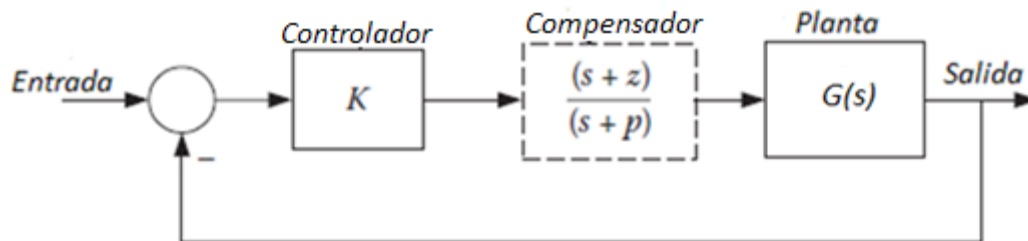


Diseño de Compensadores en sistemas realimentados

El diseño de compensadores tratado en esta sección se desarrolla para un sistema realimentado con realimentación unitaria y la compensación se aplica en “serie” o “cascada” con la planta tal como se muestra en el esquema de la figura siguiente



Los elementos del esquema son:

- La planta
- El compensador serie
- Un controlador proporcional

La filosofía de diseño es la siguiente: dada la planta con la cual se quiere efectuar el diseño, lo primero que se debe probar es si ajustando el controlador proporcional se consigue cumplir con el funcionamiento requerido; a este paso se lo llamara “**ajuste de ganancia**”. Si no es posible alcanzar el comportamiento deseado con el ajuste de la ganancia K se debe “*compensar*” la planta de modo que con un nuevo ajuste de la ganancia se logre el objetivo. Dicho en otras palabras se agrega el compensador con la finalidad de modificar la dinámica de la planta disponiéndola para un ajuste de ganancia.

Estructuras compensadoras

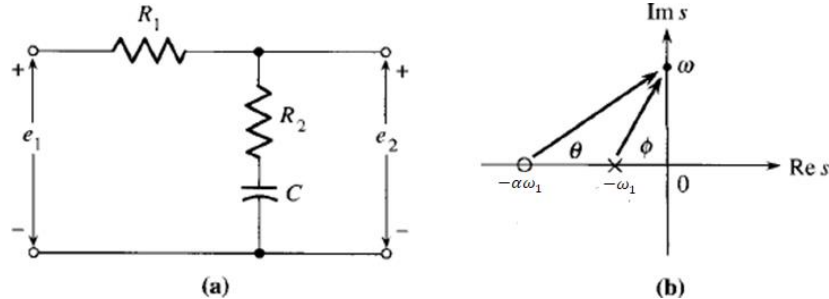
Trataremos 2 estructuras básicas o típicas de compensadores:

- Compensador Atraso
- Compensador Adelanto

Se suele citar una tercera, llamada “compensador Atraso-Adelanto”. Cómo el nombre lo indica, resulta de la combinación de las 2 básicas citadas y el diseño fundamentalmente se basa en aplicar la filosofía de diseño correspondiente a cada una de las básicas en forma progresiva y a veces en forma conjunta.

Estructura del compensador atraso

Se trata de una estructura que presenta un polo y un cero, con el polo ubicado más cerca de origen que el cero. La figura siguiente presenta un sencillo circuito eléctrico (a) y un diagrama polo-cero (b) que representa a este compensador

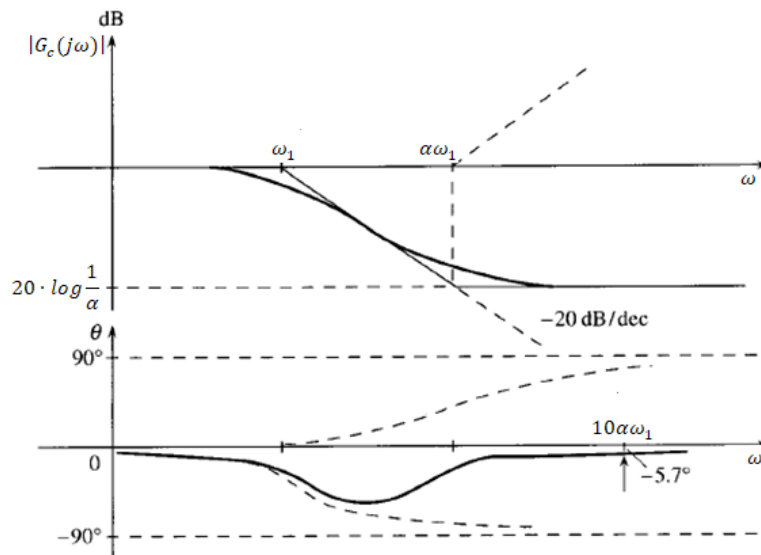


La función de transferencia del compensador se la puede escribir como

$$G_{c-atraso}(s) = \frac{1 + \frac{s}{\alpha\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad \text{con } \alpha > 1$$

Donde para el circuito $\omega_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}$ y $\alpha\omega_1 = \frac{1}{R_2 \cdot C}$ con $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$

Si se grafica la respuesta en frecuencia del compensador se obtiene la figura siguiente



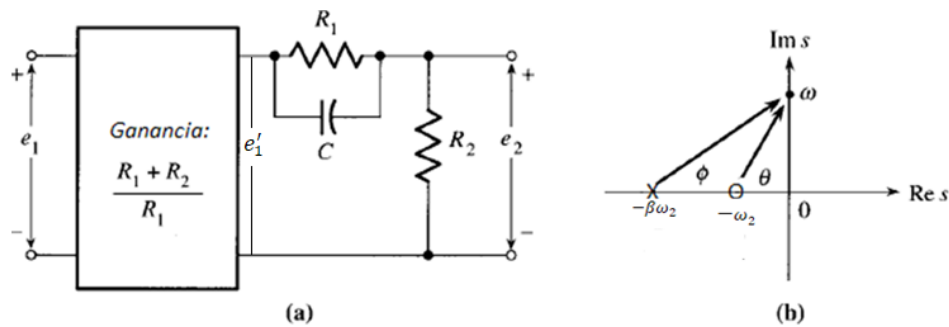
Se aprecia en la figura que el compensador, en cuanto al módulo, en baja frecuencia la ganancia es 1 (0 dB) mientras que en altas frecuencias introduce una atenuación de valor $\frac{1}{\alpha}$, donde α es la separación entre el polo y el cero del compensador. En cuanto a la fase, el compensador

introduce un atraso en la fase (de ahí su nombre) cuyo máximo valor es $\phi_{max} = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)$ y que ocurre en $\omega_{max} = \sqrt{\alpha} \cdot \omega_1$. Para el diseño del compensador, es importante destacar que para $\omega = 10 \cdot \alpha \cdot \omega_1$ la fase toma un valor de -5.7° .

Nota: a pesar de recibir el nombre de “**compensador por atraso de fase**”, la efectividad de su acción está marcada por la atenuación que introduce (lo que se resalta en la gráfica) ya que el atraso realmente es perjudicial en el diseño y se debe buscar la manera que no tenga influencia.

Estructura del compensador adelanto

Se trata también de una estructura que presenta un polo y un cero, pero en este caso con el cero ubicado más cerca de origen que el polo. La figura siguiente presenta un sencillo circuito eléctrico (a) y un diagrama polo-cero (b) que representa a este compensador



La función de transferencia del compensador se la puede escribir como

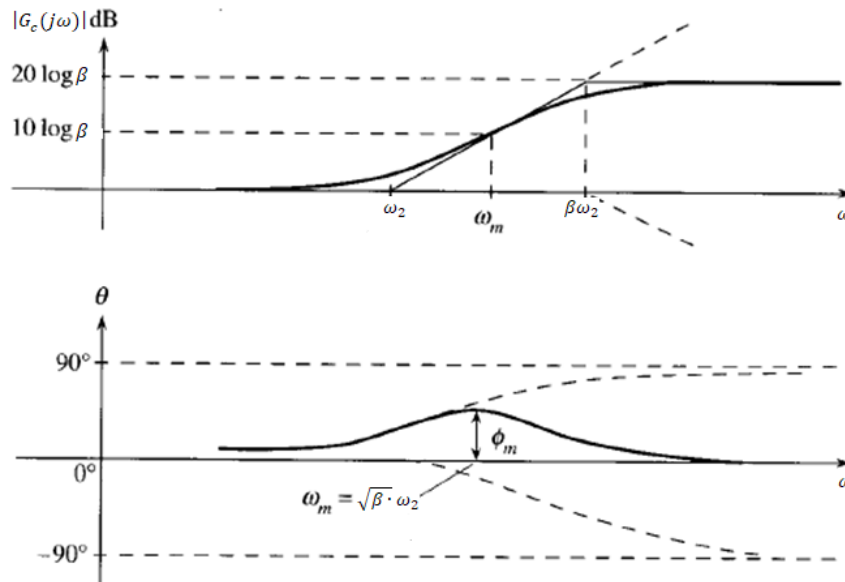
$$G_{c-\text{adelanto}}(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\beta\omega_2}} \quad \text{con } \beta > 1$$

Donde para conseguir esta función de transferencia con el circuito se debe agregar una ganancia de valor $\frac{R_1+R_2}{R_2} = \beta$ tal como se indica en la figura ya que la función de transferencia del circuito puro es

$$\frac{E_2(s)}{E_1'(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + R_1 C s}{1 + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] R_1 C s} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\beta\omega_2}}$$

Resultan así los siguientes valores: para el cero $\omega_2 = \frac{1}{R_1 \cdot C}$ y para el polo $\beta \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2 \cdot R_1 \cdot C}$.

Si se grafica la respuesta en frecuencia del compensador se obtiene la figura siguiente



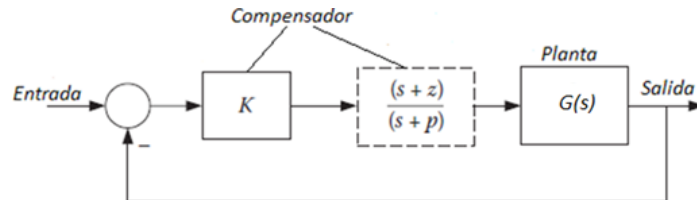
Se aprecia en la figura que el compensador, en cuanto al módulo, en baja frecuencia la ganancia es 1 (0 dB) mientras que en altas frecuencias introduce una ganancia de valor β ($20 \cdot \log \beta$ dB), donde β es la separación entre el polo y el cero del compensador. En cuanto a la fase, el compensador ahora introduce un adelanto en la fase (de ahí su nombre) cuyo máximo valor es $\phi_m = \sin^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \right)$ y que ocurre en $\omega_m = \sqrt{\beta} \cdot \omega_2$. Para el diseño del compensador, es importante destacar en la gráfica que para ω_m el modulo toma el valor $10 \cdot \log \beta$ [dB]

Nota: en este caso la efectividad de la acción compensadora se produce debido al adelanto en la fase que introduce el compensador. La contra que tiene respecto al atraso es que necesita una ganancia adicional. Como contra partida la ganancia que introduce es perjudicial porque lleva a valores grandes de ganancia en alta frecuencia y por lo tanto a que el sistema presente problemas con el ruido del sistema.

Es importante destacar que ambos compensadores atraso y adelanto **no introducen ganancia en baja frecuencia**. Esto es importante cuando se evalúan las constantes de error porque de este modo el valor de la constante de error que corresponda estará dada por el producto de la

ganancia de bode (K_B) de la planta y el K proporcional que se agregue en cascada con el compensador en el diseño.

En este tratado se considerará que la ganancia proporcional del controlador K forma parte del compensador tal como se muestra en la figura siguiente



por lo tanto llamaremos compensador a $G_c(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$. De este modo en el diseño del compensador se obtiene en forma simultánea el valor del controlador proporcional y los parámetros del compensador.

Se presentaran 2 métodos de diseño

- Mediante los diagramas asintóticos de Bode de la respuesta en frecuencia a lazo abierto.
- En el plano s , mediante la utilización del lugar de las Raíces como herramienta de diseño.

Diseñar un sistema de control significa “**ajustar**” o “**sintonizar**” los parámetros del compensador más controlador con miras de que el sistema completo realimentado cumpla con el conjunto de características de comportamiento exigidas. Estas características de comportamiento, típicamente velocidad, estabilidad y exactitud son dadas generalmente como un conjunto de especificaciones en el dominio tiempo, por lo tanto antes de comenzar el diseño con cada uno de los métodos es necesario volcar en el correspondiente espacio de diseño (diagramas de Bode o plano s) las especificaciones que cuantifican el comportamiento deseado del sistema a lazo cerrado. Como el traslado de las especificaciones desde el tiempo hasta el plano s o frecuencia es aproximado (en general se considera para el diseño la respuesta de un sistema de 2^{do} orden con un par complejo conjugado de polos), es aconsejable por lo tanto finalizar el diseño con un ensayo en el dominio tiempo para corroborar que se alcanzó el objetivo de diseño requerido.

Diseño de compensadores mediante los diagramas de Bode

El diseño en el dominio frecuencia mediante las aproximaciones de Bode se fundamenta en el trazado de los diagramas de modulo y fase de la función de transferencia de lazo abierto $KG_{eq}(s)$ ya que se toma como esquema realimentado uno con realimentación unitaria tal como se mostró en las figuras previas. El primer paso por lo tanto es conocer cómo se trasladan las especificaciones de desempeño en el tiempo al dominio frecuencia y más aún en función de la respuesta en frecuencia de lazo abierto, esto es lo que se presenta a continuación.

Especificaciones en el dominio frecuencia a lazo abierto.

Error: se especifica con la pendiente de baja frecuencia y la constante de Bode K_B .

Velocidad: se especifica con la frecuencia de corte de ganancia ω_{cg} . Se conoce que para el amortiguamiento típico de los sistemas de control ($0.4 < \xi < 0.7$), entre la frecuencia de corte de ganancia y el tiempo de subida la relación es aproximadamente la siguiente: $t_R \cdot \omega_{cg} \approx 2.1$ (también en forma aproximada se tiene que $t_R \cdot \omega_b \approx 3$ donde ω_b es el ancho de banda de lazo cerrado)

Estabilidad: se especifica típicamente mediante el margen de fase (MF) y a veces agregando el margen de ganancia (MG).

En algunos diseños más exigentes se suelen especificar la ganancia mínima en frecuencias medias para establecer el rango de frecuencia útil de funcionamiento a lazo cerrado. Por ejemplo si se desea que hasta $\omega = 1$ rad/seg el sistema opere bien (con fidelidad), se requiere que toda señal estacionaria senoidal hasta $\omega = 1$ rad/seg se reproduzca con un mínimo error, digamos un 2% de la entrada. Se puede escribir entonces para el caso de realimentación unitaria:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG_{eq}(s)} \text{ y si } |KG_{eq}(j\omega)| \gg 1 \text{ entonces } \left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \cong \frac{1}{|KG_{eq}(j\omega)|}$$

Ahora bien si se desea que el error hasta una frecuencia ω_o sea menor que, por ejemplo el 2%, se tiene

$$\left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \leq 0.02 \text{ para toda } \omega \leq \omega_o$$

Lo planteado se puede escribir como $\frac{1}{|KG_{eq}(j\omega)|} \leq 0.02$ para toda $\omega \leq \omega_o$

De donde se obtiene que si $|KG_{eq}(j\omega)| \geq \frac{1}{0.02} = 50$ para toda $\omega \leq \omega_o$ el sistema operara con la fidelidad requerida. Esto delimita una zona prohibida en el diagrama de módulo de la respuesta en frecuencia de lazo abierto.

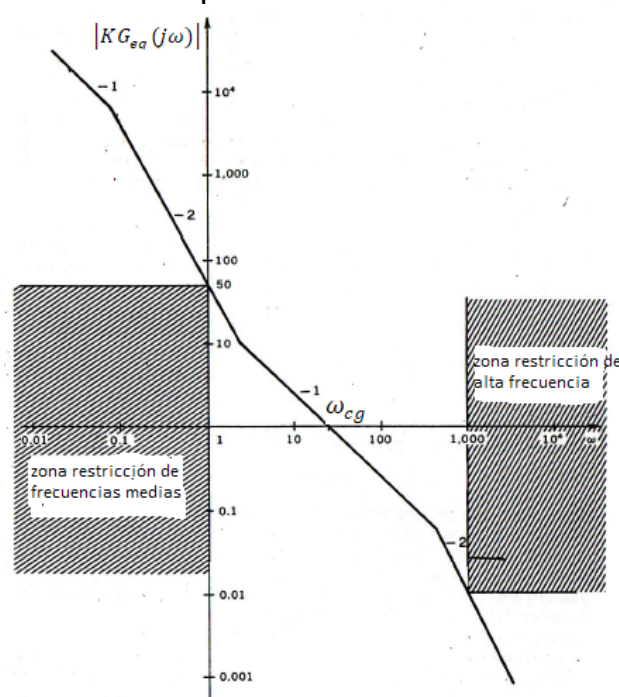
Otra restricción adicional es la relacionada al ruido presente en el sistema. La función de transferencia desde por ejemplo un ruido de medición hasta la salida es la siguiente

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{KG_{eq}(s)}{1 + KG_{eq}(s)}$$

Si se desea que a partir de una dada frecuencia ω_r el ruido se atenúe por ejemplo al 1% se tiene que cumplir que

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} \right| \leq 0.01 \text{ para toda frecuencia } \omega \geq \omega_r$$

Para lograr esta especificación se debe conseguir que $|KG_{eq}(j\omega)| \leq 0.01$ para toda frecuencia $\omega \geq \omega_r$. Esto delimita otra zona prohibida en el diagrama de módulo de la respuesta en frecuencia de lazo abierto. La figura siguiente muestra cómo quedan estas limitaciones en el diagrama de módulo de la respuesta en frecuencia de lazo abierto.



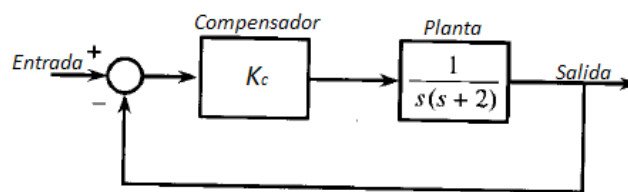
Se muestra también en la gráfica la aproximación asintótica de Bode de una $G_{eq}(j\omega)$ que cumple estrictamente con las restricciones.

Compensación por ajuste de ganancia

En el diseño de este compensador se considera que solamente se coloca el controlador proporcional ($G_c(s)=1$). Es el compensador más simple de diseñar siempre que se consiga cumplir con las especificaciones. Se tiene que la ganancia de lazo con el compensador es $KG_{eq}(s)$ de modo que el módulo de los diagramas de Bode es $20 \log |K| + 20 \log |G_{eq}(j\omega)|$. Así la introducción de la ganancia K desplazará hacia arriba o abajo la curva de $20 \log |G_{eq}(j\omega)|$ dependiendo si $K>1$ o $K<1$ respectivamente. Se considera siempre que $K>0$ de modo que la fase se verá inalterada por el agregado de la ganancia K .

Ejemplo de aplicación:

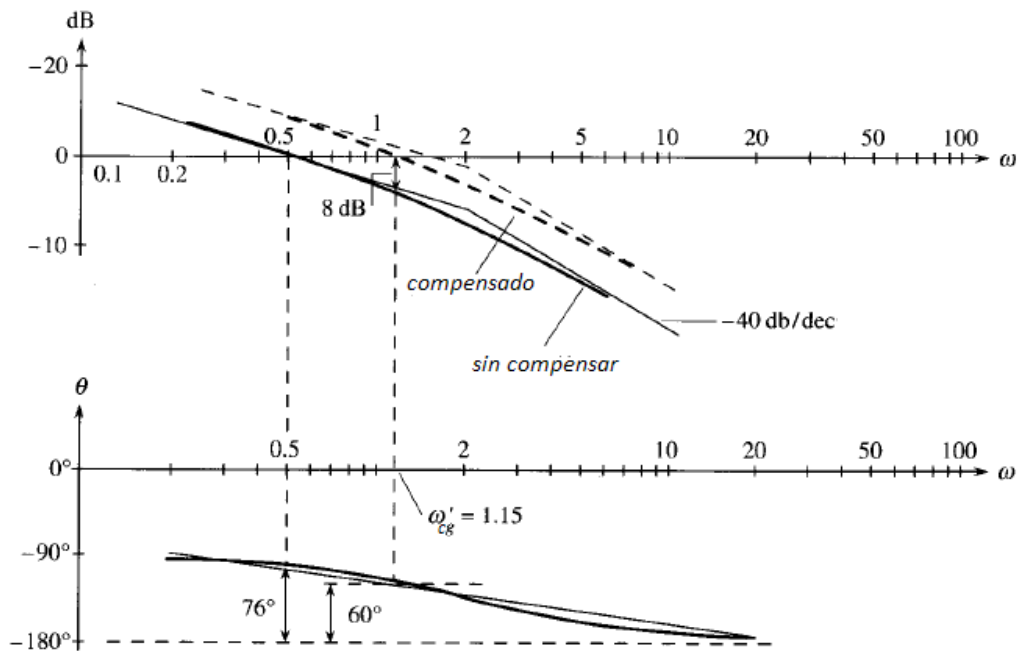
Sea el sistema realimentado dado por el esquema en bloques siguiente



Diseñar el sistema a lazo cerrado de modo que se cumplan las siguientes características:

- a) Error de posición $\leq 10\%$
- b) $MF \geq 60^\circ$ y $MG \geq 12$ dB
- c) Frecuencia de cruce de ganancia (ω_{cg}) tan grande como sea posible.

La figura siguiente presenta los ajustes realizados sobre los diagramas de Bode hasta conseguir, si es posible, obtener un diseño satisfactorio.



La traza en línea llena es el módulo de la planta con sus correspondientes asíntotas de Bode para $K=1$. Como presenta un integrador, el error de posición será siempre cero (el sistema será estable para todo valor de K) de este modo la exigencia *a*) está cumplida.

Analizando la exigencia *b*) el margen de fase que se lee de la gráfica es 76° de modo que cumple en exceso con el mínimo requerido (sobran 16°). Por otro lado como la fase no llega nunca a -180° el MG es infinito, es decir también esta exigencia se cumplirá para todo K .

Analizando para la exigencia *c*) se pide la mayor ω_{cg} posible (buscando la máxima velocidad de respuesta posible del sistema a lazo cerrado). El valor de ω_{cg} con $K=1$ es de 0.5 rad/seg, pero, como hay exceso de margen de fase, es posible aumentar este valor incrementando el valor de K lo que desplazará ω_{cg} hacia la derecha. Para mejorar ω_{cg} se deberá incrementar K hasta que el MF sea aproximadamente 60° . Para hallar donde el MF= 60° se traza una línea horizontal en la gráfica de fase en -120° ; donde intersecta a la curva de fase de la planta es la frecuencia ω'_{cg} buscada. El valor obtenido es $\omega'_{cg} = 1.15$ rad/seg. Lo que falta para completar el diseño es saber cuánto debe valer K . Para esto último se lee en el gráfico que si la curva de módulo se le agregan 8 dB el módulo en ω'_{cg} será 1 ó

0dB. El valor de K se lo obtiene mediante la relación $(20\log K)=8$ de donde $K=2.5$. Esto completa el diseño.

El compensador resultante es $K=2.5$. Con este valor de K , los polos de lazo cerrado se ubican en $s_{1,2} = -1 \pm j1.2$.

Al final del apartado de diseño mediante respuesta en frecuencia se muestra comparativamente con atraso y adelanto el resultado de este diseño.

Compensación utilizando compensador atraso

Cuando mediante ajuste de ganancia no es posible cumplir con los requerimientos de diseño para el sistema y fundamentalmente el problema está en la exactitud el compensador recomendado es el atraso. La filosofía de diseño en el dominio frecuencia para este compensador es

- Si la estabilidad es buena pero no se cumple con el error, se debe aumentar la ganancia pero luego mediante el compensador atraso atenuar de modo que se vuelva aproximadamente a la misma ω_{cg} .
- Si la estabilidad es pobre, se debe utilizar la atenuación del compensador atraso para conseguir una ω'_{cg} más chica y de este modo cumplir con la estabilidad (es posible también aquí mejorar la exactitud).

Es de esperar que siempre empeore la velocidad de respuesta del sistema a lazo cerrado (en el mejor de los casos, si se mantiene ω_{cg} se mantendrá la velocidad).

Nota: se debe tener presente que este compensador agrega atraso de fase, por lo tanto ***se lo debe ubicar en una baja frecuencia donde el atraso no complique la estabilidad del sistema a lazo cerrado.***

Una propuesta de pasos a seguir en el diseño de un compensador atraso es la que se cita a continuación:

Paso 1: evaluar la constante de error que corresponda según el tipo de planta y comparar con los requerimientos de error estacionario. Si es necesario, ajustar la ganancia para cumplir con el error.

Paso 2: Graficar los diagramas de Bode (modulo y fase) de la planta ajustada para cumplir con el error requerido.

Paso 3: Determinar ω_{cg} y ω_{cf} sobre el diagrama de bode y medir MF y MG .

Paso 4: si no se cumple con la estabilidad y se decide un compensador atraso, mediante los diagramas de Bode determinar la frecuencia donde la fase vale $[-180^\circ + (MF + 6^\circ)]$; esta frecuencia será la nueva frecuencia de corte de ganancia que se llamará ω'_{cg} .

Paso 5: medir la atenuación necesaria (a en dB) para bajar la ganancia de modo que el modulo valga 1 (0 dB) cuando la curva pase por ω'_{cg} . Esta es la atenuación que deberá proveer el compensador atraso.

Paso 6: calcular el parámetro (α) utilizando la atenuación obtenida en el paso anterior mediante la relación $-a[dB] = 20 \log \frac{1}{\alpha}$ o bien $\alpha = 10^{\frac{a[dB]}{20}}$.

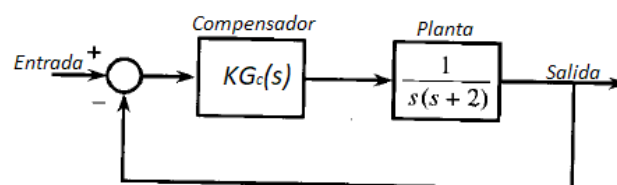
Paso 7: considerar que el cero del compensador se ubicará una década antes que la frecuencia de corte ω'_{cg} , es decir hacer $\alpha\omega_1 = \frac{\omega'_{cg}}{10}$ y evaluar ω_1 .

Paso 8: Colocar el cero ($\omega_z = \alpha\omega_1$) y el polo del compensador ($\omega_p = \omega_1$) y redibujar los diagramas de Bode.

Paso 9: si analizando el diseño mediante los diagramas de bode se considera que el sistema resultante satisface todos los requerimientos, para dar por finalizado el diseño se efectúa un chequeo mediante una respuesta en el tiempo.

Ejemplo de aplicación:

Para el mismo sistema utilizado anteriormente en ajuste de ganancia cuyo esquema en bloques se repite aquí



Se debe conseguir del sistema realimentado que:

a) Error de velocidad $\leq 10\%$

b) $MF \geq 60^\circ$ y $MG \geq 12$ dB

Seguiremos los pasos de diseño enunciados

Paso 1: se evalúa la constante de error y la ganancia proporcional

Como la planta es tipo 1 por lo tanto la constante de error finita es k_v . Para calcularla se tiene (recordar que el compensador tiene ganancia 1 en $w=0$ y por lo tanto no se la considera en el cálculo):

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[K \cdot \frac{1}{s(s+2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[K \cdot \frac{0.5}{s(1+0.5s)} \right] = 0.5 \cdot K$$

Como se requiere error de velocidad $\leq 10\%$ o sea de 0.1 de la entrada entonces como $e_{vel}(\infty) = \frac{1}{k_v}$ se tiene que $K_v=10$. Resulta entonces que valor de diseño para la constante proporcional es $K=20$

Paso 2: se grafica los diagramas asintóticos de Bode para la planta ajustada en ganancia para cumplir con el error

$$K \cdot G_{eq}(s) = 20 \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{10}{s(1+0.5s)}$$

Las curvas asintóticas de modulo y fase se muestran en trazo lleno en la figura

Paso 3: se determinan de la grafica ω_{cg} , ω_{cf} , MF y MG

$$\omega_{cg} = 4.2 \text{ rad/seg}, \omega_{cf} \rightarrow \infty, MF=26^\circ \text{ y } MG=\infty$$

Paso 4: a pesar que el MG es infinito, no se cumple con el MF requerido de 60° . Se decide agregar un compensador atraso.

De las curvas asintóticas se determina ω'_{cg} como la frecuencia donde la fase vale $[-180^\circ + (MF+6^\circ)] = [-180^\circ + (60^\circ+6^\circ)] = -114^\circ$. Resulta $\omega'_{cg} = 0.9$

Paso 5: se mide en la curva asintótica de modulo cuanto es necesario atenuar para que en ω'_{cg} el modulo valga 1 o 0dB.

Se mide que se necesita atenuar 20dB

Paso 6: a partir de la atenuación necesaria se debe calcular el parámetro α utilizando la relación $\alpha = 10^{\frac{a[dB]}{20}}$.

$$\alpha = 10^{\frac{a[dB]}{20}} = 10^{\frac{20}{20}} = 10$$

Esta es la separación entre el polo y el cero del compensador

Paso 7: se calcula la ubicación del cero del compensador mediante la

relación $\alpha\omega_1 = \frac{\omega'_{cg}}{10}$ (el cero se ubica una década antes que la frecuencia de cruce de ganancia ω'_{cg})

De la relación indicada se tiene $\omega_1 = \frac{\omega'_{cg}}{10\alpha} = \frac{0.9}{10.10} = 9 \cdot 10^{-3}$

De modo que el cero del compensador se ubica en $s = 0.09$ y el polo del compensador en $s = 0.009$

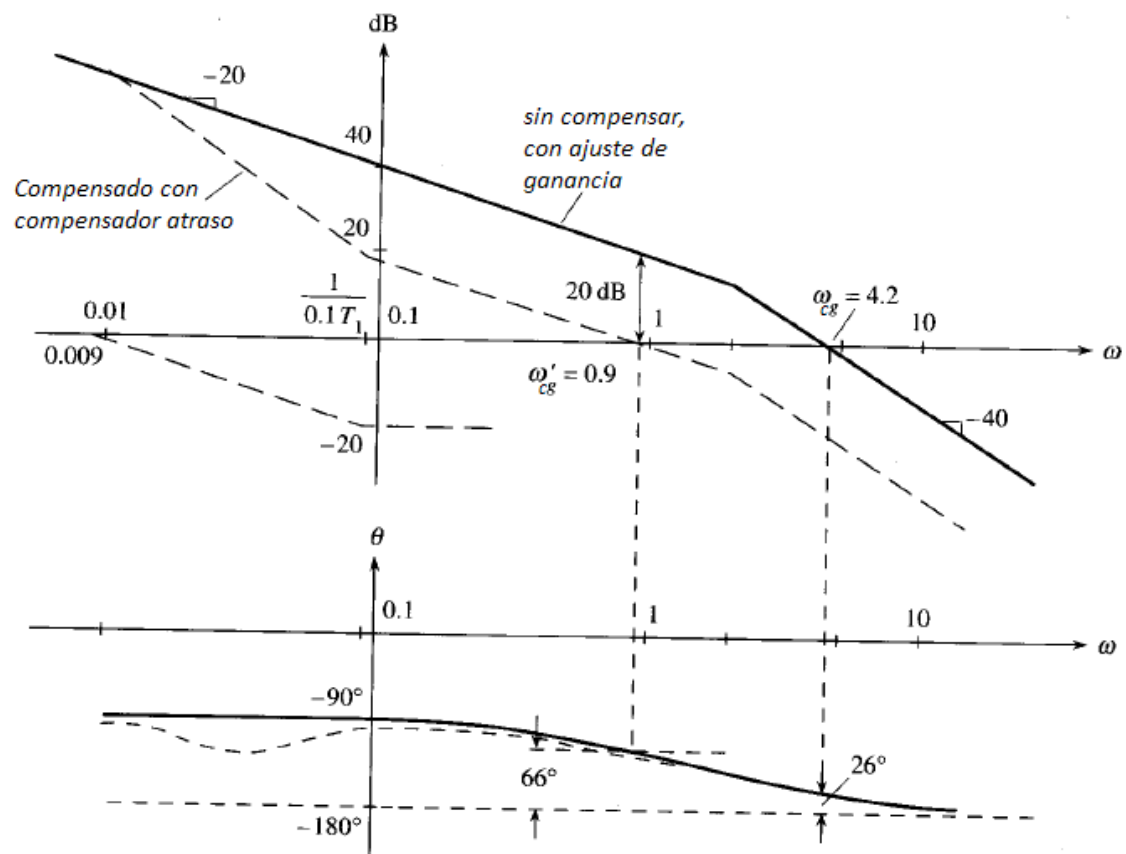
Paso 8: dibujar las gráficas asintóticas de Bode del sistema compensado. Esto se ve en líneas de trazo en los diagramas de Bode de la figura

Paso 9: se puede considerar satisfactorio el diseño. Queda para el lector calcular y graficar la respuesta en el tiempo al escalón del sistema diseñado. Al final del apartado se muestra una respuesta en el tiempo al escalón para el sistema diseñado comparándolo con los otros 2 diseños que aquí se harán para la misma planta.

El compensador atraso resultante es

$$G_{c-atraso}(s) = 20 \cdot \frac{1 + 11.1s}{1 + 111s} = 2 \cdot \frac{s + 0.09}{s + 9 \cdot 10^{-3}}$$

Los polos de lazo cerrado se ubican en: $s_1 = -0.98$ y $s_{2,3} = -0.96 \pm j0.96$ mientras que habrá un cero en $s = -0.09$.



Compensación utilizando compensador adelanto

Cuando mediante ajuste de ganancia no es posible cumplir con los requerimientos de diseño para el sistema y fundamentalmente el problema está en la velocidad y estabilidad, el compensador recomendado es el adelanto.

La filosofía de diseño en el dominio frecuencia para este compensador consiste en aprovechar el adelanto de fase introducido por el compensador para conseguir aumentar el MF y además, como se verá, introducir este compensador indefectiblemente lleva a aumentar la ω_{cg} de la planta llevándola a una ω'_{cg} más elevada lo que representa un incremento de la velocidad de respuesta del sistema a lazo cerrado. Se puede pensar que este compensador no es útil para mejorar la exactitud; esto no es así, por ejemplo si el MF es bueno y mediante la red adelanto se incrementa el MF es posible aumentar la ganancia y de este modo mejorar el error volviendo al MF original.

Es de esperar que empeore el rechazo a los ruidos de alta frecuencia ya que aumenta el ancho de banda al incrementar ω_{cg}

Nota: se debe tener presente que este compensador agrega adelanto de fase, por lo tanto ***es útil si se lo ubica en la zona de la ω_{cg} de la planta***

Una propuesta de pasos a seguir en el diseño de un compensador adelanto es la que se cita a continuación:

Paso 1: evaluar la constante de error que corresponda según el tipo de planta y comparar con los requerimientos de error estacionario. Si es necesario, ajustar la ganancia para cumplir con el error.

Paso 2: Graficar los diagramas de Bode (modulo y fase) de la planta ajustada para cumplir con el error requerido.

Paso 3: Determinar ω_{cg} y ω_{cf} sobre el diagrama de bode y medir MF y MG.

Paso 4: calcular el adelanto de fase (ψ) que debe introducir el compensador $\psi = MF_{requerido} - \phi_1$ (ϕ_1 es el margen de fase MF del sistema sin compensar medido en la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg}). El agregado del compensador adelanto desplazará ω_{cg} a la derecha y como consecuencia de ello disminuirá el MF ya que aparecerá una nueva

frecuencia de cruce de ganancia ω'_{cg} ; para compensar esta disminución del MF se agrega un ángulo $\theta \approx 5^\circ$ a ψ es decir ahora se toma $\psi' = MF \text{ requerido} - \phi_1 + 5^\circ$.

Paso 5: hacer el máximo adelanto de fase del compensador $\phi_m = \psi'$ y evaluar la constante (β) del compensador mediante la relación $\beta = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$

Paso 6: como la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_{cg} se ubica a la derecha de la original (ω_{cg}) y se desea colocar el máximo adelanto de fase (ϕ_m) en esta nueva frecuencia, es necesario evaluar esta nueva frecuencia ω'_{cg} antes de ubicar el compensador. Con este fin, como $10 \log \beta$ es la ganancia del compensador en ϕ_m , se traza una línea horizontal ubicada en $-10 \log \beta$ sobre la gráfica de modulo; la intersección de esta línea con la curva de bode de la planta ajustada en ganancia para cumplir con el error es la ω'_{cg} buscada.

Paso 7: medir el MF (ϕ_2) a esta nueva frecuencia ω'_{cg} . Si $(\phi_1 - \phi_2) > \theta = 5^\circ$ adoptar un valor mayor para θ en el paso 4 y repetir el diseño hasta que $(\phi_1 - \phi_2) \leq \theta$. Recordar, ϕ_1 es el MF original sin compensar ajustado posiblemente en ganancia y ϕ_2 es el MF que se obtendría si se agregara el compensador diseñado; la diferencia entre ambos debe ser menor o igual a la tolerancia adoptada θ .

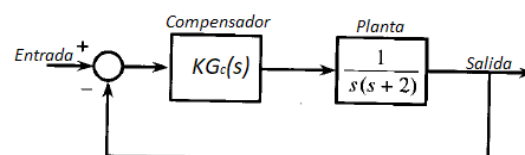
Paso 8: Cumplido el paso 7, hacer $\omega_m \equiv \omega'_{cg}$ y evaluar ω_2 con la relación $\omega_m = \sqrt{\beta} \cdot \omega_2$.

Paso 9: ubicar el cero del compensador (z) en $\omega_z = \omega_2$ y el polo del compensador (p) en $\omega_p = \beta \omega_2$ (recordar que $\beta > 1$).

Paso 10: efectuar un chequeo del comportamiento del sistema realimentado para verificar el cumplimiento de lo requerido.

Ejemplo de aplicación:

Para el mismo sistema utilizado anteriormente en ajuste de ganancia cuyo esquema en bloques se repite aquí



Se debe conseguir del sistema realimentado que:

a) Error de velocidad $\leq 10\%$

b) $MF \geq 60^\circ$ y $MG \geq 12$ dB

Igual que en el diseño para compensador atraso seguiremos los pasos citados para facilitar la comprensión del método.

Paso 1: constante de error y ganancia proporcional. Como la planta y las exigencia de error son idénticas que en el diseño atraso, el procedimiento es el mismo. Se transcribe lo realizado allí.

Como la planta es tipo 1 por lo tanto la constante de error finita es k_v . Para calcularla se tiene (recordar que el compensador tiene ganancia 1 en $w=0$ y por lo tanto no se la considera en el cálculo):

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[K \cdot \frac{1}{s(s+2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[K \cdot \frac{0.5}{s(1+0.5s)} \right] = 0.5 \cdot K$$

Como se requiere error de velocidad $\leq 10\%$ o sea de 0.1 de la entrada entonces como $e_{vel}(\infty) = \frac{1}{k_v}$ se tiene que $K_v=10$. Resulta entonces que valor de diseño para la constante proporcional es $K=20$

Paso 2: se grafica los diagramas asintóticos de Bode para la planta ajustada en ganancia para cumplir con el error

$$K \cdot G_{eq}(s) = 20 \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{10}{s(1+0.5s)}$$

Las curvas asintóticas de modulo y fase se muestran en trazo lleno en la figura de diseño.

Paso 3: ídem al diseño atraso, se determinan de la grafica ω_{cg} , ω_{cf} , MF y MG

$$\omega_{cg} = 4.2 \text{ rad/seg} , \omega_{cf} \rightarrow \infty , MF=26^\circ \text{ y } MG=\infty$$

Paso 4: calcular el adelanto de fase (ψ) que debe introducir el compensador $\psi = MF \text{ requerido} - \phi_1$ (ϕ_1 es el MF del sistema sin compensar, es decir en la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg}).

$$\psi = 60^\circ - 26 = 34^\circ$$

El agregado del compensador adelanto desplazará ω_{cg} a la derecha y como consecuencia de ello disminuirá el MF ya que aparecerá una nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_{cg} ; para compensar esta disminución del

MF se agrega un ángulo $\theta \approx 5^\circ$ a ψ es decir ahora se toma

$$\psi' = MF \text{ requerido} - \phi_1 + 5^\circ.$$

$$\psi' = 34^\circ + 5^\circ = 39^\circ$$

Paso 5: se hace el máximo adelanto que introducirá el compensador ϕ_m igual a ψ' , es decir: $\phi_m = \psi'$:

$$\phi_m = 39^\circ$$

Se evalúa β del compensador mediante la relación $\beta = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$

$$\beta = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = \frac{1 + \sin 39^\circ}{1 - \sin 39^\circ} = \frac{1.63}{0.37} = 4.4$$

Paso 6: se mide a la nueva frecuencia de cruce de modulo ω'_{cg} donde se aplicará el máximo adelanto que produce el compensador. Con este fin, como $10 \log \beta$ es la ganancia del compensador en ϕ_m , se traza una línea horizontal ubicada en $-10 \log \beta = -10 \log 4.4 = -6.44 \text{ dB}$. Cuando esta línea intersecta la curva de modulo ajustada en ganancia se tiene el nuevo valor de la frecuencia de cruce de ganancia $\omega'_{cg} = 6.3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$.

Paso 7: de los trazados de Bode se mide el nuevo margen de fase ϕ_2 en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_{cg} . El resultado es $\phi_2 = 18^\circ$

Se evalúa $(\phi_1 - \phi_2) : (26^\circ - 18^\circ) = 8^\circ$. Como este valor es mayor que el valor adoptado para $\theta = 5^\circ$ se debe adoptar un valor mayor para θ en el paso 4 y repetir los pasos de diseño hasta que $(\phi_1 - \phi_2) \leq \theta$. Se adopta $\theta = 9^\circ$. Con el nuevo valor adoptado se repiten los pasos y se obtiene sucesivamente

$$\phi_m = 34^\circ + 9^\circ = 43^\circ$$

$$\beta = \frac{1 + \sin 43^\circ}{1 - \sin 43^\circ} = 5.9$$

nueva línea horizontal en $-10 \log 5.9 = -7.7 \text{ dB}$

nueva frecuencia de cruce de ganancia: $\bar{\omega}'_c = 6.8 \text{ rad/seg}$

nuevo margen de fase: $\phi_2 = 17^\circ$

con lo que ahora $\phi_1 - \phi_2 = 26^\circ - 17^\circ = 9^\circ$; este valor esta correcto y por lo tanto se continua con el diseño.

Paso 8: Hacer $\omega_m \equiv \bar{\omega}'_c$ y evaluar ω_2 con la relación $\omega_m = \sqrt{\beta} \cdot \omega_2$.

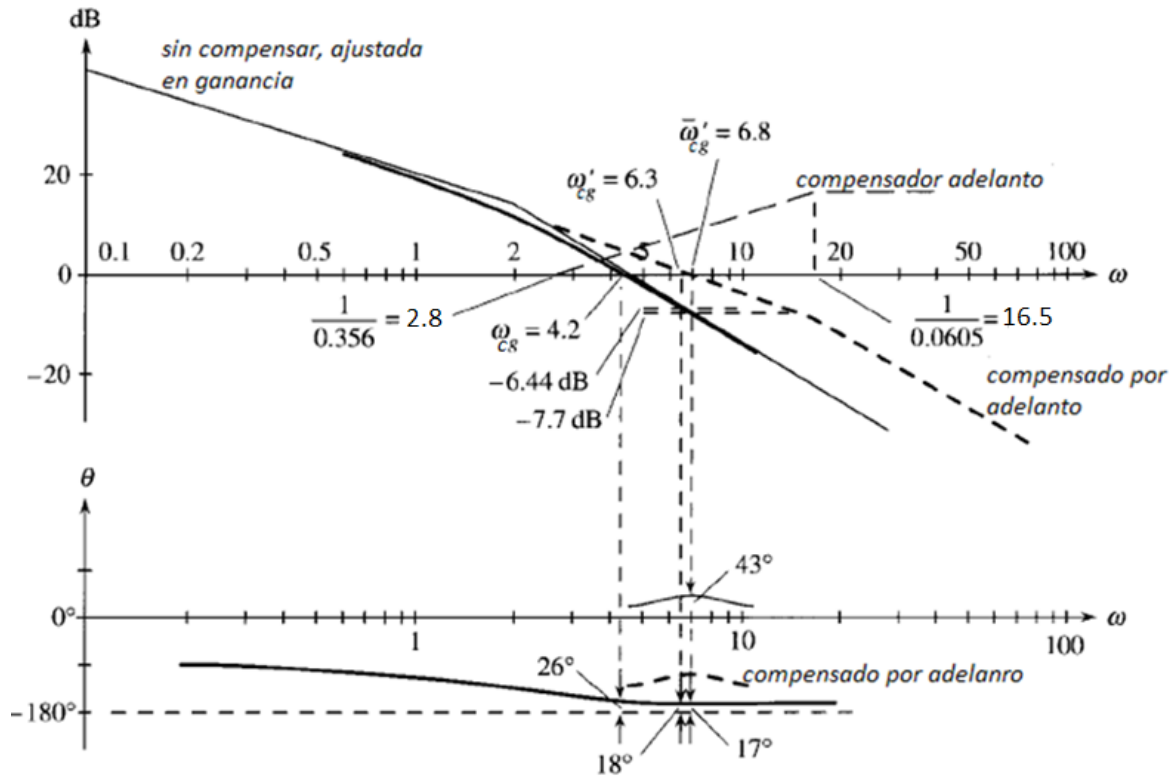
La frecuencia donde el compensador aplicara el máximo adelanto es

$$\omega_m = 6.8 \text{ rad/seg}.$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_m}{\sqrt{\beta}} = \frac{6.8}{\sqrt{5.9}} = 2.8 \text{ rad/seg}$$

Paso 9: el cero del compensador (z) se ubicará en $\omega_z = \omega_2 = 2.8 \text{ rad/seg}$. El polo del compensador (p) se ubicará en $\omega_p = \beta \omega_2 = 5.9 \cdot 2.8 = 16.5 \text{ rad/seg}$

Paso 10: queda para el lector calcular y graficar una respuesta en el tiempo para el sistema diseñado. Al final se compara la respuesta con compensador adelanto con las otras 2 anteriores.



El compensador adelanto resultante es

$$G_{c-\text{adelanto}}(s) = 20 \cdot \frac{1 + 0.356s}{1 + 0.06s} = 119 \cdot \frac{s + 2.8}{s + 16.5}$$

Los polos de lazo cerrado se ubican en: $s_1 = -3.2$ y $s_{2,3} = -7.7 \pm j6.6$ mientras que habrá un cero en $s = -2.8$.

El agregado del compensador adelanto incrementó la frecuencia de cruce de ganancia y como consecuencia se incrementó el ancho de banda; esto último a su vez lleva a mejorar la velocidad de respuesta del sistema resultante. El diseño de compensador adelanto no siempre proporciona un buen diseño; por ejemplo si la fase en la zona de la frecuencia de cruce de ganancia decae rápidamente, el diseño es complicado y en general no es posible la solución solo con un compensador adelanto y probablemente se necesite combinarlo con un compensador atraso dando lugar al compensador conocido como **“Atraso-Adelanto”**. La función de

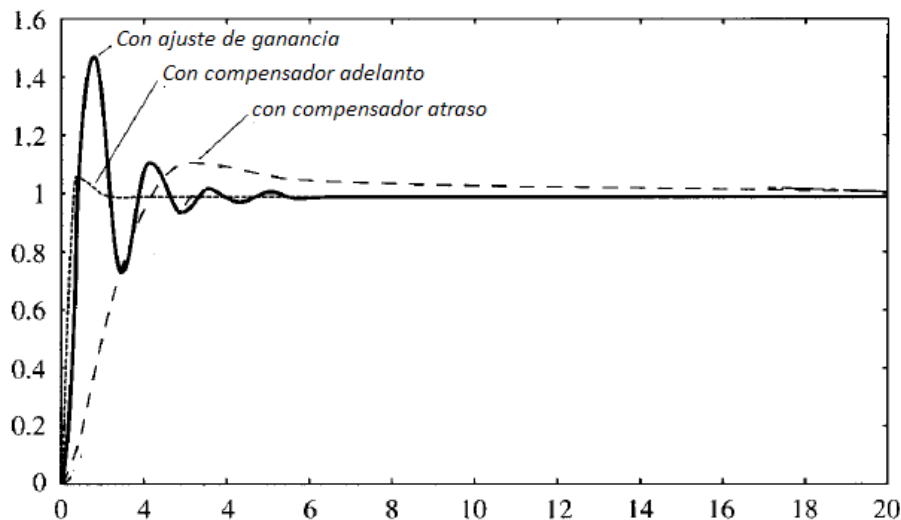
transferencia del compensador combinado es simplemente una cascada de los 2, es decir

$$G_{c-\text{atraso,adelanto}}(s) = \frac{1+\frac{s}{\alpha\omega_1}}{1+\frac{s}{\omega_1}} \cdot \frac{1+\frac{s}{\omega_2}}{1+\frac{s}{\beta\omega_2}} \quad \text{con } \alpha > 1 \text{ y } \beta > 1$$

En el diseño de este compensador combinado el criterio a seguir es similar al aplicado en cada uno por separado: en la parte atraso se hace uso de la propiedad de atenuación del compensador en bajas frecuencias, mientras que en el adelanto se hace uso de la propiedad de agregar fase positiva en la frecuencia de cruce de ganancia de la planta.

Comparación en el tiempo de los 3 diseños

Comparando en un gráfico simultáneamente las respuestas de los 3 compensadores se puede ver que el compensador simple de ajuste de la ganancia presenta un gran sobrepico a pesar de tener igual que los otros un MF=60° y el MG es infinito.

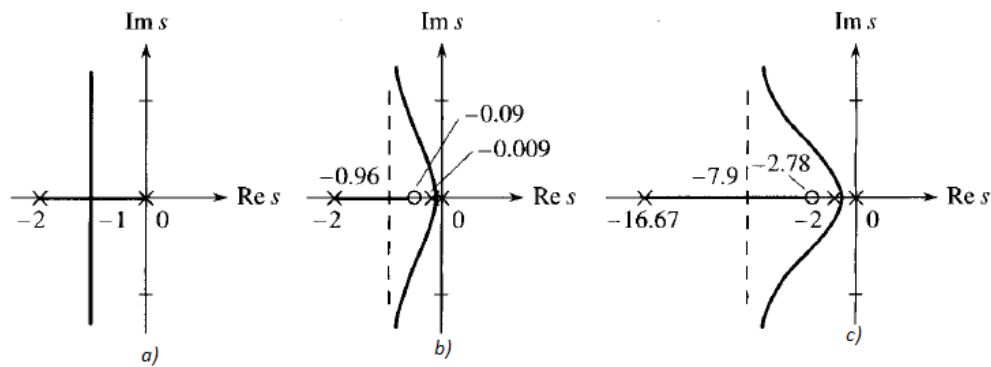


Se ve que, como era de esperar, el diseño con el compensador atraso es el más lento, aunque mejor amortiguado que el ajuste de ganancia.

Finalmente es apreciable la mejora en la velocidad y estabilidad observada en el diseño con compensador adelanto: presenta menos sobrepico y tiempos más cortos.

Comparación de los 3 diseños mediante el Lugar de las Raíces

A continuación se muestran los lugares de las raíces para los 3 diseños



La parte a) de la figura corresponde al ajuste de ganancia, la parte b) al agregado de compensador atraso y la c) al agregado del compensador adelanto.

Como el par complejo conjugado dominante de polos del diseño adelanto se ubican en $s_{2,3} = -7.7 \pm j6.6$ ($\omega_n = 10$), mientras que el par dominante del diseño atraso se ubica en $s_{2,3} = -0.96 \pm j0.96$ ($\omega_n = 1.36$) es perfectamente entendible las mejoras en la velocidad de repuesta de cada diseño. Los amortiguamientos relativos (ξ) son similares por lo tanto también lo son los sobrepicos porcentuales.

El siguiente cuadro resume alguna de las diferencias entre los compensadores atraso y adelanto

	Compensador Atraso	Compensador Adelanto
1	El polo se ubica más cercano al origen que el cero. El compensador introduce una fase negativa para toda $\omega > 0$	El cero se ubica más cercano al origen que el polo. El compensador introduce una fase positiva para toda $\omega > 0$
2	El compensador disminuye ω_{cg} por lo tanto disminuye el ancho de banda y con ello disminuye la velocidad de respuesta	El compensador aumenta ω_{cg} por lo tanto aumenta el ancho de banda y con ello aumenta la velocidad de respuesta
3	El compensador debe ser ubicado 1 década antes de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.	El compensador debe ser ubicado sobre la nueva frecuencia de cruce de ganancia para agregar el máximo adelanto en la fase.
4	El compensador no necesita ganancia adicional.	El compensador necesita ganancia adicional.
5	El diseño puede ser hecho en un solo paso.	El diseño puede requerir de varios pasos.

Diseño de compensadores mediante el Lugar de las Raíces

El lugar de las raíces describe el lugar geométrico en el plano s de los polos de lazo cerrado cuando algún parámetro del sistema (típicamente la ganancia del camino directo) cambia. Se puede cumplir con un conjunto de características de comportamiento del sistema si se pueden ubicar un par de polos complejo conjugado en el interior de una región del plano s delimitada según las especificaciones que cuantifican el comportamiento deseado.

De este modo el proceso de diseño involucra el diseño de parámetros tales como la ganancia del camino directo y el tipo de compensador y sus parámetros de tal forma que los polos de lazo cerrado se ubiquen en un lugar apropiado del plano s .

Lo citado en el último párrafo puede ser resuelto aplicando el método del lugar de las raíces. En concreto haciendo cumplir sus 2 condiciones:

- Condición de ángulo
- Condición de modulo

A partir de que se delimitó la región de diseño en el plano s (región donde se cumple con la velocidad y la estabilidad), el próximo paso es construir el lugar de las raíces para algún parámetro variable de la planta (típicamente la ganancia) aplicando la condición de ángulo. Cuando el lugar está construido se chequea si las ramas dominantes del lugar (las ramas más próximas al eje imaginario) pasan a través de la región de diseño. Si lo hace, se debe evaluar el correspondiente valor del parámetro variable mediante la condición de modulo.

Si el error es una exigencia de diseño, se evalúa si el valor obtenido para la ganancia del camino directo permite cumplir con la constante de error correspondiente a la exigencia de diseño. Si se cumple con el error, aquí termina todo. Si no se cumple con el error o las ramas dominantes del lugar no pasan por la región de diseño, se debe agregar en el interior del lazo un compensador dinámico (atraso o adelanto) que permita cumplir con las características de comportamiento requeridas. Lo expresado en palabras se puede resumir en los siguientes pasos:

Paso 1: Representar en el plano s las especificaciones de diseño

Paso 2: Dibujar el lugar de las raíces con K variable. Chequear que por lo menos un par de ramas (una por arriba y otra por abajo del eje real negativo) pasa por la región de diseño mientras que el resto de ramas pasan por zonas a la izquierda de la región de diseño para los mismos valores del parámetro de diseño K .

Paso 3: si no se cumple el paso 2, agregar un compensador en el lazo de control y ajustar los parámetros del mismo buscando que el sistema a lazo cerrado cumpla con el comportamiento requerido (que el lugar pase por la zona permitida del plano s).

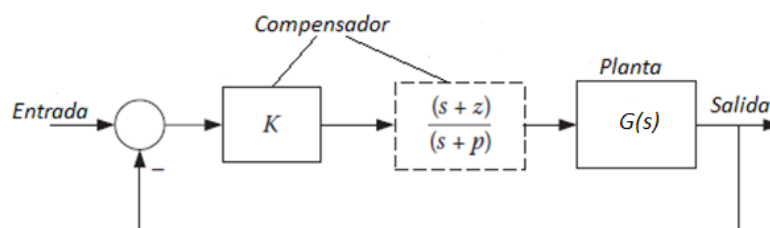
Paso 4: evaluar la ganancia en el punto de diseño sobre el lugar mediante la condición de módulo y obtener la ganancia real a adicionar.

Nota: se debe conseguir a lazo cerrado un par de polos complejos conjugados dominantes, mientras que el resto de polos, si los hubiere, deben quedar suficientemente alejados a la izquierda del par complejo conjugado dominante. Aquí es de suma utilidad la regla del lugar de las raíces que dice que: si el exceso polo cero es mayor que 1 ($n-m>1$), la suma de las posiciones de los polos de lazo abierto es igual a la suma de las posiciones de los polos de lazo cerrado para todo valor del parámetro variable K .

Compensación por adelanto

En el diseño de este tipo de compensador esencialmente se siguen los pasos enunciados al comienzo. En este caso se escribe la función de transferencia del compensador en la forma polo-cero como sigue

$$G_c(s) = k \cdot \frac{p}{z} \cdot \left[\frac{s+z}{s+p} \right] = K \cdot \left[\frac{s+z}{s+p} \right] \quad \text{con } K = k \cdot \frac{p}{z} \text{ y } z < p$$



El diseño se completa cuando se encuentran los valores de k , p y z (p y z es la posición del polo y el cero en el s del plano s).

Una propuesta de pasos a seguir en el diseño de un compensador adelante es la que se cita a continuación:

Paso 1: Representar en el plano s las especificaciones de diseño

Paso 2: Seleccionar un par complejo conjugado de polos que cumpla con las especificaciones (estén en la zona permitida del plano s). En el diseño, este par de polos debe finalmente ser el par de polos dominantes de lazo cerrado.

Paso 3: Ubicar el cero del compensador ($-z$) en el valor de la parte real del par de polos complejos conjugados del paso 2.

Paso 4: Ubicar el polo del compensador ($-p$) a la izquierda del cero del compensador ($-z$) de modo que se satisfaga la condición de ángulo del lugar de las raíces en la posición del par complejo conjugado elegido en el paso 2.

Paso 5: Dibujar el lugar de las raíces con K variable y evaluar el $K_{\text{diseño}}$ aplicando la condición de modulo del lugar de las raíces.

Paso 6: Si una de las exigencias es el error, en caso de no cumplir con el mismo volver al paso 2 y seleccionar una posición del par complejo que permita aumentar K .

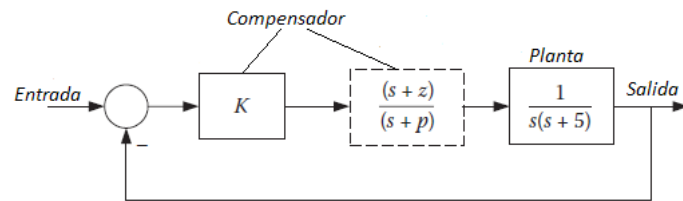
Paso 7: verificar el diseño mediante una respuesta en el tiempo.

Nota: si la función ganancia de lazo posee un polo real en el lugar a colocar el cero del compensador ($-z = -\text{parte real del par complejo conjugado elegido}$), se debe ubicar el cero del compensador a la izquierda y bastante alejado del polo de modo que el compensador no altere drásticamente la característica dinámica del sistema sin compensar produciendo un polo dominante de lazo cerrado.

Ejemplo de diseño:

Sea un sistema cuya planta es $G(s) = \frac{1}{s(s+5)}$, diseñar un sistema realimentado de modo que se cumpla con

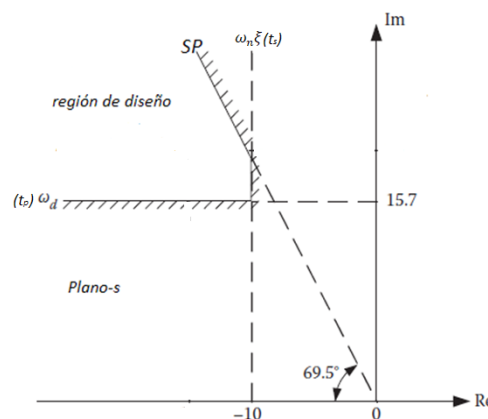
- a) Tiempo de pico $t_p < 0.2$ seg.
- b) Tiempo de establecimiento $t_s < 0.4$ seg.
- c) $SP\% < 10\%$



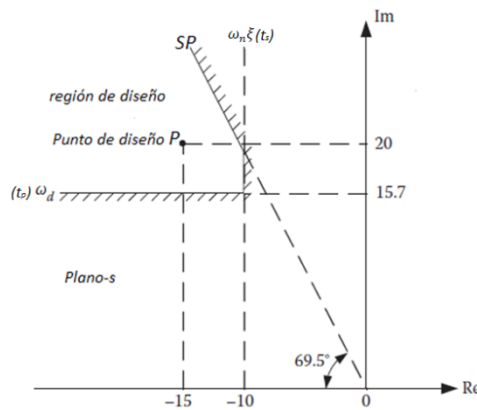
Paso 1: se debe delimitar la zona de diseño:

- a) Por el tiempo de pico ($t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$), como $t_p < 0.2$, entonces $\omega_d > \frac{\pi}{0.2} = 15.7$. Este es el valor mínimo permitido para el ω_d del par de polos complejos conjugados que se adopte. Esto representa en el plano s una recta horizontal que en el límite pasa por $\omega_d = 15.7$ en el eje imaginario.
- b) Por el tiempo de establecimiento ($t_s = \frac{4}{\omega_n \xi}$), como $t_s \leq 0.4$, en forma análoga a lo hecho anteriormente resulta $\omega_n \xi = \frac{4}{0.4} \geq 10$. Esto representa en el plano s una recta vertical que en el límite pasa por $\omega_n \xi = -10$ en el eje real.
- c) Por el sobrepico porcentual $SP\% = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \leq 10$, se obtiene que $\xi \geq 0.35$ lo que en el límite corresponde con una recta que pasa por el origen del plano s con un ángulo desde el semieje negativo hasta la recta de valor $\alpha = \cos^{-1} 0.35 = 69.5^\circ$.

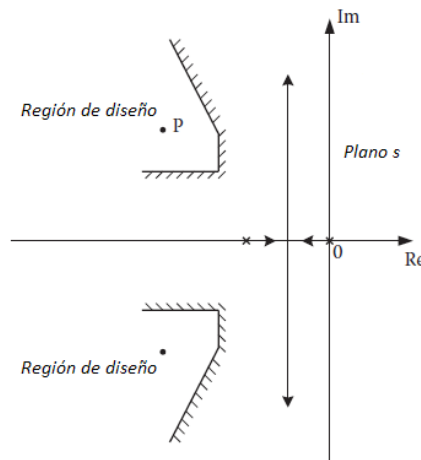
La integración de estas 3 restricciones da lugar a lo mostrado en la siguiente figura



Paso 2: se selecciona un punto de diseño P $(-15, 20)$ tal como el mostrado en la figura siguiente para el correspondiente al 2^{do} cuadrante. El mismo pertenece a la región de diseño (el conjugado estará en el 3^{er} cuadrante)



Se prueba si puede solucionarse el problema solo con ajuste de ganancia (esta prueba debe realizarse en todo tipo de diseño porque el compensador debe ser el más simple posible). Para ello se dibuja el lugar de las raíces de la planta solo con ajuste de la ganancia k , tal como se ve en la figura siguiente



Como se ve en la figura, cuando cambia la ganancia el lugar no pasa por la región de diseño. Por lo tanto es necesario agregar un compensador dinámico que fuerce al lugar a pasar por la zona y más aún, por el punto P .

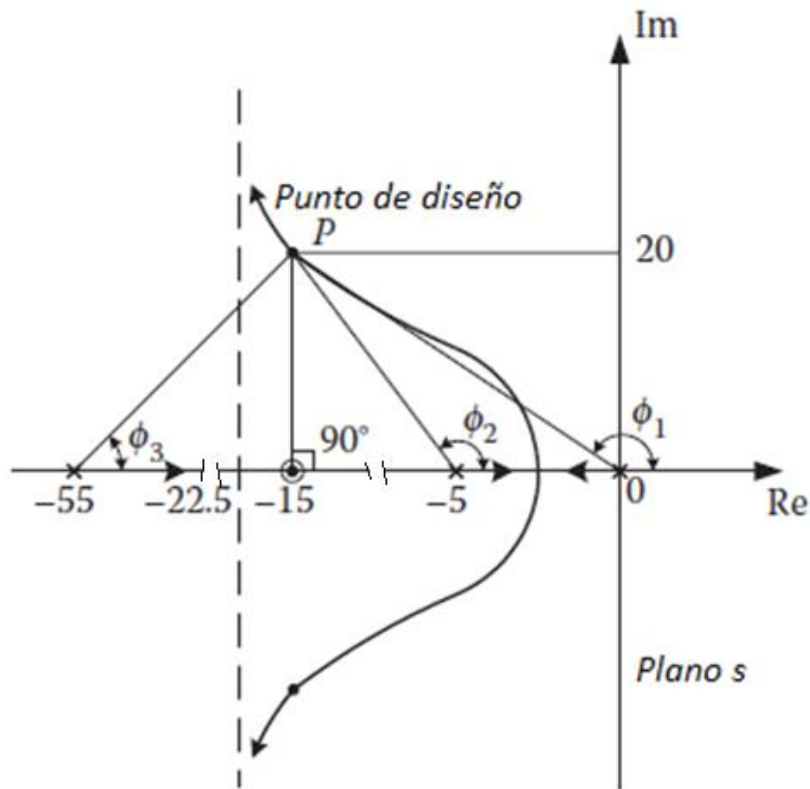
En este caso no hay exigencias de exactitud de modo que solo con conseguir que una rama pase por P , el diseño se verá resuelto

Paso 3: se ubica el cero (z) en $s = -15$.

Paso 4: se ubica el polo (p) de modo que el punto P pertenezca al lugar.
Para ello se hace cumplir la condición de ángulo.
La condición de ángulo exige que

$$\sum \text{angulos desde ceros} - \sum \text{angulos desde polos} = \pm 180^\circ$$

Se tiene la figura siguiente



Resulta: $90^\circ - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ$

$$\phi_1 = 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{20}{15} = 126.87^\circ$$

$$\phi_2 = 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{20}{10} = 116.57^\circ$$

De donde se obtiene $\phi_3 = 90^\circ + 180^\circ - 126.87^\circ - 116.57^\circ = 26.56 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{20}{x-15}$

De modo se llega a que el polo (p) debe ubicarse en $s = -55$. Esta es una ubicación bastante buena ya que está muy alejada a la izquierda del cero del compensador.

Paso 5: el lugar para el diseño es el que se muestra en la figura anterior. El $K_{diseño}$ se lo puede encontrar haciendo uso de la condición de módulo:

$$\frac{\prod \text{distancia desde los ceros al punto } P}{\prod \text{distancia desde los polos al punto } P} = K_{diseño}$$

En este caso se tiene

Distancia desde el polo en el origen: $\sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

Distancia desde el polo en $s=-5$: $\sqrt{20^2 + 10^2} = 22.36$

Distancia desde el polo en $s=-55$: $\sqrt{20^2 + 40^2} = 44.72$

Distancia desde el cero en $s=-15$: 20

Reemplazando resulta: $K_{diseño} = \frac{25 \cdot 22.36 \cdot 44.72}{20} = 1250$

El compensador adelante resultante es

$$G_c(s) = 1250 \cdot \frac{s + 15}{s + 55}$$

Paso 6: en el ejemplo no se tiene exigencia de error, pero si se deseara conocer cuánto vale el error, se tiene que como $G_{eq}(s)$ tiene un integrador y como se diseñó un sistema a lazo cerrado estable, el error al escalón será 0. El error a la rampa será finito y para calcularlo se evalúa la constante de error k_v :

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{eq}(s) = s \cdot 1250 \cdot \frac{s + 15}{s + 55} \cdot \frac{1}{s(s + 5)} = 68.2$$

El error relativo a la rampa es $e_{rampa}(\infty) = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{68.2} = 0.014$ o sea del 1.4 % de la entrada. Si se hubiese tenido exigencia de error y no se cumple con el mismo, se debe rediseñar el compensador a partir del paso 2 y continuar los pasos tal como se hizo en este desarrollo (la idea es conseguir aumentar la ganancia $K_{diseño}$).

Paso 7: queda para el lector corroborar mediante una respuesta en el tiempo al escalón el resultado obtenido. Se puede adelantar que seguramente la síntesis será satisfactoria puesto se tendrá un par complejo conjugado de polos dominantes y un tercer polo bastante alejado del par dominante. El cero del compensador seguramente

aumentará un poco el sobrepico de la respuesta en relación a la respuesta que se tendría si solo fuera un sistema con el par complejo de polos. De todos modos, el tercer polo compensará un poco el aumento del sobrepico debido al cero del compensador.

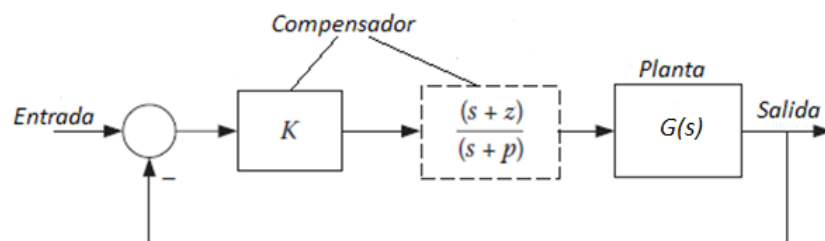
Compensación por atraso

La compensación atraso mejora el comportamiento en las bajas frecuencias de operación (particularmente en la exactitud en estado estacionario). De este modo este tipo de compensador se recomienda si el sistema no compensado tiene buena respuesta transitoria (es decir una performance satisfactoria para frecuencias medias y altas) pero pobre desempeño en cuanto al error en estado estacionario.

En el diseño de este tipo de compensador la idea esencial es hacer cumplir las dos condiciones para el trazado del lugar de las raíces: ángulo y modulo. En este caso la función de transferencia del compensador en la forma polo-cero como sigue

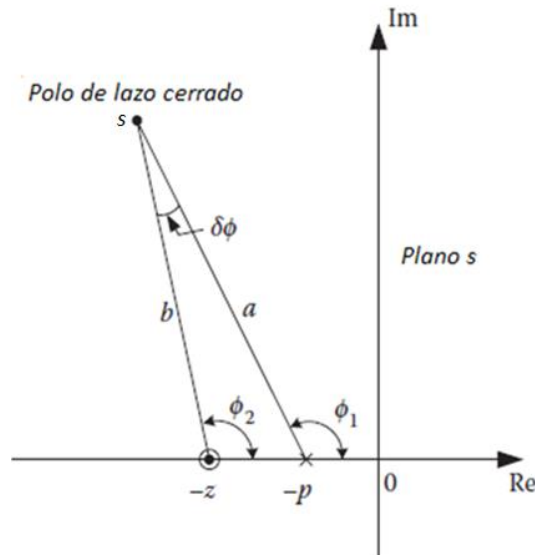
$$G_c(s) = k \cdot \frac{p}{z} \cdot \left[\frac{s+z}{s+p} \right] = K \cdot \left[\frac{s+z}{s+p} \right] \quad \text{con } K = k \cdot \frac{p}{z} \text{ y } z > p$$

Nuevamente el esquema en bloques es el siguiente



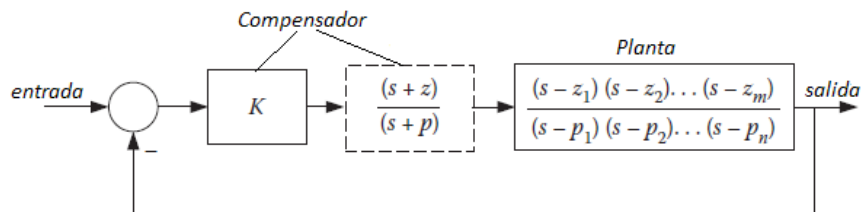
La filosofía de diseño es (considerando que se tiene una buena respuesta transitoria) modificar lo menos posible la ubicación de los polos de lazo cerrado que permiten una buena respuesta dinámica, pero conseguir una ganancia $K_{\text{diseño}}$ mayor tal que se mejore la exactitud. Esto se puede lograr si se consigue que el lugar de las ramas dominantes, previo a sufrir apartamientos del lugar de las raíces del sistema sin compensar, finalmente pasa cerca o por el punto de diseño que permite buen desempeño dinámico. Este objetivo se alcanza ubicando polo y cero del compensador cerca del origen, con el polo más cerca del origen que el cero pero muy próximos entre sí.

Para evaluar qué efecto tendrá el agregado del compensador sobre la posición de los polos sin compensar (de la planta) se puede analizar lo presentado en la siguiente figura



La posición de los polos de lazo cerrado que proporciona la planta realimentada se ubican en P . p y z es el polo y el cero agregado por el compensador.

La figura siguiente muestra un esquema en bloques de un sistema realimentado con una planta y un compensador



La condición de ángulo sin el compensador es

$$\angle(s - z_1) + \dots + \angle(s - z_m) - \angle(s - p_1) - \dots - \angle(s - p_n) = \pm 180^\circ + n360^\circ$$

Cuando se agrega el compensador, el ángulo que aporta según el gráfico el par polo-cero es $\delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Se tiene entonces que la condición de ángulo se modifica en $\delta\phi$, es decir se tiene

$$\angle(s - z_1) + \dots + \angle(s - z_m) - \angle(s - p_1) - \dots - \angle(s - p_n) + \delta\phi = \pm 180^\circ + n360^\circ$$

De modo que en la medida que $\delta\emptyset \rightarrow 0$ las ramas de ambos lugares (sin compensar y compensado) pasarán por el mismo lugar.

En forma análoga para la condición de modulo se tiene para el sistema sin compensar lo siguiente

$$\frac{|s - p_1| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| \cdots |s - z_m|} = K_{\text{sin compensar}}$$

Cuando se agrega el compensador, según el grafico anterior la condición de modulo queda

$$\frac{|s - p_1| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| \cdots |s - z_m|} \cdot \frac{a}{b} = K_{\text{compensado}} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} a &= |s + p| \\ b &= |s + z| \end{aligned}$$

De modo que la ganancia de diseño se ve incrementada por el factor $\frac{a}{b}$ y como $a > b$, $K_{\text{compensado}} > K_{\text{sin compensar}}$ que es lo buscado.

De este modo si $\delta\emptyset \rightarrow 0$ los polos de lazo cerrado del sistema sin compensar y compensado tienen la posibilidad de ubicarse muy próximos en cada caso dependiendo del ajuste de la ganancia del lugar de las raíces.

Una propuesta de pasos a seguir en el diseño de un compensador atraso es la que se cita a continuación:

Paso 1: determinar un punto de operación apropiado para el sistema sin compensar de modo que se satisfagan todas las especificaciones de comportamiento, excepto la constante de error; esta será la ubicación del par complejo conjugado de polos dominantes de lazo cerrado.

Paso 2: evaluar la posibilidad de utilizar solo ajuste de Ganancia

Paso 3: seleccionar el cero del compensador en aproximadamente 0.1 de la parte real del punto de operación seleccionado en el paso 1.

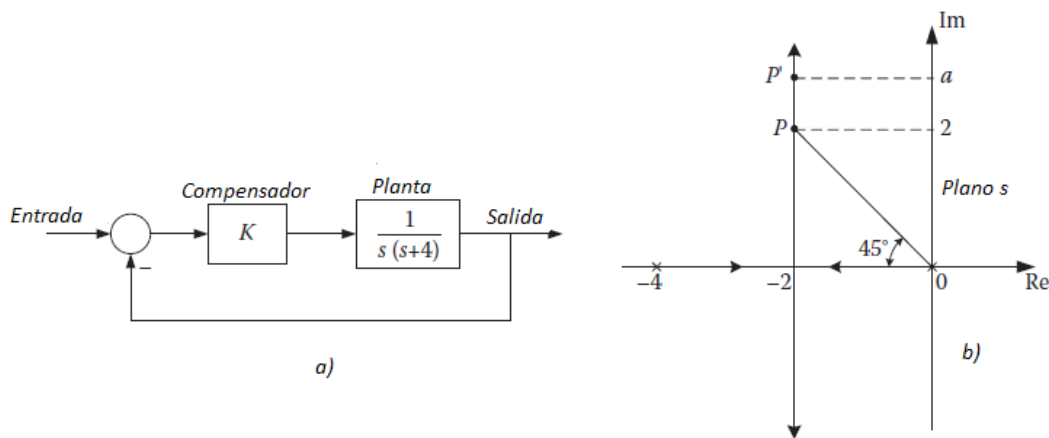
Paso 4: ubicar el polo del compensador de modo que se consiga cumplir con la especificación de la constante de error.

Paso 5: construí el lugar de las raíces del sistema compensado y chequear el error de diseño para el ángulo: $\frac{\delta\phi}{\text{ángulo de diseño}}$ debe ser menor que el 5% (el ángulo de diseño es el ángulo del vector del punto de operación elegido).

Paso 6: chequear el comportamiento del sistema diseñado mediante una respuesta en el tiempo

Ejemplo de aplicación:

Sea el sistema dado por el esquema en bloques mostrado en la parte a) de la figura siguiente



Se pide conseguir lo siguiente

- a) Sobrepico porcentual $SP\% \leq 4.3\%$
- b) $K_v \geq 10$

Paso 1:

El punto P mostrado en la parte b) de la figura anterior cumple con el SP%. El SP% límite del 4.3% corresponde a un $\xi = 0.707$ y esto corresponde a un ángulo de 45°.

Paso 2:

La parte b) de la figura anterior muestra que con ajuste de ganancia solamente no se pueden cumplir ambas especificaciones: en el punto de operación P se cumple con la estabilidad (como se muestra en la figura i se explicó en el paso1, pero no cumple con el error ya que en P el valor de K es

$$K = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} = 8$$

La constante de error es $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{eq}(s) = s \cdot \frac{8}{s(s+4)} = 2$

Por otro lado si se hace la ganancia $K=40$ se cumple con el error pero se llega al punto de operación P' en el plano s donde ya no se cumple con la estabilidad requerida: para encontrar el valor de α se utiliza la condición de modulo: $K = \sqrt{\alpha^2 + 2^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 2^2} = 40$ de donde se obtiene el valor $\alpha=6$. Conocido α se obtiene $\xi=0.316$ y para este valor de ξ , el SP% es de 35% muy lejos del valor requerido.

Paso 3:

Es necesario agregar una red dinámica y en este caso se elige un compensador atraso para solucionar el problema del error manteniendo el punto de operación cerca de P en el plano s . La función de transferencia del compensador es por lo tanto:

$$G_c(s) = K \cdot \left[\frac{s+z}{s+p} \right] \quad \text{con } z > p$$

Este compensador se debe ubicar mucho más próximo al origen que la parte real del punto de operación P . Una adopción típica es ubicar el cero en un 10% del valor de la parte real de P ; para este ejemplo el cero (z) se ubica en $s=-0.2$.

Paso 4:

La constante de error de velocidad con el compensador agregado es

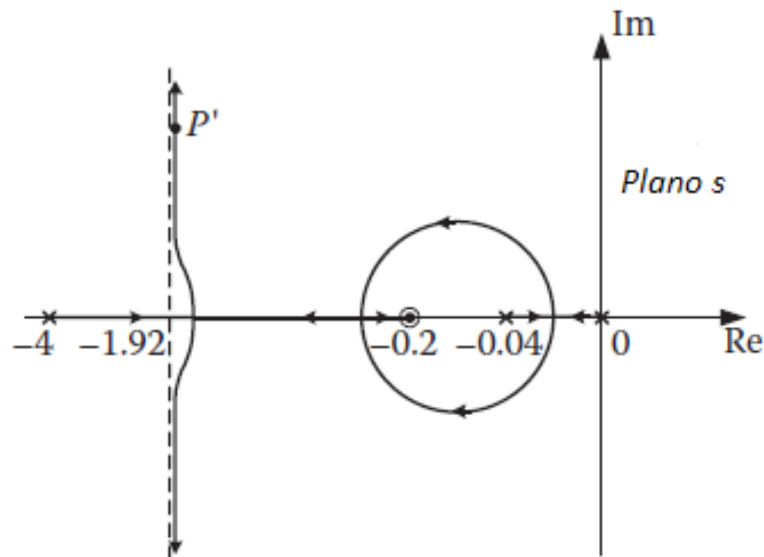
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{eq}(s) = s \cdot \frac{8}{s(s+4)} \cdot \frac{s+0.2}{s+p} = \frac{8 \cdot 0.2}{4 \cdot p} = \frac{0.4}{p}$$

Como se pide $k_v=10$ resulta $p=0.04$. Con ello el compensador resultante es

$$G_c(s) = 8 \cdot \left[\frac{s+0.2}{s+0.04} \right]$$

Paso 5:

La figura siguiente muestra el lugar de las raíces con el compensador agregado.

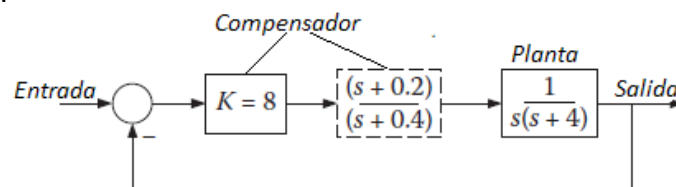


El punto de operación con $K=8$ se nomina en figura como P' . En este punto el factor de amortiguamiento es poco diferente de 0.707 que es el requerido. El error en el $SP\%$ puede ser estimado a través del error introducido por el compensador en el ángulo cerca de P' . Puesto que el punto P' se ubica aproximadamente en $s=-2+j2$ el error del ángulo es

$$\delta\phi \approx 134.4^\circ - 132.0^\circ = 2.4^\circ$$

el porcentaje de error es de $\frac{2.4^\circ}{45^\circ} \cdot 100 = 5.3\%$ que es un valor aceptable

el esquema en bloques del sistema compensado definitivo es el mostrado a continuación



Paso 6:

Queda para el lector chequear el comportamiento del sistema mediante simulación de la respuesta en el tiempo.

