Índice general

Clase 7
Función Radical

En el estudio del cálculo aparecen las funciones radicales, que tiene la forma

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

donde $p(x)$ es alguna función, que puede ser lineal, cuadrática, cúbica, polinómica, racional, en valor absoluto, función trigonométrica, etc.

En esta clase vamos a estudiar algunos tipos importantes de funciones usando el programa geogebra, que nos permitirá abarcar mas tipos de funciones. Nos interesa estudiar el comportamiento de cada tipo de función dentro de una una raíz.

7.1 Función Lineal en Raíz Cuadrada

La función tiene la forma

$$f(x) = \sqrt{mx + b}$$

Para graficar en geogebra esta función se escribe
sqrt(m*x+b)

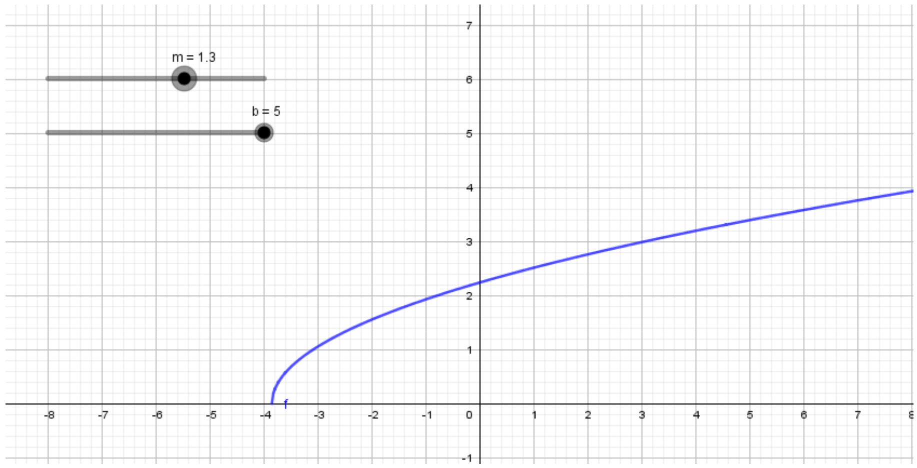

Figura 7.1: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{mx+b}$

7.1.1 Dominio

Para determinar el dominio de la función radical hacemos lo siguiente.

Ejemplo

Determinar el dominio y el rango de la función y graficar

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

Solución

Se debe garantizar que

$$\begin{aligned} 2x+3 &\geq 0 \\ 2x &\geq -3 \\ x &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

que se puede escribir de la siguiente forme

$$\forall x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

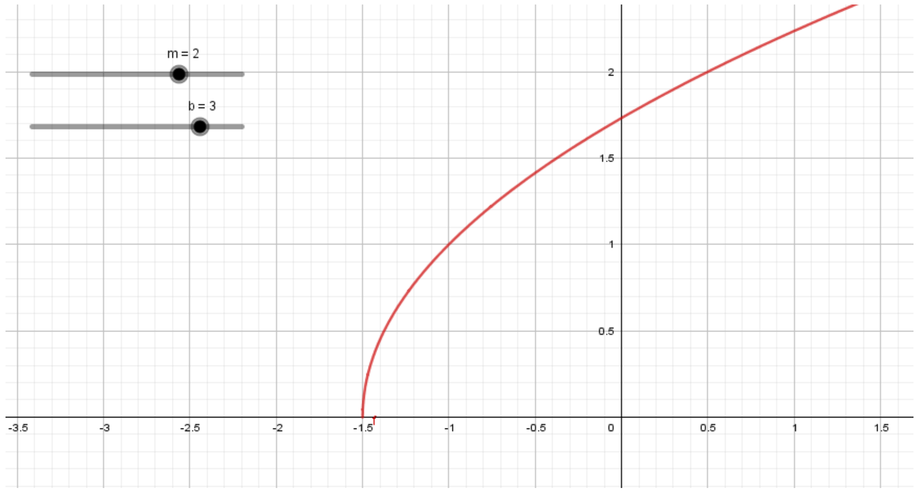

Figura 7.2: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{2x+3}$

7.1.2 Rango

Del ejemplo anterior se observa que la gráfica se hace apartir de los valores positivos de y. Es decir que el rango se define como

$$\forall y \in [0, +\infty)$$

7.1.3 Conclusiones según la forma de los parámetros

Una función radical de la forma

$$f(x) = \sqrt{mx+b}$$

tiene como dominio

$$\begin{aligned} mx + b &\geq 0 \\ mx &\geq -b \\ x &\geq -\frac{b}{m} \end{aligned}$$

que se define como

$$\text{Dom}f : \left\{ x/x \in \left[-\frac{b}{n}, +\infty \right) \right\}$$

luego el rango esta dado por el conjunto

$$\text{Rango}f : \{ y/y \in [0, +\infty) \}$$

7.2 Función Cuadrática en Raíz Cuadrada

La función tiene la forma

$$f\left(x\right)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Para graficar en geogebra con los deslizadores creados se digita sqrt(ax$^2+bx+c$)

Sea

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

elevar al cuadrado

$$y^2=ax^2+bx+c$$

completamos cuadrados

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b/a}{2}\right)^2-\left(\frac{b/a}{2}\right)^2\\
\frac{y^2}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
\frac{y^2}{a} &= \left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\\
\frac{y^2}{a} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}
\end{aligned}$$

sea $C_1=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ y $h=-\frac{b}{2a}$ luego la ecuación se transforma en

$$\frac{y^2}{a}=\left(x-h\right)^2+C_1$$

se transponen término

$$\frac{y^2}{a}-\left(x-h\right)^2=C_1$$

divido toda la ecuación entre C_1

$$\frac{y^2}{aC_1}-\frac{\left(x-h\right)^2}{C_1}=1$$

Sea $p_1 = aC_1$ y $p_2 = C_1$ por lo tanto

$$\frac{y^2}{p_1} - \frac{(x-h)^2}{p_2} = 1$$

Se convierte en la ecuación de una hipérbola o de una elipse, según sean el valor de los paráemtros a, b y c.

Esta ecuación resulta de una serie de operaciones algebraicas realizadas sobre la función radical, de tal forma que la acción de la raíz sobre la hiperbola o la elipser será mostrar únicamente la mitad.

Ejemplo

Graficar y determinar el dominio y rango de la función

$$f(x) = \sqrt[2]{-2x^2 + 5x + 5}$$

Solución
Para determinar el dominio en una raíz de índice par, siempre se debe hacer

$$-2x^2 + 5x + 5 \geq 0$$

Para encontrar los cortes se usa la formula general de segundo grado

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(5)}}{2(-2)} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{-4} \end{aligned}$$

¿Cuáles son las soluciones?

- $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{65}}{-4} \approx 3.265$
- $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{65}}{-4} \approx -0.765$

En forma de factorización

$$-2x^2 + 5x + 5 = \left(x = \frac{5 + \sqrt{65}}{4}\right)\left(x = \frac{5 - \sqrt{65}}{4}\right)$$

así

$$
\begin{aligned}
-2x^2 + 5x + 5 &\geq 0 \\
\left(x = \frac{5+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x = \frac{5-\sqrt{65}}{4}\right) &\geq 0
\end{aligned}
$$

luego $x = \dfrac{5+\sqrt{65}}{4} \geq 0$ y $x = \dfrac{5-\sqrt{65}}{4} \geq 0$ de donde concluimos que

$$
\begin{aligned}
&x \geq \frac{5+\sqrt{65}}{4} \text{ y } x \geq \frac{5-\sqrt{65}}{4} \\
&x \geq 3.265 \text{ y } x \geq -0.765
\end{aligned}
$$

luego

$$\left(x = \frac{5+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x = \frac{5-\sqrt{65}}{4}\right) \leq 0$$

se concluye que

$$
\begin{aligned}
&x \leq \frac{5+\sqrt{65}}{4} \text{ y } x \leq \frac{5-\sqrt{65}}{4} \\
&x \leq 3.265 \text{ y } x \leq -0.765
\end{aligned}
$$

de donde concluimos que la solución es el intervalo

$$\left[\frac{5-\sqrt{65}}{4}, \frac{5+\sqrt{65}}{4}\right] \approx [-0.765, 3.265]$$

7.2.1 Dominio

Para calcular el dominio de una función radical que tiene la forma

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

se debe garantizar que

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

para este caso hay que factorizar (si la función es factorizable).

Ejemplo

Graficar en Geogebra la función radical

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 30}$$

Nota: Vamos a modelar la función cuadrática que irá dentro de la raíz con el fin de conocer cuál es el intervalo de solución.

Sean los puntos de corte de la función cuadrática en $x = -6$ y $x = 5$. Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= (x = -6)(x = 5) \\ &= (x + 6)(x - 5) \\ &= x^2 - 5x + 6x - 30 \\ &= x^2 + x - 30 \end{aligned}$$

Nota: Para graficar en Geogebra se debe usar el siguiente código

```
sqrt(x^2+x-30)
```

Solución

1. Primero debemos determinar el dominio de la función, para ello se debe garantizar que

$$x^2 + x - 30 \geq 0$$

usando la FGS[1] se tiene que

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-30)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 11}{2} \end{aligned}$$

   a) **Solución** $x_1 = \dfrac{-1 - 11}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$

   b) **Solución** $x_2 = \dfrac{-1 + 11}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

[1]Fórmula General de Segundo Grado

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x^2 + x - 30 &\geq 0 \\ (x = -6)(x = 5) &\geq 0 \\ (x + 6)(x - 5) &\geq 0 \end{aligned}$$

y se concluye que: El producto de dos números es positivo si los dos son positivos o el productos de dos números en positivo si los dos son negativos

$$(x + 6)(x - 5) \geq 0$$

de aquí se tiene que

$$\begin{aligned} x + 6 \geq 0 \text{ } \mathbf{y} \text{ } x - 5 \geq 0 \\ x \geq -6 \text{ } \mathbf{y} \text{ } x \geq 5 \end{aligned}$$

o (**nota**: el o me indica que debo unir las soluciones)

$$\begin{aligned} x + 6 \leq 0 \text{ } \mathbf{y} \text{ } x - 5 \leq 0 \\ x \leq -6 \text{ } \mathbf{y} \text{ } x \leq 5 \end{aligned}$$

La representación gráfica es la siguiente

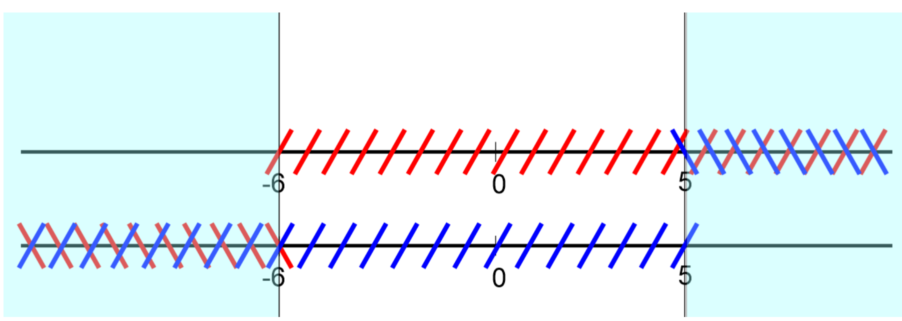

Figura 7.3: Representación Gráfica de la solución

2.

3. de esta forma el intervalo del dominio se define así

$$\text{Dom} f : \{x/x \in (-\infty, -6] \cup [5, +\infty)\}$$

7.2.2 Rango

Del ejercicio anterior según sea la gráfica se obtiene el rango

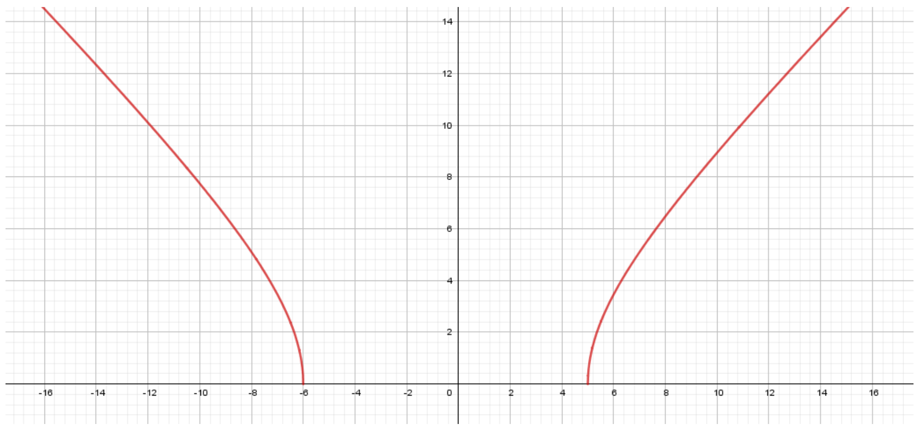

Figura 7.4: Gráfica de la función

Por lo tanto el rango esta definido así

$$\text{Rango} f : \{y/y \in [0, +\infty)\}$$

7.2.3 Conclusiones según la forma de los parámetros

- Para determinar el dominio de una función radical de la forma

  $$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

  se debe garantizar que

  $$ax^2 + bx + c \geq 0$$

  y según sea la factorización (ofrece la raices) se determinar el intervalo del dominio.

- El rango se define mediante la gráfica.

- Se puede usar la FGS para determinar las raices (que configurar el intervalo del dominio).

7.3 Función Cúbica en Raíz Cuadrada

Esta función tiene la forma

$$f\left(x\right)=\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$$

La forma de esta función cuando

- $a=1$, $b=-3$, $c=-6$ y $d=-8$ generando la función

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^3-3x^2-6x-8}$$

  es la siguiente

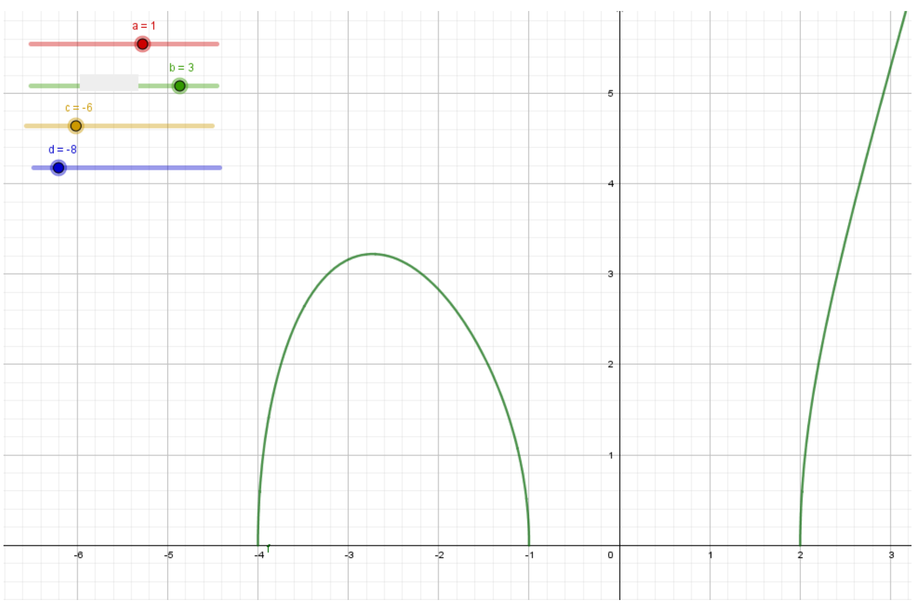

Figura 7.5: Gráfica de la Función

Calculemos el Dominio se debe asegurar que

$$x^3-3x^2-6x-8\geq 0$$

necesitamos el código

Math.pow(x,3)-3*Math.pow(x,2)-6*x-8 luego de usar la aplicación obtenemos con resultado

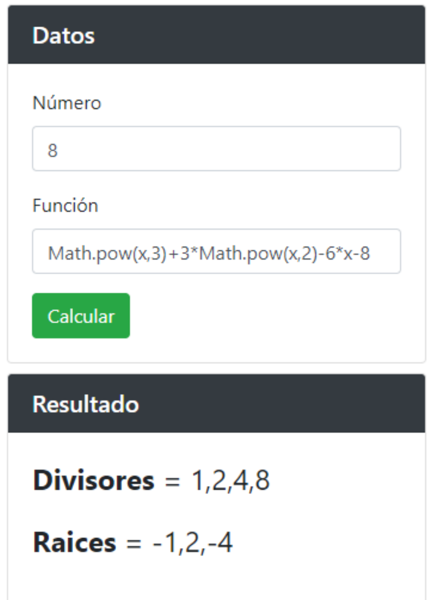

Figura 7.6: Datos Analizados en la Aplicación

De tal forma que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 6x - 8 &\geq 0 \\ (x = -1)\,(x = 2)\,(x = -4) &\geq 0 \\ (x + 1)\,(x - 2)\,(x + 4) &\geq 0 \end{aligned}$$

aplicar la (Teorema del Factor Cero - Desigualdad)

$$\begin{aligned} (x + 1) \geq 0 &\Rightarrow x \geq -1 \\ (x - 2) \geq 0 &\Rightarrow x \geq 2 \\ (x + 4) \geq 0 &\Rightarrow x \geq -4 \end{aligned}$$

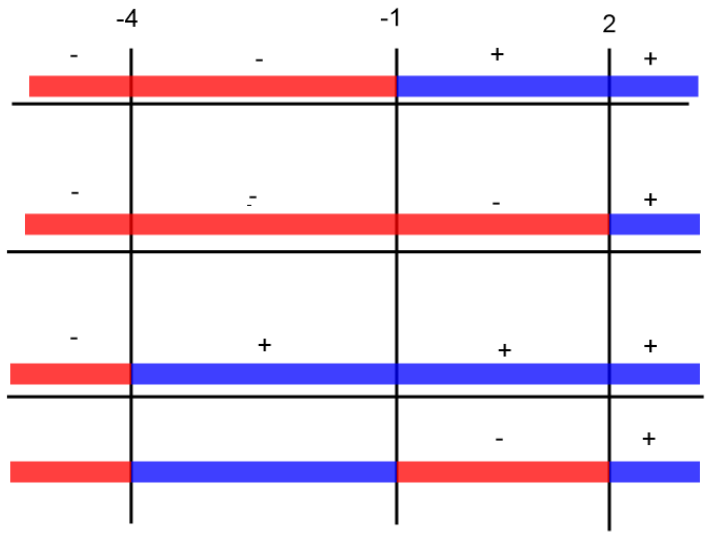

Figura 7.7: Grafica de la Ley de los Signos

Nota: Las franjas azules de la línea final me indican que allí se puede graficar.

Por lo tanto el dominio de la función esta definido de la siguiente manera

$$\mathrm{Dom} f : \{x/x \in [-4,-1] \cup [2,+\infty)\}$$

y el rango esta definido como

$$\mathrm{Rango} f : \{y/y \in [0,+\infty)\}$$

7.3.1 Dominio

Para determinar el dominio de este tipo de funciones se necesita factorizar el trinomio parámetro de la función radical y aplicar la ley de los signos para determinar donde la función es positiva o mayor que cero.

7.3.2 Rango

Siempre serán los números positivos incluyendo el cero.

7.4 Función Polinómica en Raíz Cuadrada

Sea la función

$$f(x) = \sqrt{p(x)}$$

donde

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x_0$$

Ejemplo

Sea

$$f(x) = \sqrt{x^8 - 87x^6 + 2223x^4 - 18589x^2 + 44100}$$

Vamos a graficar en Geogebra y obtenemos
sqrt($x^8 - 87x^6 + 2223x^4 - 18589x^2 + 44100)$
Math.pow(x,8)-87*Math.pow(x,6)+2223*Math.pow(x,4)-18589*Math.pow(x,2)+44100
Luego de usar la aplicación tenemos los siguiente resultados.

Resultado

Divisores = 1,2,3,4,5,6,7,9,10,12,14,15,18,20,21,25,28,30,35,36,42,45,49,50,60,63,70,75,84,90,98,100,105,126,140,147,150,175,180,196,210,225,245,252,294,300,315,350,420,441,450,490,525,588,630,700,735,882,900,980,1050,1225,1260,1470,1575,1764,2100,2205,2450,2940,3150,3675,4410,4900,6300,7350,8820,11025,14700,22050,44100

Raices = -2,2,-3,3,-5,5,-7,7

Figura 7.8: Resultados de la Aplicación

$$x^8 - 87x^6 + 2223x^4 - 18589x^2 + 44100 \geq 0$$
$$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)(x+5)(x-5)(x+7)(x-7) \geq 0$$

luego usamos el (Teorema de la desigualdad)

1. $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
2. $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
3. $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
4. $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
5. $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$
6. $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$
7. $x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$
8. $x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$

El Análisis de signos es el siguiente

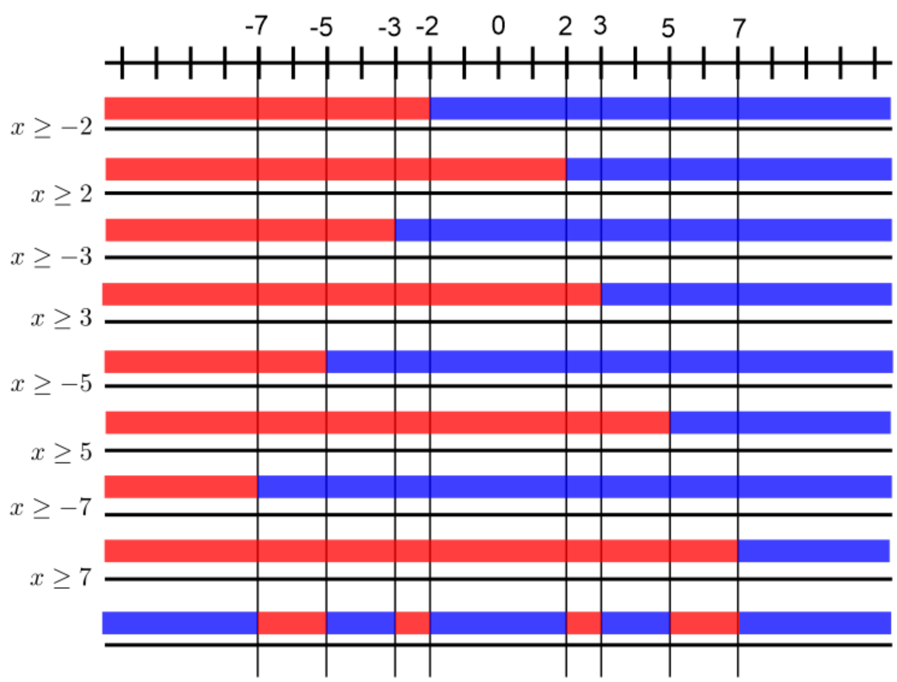

Figura 7.9: Aplicación de la Ley de los Signos

El dominio de la función esta definido como

$$\text{Dom}f : \{x/x \in (-\infty, -7] \cup [-5, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, 5] \cup [7, +\infty)\}$$

y el rango esta dado por

$$\text{Rango}f : \{y/y \in [0, +\infty)\}$$

y la gráfica de la función es la siguiente

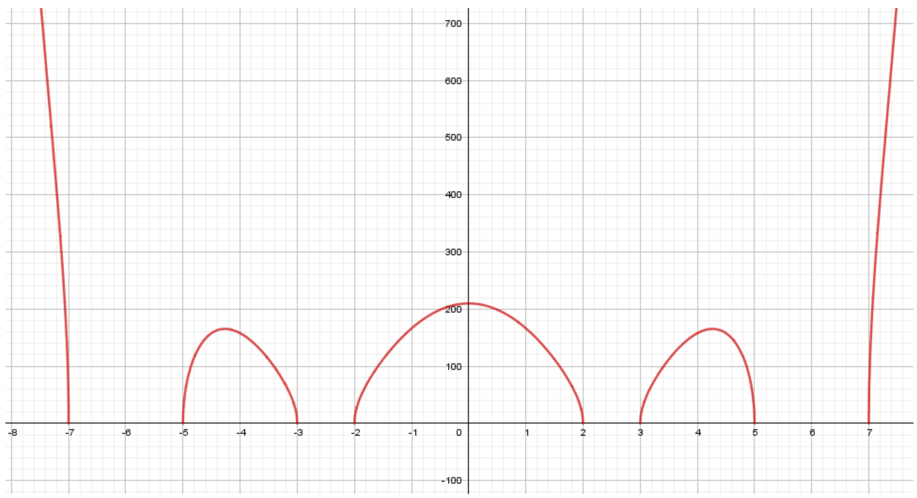

Figura 7.10: Gráfica de la Función

7.4.1 Dominio

Para determinar el dominio de la función se factoriza el polinomio usando división sintética y se aplica la ley de los signos.

7.4.2 Rango

El rango se define para todos los números mayores o iguales a cero.