Índice general

Clase 4
Función Cuadrática

La función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes que pertenecen a los números reales.

Una **buena** función cuadrática real, es aquella que tiene por lo menos una raíz (corte en el eje x), en general dos, mediante las cuales se puede realizar la gráfica de la función.

4.1 ¿Cómo graficar una función cuadrática?

Para graficar una función cuadrática se tienen al menos dos o tres métodos, de los cuales el estudiante puede seleccionar uno.

Dominio y Rango

También se debe tener en cuenta su dominio y rango. El dominio de la función cuadrática son todos los reales y el rango son todos los números mayores a su único punto mínimo si la función abre hacia arriba, o son todos los números menores al punto máximo si la función abre hacia abajo.

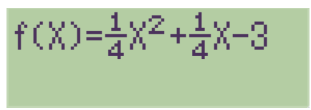
Método 1: Tabulación

El método de tabulación, permite generar un subdominio de la función para así generar un codominio con el cual graficar. Para desarrollar éste método vamos a usar una calculadora ($fx - 82ES$) o similar. Pulsamos las teclas [Mode] y seleccionarmos la opción 3:TABLE

1. Se ingresa la función, para este ejemplo vamos a usar la función

$$f\left(x\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$$

   para ello se usa la tecla [Alpha] y la variable X



2. Se presiona la tecla [=]
3. Se ingresa el intervalo de graficación, **Start?** es el número en el que inicia el subdominio, vamos a ingresar -8
4. **End?** es el número en el que termina el intervalo, vamos a ingresar 7
5. Step? es el incremento, vamos a ingresar 1

Con estos pasos se obtiene la tabulación de muchas funciones. La tabla que nos genera es la siguiente:

x	$f\left(x\right)$
-8	11
-7	7.5
-6	4.5
-5	2
-4	0
-3	-1.5

x	$f(x)$
-2	-2.5
-1	-3
0	-3
1	-2.5
2	-1.5
3	0
4	2
5	4.5
6	7.5
7	11

al gráficar esta tabla tenemos lo siguente:

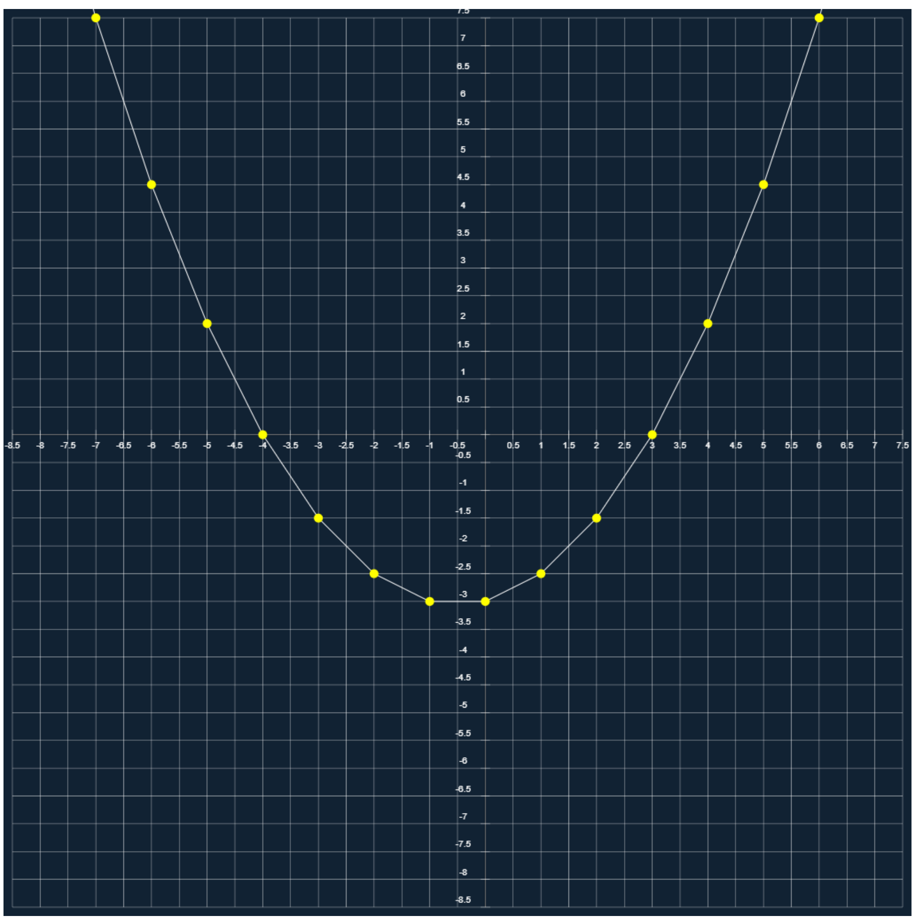


Figura 4.1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$

Se ubican los puntos y se unen mediante líneas curvas para lograr la curvatura de la función.

Método 2: Formula General de Segundo Grado

Otro método muy usado, es usar la **fórmula general de segundo grado**, que tiene la forma

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y **¿de dónde sale ésta fórmula?**, veamos:

Sea la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a la cual vamos a factorizar. El método a usar se llama **completar cuadrados**, para lo cual vamos a dividir toda la ecuación por a

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = 0$$

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

lo cual se simplifica como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

el método de **completar cuadrados** nos indica que debemos tomar el **coeficiente** de la x, dividirlo entre dos, elevarlo al cuadrado, sumarlo y restarlo a la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

los primeros tres términos forman un **trinomio cuadrado perfecto**, el cual vamos a factorizar

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

operamos la fracción del lado derecho

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{ab^2-4a^2c}{4a^3}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{a\left(b^2-4ac\right)}{4a^3}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

para despejar la x se saca raíz cuadrada en ambos lados

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

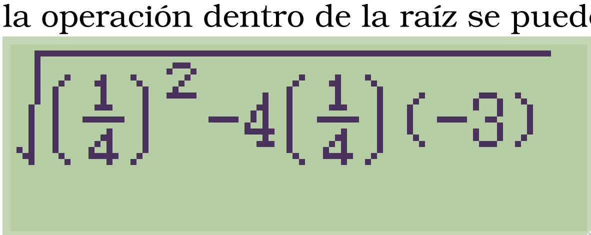
Ahora, en nuestro ejemplo teniamos que gráficar la función

$$f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3$$

en la cual $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$ y $c=-3$, así

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-4\left(\frac{1}{4}\right)(-3)}}{2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

la operación dentro de la raíz se puede determinar mediante la calculadora



lo cual da como resultado $\frac{7}{4}$, entonces

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{1}{4}\pm\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}$$

así, la solución $x_1 = \dfrac{-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}}{\dfrac{1}{2}} = 3$ y $x_2 = \dfrac{-\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{4}}{\dfrac{1}{2}} = -4$.

Nota: Los puntos de corte son en $x = -4$ y $x = 3$. Por lo tanto un intervalo de tabulación puede ser $[-4-n, 3+n]$.

Estos son los puntos de corte con el eje x, por lo tanto para generar una tabulación se toman aproximadamente 4 unidades antes y 4 unidades después del corte, así el intervalo de graficación quedará como en el ejemplo anterior $[-8, 7]$.

4.1.1 Aplicación para Resolver Ecuaciones Cuadráticas

La aplicación **ResolverEcuacionCuadraticaPermite.html** [1] permite resolver ecuaciones cuadráticas.

4.2 Modelar una función cuadrática

Ya vimos como graficar una función cuadrática, pero ¿cómo generamos una función cuadrática?.

Supongamos que una bola de cañon es lanzada desde el punto (x_1, y_1), pasa por el punto (x_2, y_2) y cae en el punto (x_3, y_3). ¿Cuál es la función que lo modela?.

Sabemos que la bola de un cañón, siguie un moviento parábolico, asociado a una función cuadrática, por lo tanto tenemos que la función que modela al fenómeno es la siguiente:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ya tenemos los puntos por donde pasa la función, debemos reemplazarlos

1. Para el punto (x_1, y_1) se tiene $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$
2. Para el punto (x_2, y_2) se tiene $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$

[1] http://jprincon.com/programas/calculo-diferencial/ResolverEcuacionCuadratica.html

3. Para el punto (x_3, y_3) se tiene $y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$

Notemos que tenemos que resolver un sistema de ecuaciones de 3×3 donde las variables son a, b y c. El Método más facil es usar determinantes, entonces el sistema nos quedará formulado de la siguiente manera

$$s = \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c & = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c & = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c & = y_3 \end{cases}$$

y el sistema matricial así

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

calculamos el determinante del sistema y de los variables

Fórmula del Determinante

Sea

$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

entonces

$$\text{det} S = a\,(ei - hf) - b\,(di - gf) + c\,(dh - eg)$$

1. $\text{det} s = \text{det} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2\,(x_2 - x_3) - x_1\,(x_2^2 - x_3^2) + 1\,(x_2^2 x_3 - x_3^2 x_2)$

2. $\text{det} a = \text{det} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1\,(x_2 - x_3) - x_1\,(y_2 - y_3) + (y_2 x_3 - y_3 x_2)$

3. $\text{det} b = \text{det} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2\,(y_2 - y_3) - y_1\,(x_2^2 - x_3^2) + (x_2^2 y^3 - x_3^2 y_2)$

4. $\text{det} c = \text{det} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1^2\,(x_2 y_3 - x_3 y_2) - x_1\,(x_2^2 y_3 - x_3^2 y_2) + y_1\,(x_2 y_3 - x_3 y_2)$

luego

1. $a = \frac{\det a}{\det s}$
2. $b = \frac{\det b}{\det s}$
3. $c = \frac{\det c}{\det s}$

Ejemplo: Encontrar una función que modela el movimiento de una bala de cañon, a la cual se le han tomado tres puntos:

1. $A\left(-10, 2\right)$
2. $B\left(1, 8\right)$
3. $C\left(9, 3\right)$

Para esto vamos a usar el programa ModelarFuncionCuadratica.html `http://jprincon.com/programas/calculo-diferencial/ModelarFuncionCuadratica.html`

4.2.1 Modelar una función que pasa que corta en dos puntos

En este caso es más facil realizar el proceso.

Supongamos que la función corta en el eje x en los puntos $x = a$ y $x = b$, para encontrar la función hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x = a \text{ y } x = b \\ x - a = 0 \text{ y } x - b = 0 \\ &= \left(x - a\right)\left(x - b\right) \\ &= x^2 - ax - bx + ab \\ &= x^2 - \left(a + b\right)x + ab \end{aligned}$$

Ejemplo: Modelar una función cuadrática que corta a x en $x = -4$ y $x = 3$.

Solución:

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \left(x = -4\right)\left(x = 3\right) \\ &= \left(x + 4\right)\left(x - 3\right) \\ &= x^2 - 3x + 4x - 12 \\ &= x^2 + x - 12 \end{aligned}$$

Ejercicios

Resolver los siguientes ejercicios

1. Graficar la función $f(x) = \frac{4}{7}x^2 - \frac{4}{7}x - 5$
2. Modelar una función cuadrática que pase por los puntos $A(-8, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(8, 1)$
3. Modelar una función cuadrática que corta a x en $x = -\frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$ y que tenga como punto mínimo $y = -3$