Clase 19

Límites Laterales

Existen funciones en donde no es posible determinar el límite por izquierda y por derecha, en funciones por ejemplo, radicales en las cuales el dominio se define para un intervalo dado.

Ejemplo 1:

Determinar el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

1

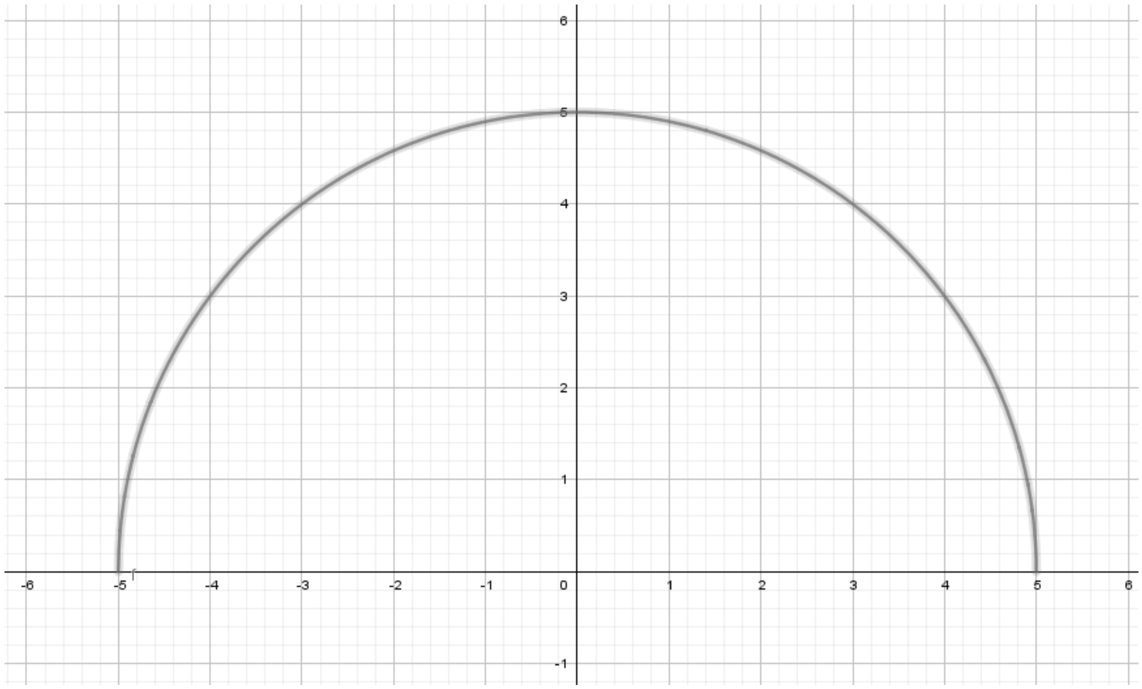

Figura 19.1: Gráfica de la función

En este caso tenemos la gráfica de media circunferencia con centro el origen y radio 5. Esto provoca que que el intervalo en el que estan definida la función es $[-5, 5]$ del tal forma que si buscamos encontrar

$$\lim_{x \to -5^-} f(x) \text{ o } \lim_{x \to 5^+} f(x)$$

no existe.

Ejemplo 2:

Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 5 \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{33}{5} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

determinar el límite en $x = 5$ por la izquierda y por la derecha

Al realizar la gráfica de la función tenemos

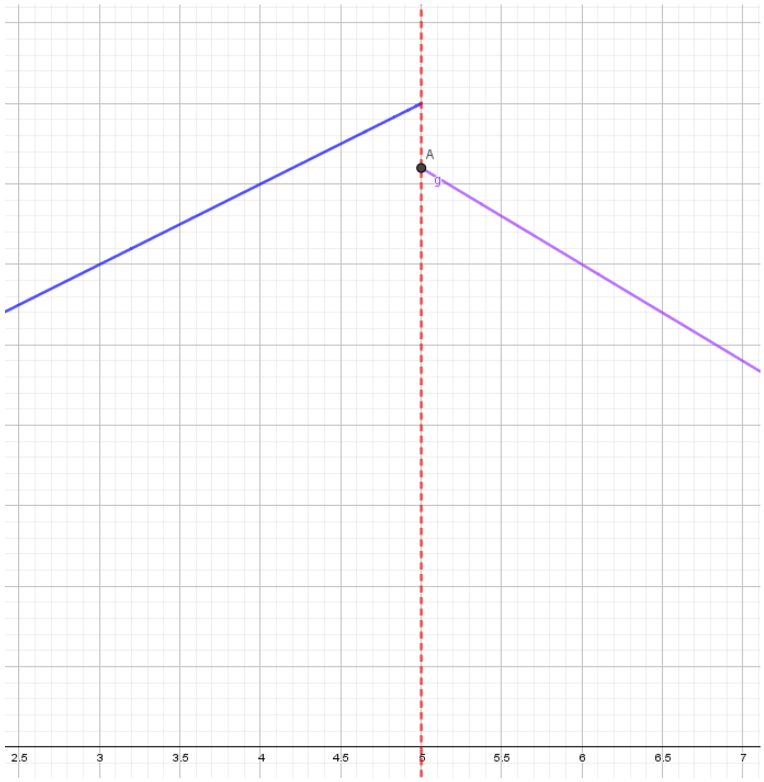

Figura 19.2: Gráfica de la función

Aquí se observa que:

- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 4$ y
- $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3.6$

¿Cómo lo hacemos?

- $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = 4$
- $\lim\limits_{x\to 5^+} -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{33}{5} = -\dfrac{3}{5}(5) + \dfrac{33}{5} = 3.6$

Teorema 1:

El $\lim\limits_{x\to a} f(x)$existe y es igual a L si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Del ejercicio anterior se concluye que el límite **no** existe.

Ejemplo 3:

Graficar la función

$$f(x) = |x|$$

y determinar si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe

De la definición de valor absoluto tenemos lo siguiente

$$|x| = \begin{cases} x & \textbf{si } x \geq 0 \\ -x & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$$

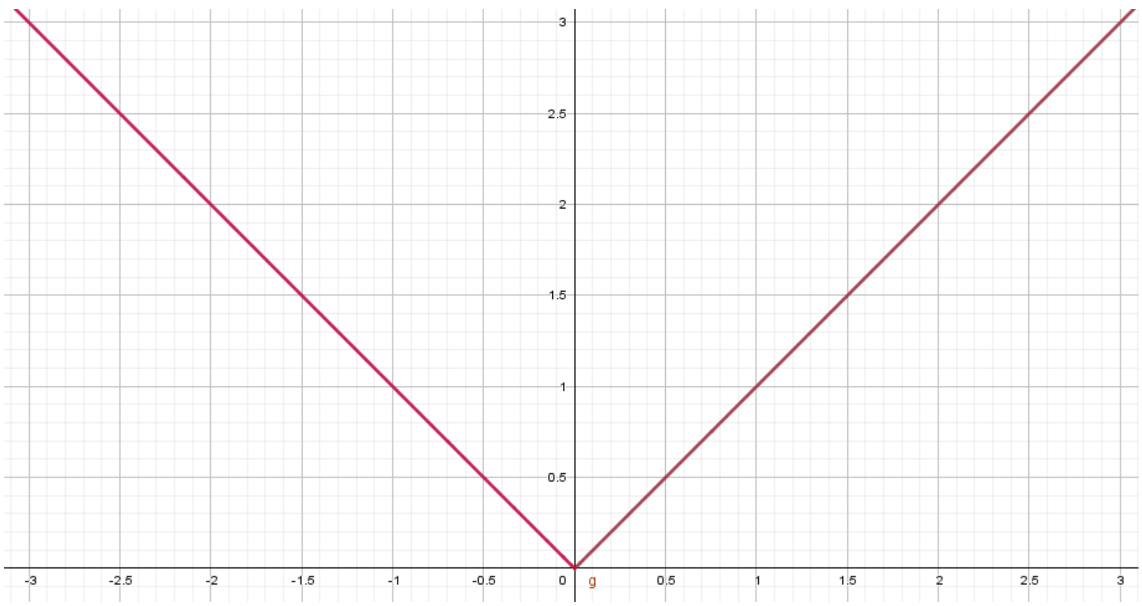

Figura 19.3: Gráfica de la función

De la gráfica se observa que

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ y
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Por lo tanto el límite existe y es igual a cero 0.

Ejemplo 4:

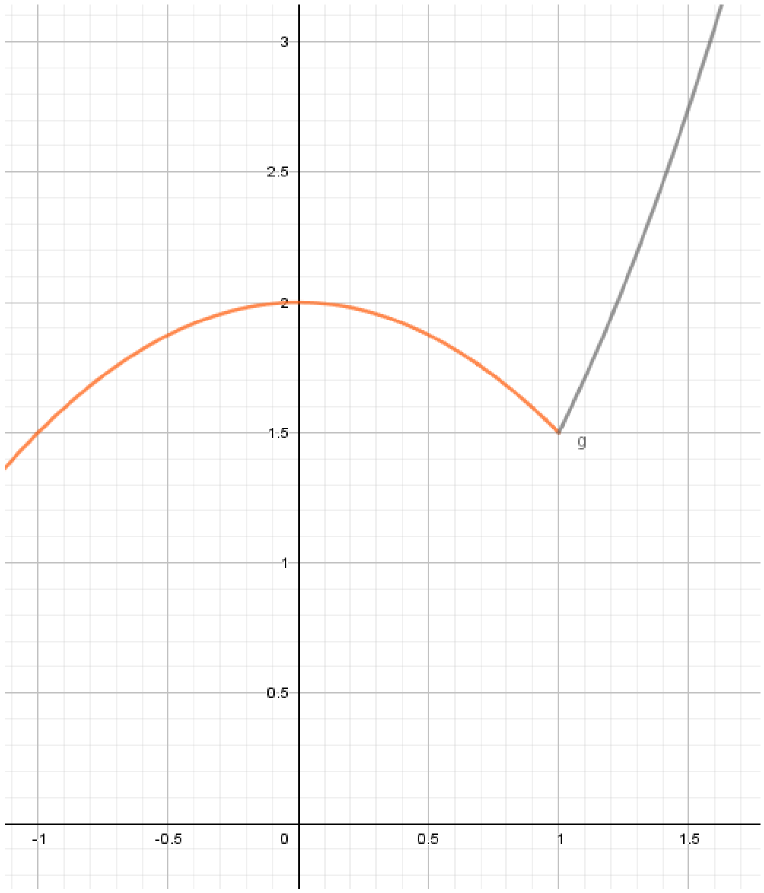

Figura 19.4: Gráfica de la función

De la gráfica se observa que:

- $\lim_{x \to 1^-} -\frac{x^2}{2} + 2 = -\frac{1^2}{2} + 2 = \frac{3}{2}$
- $\lim_{x \to 1^+} x^2 + \frac{1}{2} = 1^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Por lo tanto se concluye que el límite si existe y es igual a $\frac{3}{2}$

Ejemplo 5:

Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 4 \\ 5x + k & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

determine el valor de k, tal que $\lim_{x \to 4} f(x)$ exista.

De la función se sabe que

- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} 3x + 2 = 3(4) + 2 = 14$

❍ para encontrar el valor de k hacemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^+} 5x + k &= 5(4) + k = 14\\ &= 20 + k = 14\\ k &= -6\end{aligned}$$

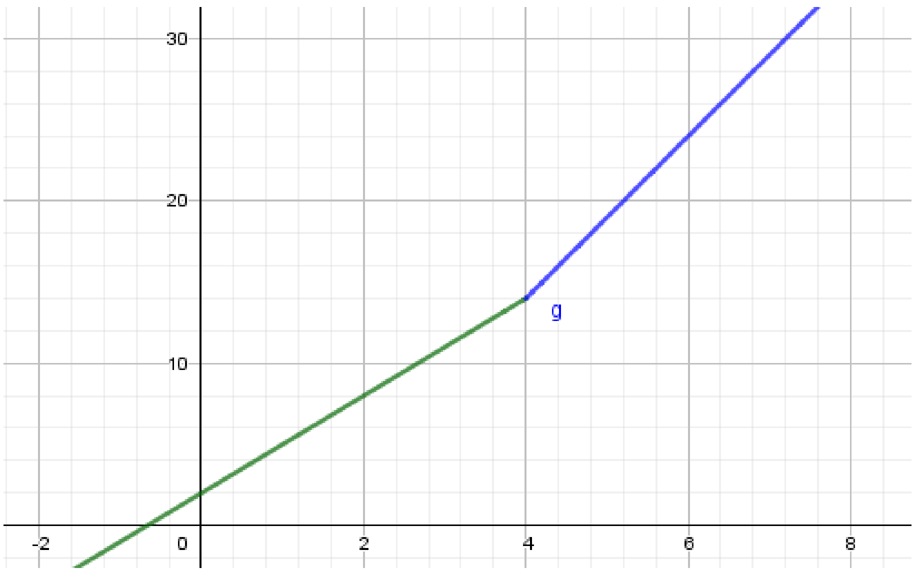

Figura 19.5: Gráfica de la función

Para encontrar el valor de k se hace

$$\begin{aligned}f(4) &= 3(4) + 2\\ &= 12 + 4 = 16\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}5(4) + k &= 16\\ 20 + k &= 16\\ k &= 16 - 20\\ k &= -4\end{aligned}$$

para que la función sea continua el valor de k debe ser $k = -4$.