UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

GABRIEL MARTINS
JOÃO PAULO RODRIGUES DE ANDRADE

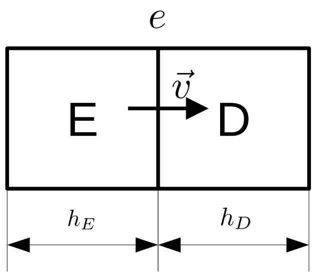
TRABALHO DE DIFERENÇAS FINITAS.

RECIFE
2023

Sumário

Prova da média harmônica da permeabilidade

Dados dois volumes (E e D) adjacentes da face e, com permeabilidades K_E e K_D temos para a equação da velocidade:



$$\vec{v} = -\frac{K_E}{\mu}\frac{(p_e - p_E)}{\frac{h_E}{2}} \qquad \text{(Equação 1)}$$

$$\vec{v} = -\frac{K_D}{\mu}\frac{(p_D - p_e)}{\frac{h_D}{2}}. \qquad \text{(Equation 2)}$$

Igualando as equações 1 e 2 temos:

$$\frac{K_E}{h_E}(p_e - p_E) = \frac{K_D}{h_D}(p_D - p_e). \qquad \text{(Equation 3)}$$

Isolando o termo p_e, chega-se à:

$$p_e = \frac{h_E K_D p_D + h_D K_E p_E}{h_E K_D + h_D K_E}. \qquad \text{(Equation 4)}$$

Substituindo a equação 4 na equação 1:

$$\vec{v} = -\frac{2K_E}{\mu h_E}\left[\frac{h_E K_D p_D + h_D K_E p_E}{h_E K_D + h_D K_E} - p_E\right]. \qquad \text{(Equation 5)}$$

Após algumas manipulações, a equação 5 pode ser escrita como

$$\vec{v} = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{1}{\frac{h_D}{K_D} + \frac{h_E}{K_E}}\right](p_D - p_E). \qquad \text{(Equation 6)}$$

Da mesma forma que as equações 1 e 2, a velocidade pode ser escrita como:

$$\vec{v} = -\frac{K_e}{\mu}\frac{(p_D - p_E)}{\frac{h_D + h_E}{2}}. \qquad \text{(Equation 7)}$$

Igualando as equações 6 e 7 temos:

$$\frac{K_e}{h_D + h_E} = \frac{1}{\frac{h_D}{K_D} + \frac{h_E}{K_E}}, \qquad \text{(Equation 8)}$$

o que leva à

$$K_e = \frac{h_D + h_E}{\dfrac{h_D}{K_D} + \dfrac{h_E}{K_E}}. \qquad \text{(Equation 9)}$$

Fazendo $h_D = h_E = h$, temos:

$$K_e = \frac{2K_D K_E}{K_D + K_E}. \qquad \text{(Equation 10)}$$

Quando $K_D = K_E = K$, a equação 10 se torna

$$K_e = K \qquad \text{(Equação 11)}$$

Definição da transmissibilidade da face para escoamento monofásico

Para chegarmos ao valor da transmissibilidade na face, se faz necessário aplicar a equação de conservação da massa, dada por (desprezando os efeitos de compressibilidade e gravidade):

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = q \qquad \text{(Equation 12)}$$

onde q é o termo fonte. Tomando como exemplo o escoamento unidimensional, a equação 12 tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = q. \qquad \text{(Equação 13)}$$

Aplicando o método das diferenças finitas para discretizar a equação 13, chega-se à:

$$-\frac{1}{\mu h_i}\left[K_{i+1/2}\left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1/2}}\right) - K_{i-1/2}\left(\frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1/2}}\right)\right] = q_i \qquad \text{(Equação 14)}$$

onde

$$\begin{cases} h_{i+1/2} = \dfrac{h_i + h_{i+1}}{2} \\ h_{i-1/2} = \dfrac{h_i + h_{i-1}}{2} \end{cases}. \qquad \text{(Equação 15)}$$

Os termos da equação 14, que estão dentro dos colchetes, tem a forma da equação 7. Por exemplo, no primeiro termo, $K_{i+1/2}$ é equivalente a K_e, $h_{i+1/2}$ é equivalente a $\dfrac{h_D + h_E}{2}$ e $p_{i+1} - p_i$ é equivalente a $p_D - p_E$. Essa comparação pode ser feita também para o segundo termo dentro dos colchetes. Podemos então generalizar a equação 14 para um determinado elemento E em todas as direções cartesianas da seguinte forma:

$$\sum_{e \in E} T_e \left(p_E - p_D\right) = q_E \qquad \text{(Equação 16)}$$

onde T_e é definida como a transmissibilidade da face e, dada por:

$$T_e = \frac{K_e}{\mu h_E \left(\dfrac{h_D + h_E}{2}\right)} \qquad \text{(Equação 17)}$$

onde K_e é dada pela equação 9 e

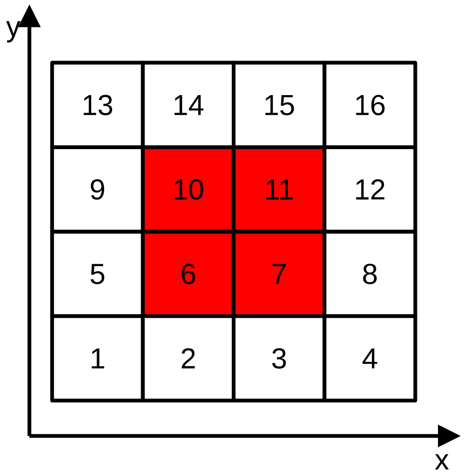
$$\begin{cases} h_D = \dfrac{V_D}{A_e} \\ h_E = \dfrac{V_E}{A_e} \end{cases}, \qquad \text{(Equação 18)}$$

onde V_D e V_E são os volumes dos elementos D e E respectivamente e A_e é a área da face e. Se $h_D = h_E = h$, a equação 17 se torna

$$T_e = \frac{K_e}{\mu h^2}. \qquad \text{(Equação 19)}$$

Problema bidimensional (Escoamento em regime permanente)

- Esquema de 1/4 de Cinco Poços.
- Reservatório quadrado de Largura L =100,
- P_bloco_canto_inferior_esquerdo = 500,
- P_bloco_canto_superior_direito = 100.
- Use uma malha quadrilateral com 16 blocos de comprimento h=25.
- O reservatório tem uma barreira no centro do domínio que é representada, por 4 blocos centrais. Para esses use uma permeabilidade de Kb= 1.
- Para o restante dos blocos da malha use Ka=10000.
- Viscosidade unitária



$K_6 = K_7 = K_{10} = K_{11} = Kb$

p_1=500

p_{16}=100

Quando as permeabilidades na interface entre os elementos forem diferentes, a permeabilidade na face é dada por (eq 10) $K_e = \frac{2KaKb}{Ka+Kb} = \frac{2*1*10000}{1+10000} = 2$. Para as transmissibilidades temos os seguintes valores (eq 19):

- para $K_e = 2$: $T_e = \frac{2}{25^2} = 0.0032 = T2$;
- para $K_e = 1$: $T_e = \frac{1}{25^2} = 0.0016 = T1$;
- para $K_e = 10000$: $T_e = \frac{10000}{25^2} = 16 = T3$.

Equações dos blocos

1:
$p_1 = 500$

2:
$T3(p_2 - p_1) + T2(p_2 - p_6) + T3(p_2 - p_3) = 0$
$p_2(2T3 + T2) - T3p_1 - T2p_6 - T3p_3 = 0$

3:
$T3(p_3 - p_2) + T2(p_3 - p_7) + T3(p_3 - p_4) = 0$
$p_3(2T3 + T2) - T3p_2 - T2p_7 - T3p_4 = 0$

4:
$T3(p_4 - p_3) + T3(p_4 - p_8) = 0$
$p_4(2T3) - T3p_3 - T3p_8 = 0$

5:
$T3(p_5 - p_1) + T2(p_5 - p_6) + T3(p_5 - p_9) = 0$
$p_5(2T3 + T2) - T3p_1 - T2p_6 - T3p_9 = 0$

6:
$T2(p_6 - p_2) + T2(p_6 - p_5) + T1(p_6 - p_7) + T1(p_6 - p_{10}) = 0$
$p_6(2T2 + 2T1) - T2p_2 - T2p_5 - T1p_7 - T1p_{10} = 0$

7:
$T2(p_7 - p_3) + T2(p_7 - p_8) + T1(p_7 - p_6) + T1(p_7 - p_{11}) = 0$
$p_7(2T2 + 2T1) - T2p_3 - T2p_8 - T1p_6 - T1p_{11} = 0$

8:
$p_8(2T3 + T2) - T3p_4 - T2p_7 - T3p_{12} = 0$

9:
$p_9(2T3 + T2) - T3p_5 - T2p_{10} - T3p_{13} = 0$

10:

$$p_{10}(2T2 + 2T1) - T2p_9 - T2p_{14} - T1p_6 - T1p_{11} = 0$$

11:

$$p_{11}(2T2 + 2T1) - T2p_{12} - T2p_{15} - T1p_7 - T1p_{10} = 0$$

12:

$$p_{12}(2T3 + T2) - T3p_8 - T2p_{11} - T3p_{16} = 0$$

13:

$$p_{13}(2T3) - T3p_9 - T3p_{14} = 0$$

14:

$$p_{14}(2T3 + T2) - T3p_{13} - T2p_{10} - T3p_{15} = 0$$

15:

$$p_{15}(2T3 + T2) - T3p_{14} - T2p_{11} - T3p_{16} = 0$$

16:

$$p_{16} = 100$$

O sistema de equações obtido é $Tp = q$, onde a matriz T é

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	-16	32.0032	-16			-0.0032										
3		-16	32.0032	-16			-0.0032									
4			-16	32				-16								
5	-16				32.0032	-0.0032			-16							
6		-0.0032			-0.0032	0.0096	-0.0016			-0.0016						
7			-0.0032			-0.0016	0.0096	-0.0032			-0.0016					
8				-16			-0.0032	32.0032				-16				
9					-16				32.0032	-0.0032			-16			
10						-0.0016			-0.0032	0.0096	-0.0016			-0.0032		
11							-0.0016			-0.0016	0.0096	-0.0032			-0.0032	
12								-16			-0.0032	32.0032				-16
13									-16				32	-16		
14										-0.0032			-16	32.0032	-16	
15											-0.0032			-16	32.0032	-16
16																1

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \end{bmatrix}^T$$

e

$$q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}^T$$

O vetor de pressões obtido é:

$$p = \begin{bmatrix} 500 & 433.32 & 366.65 & 299.99 & 433.19 & 388.82 & 299.98 & 233.34 & 366.55 & 299.93 & 211.09 & 166.67 & 299.92 & 233.29 & 166.65 & 100 \end{bmatrix}^T$$