_2} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{bmatrix}$$

Na ich podstawie konstruujemy macierz transformacji $A$:

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

Macierz $A$ określa obrót i skalowanie wzdłuż półosi głównych. Dodatkowo możemy wprowadzić wektor $\overrightarrow{c}$ odpowiedzialny za przesunięcie całego układu. Postać macierzowa całkowitej transformacji jest następująca:

$$\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{c}$$

Ze względu na ortogonalność półosi głównych elipsy nasz układ wystarczy obrócić o zadany kąt $\alpha$ i przeskalować ich długości o czynniki odpowiednio $b_1$ oraz $b_2$:

$$\overrightarrow{r_1} = b_1 R_\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{r_2} = b_2 R_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $R_\alpha$ to macierz obrotu przyjmująca postać:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in [0, 2\pi]$$

## 1.4 Macierz kowariancji

Do sprawdzenia korelacji wektorów $X$ i $Y$ używamy współczynnika korelacji, który wyznacza się za pomocą macierzy kowariancji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix},\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{6}$$

Odpowiednie elementy macierzy $\Sigma$ liczy się następująco:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2$$

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{y} \cdot \overline{x}$$

gdzie:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

analogicznie dla $y$ oraz:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Na podstawie tak wyznaczonych wartości jest obliczany współczynnik korelacji $r_{xy}$:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}},\ r \in [-1, 1] \tag{7}$$

## 2 Problematyka

Realizacja wszystkich rozkładów oraz ich transformacji została zaprogramowana w języku `C++`. Najpierw został wygenerowany rozkład normalny z wykorzystaniem generatora `rand()` z biblioteki `<cstdlib>` (wzory 1 oraz 2), którego składowe $x$ i $y$ następnie znormalizowano (3 oraz 4) i przesunięto do wnętrza okręgu o promieniu 1 (5). Następnie zarówno rozkład normalny jak i jednorodny w kole zostały poddane transformacji afinicznej zdefiniowanej macierzą:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 \cos\alpha & -b_2 \sin\alpha \\ b_1 \sin\alpha & b_2 \cos\alpha \end{bmatrix}$$

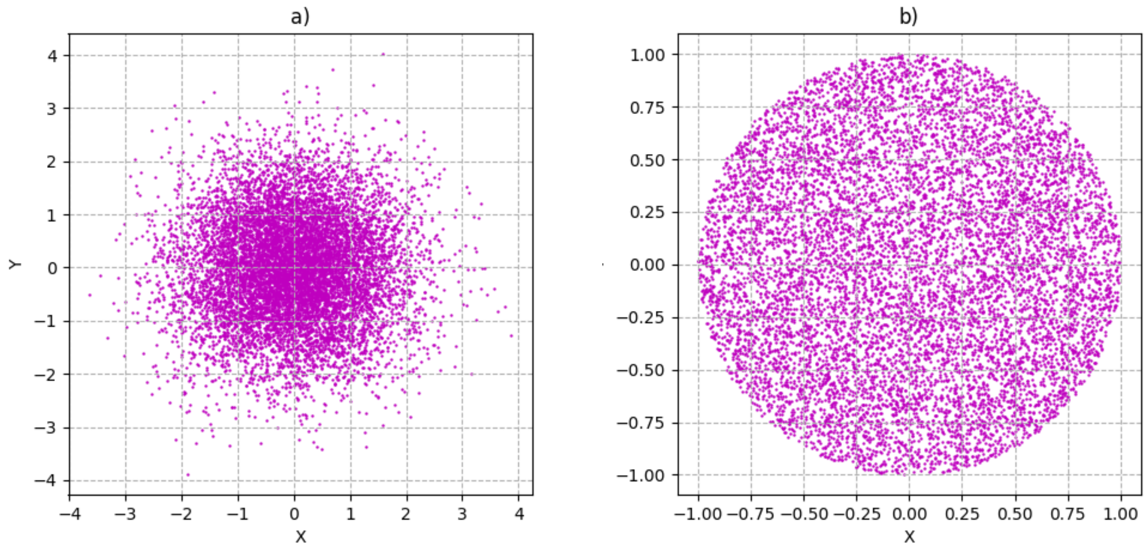
czyli ostateczne wzory na kolejne wyrazy wektorów $x$ i $y$ po transformacji przybierają postać:

$$X_{\text{elip}} = b_1 \cos\alpha \cdot x - b_2 \sin\alpha \cdot y$$

$$Y_{\text{elip}} = b_1 \sin\alpha \cdot x + b_2 \cos\alpha \cdot y$$

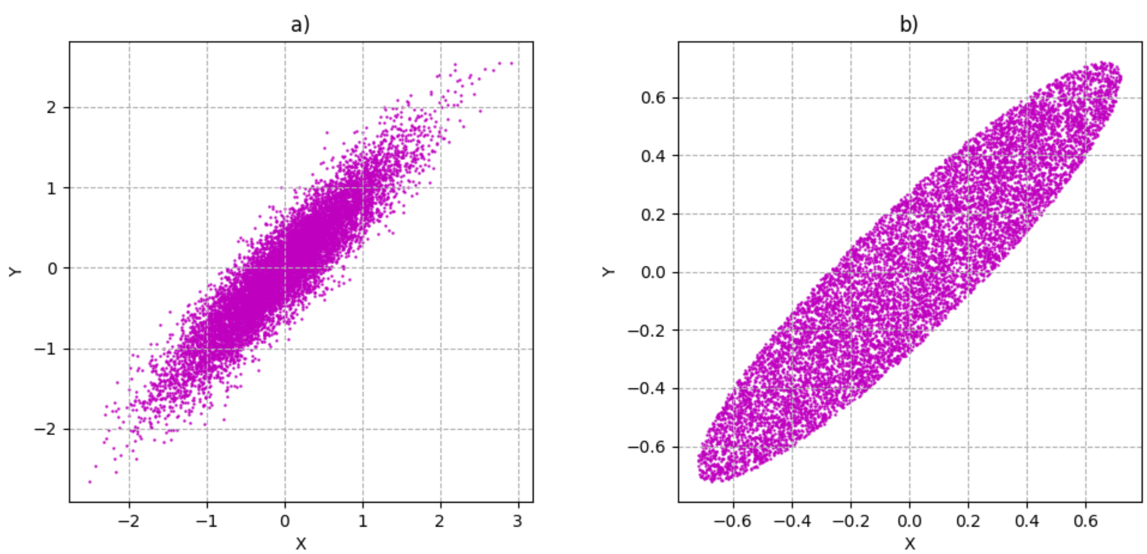
gdzie $b_1 = 1$, $b_2 = 0,2$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Na końcu dla obu transformacji została wyznaczona macierz kowariancji (6) oraz współczynniki korelacji (7). Wykresy zostały przygotowane za pomocą biblioteki `matplotlib` w języku `Python`.

# 3 Wyniki




Rysunek 1: Otrzymane rozkłady a) normalny w dwóch wymiarach, b) jednorodny w kole jednostkowym.

Otrzymany rozkład normalny, jak i jednorodny w kole przyjęły postać widoczną na rysunku (1).




Rysunek 2: Otrzymane rozkłady po transformacji afinicznej a) dwuwymiarowego rozkładu normalnego, b) jednorodnego rozkładu w kole jednostkowym.

Po przeprowadzeniu transformacji afinicznej otrzymano dwie elipsy pochylone względem osi $X$ i $Y$ pod kątem $45°$.

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0,530 & 0,491 \\ 0,491 & 0,534 \end{bmatrix},\ r_{xy1} = 0,923 \tag{8}$$

Dla elipsy przedstawionej na rysunku (2a) otrzymano powyższą macierz kowariancji i współczynnik korelacji na poziomie $0,923$.

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0,131 & 0,121 \\ 0,121 & 0,130 \end{bmatrix},\ r_{xy2} = 0,924 \tag{9}$$

Dla elipsy z rozkładem jednorodnym (2b) otrzymano macierz kowariancji $\Sigma_2$ oraz współczynnik korelacji na poziomie $0,924$.

# 4 Wnioski

Otrzymane wyniki wizualnie były zgodne z oczekiwanymi. Rozkład normalny dał nam w wyniku chmurę punktów przypominających koło. Po znormalizowaniu tych punktów i przemieszczenie ich do środka okręgu za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa otrzymano widoczny jednorodny rozkład w jednostkowym kole. W wyniku transformacji afinicznej otrzymane punkty rozproszyły się wzdłuż półosi elipsy. Analiza statystyczna wykazała, że współczynniki korelacji odpowiednio dla elipsy z rozkładem normalnym i jednorodnym wyniosły $0,923$ oraz $0,924$, co wskazuje na skorelowanie otrzymanych wartości $x$ i $y$ ze sobą.