
Índice general

6. Función Racional	3
6.1. ¿Cómo modelar una función racional?	9

Temas

1. ¿Qué es una función racional?
2. ¿Cómo obtener los puntos de corte y las asíntotas de una función racional?
3. ¿Cómo graficar una función racional?
4. ¿Cómo modelar una función racional?
5. Proposición de algunos ejercicios
6. Link en la Descripción del Video de las Aplicaciones de Cálculo Diferencial



Clase 6

Función Racional

Las funciones racionales tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios de la forma

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x^1 + p_0 x^0$$

y

$$q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x^1 + q_0 x^0$$

También se tiene la condición que

$$q(x) \neq 0$$

(el polinomio $q(x)$ debe ser diferente de cero).

Luego la función racional se expresa como

$$f(x) = \frac{p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x^1 + p_0 x^0}{q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x^1 + q_0 x^0}$$

En la clase anterior se vio como graficar y obtener las raíces de las **funciones polinómicas**. En las funciones racionales hay dos polinomios sobre los cuales pensar.

- Por una parte esta $p(x)$ quien entrega a la función **todos los puntos de corte** como se vio en la función polinómica.
- Por otra parte esta la función $q(x)$ que a través de sus **puntos de corte genera las asíntotas verticales**.

Ejemplo

Graficar la función racional y determinar su dominio y rango

$$f(x) = \frac{x^6 - 30x^4 + 129x^2 - 100}{x^2 - 16}$$

Copiar y pegar este código para graficar en Geogebra

```
(x^6-30x^4+129x^2-100)/(x^2-16)
```

Solución

Se debe usar **división sintética** para encontrar los puntos de corte de la función $p(x)$

Para encontrar las raíces del polinomio se usó el programa Divisores.html que se puede encontrar en la siguiente ruta: <http://jprincon.com/programas/calculo-diferencial>

○ Los divisores del número 100 son: 1,2,4,5,10,20,25,50,100

○ **Raíces** = -1,1,-2,2,-5,5

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	0	-30	0	129	0	-100	$x = 1$
	1	1	-29	-29	100	100	
1	1	-29	-29	100	100	0	$x = 2$
	2	6	-46	-150	-100		
1	3	-23	-75	-50	0		$x = 5$
	5	40	85	50			
1	8	17	10	0			$x = -1$
	-1	-7	-10				
1	7	10	0				$x = -2$
	-2	-10					
1	5	0					$x = -5$
	-5						
1	0						

El polinomio $q(x)$ se puede factorizar usando diferencia de cuadrados, donde

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

en la cual $x = -4$ y $x = 4$. Con estos datos hacemos el siguiente análisis.

$-\infty$	\dots	-5	\dots	-4	\dots	-2	\dots	-1	\dots	1	\dots	2	\dots	4	\dots	5	\dots	$+\infty$
	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$-$	0	$+$	

Cuadro 6.1: Análisis de la Gráfica

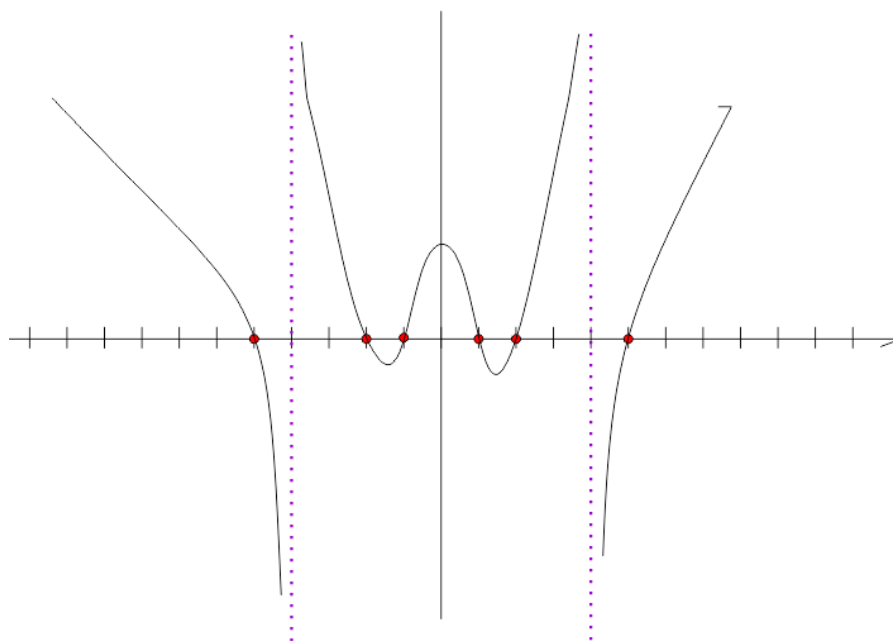


Figura 6.1: Gráfica de la función

En la barra de entrada de geogebra vamos a escribir

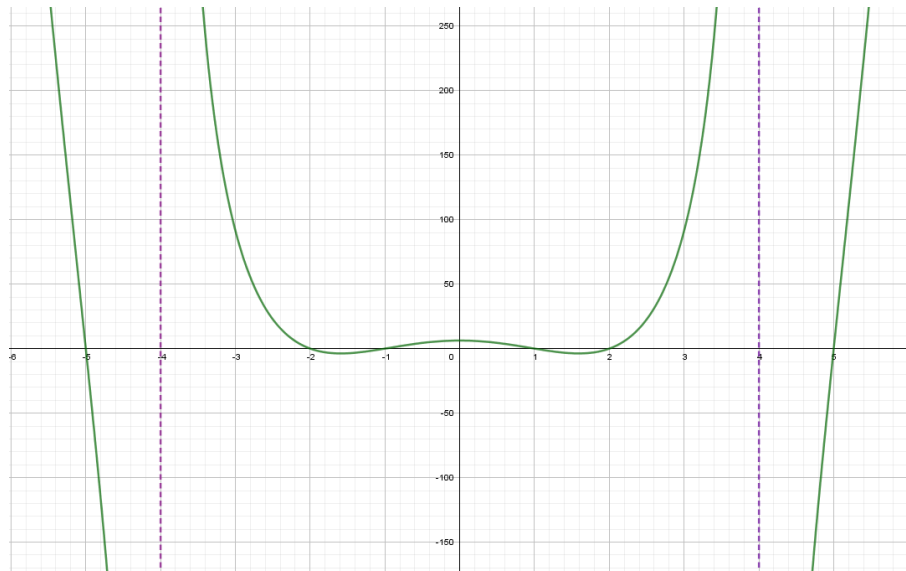


Figura 6.2: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^6 - 30x^4 + 129x^2 - 100}{x^2 - 16}$ Hecha en Geogebra

Ejemplo

Graficar la siguiente función racional, determinar su dominio y rango

$$f(x) = \frac{x^5 + 25x^4 + 230x^3 + 950x^2 + 1689x + 945}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}$$

Para graficar en Geogebra se debe escribir

```
1 (x^5+25x^4+230x^3+950x^2+1689x+945)/(x^3-9x^2+23x-15)
```

Solución

La función escrita en términos de JavaScript es:

```
1 Math.pow(x,5)+25*Math.pow(x,4)+230*Math.pow(x,3)
2 +950*Math.pow(x,2)+1689*x+945
```

1. Primero debemos determinar los divisores del 945

- Para encontrar las raíces del polinomio se usó el programa Divisores.html que se puede encontrar en la siguiente ruta: <http://jprincon.com/programas/calculo-diferencial>

○ **Divisores** 945 = 1,3,5,7,9,15,21,27,35,45,63,105,135,189,315,945

○ **Raíces** = -1,-3,-5,-7,-9

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	25	230	950	1689	945	$x = -1$
	-1	-24	-206	-744	-945	
1	24	206	744	945	0	$x = -3$
	-3	-63	-429	-945		
1	21	143	315	0		$x = -5$
	-5	-80	-315			
1	16	63	0			$x = -7$
	-7	-63				
1	9	0				$x = -9$
	-9					
1	0					

2. Encontrar las raíces para el polinomio $q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

```
1 Math.pow(x,3)-9*Math.pow(x,2)+23*x-15
```

○ **Divisores** de 15 = 1,3,5,15

○ **Raíces** = 1,3,5

x^3	$-9x^2$	$23x$	-15	
1	-9	23	-15	$x = 1$
	1	-8	15	
1	-8	15	0	$x = 3$
	3	-15		
1	-5	0		$x = 5$
	5			
1	0			

3. Análisis de los Intervalos

$-\infty$ \dots -9 \dots -7 \dots -5 \dots -3 \dots -1 \dots 1 \dots 3 \dots 5 \dots $+\infty$
 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 1 0 $-$ $+$ $+$ $+$ $-$ $+$

4. Un bosquejo de la función es el siguiente

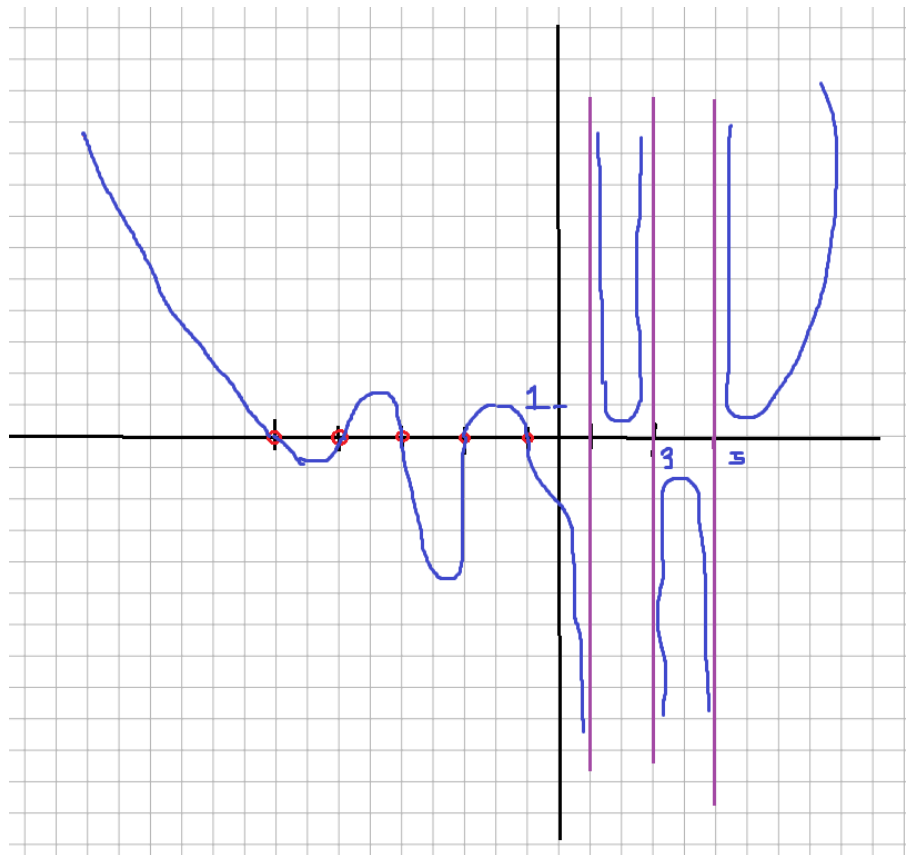


Figura 6.3: Bosquejo de la función

5. La gráfica de la función es

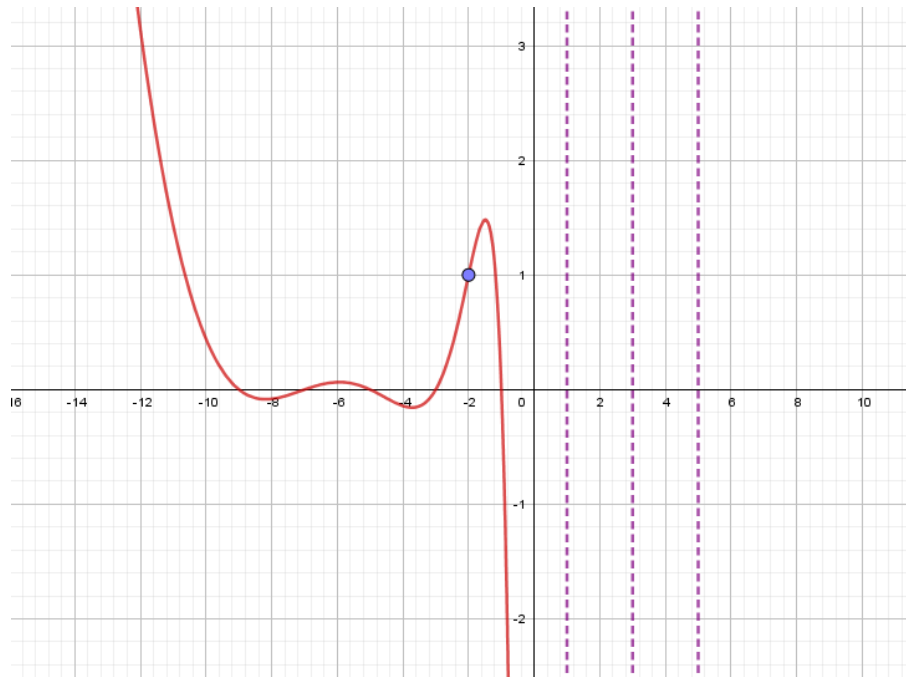


Figura 6.4: Gráfica de la función

6.1 ¿Cómo modelar una función racional?

Ya vimos que la función racional tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

entonces para modelar una función de este tipo debemos modelar dos funciones polinómicas y estas debe tener la siguiente condición:

- Los raíces seleccionadas para $p(x)$ deben ser diferentes a las tomadas para el polinomio $q(x)$.

Ejemplo: Modelar una función racional que tenga asíntotas en $x = -6$, $x = -3$, $x = 3$ y $x = 6$ y puntos de corte en $x = -8$, $x = -5$, $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$, $x = 5$ y $x = 8$.

El ejercicio tiene simetría en sus asíntotas y en sus puntos de corte.

Solución: Para encontrar los polinomios vamos a usar el proceso contrario a la división sintética (multiplicación sintética).

10

1								$x + 8$
	8							
1	8							$x + 5$
	5	40						
1	13	40						$x + 4$
	4	52	160					
1	17	92	160					$x - 4$
	-4	-68	-368	-640				
1	13	24	-208	-640				$x - 5$
	-5	-65	-120	1040	3200			
1	8	-41	-328	400	3200			$x - 8$
	-8	-64	328	2624	-3200	-25600		
1	0	-105	0	3024	0	-25600		$x + 0$

Figura 6.5: Proceso de la Multiplicación Sintética

Polinomio $q(x)$

1					3
	3				
1	3				6
	6	18			
1	9	18			-3
	-3	-27	-54		
1	6	-9	-54		
	-6	-36	54	324	
1	0	-45	0	324	

por lo tanto el polinomio $q(x) = x^4 - 45x^2 + 324$.

Finalmente la función racional esta dada por

$$f(x) = \frac{x^7 - 105x^5 + 3024x^3 - 25600x}{x^4 - 45x^2 + 324}$$

¿Cómo graficar esta función?

Se debe analizar cada intervalo, usando la calculadora

← -8 ... -6 ... -5 ... -4 ... -3 ... 0 ... 3 ... 4 ... 5 ... 6 ...
 - 0 + | - 0 + 0 - | + 0 - | + 0 - 0 + | -

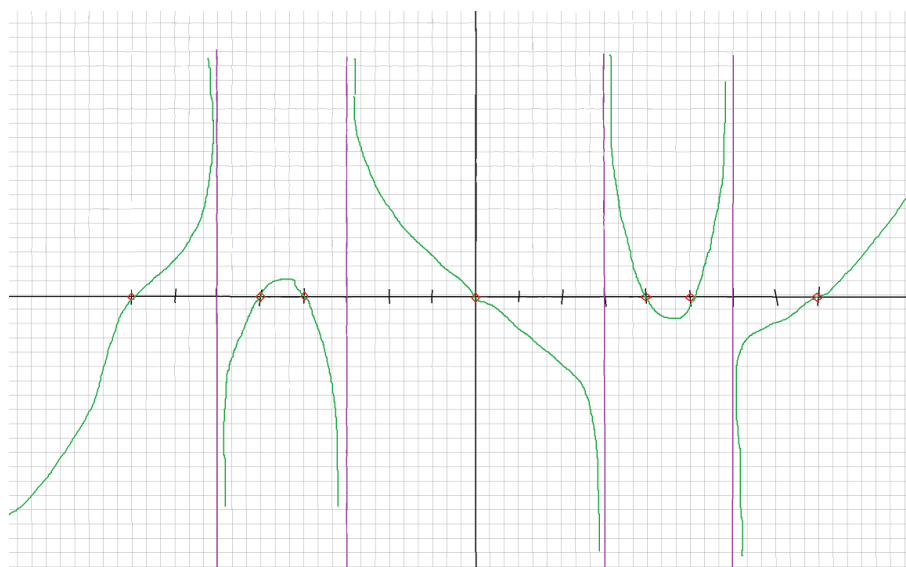


Figura 6.6: Bosquejo de la función $f(x) = \frac{x^7 - 105x^5 + 3024x^3 - 25600x}{x^4 - 45x^2 + 324}$

luego podemos graficar la función en Geogebra mediante el siguiente código.

Para graficar la función en geogebra se copia este código

```
(x^7-105x^5+3024x^3-25600x)/(x^4-45x^2+324)
```

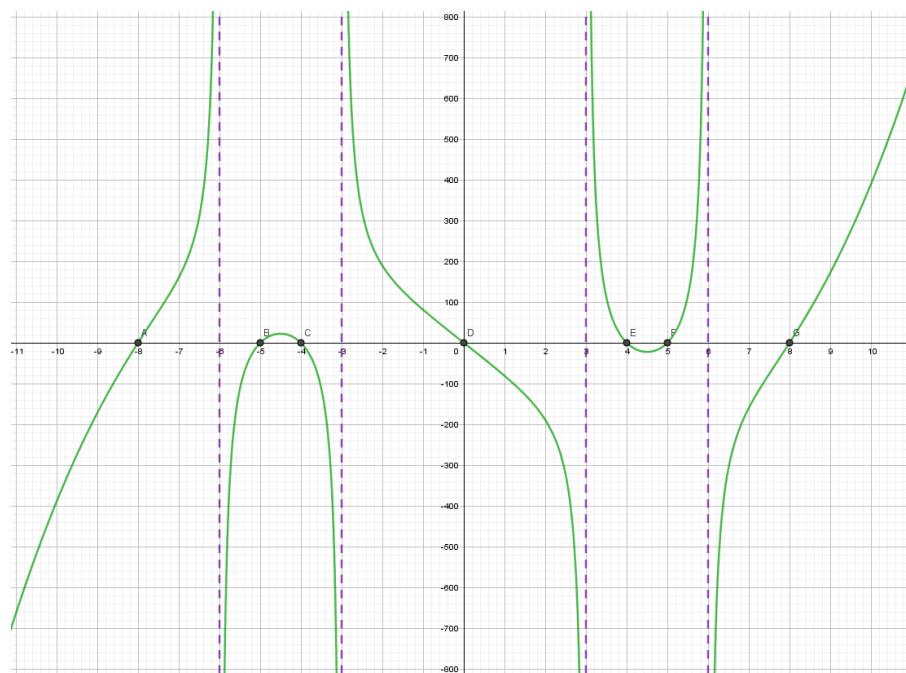


Figura 6.7: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^7 - 105^5 + 3024x^3 - 25600x}{x^4 - 45x^2 + 324}$

Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones racionales

1. $f(x)$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 39x - 126}{x^7 - 11x^6 - 449x^5 + 3119x^4 + 60104x^3 - 142444x^2 - 1566096x - 2145024}$$

=

2. $f(x) = \frac{x^3 + 12x^2 - 151x - 342}{x^6 + 15x^5 - 473x^4 - 5511x^3 + 78628x^2 + 497364x - 4678128}$