Clase 17

Noción Intuitiva de Límite

El límite será en adelante la herramienta que nos permitirá construir el cálculo diferencial, integral y lo demás que venga de cálculo. El límite nos da la idea de la aproximación infinitesimal y permite evaluar puntos en funciones que se pueden indeterminar en punto exácto.

Veamos por ejemplo la función

$$f(x) = 2x + 1$$

y el punto $x = 1$, que pasará cuándo x se aproxima a 1. Si hacemos una tabla

x	$f(x) = 2x + 1$
0	1
0.25	0.5
0.5	1.5
0.75	2
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
0.9999	2.9998
0.99999	2.99998

Se escribe entonces así

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \to 3$$

esto sería para valores que se aproximan a 1 por la izquierda. De otra parte tenemos

x	$f(x) = 2x + 1$
2	5
1.75	4.5
1.5	4
1.25	3.5
1.1	3.2
1.01	3.02
1.001	3002
1.0001	3.0002
1.00001	3.00002

de esta tabla se observa que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \to 3$$

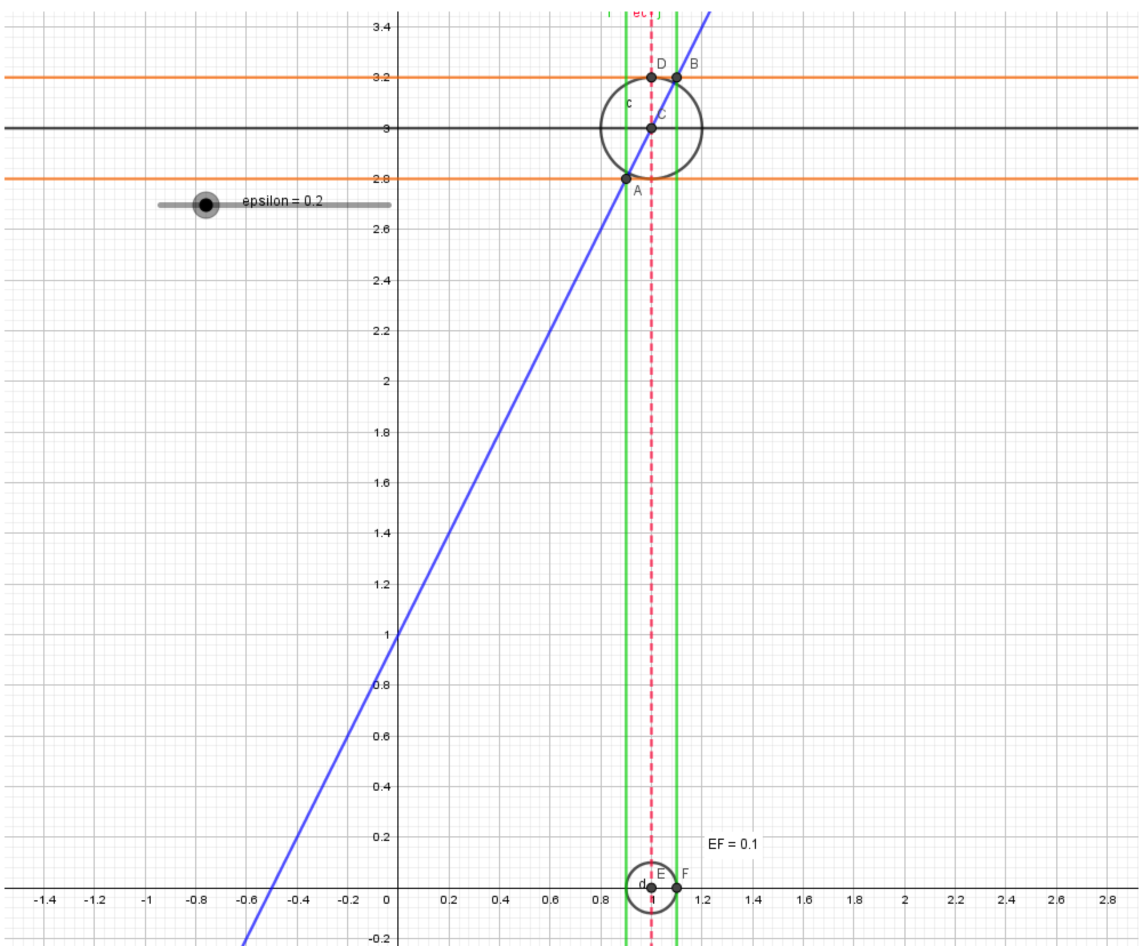

Figura 17.1: Representación del límite en la función

Si tomamos a δ y a ϵ como radios de circunferencias, puede tomar varios valores sobre el eje x y el eje y respectivamente de tal forma que

$$\text{Si } 0 < |x-1| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 3| < \epsilon$$

Supongamos que tomamos un valor pequeño para $\epsilon = 0.2$ la expresión

$$|f(x) - 3| < 0.2$$

quiere decir que la función puede tomar valores entre $3 - 0.2$ y $3 + 0.2$ es decir entre 2.8 y 3.2 esto provoca que al interceptar la gráfica de la función con esas rectas en el eje x se pueda enc-ontrar un radio que cumpla con esa condición.

$$\begin{aligned}
|(2x+1) - 3| &< 0.2 \\
|2x - 2| &< 0.2 \\
-0.2 < 2x - 2 &< 0.2 \\
1.8 < 2x &< 2.2 \\
\frac{1.8}{2} < x &< \frac{2.2}{2} \\
0.9 < x &< 1.1 \\
-0.1 < x - 1 &< 0.1 \\
|x - 1| &< 0.1
\end{aligned}$$

de otra forma

$$\begin{aligned}
|2x - 2| &< 0.2 \\
|2(x-1)| &< 0.2 \\
|2| \cdot |x - 1| &< 0.2 \\
2|x - 1| &< 0.2 \\
|x - 1| &< 0.1
\end{aligned}$$

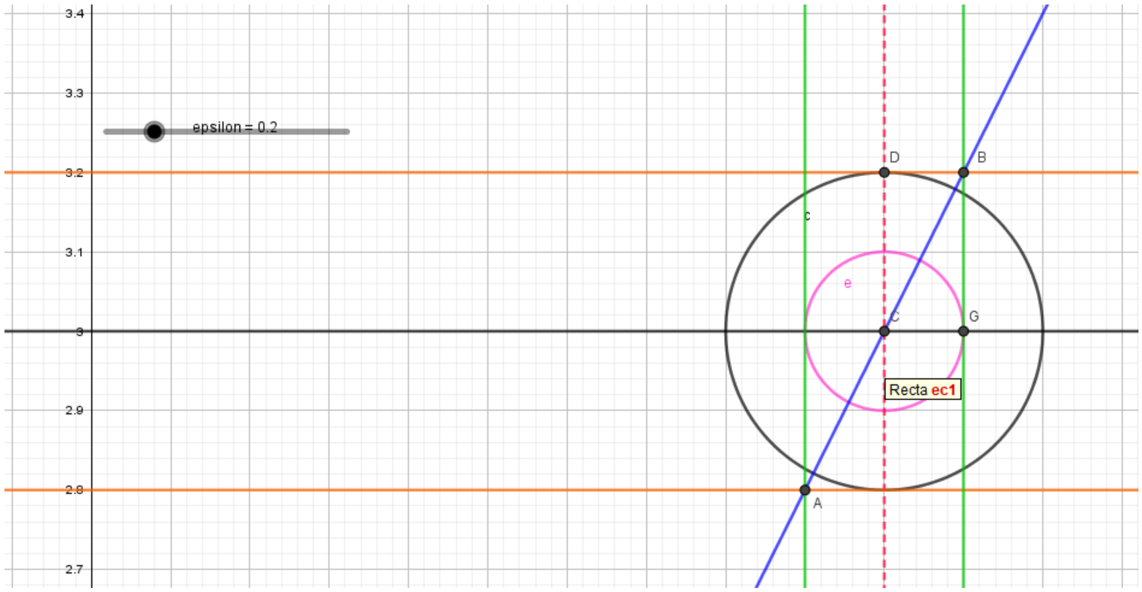

Figura 17.2: Gráfica del radio de cálculo de la función

Ejemplo 1:

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine un valor δ cuando $\epsilon = 0.3$. Diga cuál es el valor de $\lim_{x \to 2} g(x)$ y $g(2)$

1. Para calcular el valor de δ

$$\begin{aligned} |g(x) - 4| &< 0.3 \\ |3x - 2 - 4| &< 0.3 \\ |3x - 6| &< 0.3 \\ |3(x-2)| &< 0.3 \\ |3|\,|x-2| &< 0.3 \\ 3\,|x-2| &< 0.3 \\ |x-2| &< 0.1 \end{aligned}$$

Si $0 < |x - 2| < 0.1$ entonces $|g(x) - 4| < 0.3$. Luego

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4$$

y $g(2) = 7$

Ejemplo 2:

Dada la función

$$f(x) = 5x - 4$$

Determine un valor δ cuando $\epsilon = 0.3$. Diga cuál es el valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $f(1)$

1. Para determinar δ hacemos

$$
\begin{aligned}
|f(x) - 1| &< 0.3 \\
|5x - 4 - 1| &< 0.3 \\
|5x - 5| &< 0.3 \\
|5(x-1)| &< 0.3 \\
|5|\,|x-1| &< 0.3 \\
|x-1| &< 0.06
\end{aligned}
$$

2. luego

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

   y $f(1) = 1$

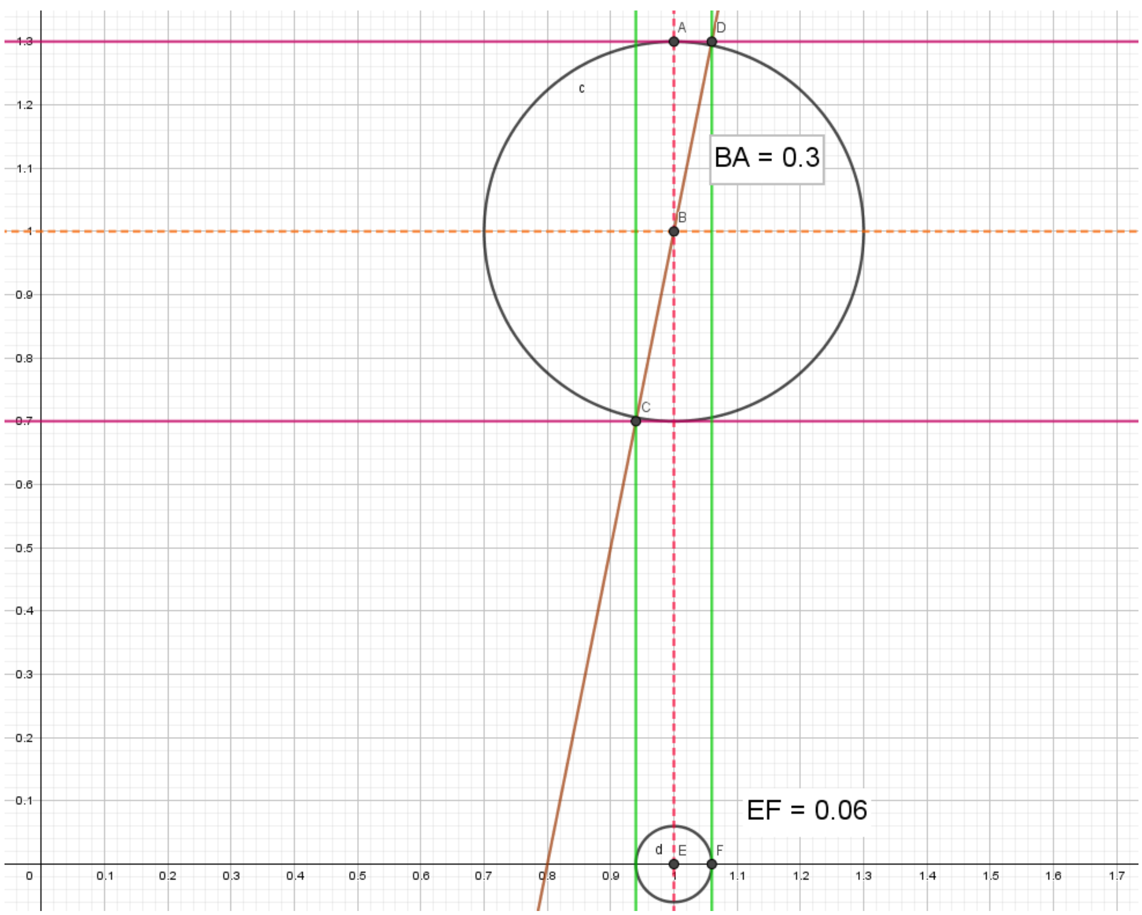

Figura 17.3: Representación gráfica del problema

Ejemplo 3:

Dada la función

$$f(x) = -x^2 - 4x + 21$$

Determine un valor δ cuando $\epsilon = 0.1$. Diga cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $f(1)$

$$\begin{aligned}
|f(x) - 16| &< 0.1 \\
\left|-x^2 - 4x + 21 - 16\right| &< 0.1 \\
\left|-x^2 - 4x + 5\right| &< 0.1 \\
\left|-\left(x^2 + 4x - 5\right)\right| &< 0.1 \\
\left|x^2 + 4x - 5\right| &< 0.1 \\
|(x-1)(x+5)| &< 0.1 \\
|x-1||x+5| &< 0.1 \\
|x-1| &< \frac{0.1}{x+5}
\end{aligned}$$

sea $x = 0$

$$\begin{aligned}
|x-1| &< \frac{0.1}{0+5} \\
|x-1| &< 0.02
\end{aligned}$$

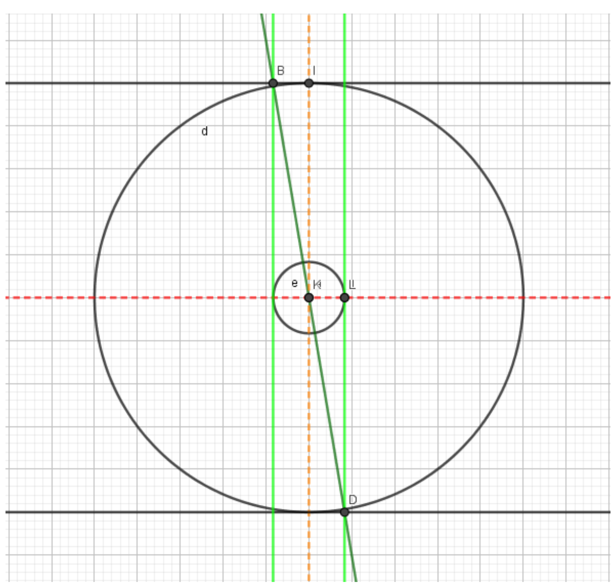

Figura 17.4: Representación gráfica de ϵ y δ

Ejercicios

1. Determine una relación entre δ y ε para los siguientes ejercicios

   a) $f(x) = x - 1$; $a = 4$; $L = 3$ y $\varepsilon = 0.03$
   Al aplicar la defինción formal tenemos: si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

   $$|x - 4| < \delta$$

   entonces

   $$|x - 1 - 3| < \varepsilon$$

   de esta forma $|x - 4| < \varepsilon$ entonces $\delta < 0.03$ y se concluye que el límite existe y es igual a $L = 3$

   b) $f(x) = x + 2$; $a = 3$; $L = 5$; $\varepsilon = 0.02$

   c) $f(x) = 2x + 4$; $a = 3$; $L = 10$; $\varepsilon = 0.01$

   d) $f(x) = 3x - 1$; $a = 2$; $L = 5$; $\varepsilon = 0.1$

   $$\begin{aligned} \text{si } |x - 2| < \delta &\Rightarrow |3x - 1 - 5| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 3|x - 2| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 3\delta < 0.1 \\ &\Rightarrow \delta < \frac{1}{30} \end{aligned}$$

   por lo tanto el límite existe y es igual a $L = 5$

   e) $f(x) = 5x - 3$; $a = 1$; $L = 2$; $\varepsilon = 0.05$

   f) $f(x) = 4x - 5$; $a = 2$; $L = 3$; $\varepsilon = 0.001$

   g) $f(x) = 3 - 4x$; $a = -1$; $L = 7$; $\varepsilon = 0.02$

   h) $f(x) = 2 + 5x$; $a = -2$; $L = -8$; $\varepsilon = 0.002$

   i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $a = -2$; $L = -4$; $\varepsilon = 0.001$

   j) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1}$; $a = -\dfrac{1}{2}$; $L = -4$; $\varepsilon = 0.03$

   k) $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 7$; $\varepsilon = 0.02$

   l) $f(x) = x^2$; $a = 0.5$; $L = 0.25$; $\varepsilon = 0.01$

m) $f(x) = x^2$; $a = -1$; $L = 1$; $\varepsilon = 0.2$

n) $f(x) = x^2 - 5$; $a = 1$; $L = -4$; $\varepsilon = 0.15$

1)

$$\begin{aligned}\textbf{si}\, |x-1| < \delta &\Rightarrow \left|x^2 - 5 - (-4)\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|x^2 - 1\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|(x+1)(x-1)\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

luego consideramos $\delta = 0.01$ entonces $|x-1| < 0.01$ al aplicar la defnción de desigualdad del valor absoluto

$$-0.01 < x - 1 < 0.01$$

para lo cual sumamos $+2$

$$1.99 < x + 1 < 2.01$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \left|(x+1)(x-1)\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|2.01(x-1)\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 2.01\,|x-1| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 2.01\delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow 2.01\delta < 0.15 \\ &\Rightarrow \delta < \frac{0.15}{2.01} \\ &\Rightarrow \delta < \frac{5}{67} \approx 0.074\end{aligned}$$

ñ) $f(x) = x^2 - 2x$; $a = 2$; $L = 1$; $\varepsilon = 0.4$

o) $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = -1$; $L = 1$; $\varepsilon = 0.08$

p) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$; $a = -3$; $L = 6$; $\varepsilon = 0.6$

q) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$; $a = 1$; $L = -2$; $\varepsilon = 0.3$

2. La cubierta circular de una mesa tiene un área que difiere de 225π pulg^2 en menos de 4 pulg^2. ¿Cuál es la medida aproximada del radio?

$$\begin{aligned}\textbf{si}\ \ |r-a| < \delta &\Rightarrow \left|\pi r^2 - 225\pi\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\pi\left(r^2 - 225\right)\right| < \varepsilon \\ |r-15| < \delta &\Rightarrow \pi\left|(r+15)(r-15)\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

de esta forma el valor de $a = 15$, consideremos $\delta = 0.1$ entonces

$$\begin{aligned}|r-15| &< 0.1 \\ -0.1 < r - 15 &< 0.1 \\ 29.9 < r + 15 &< 30.1\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \pi \left|(r+15)(r-15)\right| < \varepsilon \\
&\pi \left|30.1\,(r-15)\right| < \varepsilon \\
&30.1\pi \left|r-15\right| < 4 \\
&\left|r-15\right| < \frac{4}{30.1\pi}
\end{aligned}$$

a) la cual se puede resolver de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\left|r-15\right| &< \frac{4}{30.1\pi} \\
-0.0423 < r-15 &< 0.0423 \\
14.957 < r &< 15.0423
\end{aligned}$$

la medida aproximada del radio esta en el intervalo $(14.957, 15.0423)$

3. A una persona que gana 45000 por hora se le paga sólo por el tiempo de trabajo. ¿Qué tan cerca de 8 horas debe trabajar una persona para que su salario difiera de $\$360000$ en no mas de 750 pesos?

4. Se construye una cerca alrededor de un jardín de forma cuadrada. ¿Qué tan próxima a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que la longitud total de la cerca esté entre 39.96 y 40.04 pie?

5. Se construye una señal circular de modo que la longitud de su circunferencia difiera de 6π pie en no más de 0.1 pie. ¿Qué tan cerca de 3 pie debe medir el radio de la señal?

6. Para el jardin del ejercicio 4, ¿qué tan cercano a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardin para que el área de dicho jardin difiera de 100 pie^2 en no mas de 0.5 pie^2?

7. Para la señal del ejercicio 5 ¿qué tan cercano a 3 pie debe medir el radio de la señal para que el área de dicha señal difiere de 9π pie^2 en no más de 0.2 pie^2?

8. El número de pies que cae un cuerpo a partir del resposo en t segundos varía directamente como el cuadrado de t y un cuerpo cae a partir del reposo 64 pie en 2 s. ¿Qué tiempo cercano a 5 s le tomará a un cuerpo caer entre 398 y 402 pie?