

Automatización III

Clase 8

Juan Pablo Restrepo Uribe

Instituto Tecnológico Metropolitano

April 24, 2025

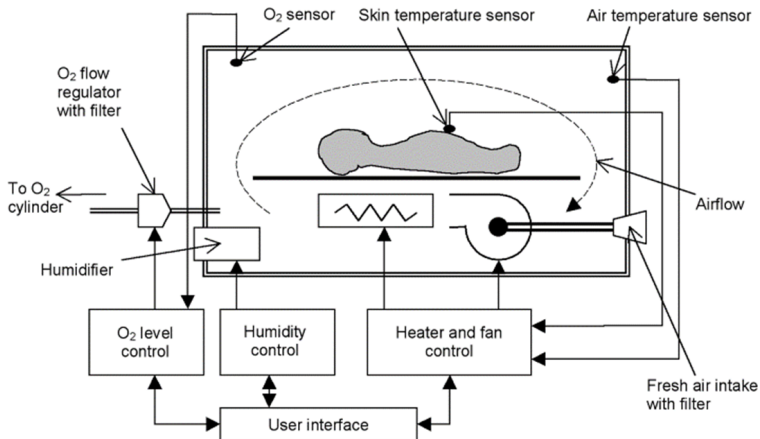
Juan Pablo Restrepo Uribe
Ingeniero Biomédico
MSc. Automatización y Control Industrial

Ejemplo PID - Enunciado

En una incubadora neonatal, es fundamental mantener la temperatura estable a unos 37°C para asegurar las condiciones adecuadas al recién nacido. Para ello, utilizamos un calentador eléctrico (resistencia) que introduce calor en la incubadora, y necesitamos un controlador que ajuste automáticamente la potencia del calentador

- ▶ Q para mantener la temperatura - Potencia del calentador (en Watts).
- ▶ T en el valor deseado - Temperatura interna de la incubadora (en $^{\circ}\text{C}$).

Ejemplo PID - Enunciado



Ejemplo PID - Enunciado



Ejemplo PID - Modelo Físico Básico - Energía y calor

Para aumentar la temperatura de un sistema (como una incubadora), se debe suministrar energía. Si C representa la capacidad calorífica (producto de la masa y el calor específico), la tasa de acumulación de energía se expresa como:

$$\text{Energía acumulada} = C \frac{dT}{dt}$$

Balance de Potencias

Se realiza un balance de potencias, considerando:

- ▶ **Potencia que entra (Q):** Es la potencia eléctrica que se convierte en calor.
- ▶ **Potencia que sale (pérdidas):** Se asume que las pérdidas son proporcionales a la temperatura, y se expresan como αT , donde α es un coeficiente de transferencia de calor ($\text{W}/^{\circ}\text{C}$).

Ejemplo PID - Modelo Físico Básico - Energía y calor

El balance de potencias se formula como:

$$\underbrace{Q}_{\text{Potencia de entrada}} - \underbrace{\alpha T}_{\text{Pérdidas}} = \underbrace{C \frac{dT}{dt}}_{\text{Acumulación de energía}} .$$

Reorganizando la ecuación obtenemos:

$$C \frac{dT}{dt} + \alpha T = Q.$$

Ejemplo PID - Transformación a la Forma $\tau \frac{dT}{dt} + T = K Q$

Para expresar la ecuación en la forma deseada, se definen los parámetros:

- La **constante de tiempo térmica**:

$$\tau = \frac{C}{\alpha},$$

la cual indica la inercia del sistema ante cambios de Q .

- La **ganancia térmica**:

$$K = \frac{1}{\alpha},$$

que relaciona la potencia Q con el aumento de temperatura en estado estacionario.

Ejemplo PID - Transformación a la Forma $\tau \frac{dT}{dt} + T = K Q$

Reemplazando en la ecuación del balance:

$$C \frac{dT}{dt} + \alpha T = Q \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{C}{\alpha} \right) \frac{dT}{dt} + T = \frac{1}{\alpha} Q,$$

se obtiene:

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = K Q.$$

Ejemplo PID - Interpretación de parámetros

- ▶ Constante de Tiempo τ : τ representa la inercia térmica del sistema. Un valor mayor de τ indica que el sistema responde más lentamente a los cambios en la potencia Q . Este parámetro depende de la masa y la capacidad calorífica del sistema, así como de su aislamiento.
- ▶ Ganancia Térmica K : K indica la efectividad con la que la potencia Q se traduce en un cambio de temperatura en estado estacionario. Un K alto significa que una pequeña potencia produce un gran aumento de temperatura, mientras que un K bajo implica que se necesita una mayor potencia para lograr el mismo cambio.

Ejemplo PID - Modelo físico

La dinámica de la temperatura en el interior de la incubadora se puede aproximar con la siguiente ecuación diferencial:

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = KQ$$

Donde:

- ▶ T es la temperatura interna de la incubadora ($^{\circ}\text{C}$)
- ▶ Q es la potencia que entrega el calentador (W)
- ▶ τ (en segundos) es la constante de tiempo térmica:
 - ▶ Cuanto más grande es τ , más lento responde la temperatura a los cambios de potencia.
 - ▶ Para este ejemplo, $\tau = 50\text{s}$
- ▶ k es la ganancia térmica
 - ▶ Indica cuántos grados Celsius aumentan en la incubadora por cada watt aplicado.
 - ▶ Para este ejemplo $K = 0.5^{\circ}\text{C}/\text{W}$.

Ejemplo PID - Modelo físico

- ▶ El término $\tau \frac{dT}{dt}$ refleja la inercia térmica: no se puede calentar instantáneamente; existe un retardo natural.
- ▶ El término T es la temperatura actual: mientras mayor sea, menor será la diferencia de temperatura a compensar.
- ▶ El lado derecho KQ es la potencia térmica efectiva: cuanta más potencia se aplique, mayor será la temperatura alcanzable a largo plazo.

Ejemplo PID - Transformada de Laplace

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación. Recordemos que:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dT}{dt} \right\} = sT(s) - T(0)$$

Aplicando la transformada:

$$\tau (sT(s) - T(0)) + T(s) = KQ(s)$$

Asumimos que la temperatura inicial es 0 ($T(0) = 0$), lo cual es válido si partimos de una condición de equilibrio.

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = K Q \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \tau s T(s) + T(s) = K Q(s)$$

Ejemplo

Factorizamos $T(s)$:

$$T(s)(\tau s + 1) = KQ(s)$$

Dividimos por $(\tau s + 1)$:

$$\frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Si reemplazamos por los valores iniciales, obtenemos:

$$G(s) = \frac{0.5}{50s + 1}$$

Queremos diseñar un controlador PID que minimice el error y haga que el sistema alcance rápidamente 37°C sin sobrepasos excesivos.

Ejemplo PID

Para regular la temperatura, utilizamos un controlador PID clásico:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

- ▶ K_p es la ganancia proporcional. Aumenta la reacción del controlador ante el error instantáneo.
- ▶ K_i es la ganancia integral (actúa sobre el error acumulado). Elimina el error en estado estable, integrando el error a lo largo del tiempo.
- ▶ K_d es la ganancia derivativa (actúa sobre la velocidad de cambio del error). Reduce sobreoscilaciones y hace el sistema más estable, al reaccionar a cambios rápidos en el error.

Ejemplo PID - Ziegler-Nichols

Se parte de los siguientes parámetros críticos obtenidos experimentalmente:

$$K_u = 22 \quad (\text{ganancia crítica}), \quad T_u = 120 \text{ s} \quad (\text{período crítico}).$$

Según las fórmulas de Ziegler-Nichols para un controlador PID, se tienen:

$$K_p = 0.6 K_u,$$

$$T_i = 0.5 T_u,$$

$$T_d = 0.125 T_u.$$

Sustituyendo los valores:

$$K_p = 0.6 \times 22 = 13.2,$$

$$T_i = 0.5 \times 120 = 60 \text{ s},$$

$$T_d = 0.125 \times 120 = 15 \text{ s}.$$

Ejemplo PID - Ziegler-Nichols

Para implementar el controlador PID en forma clásica, se definen además las ganancias integral y derivativa:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{13.2}{60} \approx 0.22, \quad K_d = K_p \times T_d = 13.2 \times 15 = 198.$$

Por lo tanto, el controlador PID se puede expresar como:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 13.2 \left(1 + \frac{1}{60 s} + 15 s \right).$$

Ejemplo PID - Ziegler-Nichols - Experimental

Para sintonizar un controlador PID utilizando el método de Ziegler-Nichols, es necesario determinar dos parámetros experimentales:

- ▶ **Ganancia Crítica (K_u):** Es la ganancia proporcional a la cual el sistema en lazo cerrado, con control proporcional puro, presenta oscilaciones sostenidas (es decir, oscilaciones de amplitud constante).
- ▶ **Período Crítico (T_u):** Es el período de las oscilaciones sostenidas observadas a la ganancia crítica.

Ejemplo PID - Ziegler-Nichols - Experimental

Configuración Inicial: Se configura el sistema en lazo cerrado utilizando únicamente un controlador proporcional, eliminando los términos integral y derivativo.

Incremento de la Ganancia: Se incrementa gradualmente la ganancia K_p hasta que se observe que la salida del sistema comienza a oscilar de manera constante (oscilaciones de amplitud fija). La ganancia en este punto se define como K_u .

Medición del Período: Con el sistema oscilando de forma sostenida, se mide el período T_u de estas oscilaciones.

Ejemplo PID - Interpretación de resultados

Sin Control:

- ▶ El sistema puede tardar mucho en llegar a la temperatura deseada.
- ▶ Es posible que quede un error permanente (no llegue exactamente a 37°C).
- ▶ Se logra un tiempo de establecimiento más rápido.
- ▶ Error en estado estable prácticamente nulo (gracias al término integral). Un sobrepaso moderado o bajo, dependiendo de los valores de K_p , K_i K_d

Ejemplo PID - AO

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

donde:

- ▶ $u(t)$ es la salida del controlador.
- ▶ $e(t)$ es el error entre la temperatura deseada y la medida.
- ▶ K_p es la ganancia proporcional.
- ▶ K_i es la ganancia integral.
- ▶ K_d es la ganancia derivativa.

Este diseño se puede implementar usando amplificadores operacionales (OpAmps) en configuración analógica.

Ejemplo PID - AO - Entrada

Para obtener las entradas correspondientes a cada parte de un controlador PID, se debe considerar lo siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2)$$

donde:

- ▶ $u(t)$ es la salida del controlador.
- ▶ $e(t)$ es el error, calculado como la diferencia entre la señal de referencia deseada $r(t)$ y la señal real medida del sistema $y(t)$:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3)$$

Ejemplo PID - AO - Entrada - Diferenciador

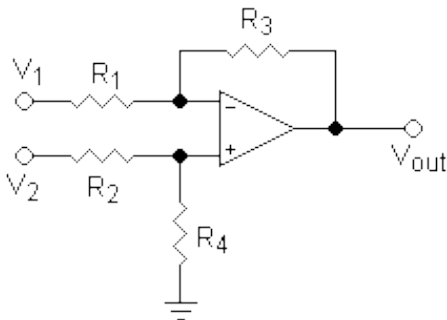
Para una ganancia diferencial unitaria:

$$R_{f1} = R_{f2} = R_{in1} = R_{in2} \quad (4)$$

Por lo tanto, la ecuación resultante para la salida es simplemente:

$$V_{out} = V_2 - V_1 \quad (5)$$

Se recomienda utilizar resistencias con tolerancias bajas (por ejemplo, 1% o menos) para mantener precisión y estabilidad.

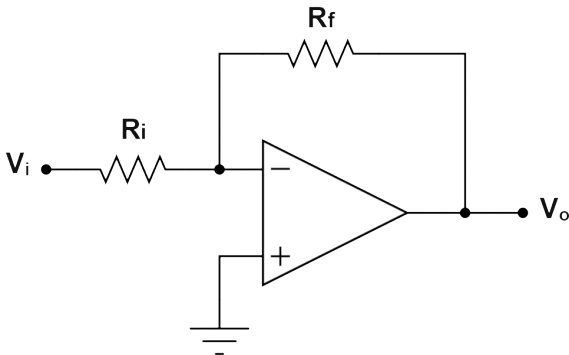


Ejemplo PID - AO - Etapa Proporcional (P)

$$e_{(P)}(t) = -\frac{R_f}{R_i}e(t) \quad (6)$$

Donde la ganancia $A_{(P)}$ se calcula como:

$$A_P = -\frac{R_f}{R_i} \quad (7)$$



Ejemplo PID - AO - Etapa Integral (I)

Un integrador se realiza con un capacitor en la retroalimentación:

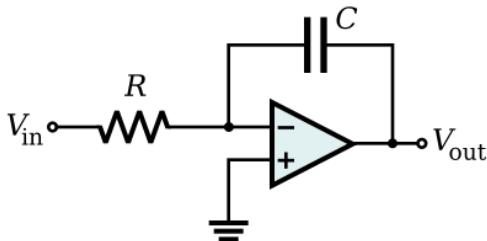
$$e_{(I)}(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt \quad (8)$$

Donde la ganancia A_I determina que tan rapido se acumula el error. Se define como

$$A_I = \frac{1}{RC} \quad (9)$$

Si deseas se desea incrementar la ganancia integradora:

- ▶ Disminuir R .
- ▶ Disminuir C .



Ejemplo PID - AO - Etapa Derivativa (D)

El derivador se implementa con un capacitor en la entrada:

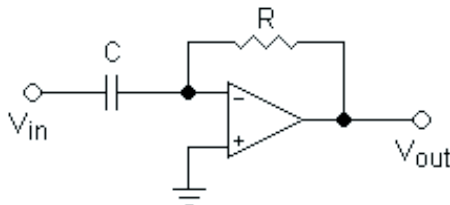
$$t_{(D)}(t) = -RC \frac{de(t)}{dt} \quad (10)$$

ganancia derivativa A_D indica qué tan sensible es la salida ante cambios rápidos en la entrada. se define como:

$$A_D = -RC \quad (11)$$

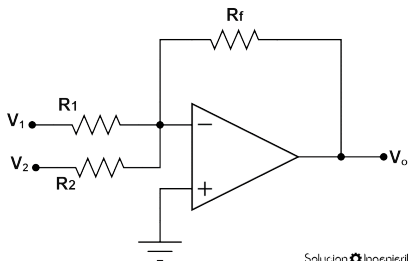
Si se desea incrementar la ganancia derivativa:

- ▶ Aumentar R
- ▶ Aumentar C



Ejemplo PID - AO - Suma de señales P, I y D

$$u(t) = -R_f \left(\frac{e(P)}{R_1} + \frac{e(I)}{R_2} + \frac{e(D)}{R_3} \right) \quad (12)$$



Ejemplo PID - AO - Circuito completo

