Automatización III

Clase 1

Juan Pablo Restrepo Uribe

Instituto Tecnologico Metropolitano

March 8, 2025

Juan Pablo Restrepo Uribe
Ingeniero Biomédico
MSc. Automatización y Control Industrial

Clasificación de sistemas según el amortiguamiento

El amortiguamiento en un sistema dinámico determina cómo se comporta su respuesta en el tiempo. Se puede analizar a partir de la ecuación característica de un sistema de segundo orden, que tiene la forma:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{1}$$

Donde:

- ζ = factor de amortiguamiento.
- ω_n = frecuencia natural.

Clasificación de sistemas según el amortiguamiento

Dependiendo del valor de ζ, el sistema se clasifica de la siguiente manera:

- **Subamortiguado:** $(0 < \zeta < 1)$ - Polos complejos conjugados con parte real negativa - Oscilaciones decrecientes
- **Críticamente amortiguado:** $(\zeta = 1)$ - Polos reales repetidos negativos - No oscila, pero tarda en estabilizarse
- **Sobreamortiguado** $(\zeta > 1)$ - Polos reales negativos diferentes - Respuesta lenta sin oscilaciones
- **No amortiguado:** $(\zeta = 0)$ - Polos puramente imaginarios - Oscilaciones constantes

Clasificación de sistemas según el amortiguamiento - Función de Transferencia

Para analizar la respuesta de cada sistema, utilizamos la función de transferencia estándar de un sistema de segundo orden:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{2}$$

Clasificación de sistemas según el amortiguamiento - Función de Transferencia - Ejemplo

Se consideran cuatro casos con distintos valores de ζ:

- **Caso 1**: $\zeta = 0.5$ (Subamortiguado)
- **Caso 2**: $\zeta = 1$ (Críticamente amortiguado)
- **Caso 3**: $\zeta = 1.5$ (Sobreamortiguado)
- **Caso 4**: $\zeta = 0$ (No amortiguado)

Clasificación de sistemas según el amortiguamiento - Función de Transferencia - Ejemplo -Interpretación de Resultados

1. Sistema Subamortiguado ($\zeta = 0.5$)
   - **Ubicación de polos**: Complejos conjugados con parte real negativa.
   - **Comportamiento**: Oscilaciones decrecientes antes de estabilizarse.
2. Sistema Críticamente Amortiguado ($\zeta = 1$)
   - **Ubicación de polos**: Dos polos reales negativos iguales.
   - **Comportamiento**: No oscila, pero tarda en alcanzar el valor final.
3. Sistema Sobreamortiguado ($\zeta = 1.5$)
   - **Ubicación de polos**: Dos polos reales negativos distintos.
   - **Comportamiento**: No oscila, pero su respuesta es más lenta.
4. Sistema No Amortiguado ($\zeta = 0$)
   - **Ubicación de polos**: Polos puramente imaginarios.
   - **Comportamiento**: Oscilaciones constantes sin amortiguarse.

Estabilidad de sistemas

La estabilidad de un sistema es una propiedad fundamental en el análisis de sistemas dinámicos y control, que indica si el sistema mantiene un comportamiento predecible ante perturbaciones o condiciones iniciales.

Estabilidad de sistemas - Tipos de estabilidad

- Estabilidad en el sentido de Lyapunov: Un sistema es estable si, cuando se aplica una pequeña perturbación a sus condiciones iniciales, su respuesta no se aleja demasiado del estado de equilibrio.
- Estabilidad asintótica: Un sistema es asintóticamente estable si, además de ser estable, cualquier perturbación disminuye con el tiempo hasta que el sistema regresa a su estado de equilibrio.
- Estabilidad exponencial: Es un caso más fuerte de estabilidad asintótica, donde la perturbación disminuye a una tasa exponencial.
- Inestabilidad: Si una pequeña perturbación provoca que la salida del sistema crezca sin control, el sistema es inestable.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos

En sistemas dinámicos, la estabilidad se analiza a partir de la ubicación de los polos en el plano complejo s, donde s es la variable de la Transformada de Laplace. Dado un sistema representado por su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde:

- $N(s)$ es el numerador (relacionado con los ceros del sistema).
- $D(s)$ es el denominador (polinomio característico).

Los polos del sistema son las raíces del denominador $D(s) = 0$.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos

Un sistema lineal es estable si todos sus polos (raíces del denominador de la función de transferencia) tienen parte real negativa.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos - Regla general de estabilidad

- Un sistema es estable si todos los polos tienen parte real negativa, es decir, están en el semiplano izquierdo del plano s ($\mathrm{Re}(s) < 0$).
- Un sistema es inestable si al menos un polo tiene parte real positiva, es decir, está en el semiplano derecho ($\mathrm{Re}(s) > 0$).
- Un sistema es marginalmente estable si tiene polos en el eje imaginario ($\mathrm{Re}(s) = 0$), pero sin repetición.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos - Regla general de estabilidad

Supongamos que un sistema tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

Para encontrar los polos, resolvemos:

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

Factorizamos:

$$(s + 3)(s + 1) = 0$$

$$s_1 = -3, \quad s_2 = -1$$

Como ambos polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos - Regla general de estabilidad

Consideremos la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

Resolvemos la ecuación característica del denominador:

$$s^2 - 3s + 2 = 0$$

Factorizando:

$$(s-2)(s-1) = 0$$

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 1$$

Dado que ambos polos tienen $\Re(s) > 0$, el sistema es inestable

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Ubicación de los polos - Regla general de estabilidad

Caso	**Ubicación de Polos**	**Comportamiento en el Tiempo**
Sistema Estable	$\Re(s) < 0$	La salida converge a un valor finito
Sistema Inestable	$\Re(s) > 0$	La salida crece sin control
Sistema Marginalmente Estable	$\Re(s) = 0$ (sin repetición)	Oscilaciones perpetuas

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz

Es un método analítico que permite determinar la estabilidad de un sistema sin necesidad de calcular explícitamente los polos de la función de transferencia. Se basa en la construcción de la tabla de Routh a partir de los coeficientes del polinomio característico.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz

Es un método algebraico que permite determinar la estabilidad de un sistema sin necesidad de calcular los polos de la función de transferencia. Dado un sistema con la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde el **polinomio característico** es:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

El sistema es estable si y solo si:

1. Todos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son positivos y no nulos.
2. No hay cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Construcción de la Tabla de Routh

La **tabla de Routh** se construye como sigue:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Construcción de la Tabla de Routh

Los elementos de las filas siguientes se calculan con la fórmula:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

Y así sucesivamente, hasta completar la tabla.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Dado el polinomio característico:

$$P(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 1 \tag{3}$$

Queremos determinar la estabilidad del sistema aplicando el criterio de Routh-Hurwitz.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Los coeficientes del polinomio característico son:

Potencia de s	**Coeficiente**
s^4	1
s^3	3
s^2	3
s^1	2
s^0	1

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Las dos primeras filas de la Tabla de Routh se construyen tomando los coeficientes de manera alternada:

- **Fila 1** (s^4): Se toman los coeficientes de los términos con potencia **par** de s (decreciendo de izquierda a derecha):

$$1 \quad 3 \quad 1$$

- **Fila 2** (s^3): Se toman los coeficientes de los términos con potencia **impar** de s:

$$3 \quad 2$$

Así, la tabla de Routh comienza con:

s^4	1	3	1
s^3	3	2	0

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Cálculo de la fila de s^2

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{(3)(3) - (1)(2)}{3} = \frac{9-7}{3} = \frac{7}{3} \tag{4}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{(3)(1) - (1)(0)}{3} = 1 \tag{5}$$

s^4	1	3	1
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	1	0

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Cálculo de la fila de s^1

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{7} \tag{6}$$

s^4	1	3	1
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	1	0
s^1	$\frac{5}{7}$	0	0

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

El último coeficiente del polinomio característico es **1**, por lo que la última fila de la tabla de Routh tiene ese valor.

$$c_1 = 1 \tag{7}$$

s^4	1	3
s^3	3	2
s^2	$\frac{7}{3}$	1
s^1	$\frac{5}{3}$	0
s^0	1	

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Ejemplo

Para que el sistema sea estable, todos los elementos de la primera columna deben ser positivos. En este caso, la primera columna es:

$$1, 3, \frac{7}{3}, \frac{5}{7}, 1$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Primer elemento de la fila es cero, pero el resto no

- Puede generar división por cero, lo que impide construir la siguiente fila.
- Indica que hay raíces muy cercanas al eje imaginario.
- Sustituir el 0 por un número muy pequeño ϵ.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Primer elemento de la fila es cero, pero el resto no - Ejemplo

Dado el siguiente polinomio característico:

$$P(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 \tag{8}$$

Construimos la tabla de Routh, comenzando con las dos primeras filas:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 6 & 3 \\ s^2 & ? & ? & ? \\ s^1 & ? & ? & ? \\ s^0 & ? & ? & ? \end{array} \tag{9}$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Primer elemento de la fila es cero, pero el resto no - Ejemplo

Sustituyendo los valores:

$$b_1' = \frac{(2)(3) - (1)(3)}{2} = \frac{6 - 6}{2} = 0$$

$$b_2' = \frac{(2)(5) - (1)(3)}{2} = \frac{7}{2}$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Primer elemento de la fila es cero, pero el resto no - Ejemplo

Ahora, la tabla de Routh es:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 3 & 5 & 0 \\ s^3 & \epsilon & \frac{7}{2} & 0 \\ s^2 & ? & ? & ? \\ s^1 & ? & ? & ? \\ s^0 & ? & ? & ? \end{array} \tag{10}$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Primer elemento de la fila es cero, pero el resto no - Ejemplo

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 1 \\
s^4 & 3 & 5 & 0 \\
s^3 & \epsilon & \frac{7}{2} & 0 \\
s^2 & \frac{6\varepsilon-7}{\varepsilon} & 0 & 0 \\
s^1 & \frac{42\varepsilon-49-6\varepsilon^2}{12\varepsilon-14} & 0 & 0 \\
s^0 & 3 & 0 & 0
\end{array}
\tag{11}
$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Fila completamente cero

- Indica la presencia de raíces simétricas con respecto al eje imaginario.
- Esto puede significar pura oscilación (raíces en $\pm jw$) o la presencia de pares conjugados simétricos.
- Se debe construir el polinomio auxiliar y usar su derivada para reemplazar la fila.

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Fila completamente cero - Ejemplo

Dado el siguiente polinomio característico:

$$P(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 \tag{12}$$

Construimos la tabla de Routh, comenzando con las dos primeras filas:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 2 \\ s^3 & 1 & 24 & 63 \\ s^2 & ? & ? & ? \\ s^1 & ? & ? & ? \\ s^0 & ? & ? & ? \end{array} \tag{13}$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Fila completamente cero - Ejemplo

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 3 \\ s^4 & 1 & 24 & 63 \\ s^3 & -20 & -60 & 0 \\ s^2 & 21 & 63 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & ? & ? & ? \end{array} \tag{14}$$

Polinomio auxiliar

$$P(s) = 21s^2 + 63 \tag{15}$$

Derivada polinomio auxiliar

$$\frac{dP(s)}{d(s)} = 42s \tag{16}$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Fila completamente cero - Ejemplo

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 4 & 3 \\
s^4 & 1 & 24 & 63 \\
s^3 & -20 & -60 & 0 \\
s^2 & 21 & 63 & 0 \\
s^1 & 42 & 0 & 0 \\
s^0 & ? & ? & ?
\end{array}
\tag{17}
$$

Estabilidad de sistemas - Criterios para determinar la estabilidad - Criterio de Routh-Hurwitz - Casos especiales - Fila completamente cero - Ejemplo

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 4 & 3 \\
s^4 & 1 & 24 & 63 \\
s^3 & -20 & -60 & 0 \\
s^2 & 21 & 63 & 0 \\
s^1 & 42 & 0 & 0 \\
s^0 & 63 & 0 & 0
\end{array}
\tag{18}
$$

Importancia de los sistemas biomédicos

- Seguridad del paciente
  - Los sistemas biomédicos, como marcapasos, bombas de infusión, ventiladores y sistemas de monitoreo, deben ser estables para evitar fluctuaciones que puedan poner en riesgo la vida del paciente.
  - Un sistema inestable puede provocar fallos inesperados que generen sobredosificación, subdosificación o falsas alarmas.
- Fiabilidad del diagnóstico y tratamiento
  - En dispositivos como tomógrafos, resonancias magnéticas y equipos de electrocardiografía (ECG), la estabilidad garantiza que los datos sean precisos y reproducibles, evitando errores en el diagnóstico.
  - Un sistema inestable podría generar artefactos en las imágenes médicas o lecturas incorrectas de señales fisiológicas.

Importancia de los sistemas biomédicos

- Resistencia a perturbaciones externas
  - Los sistemas biomédicos operan en entornos donde hay ruido eléctrico, interferencias electromagnéticas y variaciones en la carga del sistema. La estabilidad asegura que el sistema pueda seguir funcionando correctamente a pesar de estas perturbaciones.
- Control efectivo en sistemas de asistencia vital
  - Dispositivos como máquinas de circulación extracorpórea o ventiladores mecánicos requieren estabilidad en sus controladores y algoritmos de regulación, ya que cualquier oscilación puede comprometer la salud del paciente.
  - En sistemas de control de glucosa en diabéticos, una respuesta inestable podría causar hipoglucemia o hiperglucemia severa.

Frame Title

- Longevidad y mantenimiento del sistema
  - Un sistema inestable se desgasta más rápido, lo que puede aumentar la necesidad de mantenimiento y la probabilidad de fallos.
  - En prótesis y exoesqueletos, la estabilidad es crucial para garantizar que el usuario pueda moverse de manera segura sin riesgo de colapsos o movimientos inesperados.
- Integración con sistemas de inteligencia artificial y análisis de datos
  - En la actualidad, muchos sistemas biomédicos incorporan modelos de inteligencia artificial (IA) y algoritmos de aprendizaje automático. La estabilidad es clave para que estos modelos sean confiables en la toma de decisiones clínicas.
  - Algoritmos inestables pueden generar sesgos, errores diagnósticos y dificultades en la interpretación de los datos médicos.