Sistemas y Señales I

Álgebra de Diagramas de Bloques

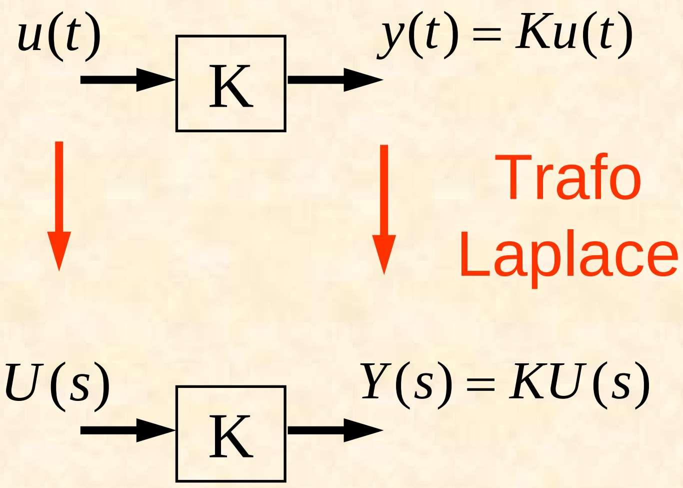
Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Diagrama de Bloques en el dominio transfomado

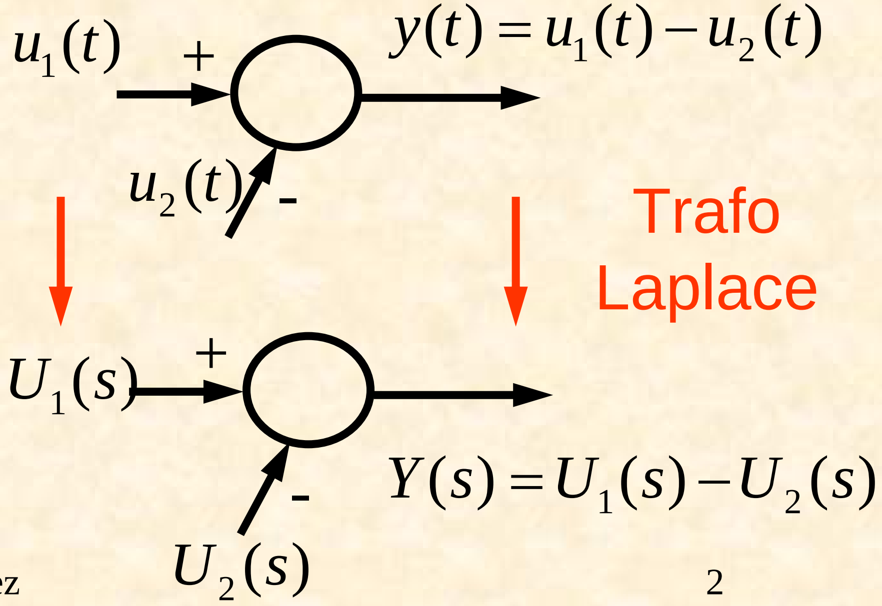
- El DB en el dominio transformado de un SLE se obtiene reemplazando cada bloque por la FT que lo caracteriza.

FT de bloques más usados

Bloque Ganancia



Bloque Sumador



Bloque Integrador

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

Trafo Laplace

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

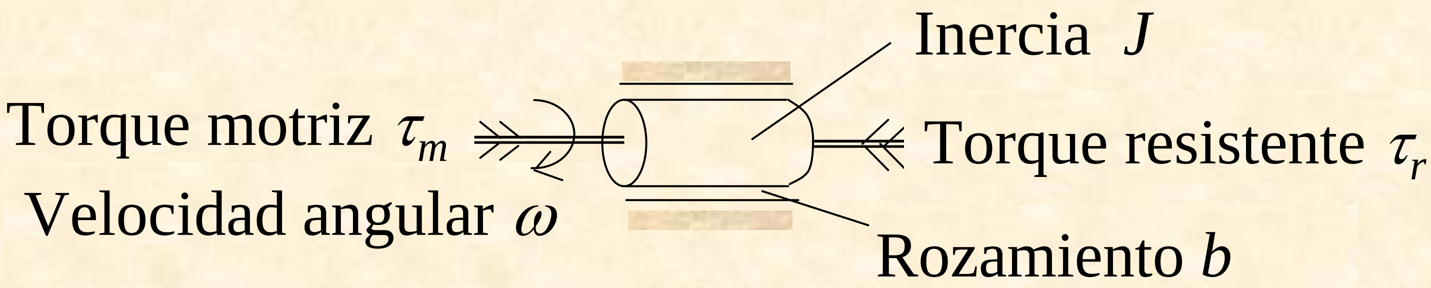
Bloque Derivador

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d(\bullet)}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Trafo Laplace

$$U(s) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow Y(s) = sU(s)$$

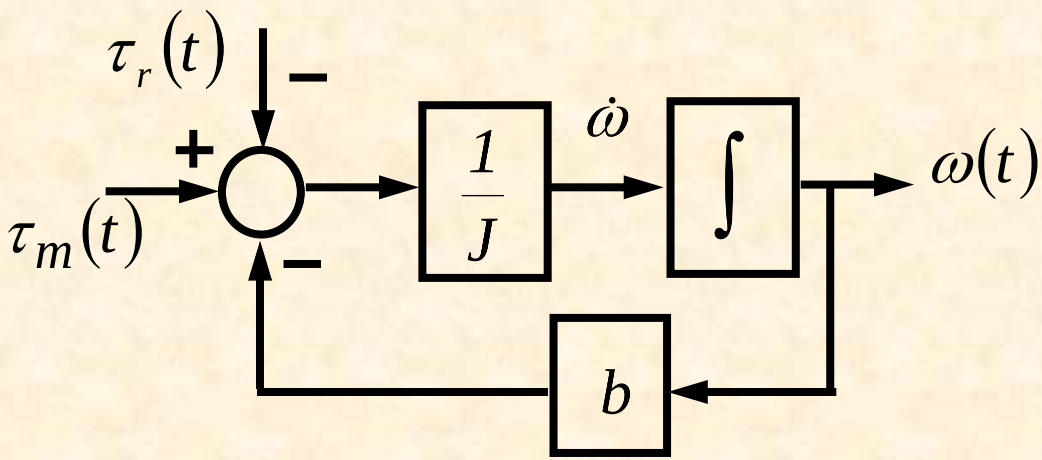
Ejemplo

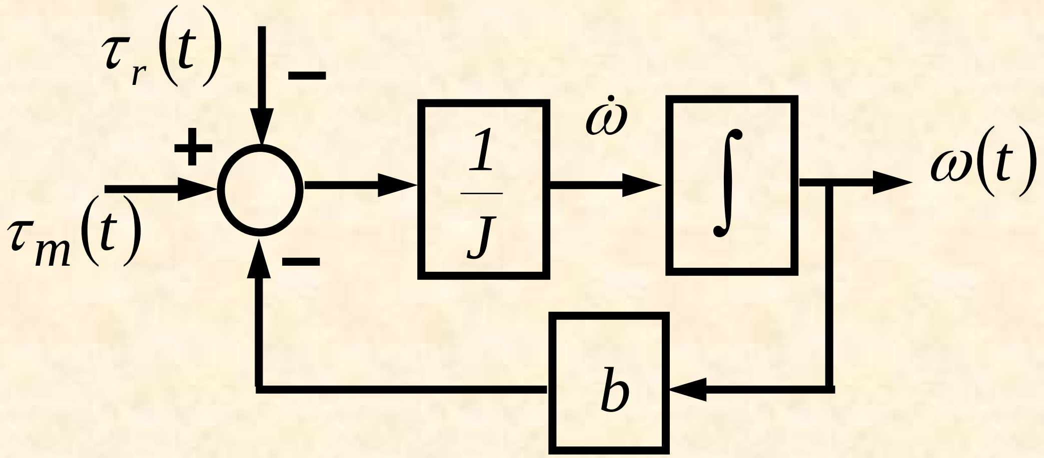


$$\sum \tau_{ext} = J\dot{\omega}$$

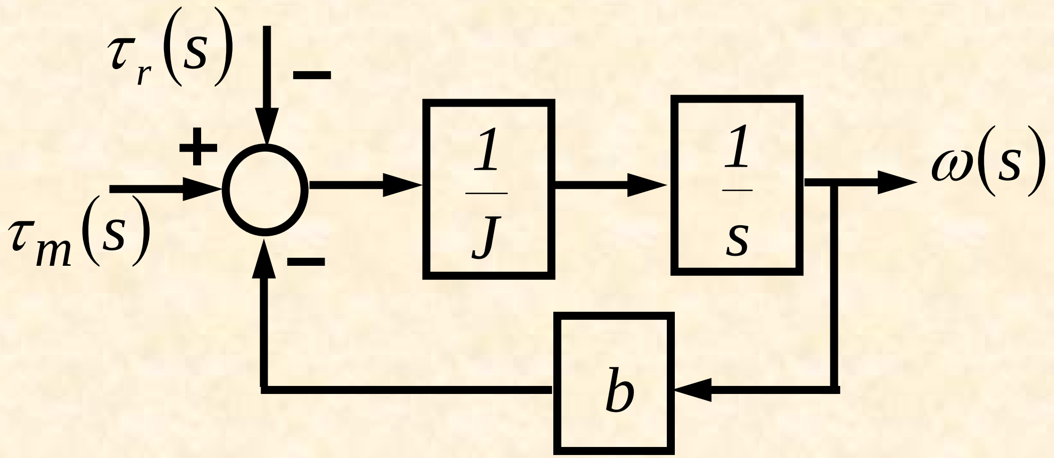
$$\tau_m - \tau_r - \mathrm{b}\omega = \mathrm{J}\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left(\tau_m - \tau_r - \mathrm{b}\omega\right)$$





Transformada de Laplace



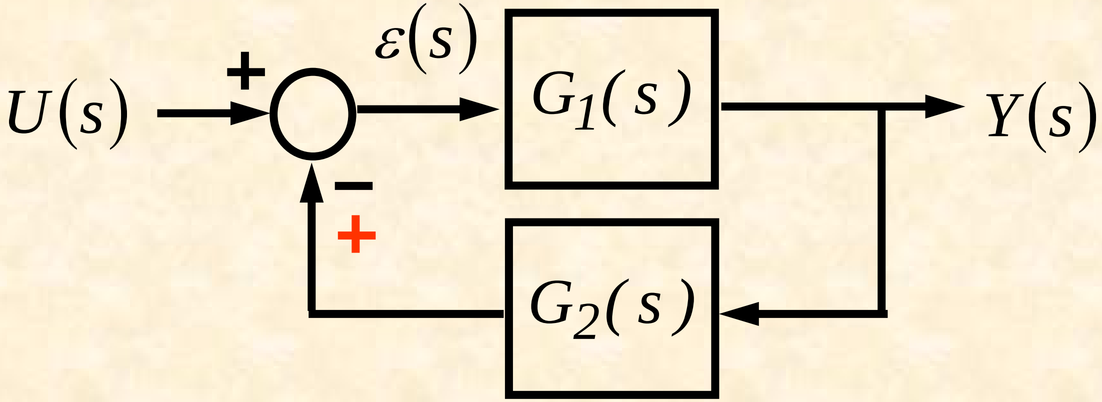
Álgebra de bloques

El Álgebra de Bloques es un conjunto de reglas que permiten transformar los diagrama de bloques, similar al álgebra que permite transformar las ecuaciones lineales. Un uso muy común del álgebra de bloques es con el objetivo de obtener la función transferencia equivalente de un sistema representado con un diagrama de bloques.

Veremos las reglas más comunes del álgebra de bloques.

Reglas del álgebra de bloques

1. Lazo simple de retroalimentación



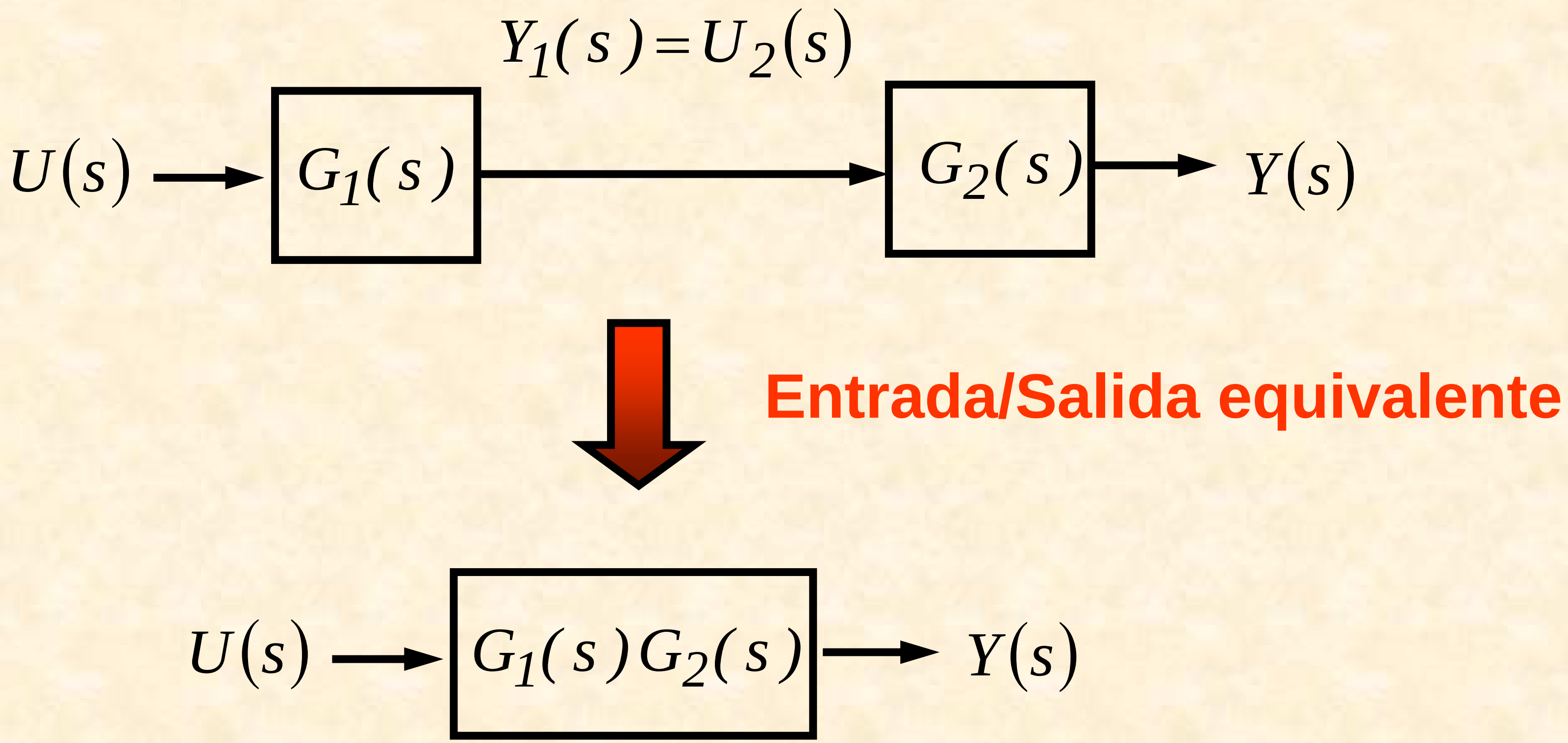
$$\begin{cases}\varepsilon(s) = U(s) \mp G_2(s)Y(s) \\ Y(s) = G_1(s)\varepsilon(s)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= G_1(s)\left[U(s) \mp G_2(s)Y(s)\right] \\ &= G_1(s)U(s) \mp G_1(s)G_2(s)Y(s)\end{aligned}$$

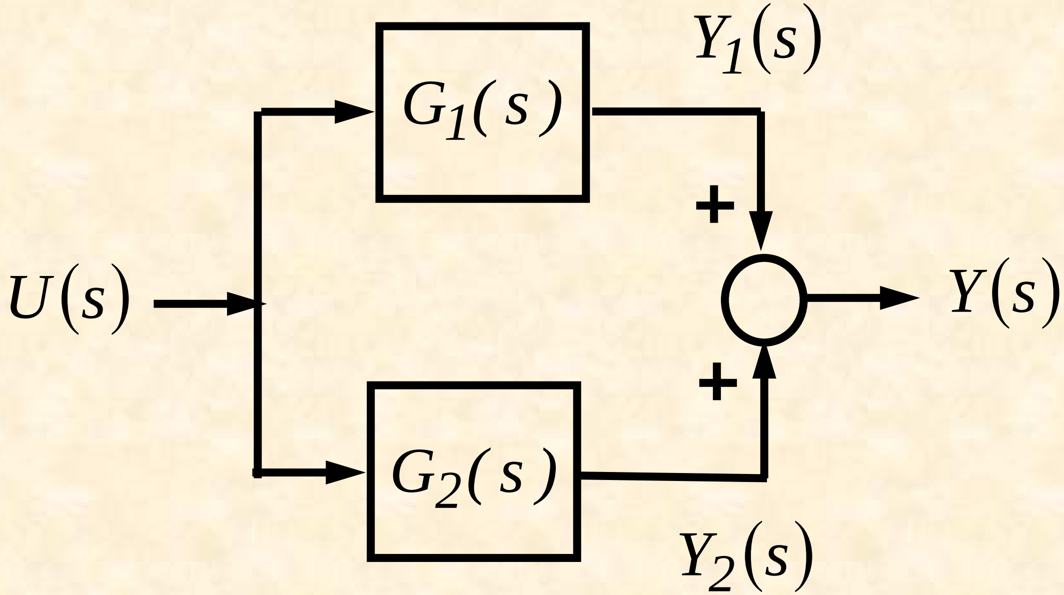
$$Y(s)\left[1 \pm G_1(s)G_2(s)\right] = G_1(s)U(s)$$

$$\boxed{H(s) \hat{=} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}}$$

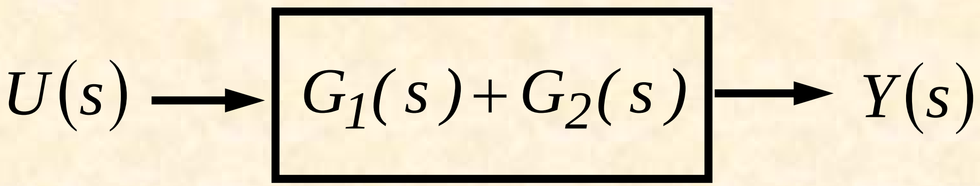
2. Conexión en cascada



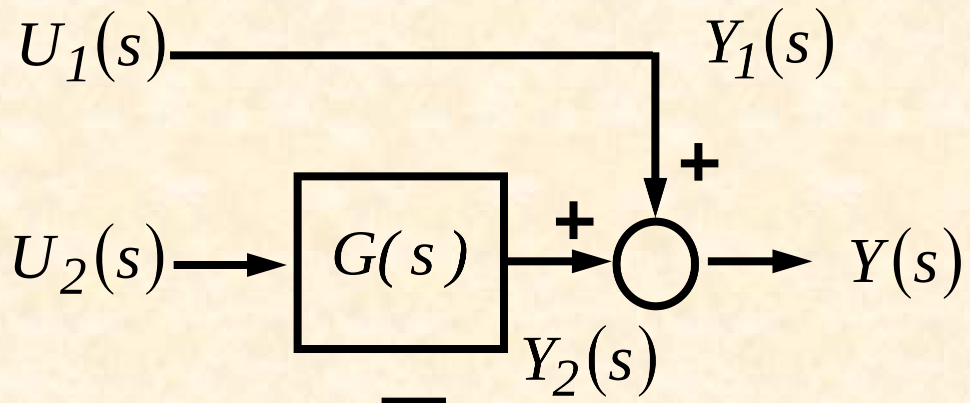
3. Conexión en paralelo



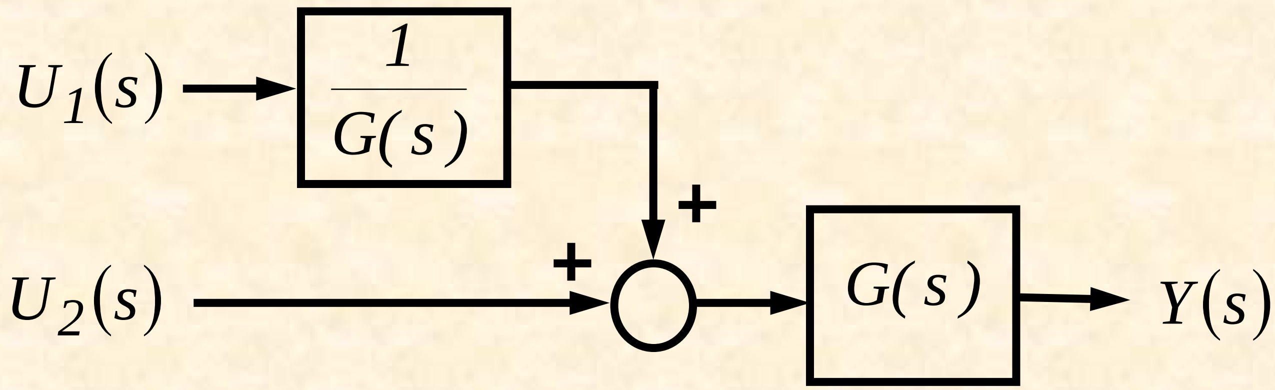
Entrada/Salida equivalente



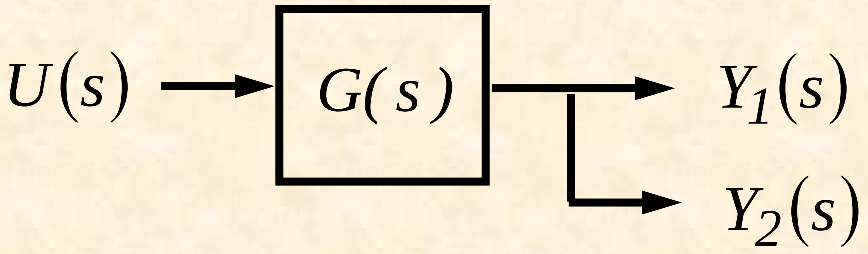
4. Corrimiento de bloques

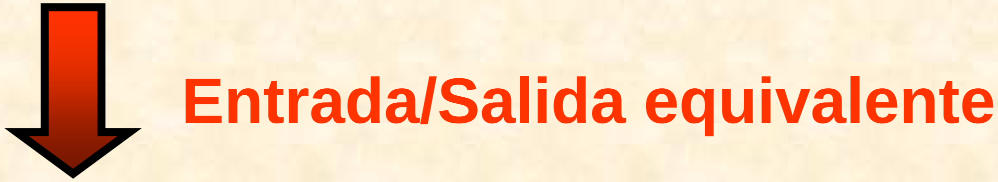


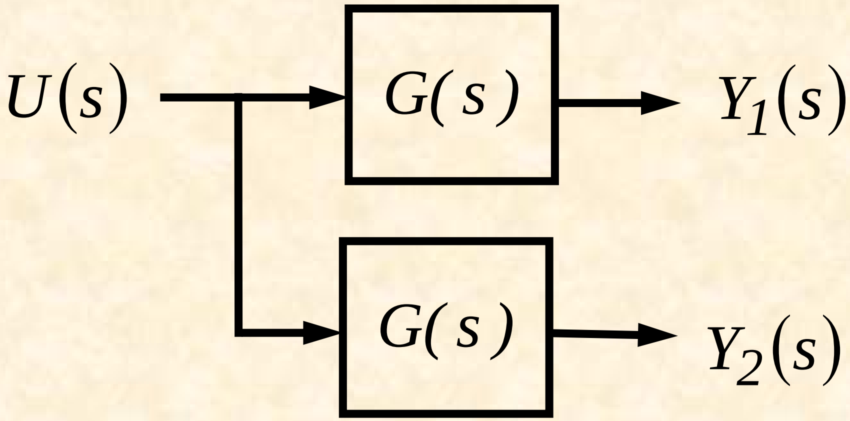
Entrada/Salida equivalente



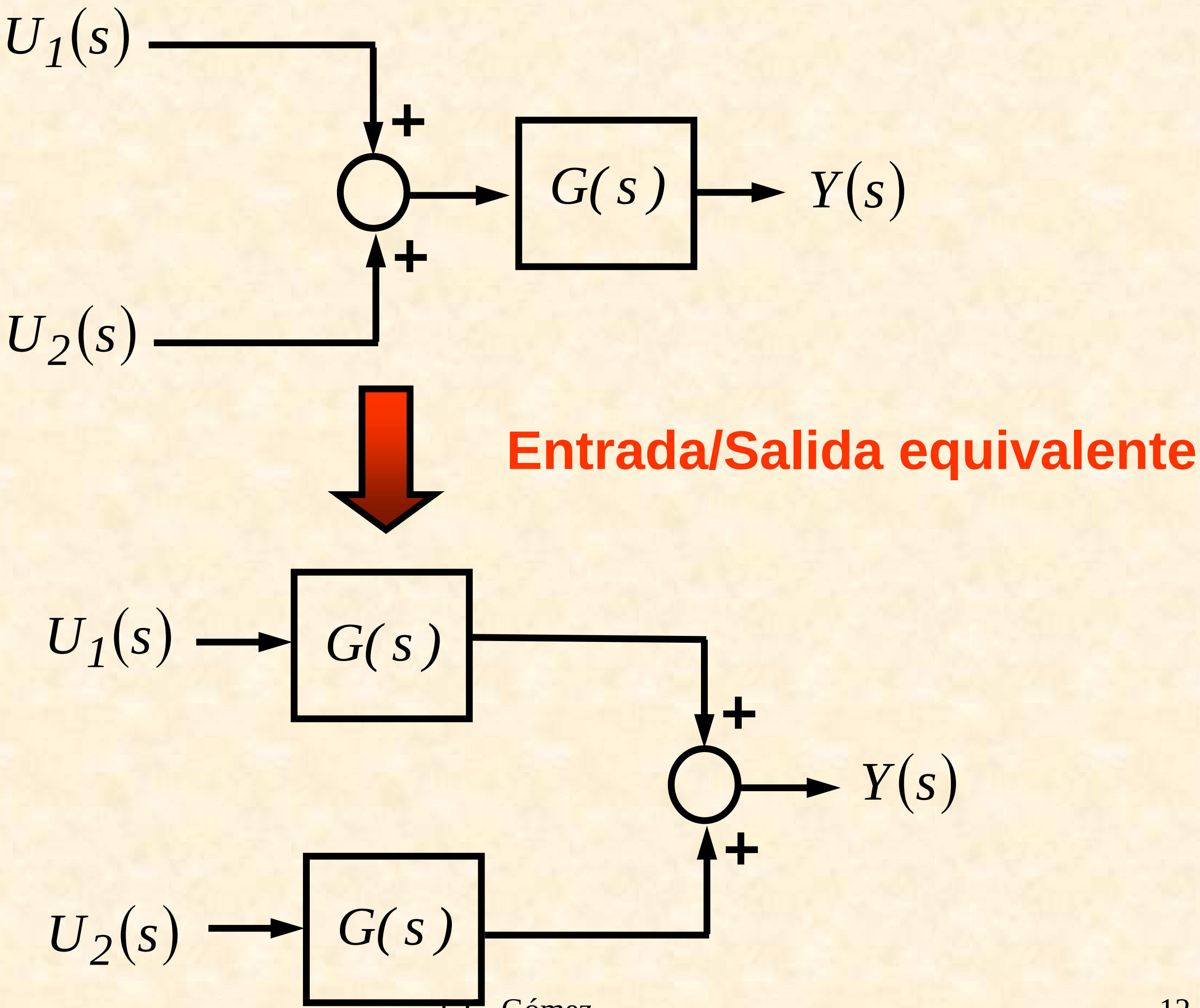
5. Corrimiento de bloques



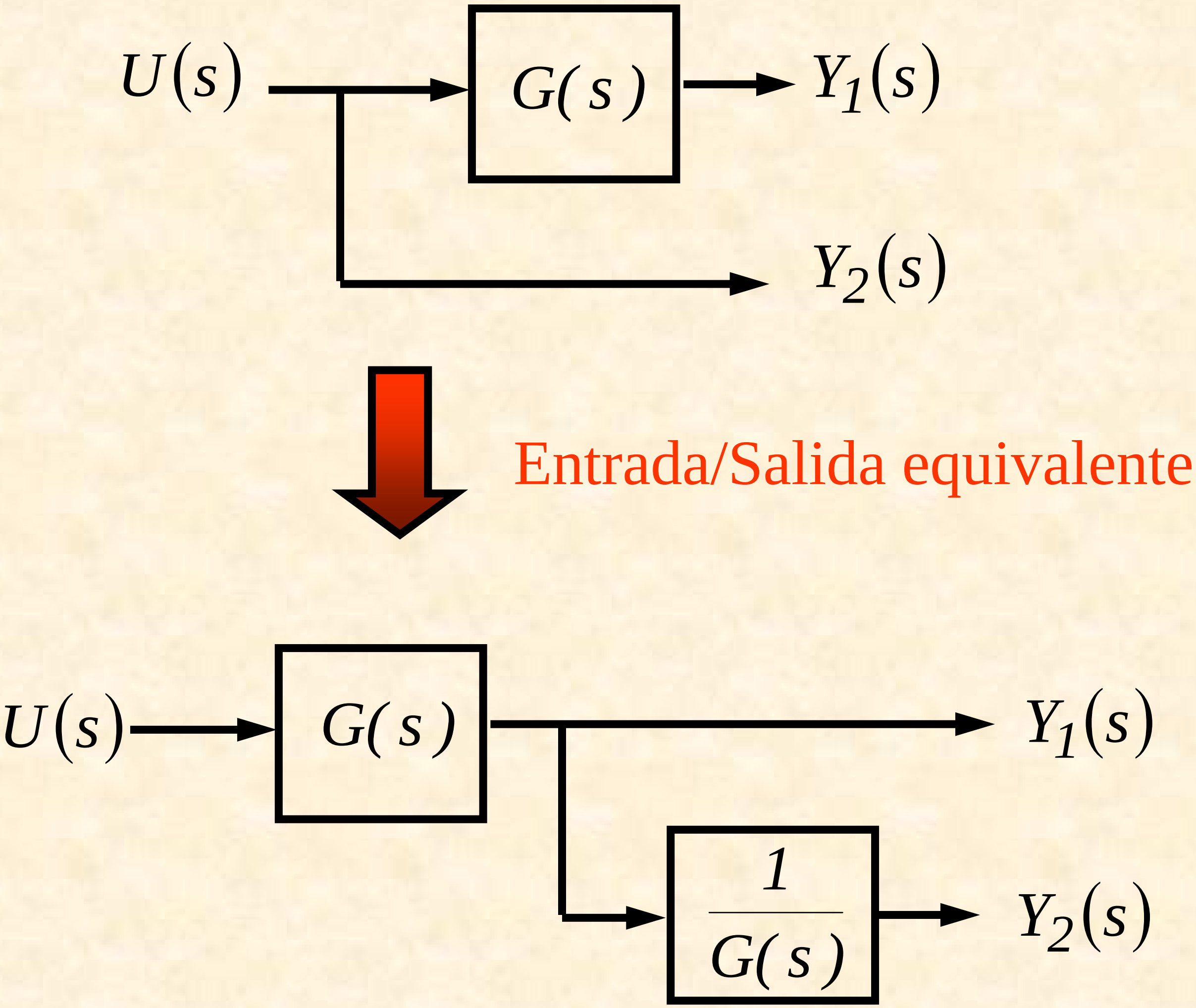




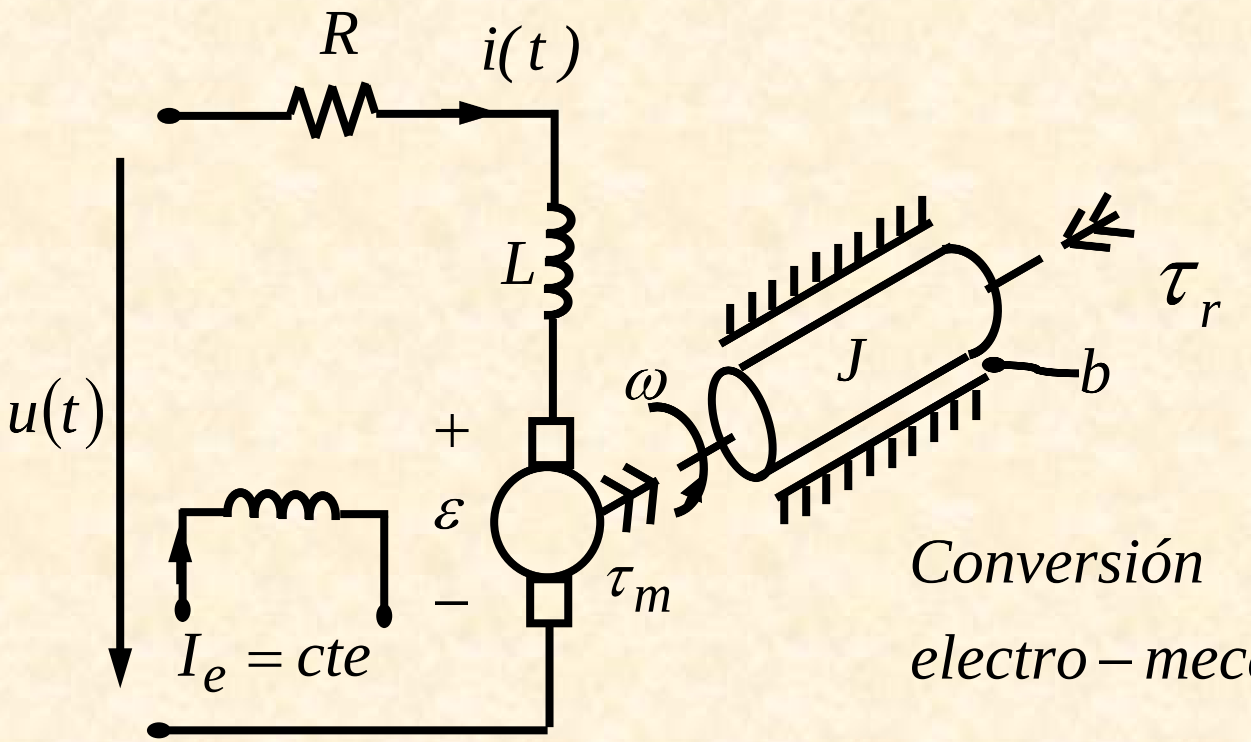
6. Corrimiento de bloques



7. Corrimiento de bloques



Ejemplo: Motor de Corriente continua: DB → FT



Conversión electro – mecánica
$$\begin{cases} \varepsilon = K\omega \\ \tau = Ki \end{cases}$$

Hallar las funciones transferencia entre u y ω, y entre τ_r y ω.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del MCC con excitación independiente constante son:

- Circuito de armadura

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \varepsilon(t) \qquad \textbf{(1)}$$

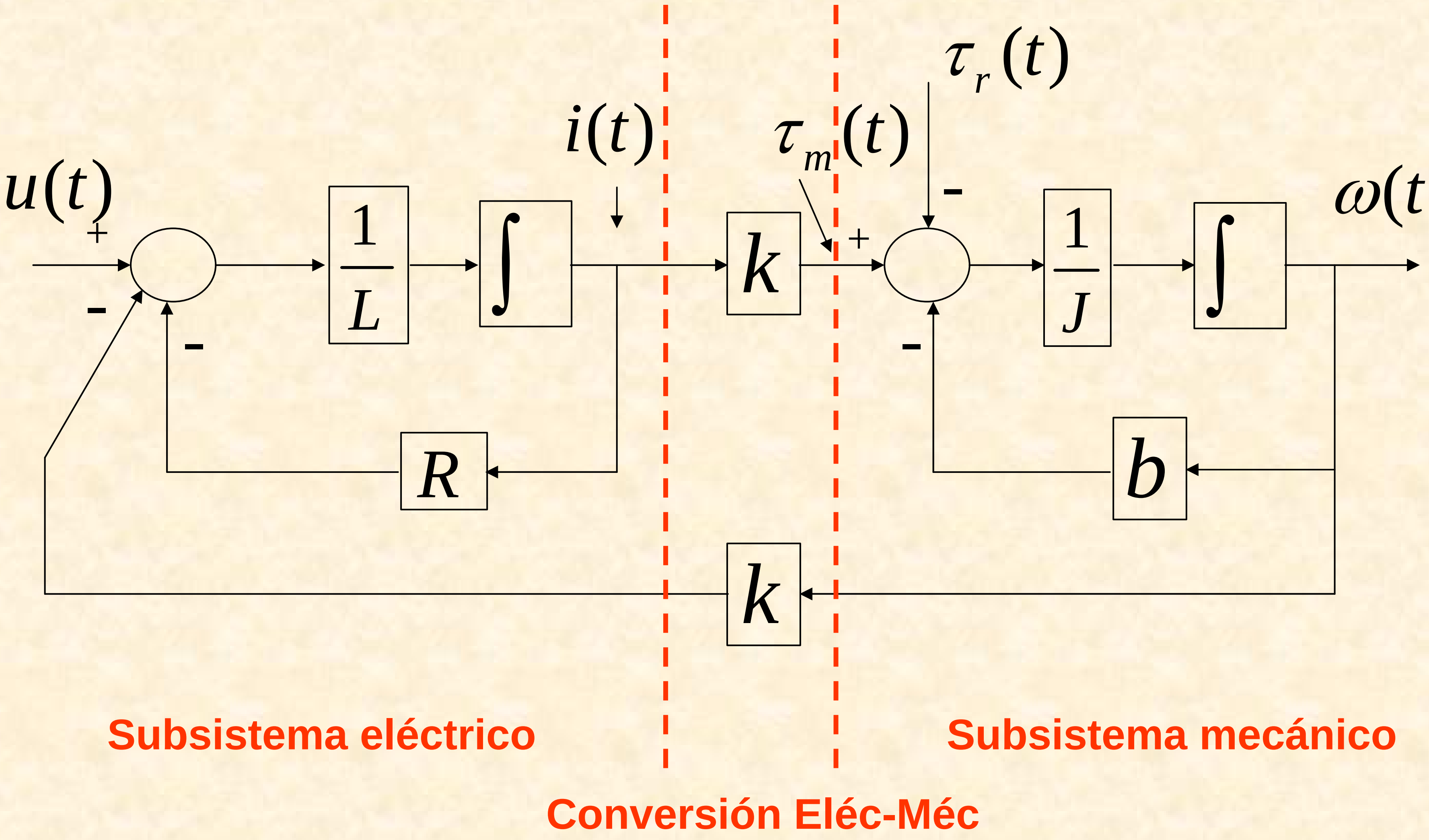
- Parte mecánica

$$J\dot{\omega}(t) = \tau_m(t) - \tau_r(t) - b\omega(t) \qquad \textbf{(2)}$$

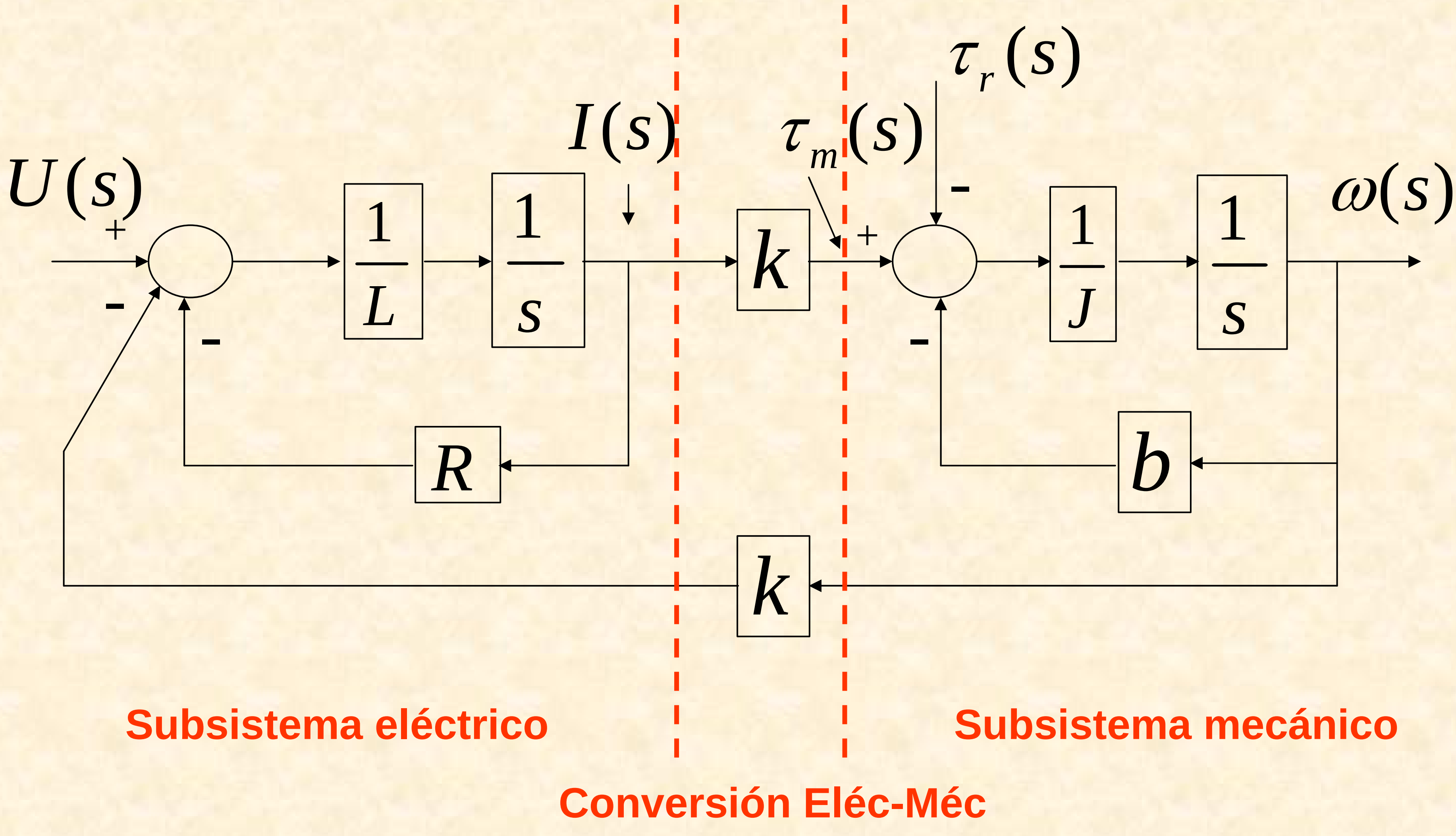
- Conversión electro-mecánica

$$\begin{cases} \tau_m(t) = k\ i(t) \\ \varepsilon(t) = k\ \omega(t) \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

El correspondiente Diagrama de Bloques resulta:



En el dominio transformado de Laplace el DB resulta:



El sistema tiene dos entradas: la tensión de armadura *u(t)*, que es la señal que se puede manipular para controlar la velocidad del motor, y el torque de carga $\tau_r(t)$ que no es manipulable y que en general se modela como una perturbación.

Como el modelo (DB) es lineal podemos aplicar superposición para el cálculo de las dos funciones transferencia. Denominemos a las funciones transferencia

$$G_{u\omega}(s) = \left.\frac{\omega(s)}{U(s)}\right|_{\tau_r \equiv 0}$$

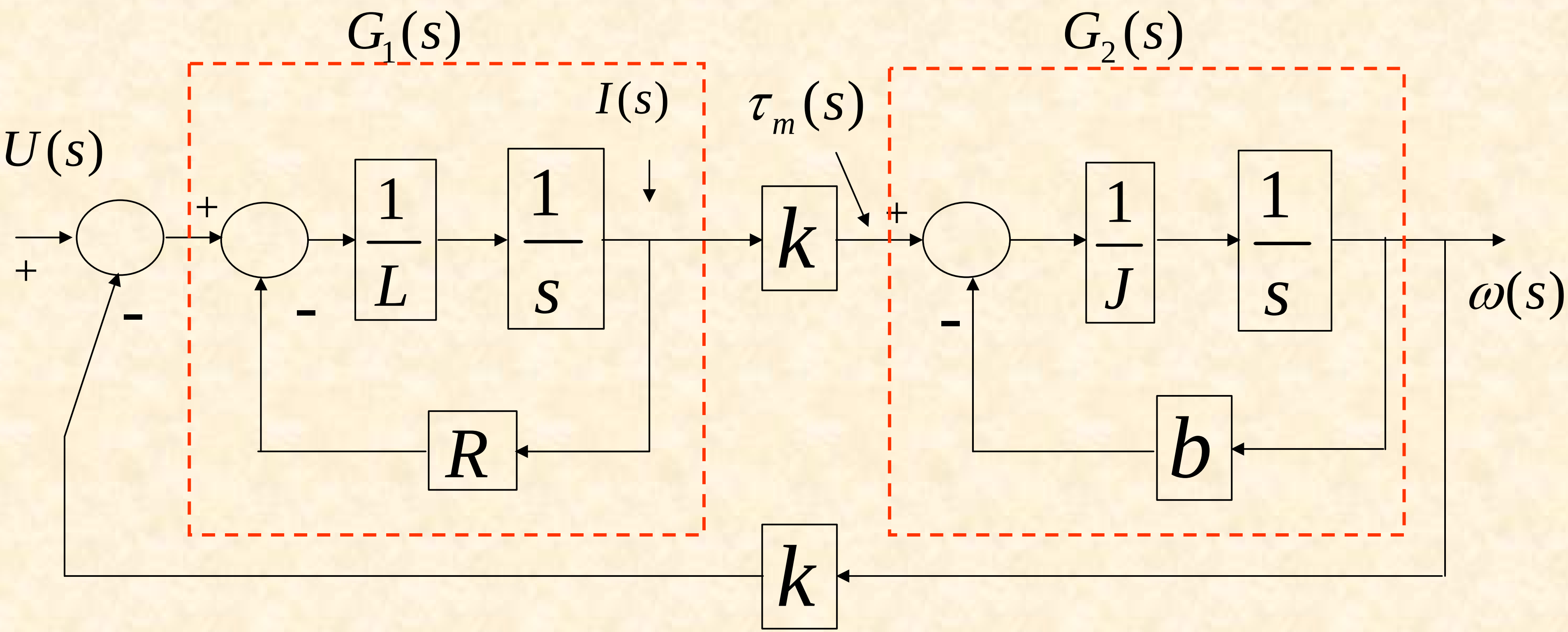
$$G_{\tau_r\omega}(s) = \left.\frac{\omega(s)}{\tau_r(s)}\right|_{u \equiv 0}$$

La respuesta del sistema, en el dominio de Laplace, resulta:

$$\omega(s) = G_{u\omega}(s)U(s) + G_{\tau_r\omega}(s)\tau_r(s)$$

Aplicaremos las reglas del Àlgebra de bloques para el cálculo de ambas transferencias.

1. Cálculo de $G_{u\omega}(s)$. Debemos hacer $\tau_r = 0$

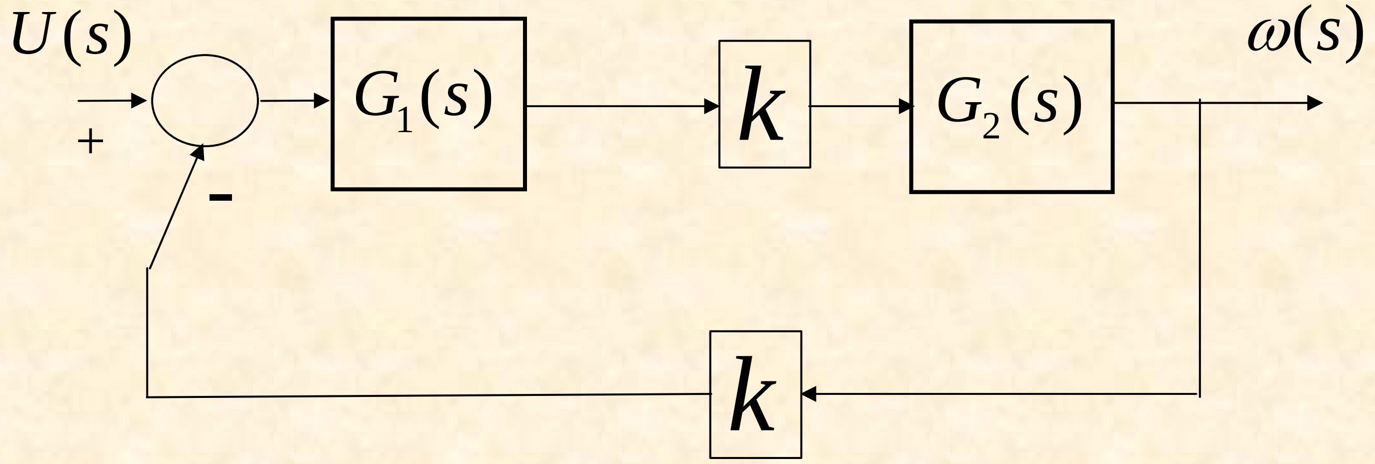


Vemos que $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son dos lazos simples de retroalimentación. Resulta entonces:

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{Ls}}{1 + \frac{R}{Ls}} = \frac{1}{Ls + R} = \frac{1/L}{s + \frac{R}{L}}$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{b}{Js}} = \frac{1}{Js + b} = \frac{1/J}{s + \frac{b}{J}}$$

El DB resulta:

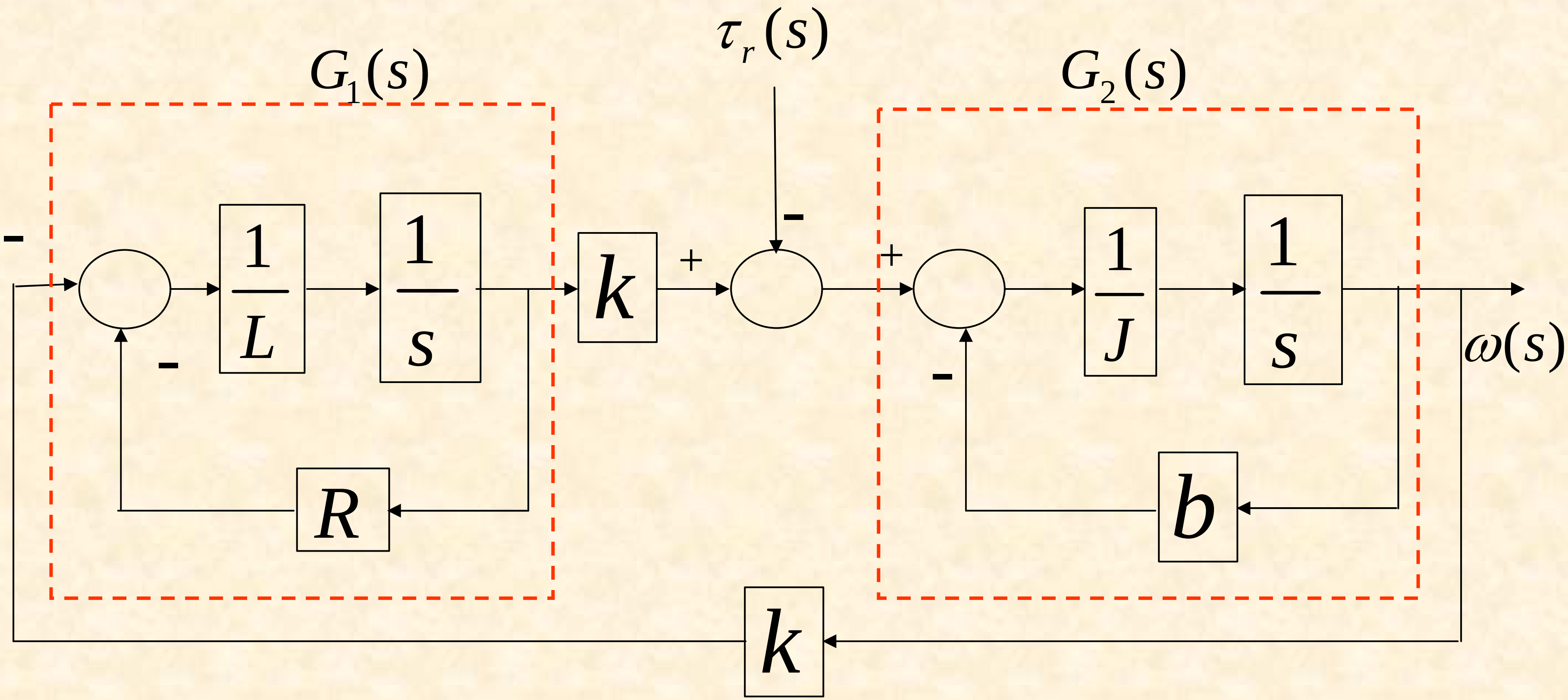


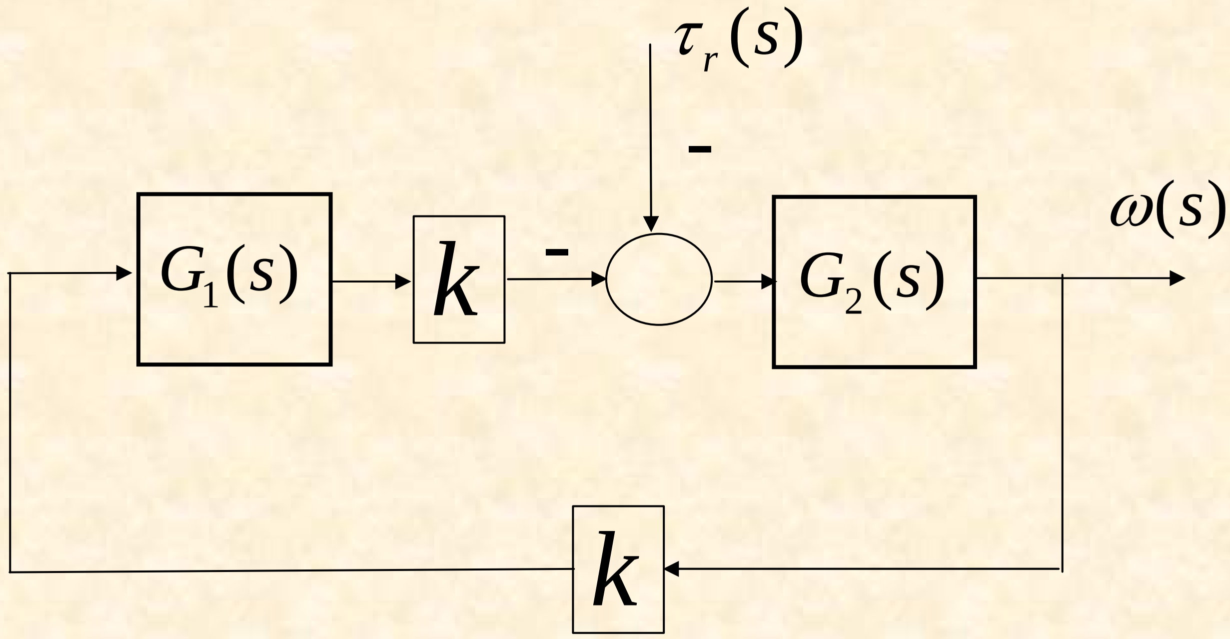
Vemos que es un lazo simple de retroalimentación. La función transferencia resulta entonces:

$$G_{u\omega}(s) = \frac{kG_1(s)G_2(s)}{1+k^2G_1(s)G_2(s)} = \frac{\dfrac{\dfrac{k}{LJ}}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)\left(s+\dfrac{b}{J}\right)}}{1+\dfrac{\dfrac{k^2}{LJ}}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)\left(s+\dfrac{b}{J}\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{k}{LJ}}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)\left(s+\dfrac{b}{J}\right)+\dfrac{k^2}{LJ}} = \frac{\dfrac{k}{LJ}}{s^2+\left(\dfrac{R}{L}+\dfrac{b}{J}\right)s+\dfrac{Rb+k^2}{LJ}}$$

2. Cálculo de $G_{\tau_r \omega}(s)$ **.** Debemos hacer $u = 0$.





Vemos que es un lazo simple de retroalimentación. La función transferencia resulta entonces:

$$G_{\tau_r \omega}(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + k^2 G_1(s) G_2(s)}$$

$$G_{\tau_r\omega}(s) = -\frac{\dfrac{\dfrac{1}{J}}{\left(s+\dfrac{b}{J}\right)}}{1+\dfrac{\dfrac{k^2}{LJ}}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)\left(s+\dfrac{b}{J}\right)}}$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{J}\left(s+\dfrac{R}{L}\right)}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)\left(s+\dfrac{b}{J}\right)+\dfrac{k^2}{LJ}} = -\frac{\dfrac{1}{J}\left(s+\dfrac{R}{L}\right)}{s^2+\left(\dfrac{R}{L}+\dfrac{b}{J}\right)s+\dfrac{Rb+k^2}{LJ}}$$