Clase 23

Límites Trigonométricos Especiales

Cuando estudiamos las funciones y las gráficas de las funciones trigonométricas, pensamos en las posibles aplicaciones de estas funciones la vida cotidiana. Tenemos aquí un problema a resolver.

¿Cuál es el resultado del siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

se observa que la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no existe en $x = 0$. Tracemos la gráfica de la función para ver su comportamiento en $x = 0$.

x	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
1.0	0.8414
0.9	0.8703
0.8	0.8966
0.7	0.9203
0.6	0.941
0.5	0.9588
0.4	0.9735
0.3	0.985
0.2	0.9933
0.1	0.9983
0.01	0.9999

Cuadro 23.1: Tabulación de la Función

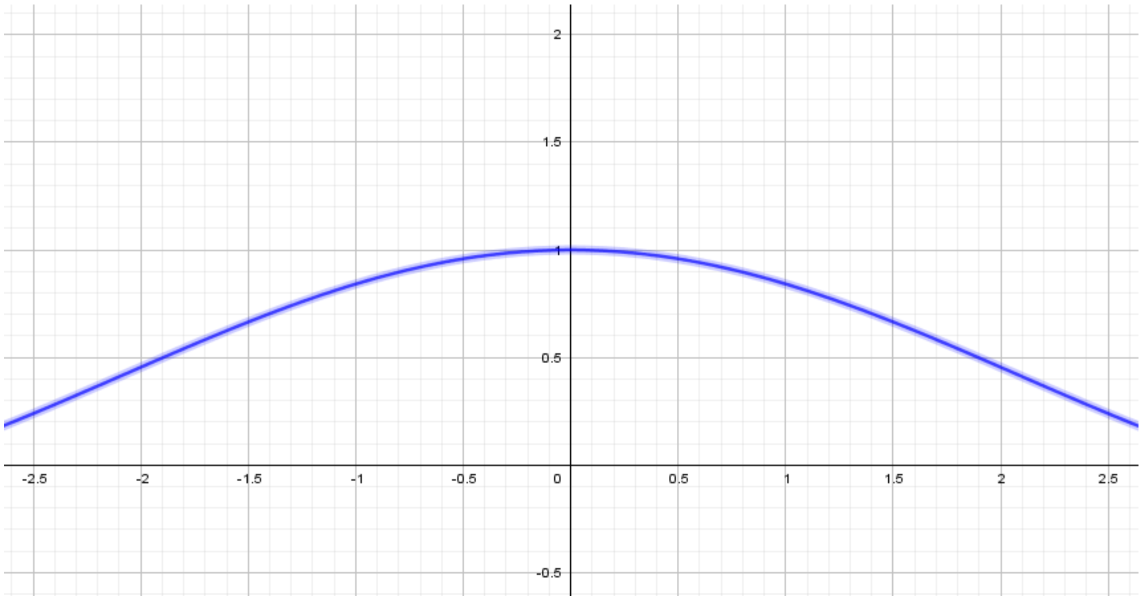

Figura 23.1: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Este límte es

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Este límite nos permitirá evaluar funciones trigonométricas como las siguientes:

Ejemplo 1:

Determinar el valor de

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$$

en $x = 0$, realice una gráfica de la función

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 8x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4x\sin 4x}{4x}}{\dfrac{8x\sin 8x}{8x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x\dfrac{\sin 4x}{4x}}{8x\dfrac{\sin 8x}{8x}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Figura 23.2: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$

Ejemplo 2:

Determinar el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x} \\
&= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 1\cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3:

Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x} = 0$$

y determinar analiticamente el

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x(1-\cos 2x)}{2x}}{\dfrac{3x \sin 3x}{3x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x\dfrac{1-\cos 2x}{2x}}{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}} \\
&= \frac{2}{3} \frac{\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

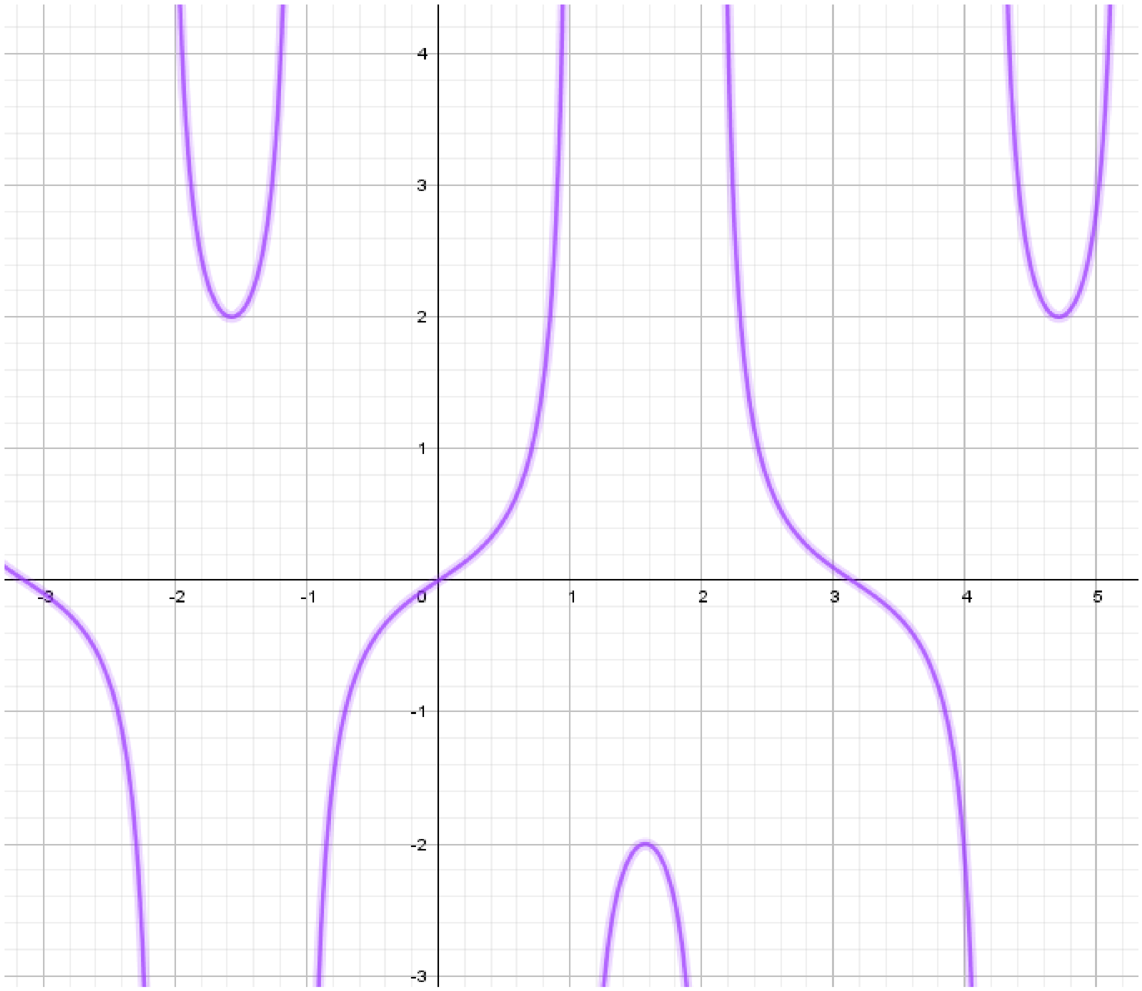

Figura 23.3: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$