



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

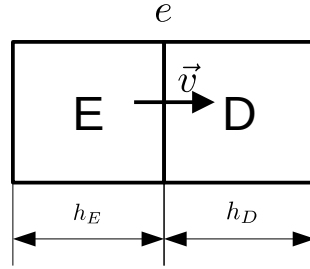
GABRIEL MARTINS
JOÃO PAULO RODRIGUES DE ANDRADE

TRABALHO DE DIFERENÇAS FINITAS.

RECIFE
2023

Prova da média harmônica da permeabilidade

Dados dois volumes (E e D) adjacentes da face e , com permeabilidades K_E e K_D temos para a equação da velocidade:



$$\vec{v} = -\frac{K_E}{\mu} \frac{(p_e - p_E)}{\frac{h_E}{2}} \quad (\text{Equação 1})$$

$$\vec{v} = -\frac{K_D}{\mu} \frac{(p_D - p_e)}{\frac{h_D}{2}}. \quad (\text{Equação 2})$$

Igualando as equações 1 e 2 temos:

$$\frac{K_E}{h_E} (p_e - p_E) = \frac{K_D}{h_D} (p_D - p_e). \quad (\text{Equação 3})$$

Isolando o termo p_e , chega-se à:

$$p_e = \frac{h_E K_D p_D + h_D K_E p_E}{h_E K_D + h_D K_E}. \quad (\text{Equação 4})$$

Substituindo a equação 4 na equação 1:

$$\vec{v} = -\frac{2K_E}{\mu h_E} \left[\frac{h_E K_D p_D + h_D K_E p_E}{h_E K_D + h_D K_E} - p_E \right]. \quad (\text{Equação 5})$$

Após algumas manipulações, a equação 5 pode ser escrita como

$$\vec{v} = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{1}{\frac{h_D}{K_D} + \frac{h_E}{K_E}} \right] (p_D - p_E). \quad (\text{Equação 6})$$

Da mesma forma que as equações 1 e 2, a velocidade pode ser escrita como:

$$\vec{v} = -\frac{K_e}{\mu} \frac{(p_D - p_E)}{\frac{h_D + h_E}{2}}. \quad (\text{Equação 7})$$

Igualando as equações 6 e 7 temos:

$$\frac{K_e}{h_D + h_E} = \frac{1}{\frac{h_D}{K_D} + \frac{h_E}{K_E}}, \quad (\text{Equação 8})$$

o que leva à

$$K_e = \frac{h_D + h_E}{\frac{h_D}{K_D} + \frac{h_E}{K_E}}. \quad (\text{Equação 9})$$

Fazendo $h_D = h_E = h$, temos:

$$K_e = \frac{2K_D K_E}{K_D + K_E}. \quad (\text{Equação 10})$$

Quando $K_D = K_E = K$, a equação 10 se torna

$$K_e = K. \quad (\text{Equação 11})$$

Definição da transmissibilidade da face para escoamento monofásico

Para chegarmos ao valor da transmissibilidade na face, se faz necessário aplicar a equação de conservação da massa, dada por (desprezando os efeitos de compressibilidade e gravidade):

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = q, \quad (\text{Equação 12})$$

onde q é o termo fonte. Tomando como exemplo o escoamento unidimensional, a equação 12 tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = q. \quad (\text{Equação 13})$$

Aplicando o método das diferenças finitas para discretizar a equação 13, chega-se à:

$$-\frac{1}{\mu h_i} \left[K_{i+1/2} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1/2}} \right) - K_{i-1/2} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right) \right] = q_i, \quad (\text{Equação 14})$$

onde

$$\begin{cases} h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \\ h_{i-1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2} \end{cases} \quad (\text{Equação 15})$$

Os termos da equação 14, que estão dentro dos colchetes, tem a forma da equação 7. Por exemplo, no primeiro termo, $K_{i+1/2}$ é equivalente a K_e , $h_{i+1/2}$ é equivalente a $\frac{h_D + h_E}{2}$ e $p_{i+1} - p_i$ é equivalente a $p_D - p_E$. Essa comparação pode ser feita também para o segundo termo dentro dos colchetes. Podemos então generalizar a equação 14 para um determinado elemento E em todas as direções cartesianas da seguinte forma:

$$\sum_{e \in E} T_e (p_E - p_D) = q_E, \quad (\text{Equação 16})$$

onde T_e é definida como a transmissibilidade da face e , dada por:

$$T_e = \frac{K_e}{\mu h_E \left(\frac{h_D + h_E}{2} \right)}, \quad (\text{Equação 17})$$

onde K_e é dada pela equação 9 e

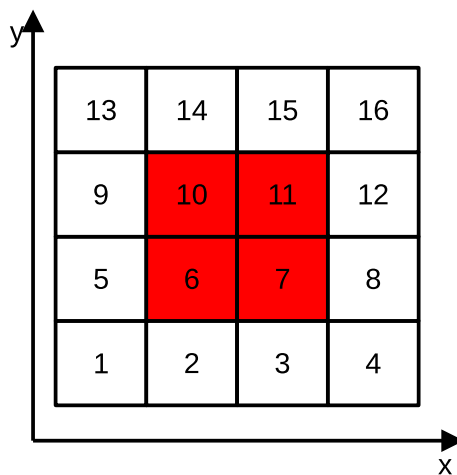
$$\begin{cases} h_D = \frac{V_D}{A_e} \\ h_E = \frac{V_E}{A_e} \end{cases}, \quad (\text{Equação 18})$$

onde V_D e V_E são os volumes dos elementos D e E respectivamente e A_e é a área da face e . Se $h_D = h_E = h$, a equação 17 se torna

$$T_e = \frac{K_e}{\mu h^2}. \quad (\text{Equação 19})$$

Problema bidimensional (Escoamento em regime permanente)

- Esquema de 1/4 de Cinco Poços.
- Reservatório quadrado de Largura $L=100$,
- $P_{\text{bloco_canto_inferior_esquerdo}} = 500$,
- $P_{\text{bloco_canto_superior_direito}} = 100$.
- Use uma malha quadrilateral com 16 blocos de comprimento $h=25$.
- O reservatório tem uma barreira no centro do domínio que é representada, por 4 blocos centrais. Para esses use uma permeabilidade de $K_b = 1$.
- Para o restante dos blocos da malha use $K_a = 10000$.
- Viscosidade unitária



$$K_6 = K_7 = K_{10} = K_{11} = K_b$$

$$p_1 = 500$$

$$p_{16} = 100$$

Quando as permeabilidades dos elementos adjacentes forem diferentes, a permeabilidade na face é dada por $K_e = \frac{2K_a K_b}{K_a + K_b} = \frac{2(1)(10000)}{1 + 10000} \simeq 2$. Para as transmissibilidades temos os seguintes valores:

- para $K_e = 2$: $T_e = \frac{2}{25^2} = 0.0032 = A$;
- para $K_e = 1$: $T_e = \frac{1}{25^2} = 0.0016 = B$;
- para $K_e = 10000$: $T_e = \frac{10000}{25^2} = 16 = C$.

Equações dos blocos

1:

$$p_1 = 500$$

2:

$$C(p_2 - p_1) + A(p_2 - p_6) + C(p_2 - p_3) = 0$$

$$p_2(2C + A) - Cp_1 - Ap_6 - Cp_3 = 0$$

3:

$$C(p_3 - p_2) + A(p_3 - p_7) + C(p_3 - p_4) = 0$$

$$p_3(2C + A) - Cp_2 - Ap_7 - Cp_4 = 0$$

4:

$$C(p_4 - p_3) + C(p_4 - p_8) = 0$$

$$p_4(2C) - Cp_3 - Cp_8 = 0$$

5:

$$C(p_5 - p_1) + A(p_5 - p_6) + C(p_5 - p_9) = 0$$

$$p_5(2C + A) - Cp_1 - Ap_6 - Cp_9 = 0$$

6:

$$A(p_6 - p_2) + A(p_6 - p_5) + B(p_6 - p_7) + B(p_6 - p_{10}) = 0$$

$$p_6(2A + 2B) - Ap_2 - Ap_5 - Bp_7 - Bp_{10} = 0$$

7:

$$A(p_7 - p_3) + A(p_7 - p_8) + B(p_7 - p_6) + B(p_7 - p_{11}) = 0$$

$$p_7(2A + 2B) - Ap_3 - Ap_8 - Bp_6 - Bp_{11} = 0$$

8:

$$p_8(2C + A) - Cp_4 - Ap_7 - Cp_{12} = 0$$

9:

$$p_9(2C + A) - Cp_5 - Ap_{10} - Cp_{13} = 0$$

10:

$$p_{10}(2A + 2B) - Ap_9 - Ap_{14} - Bp_6 - Bp_{11} = 0$$

11:

$$p_{11}(2A + 2B) - Ap_{12} - Ap_{15} - Bp_7 - Bp_{10} = 0$$

12:

$$p_{12}(2C + A) - Cp_8 - Ap_{11} - Cp_{16} = 0$$

13:

$$p_{13}(2C) - Cp_9 - Cp_{14} = 0$$

14:

$$p_{14}(2C + A) - Cp_{13} - Ap_{10} - Cp_{15} = 0$$

15:

$$p_{15}(2C + A) - Cp_{14} - Ap_{11} - Cp_{16} = 0$$

16:

$$p_{16} = 100$$

O sistema de equações obtido é $Tp = q$, onde a matriz T é

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	-16	32.0032	-16			-0.0032										
3		-16	32.0032	-16			-0.0032									
4			-16	32				-16								
5	-16				32.0032	-0.0032			-16							
6		-0.0032			-0.0032	0.0096	-0.0016			-0.0016						
7			-0.0032			-0.0016	0.0096	-0.0032			-0.0016					
8				-16			-0.0032	32.0032				-16				
9					-16				32.0032	-0.0032			-16			
10						-0.0016			-0.0032	0.0096	-0.0016			-0.0032		
11							-0.0016			-0.0016	0.0096	-0.0032			-0.0032	
12								-16			-0.0032	32.0032				-16
13									-16				32	-16		
14										-0.0032			-16	32.0032	-16	
15											-0.0032			-16	32.0032	-16
16																1

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \end{bmatrix}^T$$

e

$$q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}^T$$

O vetor de pressões obtido é:

$$p = \begin{bmatrix} 500 & 433.32 & 366.65 & 299.99 & 433.19 & 388.82 & 299.98 & 233.34 & 366.55 & 299.93 & 211.09 & 166.67 & 299.92 & 233.29 & 166.65 & 100 \end{bmatrix}^T$$

