



國立中山大學通訊工程研究所

碩士論文

以時域有限差分法分析光子晶體光纖

**Finite-Different Time-Domain Method for Modeling the
Photonic Crystal Fibers**

研究生：楊富超 撰

指導教授：洪子聖 吳宗霖 博士

中華民國 九十五 年 六月

學年度：95
學期：2
校院：國立中山大學
系所：通訊工程研究所
論文名稱(中)：以時域有限差分法分析光子晶體光纖
論文名稱(英)：Finite-Different Time-Domain Method for Modeling the Photonic Crystal Fibers
學位類別：碩士
語文別：Chi
學號：M933070017
提要開放使用：是
頁數：59
研究生(中)姓：楊
研究生(中)名：富超
研究生(英)姓：Yang
研究生(英)名：Fu-Chao
指導教授(中)姓名：洪子聖、吳宗霖
指導教授(英)姓名：Tzyy-Sheng Horng、Tzong-Lin Wu
關鍵字(中)：時域有限差分法
關鍵字(中)：光子晶體光纖
關鍵字(中)：光子能隙光纖
關鍵字(中)：顏色色散
關鍵字(中)：光子能隙結構
關鍵字(英)：Finite-Difference Time-Domain Method
關鍵字(英)：Photonic Crystal Fibers
關鍵字(英)：Photonic Band-gap Fibers
關鍵字(英)：Chromatic dispersion
關鍵字(英)：Photonic Band-gap Structure

中文提要：

光子晶體光纖分為兩種不同種類。第一種為介質導波(index-guiding)光子晶體光纖，藉由二氧化矽的核心區域和由空氣孔洞組成的包覆層所產生的全反射機制導光。另外一種是藉由完美週期性結構所存在的能隙效應使光傳導到折射係數的核心區域。

本論文中使用由時域有限差分法衍生的 compact 2D-FDTD 來分析介質導波光子晶體光纖和光子能隙光纖。我們研究介質導波光子晶體光纖基模模態傳播的特性、有效折射係數、模場直徑和顏色色散。藉由調整介質導波光子晶體光纖各

圈的空氣孔洞直徑和整體空氣孔洞間距，我們可以在一個很寬的波長範圍同時控制色散和色散斜率。我們也同時研究光子能隙光纖的基模模態傳播特性和能隙效應。

Abstract :

Photonic crystal fibers (PCFs) are divided into two different kinds of fibers. The first one, index-guiding PCF, guides light by total internal reflection between a solid core and a cladding region with multiple air-holes. On the other hand, the second one uses a perfectly periodic structure exhibiting a photonic band-gap (PBG) effect at the operating wavelength to guide light in a low index core-region.

A compact 2D-FDTD method based on finite-difference time-domain method is formulated and is effectively applied to analysis PCFs and PBGFs. We study the propagation features of fundamental mode and the fundamental characteristics such as effective index, modal-field diameter and chromatic dispersion in index-guiding PCFs. By optimizing the air-hole diameters and the hole-to-hole spacing of index-guiding PCFs, both the dispersion and the dispersion slope can be controlled in a wide wavelength range. We also investigate the propagation features of fundamental mode and band-gap effect of PBGFs.

論文目錄

第一章	序論.....	1
1.1	研究背景與目的.....	1
1.2	論文大綱.....	3
第二章	時域有限差分法.....	4
2.1	3D-FDTD 演算法.....	4
2.2	Compact 2D-FDTD 演算法.....	9
2.2.1	Compact 2D-FDTD 理論推演.....	10
2.2.2	Compact 2D-FDTD 穩定準則.....	13
2.2.3	Compact 2D-FDTD 吸收邊界.....	14
2.2.4	Compact 2D-FDTD 數值程序.....	17
2.3	Compact 2D-FDTD 計算二維光子晶體能隙.....	20
第三章	光子晶體光纖的模擬與特性分析.....	24
3.1	概論.....	24
3.2	傳播模態分析.....	24
3.2.1	基模模態場型分佈和極化分析.....	25
3.2.2	有效折射係數與波長關係.....	28
3.2.3	正規化頻率.....	30
3.2.4	模場直徑.....	34
3.2.5	接合損耗.....	36
3.3	顏色色散分析.....	39
3.3.1	材料色散.....	40
3.3.2	波導色散.....	41
3.3.3	顏色色散.....	44
3.3.4	顏色色散的設計.....	47
第四章	光子能隙光纖的模擬與特性分析.....	50
4.1	概論.....	50
4.2	二維光子晶體能隙.....	51
4.3	傳導模態分析.....	54
第五章	結論.....	56
	參考文獻.....	57

圖表目錄

圖 1.1	內全反射光子晶體光纖.....	2
圖 1.2	光子能隙光纖.....	2
圖 2.1	FDTD 單位空間網格的電磁場空間配置.....	6
圖 2.2	FDTD 電磁場演算順序圖.....	7
圖 2.3	Z 軸方向傳播的波導結構.....	10
圖 2.4	Compact 2D-FDTD 單位網格的電磁場空間配置.....	11
圖 2.5	三維 FDTD 網格 PML 結構.....	15
圖 2.6	Compact 2D-FDTD 程式流程圖.....	19
圖 2.7	三角形排列的二維光子晶體橫截面.....	20
圖 2.8	互易三角形排列的二維光子晶體橫截面.....	21
圖 2.9	三角形排列的二維光子晶體單位晶格.....	21
圖 2.10	三角形排列的二維光子晶體纖布里淵區(Brillouin zone).....	22
圖 3.1	光子晶體光纖橫截面在 compact 2D-FDTD 程式示意圖.....	24
圖 3.2	基模模態橫向電場的向量與純量分布圖	
	(a) HE_{11}^x 模態向量分布圖.....	25
	(b) HE_{11}^y 模態向量分布圖.....	26
	(c) HE_{11} 模態純量分布圖.....	26
圖 3.3	基模模態橫向電場純量分布圖(a)短波長 (b)長波長.....	27
圖 3.4	有效折射率對波長關係圖.....	28
圖 3.5	階段型折射率光纖示意圖.....	30
圖 3.6	包覆層的有效折射率對波長關係圖.....	31
圖 3.7	正規化頻率對波長關係圖.....	32
圖 3.8	不同空氣孔洞比的光子晶體光纖其模態操作區域.....	33
圖 3.9	光纖中的高斯分佈與模場直徑.....	34
圖 3.10	模場半徑對波長關係圖.....	35
圖 3.11	光纖接合的誤校準 (a)軸向位移 (b)軸心角傾斜 (c)端面分離...	36
圖 3.12	接續損耗和光子晶體光纖空氣孔洞間距關係圖.....	37
圖 3.13	材料色散對波長關係圖.....	40
圖 3.14	d/Λ 相同, Λ 不同的波導色散轉換示意圖.....	41
圖 3.15	d/Λ 相同, Λ 不同的波導色散對波長關係圖.....	42
圖 3.16	Λ 相同, d/Λ 不同的波導色散對波長關係圖.....	43
圖 3.17	光子晶體光纖顏色色散對波長的關係圖.....	44
圖 3.18	不同空氣孔洞大小的光子晶體光纖顏色色散對波長的關係圖	
	(a) $\Lambda=1.0\mu\text{m}$ (b) $\Lambda=2.0\mu\text{m}$	45
	(c) $\Lambda=2.5\mu\text{m}$ (d) $\Lambda=3.0\mu\text{m}$	46

圖 3.19	光子晶體光纖各圈對應的折射率數據示意圖	
	(a) $d_1 > d_2 = d_3 = \dots = d_n$ (b) $d_2 < d_1 = d_3 = \dots = d_n$	47
圖 3.20	平坦零色散光子晶體光纖結構圖.....	48
圖 3.21	平坦零色散光子晶體光纖的顏色色散對波長關係圖	
	(a)波長範圍： $0.5 \mu\text{m} \sim 2.0 \mu\text{m}$	48
	(b)波長範圍： $1.4 \mu\text{m} \sim 1.7 \mu\text{m}$	49
圖 4.1	自然界的光子能隙(a)蝴蝶翅膀(b)蝴蝶翅膀的顯微照片(c)蛋白石..	50
圖 4.2	三角形排列的二維光子晶體橫截面.....	51
圖 4.3	三角形排列的二維光子晶體 in-plane 能隙結構	
	(a) TE_z 模態 (b) TM_z 模態.....	52
圖 4.4	三角形排列的二維光子晶體 out-of-plane 能隙結構.....	53
圖 4.5	光子能隙光纖橫截面在 compact 2D-FDTD 程式示意圖.....	54
圖 4.6	模式色散對正規化傳播常數的關係圖.....	54
圖 4.7	光子能隙光纖的有效折射係數對正規化波長的關係圖.....	55
表 3.1	不同傳播常數所對的波長和有效折射率.....	29
	(a) $d/\Lambda = 0.7$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率	
	(b) $d/\Lambda = 0.6$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率	
	(c) $d/\Lambda = 0.5$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率	
表 3.2	光子晶體光纖空氣孔洞間距和 SMF-28 的接合損耗關係.....	38

第一章 序論

1.1 研究目的與背景

光子晶體光纖(Photonic crystal fibers, PCFs)亦稱為孔洞光纖(Holey fibers)，或是微結構光纖(Microstructured fibers)，自從 J.C.Knight 在 1996 年發表光子晶體光纖的文章[1]，相較於標準步階折射係數光纖(standard step-index fibers)，包括模態截止特性、優越的寬頻單模特性(single mode)[2]、單模時的大有效核心面積 (large core effective area) [3]、高雙折射效應(highly birefringence)[4],[5]、異常色散特性(anomalous dispersion)[6]，且由於其優越的寬頻單模特性(single mode)與有效核心面積的高度靈活性使得光子晶體光纖也被應用於光纖雷射(fiber laser)的設計，至今光子晶體光纖仍是眾多研究者的方向。

光子晶體光纖的結構是在包覆層(Cladding)中製造出細小空氣孔洞結構軸向均勻延伸至整條光纖，在橫切面為週期性的二維光晶格結構，其結構週期長度需要光波長長度等級相若，由於包覆層的光晶格結構使得分佈於包覆層區域的光場於不同波長遭遇複雜的折射係數分佈，並且在光晶格結構中產生複雜的折射效應。

光子晶體光纖依據導光機制分成兩大類，第一類是介質導波(index-guiding)光子晶體光纖，如圖 1.1，我們一般通稱的光子晶體光纖指的就是介質導波光子晶體光纖，在光纖中央不置入空氣柱，因此相對於光晶格結構而言此處形成一個結構缺陷，由於相較於其他區域而言，這個缺陷的折射係數大於其他區域的有效折射係數，所以光場可以藉由內全反射(total internal reflection)的機制導光在這個缺陷中，缺陷的位置形成光纖的核心部份，而核心的外圍結構則形成光纖的包覆層，這樣的導波機制類似傳統光纖；這二類是光子能隙光纖(Photonic band-gap fibers, PBGFs)[7]，如圖 1.2，保留中央的空氣孔洞，但是改變其大小或形狀以形成一個結構缺陷，不同於內全反射光子晶體光纖，其核心部份存在一個相較於

包覆層而言折射係數較低的區域，一般而言光場並沒有辦法導光在低折射係數區域，由於包覆層的完美週期性光晶格結構產生布拉格繞射效應(Bragg diffraction)而存在某些光頻帶能隙，在這些光頻帶能隙中不存在平行於橫切面方向的傳播常數，但是在這些光頻帶能隙中卻存在有不為零的縱向傳播常數，所以當光纖核心部份置入一個適當的缺陷(不同大小或形狀的空氣孔洞)使光頻帶能隙存在傳播模態光場即可傳播於光纖核心之中，在分析光子能隙光纖的傳播模態之前，必須先計算出光頻帶能隙，光頻帶能隙與二維光晶結構有關。

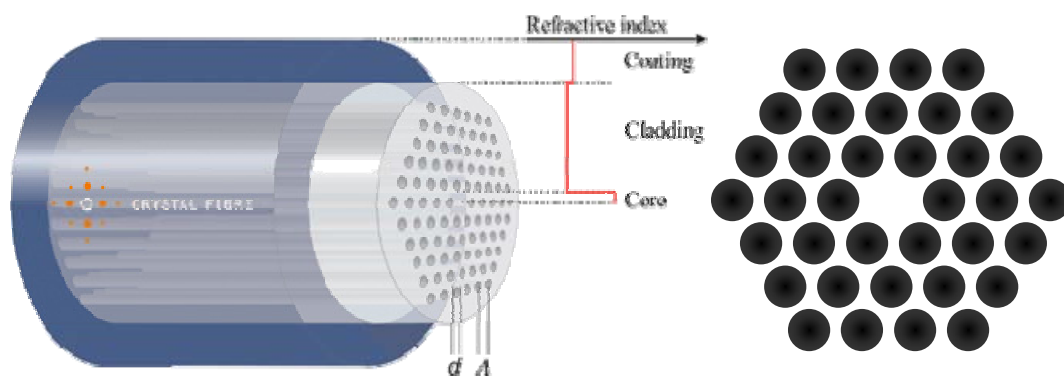


圖 1.1 介質導波光子晶體光纖

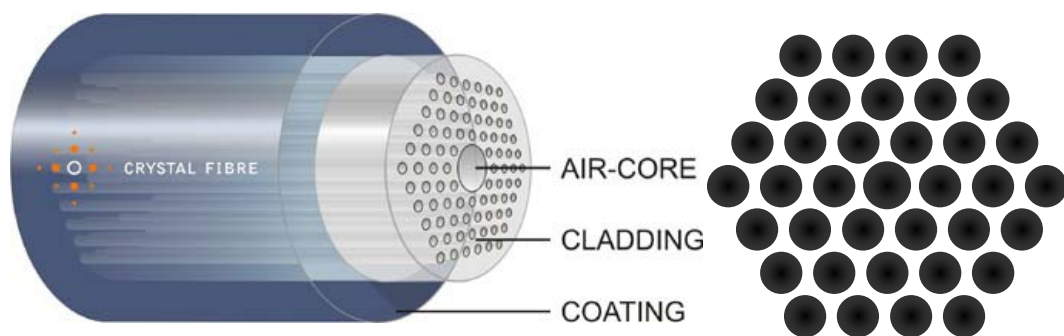


圖 1.2 光子能隙光纖

在本論文中我們建立數值分析的方法，用來模擬光子晶體光纖和光子能隙光纖，針對不同的結構，分析其傳播特性並討論，進一步的討論色散的部份，設計不同的結構改善光子晶體光纖的色散。

1.2 論文大綱

本論文第一章為緒論，其餘內容如下所述。

第二章由時域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain, FDTD)[8]基本的演算法出發，推導出模擬波導結構的 Compact 2D-FDTD，包括離散後的公式、穩定準則和吸收邊界，同時也加入週期性邊界條件，並配合單位晶格來模擬無限延伸的光子晶體所產生的能隙效應。

第三章模擬光子晶體光纖並分析其特性，包括有效折射率、基模場型分佈和極化分析、正規化頻率、模場直徑、接合損耗和顏色色散特性，並設計平坦的零色散光子晶體光纖。

第四章模擬光子能隙光纖並分析其特性，包括二維光子晶體能隙、模態色散、有效折射率和基模場型分佈。

第五章對本論文作一個總結。

第二章 時域有限差分法

2.1 3D-FDTD 演算法

時域有限差分法(Finite-Different Time-Domain method, FDTD)[8],[17]主要是在一個有限體積之計算空間中，利用二階中央差分法離散化的 Maxwell 旋度方程式，再加上網格的配置，在時域上模擬電磁波在空間之傳播。在一無源(source free)介質為各向同性均勻(uniform, isotropic and homogeneous)之下簡單介質(simple medium)的空間中，介質的本構參數(constitutive parameter)不隨時間改變，或許包含能將電磁場能量轉換成熱的磁損或電損材料，考慮磁場損耗機制我們定義一等效磁流密度 \vec{M} ：

$$\vec{M} = \rho^* \vec{H} \quad (2.1)$$

以及考慮電場損耗機制我們定義一等效電流密度 \vec{J} ：

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.2)$$

其中 ρ' 為等效的磁阻係數(equivalent magnetic resistivity in ohms per meter)， σ 為導電率(electric conductivity in siemens per meter)。則 Maxwell equation 旋度方程式可寫成：

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \rho^* \vec{H} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (2.4)$$

其中 ε 為介電常數(permittivity)， μ 為導磁係數(permeability)。

本文係採用卡氏座標系作為空間位置之標示，上述兩個旋度方程式產生下列六項耦合純量方程，電場及磁場在 X 軸，Y 軸，Z 軸各有三個量，則 Maxwell's equations 重寫成：

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho^* H_x \right) \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho^* H_y \right) \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho^* H_z \right) \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.6c)$$

這六個耦合偏微分方程構成了 FDTD 數值演算法的基本。根據 Yee[1]的標示法，則空間上任一點的座標位置表示為：

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

而任一空間與空間之函數則表示為：

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$

其中 i, j, k, n 為整數， Δt 為時間分隔，則 $n\Delta t$ 表示離散時間。而 Δx ， Δy ， Δz 分別為 X 軸，Y 軸，Z 軸的空間分隔增量， $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ 表示計算空間中離散之座標位置，而在三度空間中，一單位空間網格為一個 $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ 的立方體，而整個計算空間則是由這些單位空間網格所堆積組作的矩形立方體。

Maxwell's equation 在離散化時，是分別對時間與空間住進行中央差分趨近：

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - F^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.8)$$

根據(2.7-2.8)，每一空間分隔需插入一個電場及一個磁場，並且相互以半個空間間隔需穿插在計算空間中，以符合(2.5-2.6)之所有空間導數，則電磁場在一個單空間網格中的配置如圖 2.1 所示；每個電場成分被四周的磁場成分所包圍，並且每個磁場成分被四周的電場成分所包圍，其在空間的配置不是隨意的，而是必須符合安培定律(Ampere law)及法拉第定律(Faraday law)。

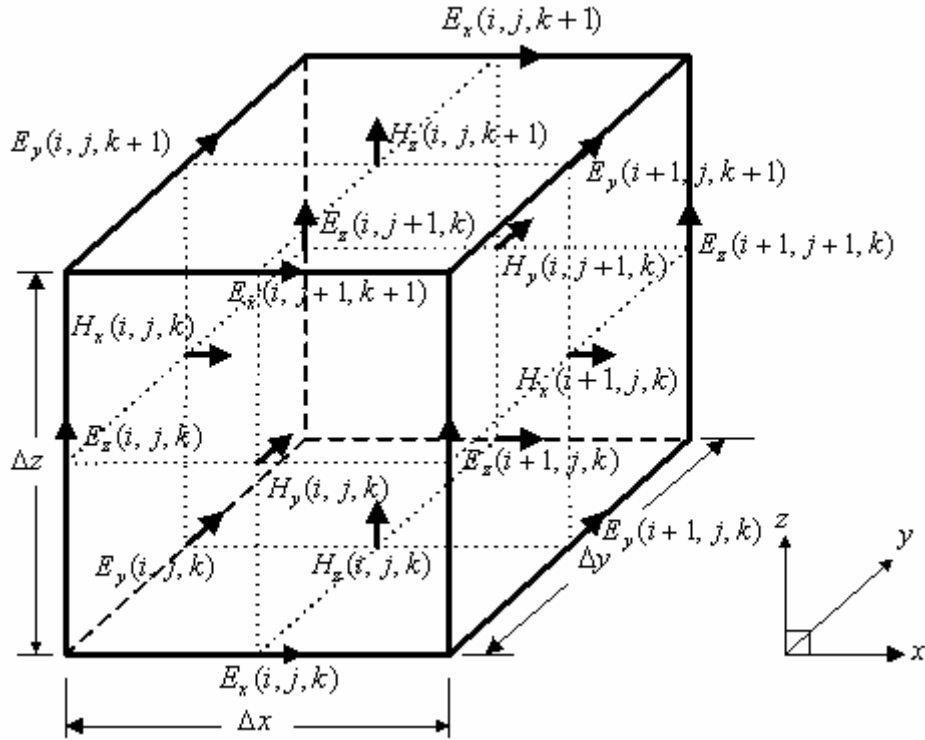


圖 2.1 FDTD 單位空間網格的電磁場空間配置

根據(2.8)，在 $t=0$ 時，令所有的電場和磁場值均為零。在第一個時間分隔中，即 $t=1/2$ 和 $t=1$ 時，採用跳步(leapfrog)計算，交互計算電場和磁場，再循序完成每一個時間分隔中 $t=n+1/2$ 和 $t=n$ 中分別完成磁場和電場的計算，則電場和磁場在離散時間中計算之順序如圖 2.2 所示。

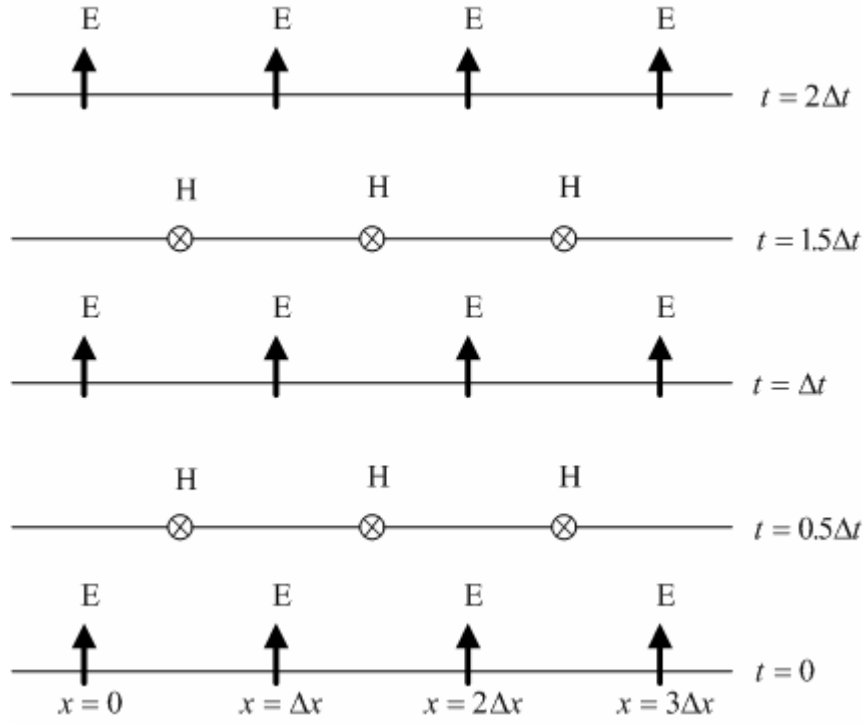


圖 2.2 FDTD 電磁場演算順序圖

經過時間與空間之中央差分趨近後，(2.5-2.6)之 Maxwell's equations 旋度方程式離散化為：

$$\begin{aligned}
 H_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = & \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i,j+1/2,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i,j+1/2,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right] \cdot H_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} \\
 & + \left[\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i,j+1/2,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{E_y \Big|_{i,j+1/2,k+1}^n - E_y \Big|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z}}{-\frac{E_z \Big|_{i,j+1,k+1/2}^n - E_z \Big|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9a}$$

$$\begin{aligned}
H_y \Big|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2} &= \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i-1/2, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i-1/2, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1/2}}} \right] \cdot H_y \Big|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n-1/2} \\
&+ \left[\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2, j+1, k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i-1/2, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1/2}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{E_z \Big|_{i, j+1, k+1/2}^n - E_z \Big|_{i-1, j+1, k+1/2}^n}{\Delta x}}{-\frac{E_x \Big|_{i-1/2, j+1, k+1}^n - E_x \Big|_{i-1/2, j+1, k}^n}{\Delta y}} \right]
\end{aligned} \tag{2.9b}$$

$$\begin{aligned}
H_z \Big|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2} &= \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i-1/2, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1/2, k+1}}}{1 + \frac{\rho_{i-1/2, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1/2, k+1}}} \right] \cdot H_z \Big|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n-1/2} \\
&+ \left[\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2, j+1/2, k+1}}}{1 + \frac{\rho_{i-1/2, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1/2, k+1}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{E_x \Big|_{i-1/2, j+1, k+1}^n - E_x \Big|_{i-1/2, j, k+1}^n}{\Delta y}}{-\frac{E_y \Big|_{i, j+1/2, k+1}^n - E_y \Big|_{i-1, j+1/2, k+1}^n}{\Delta x}} \right]
\end{aligned} \tag{2.9c}$$

$$\begin{aligned}
E_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n+1} &= \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i+1/2, j, k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+1/2, j, k}}}{1 + \frac{\rho_{i+1/2, j, k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+1/2, j, k}}} \right] \cdot E_x \Big|_{i+1/2, j, k}^n \\
&+ \left[\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i+1/2, j, k}}}{1 + \frac{\rho_{i+1/2, j, k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+1/2, j, k}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i+1/2, j-1/2, k}^{n+1/2}}{\Delta y}}{-\frac{H_y \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i+1/2, j, k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z}} \right]
\end{aligned} \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
E_y \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1} = & \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i,j+1/2,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k}}}{1 + \frac{\rho_{i,j+1/2,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k}}} \right] \cdot E_y \Big|_{i,j+1/2,k}^n \\
& + \left[\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k}}}{1 + \frac{\rho_{i,j+1/2,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{H_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_x \Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z}}{-\frac{H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x}} \right]
\end{aligned} \tag{2.10b}$$

$$\begin{aligned}
E_z \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1} = & \left[\frac{1 - \frac{\rho_{i,j,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i,j,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k+1/2}}} \right] \cdot E_z \Big|_{i,j,k+1/2}^n \\
& + \left[\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k+1/2}}}{1 + \frac{\rho_{i,j,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k+1/2}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{H_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}}{-\frac{H_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_x \Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}} \right]
\end{aligned} \tag{2.10c}$$

2.2 Compact 2D-FDTD 演算法

使用傳統的 3D-FDTD 演算法來模擬波導結構時，由於需要使用 3 維的模擬空間來描述完整的結構，使得模擬所需時間大幅的增加，針對傳波方向介質為均勻延伸的波導結構，提出了新的演算法 Compact 2D-FDTD[9],[10]，僅需要描述波導結構的橫截面，使得模擬的空間變為 2 維，可有效率的降低所需要的模擬時間。

2.2.1 Compact 2D-FDTD 理論推演

考慮一個波導結構如圖 2.3，在 z 軸方向為均勻介質，這樣的波導結構可以使得模態以傳播常數 β 傳播於 z 軸方向，所以在 Maxwell's equation 中，對 z 的偏微分可以用 $-j\beta$ 取代，如此可以有效率的使得 3 維模擬空間減低為 2 維模擬空間(cross-section)，則 Maxwell's equation 重寫成：

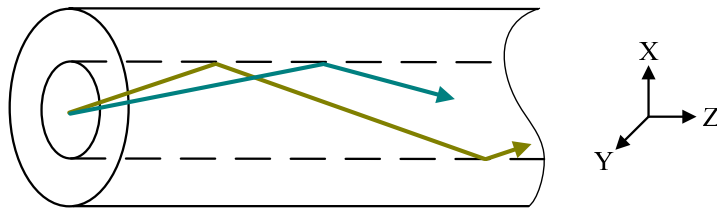


圖 2.3 Z 軸方向傳播的波導結構

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-j\beta E_y - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho^* H_x \right) \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x - \rho^* H_y \right) \quad (2.11b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho^* H_z \right) \quad (2.11c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y - \sigma E_x \right) \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.12c)$$

則電磁場在一個單位空間網格的配置如圖 2.4

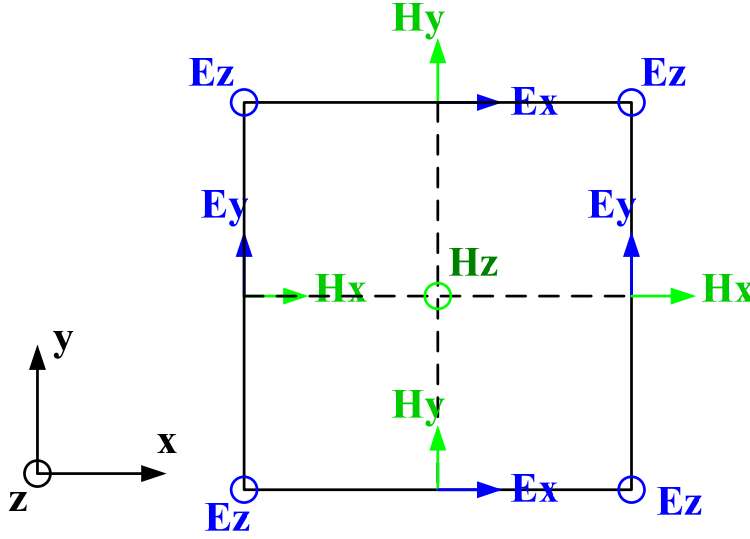


圖 2.4 Compact 2D-FDTD 單位網格的電磁場空間配置

和前述的方法相同，經過時間與空間之中央差分趨近後，(2.11-2.12)之 Maxwell's equations 旋度方程式離散化為

$$H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\mu_{i,j+1/2}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i,j+1/2}^*}{2}}{\frac{\mu_{i,j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i,j+1/2}^*}{2}} \right) H_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2} + \frac{1}{\Delta \left(\frac{\mu_{i,j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i,j+1/2}^*}{2} \right)} [-j\beta\Delta E_y|_{i,j+1/2}^n - E_z|_{i,j+1}^n + E_z|_{i,j}^n] \quad (2.13a)$$

$$H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\mu_{i+1/2,j}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i+1/2,j}^*}{2}}{\frac{\mu_{i+1/2,j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2,j}^*}{2}} \right) H_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2} + \frac{1}{\Delta \left(\frac{\mu_{i+1/2,j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2,j}^*}{2} \right)} [E_z|_{i+1,j}^n - E_z|_{i,j}^n + j\beta\Delta E_x|_{i+1/2,j}^n] \quad (2.13b)$$

$$\begin{aligned}
H_z \big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\mu_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i+1/2, j+1/2}^*}{2}}{\frac{\mu_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2, j+1/2}^*}{2}} \right) H_z \big|_{i+1/2, j+1/2}^{n-1/2} \\
&+ \frac{1}{\Delta \left(\frac{\mu_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2, j+1/2}^*}{2} \right)} \left[-E_y \big|_{i+1, j+1/2}^n + E_y \big|_{i, j+1/2}^n E_x \big|_{i+1/2, j+1}^n - E_x \big|_{i+1/2, j}^n \right]
\end{aligned} \tag{2.13c}$$

$$\begin{aligned}
E_x \big|_{i+1/2, j}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\varepsilon_{i+1/2, j}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i+1/2, j}}{2}}{\frac{\varepsilon_{i+1/2, j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2, j}}{2}} \right) E_x \big|_{i+1/2, j}^{n-1/2} \\
&+ \frac{1}{\Delta \left(\frac{\varepsilon_{i+1/2, j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+1/2, j}}{2} \right)} \left[H_z \big|_{i+1/2, j+1/2}^n - H_z \big|_{i+1/2, j-1/2}^n + j\beta\Delta H_y \big|_{i+1/2, j}^n \right]
\end{aligned} \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}
E_y \big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\varepsilon_{i, j+1/2}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i, j+1/2}}{2}}{\frac{\varepsilon_{i, j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i, j+1/2}}{2}} \right) E_y \big|_{i, j+1/2}^{n-1/2} \\
&+ \frac{1}{\Delta \left(\frac{\varepsilon_{i, j+1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i, j+1/2}}{2} \right)} \left[-j\beta\Delta H_x \big|_{i, j+1/2}^n - H_z \big|_{i+1/2, j+1/2}^n + H_z \big|_{i-1/2, j+1/2}^n \right]
\end{aligned} \tag{2.14b}$$

$$\begin{aligned}
E_z \big|_{i, j}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\varepsilon_{i, j}}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i, j}}{2}}{\frac{\varepsilon_{i, j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i, j}}{2}} \right) E_z \big|_{i, j}^{n+1/2} \\
&+ \frac{1}{\Delta \left(\frac{\varepsilon_{i, j}}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i, j}}{2} \right)} \left[H_y \big|_{i+1/2, j}^n - H_y \big|_{i-1/2, j}^n - H_x \big|_{i, j+1/2}^n + H_x \big|_{i, j-1/2}^n \right]
\end{aligned} \tag{2.14c}$$

2.2.2 Compact 2D-FDTD 穩定準則

在實際數值計算中首先要決定網格的大小，它主要受到數值色散的影響，意即不同頻率的波以不同的速度在網格傳播，並且造成脈波外形的失真。在我們決定好網格大小之後，就可以決定時間增量以及達到數值穩定的目定。

對於時間分隔 Δt 和空間分隔 Δx ， Δy ， Δz 的決定必須要使計算中之數據不致發散，同時也要確保其計算結果的準確性，因此會在準確度和穩定度之間來作調整。空間分隔 Δx ， Δy ， Δz 除了必須能夠充分描述計算的結構外，其長度亦必須為激發頻譜最高主要頻率 f_u 波長的一小部分；例如從富利葉分析我們知道一個寬度為 τ 的脈波，其頻譜的主要部分從零至 $f_u = 1/\tau$ ，為了使場的的空間變化能被適當的取樣 Nyquist sampling theorem 建議網格尺寸要小於 $\lambda_u/2$ ，然而我們脈波會有高於 f_u 的頻率成分，數值色散會在二維和三維結構中出現，而中央差分亦只是趨近，所以一個更高的空間取樣率是必須的，為了提高計算結果準確度，空間網格須小於最高頻率的 $\lambda_u/10$ ($\lambda_u/20$, 假如計算資源准許)。根據[11]，(2.13-2.14)在離散時間之數值計算，為了保證不使數據發散，必須要求 Δt ， Δx ， Δy ， Δz 滿足下列之穩定準則[11]：

$$v_{\max} \Delta t \leq \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

其中 v_{\max} 為模擬結構中最快之波速，而在實際的數值分析中，除非整個計算空間填滿同一介質，否則 $v_{\max} = c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ，為自由空間或真空中之光速。

2.2.3 Compact 2D-FDTD 吸收邊界

1994 年 Berenger 發表一種 ABC 技術[12],[13]，他虛擬一種介質能有效降低網格邊界的波反射強度至數個等級，這種方法稱作”吸收電磁波的完美匹配層(PML)”。

他人為地將吸收邊界區域的電場或磁場分離成兩個成分，使個別分離的場成分可以被衰減，其靜效應是在接鄰 FDTD 網格邊界處產生一非自然的吸收材料，其波阻抗與往外散射波之入射角度和頻率無關。

Compact 2D-FDTD 是由三維模擬空間簡化為二維模擬空間，所以 PML 的推導仍須由三維 PML(如圖 2.5)簡化為二維 PML，在三維直角座標系中,六個電磁場向量分離成 PML 吸收層的 12 個方程式，其中 $\sigma_z=0$ ，整理如下：

$$\mu \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = -\frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \quad (2.16a)$$

$$\mu \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} = -j\beta(E_{yx} + E_{yz}) \quad (2.16b)$$

$$\mu \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} = j\beta(E_{xy} + E_{xz}) \quad (2.16c)$$

$$\mu \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \quad (2.16d)$$

$$\mu \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \quad (2.16e)$$

$$\mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial(E_{xy} + E_{xz})}{\partial y} \quad (2.16f)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.17a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} = j\beta(H_{yx} + H_{yz}) \quad (2.17b)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} = -j\beta(H_{xy} + H_{xz}) \quad (2.17c)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.17d)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \quad (2.17e)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial (H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} \quad (2.17f)$$

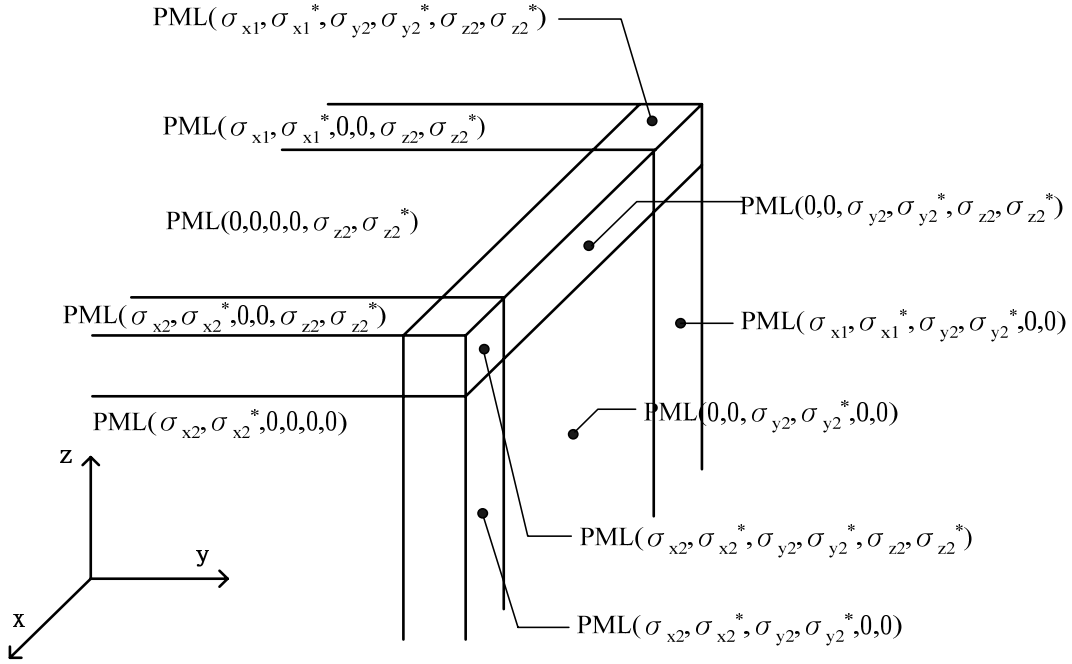


圖 2.5 三維 FDTD 網格 PML 結構

和前述的方法相同，經過時間與空間之中央差分趨近後，(2.16-2.17)之 Maxwell's equations 旋度方程式離散化為

$$E_{xy} \Big|_{i+1/2, j}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_y}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{2}} \right) E_{xy} \Big|_{i+1/2, j}^{n-1/2} + \frac{1}{\Delta y \left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{2} \right)} \left[(H_{zx} + H_{zy}) \Big|_{i+1/2, j+1/2}^n - (H_{zx} + H_{zy}) \Big|_{i+1/2, j-1/2}^n \right] \quad (2.18a)$$

$$E_{xz} \Big|_{i+1/2, j}^{n+1/2} = E_{xz} \Big|_{i+1/2, j}^{n-1/2} + \frac{j\beta\Delta t}{\varepsilon} (H_{yz} + H_{yx}) \Big|_{i+1/2, j}^n \quad (2.18b)$$

$$E_{yz} \big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = E_{yz} \big|_{i,j+1/2}^{n-1/2} - \frac{j\beta\Delta t}{\varepsilon} (H_{xy} + H_{xz}) \big|_{i,j+1/2}^n \quad (2.18c)$$

$$E_{yx} \big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_x}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2}} \right) E_{yx} \big|_{i,j+1/2}^{n-1/2} - \frac{1}{\Delta x \left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2} \right)} \left[(H_{zx} + H_{zy}) \big|_{i+1/2,j+1/2}^n - (H_{zx} + H_{zy}) \big|_{i-1/2,j+1/2}^n \right] \quad (2.18d)$$

$$E_{zx} \big|_{i,j}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_x}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2}} \right) E_{zx} \big|_{i,j}^{n-1/2} + \frac{1}{\Delta x \left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2} \right)} \left[(H_{yz} + H_{yx}) \big|_{i+1/2,j}^n - (H_{yz} + H_{yx}) \big|_{i-1/2,j}^n \right] \quad (2.18e)$$

$$E_{zy} \big|_{i,j}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_y}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{2}} \right) E_{zy} \big|_{i,j}^{n-1/2} - \frac{1}{\Delta y \left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{2} \right)} \left[(H_{xy} + H_{xz}) \big|_{i,j+1/2}^n - (H_{xy} + H_{xz}) \big|_{i,j-1/2}^n \right] \quad (2.18f)$$

$$H_{xy} \big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^*}{2}} \right) H_{xy} \big|_{i,j+1/2}^{n-1/2} - \frac{1}{\Delta y \left(\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^*}{2} \right)} \left[(E_{zx} + E_{zy}) \big|_{i,j+1}^n - (E_{zx} + E_{zy}) \big|_{i,j}^n \right] \quad (2.19a)$$

$$H_{xz} \big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = H_{xz} \big|_{i,j+1/2}^{n-1/2} - \frac{j\beta\Delta t}{\mu} (E_{yz} + E_{yx}) \big|_{i,j+1/2}^n \quad (2.19b)$$

$$H_{yz} \big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} = H_{yz} \big|_{i+1/2,j}^{n-1/2} + \frac{j\beta\Delta t}{\mu} (E_{xy} + E_{xz}) \big|_{i+1/2,j}^n \quad (2.19c)$$

$$\begin{aligned} H_{yx} \big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_x^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2}} \right) H_{yx} \big|_{i+1/2,j}^{n-1/2} \\ &+ \frac{1}{\Delta x \left(\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2} \right)} \left[(E_{zx} + E_{zy}) \big|_{i+1,j}^n - (E_{zx} + E_{zy}) \big|_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (2.19d)$$

$$\begin{aligned} H_{zx} \big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_x^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2}} \right) H_{zx} \big|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} \\ &- \frac{1}{\Delta x \left(\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2} \right)} \left[(E_{yz} + E_{yx}) \big|_{i+1,j+1/2}^n - (E_{yz} + E_{yx}) \big|_{i,j+1/2}^n \right] \end{aligned} \quad (2.19e)$$

$$\begin{aligned} H_{zy} \big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^*}{2}} \right) H_{zy} \big|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} \\ &+ \frac{1}{\Delta y \left(\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2} \right)} \left[(E_{xy} + E_{xz}) \big|_{i+1/2,j+1}^n - (E_{xy} + E_{xz}) \big|_{i+1/2,j}^n \right] \end{aligned} \quad (2.19f)$$

2.2.4 Compact 2D-FDTD 數值程序

在發展 Compact 2D-FDTD 演算法之前了解計算結構是有幫助的，FDTD 程式主要計算特徵是時間步階處理，它只是程式的一小部分，但是最為重要。程式需要包含下列主要步驟：

Preprocessing：

- 定義 FDTD 網格(設定各維度網格數量和網格尺寸大小)。
- 依據穩定準則計算時間步階。
- 計算結構所需的乘法係數。

Time stepping：

- 更新激發源狀況。
- 依據周圍位置材料的性質，由電場成分四周的場量計算其響應。
- 更新吸收邊界條件(Absorbing boundary conditions) ABC 目的是在吸收超出計算空域的場量以避免輻射場的非自然反射。
- 更新磁場成分。

Postprocessing：

- 在需要的時間步階上儲存電場、磁場、電流和電壓等響應成分於軟體陣列。
- 決定切線電場、磁場所包圍散射體的一封閉虛構表面，並計算出遠場之散射或輻射場量。

完成上述需要之程式結構之簡化流程如下圖所示：

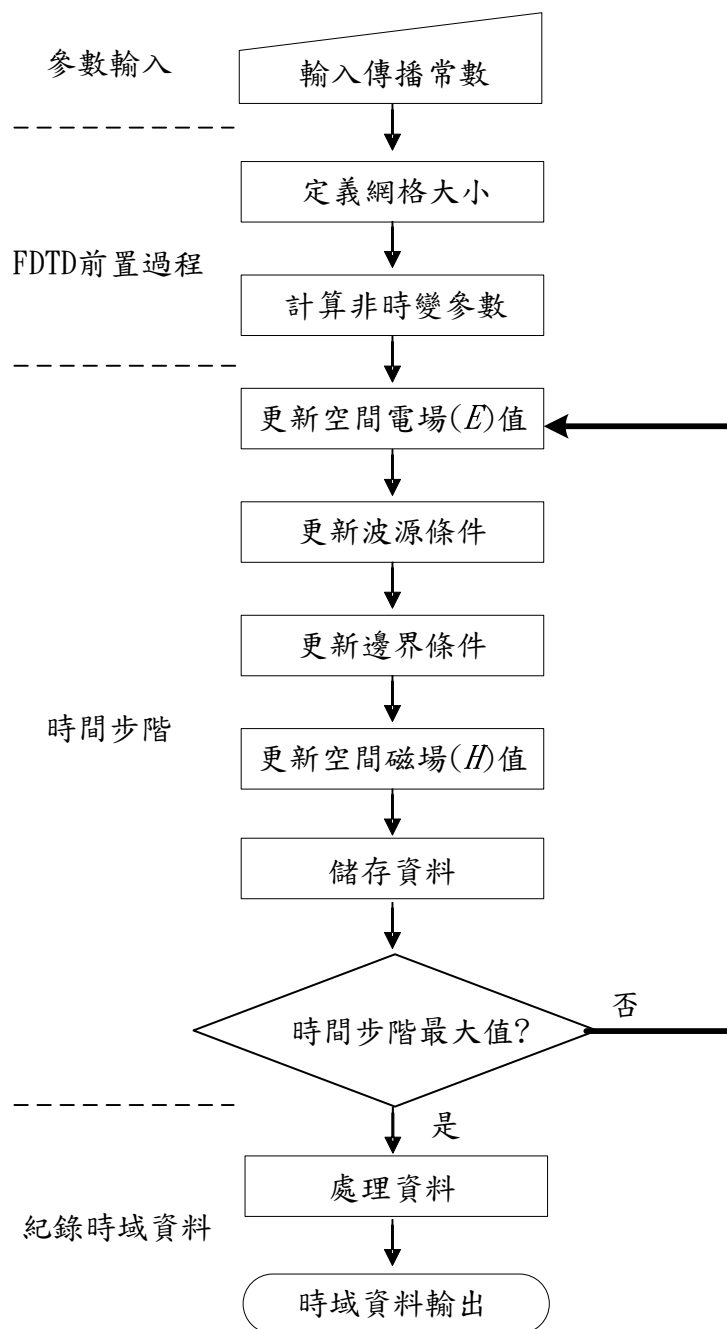


圖 2.6 Compact 2D-FDTD 程式流程圖

2.3 Compact 2D-FDTD 計算二維光子晶體能隙

假設我們模擬的結構為在二維平面上無限延伸的光子晶體，我們無法模擬無限大的計算空間，但是由於光子晶體的週期性結構，我們可以使用光子晶體單位晶格(unit cell)配合週期性邊界條件來模擬二維平面上無限延伸的光子晶體 [14]-[16]。

圖 2.7 為一個三角形排列的二維光子晶體橫截面，在 X 軸和 Y 軸方向是週期性結構，在 Z 軸方向為均勻的(homogeneous)， \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 是原始晶格向量(primitive lattice vector)，其中 $\mathbf{a}_1 = a(1/2\bar{x} + \sqrt{3}/2\bar{y})$ 、 $\mathbf{a}_2 = a(1/2\bar{x} - \sqrt{3}/2\bar{y})$ ，圖 2.8 是互易三角形排列的二維光子晶體， \mathbf{b}_1 和 \mathbf{b}_2 是互易原始晶格向量(reciprocal primitive lattice vector)，其中 $\mathbf{b}_1 = 2\pi/a(1\bar{x} + \sqrt{3}\bar{y})$ 、 $\mathbf{b}_2 = 2\pi/a(1\bar{x} - \sqrt{3}\bar{y})$ ，圖 2.9 和圖 2.10 對應的單位細胞(unit cell)和 Brillouin zone。

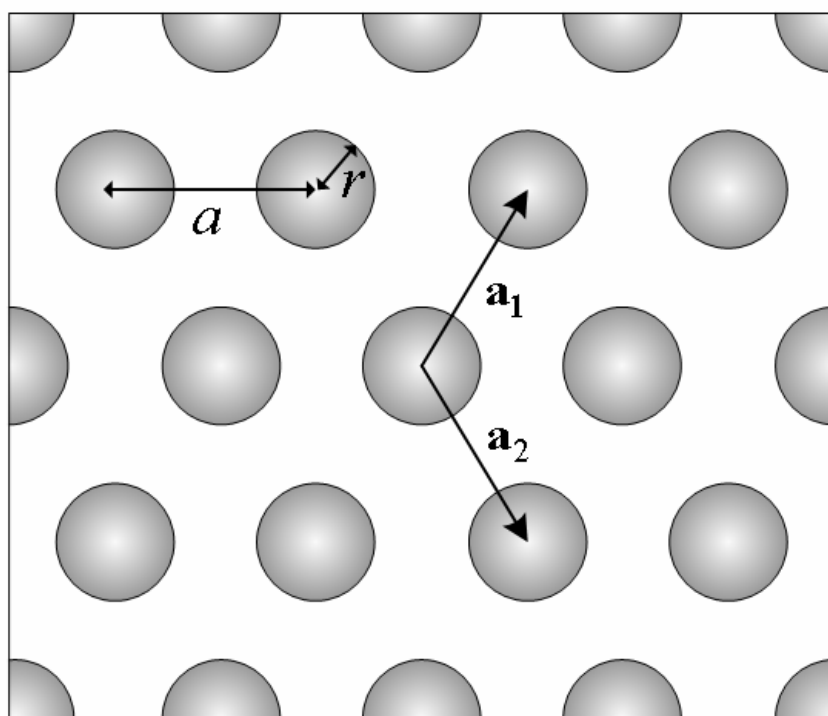


圖 2.7 三角形排列的二維光子晶體橫截面

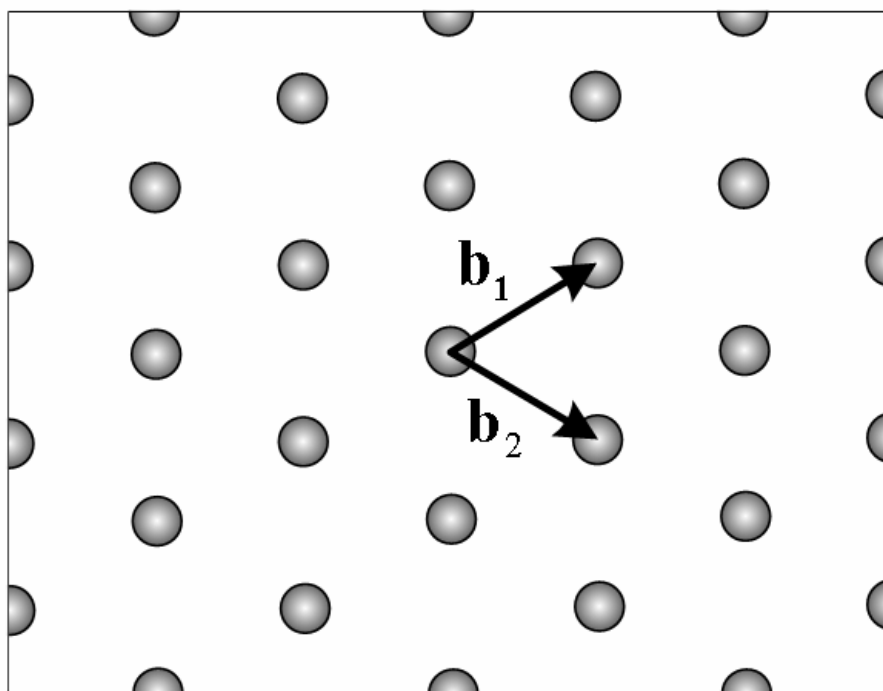


圖 2.8 互易三角形排列的二維光子晶體橫截面

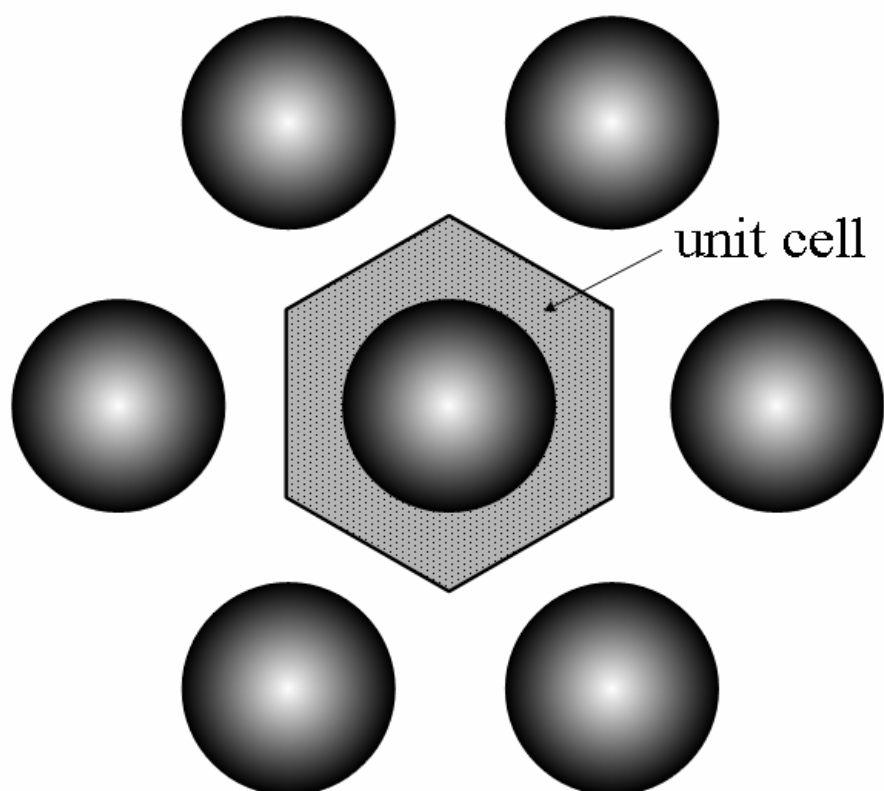


圖 2.9 三角形排列的二維光子晶體單位晶格

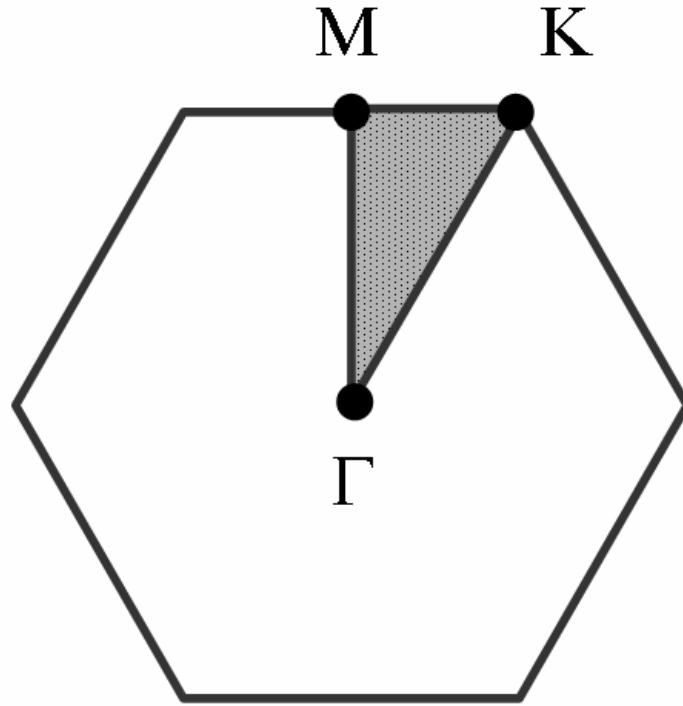


圖 2.10 三角形排列的二維光子晶體纖布里淵區(Brillouin zone)

Compact 2D-FDTD 的理論和前述相同(2.11-2.12)，不同的是在前述章節中使用的是激發源是高斯波，在這裡我們起始條件設定的是磁場的分佈；前述章節使用 PML 做為吸收邊界，在這裡我們使用週期性邊界條件。

起始條件如下

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot e^{i[(k_x + G_x)x + (k_y + G_y)y + k_z \cdot z]} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.21)$$

其中 $\mathbf{k} = k_x \bar{x} + k_y \bar{y} + k_z \bar{z}$ 波向量(wave vector)

$$\mathbf{G} = m\mathbf{b}_1 + n\mathbf{b}_2$$

我們選擇 $\mathbf{v} = (-1, -1, -1)$ ，這樣可以保證磁場的初始條件能滿足 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ，下面是更詳細的表示式

$$H_x = \left[(k_y - G_y) - k_z \right] \cdot e^{i[(k_x + G_x)x + (k_y + G_y)y + k_z \cdot z]} \quad (2.22a)$$

$$H_y = \left[k_z - (k_x - G_x) \right] \cdot e^{i[(k_x + G_x)x + (k_y + G_y)y + k_z \cdot z]} \quad (2.22b)$$

$$H_z = \left[(k_x - G_x) - (k_y - G_y) \right] \cdot e^{i[(k_x + G_x)x + (k_y + G_y)y + k_z \cdot z]} \quad (2.22c)$$

邊界條件如下

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{L}) = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r} + \mathbf{L}) = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

第三章 光子晶體光纖的特性分析

3.1 概論

在這一個章節裡，我們將利用第二章建立的數值方法來模擬光子晶體光纖的傳播特性，得到光子晶體光纖的基模模態場形分佈、有效折射率(Effective index)、正規化頻率(Normalized frequency)、模場直徑(Mode-field diameter, MFD)和接合損耗(Splice loss)，進一步的分析光子晶體光纖的顏色色散(Chromatic dispersion)。

3.2 傳播模態分析

在 Compact 2D-FDTD 數值模擬的一開始我們會先設定光子晶體光纖的實際物理尺寸，包括相鄰空氣孔洞間距 Λ 、空氣孔洞的直徑 d 和光子晶體光纖的圈數，如圖 3.1 為三圈 36 個空氣孔洞的光子晶體光纖的橫截面，在計算空間的周圍為完美匹配層，然後給定傳播常數，並且在橫截面上任意一點給予激發源，在不同於激發源的其他點紀錄時域資料，然後將時域資料經過符立葉轉換成為頻域資料。

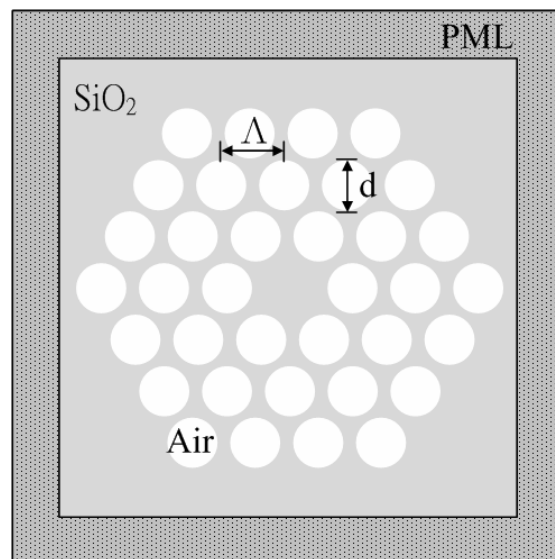
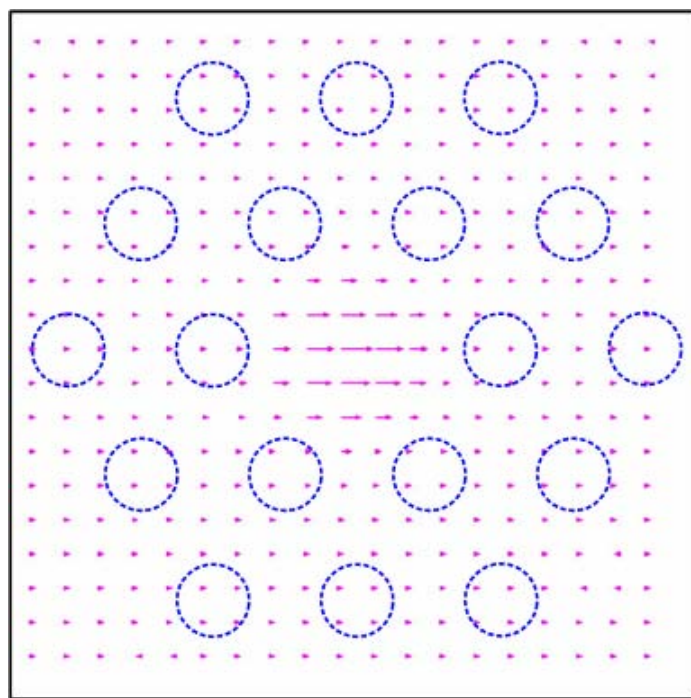


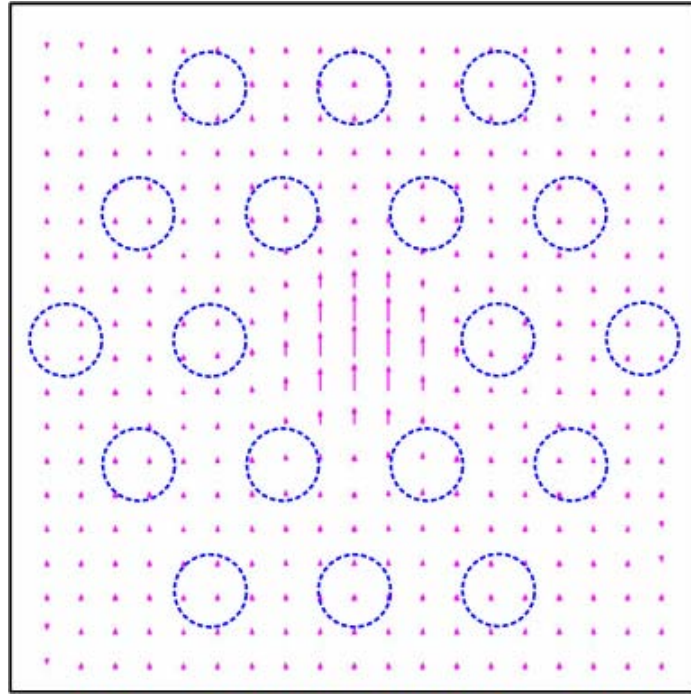
圖 3.1 光子晶體光纖橫截面在 compact 2D-FDTD 程式示意圖

3.2.1 基模模態場型分佈和極化分析

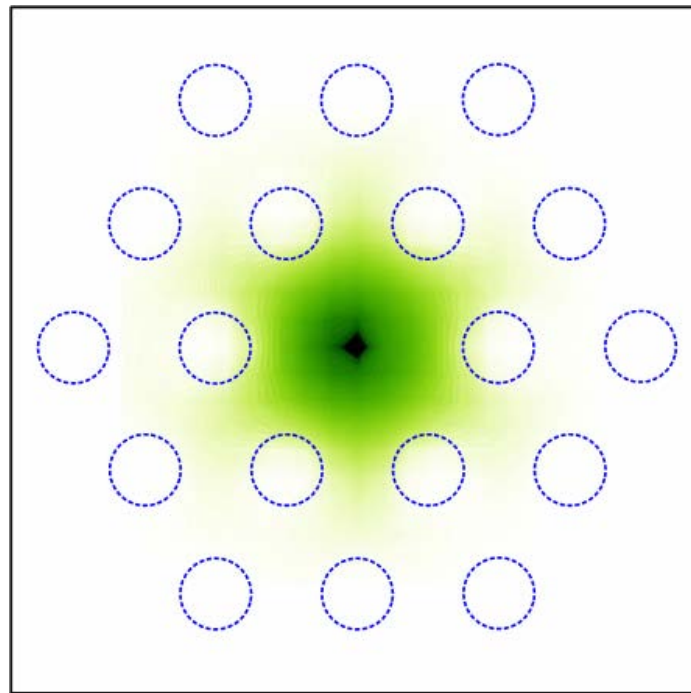
在光子晶體光纖中同一個傳播常數可以對應到很多不同模態，其中波長最長的我們稱基模模態，又稱為 HE_{11} 模態。首先，我們考慮二圈的光子晶體光纖，其中 d 表示空氣孔洞的直徑， Λ 表示空氣孔洞的距離，二氧化矽折射率為 1.45，空氣折射率為 1，在這個例子中 $d=1.15\mu\text{m}$ ， $\Lambda=2.3\mu\text{m}$ ，傳播常數 $\beta=8\times 10^6\text{ rad/m}$ ，基模模態波長為 $1.128\mu\text{m}$ ，圖 3.2 表示基模的橫向電場向量分佈圖和純量分佈圖 [18],[19]，我們可以由圖 3.2(a)看出橫向電場為水平極化，所以我們稱為 HE_{11}^x 模態，圖 3.2(b)則表示橫向電場為垂直極化，稱為 HE_{11}^y 模態，而且每一個基模模態都是線性極化場(linearly polarized field)，圖 3.2(c)為 HE_{11} 模態的純量分布圖，我們可以看出橫向電場集中在核心區域，因為光子晶體光纖的導光機制是藉由全反射傳播，所以光主要傳播在高折射率區域。



(a) HE_{11}^x 模態向量分布圖



(b) HE_{11}^y 模態向量分布圖

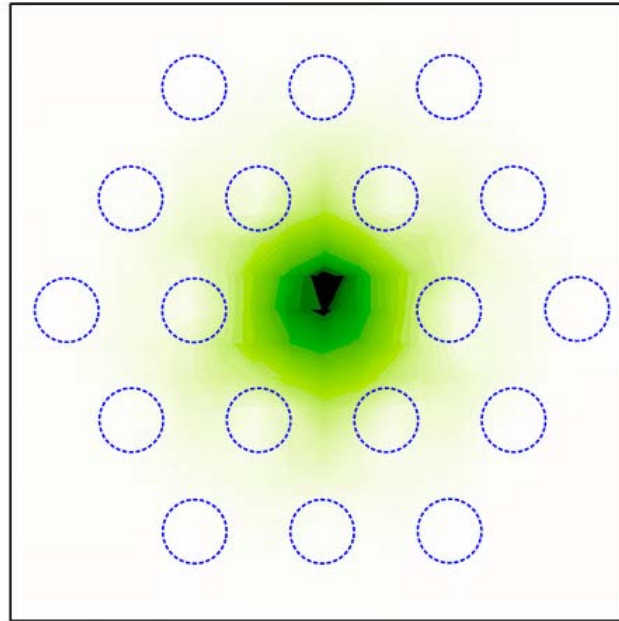


(c) HE_{11} 模態純量分布圖

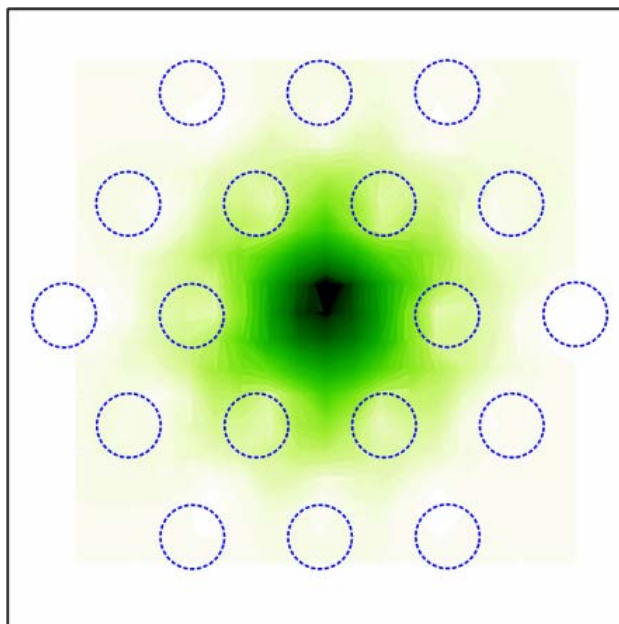
圖 3.2 基模模態橫向電場的向量與純量分布圖

(a) HE_{11}^x 模態向量分布圖 (b) HE_{11}^y 模態向量分布圖 (c) HE_{11} 模態純量分布圖

在相同物理尺寸的光子晶體光纖中，在不同傳播常數下，基模模態對應的波長也不相同，在這個例子中 $d=1.15\mu\text{m}$ ， $\Lambda=2.3\mu\text{m}$ ，傳播常數 $\beta=12\times 10^6\text{ rad/m}$ 和 $\beta=5\times 10^6\text{ rad/m}$ ，基模模態波長分別為 $0.756\mu\text{m}$ 和 $1.782\mu\text{m}$ ，如圖 3.3(a)在較短波長時，橫向電場會集中在核心區域，如圖 3.3(b)在較長波長時，橫向電場會穿過空氣孔洞並且擴散到包覆層。



(a)短波長



(b)長波長

圖 3.3 基模模態橫向電場純量分布圖(a)短波長 (b)長波長

3.2.2 有效折射係數與波長關係

為了驗證 Compact 2D-FDTD 的準確性，我們用有限元素法(FEM)來做為比較，在這個驗證的例子是兩圈的光子晶體光纖，結構參數為 $\Lambda = 2.3\mu\text{m}$ ， $d/\Lambda = 0.5$ 、 $d/\Lambda = 0.6$ 、 $d/\Lambda = 0.7$ 。在 Compact 2D-FDTD 數值模擬中，一個傳播常數對應一個基模模態頻率，由公式(3.1)a 和公式(3.1)b 我們可以將傳播常數和頻率變成波長和有效折射率

$$\lambda = \frac{C}{f} \quad (3.1)a$$

$$n_{\text{eff}} = \frac{\beta C}{2\pi f} \quad (3.1)b$$

表3-1為Compact 2D-FDTD在不同傳播常數下，所計算出波長和有效折射率，將這些數據做成圖表和有限元素法[20]來做比較如圖 3.4，我們可以發現 Compact 2D-FDTD的數值和有限元素法的相當吻合。

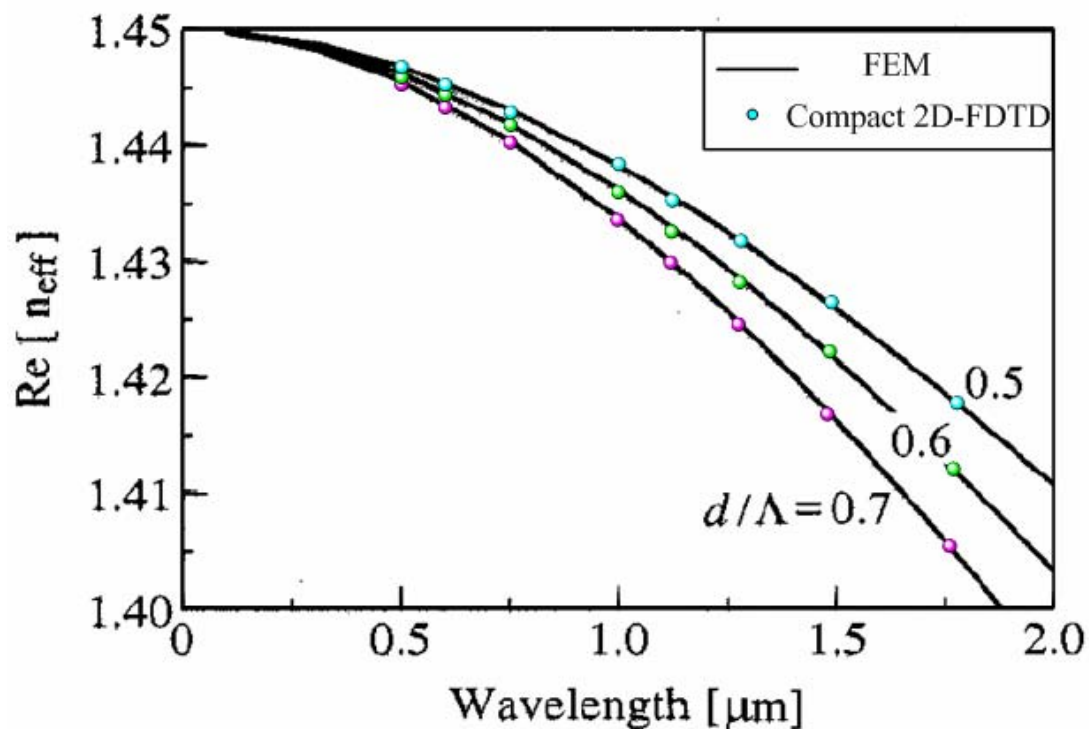


圖 3.4 有效折射率對波長關係圖

表 3.1 不同傳播常數所對的波長和有效折射率

傳播常數	頻率 (Hz)	波長 (μm)	有效折射率(n_{eff})
18×10^6	5.944×10^{14}	0.504361	1.444889
15×10^6	4.958×10^{14}	0.604664	1.443529
12×10^6	3.976×10^{14}	0.754005	1.440044
9×10^6	2.996×10^{14}	1.000642	1.433315
8×10^6	2.670×10^{14}	1.122818	1.429617
7×10^6	2.345×10^{14}	1.278433	1.424282
6×10^6	2.022×10^{14}	1.482873	1.416040
5×10^6	1.699×10^{14}	1.764523	1.404163

(a) $d/\Lambda = 0.7$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率

傳播常數	頻率 (Hz)	波長 (μm)	有效折射率(n_{eff})
18×10^6	5.941×10^{14}	0.504616	1.445619
15×10^6	4.956×10^{14}	0.604908	1.444112
12×10^6	3.972×10^{14}	0.754764	1.441494
9×10^6	2.991×10^{14}	1.002315	1.435711
8×10^6	2.665×10^{14}	1.124925	1.432299
7×10^6	2.339×10^{14}	1.281712	1.427936
6×10^6	2.014×10^{14}	1.488542	1.421453
5×10^6	1.691×10^{14}	1.772871	1.410806

(b) $d/\Lambda = 0.6$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率

傳播常數	頻率 (Hz)	波長 (μm)	有效折射率(n_{eff})
18×10^6	5.939×10^{14}	0.504786	1.446106
15×10^6	4.953×10^{14}	0.605274	1.444986
12×10^6	3.969×10^{14}	0.755335	1.442584
9×10^6	2.986×10^{14}	1.003993	1.438115
8×10^6	2.660×10^{14}	1.127039	1.434991
7×10^6	2.334×10^{14}	1.284458	1.430995
6×10^6	2.008×10^{14}	1.49299	1.425701
5×10^6	1.683×10^{14}	1.781298	1.417512

(c) $d/\Lambda = 0.5$ 不同傳播常數所對的波長和有效折射率

3.2.3 正規化頻率

在階段型折射率光纖(step-index fiber)中，導光模態的數目是由正規化頻率(normalized frequency, V)決定

$$V = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)r\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.2)$$

其中 r ：光纖核心半徑

n_1 ：光纖核內介質折射率

n_2 ：光纖核外介質折射率

當正規化頻率小於 2.405 時為單模光纖，圖 3.5 為階段型折射率光纖示意圖，如圖 3.5(a)所示，當光纖核心半徑較小時為單模的階段型折射率光纖，反之，如圖 3.5(b)所示為多模的階段型折射率光纖。我們可以透過調整光纖核心半徑來改變正規化頻率，但是我們如果同時考慮公式(3.2)中的入射光波長，當入射光波長很小的時候，原來為單模的階段型折射率光纖就會變成多模的階段型折射率光纖。

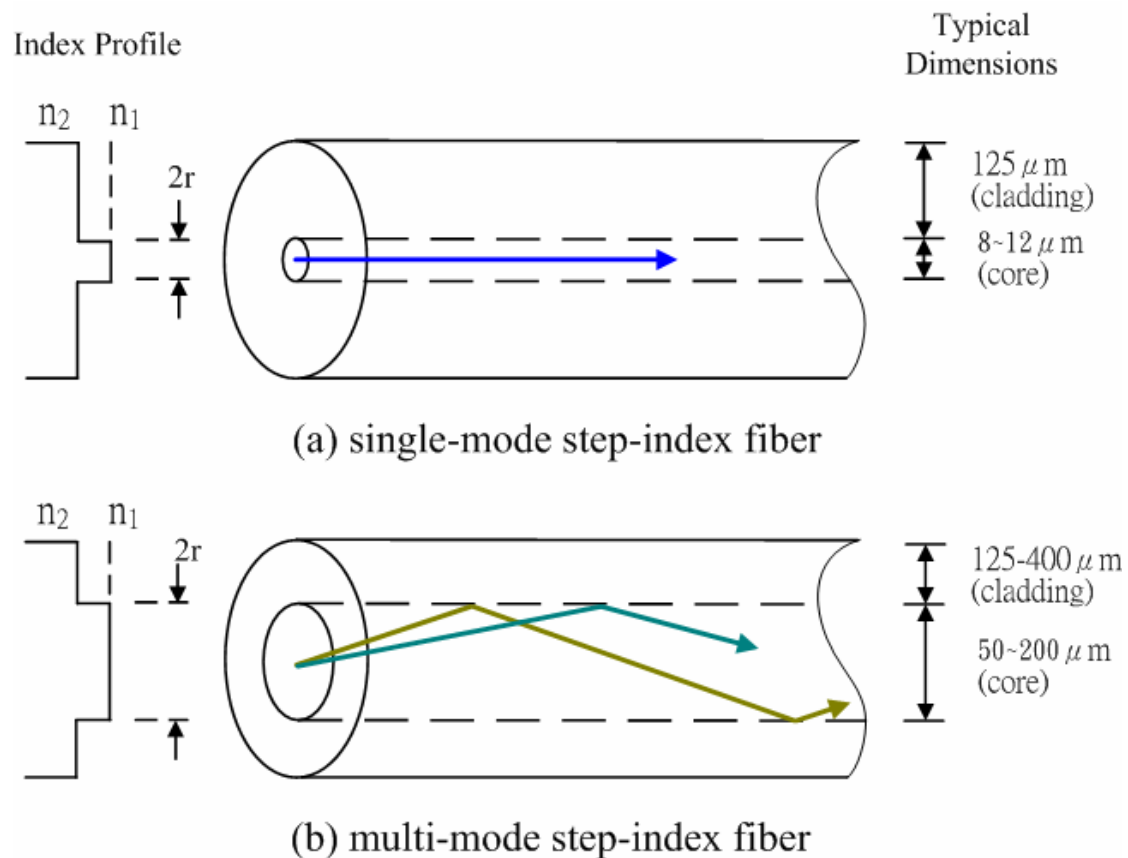


圖 3.5 階段型折射率光纖示意圖

光子晶體光纖在包覆層中因為有空氣孔洞，所以造成在包覆層的有效折射率小於在核心的折射率，由於內外層折射率的差異造成全反射的導光機制，這樣的導光機制和前述的階段型折射率光纖相同，因此我們可以用類似的公式和觀念來計算光子晶體光纖的正規化頻率，再藉由正規化頻率來判斷在光子晶體光纖中導光模態是否為單模或多模。

在計算光子晶體光纖的正規化頻率前，需要先考慮包覆層的有效折射率，在這裡我們定義 fundamental space-filling mode, FSM[21]是沒有缺陷的無窮圈數光子晶體光纖的基模模態，此時對應的傳播常數為 β_{FSM} ， n_{FSM} 即為在包覆層的有效折射率，我們可以得到下列的關係：

$$k_0 n_1 > \beta > \beta_{FSM} \quad (3.3)$$

$$n_1 > n_{eff} > n_{FSM} \quad (3.4)$$

其中 $k_0 = 2\pi/\lambda$ ， n_1 是光纖核心的折射率

意即在整體光子晶體的有效折射率會介於光子晶體核心的折射率和光子晶體包覆層的有效折射率，圖 3.6 是包覆層的有效折射率和 λ/Λ 的關係，在這裡我們同時考慮不同空氣孔洞比例的光子晶體光纖，在相同的空氣孔洞間距下，當空氣孔洞很小的時候，包覆層的有效折射率會很接近核心的折射率($n=1.45$)，隨著波長變化的情形較為平緩，但是在空氣孔洞很大的時候，包覆層的有效折射率僅在很短的波長時會接近核心的折射率，而且會隨著波長變大而逐漸變小。

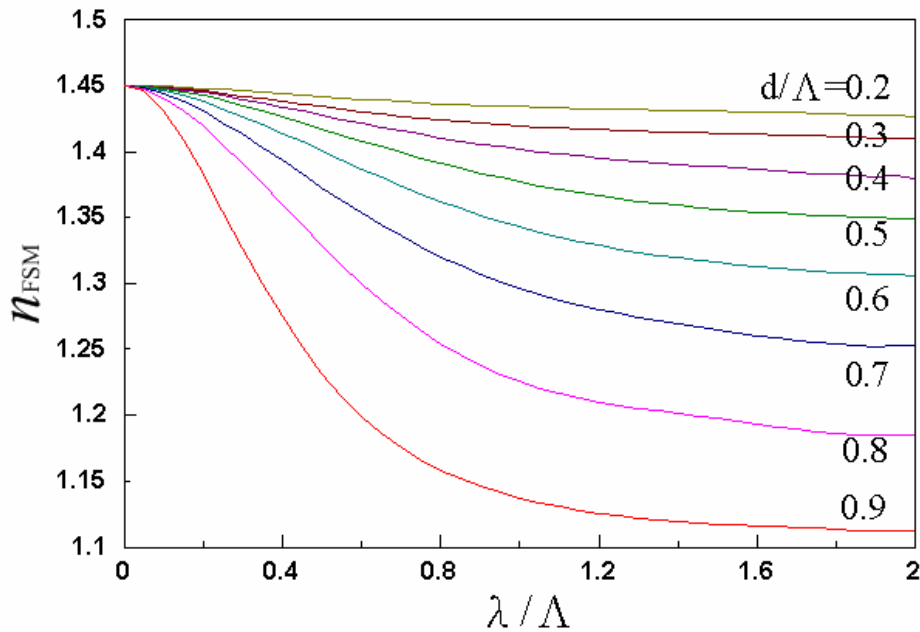


圖 3.6 包覆層的有效折射率對波長關係圖

得到光子晶體光纖包覆層的有效折射率後，我們可以用公式(3.5)來計算光子晶體光纖的正規化頻率[22],[23]

$$V = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)a_{eff} \sqrt{n_{core}^2 - n_{FSM}^2} \quad (3.5)$$

其中 a_{eff} : 有效核心半徑

n_{core} : 光子晶體光纖核心折射率

n_{FSM} : 光子晶體光纖包覆層折射率

為了使光子晶體光纖和階段型折射率光纖的正規化頻率定義相同，我們取

$a_{eff} = \Lambda/\sqrt{3}$ ，圖 3.7 為正規化頻率對波長的變化關係，我們也同時討論不同空氣孔洞比例的光子晶體光纖的正規化頻率，當空氣孔洞比例很大的時候，因為核心的折射率和包覆層的折射率差異較大，只有當波長較長時，正規化頻率才會小於 2.405；當空氣孔洞比例很小的時候，核心的折射率和包覆層的折射率差異較小，即使當波長較短時，正規化頻率也會小於 2.405，我們可以從圖中看出當 $d/\Lambda \leq 0.4$ 時，在所有的操作波長下光子晶體光纖的正規化頻率都小於 2.405。

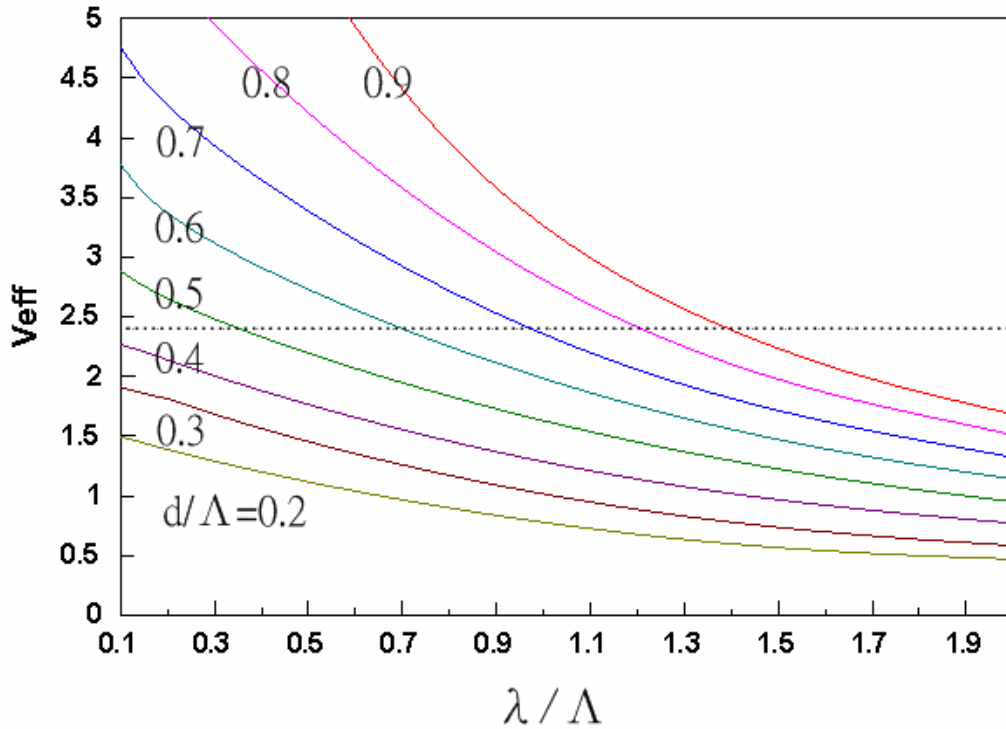


圖 3.7 正規化頻率對波長關係圖

我們進一步討論不同空氣孔洞比例的光子晶體光纖在不同操作波長的模態關係，當 $d/\Lambda > 0.43$ 時，光子晶體光纖在較長波長時操作在單模區域，在較短波長時操作在多模區域，當 $d/\Lambda < 0.43$ 時，在所有的操作波長下光子晶體光纖的正規化頻率恆小於 2.405，此時光子晶體光纖操作在 Endlessly single-mode 區域。

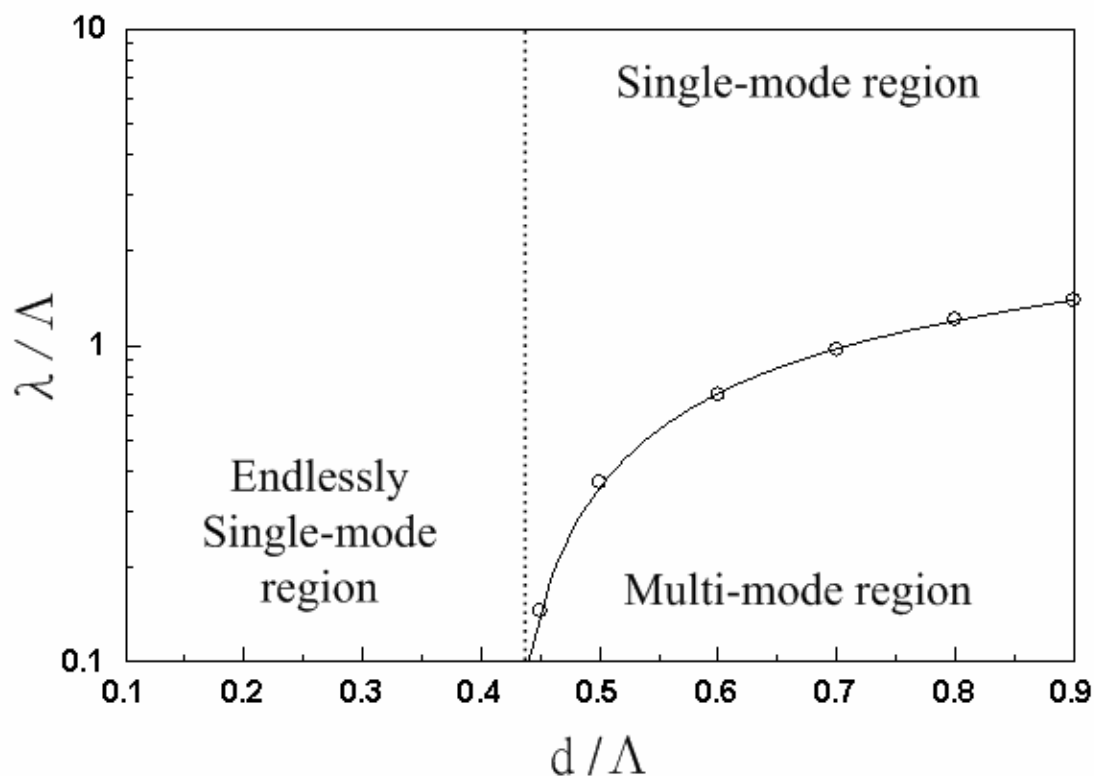


圖 3.8 不同空氣孔洞比的光子晶體光纖其模態操作區域

3.2.4 模場直徑 (Mode-field diameter, MFD)

光在單模光纖內行進時，能量在光纖軸心的地方最強，向包覆層漸漸減弱，在包覆層與核心交界的地方，能量會少許滲入包覆層，能量涵蓋的範圍即為模場，圖 3.9 中，考慮單模光纖中隨著距離呈現高斯分佈(Gaussian distribution)的電場，高斯分佈的關係式為(3.6)

$$E(r) = E_0 \exp(-r^2 / W_0^2) \quad (3.6)$$

其中 r : 半徑

E_0 : 電場最大強度(在半徑=0 的電場)

W_0 : 電場分佈半徑

當電場強度變為原來電場強度的 $1/e$ (能量變成 $1/e^2$)，此時的寬度稱為模場直徑，是分析單模光纖特性的重要參數之一。

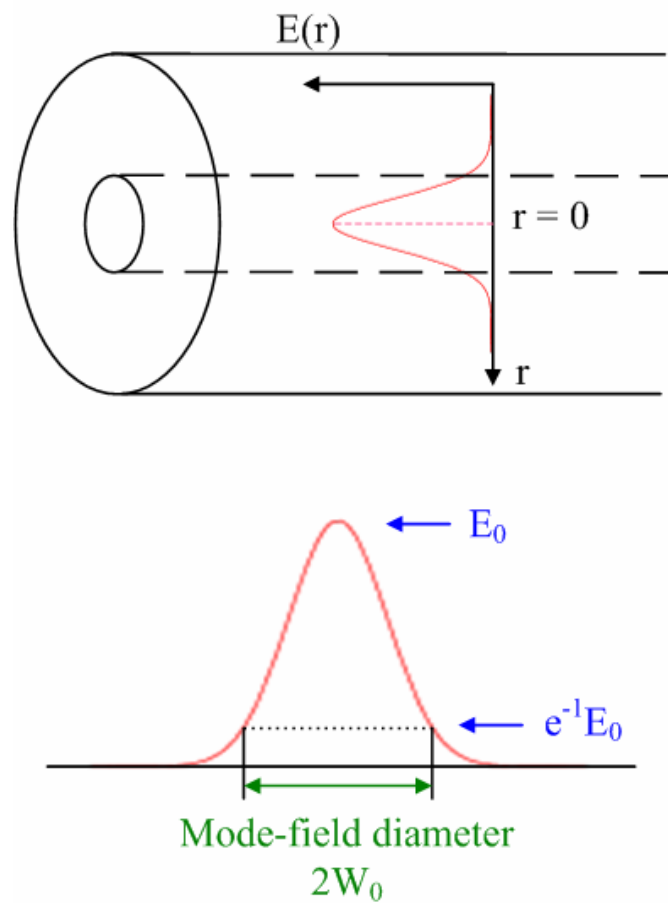


圖 3.9 光纖中的高斯分佈與模場直徑

我們可以利用在前面討論的正規化頻率、有效核心半徑，經過 Marcuse formula 公式(3.7)[24]來計算模場直徑，

$$\frac{w}{a_{eff}} = 0.65 + \frac{1.619}{V_{eff}^{3/2}} + \frac{2.879}{V_{eff}^6} \quad (3.7)$$

其中 w ：模場半徑

V_{eff} ：有效正規化頻率

a_{eff} ：有效核心半徑

圖 3.10 為模場半徑對波長關係圖，我們也同時討論不同空氣孔洞比例的光子晶體光纖的模場直徑，當空氣孔洞比例很小的時候，核心折射係率和包覆層的折射率差異較小，模場的分佈會擴散到包覆層，因此模場直徑較大；當空氣孔洞比例很大的時候，核心折射率和包覆層的折射率差異較大，模場的分佈會集中在核心區域，因此模場直徑較小。同時，隨著入射波長增加，模場分佈的範圍會越大，模場直徑亦增加。光子晶體光纖是由二氧化矽和空氣孔洞組成，我們可以透過改變空氣孔洞的比例來控制模場直徑，和前述的 Endlessly single-mode 性質結合，我們可以設計出 Endlessly single-mode 和較大的模場直徑的光子晶體光纖。

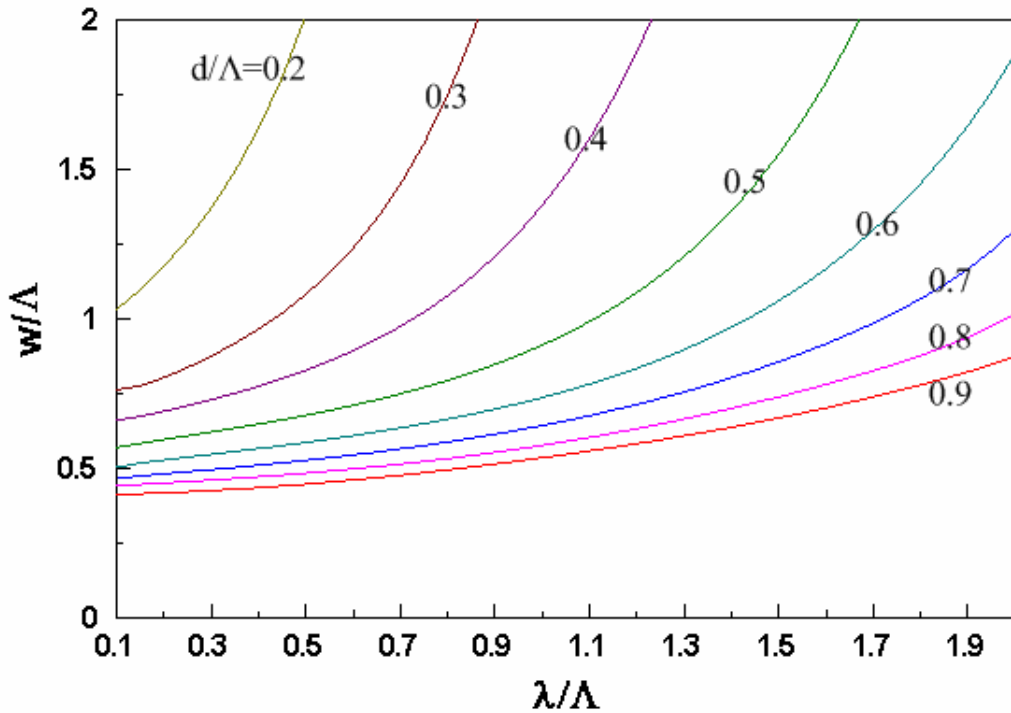


圖 3.10 模場半徑對波長關係圖

3.2.5 接合損耗 (Splice loss)

光纖通信網路中有許多的接合點，連接兩光纖而造成光傳遞過接合點的損耗成為接續損耗，影響接合損耗的因素分為接合時的誤校準(misalignment)和光纖本身因素，接續合的誤校準包括：軸向位移、軸心角傾斜、端面分離等，如圖 3.11 表示；另外，影響接合損耗的還有光纖本身因素，包括光纖模場直徑不一致、光纖核心半徑不一致、光纖核心截面不圓、光纖核心與包覆層的同心度不佳等；其中影響接合損耗最大因素的是模場直徑不一致。

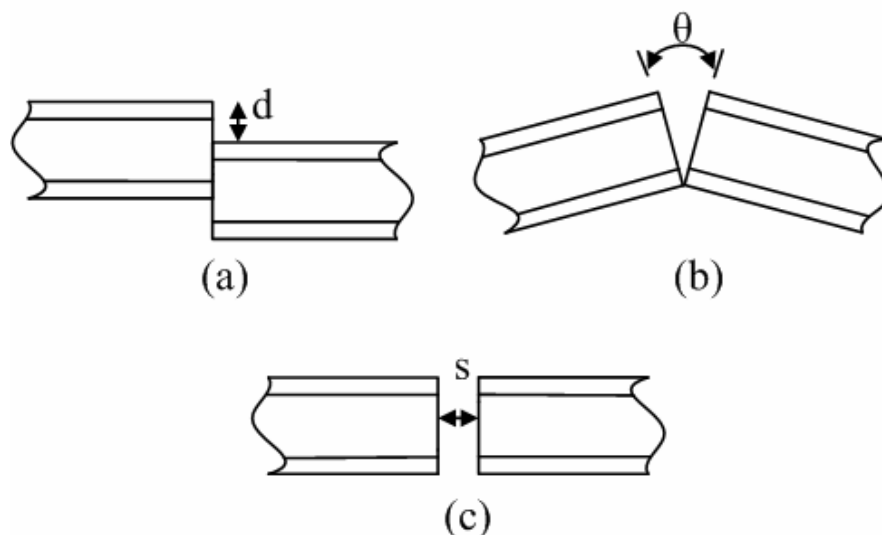


圖 3.11 光纖接合的誤校準 (a)軸向位移 (b)軸心角傾斜 (c)端面分離

現在我們考慮光子晶體光纖和單模光纖做接合，在此僅考慮模場直徑對接合損耗的影響，根據高斯光束傳播理論，接合損耗可以由公式(3.8)[24]計算

$$L_s = -10 \log_{10} \left\{ \left(\frac{2ww_{SMF}}{w^2 + w_{SMF}^2} \right)^2 \exp \left(\frac{-2\delta^2}{w^2 + w_{SMF}^2} \right) \right\} \quad (3.8)$$

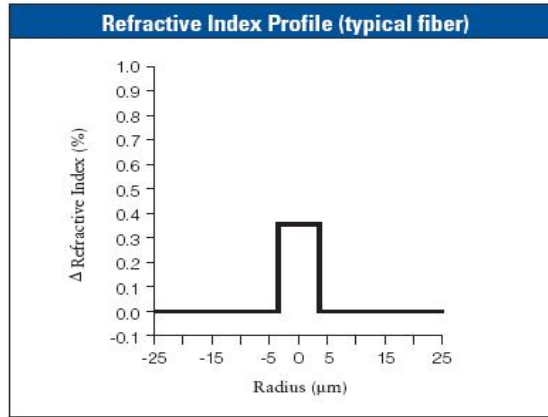
其中 w_{SMF} ：單模光纖的模場半徑

w ：光子晶體光纖的模場半徑

δ ：a function of offset

在這裡我們選擇接合的單模光纖是 SMF-28，SMF-28 的規格如下：

核心直徑	8.2 μm
包覆層直徑	125 \pm 10 μm
塗層直徑	245 \pm 5 μm
光纖翹曲度	曲率半徑 \geq 4m
截止波長	\leq 1260 nm
折射率差異	0.36%



包覆層折射率為 1.45，核心折射率為 1.45522，入射光波長 1.55 μm ，由公式(3.7)我們可以計算出 SMF-28 的模場半徑 w_{SMF} 為 5.09255 μm ，同時計算出光子晶體光纖的 $d/\Lambda=0.3$ 、0.4、0.5 在空氣孔洞間距 3 μm ~ 10 μm 的模場半徑 w_{PCF} ，有了單模光纖和光子晶體光纖的模場半徑後，我們就可以計算這兩種光纖的接合損耗，我們將結果列在表 3.2，由表中可發現，當兩者的模場半徑越接近時，接合損耗會越小，從圖 3-12 可以了解藉由設計光子晶體光纖的空氣孔洞比例和空氣孔洞間距，我們可以將接合損耗控制 0.25dB 以下。

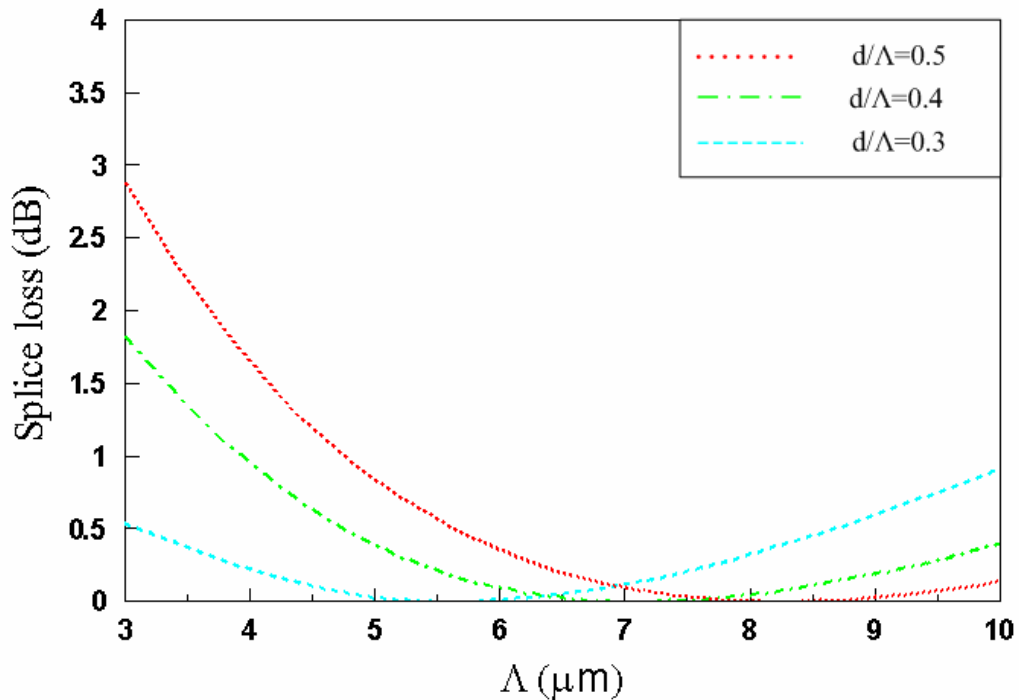


圖 3.12 接續損耗和光子晶體光纖空氣孔洞間距關係圖

	d/Λ=0.5		d/Λ=0.4		d/Λ=0.3	
Λ	w _{PCF}	L _s	w _{PCF}	L _s	w _{PCF}	L _s
3.00	2.152830	2.886051	2.596624	1.837230	3.571403	0.535664
3.20	2.259012	2.599975	2.703208	1.636691	3.646070	0.476094
3.40	2.366600	2.334016	2.813516	1.446863	3.734040	0.411590
3.60	2.475262	2.087809	2.926667	1.269470	3.831894	0.346683
3.80	2.584755	1.860661	3.042030	1.105319	3.937267	0.284382
4.00	2.694898	1.651704	3.159146	0.954641	4.048477	0.226642
4.20	2.805555	1.459990	3.277672	0.817308	4.164302	0.174687
4.40	2.916619	1.284547	3.397348	0.692967	4.283833	0.129233
4.60	3.028008	1.124413	3.517973	0.581133	4.406385	0.090647
4.80	3.139657	0.978651	3.639389	0.481240	4.531432	0.059053
5.00	3.251512	0.846366	3.761473	0.392684	4.658564	0.034410
5.20	3.363532	0.726705	3.884124	0.314848	4.787460	0.016565
5.40	3.475681	0.618864	4.007262	0.247115	4.917864	0.005290
5.60	3.587932	0.522083	4.130821	0.188880	5.049570	0.000312
5.80	3.700260	0.435651	4.254748	0.139561	5.182414	0.001329
6.00	3.812647	0.358900	4.378998	0.098596	5.316261	0.008024
6.20	3.925076	0.291203	4.503533	0.065451	5.451001	0.020078
6.40	4.037533	0.231974	4.628324	0.039618	5.586545	0.037173
6.60	4.150006	0.180667	4.753345	0.020619	5.722819	0.058995
6.80	4.262487	0.136768	4.878574	0.008000	5.859762	0.085245
7.00	4.374967	0.099798	5.003993	0.001336	5.997325	0.115632
7.20	4.487439	0.069309	5.129588	0.000228	6.135465	0.149881
7.40	4.599897	0.044881	5.255345	0.004300	6.274151	0.187730
7.60	4.712337	0.026122	5.381253	0.013199	6.413354	0.228931
7.80	4.824755	0.012667	5.507304	0.026597	6.553053	0.273251
8.00	4.937146	0.004171	5.633491	0.044184	6.693231	0.320469
8.20	5.049508	0.000313	5.759808	0.065673	6.833874	0.370381
8.40	5.161840	0.000793	5.886249	0.090792	6.974972	0.422793
8.60	5.274138	0.005330	6.012810	0.119291	7.116518	0.477525
8.80	5.386402	0.013660	6.139489	0.150932	7.258508	0.534408
9.00	5.498630	0.025538	6.266282	0.185495	7.400938	0.593285
9.20	5.610821	0.040730	6.393189	0.222774	7.543809	0.654009
9.40	5.722975	0.059023	6.520208	0.262576	7.687123	0.716445
9.60	5.835091	0.080211	6.647338	0.304722	7.830881	0.780463
9.80	5.947169	0.104107	6.774580	0.349043	7.975088	0.845947
10.00	6.059209	0.130531	6.901933	0.395382	8.119750	0.912786

表 3.2 光子晶體光纖空氣孔洞間距和 SMF-28 的接合損耗關係

3.3 顏色色散分析

光源發出的光脈衝信號耦合進光纖，在光纖中傳輸時，因光纖的色散特性而造成了脈衝展寬。為了了解光纖的傳輸容量特性，就必須知道該光纖的帶寬究竟有多寬，以便安排它的傳輸資訊量。色散對光纖的通信影響很大，它不但會限制通信速度，也會使光功率的振幅降低，使誤碼率(Bite error rate, BER)增加或使信號雜訊比(Signal noise ratio, SNR)劣化。光通信系統中最常見的兩種光纖是多模態光纖與單模態光纖，色散在這兩種光纖都會發生，但有不一樣的肇因。

多模態光纖的核心直徑約 $50\mu\text{m}$ ，這個尺寸在日常生活的尺度中是非常的小，可是對通信波長如 $0.85\mu\text{m}$ 、 $1.31\mu\text{m}$ 、 $1.55\mu\text{m}$ 、 $1.65\mu\text{m}$ 等光波光源的發光角而言，已經大得足以耦合大量的光。由於光纖核心相對夠大，構成光脈膊之光波可同時在光纖的受光角內以不同的角度射入光纖，然後在光纖內以不同的角度全反射前進，也就是以不同的模態前進。與光纖核心夾角越大的光束全反射的次數越多，反射次數多的光束所行進的路徑較反射次數少的為遠。因此，同樣速度的條件下，光束到達光纖終端檢光器的時間則不一樣。同一個光脈衝內，有的光先到，有的光後到，結果使得光脈衝寬度變大，在光纖內所佔的時間延長，這種因好幾個模態共存而發生的色散現象稱為模態色散或模間色散(Intermodal Dispersion)。

單模態光纖只有一個模態，沒有前述的模態色散問題。可是單模光纖的傳送能力卻受另外兩種色散的影響，它們是材料色散(Material Dispersion)、波導色散(Waveguide Dispersion)，此兩種色散通通發生在單模光纖的模態之內，所以叫做模內色散(Intramodal dispersion)，也稱為顏色色散(Chromatic dispersion)，單模光纖之顏色色散即為這兩種色散的總和。

3.3.1 材料色散

材料色散是由光纖材料自身特性造成的。二氧化矽的折射率，嚴格來說，並不是一個固定的常數，而是對不同的傳輸波長有不同的值。光纖通信實際上用的光源發出的光，並不是只有理想的單一波長，而是有一定的波譜寬度。當光在折射率 n 的為介質中傳播時，光的波長不同，折射率 n 就不同，光傳輸的速度也就不同。因此，當把具有一定光譜寬度的光源發出的光脈衝射入光纖內傳輸時，光的傳輸速度將隨光波長的不同而改變，到達終端時將產生時延差，從而引起脈衝波形展寬。我們可以由公式(3.9)[25]來計算材料色散，材料色散隨波長關係圖如圖 3.13

$$M(\lambda) \approx 1.54 \times 10^4 (E_d / E_o^3) / (n\lambda^3) - 2.17 \times 10^3 E_l^2 \lambda / n \quad (\text{ps/nm/km}) \quad (3.9)$$

For silica, $E_o = 13.3, E_d = 14.62, E_l = 0.127(0.132)$

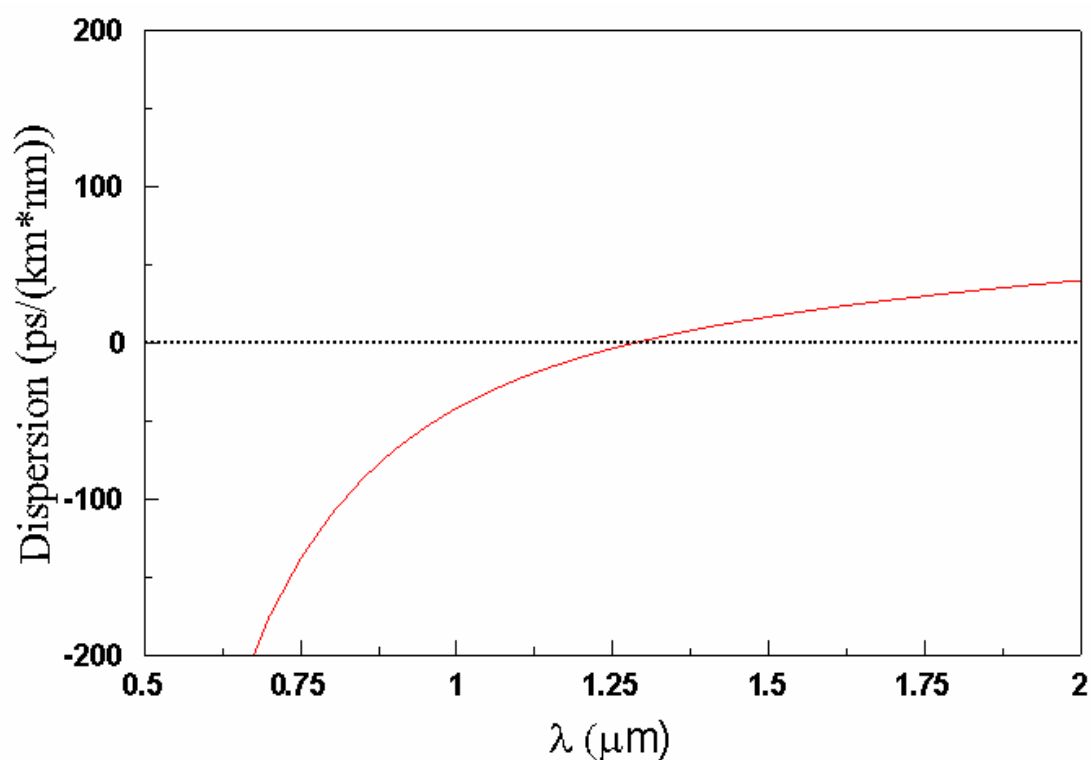


圖 3.13 材料色散對波長關係圖

材料色散是單模光纖的主要色散，在波長 1.27 μm 的地方有一零材料色散點，如果把光纖摻入物質(如 GeO_2)，這個點可在 1.27 μm 至 1.4 μm 間之任意移動。

3.3.2 波導色散

由於光纖的核心與包覆層的折射率差很小，因此在交介面產生全反射時，就可能有一部分光進入包覆層之內。這部分光在包覆層內傳輸一定距離後，又可能回到光纖核心中繼續傳輸。進入包覆層內的這部分光強的大小與光波長有關，這就相當於光傳輸路徑長度隨光波波長的不同而異。把有一定波譜寬度的光源發出的光脈衝射入光纖後，由於不同波長的光傳輸路徑不完全相同，所以到達終點的時間也不相同，因此而出現脈衝展寬。具體來說，入射光的波長越長，進入包覆層中的光強比例就越大，這部分光走過的距離就越長。這種色散是由光纖中的光波導引起的，由此產生的脈衝展寬現象叫做波導色散。

我們可利用公式(3.10)來計算顏色色散，我們在前面提到材料的折射率實際上不是一個固定的常數，但是在 FDTD 中設定二氧化矽的折射率為定值，所以我們由(3.10)所計算出來的色散不包括材料色散，僅只有波導色散

$$D = \frac{-\lambda}{c} \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \quad (3.10)$$

雖然相同空氣比例且不同空氣孔洞間距的光子晶體光纖有效折射係數對波長變化的關係不相同，導致波導色散不相同，但是我們可以利用(3.11)[26]來換算，

$$D_g(\lambda) = \frac{1}{\Lambda} D_{g,N}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \quad (3.11)$$

這樣可以只需要求得較小空氣孔洞間距時波導色散對波長的關係，我們就可以利用計算來得到相同結構比例下其他空氣孔洞間距的波導色散對波長的關係，圖 3.14 為波導色散轉換示意圖

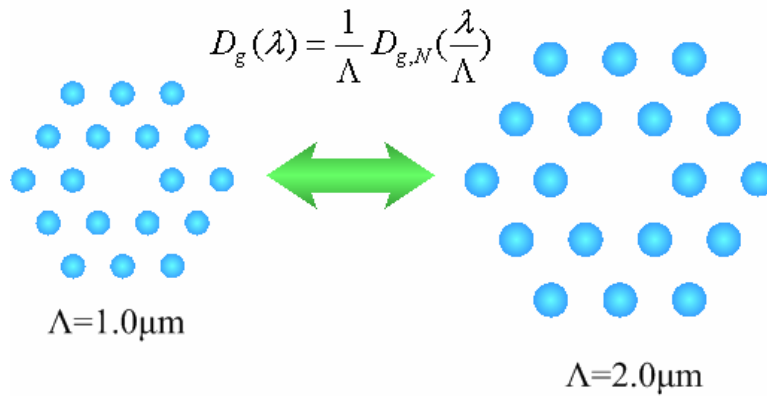


圖 3.14 d/Λ 相同， Λ 不同的波導色散轉換示意圖

現在我們考慮一個 6 圈的光子晶體光纖， $d/\Lambda=0.8$ ， $\Lambda=1.0\mu\text{m}$ 、 $\Lambda=2.0\mu\text{m}$ 和 $\Lambda=3.0\mu\text{m}$ ，圖 3.15 為此情形下波導色散對波長關係圖

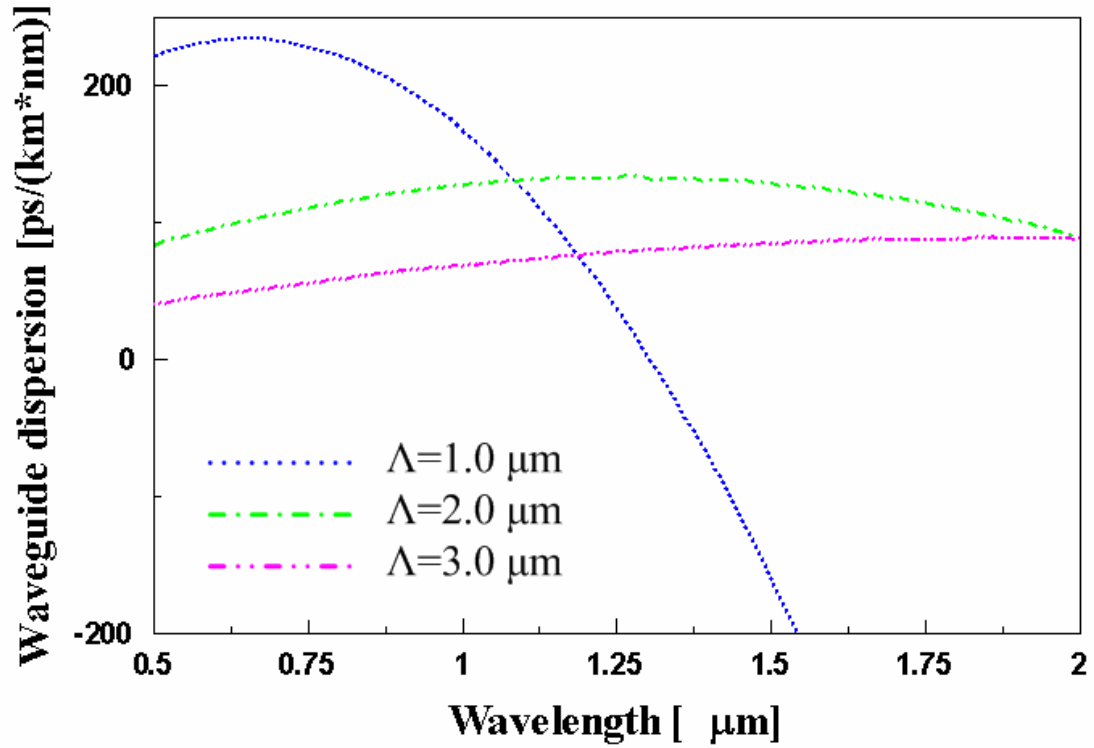


圖 3.15 d/Λ 相同， Λ 不同的波導色散對波長關係圖

在波長 $0.5\mu\text{m}$ – $2.0\mu\text{m}$ 這個範圍，我們可以發現當空氣孔洞間距變大時，波導色散的極值會變小且變化的幅度也會減少，意即當空氣孔洞間距逐漸變大時，光子晶體波導色散的影響將會逐漸變小。

我們接下來討論在相同空氣孔洞間距下，不同空氣孔洞大小得波長色散對波長的變化，同樣為 6 圈的光子晶體光纖， $\Lambda=2.0\mu\text{m}$ ， $d/\Lambda=0.8$ 、 $d/\Lambda=0.6$ 、 $d/\Lambda=0.4$ 和 $d/\Lambda=0.2$ ，圖 3.16 為此情形下波導色散對波長關係圖

空氣孔洞越大，代表有效折射係數的變化也越大，所以影響波導色散也越明顯；反之，空氣孔洞越小，整體而言越接近單純的二氧化矽，對波導色散的影響會變的不明顯。

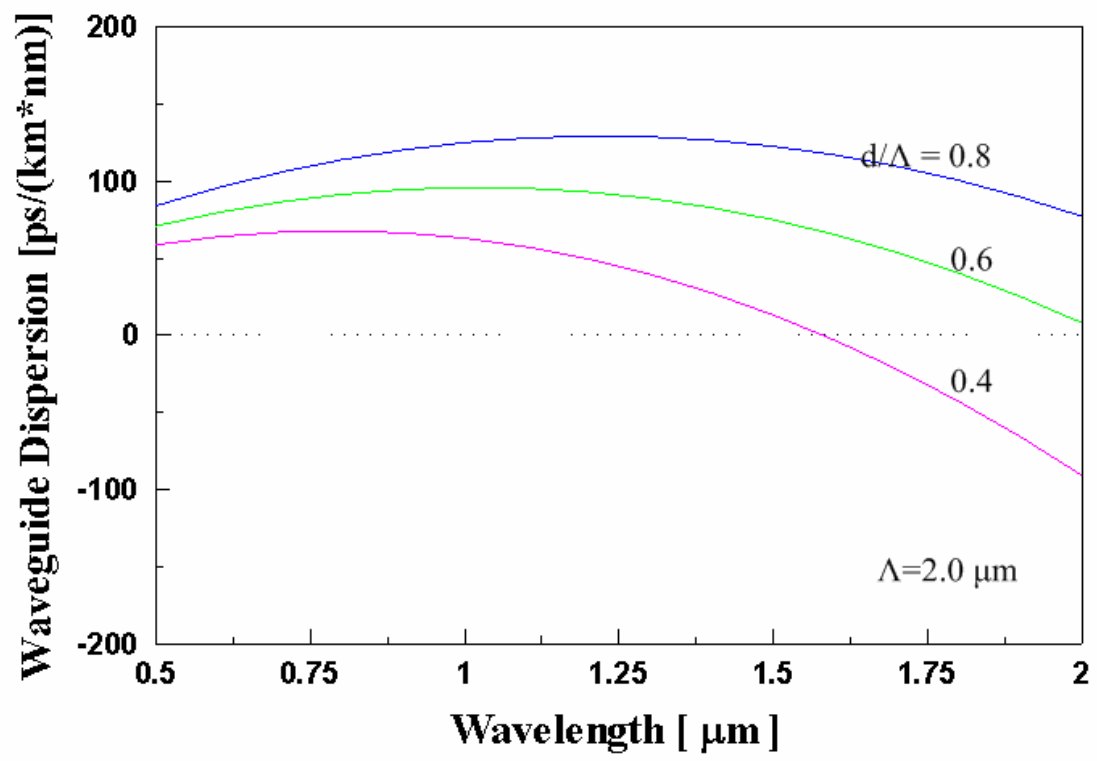


圖 3.16 Λ 相同， d/Λ 不同的波導色散對波長關係圖

3.3.3 顏色色散

在前面我們已經討論材料色散和波導色散，在單模光纖中，顏色色散即為材料色散和波導色散的總和，圖 3.17 即為 $\Lambda=2.0\mu\text{m}$ ， $d/\Lambda=0.8$ ，6 圈光子晶體光纖的顏色色散對波長的關係圖。

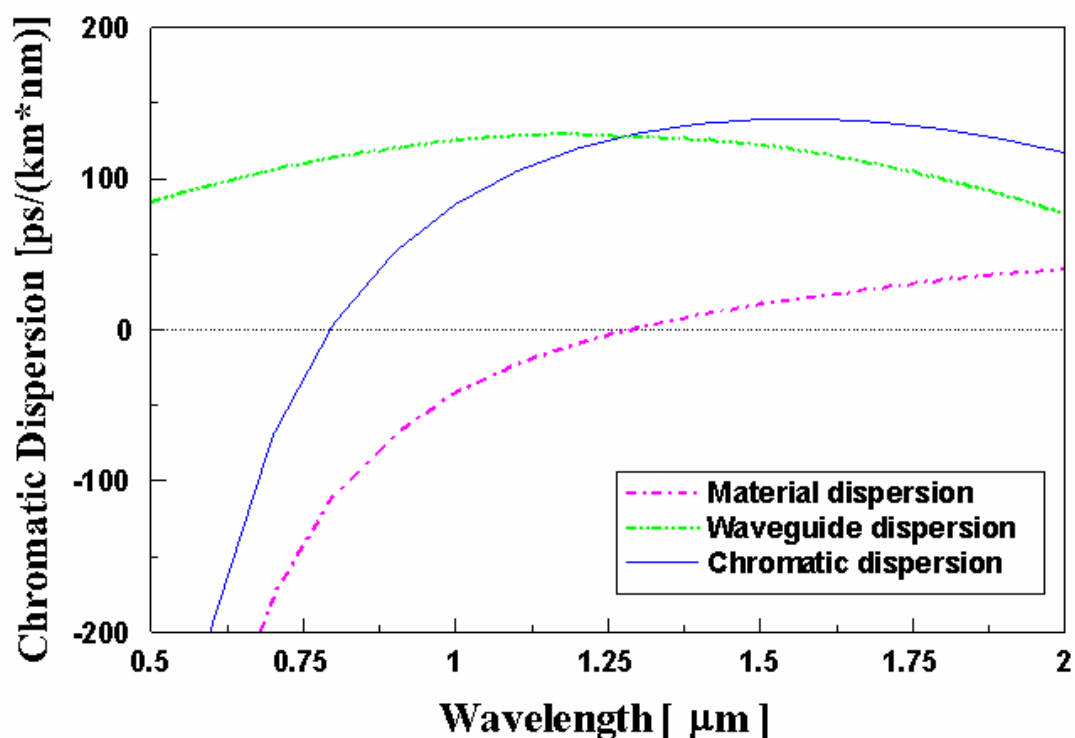
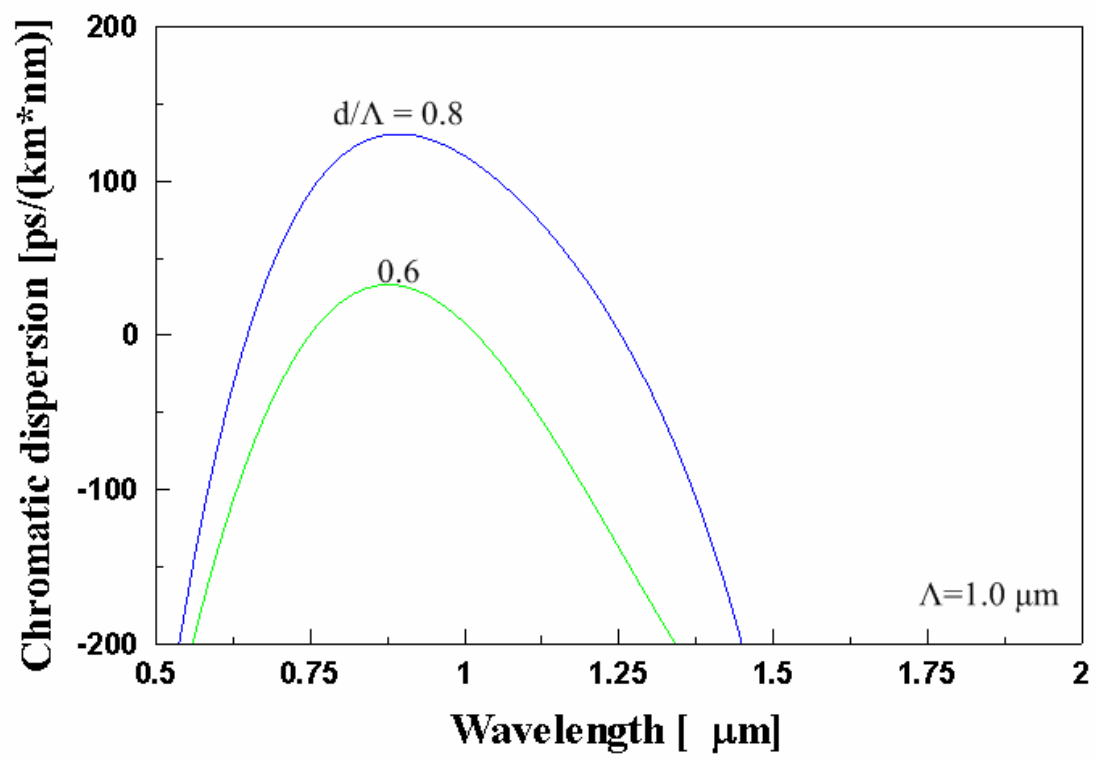
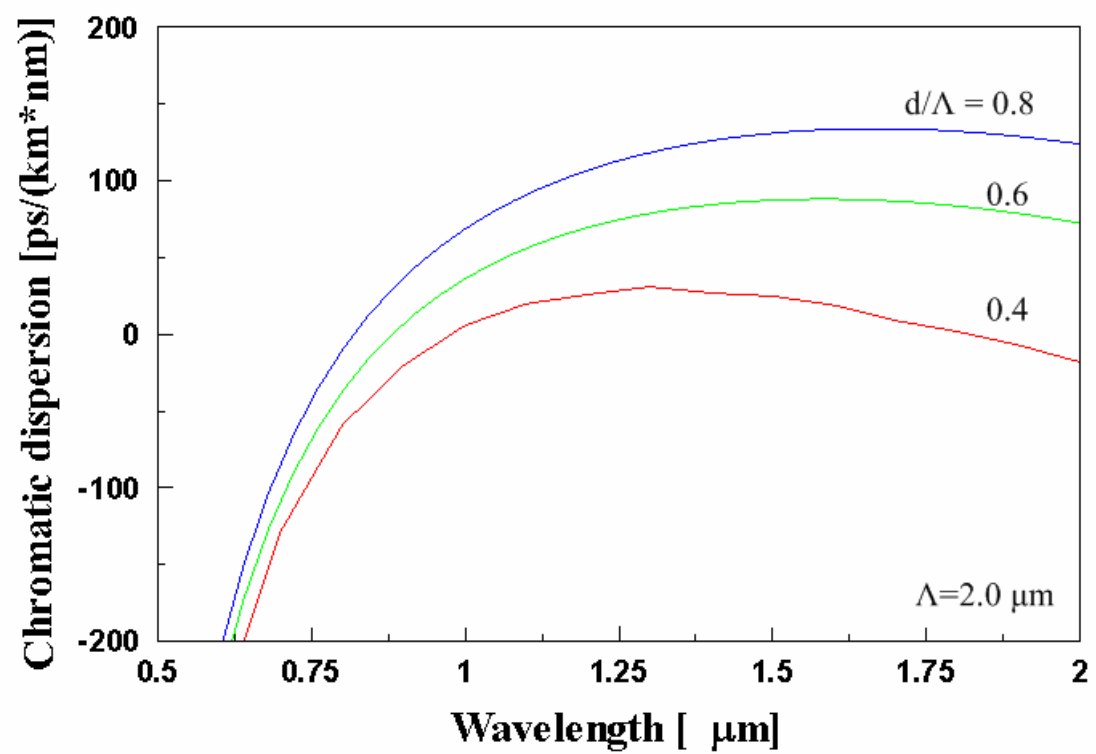


圖 3.17 光子晶體光纖波導色散、材料色散和顏色色散對波長的關係圖

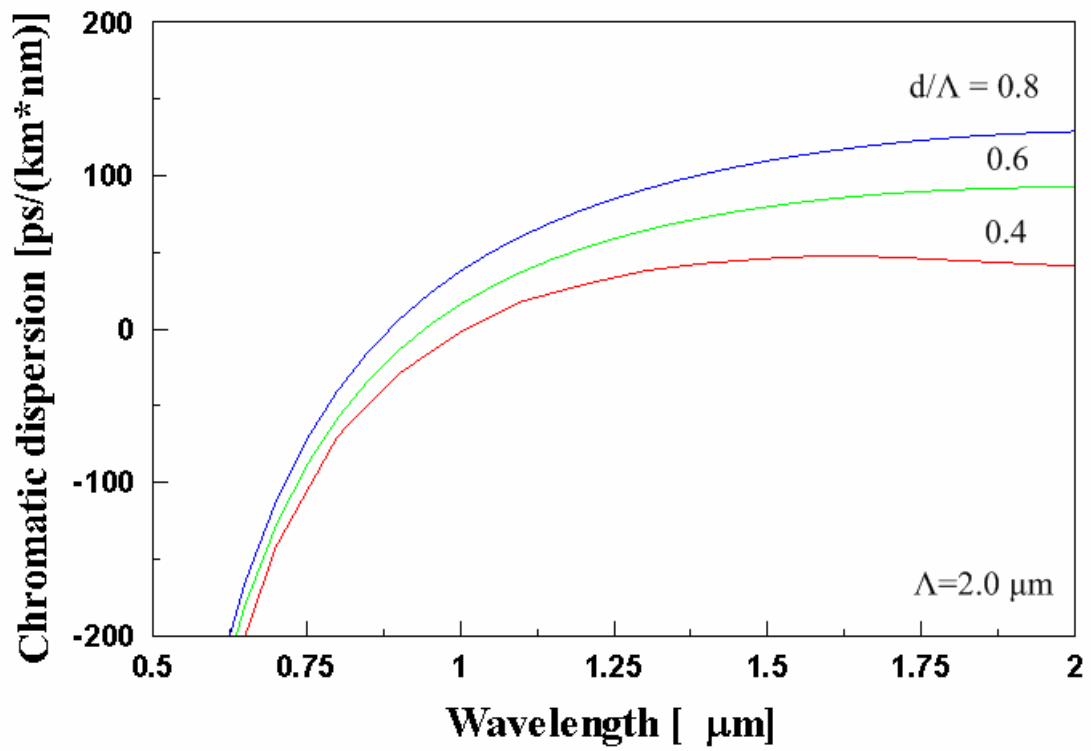
我們討論在相同的空氣孔洞間距下，不同的空氣孔洞大小的顏色色散對波長的關係，同時也討論不同的空氣孔洞間距的顏色色散關係[27]，這些結果如圖 3.18 所示，我們可以從圖中，當空氣孔洞間距較小且空氣孔洞較大時，如圖 3.18(a)，這樣結構的光子晶體光纖在波長為 $1.55\mu\text{m}$ 有很大的負色散，這種特性的光纖可以做為色散補償光纖(dispersion- compensation fiber, DCP)；看出當空氣孔洞間距變大時，如圖 3.18(d)，光子晶體光纖顏色色散的斜率變化會變得較小，在較長波長的範圍顏色色散的變化量不大，我們可以藉由調整光子晶體光纖的空氣孔洞間距和空氣孔洞大小使得在波長為 $1.55\mu\text{m}$ 時接近為零色散(zero dispersion)。



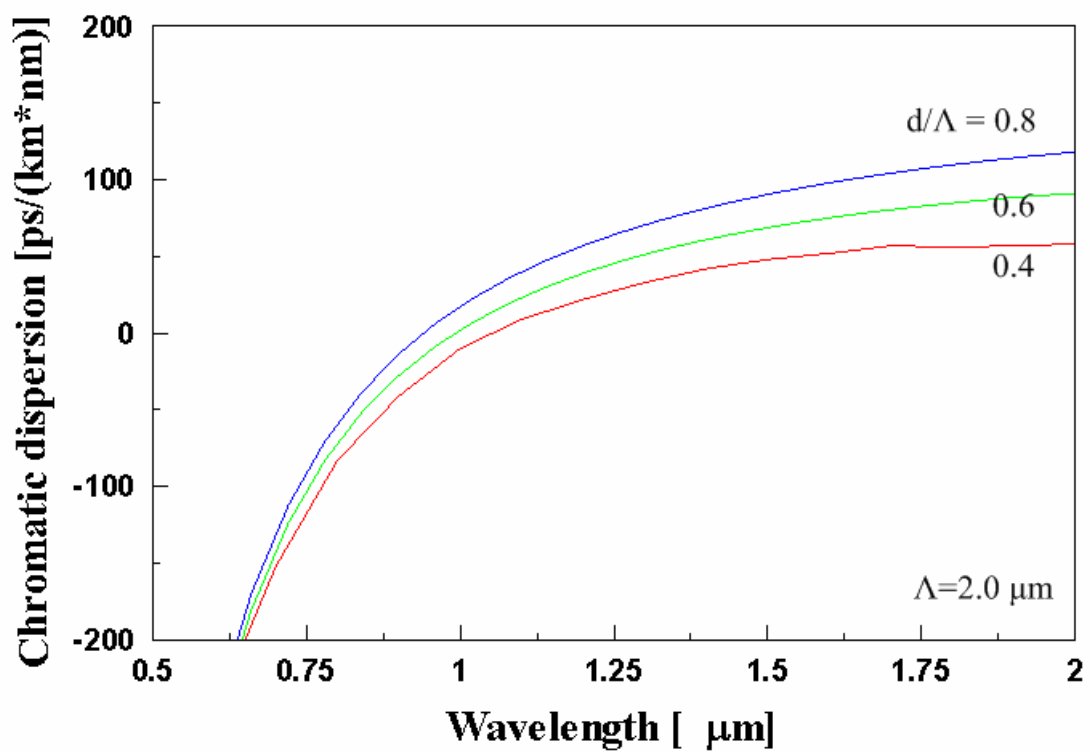
(a) $\Lambda = 1.0 \mu\text{m}$



(b) $\Lambda = 2.0 \mu\text{m}$



(c) $\Lambda=2.5\mu\text{m}$



(d) $\Lambda=3.0\mu\text{m}$

圖 3.18 不同空氣孔洞大小的光子晶體光纖顏色色散對波長的關係圖

(a) $\Lambda=1.0\mu\text{m}$ (b) $\Lambda=2.0\mu\text{m}$ (c) $\Lambda=2.5\mu\text{m}$ (d) $\Lambda=3.0\mu\text{m}$

3.3.4 顏色色散的設計

在光子晶體光纖中我們可以透過改變空氣孔洞的間距和空氣孔洞的大小得到不同的色散關係，在相同的 d/Λ 下，隨著 Λ 逐漸變大，在較長波長時色散的斜率會變得平緩。但是假如只是在包覆層中的使用相同大小的空氣孔洞，我們無法同時控制色散和色散的斜率。光子晶體光纖的導光機制並非因為包覆層的週期性結構產生的能隙效應，所以我們不需要強調在光子晶體光纖中各圈的空氣孔洞大小必須相同[28],[29]。

下面我們舉個例子來說明，假設 n 圈光子晶體光纖各圈的空氣孔洞半徑為 d_i ($i = 0$ to n)，各圈空氣孔洞間距固定，圖 3.18(a) 中 $d_1 > d_2 = d_3 = \dots = d_n$ ，圖 3.18(b) 中 $d_2 < d_1 = d_3 = \dots = d_n$ ，在光子晶體光纖結構圖下面是各圈空氣孔洞對應的折射率數據示意圖，當空氣孔洞大小和空氣孔洞間距比例愈小，代表該圈的折射率較接近二氧化矽，意即折射率較大；當空氣孔洞大小和空氣孔洞間距比例愈大，代表該圈的折射率較接近空氣，意即折射率較小。藉由調整各圈空氣孔洞大小和整體結構的空氣孔洞間距，我們可以在較寬的波長範圍內同時控制色散和色散斜率，這樣的條件使得光子晶體光纖在顏色色散的設計上相當的富有變化性。

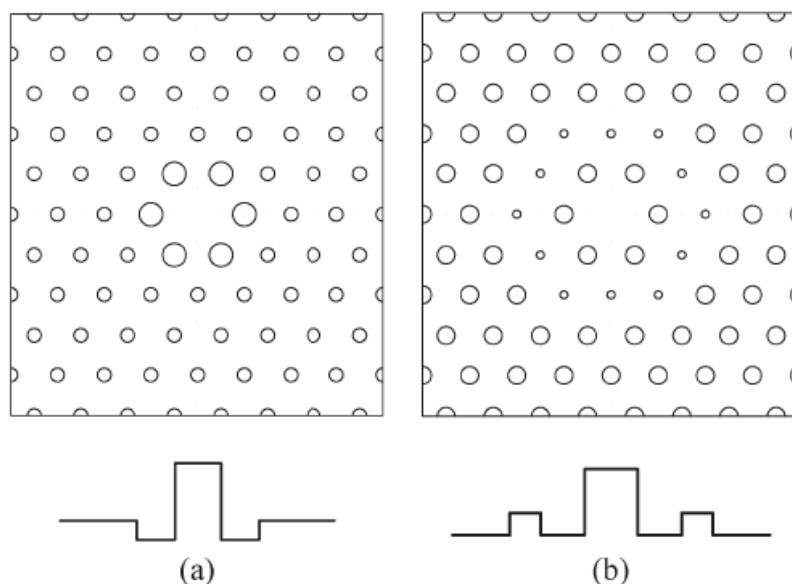


圖 3.19 光子晶體光纖各圈對應的折射率數據示意圖

(a) $d_1 > d_2 = d_3 = \dots = d_n$ (b) $d_2 < d_1 = d_3 = \dots = d_n$

我們現在設計一個有 6 圈空氣孔洞的光子晶體光纖，空氣孔洞間距為 Λ ，第 1 圈到第 6 圈空氣孔洞的直徑分別為 d_1 到 d_n ，其中 $d_1/\Lambda=0.3$ 、 $d_2/\Lambda=0.44$ 、 $d_3/\Lambda=0.46$ 、 $d_4/\Lambda=0.38$ 、 $d_5/\Lambda=0.4$ 、 $d_6/\Lambda=0.4$ ， $\Lambda=1.52\mu\text{m}$ ，其結構如圖 3.19

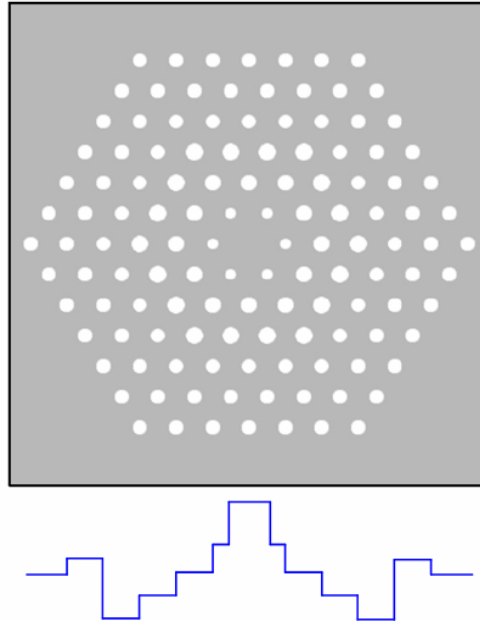
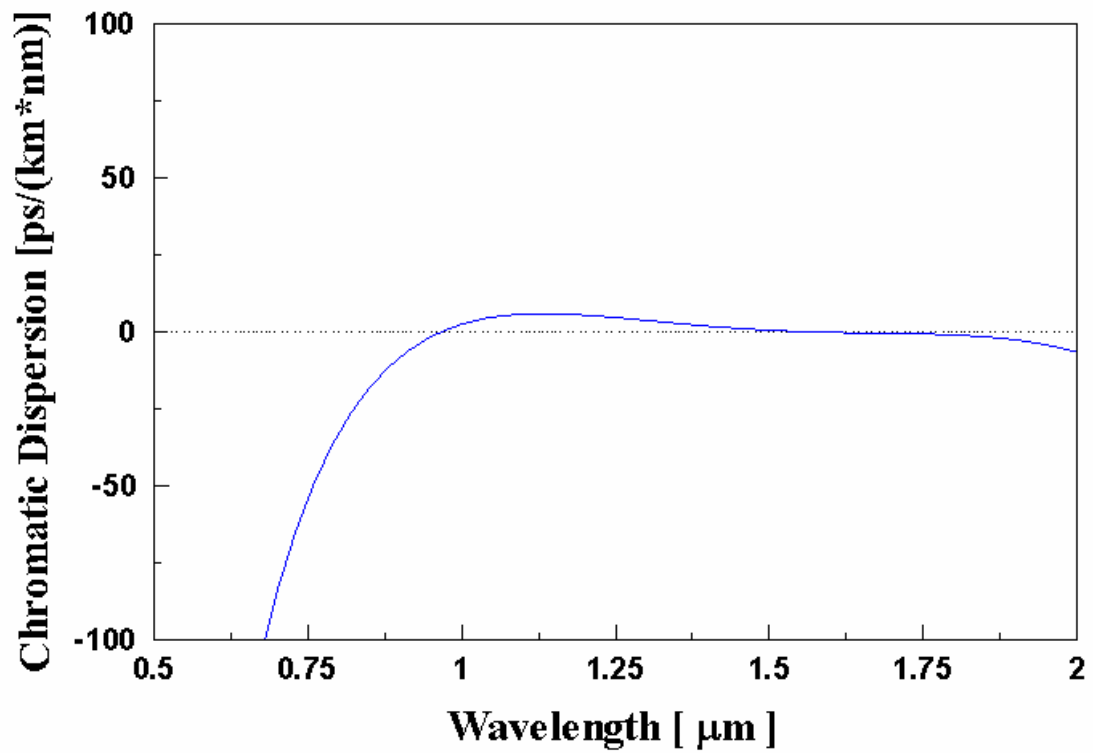
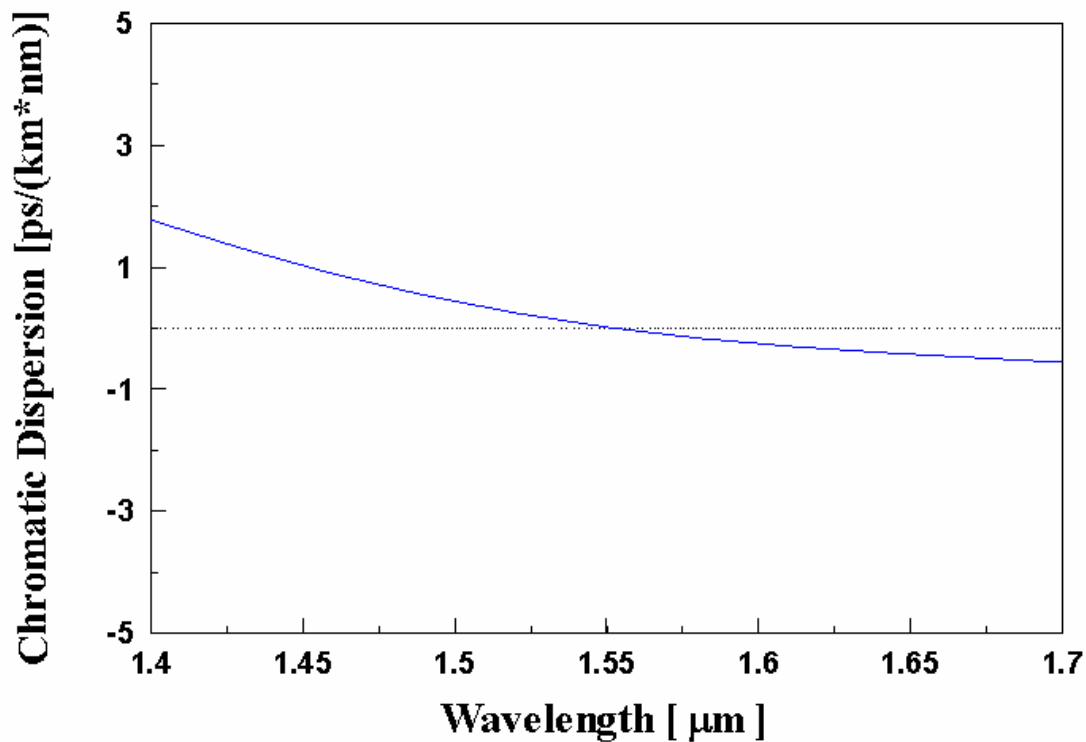


圖 3.20 平坦零色散光子晶體光纖結構圖 (Nearly zero dispersion-flattened PCF)



(a)波長範圍：0.5 μm -2.0 μm



(b)波長範圍：1.4 μm -1.7 μm

圖 3.21 平坦零色散光子晶體光纖的顏色色散對波長關係圖

(a)波長範圍：0.5 μm ~2.0 μm (b)波長範圍：1.4 μm ~1.7 μm

根據前述的參數我們模擬出該光子晶體光纖顏色色散對波長的關係圖，我們可以藉由調整空氣孔洞間距使得該波長的色散為零，在這裡我們設定的空氣孔洞間距使得波長為 1.55 μm 時為零色散，而且在波長範圍 1.4 μm -1.7 μm 間，顏色色散的在+2~-2 之間。利用調整各圈空氣孔洞和整體空氣孔洞間距，我們可以設計光子晶體光纖的顏色色散，使其某個波段範圍內色散為平坦而且接近零，這裡我們提出的參數還有最佳化的空間。

第四章 光子能隙光纖的特性分析

4.1 概論

空間中不同介電物質的週期性部分所形成的結構即為光子晶體[30]，光子晶體可以用一維、二維、三維的方式分類，光子晶體的基本特性是「光子能隙」，也就是某些光子晶體結構會讓電磁波的某些波長範圍無法穿過光子晶體，這個頻帶範圍的電磁波會被光子晶體結構反射，通常這些會被反射的電磁波，其光子晶體的結構週期(通常記為 a ，又稱晶格常數，lattice constant)與電磁波波長的比例(a/λ)為 0.3 到 0.6，也就是若要使用光子晶體的光子能隙的特性，其結構週期需要比波長更小，由此可知，若要將光子晶體應用在可見光波長的範圍，則其光子晶體結構得製作需要用到奈米級的製作技術。

在自然界中，光子晶體的結構也隨手可見，如圖 4.15 蝴蝶的翅膀、蛋白石，我們都可以看得到週期性的結構，它們的週期約在數百奈米，由於具有不完全的 band gap，才使得它們能有鮮艷的顏色展現在可見光的範圍。

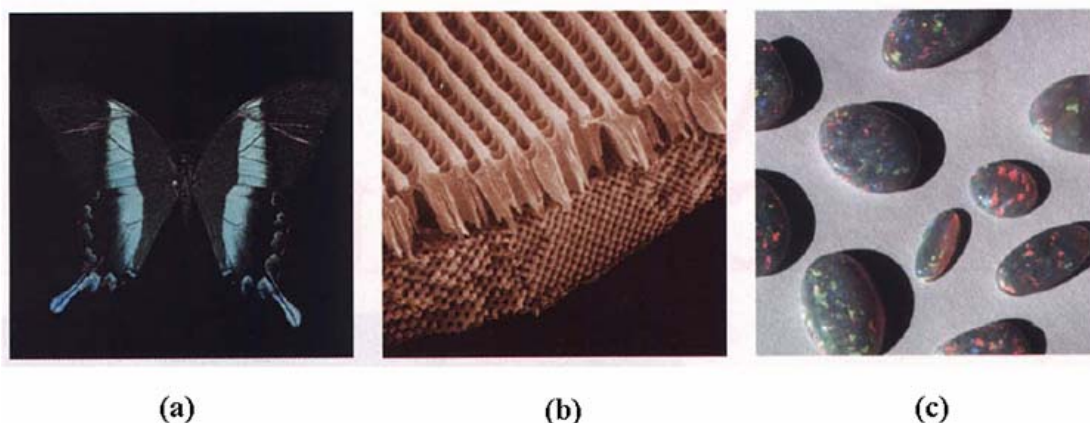


圖 4.1 自然界的光子能隙 (a)蝴蝶翅膀 (b)蝴蝶翅膀的顯微照片 (c)蛋白石

在這一個章節裡，我們將利用第二章建立的數值方法來模擬二維光子晶體的光子能隙，並分析光子能隙光纖的特性。

4.2 二維光子晶體能隙

在這個章節我們討論的是光子能隙光纖，雖然結構上和光子晶體光纖非常的相似，但是導光機制卻完全不同，光子能隙光纖的導光機制主要是由於包覆層的完美週期性光晶格結構產生布拉格繞射效應(Bragg diffraction)而存在某些光頻帶能隙。

分析光子能隙光纖前，我們先計算二維光子晶體能隙，圖 4.1 是三角形排列的二維光子晶體橫截面，即為 XY 平面，向 Z 軸方向均勻延伸，首先先考慮 TE_z 模態和 TM_z 模態的能隙結構，在這個例子中 $r=0.48a$ ，空氣孔洞的介電常數 $\epsilon_{r1}=1$ ，背景介質的介電常數 $\epsilon_{r2}=13$ ， TE_z 模態和 TM_z 模態的能隙結構如圖 4.2(a)和圖 4.2(b)，圖中的實線是平面波展開法(Plane Wave Expansion method)[31]所得到的結果，圖中圓圈標記是由第二章的時域有限差分法得到的模擬結果，我們可以發現兩者的結果相當吻合。

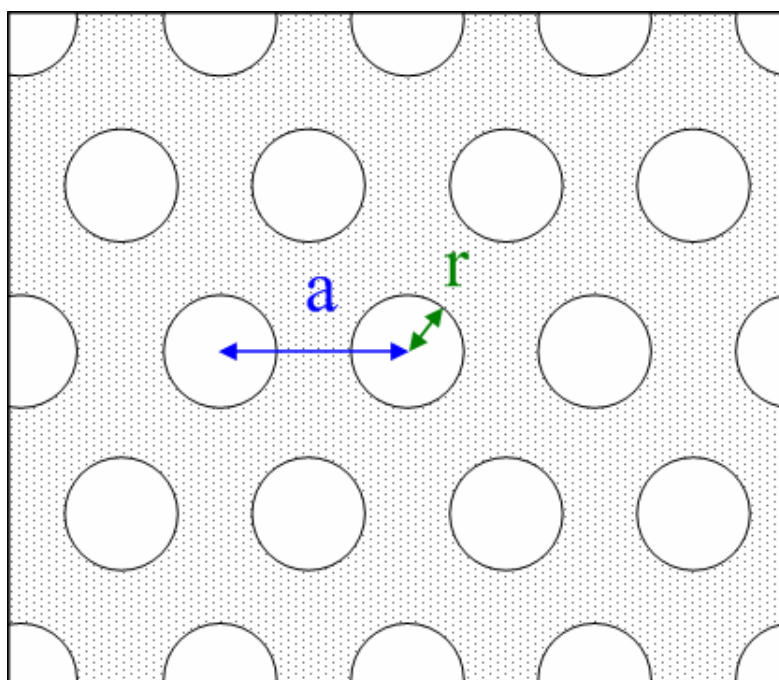
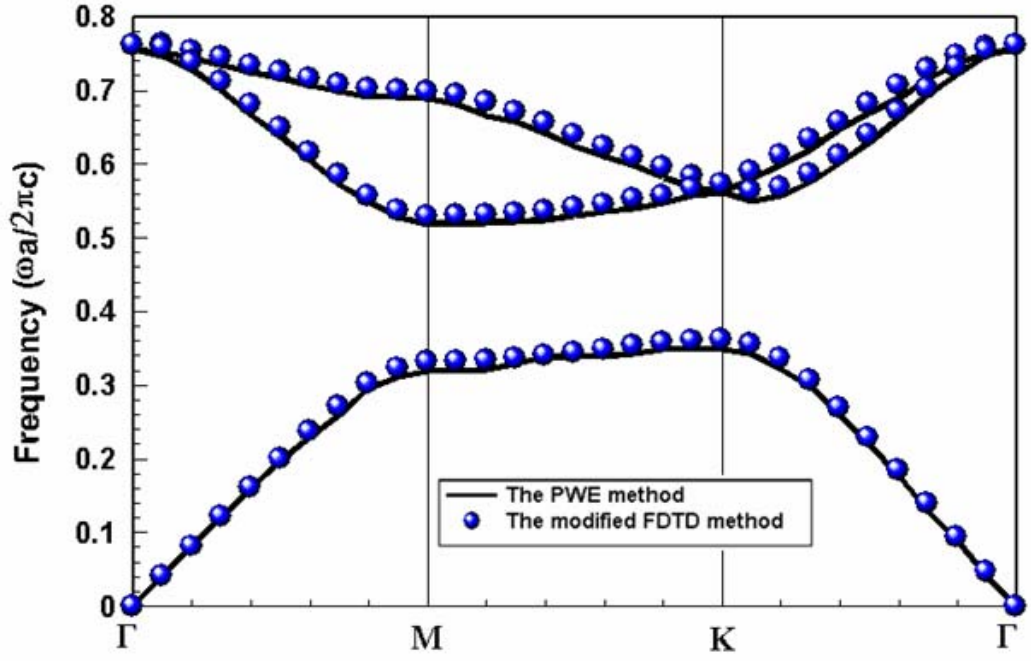
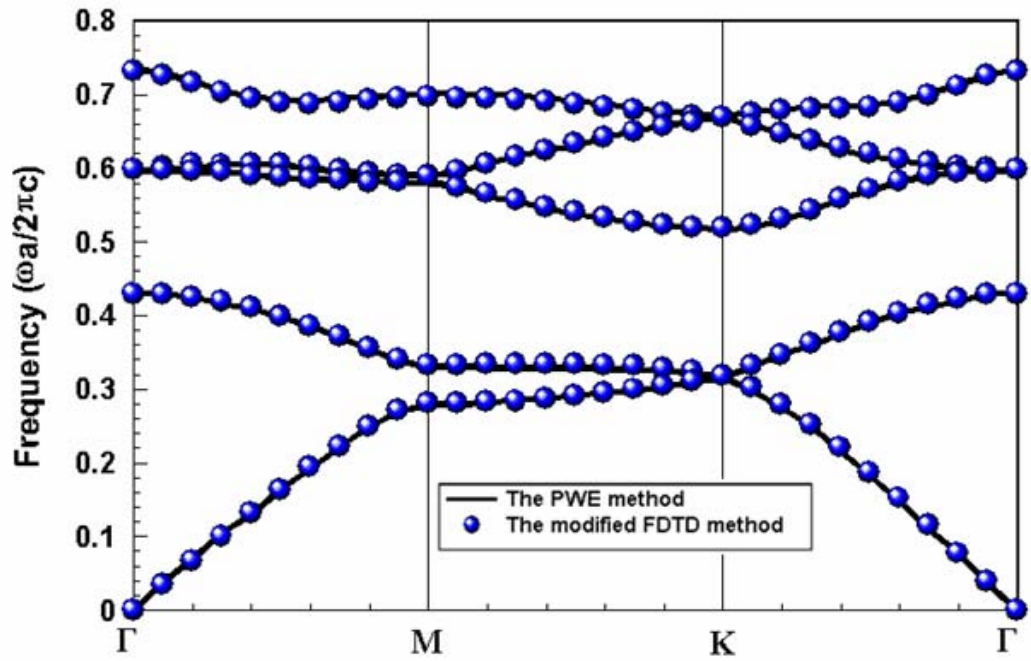


圖 4.2 三角形排列的二維光子晶體橫截面



(a) TE_z



(b) TM_z

圖 4.3 三角形排列的二維光子晶體 in-plane 能隙結構

(a) TE_z 模態 (b) TM_z 模態

我們在前面討論的 TE_z 模態和 TE_z 模態是電磁波的二維傳播情形，即為 $k_x \neq 0$ 、 $k_y \neq 0$ 、 $k_z = 0$ 的情形，此時的能隙亦稱為 in-plane band structure。現在我們考慮電磁波的三維傳播，即 $k_x \neq 0$ 、 $k_y \neq 0$ 、 $k_z \neq 0$ 的情形，此時的能隙亦稱為 out-of-plane band structure，在這個例子中 $r=0.45a$ ，空氣孔洞的折射率 $n_1=1$ ，背景介質為二氧化矽其折射率 $n_2=1.45$ ，我們計算出在不同 k_z 值下所對應的 band gap，然後將這些結果表示在圖 4.4，我們也和有限元素(finite element method, FEM)[32]做比較，我們可以從圖中看出結果相當吻合。

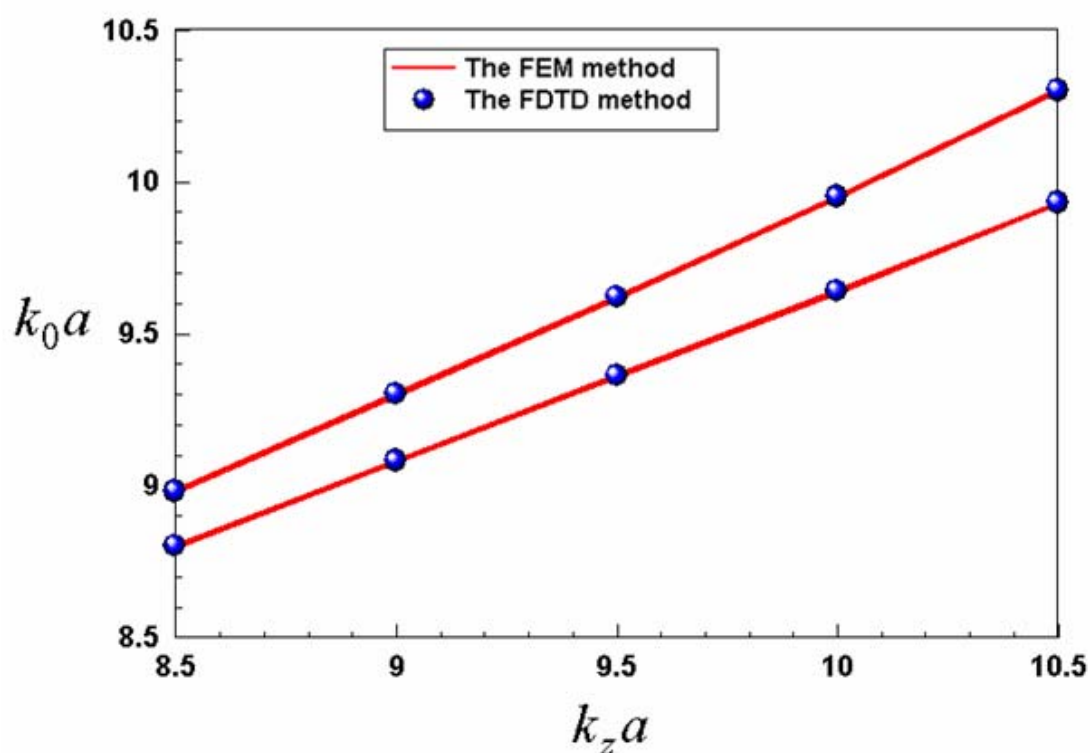


圖 4.4 三角形排列的二維光子晶體 out-of-plane 能隙結構

4.3 傳播模態分析

我們現在考慮空氣傳導的光子能隙光纖(Air-guiding Photonic band-gap fiber)， d 為空氣孔洞的直徑， Λ 為相鄰空氣孔洞間距，二氧化矽折射率為 1.45，空氣折射率為 1，外圍的光子晶體為在橫截面為三角形排列，中間較大的空氣孔洞為 7 個單位空氣孔洞組成的，如圖 4.5 即為光子能隙光纖橫截面，因為外圍光子晶體所產生的光子能隙效應，使得光在某個頻率範圍內無法橫向傳播，只能在中央較大的空氣孔洞中作縱向傳播。

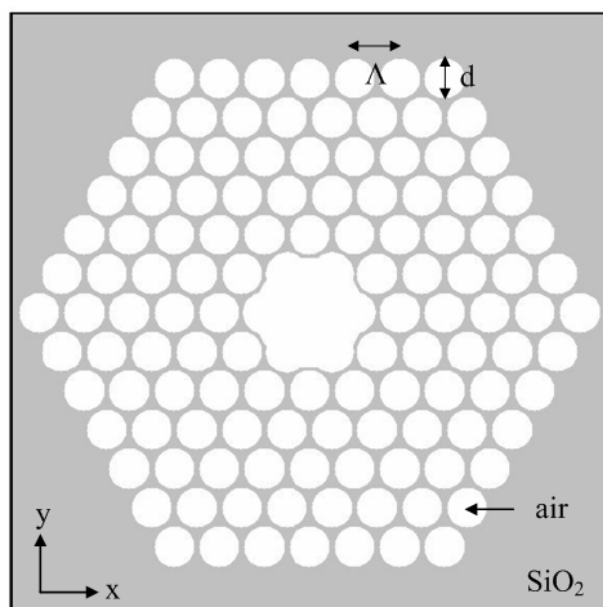


圖 4.5 光子能隙光纖橫截面在 compact 2D-FDTD 程式示意圖

在這個空氣傳導的光子能隙光纖中，空氣孔洞直徑和空氣孔洞間距比為 0.9，即 $d/\Lambda=0.9$ ，我們已經在前面計算過這個條件下光子晶體的能隙如圖 4.4，然後我們計算在光子能隙光纖中，不同傳播常數所對應的基模模態頻率，將數據轉換後和有限元素法做比較[32]，圖 4.6 為模式色散(modal dispersion)對規一化傳播常數的關係圖，我們可以從圖中看出結果相當吻合。 k_0 為自由空間中的波數 (free space wavenumber)，在這個結構下的光子能隙光纖，其基模模態截止頻率的

上限和下限分別在 $k_0\Lambda=9.0$ 和 $k_0\Lambda=9.7$ 。將圖 4.6 的數值結果經過計算換算成有效折射係數對規一化波長的關係圖為圖 4.7。

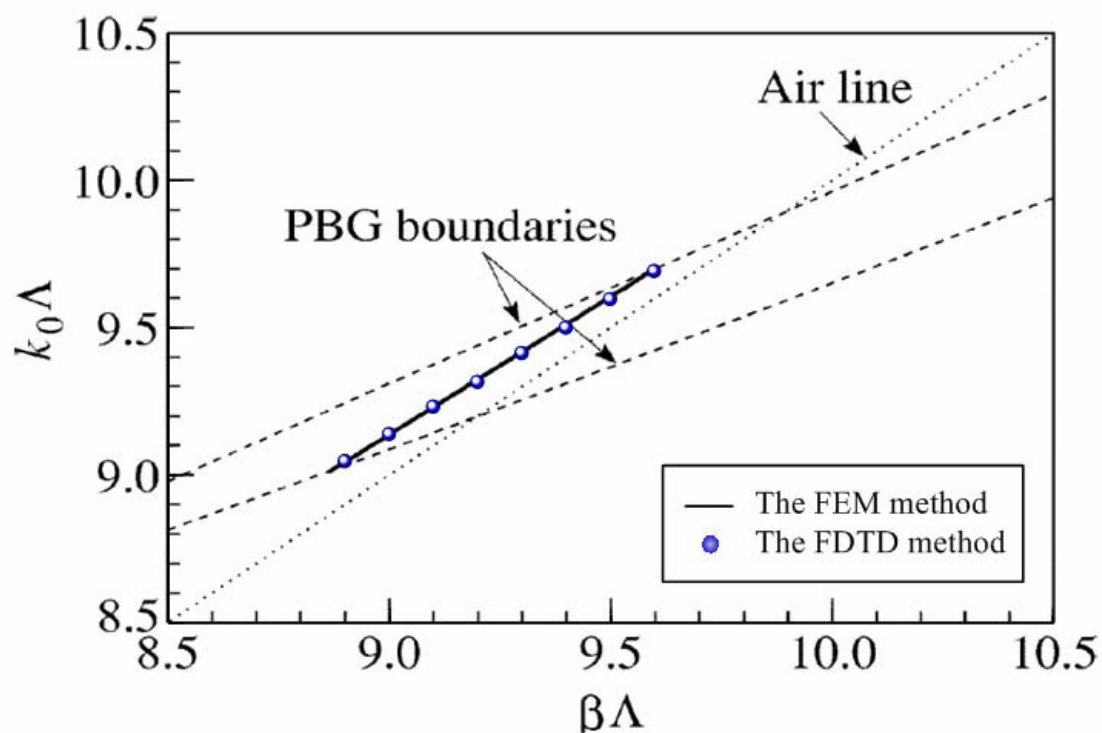


圖 4.6 模式色散對規一化傳播常數的關係圖

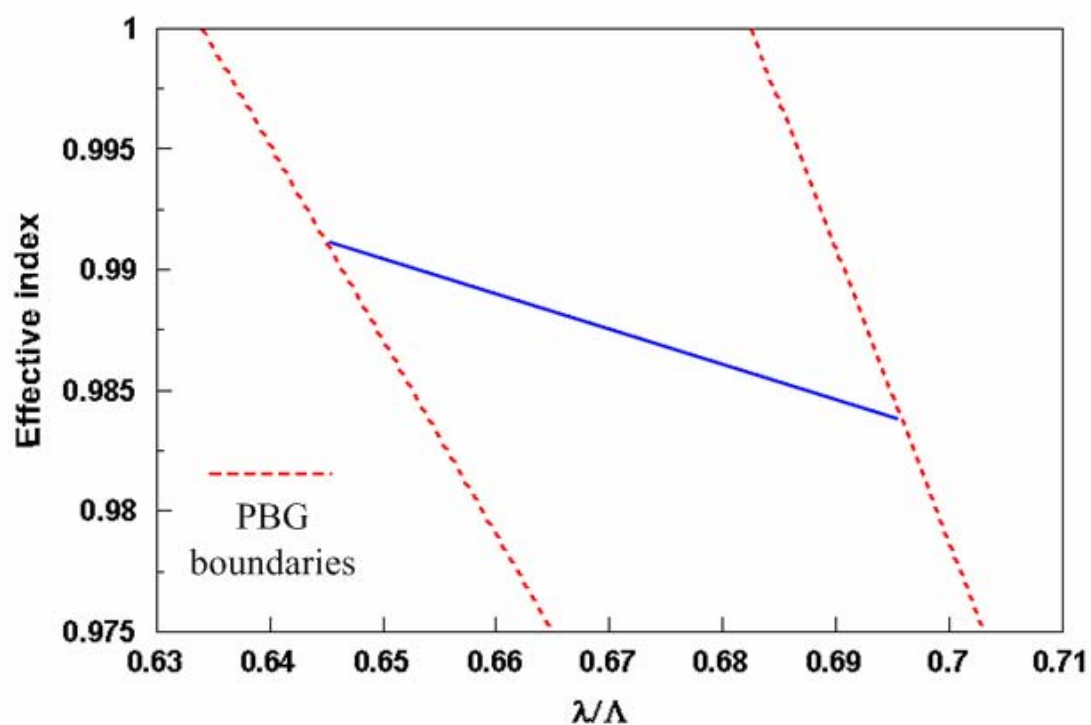


圖 4.7 有效折射係數對規一化波長的關係圖

第五章 結論

在本篇論文中，我們利用時域有限差分法(FDTD method)所衍生的 Compact 2D-FDTD 來模擬軸向均勻延伸的波導結構，配合吸收邊界和週期性邊界條件來模擬傳播特性和能隙效應，雖然光子晶體光纖(PCFs)和光子能隙光纖(PBGFs)導光機制不相同，但 Compact 2D-FDTD 可以用來分析這兩種光纖的特性。

在分析光子晶體光纖的部份，我們先分析基模模態的場形和極化分析，因為不同傳播常數所對應基模模態頻率而得到有效折射率對波長的變化關係；且由於其導光機制類似於傳統光纖，因此我們也建立類似傳統光纖的正規化頻率來分析傳播模態是單模還是多模，並且討論了不同空氣孔洞比例的光子晶體光纖，在規一化波長(λ/Λ)其模態操作區域，當空氣孔洞直徑和空氣孔洞間距比例小於 0.43($d/\Lambda < 0.43$)時，光子晶體光纖展現了寬頻單模特性；對單模光纖特性影響最大的是傳播模態時光場的分布，所以我們也討論了模場直徑，模場直徑也同時影響了在兩種不同單模光纖接合的損耗，當兩種光纖的模場直徑愈接近，它們的接合損耗就愈小；配合正規化頻率和模場直徑，我們可以針對不同模場直徑的傳統單模光纖，設計出同為單模且接合損耗小於 0.25dB 的光子晶體光纖；然後我們討論光子晶體光纖的顏色色散，並且利用調整各圈空氣孔洞比例和整體空氣孔洞間距來設計平坦的零色散光子晶體光纖，在論文我們所提出的光子晶體光纖結構在 $1.4\mu\text{m} \sim 1.7\mu\text{m}$ 波長範圍內，色散在 $+2 \sim -2(\text{ps}/(\text{Km} \cdot \text{nm}))$ 之間，我們還可以藉由將參數最佳化，設計出更好的顏色色散特性的光子晶體光纖。

最後在分析光子能隙光纖的部份，我們討論了因為二維三角晶格週期性光子晶體而產生的能隙效應，並且分析在能隙間的傳播特性。藉由數值分析我們可以設計出在不同應用的光子晶體光纖和光子能隙光纖，其特性會較傳統光纖優越。

參考文獻

- [1] J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell, and D. M. Atkin, "All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding," *Opt. Lett.*, vol. 21, no. 19, pp.1547–1549, Oct. 1996.
- [2] T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russell, "Endlessly single-mode photonic crystal fiber," *Opt. Lett.*, vol. 22, no. 13, pp. 961–963, Jul. 1997.
- [3] J. C. Knight, T. A. Birks, R. F. Cregan, P. St. J. Russell, and J.-P. de Sandro, "Large mode area photonic crystal fiber," *Electron. Lett.*, vol. 34, pp. 1347–1348, June 1998.
- [4] A. Ortigosa-Blanch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, J. Arriaga, B. J. Mangan, T. A. Birks, and P. S. J. Russell, "Highly birefringent photonic crystal fibers," *Opt. Lett.*, vol. 25, no. 18, pp. 1325–1327, Sep. 2000.
- [5] T. P. Hansen, J. Broeng, S. E. B. Libori, E. Knuders, A. Bjarklev, J. R. Jensen, and H. Simonsen, "Highly birefringent index-guiding photonic crystal fibers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 13, no. 6, pp. 588–590, Jun. 2001.
- [6] J. C. Knight, J. Arriaga, T. A. Birks, A. Ortigosa-Blanch, W. J. Wadsworth, and P. S. J. Russell, "Anomalous dispersion in photonic crystal fiber," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 12, no. 7, pp. 807–809, Jul. 2000.
- [7] J. C. Knight, J. Broeng, T. A. Birks, and P. S. J. Russell, "Photonic band gap guidance in optical fiber," *Science*, vol. 282, no. 5393, pp. 1476–1478, Nov. 1998.
- [8] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. on Ant. and Propag.*, vol. 14, pp. 302–307, May 1966.
- [9] A. Asi, and L. Shafai, "Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD," *Electron Lett.*, Vol. 28, pp. 1451–1452, 1992
- [10] A. Asi and L. Shafai, "Multiple mode analysis of waveguides using compact FDTD," *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1993. AP-S. Digest 28 June–2 July 1993 Page(s):360 - 363 vol.1
- [11] Cangellaris, A.C, " Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2-D/FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides", *IEEE microwave and guided wave Letters*, vol. 3, no. 1, January 1993
- [12] Berenger, J.-P., "A perfectly matched layer for free-space simulation in finite-difference computer codes," submitted to *Annales des Telecommunications*, 1994.

- [13] Berenger, J.-P., "Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic," *Journal of computational physics* 127, no. 0181, pp.363–379 (1996)
- [14] H. Y. D. Yang, "Finite difference analysis of 2-D photonic crystals," *IEEE Tran. Microw. Theory Tech.*, vol. 44, pp. 2688-2695, 1996.
- [15] M. Qiu, and S. He, "A nonorthogonal finite-difference time-domain method for computing the band structure of a two-dimensional photonic crystal with dielectric and metallic inclusions," *J. Appl. Phys.*, vol. 87, pp. 8268-8275, 2000.
- [16] H. J. Ou, T. L. Wu, "Analysis and solution of modes loss problem for computing the bandgap structure of periodic structures by 2-D FDTD method," *International Conference ATENNAs, RADAR, AND WAVE PROPAGATION (IASTED)*, Banff, Alberta, Canada, Jul. 2005
- [17] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*. Boston, MA: Artech House, 1995
- [18] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, P. Andrés, and M. V. Andrés, "Full vector analysis of a realistic photonic crystal fiber," *Opt. Lett.*, vol. 24, pp. 276–278, Mar. 1999.
- [19] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, P. Andrés, and M. V. Andrés, "Vector description of higher-order modes in photonic crystal fibers," *J. Opt. Soc. Amer. A*, vol. 17, pp. 1333–1340, July 2000.
- [20] K. Saitoh and M. Koshiba, "Full-vectorial imaginary-distance beam propagation method based on a finite element scheme: Application to photonic crystal fibers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 38, no. 7, pp. 927–933, Jul. 2002.
- [21] M. Midro, M. P. Singh, and C. G. Someda, "The space filling mode of holey fibers: An analytical vectorial solution," *J. Lightw. Technol.*, vol. 18, no. 7, pp. 1031–1037, Jul. 2000.
- [22] N. A. Mortensen, J. R. Folkenberg, M. D. Nielsen, and K. P. Hansen, "Modal cutoff and the V parameter in photonic crystal fibers," *Opt. Lett.*, vol. 28, no. 20, pp. 1879–1881, Oct. 2003.
- [23] M. Koshiba and K. Saitoh, "Applicability of classical optical fiber theories to holey fibers," *Opt. Lett.*, vol. 29, no. 15, pp. 1739–1741, Aug. 2004.
- [24] D. Marcuse, "Loss analysis of single-mode fiber splices," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 56, no. 5, pp. 703–718, May–Jun. 1977.
- [25] R. A. Sammut, "Analysis of approximations for the mode dispersion in monomode fiber," *Electron Lett.*, vol. 15, pp. 590-591, 1979.
- [26] A. Ferrando, E. Silvestre, and P. Andres, "Designing the properties of dispersion-flattened photonic crystal fiber," *Opt. Express* 9, 687 (2001)

- [27] J. C. Knight, J. Arriaga, T. A. Birks, A. Ortigosa-Blanch, W. J. Wadsworth, and P. S. J. Russell, "Anomalous dispersion in photonic crystal fiber," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 12, no. 7, pp. 807–809, Jul. 2000.
- [28] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, and P. Andrés, "Nearly zero ultra-flattened dispersion in photonic crystal fibers," *Opt. Lett.*, vol. 25, no. 11, pp. 790–792, Jun. 2000.
- [29] K. Saitoh, M. Koshiba, T. Hasegawa, and E. Sasaoka. (2003, Apr.). Chromatic dispersion control in photonic crystal fibers: Application to ultra-flattened dispersion. *Opt. Express* [Online]. 11(8), pp. 843–852.
Available: <http://www.opticsexpress.org/>
- [30] E. Yablonovitch, "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics," *Phys. Rev. Lett.* Vol. 58, pp. 2059-2062, 1987.
- [31] R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, "Existence of a photonic band gap in two dimensions," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 61, pp.495-497, 1992.
- [32] K. Saitoh, and M. Koshiba, "Confinement loss in air-guiding photonic bandgap fibers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol. 15, pp.236-238, 2003.
- [33] 歐宏俊, "三核心光子晶體光纖功率分歧器之模擬與設計," 中山大學博士論文, 2006
- [34] 趙嘉信, "以向量邊界元素法研究光子晶體光纖," 中山大學博士論文, 2006