# Resolução da P2

**Questão 1 (2.0 pt)** Dado o dicionário ótimo:

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 6 - x_5 \qquad\qquad\quad - 2x_3 \\
\hline
x_4 & = & 2 + x_5 \qquad\qquad\quad + 4x_3 \\
x_1 & = & 6/5 - 1/5x_5 - 1/5x_2 - x_3 \\
x_6 & = & 22/5 + 3/5x_5 - 12/5x_2 + 2x_3
\end{array}
$$

a) (0.8pt) Aumentando em 1 unidade os coeficientes das variáveis $x_1, x_2$ na função objetivo original (ao mesmo tempo), o sistema continua ótimo? Explique.

b) (1.2pt) Qual o menor valor inteiro que poderia ser adicionado ao coeficiente da variável $x_2$ na função objetivo de modo a garantir que o dicionário dado deixaria de ser ótimo? Nesse caso, qual algoritmo poderia ser aplicado para obter uma solução ótima para o sistema modificado? Explique.

a) $\Delta C_B = \begin{pmatrix} \overset{x_4}{0} & \overset{x_1}{1} & \overset{x_6}{0} \end{pmatrix}^T, \quad \Delta C_N = \begin{pmatrix} \overset{x_5}{0} & \overset{x_2}{1} & \overset{x_3}{0} \end{pmatrix}^T$

- fazer análise de intervalo de $t$ em $y_N = y_N^* + t\Delta y_N$
- verificar se 1 está no intervalo encontrado

$$\Delta y_N = (B^{-1}N)^T \cdot \Delta C_B - \Delta C_N \qquad (B^{-1}N)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 12/5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta y_N = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 12/5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^* = (1, 0, 2)$$

$$\max_{\substack{i \in N \\ \Delta y_i > 0}} \frac{-y_i^*}{\Delta y_i} \leq t \leq \min_{\substack{i \in N \\ \Delta y_i < 0}} \frac{-y_i^*}{\Delta y_i} = 0$$

$$\max\left\{ \frac{-1}{1/5}, \frac{-2}{1} \right\} = -2 \implies t \in [-2, 0]$$

Logo o sistema não continua ótimo, pois $1 \notin [-2, 0]$

b)
- fazer análise de intervalo de $t$
- escolher um valor inteiro imediatamente fora do intervalo.

$\Delta C_B = (0 \ \ 0 \ \ 0)^T, \quad \Delta C_N = (0 \ \ 1 \ \ 0)^T$

$\Delta y_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, logo o intervalo é $(-\infty, 0]$.

Escolhemos o valor $t = 1$, que é o menor inteiro fora do intervalo. A análise de sensibilidade implica que, para $t$ fora do intervalo $(-\infty, 0]$, a base dada deixa de ser ótima.

**Questão 2 (3.0 pt)** Dado um tabuleiro $n \times n$ e números de 1 a $n^2$ queremos preencher cada casa do tabuleiro com um número, sem repetição, de modo que a soma dos números em cada linha $i \in [n]$ seja $l_i$, a soma dos números em cada coluna $j \in [n]$ seja $c_j$ e a soma dos números nas diagonais principal e secundária sejam respectivamente $d_1$ e $d_2$. No entanto, sabemos que dependendo dos valores de $n$, $l_i$, $c_j$, $d_1$ e $d_2$, essa tarefa pode ser impossível. Assim, queremos permitir que até 10% dessas somas assumam um valor qualquer, enquanto as demais deverão satisfazer exatamente os valores descritos. Além disso, queremos que dentre as restrições de soma de linha, no máximo 11 sejam quebradas. Encontre uma formulação de programação inteira que minimize a quantidade total de restrições quebradas.

(Ideia: uma mistura das questões 1 e 3 da lista de formulação)

Variáveis: $x_{i,j,k} \in \mathbb{B}$ preencho a casa $(i,j)$ com a cor $k$, $i \in [n]$, $j \in [n]$, $k \in [n^2]$.

$y_i \in \mathbb{B}$: quebra a restrição de soma da linha $i$

$z_j \in \mathbb{B}$: quebra a restrição de soma da coluna $j$

$w_1, w_2 \in \mathbb{B}$: quebra a restrição de soma da diagonal $d_1$, $d_2$, respectivamente

Ideia inicial: escrever as restrições, ignorando se vamos quebrá-las ou não:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j,k} = 1 \quad \forall k \in [n^2] \quad \text{(Cada cor aparece exatamente 1 vez)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k \cdot x_{i,j,k} = l_i \quad \forall i \in [n] \quad \text{(Soma em cada linha é a dada)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k \cdot x_{i,j,k} = c_j \quad \forall j \in [n] \quad \text{(Soma em cada coluna é a dada)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k \cdot x_{i,i,k} = d_1 \quad \text{(Soma da diagonal principal é a dada)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k \cdot x_{n-i+1,i,k} = d_2 \quad \text{(Soma da diagonal secundária é a dada)}$$

→ Agora, vamos permitir que essas restrições sejam quebradas.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,j,k} = l_i \;\; \forall i \in [n] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k x_{i,j,k} \le l_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k x_{i,j,k} \le l_i + M y_i & \forall i \in [n] \\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k x_{i,j,k} \ge l_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k x_{i,j,k} \ge l_i - M y_i & \forall i \in [n] \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,j,k} = c_j \;\; \forall j \in [n] \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,j,k} \le c_j + M z_j & \forall j \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k x_{i,j,k} \ge c_j - M z_j & \forall j \in [n] \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,i,k} = d_1 \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,j,k} \le d_1 + M w_1 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{i,j,k} \ge d_1 - M w_1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{n-i+1,i,k} = d_2 \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{n-i+1,i,k} \le d_2 + M w_2 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} k x_{n-i+1,i,k} \ge d_2 - M w_2 \end{cases}$$

São $n$ linhas, $n$ colunas, 2 diagonais, logo $2n+2$ somas que devem ser satisfeitas. Para quebrar no máximo 10%

$$\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j + w_1 + w_2 \le 0.10 \cdot (2n+2)$$

Quebrar no máximo 11 somas de linha: $\sum_{i=1}^{n} y_i \le 11$

Objetivo: $\min \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j + w_1 + w_2$

**Questão 3 (3.0 pt)** Responda as questões abaixo, considerando o seguinte programa linear

$$\begin{aligned} \text{max. } & 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a. } & -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 8 \\ & -2x_3 = 5 \\ & 3x_1 + 2x_3 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

com solução ótima $x^* = (5, -39/8, -5/2)$.

a) (1.0pt) Calcule o dual do programa linear acima.

b) (1.0pt) Escreva o dicionário inicial do Simplex / Simplex dual. Esse dicionário é primal factível? Esse dicionário é dual factível? Esse dicionário é ótimo? Explique cada uma das afirmações.

c) (1.0pt) Utilizando a solução primal ótima fornecida, aplique o Teorema das Folgas Complementares para obter a solução ótima dual.

a) Cálculo direto do dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & 10y_1 + 8y_2 + 5y_3 + 10y_4 \\ \text{s.a.} \quad & -2y_1 + 3y_2 + 3y_4 \geqslant 0 \\ & y_1 + 4y_2 \leqslant 2 \\ & 3y_1 - 5y_2 - 2y_3 + 2y_4 = -2 \\ & y_1, y_2 \geqslant 0, \; y_3 \in \mathbb{R}, \; y_4 \leqslant 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z &= 0 + 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \hline w_1 &= 10 + 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ w_2 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ w_3 &= 5 + 2x_3 \\ w_4 &= -5 - 2x_3 \\ w_5 &= -10 + 3x_1 + 2x_3 \end{aligned}$$

(Observação: para escrever o dicionário inicial, colocamos o problema primal na forma padrão, trocando = por duas restrições e $\geqslant$ por $\leqslant$ como visto em aula.)

- Não é primal factível, pois possui variáveis básicas com valor < 0.
- Não é dual factível, pois possui coeficientes positivos ($2x_2$) no objetivo
- Não é ótimo porque nem é factível.

c) Pelas folgas complementares, $z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$ (folgas duais) pois $x_1^*$, $x_2^*$ e $x_3^*$ são $\neq 0$.

Substituindo $x^*$ no primal, calculamos as folgas primais. $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*)$

Vamos dizer que $w_3^* = 0$ pois a restrição é de igualdade, logo não há folga.

Restrição 1: $-2 \cdot 5 - \frac{39}{8} + 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + w_1^* = 10$

$$\Rightarrow w_1^* = 20 + \frac{60+39}{8} = \frac{259}{8}$$

Restrição 2: $3 \cdot 5 + 4\left(-\frac{39}{8}\right) - 5\left(-\frac{5}{2}\right) + w_2^* = 8$

$$w_2^* = -7 + \frac{39}{2} - \frac{25}{2} = -7 + \frac{14}{2} = 0$$

Restrição 4: $3 \cdot 5 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) - w_4^* = 10$

$$w_4^* = -5 + 5 = 0$$

Por folgas complementares, $y_1^* = 0$ pois $w_1^* \neq 0$.

Substituindo as folgas $z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$ no dual, temos:

$$\begin{aligned} -2y_1^* + 3y_2^* + 3y_4^* &= 0 \\ y_1^* + 4y_2^* &= 2 \\ 3y_1^* - 5y_2^* - 2y_3^* + 2y_4^* &= -2 \end{aligned}$$

Substitui $y_1^* = 0$, encontra:

$$y_2^* = \frac{1}{2}$$

$$y_4^* = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{2} - 2y_3^* - 1 = -2 \Rightarrow y_3^* = -\frac{3}{4}$$

Logo a solução ótima dual é $y^* = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)^T$

**Questão 4 (2.0 pt)** Queremos contratar pessoas para assumir $m$ cargos distintos. Existem $n$ candidatos, sendo que o candidato $i \in [n]$ possui aptidão $a_{ij}$ para o cargo $j \in [m]$. No entanto, possuímos um limite mensal de R$ 31500 para pagar os salários, e cada candidato requer um salário $s_i$. Cada funcionário que for contratado deve assumir exatamente um cargo, mas cargos podem ficar livres caso não seja possível contratar funcionários suficientes. Dito isso, no mínimo 8 cargos devem ser ocupados, e pelo menos 2 dos cargos 2, 3, 4 e 5 devem ser ocupados.
Encontre uma formulação de progração inteira para esse problema que maximize a aptidão dos candidatos selecionados.

$x_{ij} \in \mathbb{B}$: o candidato $i$ será atribuído ao cargo $j$.

$y_i \in \mathbb{B}$: o candidato $i$ será contratado.

Ideia:
- problema da mochila (salários)
- assignment problem (atribuição de cargos)
- ligar as duas ideias

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} s_i y_i \leq 31.500$$

(Respeitar o budget dos salários)

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in [n], \forall j \in [m]$$

(Só pode atribuir $i$ p/ algum $j$ se contratar $i$. Não é estritamente necessária por causa da próx. restrição)

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in [n]$$

(Se contratar $i$, atribui a exatamente 1 cargo. Senão, atribui a 0 cargos)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in [m]$$

(No máx. 1 funcionário por cargo. Não é estritamente necessário, ver questão respondida durante a prova)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \geq 8$$

Existem outras maneiras de escrever isso, por exemplo, substituindo $y_i$ por $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ nessa expressão.

(No mínimo 8 cargos ocupados. Note que cargos ocupados = número de funcionários contratados, pelas restrições anteriores.)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \sum_{i=1}^{n} x_{i3} + \sum_{i=1}^{n} x_{i4} + \sum_{i=1}^{n} x_{i5} \geq 2$$

Indica se o cargo 2 foi ocupado. Vale 1 se e somente se isso ocorre, devido às restrições anteriores.
Idem para os outros termos nessa restrição.

(Pelo menos 2 dos cargos 2, 3, 4, 5 serão ocupados)

$$x_{ij} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in [n], \forall j \in [m]$$

$$y_i \in \mathbb{B} \quad \forall i \in [n]$$