Clase 21

Continuidad de una función en un número

Muchas funciones en cálculo diferencial son funciones por partes, y de estas funciones se quiere saber si son funciones continuas. Siempre ha sido mejor trabajar con funciones continuas que con aquellas que no lo son.

En la clase de límites lateras trabajamos con la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} & \textbf{si } x < 5 \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{33}{5} & \textbf{si } x \geq 5 \end{cases}$$

en la cual demostramos que sus límites laterales son los siguientes:

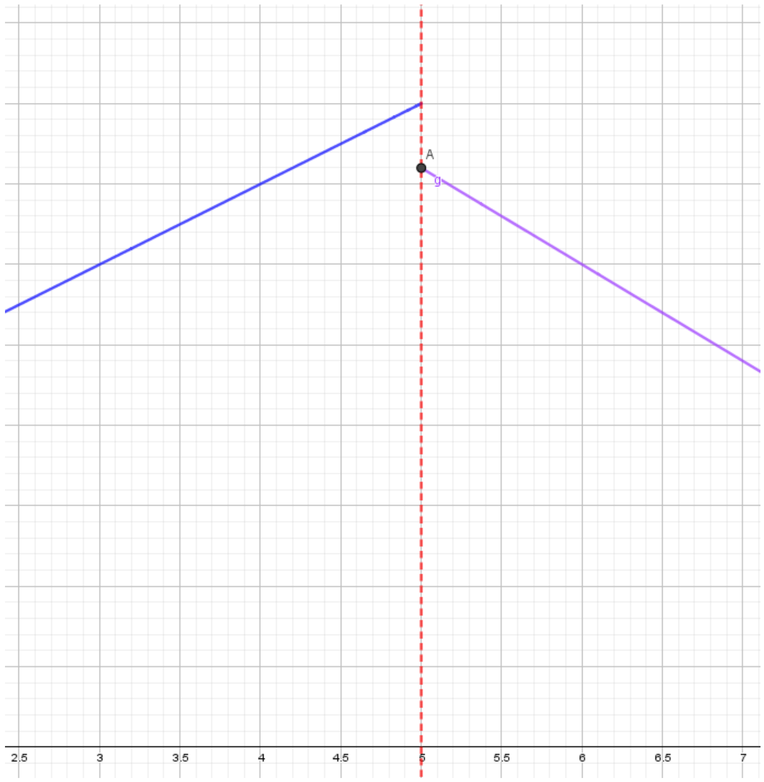

Figura 21.1: Gráfica de la función

Aquí se observa que:

- $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 4$ y
- $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 3.6$

¿Cómo lo hacemos?

- $\lim_{x\to 5^-} \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$
- $\lim_{x\to 5^+} -\frac{3}{5}x + \frac{33}{5} = -\frac{3}{5}(5) + \frac{33}{5} = 3.6$

En esta clase definiremos que es una función continua y como determinar cuándo lo es.

Definición 1:

Una función f es continua en el número a si y sólo si satisfacen tres condiciones:

1. $f(a)$ exista
2. $\lim_{x\to a^-} f(x)$exista y $\lim_{x\to a^+} f(x)$exista y sean iguales
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Del ejemplo anterior se observa que la función no es continua, ya que los límites laterales son diferentes.

Ejemplo 1:

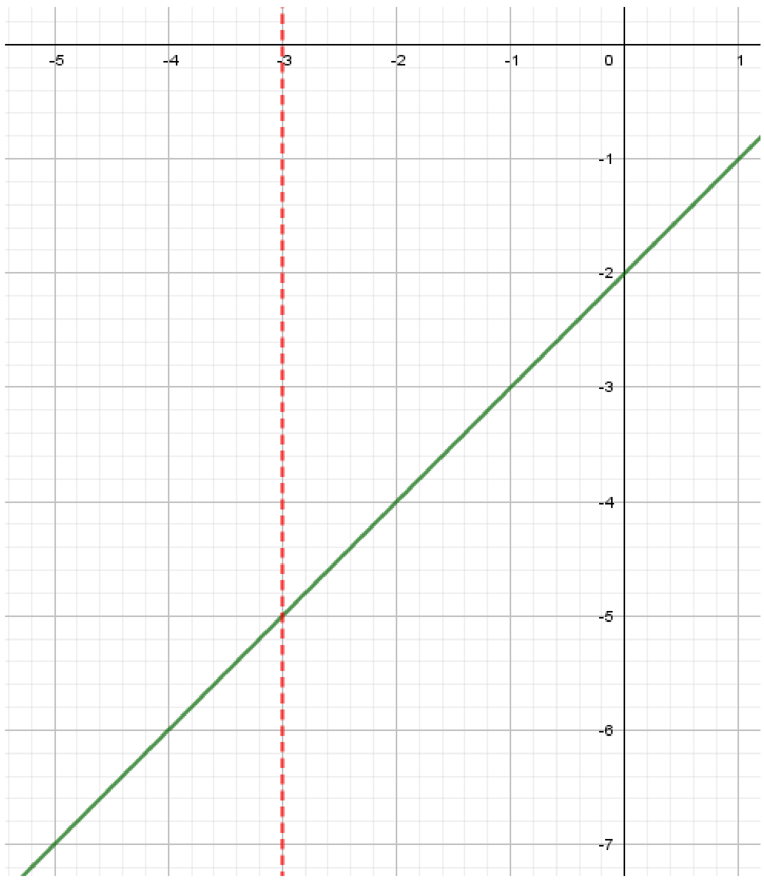

Figura 21.2: Gráfica de la función

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+x-6}{x+3} \\ &= \frac{(x-2)(x+3)}{(x+3)} \\ &= x-2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \textbf{si } x \neq -3 \end{cases}$$

Vamos a determinar si la función es continua

- $f(-3)$ exista: Este valo no existe porque la función ha sido defina como $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \neq -3 \end{cases}$

Como esta condición no se cumple, entonces la función no es continua en $x = -3$

¿Cómo definir esta función cómo continua?

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \neq -3 \\ -5 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

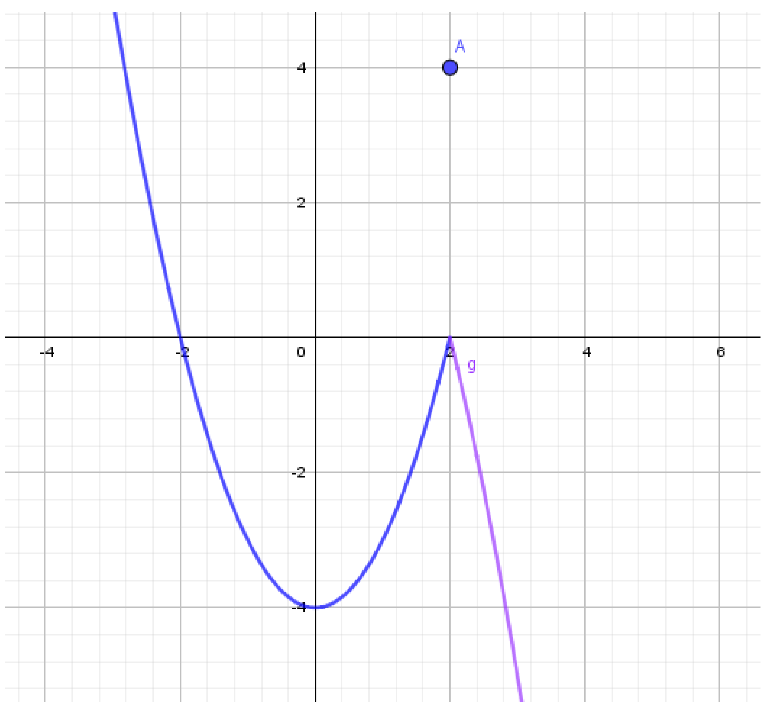

Figura 21.3: Gráfica de la función

Para determinar si la función es continua, debemos cumplir las siguientes condiciones:

- ¿$f(2)$ existe?, de la función se calcula que $f(2) = 4$, por lo tanto $f(2)$ existe

2. Los límites laterales existen y son iguales?

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

como los límites laterales son iguales y existen, el límite existe

3. Luego $f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$, por lo tanto la función no es continua en $x = 2$

Ejemplo 3:

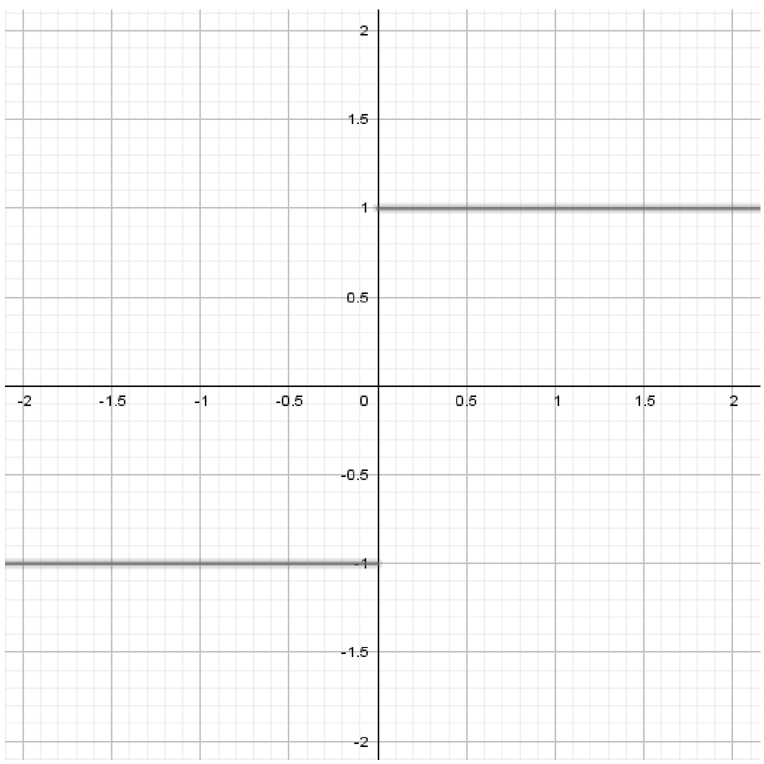

Figura 21.4: Gráfica de la función

Como los límites laterales son diferentes, no se puede redefinir la función para que sea continua. Además que $f(0)$ no existe.

Ejemplo 4:

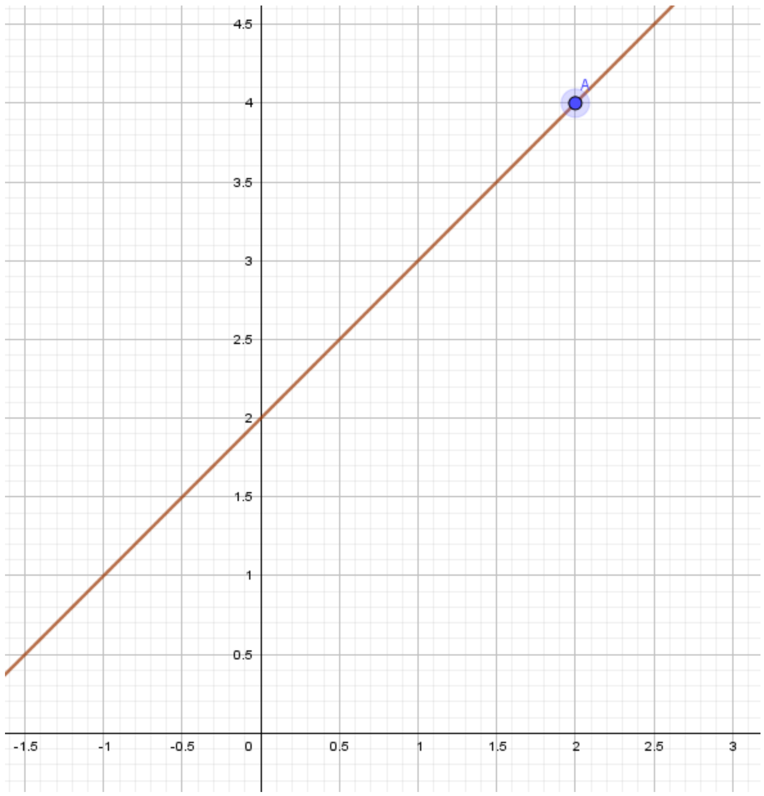

Figura 21.5: Gráfica de la función

La función no existe en $x = 2$, para redefinir la función debemos factorizar

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-4}{x-2} \\
&= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} \\
f(x) &= \begin{cases} x+2 & \textbf{si } x \neq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

luego creamos un punto $x = 2$ $f(2) = 4$ así

$$
f(x) = \begin{cases} x+2 & \textbf{si } x \neq 2 \\ 4 & \textbf{si } x = 2 \end{cases}
$$