

# Introdução ao Matlab

Implementação do método sequencial implícito no escoamento bifásico (água-óleo) em reservatórios de petróleo.

João Paulo Rodrigues de Andrade

# Escoamento monofásico

## Conservação da massa

$$\frac{\partial (\rho\phi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\vec{v}) + q$$

$\rho$  = densidade

$\phi$  = porosidade =  $\frac{V_p}{V_T}$

$t$  = tempo

$\vec{v}$  = velocidade

$q$  = termo fonte ou sumidouro

$V_p$  = volume do poro

$V_T$  = volume do poro + volume da rocha

## Lei de Darcy

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla p$$

$K$  = permeabilidade

$\mu$  = viscosidade

$p$  = pressão

# Escoamento monofásico

Integrando a equação da conservação da massa no volume

$$\int_V \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} dV = \int_V -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV + \int_V q dV$$

Aplicando o teorema da Divergência de Gauss na segunda integral

$$\int_V -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = \int_{\partial V} -\rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\partial V = - \sum_{F \in \partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}$$

$\partial V$  = superfície de contorno de  $V$

$F$  = Face de  $V$

$\vec{n} = \hat{n} |F|$

$\hat{n}$  = vetor que aponta para fora de  $V$

$|F|$  = área de  $F$

# Escoamento bifásico

## Equação hiperbólica da saturação

$$\phi \frac{\partial (S_\alpha)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}_\alpha) + Q_\alpha$$

$$S_\alpha = \text{Saturação da fase } \alpha = w, o \text{ (água ou óleo)} \quad S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p}$$

$$\vec{v}_\alpha = \text{velocidade da fase } \alpha$$

$$\vec{v}_\alpha = \lambda_\alpha K \nabla p$$

$$Q_\alpha = \text{termo fonte da fase } \alpha = \frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = \text{mobilidade da fase } \alpha$$

$$\lambda_\alpha = \frac{kr_\alpha}{\mu_\alpha}$$

$$kr_\alpha = \text{permeabilidade relativa da fase } \alpha$$



Modelo de Brooks e Corey

# Escoamento bifásico

## Equação discreta da saturação

$$\phi V \left( \frac{S_{\alpha}^t - S_{\alpha}^{t-1}}{\Delta t} \right) = - \sum_{F \in \partial V} (\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{n}) + Q_{\alpha} V$$

$\Delta t =$  passo de tempo

# Escoamento bifásico

Equação elíptica da pressão

$$\sum_{F \in \partial V} \vec{v}_T \cdot \vec{n} = Q_T V$$

$$\vec{v}_T = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \right) K \nabla p = \lambda_T K \nabla p$$

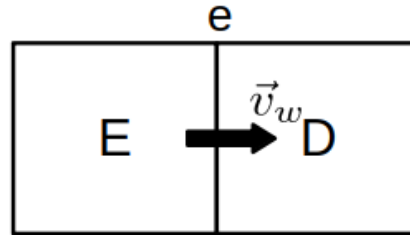
$$\vec{v}_{\alpha} = \left( \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_T} \right) \vec{v}_T = f_{\alpha} \vec{v}_T$$

$$Q_T = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}$$

# Escoamento bifásico

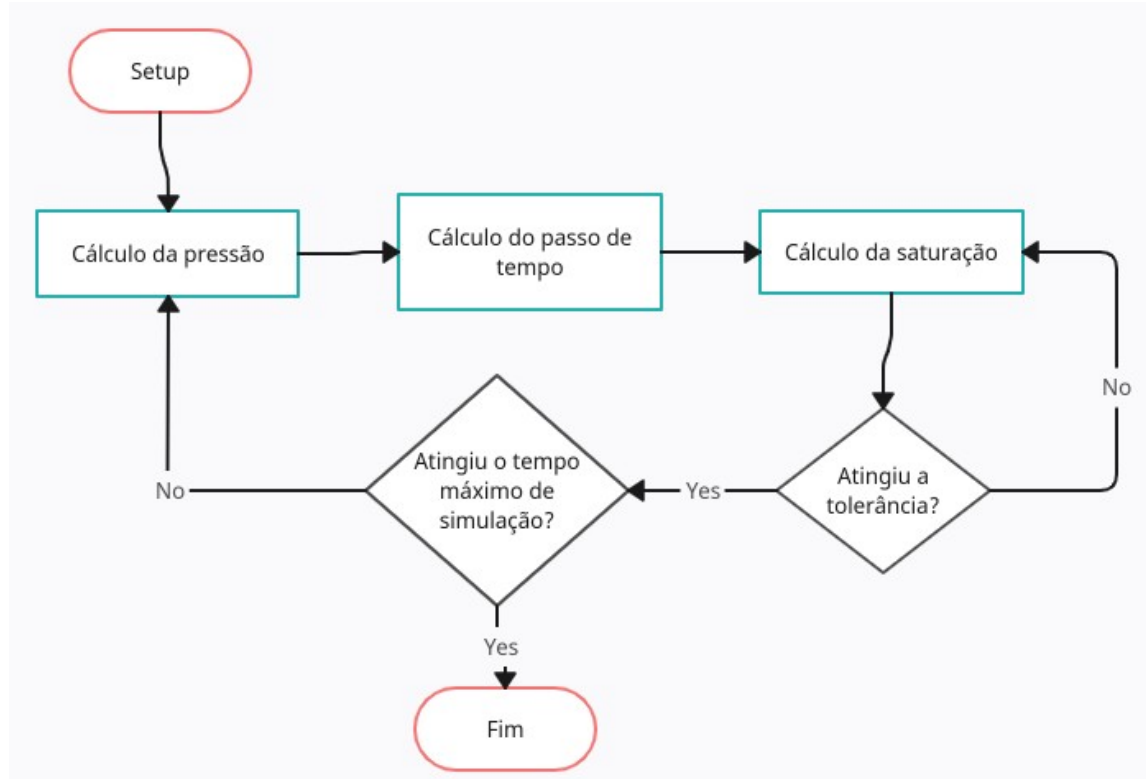
Método *Upwind* de primeira ordem

$$\begin{cases} S_w|_e = S_E, & \text{se } \vec{v}_w \geq 0 \\ S_w|_e = S_D, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



# Escoamento bifásico

## Método Sequencial Implícito





# Escoamento bifásico

## Método Sequencial Implícito

$$\begin{cases} \sum_{F \in \partial V} \vec{v}_T(p^{t-1}) \cdot \vec{n} = Q_T^{t-1} V \\ \phi V \left( \frac{S_w^t - S_w^{t-1}}{\Delta t} \right) = - \sum_{F \in \partial V} (\vec{v}_w(S_w^t) \cdot \vec{n}) + Q_w(S_w^t) V \end{cases}$$

$$\frac{|\vec{v}|}{\phi} \left| \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL$$

$$\phi V \left( \frac{S_w^t - S_w^{t-1}}{\Delta t} \right) + \sum_{F \in \partial V} (\vec{v}_w(S_w^t) \cdot \vec{n}) - Q_w(S_w^t) V = R$$

$$J = \frac{\partial R}{\partial S_w}$$

$$S_w^{\nu+1} - S_w^\nu = dS_w = -J^{-1} R$$

Condição de parada

$$\|dS_w\| < \varepsilon$$

Solução

$$S_w^t = S_w^{\nu+1}$$

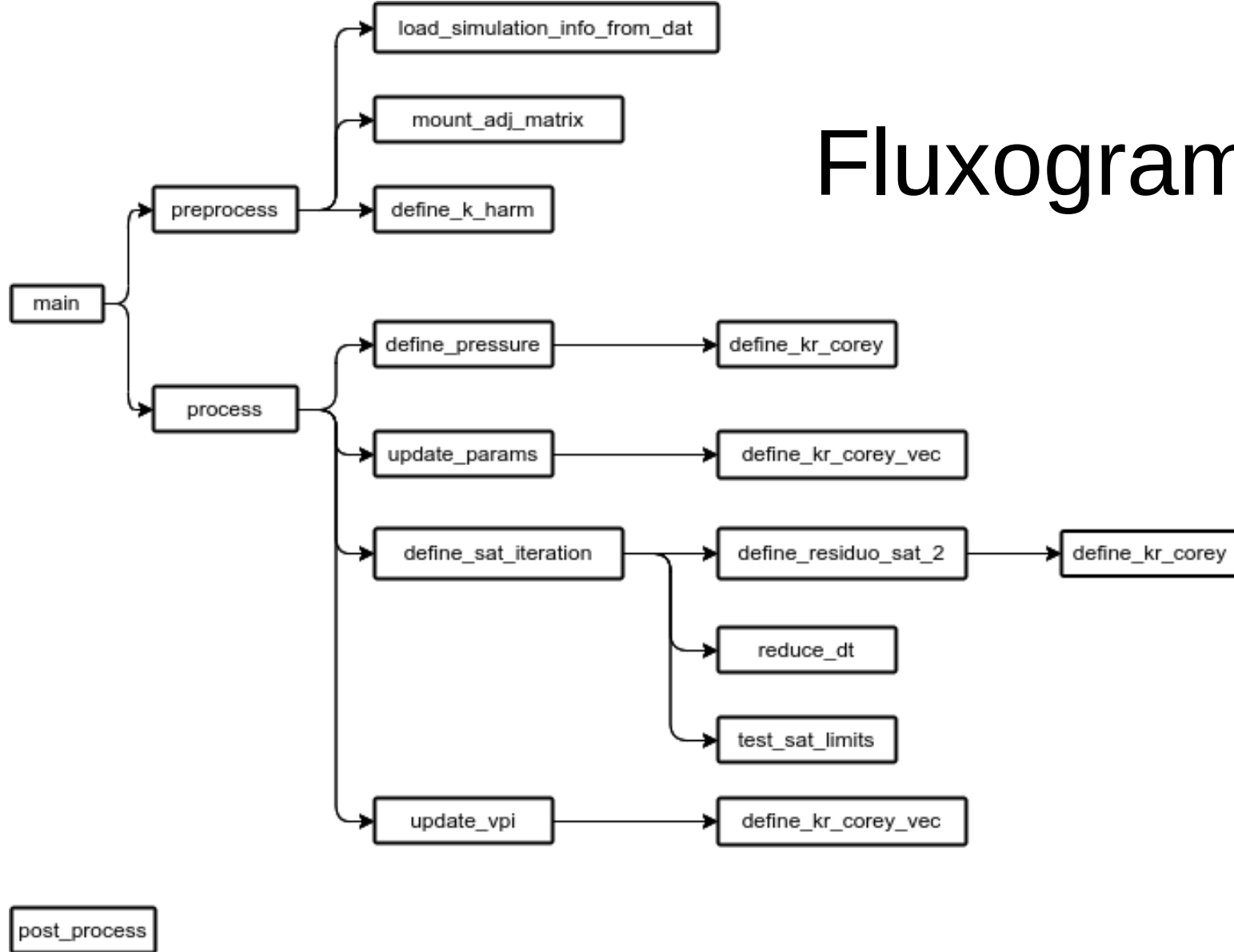
# Pré-processamento

- geração da malha computacional, leitura e obtenção das propriedades da malha (geometria e estrutura de dados) utilizando a biblioteca *pymoab*;
- definição dos campos de permeabilidade e porosidade;
- definição das condições de contorno e iniciais;
- exportação dessas informações por meio da biblioteca *scipy*, que permite escrita e leitura de dados no formato *.mat*.

# Pós-processamento

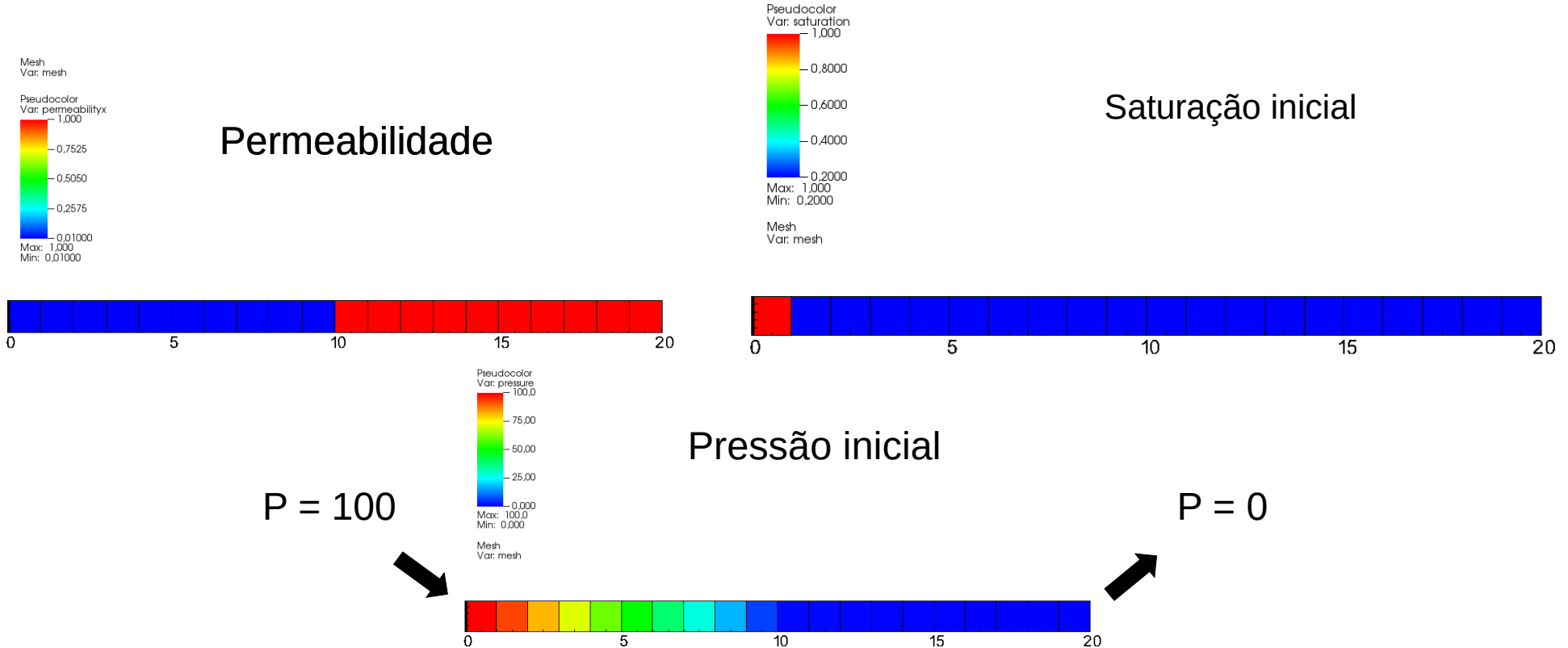
- Exportar arquivos para o formato .mat
- Geração de gráficos no matlab
- Geração de arquivos no formato .vtk (python) para posterior visualização no software Visit.

# Fluxograma



# Resultados

## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo



# Resultados

## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo

número máximo de iterações no cálculo da saturação = 10000;

valor máximo do erro = 100 (entre duas iterações consecutivas);

valor máximo de *loops* para reduzir o passo de tempo: 20;

CFL = 1;

vpi máximo = 0.75

$$n\alpha = 2$$

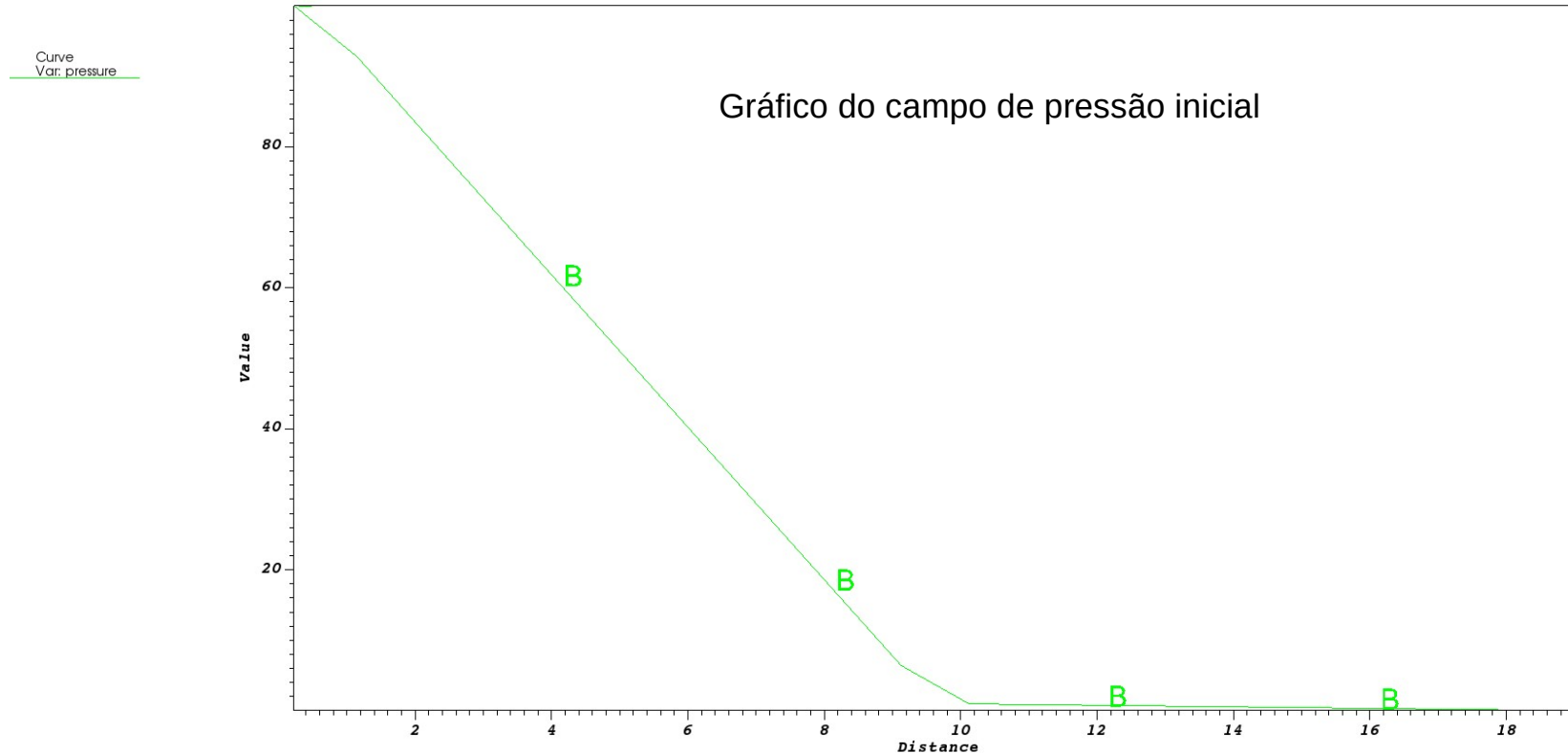
$$S_{wr} = S_{or} = 0.2$$

$$\varepsilon = 10^{-5}$$

$$kr_{\alpha}^0 = 1 \quad \frac{\mu_o}{\mu_w} = 1.5$$

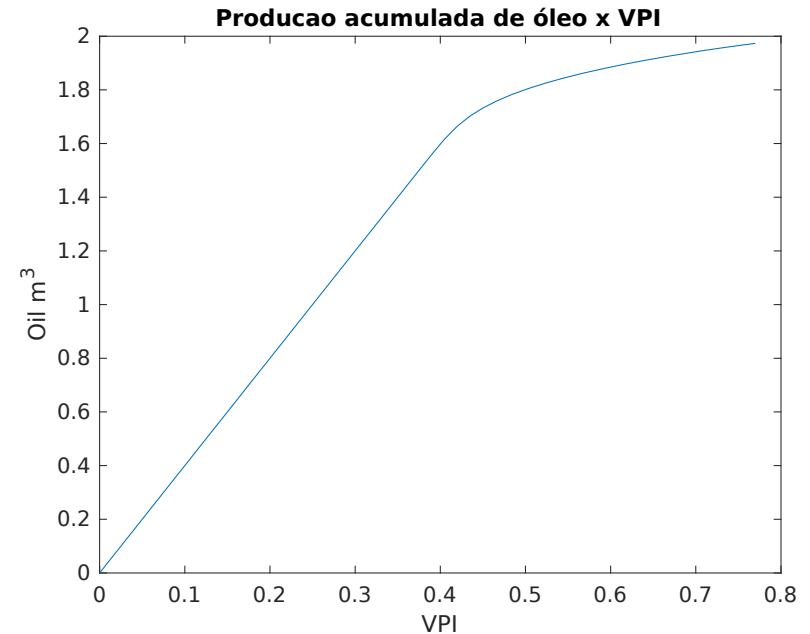
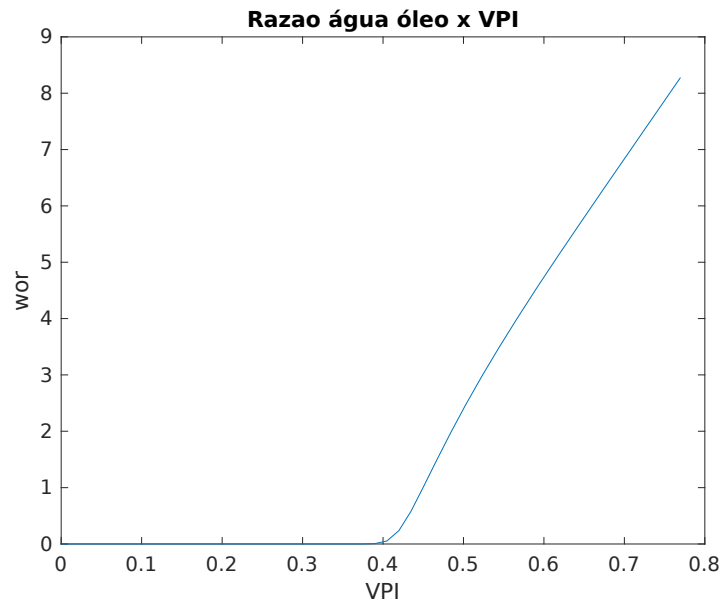
# Resultados

## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo



# Resultados

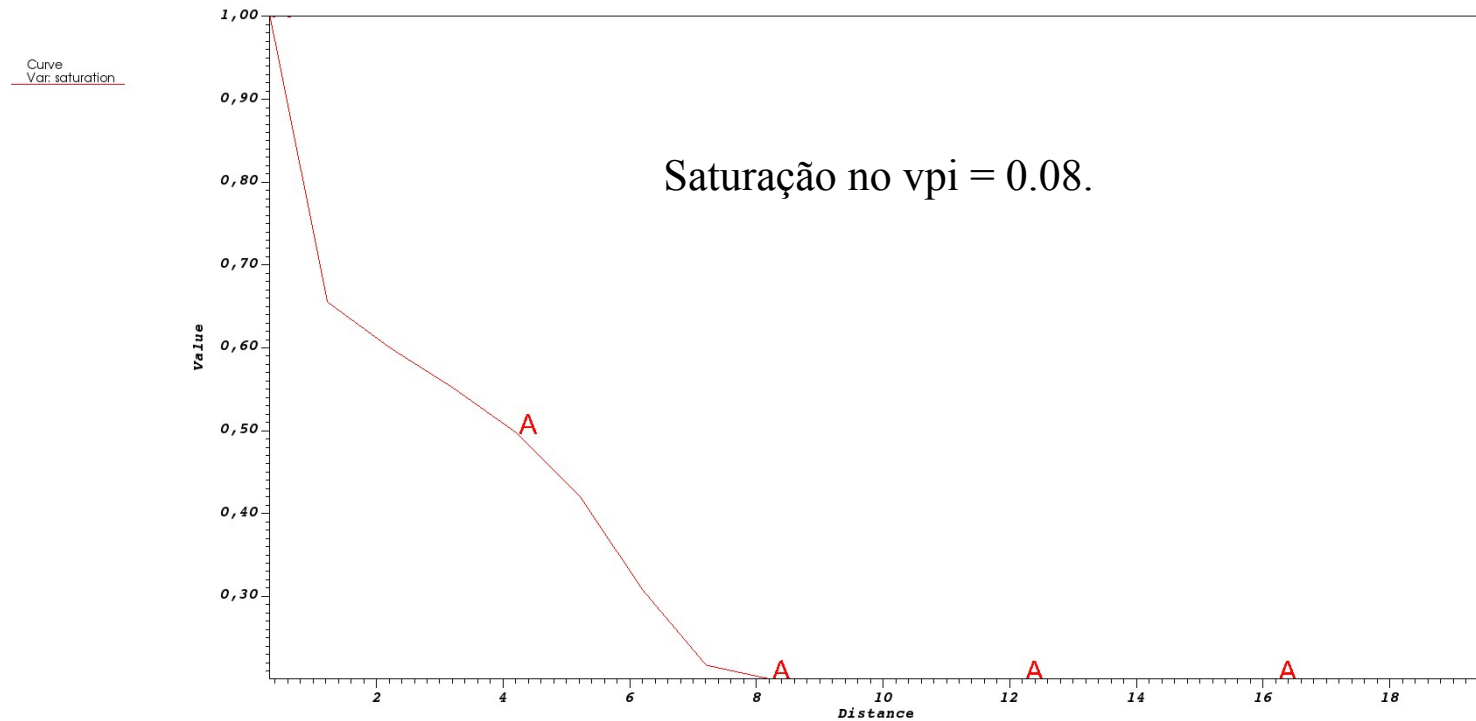
## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo





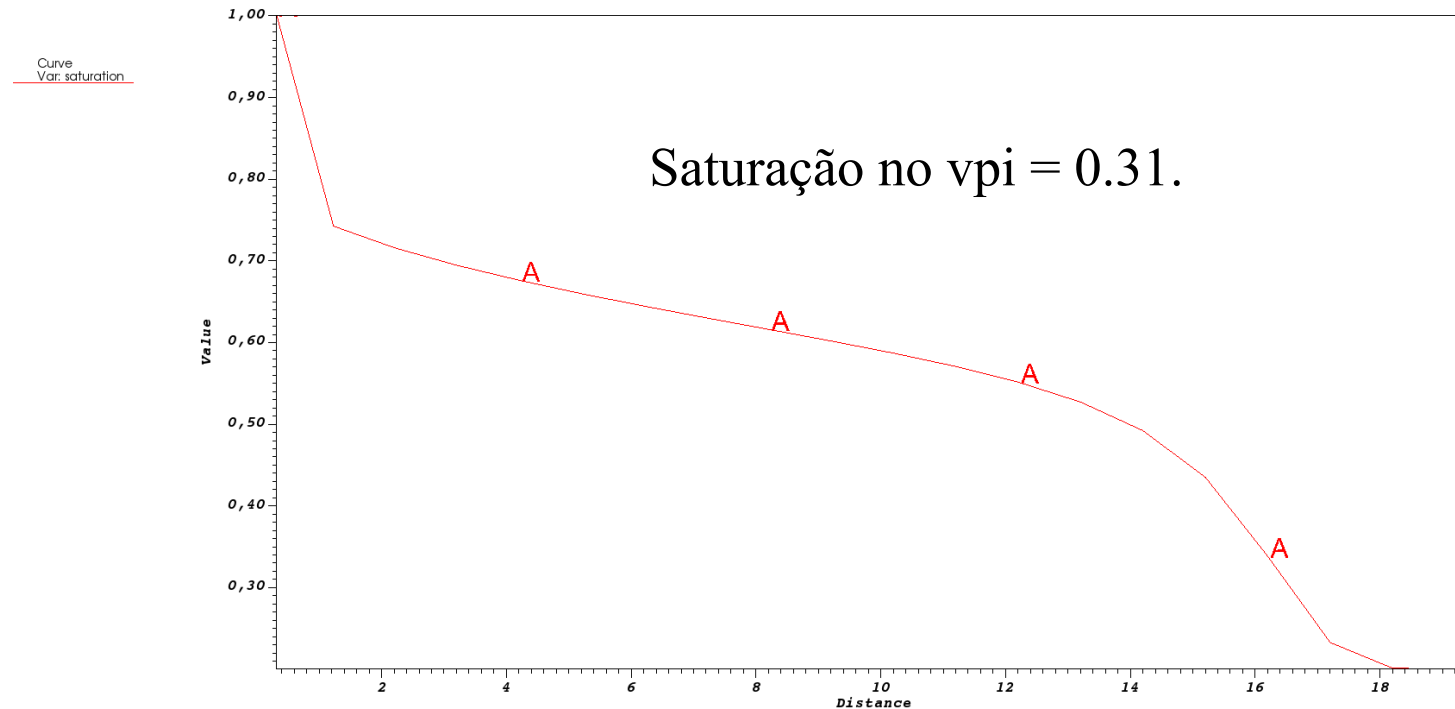
# Resultados

## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo



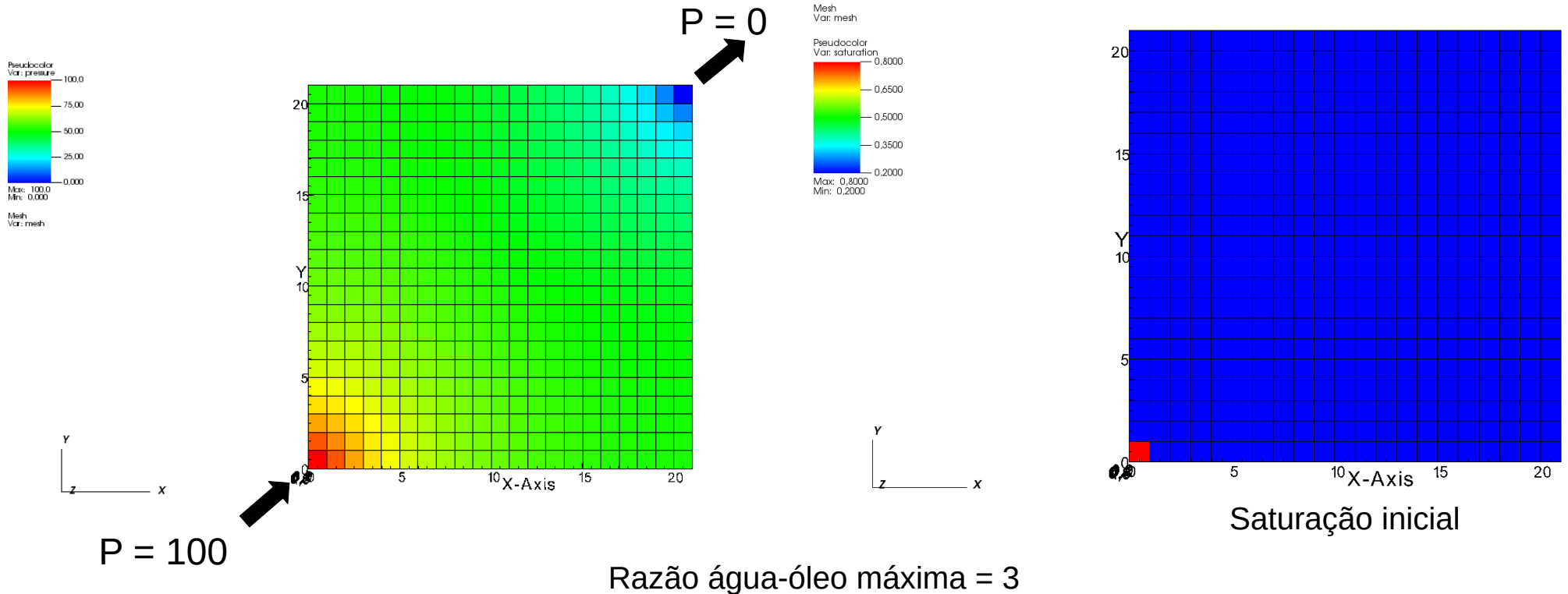
# Resultados

## Problema 1 - Escoamento bifásico 1D em meio heterogêneo



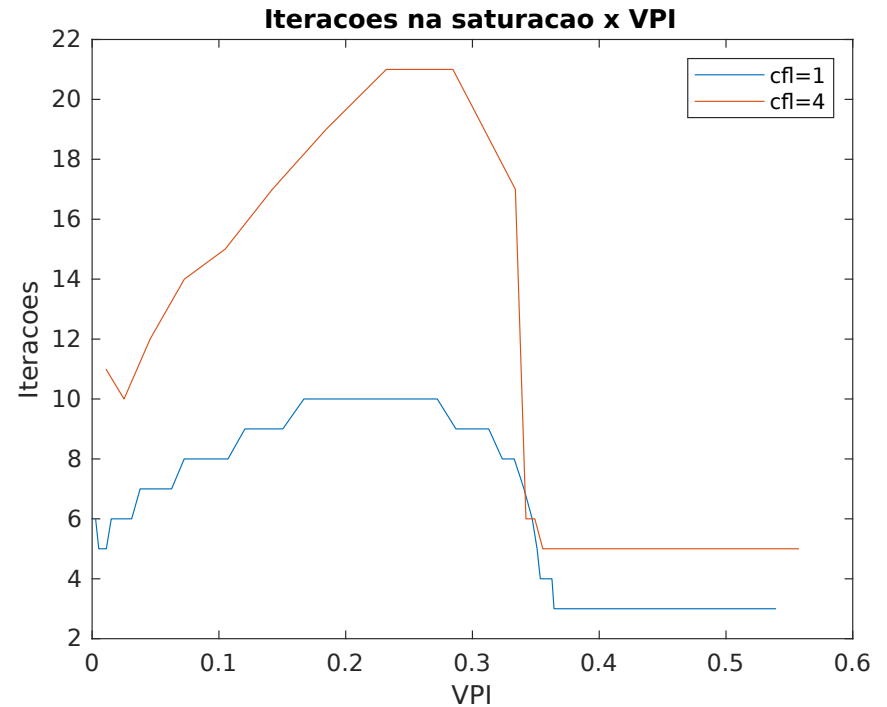
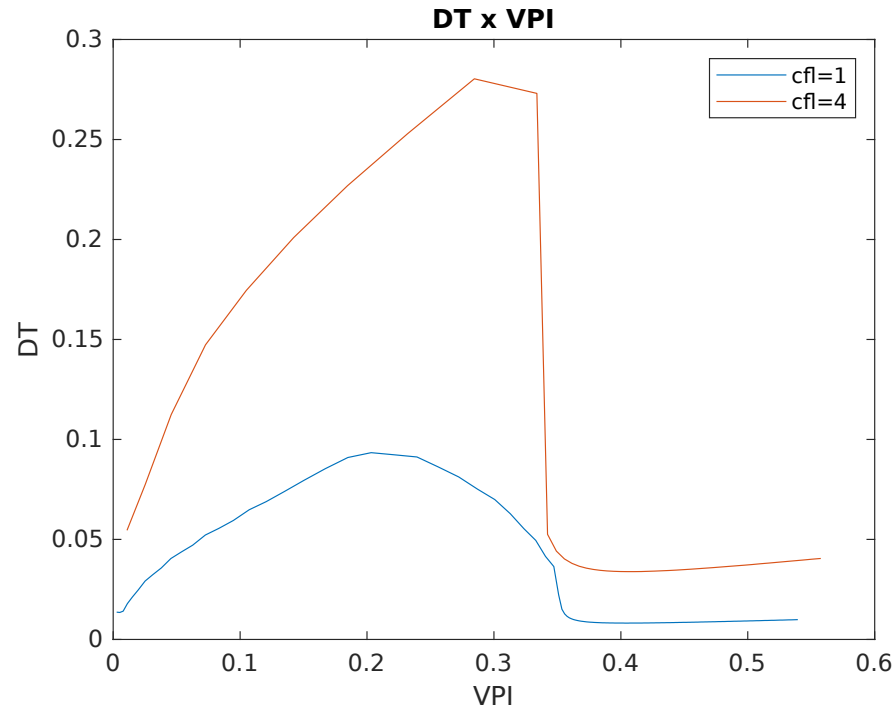
# Resultados

## Problema 2 – Escoamento 2D num meio homogêneo



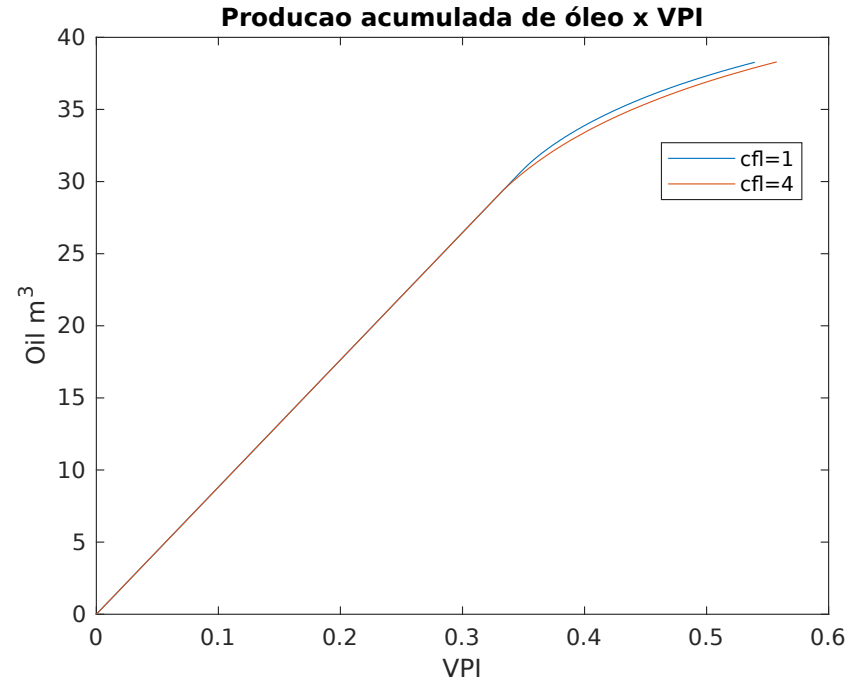
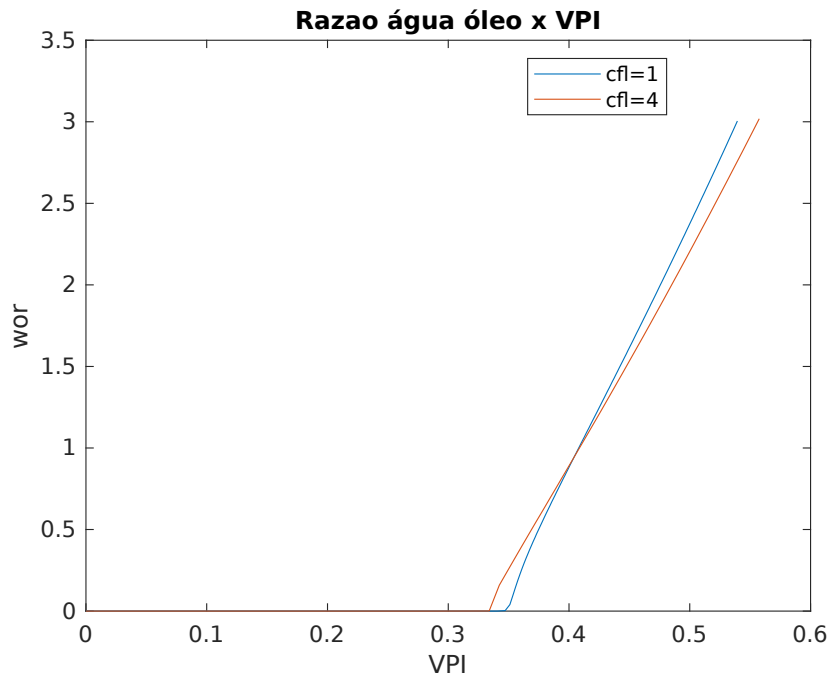
# Resultados

## Problema 2 – Escoamento 2D num meio homogêneo



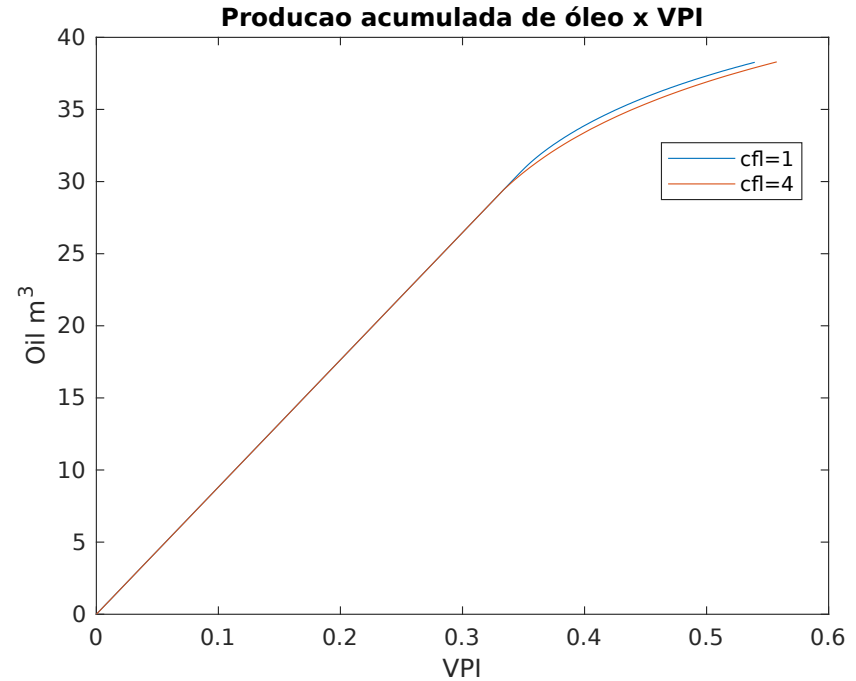
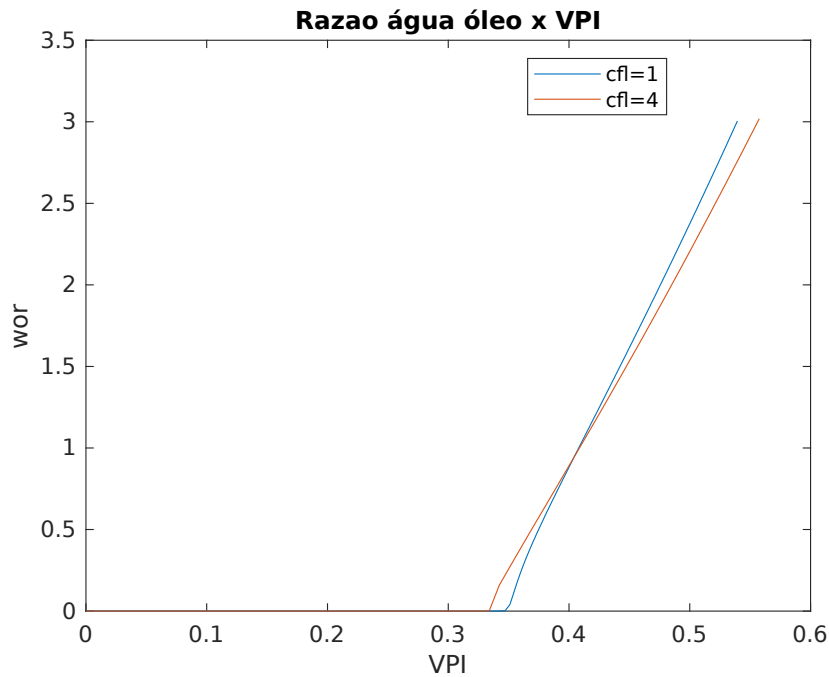
# Resultados

## Problema 2 – Escoamento 2D num meio homogêneo



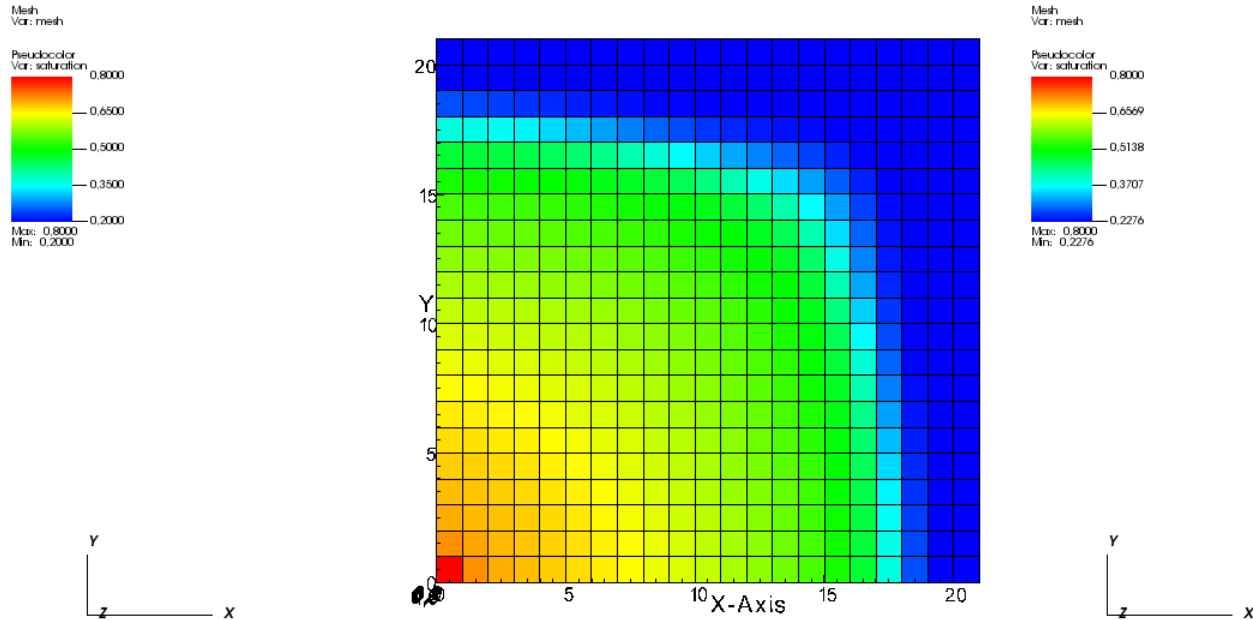
# Resultados

## Problema 2 – Escoamento 2D num meio homogêneo

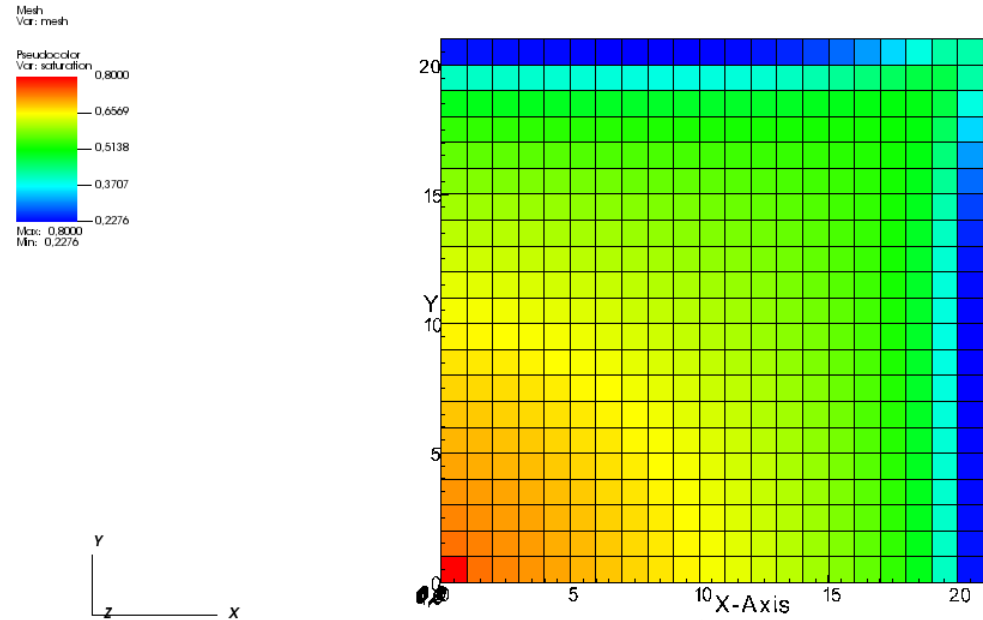


# Resultados

## Problema 2 – Escoamento 2D num meio homogêneo



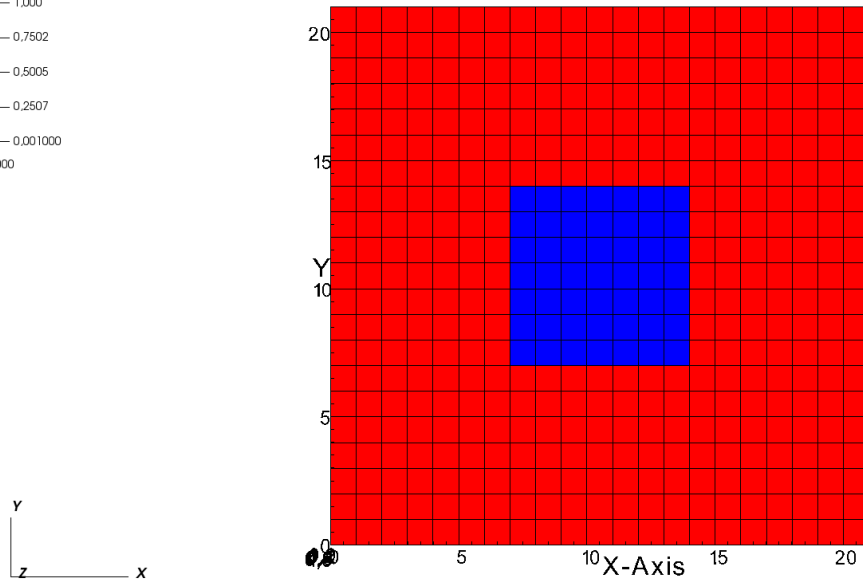
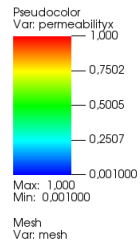
Saturação no  $v_{pi} = 0.23$ .



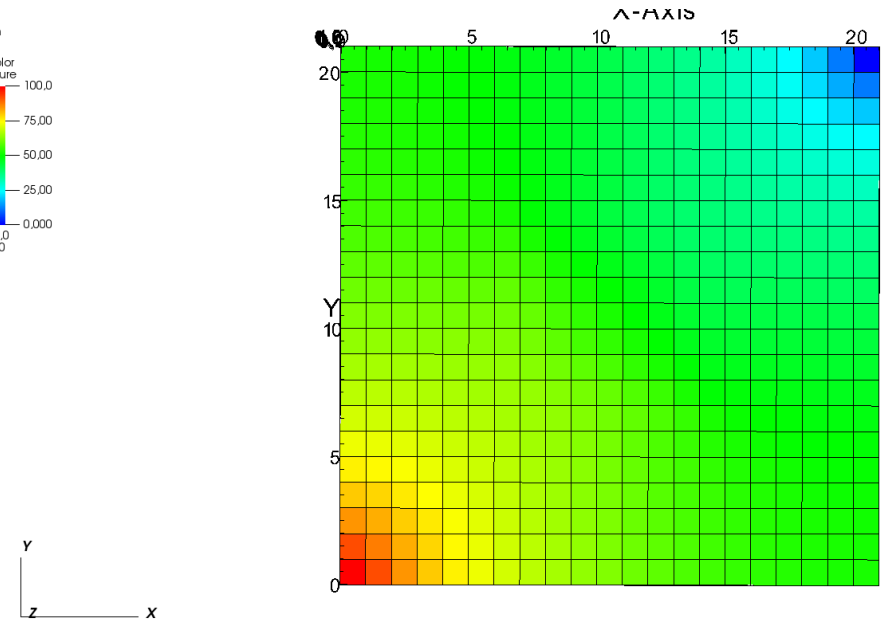
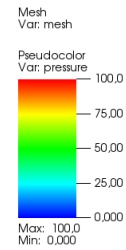
Saturação no  $v_{pi} = 0.36$ .

# Resultados

## Problema 3 - Escoamento bidimensional em meio heterogêneo



Campo de permeabilidade.

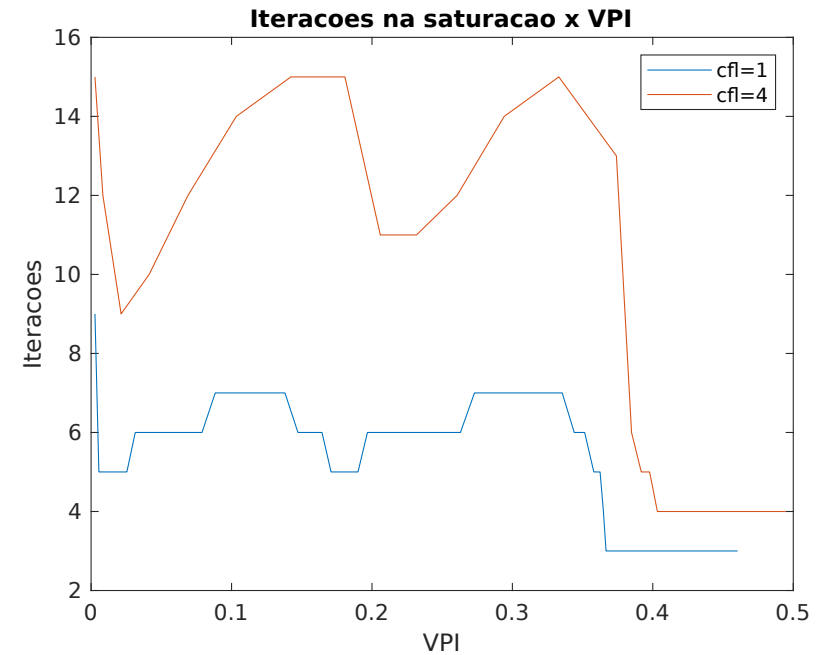
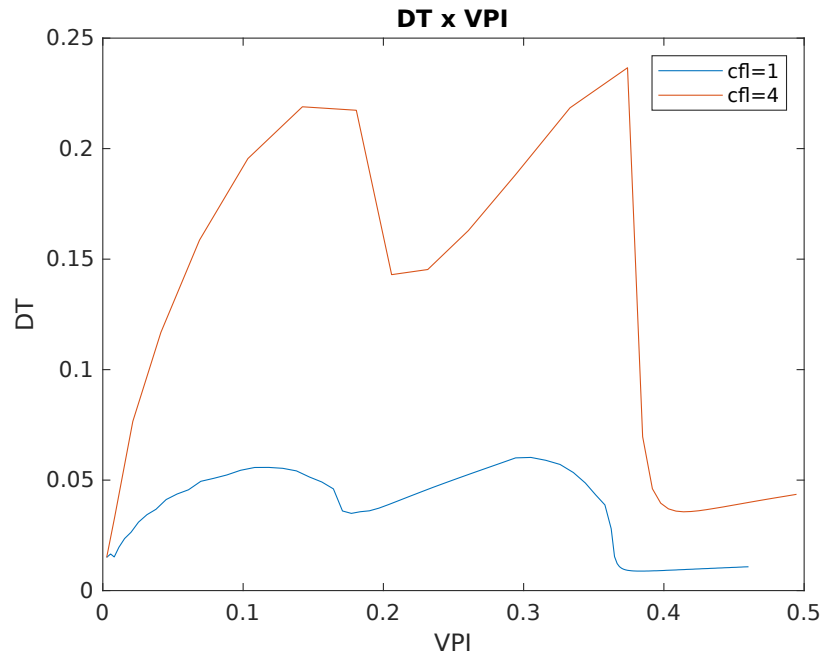


Campo de pressão inicial.



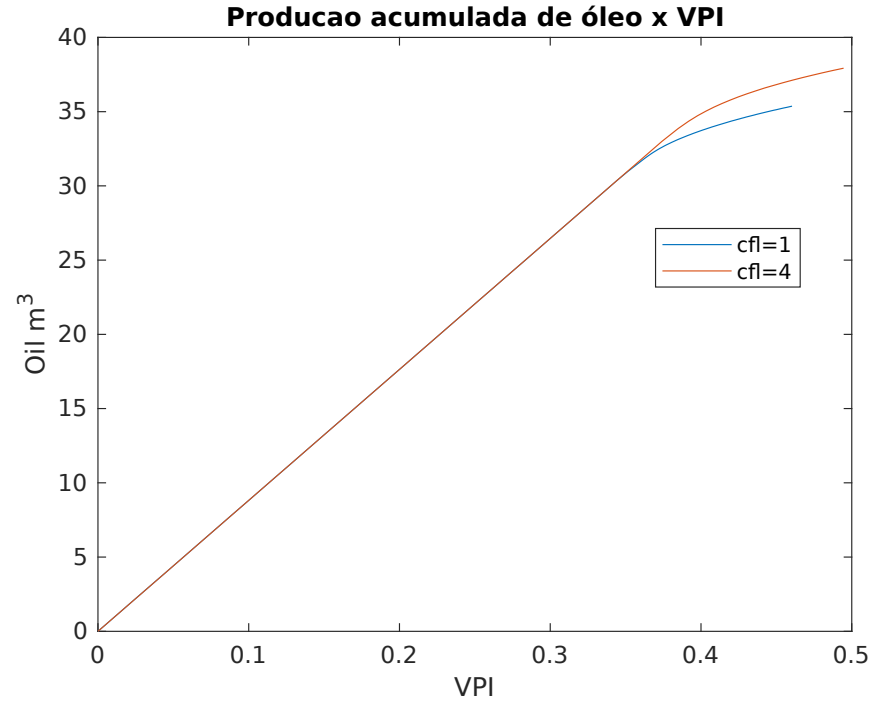
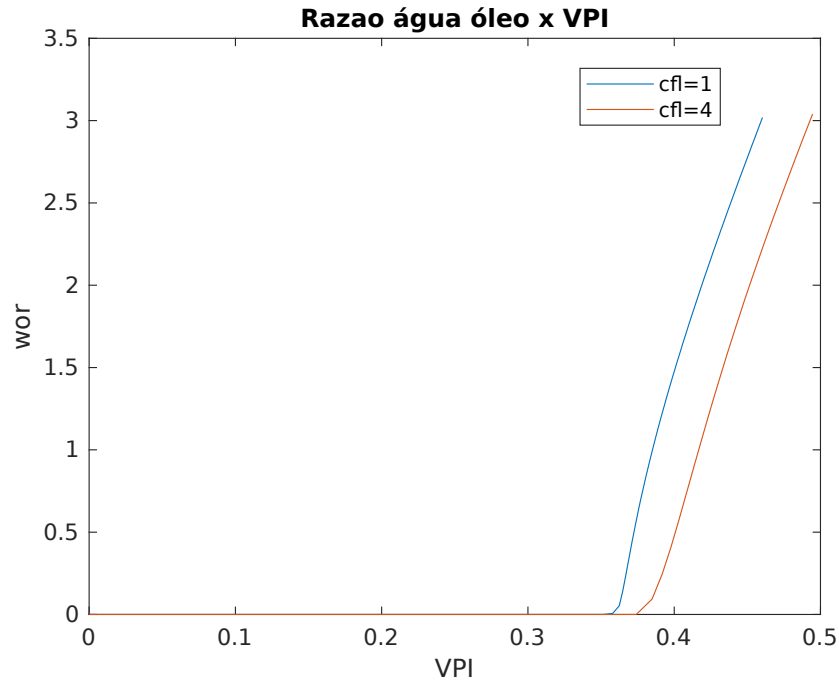
# Resultados

## Problema 3 - Escoamento bidimensional em meio heterogêneo



# Resultados

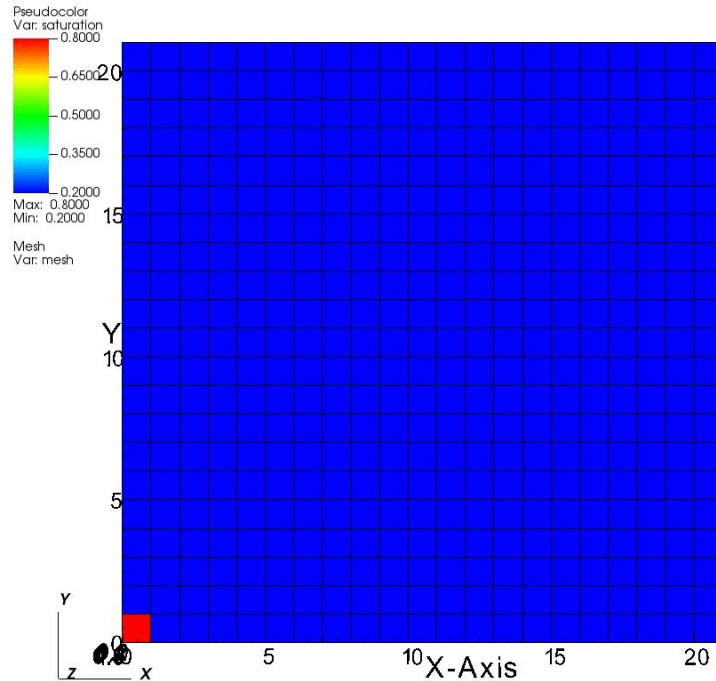
## Problema 3 - Escoamento bidimensional em meio heterogêneo



# Resultados

## Problema 3 - Escoamento bidimensional em meio heterogêneo

DB: \_p3\_0.vtk  
Cycle: 0 Time:0



Campo de saturação. CFL = 4.

# Conclusões

- No Problema 1, é possível notar a diferença do gradiente de pressão nas regiões com diferentes campos de permeabilidade, como era de se esperar.
- Nos problemas 2 e 3 nota-se que a quantidade de iterações com  $CFL = 4$  é maior que com o  $CFL = 1$ . Isso acontece devido a distância no tempo entre as soluções: quanto mais distante, mais iterações são necessárias para atingir a convergência.
- No gráfico da razão água-óleo do Problema 2, observa-se que as soluções estão próximas, diferentemente do Problema 3, onde a curva com  $CFL = 4$  atrasou o *water cut*, gerando um cenário otimista em relação à simulação com  $CFL = 1$ .

# Referências

CONTRERAS, F. R. L. Um Método de Volumes Finitos Centrado na Célula para a Simulação de Escoamentos Bifásicos em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. Dissertação (Mestrado). 2012.

CAVALCANTE, T. M. A finite volume scheme coupled with a hybrid-grid method for the 2-D simulation of two-phase flows in naturally fractured reservoirs. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. Dissertação (Mestrado). 2019.

MARTIN F. Automatic Differentiation for Matlab  
(<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/15235-automatic-differentiation-for-matlab>). Acessado em 8 de Maio de 2023.

Obrigado!