VERS UNE BOÎTE À OUTILS TRANSPORT DANS SCILAB

P. LOTITO, E. MANCINELLI, MAXPLUS WORKING GROUP

The current members of the Max-Plus working group are M. Akian, G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat .

This work is partly supported by the ALAPEDES project of the European TMR programme.

Contents

1. Modélisation des problèmes de transports

Le but à long terme est de faire une boîte à outils dédiée aux problèmes de transport, libre, dans Scilab, incluant des modèles démographiques et économiques simplifiés du développement des villes.

Il existe des logiciels commerciaux Traffic, Minutp, Tranus mais peu de logiciels libres UrbanSim.
www.enpc.fr/cergrene/HomePages/mcdl/GICC2000.

Dans une première phase exploratoire on a abordé 3 points :

- les plans de feu de circulation,
- la modélisation microscopique de la circulation,
- l'affectation de trafic.

2. SIMULATION MICROSCOPIQUE DE LA CIRCULATION

On considère des voitures (indexées par $n \in \{1 \cdots N\}$) sur une route circulaire de longueur 1, désirant rouler (si elles n'en sont pas empêchées par les voitures qui les précédent) à des vitesses v_t^n dépendant du temps $t \in \mathcal{N}$ et aléatoires i.i.d. (en temps et entre les voitures) prenant les valeurs w et v avec les probabilités $(1 - \lambda)$ et λ. On veut calculer la vitesse moyenne de l'ensemble des voitures.

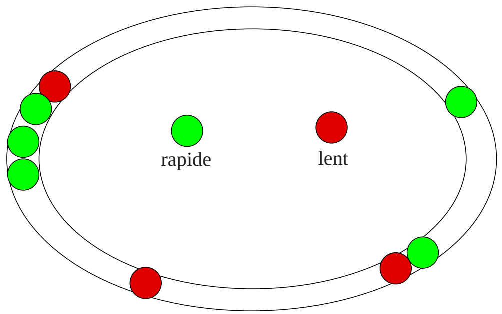

FIGURE 1. Circulation sur une route circulaire.

Dans le cas où on interdit les dépassements il est aisé d'écrire la dynamique suivie par le système.

$$(1) \qquad x_n^{t+1} = \begin{cases} \min\left(v_n^t + x_n^t\,,\ x_{n+1}^{t+1}\right)\ , & \text{if } n < N\ , \\ \min\left(v_N^t + x_N^t\,,\ 1 + x_1^{t+1}\right)\ , & \text{if } n = N\ . \end{cases}$$

que l'on peut réécrire

$$x_n^{t+1} = \begin{cases} v_n^t \otimes x_n^t \oplus x_{n+1}^{t+1}\ , & \text{if } n < N\ , \\ v_N^t \otimes x_N^t \oplus 1 \otimes x_1^{t+1}\ , & \text{if } n = N\ . \end{cases}$$

Si l'on note $\oplus = \min$ et $\otimes = +$ ces équations peuvent être considérées linéaires au sens d'une nouvelle algèbre appelée minplus.

Une boîte à outils de Scilab appelée Maxplus permet de faire du calcul matriciel dans cette algèbre avec la syntaxe naturelle.

$$X^{t+1} = A \otimes X^{t+1} \oplus B^t \otimes X^t \ .$$

avec, en notant $e = 0$ et $\epsilon = \infty$:

$$X^t = \begin{pmatrix} x_1^t \\ \vdots \\ x_N^t \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \epsilon & e & & \\ & & \ddots & e \\ 1 & & & \epsilon \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} v_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & v_N^t \end{pmatrix}$$

Ce sytème dynamique se simule simplement dans Scilab.

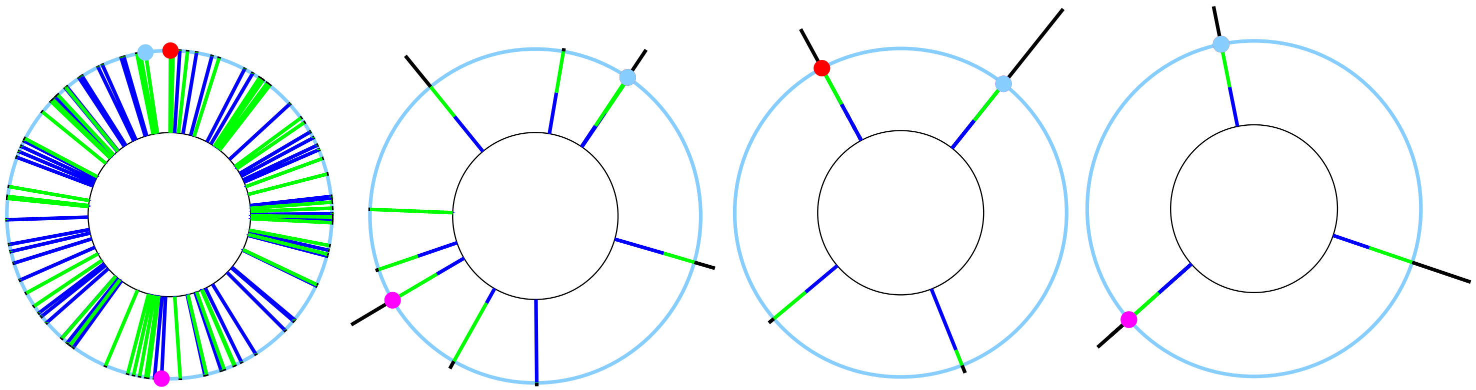

FIGURE 2. Exemple d'evolution du système (v=1/3).

On peut montrer qu'en régime stationnaire il se forme $k = \left\lceil \frac{1}{v} \right\rceil$ bouchons et que les N voitures sont réparties dans les bouchons $(n_1 \cdots n_k)$ selon la loi uniforme sur le simplexe

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N \ .$$

On en déduit des formules de récurrences simples donnant la vitesse moyenne en fonction du nombre de voitures et de bouchons.

Les formules obtenues se généralisent (pour l'instant empiriquement) au cas avec dépassement.

3. Equilibres de Wardrop

Formulation variationnelle noeuds-arcs dans le cas séparable :

$$\min_q \left(\sum_a C^a(Q^a) \right)$$

$$Q^a = \sum_j q_j^a, \quad Aq_j^\bullet = d_j, \quad q_j^a \geq 0 \ .$$

- A est la mxn-matrice d'incidence noeuds-arcs représentant le réseau routier. Les routes sont indexées par a.
- d_j représente une demande de transport où j désigne une classe d'usagers en général un couple origine-destination.
- Q^a est le trafic total sur la route a et si $t_a(Q^a)$ désigne le temps de parcours de la route a alors le coût vaut :

$$C^a(Q^a) = \int_0^{Q^a} t_a(q)dq \ .$$

Formulation variationnelle arcs-routes dans le cas séparable

$$\min_q \left(\sum_a C^a(Q^a) \right)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_i} q_i^r = d_i, \quad q_i^r \geq 0, \quad Q^a = \sum_{(i,r):a \in r} q_i^r \ .$$

- r désigne une route du graphe.
- $\mathcal{R}_i$ désigne l'ensemble des routes possibles des usagers de type i.
- q_i^r désigne le flôt d'usagers de type i utilisant la route r.

4. Algorithmes de résolution

4.1. Temps de parcours constant

Dans le cas de temps de parcours constant. Le problème se ramène à rechercher un chemin le plus court dans un graphe.

4.2. Une seule classe d'usager $D = d_i$

On utilise la formulation noeuds-arcs que l'on peut résoudre efficacement par des méthodes de Newton hybrides.

Etant donné Q on l'améliore en calculant successivement V' et $Q = Q'$ avec :

$$ARA^tV' = D, \quad RA^tV = Q' \; ,$$

avec $R = (C'(Q)/Q)^{-1}$.

4.3. Chargement incrémental

On découpe les demandes de transport en N tranches. k tranches étant déja affectées la $k+1$ ème tranche est affectée en considérant des temps de parcours constants correspondant à la charge déja affectée.

4.4. Frank et Wolf

On améliore une affectation q déja effectuée.

- On calcule les temps de parcours $t^a(Q^a)$ et une nouvelle affectation q' de toutes les demandes en considérant les temps de parcours constants.
- q devient l'affectation $\lambda q + (1-\lambda)q'$ réalisant

$$\min_{1\geq\lambda\geq 0}\left(\sum_a C^a\left(\lambda Q^a + (1-\lambda)(Q')^a\right)\right).$$

5. IMPLÉMENTATION DANS SCILAB

- Une structure de donnée de Scilab graph-list joue le rôle d'une base de donnée géographique rudimentaire. Cette structure est visualisable et editable à la souris. Elle contient les données et les résultats de l'affectation.
- Une fonction Scilab Traffic_Assign calcule l'affectation en utilisant la méthode incrémentale ou Frank et Wolf pour les fonctions donnant les temps de transport standards en fonction du débit.
- Une fonction Scilab permet de générer des problèmes aléatoires ou certaines structures régulières.

REFERENCES

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J-P. Quadrat : “Synchronization and linearity. An algebra for discrete event systems”, Willey & Sons, 1992.

[2] M. Blank : “Variational principles in the analysis of traffic flows. (Why it is worth to go against the flow)”, to appear.

[3] P.A. Lotito, E.M. Mancinelli, V. Malyshev & Max-Plus : “ Explicit computation of a maxplus Lyapunov exponent giving the average speed on a circular traffic line without overtaking”, internal report, 2000.

[4] G. Cohen, S. Gaubert, E. Mancinelli, J.P. Quadrat and E. Rofman :“On traffic light control of regular towns”, internal report, 99.

[5] P. Carpentier, G. Cohen and Y. Hamam : “Water Network Equilibrium Variational Formulation and Comparison of Numerical Algorithms”, Euro VII, Bologna June 1985.

[6] M. Patriksson : “The Traffic Assignment Problem, Models and Methods”, VSP Utrecht 1994.

[7] C. Gomez (Editor) : “Engineering an Scientific Computing with Scilab”, Birkhauser 1999 and (http://www-rocq.inria.fr/scilab/).