Clase 12

Álgebra de Funciones

Las funciones tienen lógicamente la posibilidad de operarse entre ellas.

Las operaciones que conocemos de la aritmética son:

1. Suma
2. Diferencia
3. Multiplicación
4. División

Las funciones se pueden operar a través de estas operaciones.

Ejemplo 1:

Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Determinar:

1. Suma
2. Diferencia
3. Multiplicación
4. División

Solución

Se hacen las siguientes operaciones
$f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

- Suma: $f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$

- Diferencia:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - (x+1) \\ &= x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

- Multiplicación:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= x^2 (x+1) \\ &= x^3 + x^2 \end{aligned}$$

- División: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ejemplo 2:

Dadas las funcines $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x + 1$. Determinar:

1. Suma
2. Diferencia
3. Multiplicación
4. División

Solución

Se hacen las siguientes operaciones
$f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x + 1$

- Suma:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^3 - 1 + x + 1 \\ &= x^3 + x \end{aligned}$$

- Diferencia:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 1 - (x+1) \\ &= x^3 - 1 - x - 1 \\ &= x^3 - x - 2 \end{aligned}$$

- Multiplicación:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \left(x^3 - 1\right)(x+1) \\ &= x^4 + x^3 - x - 1 \end{aligned}$$

- División: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3 - 1}{x+1}$

Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios defina $f+g$, $f-g$, $f\times g$ y $f\div g$

   a) $f(x)=x-5$ y $g(x)=x^2-1$

   b) $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+1$

   c) $f(x)=\sqrt{x-4}$ y $g(x)=x^2-4$

12.1 Composición de Funciones

La composición de funciones es una de las operaciones de las funciones, en la cual dados $f(x)$ y $g(x)$, se define la composición como $f(g(x))$ o $(f\circ g)(x)$ en donde el argumento de f es sustituido por la función $g(x)$.

Ejemplo 3:

Determinar la función resultante de $f(g(x))$ si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=25-x^2$

Solución

Se procede a realizar

$$f(x)=\sqrt{x}$$

luego

$$f(g(x))=\sqrt{25-x^2}$$

Determinar el dominio:

- El dominio de la función f se define para los $x\in\mathbb{R}^+$
- El dominio de la función g son todos los reales
- El dominio de la función $f\circ g$ se define como

$$25-x^2\geq 0$$
$$(5-x)(x+5)\geq 0$$

  por lo tanto el dominio de la función compuesta esta dado por

$$x\in[-5,5]$$

Ejemplo 4:

Determinar la función resultante de $f(g(x))$ si $f(x) = x$ y $g(x) = 2x+3$. Determinar el dominio de cada función y luego la de la función resultante.

Solución

Se procede a realizar

$$f(x) = x$$

luego

$$f(g(x)) = 2x + 3$$

- El dominio de f se define para todos los reales
- El dominio de g se define para todos los reales
- El dominio de $f \circ g$ se define para todos los reales.

Ejemplo 5:

Determinar la función resultante de $f(g(x))$ si $f(x) = x^2+2x+1$ y $g(x) = x-1$. Determinar el dominio de cada función y luego la de la función resultante.

Solución

Se procede a realizar

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

luego

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

- El dominio de la función f son todos los reales
- El dominio de la función g son todos los reales
- El dominio de la función $f \circ g$ son todos los reales

Ejercicios

En los siguientes ejercicios dadas las funciones f y g determine $f(g(x))$ y $g(f(x))$ y determine el dominio de las funciones resultantes.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$

3. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

12.2 Función par e Impar

1. Una función f es una función **par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$

2. Una función f es una función **impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo 6:

Realizar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y determinar si es par o impar

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2$$
$$f(x) = x^2$$

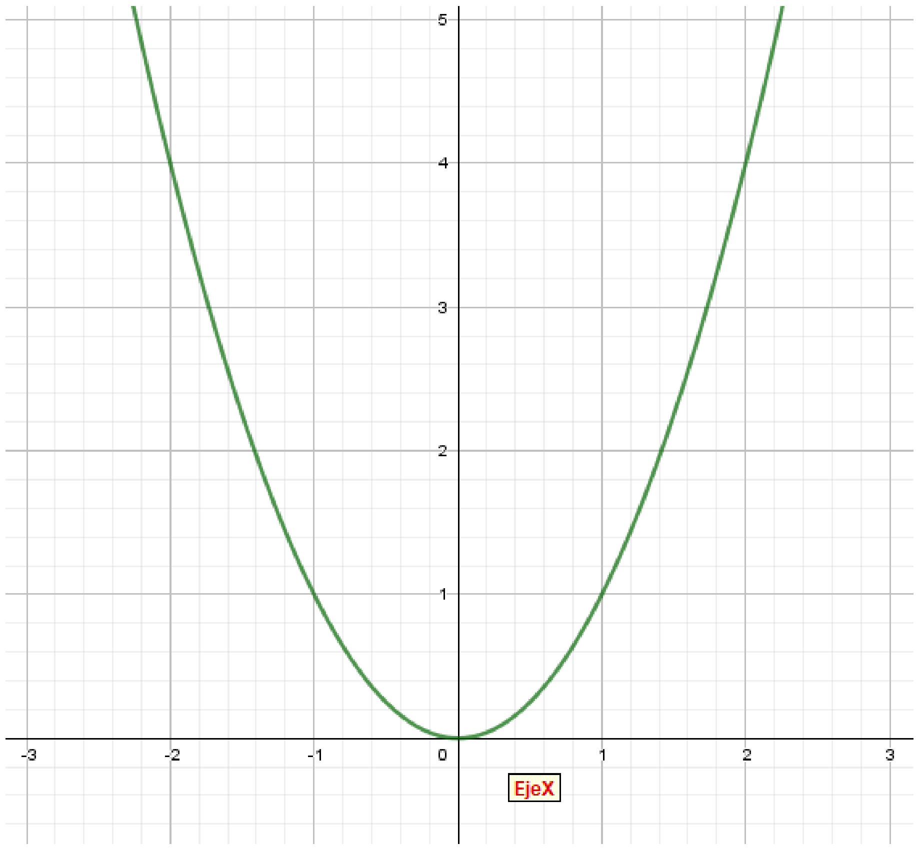

Figura 12.1: Gráfica de la función $f(x) = x^2$

Se observa que la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje y, por lo tanto es una función par.

Ejemplo 7:

Realizar la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 9x$$

y determinar si es par o impar

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x \\ f(-x) &= (-x)^3 - 9(-x) \\ &= -x^3 + 9x \\ &= -\left(x^3 - 9x\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

por lo tanto la función $f(x)$ es impar

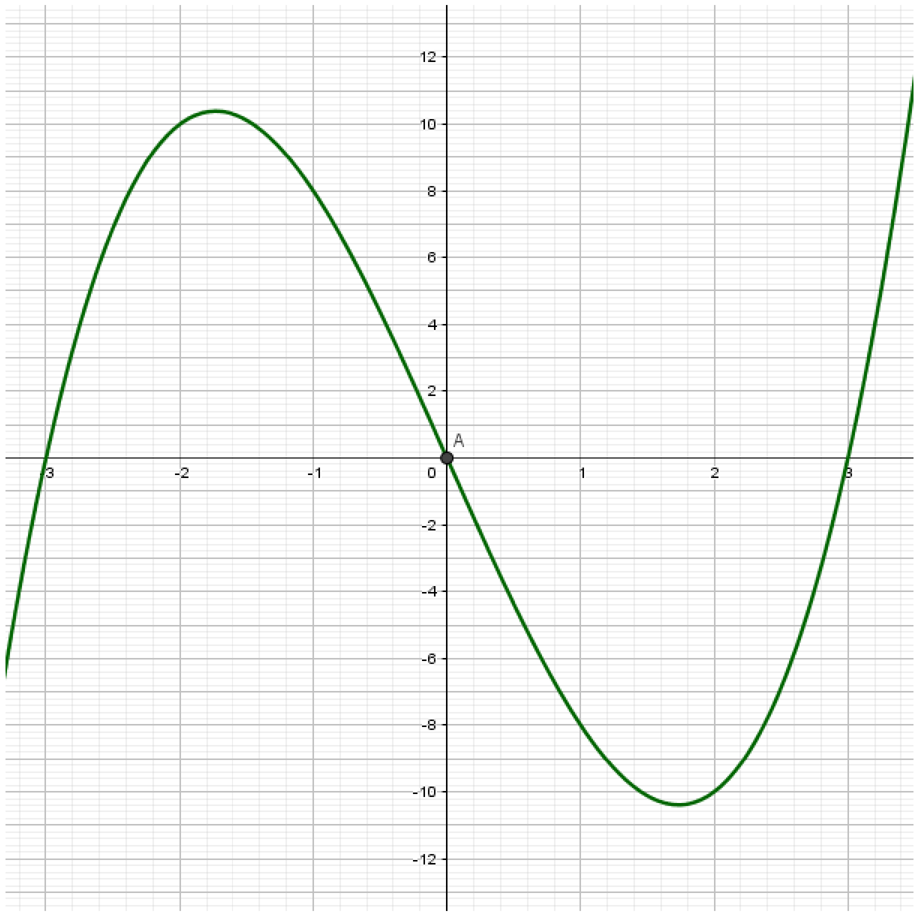

Figura 12.2: Gráfica de la función $\mathrm{f}(x) = x^3 - 9x$

Se observa que la gráfica es simétrica con respecto al origen, se dice que la función es impar.

Al calcular

$$\begin{aligned} f\left(-x\right) &= \left(-x\right)^3 - 9\left(-x\right) \\ &= -x^3 + 9x \\ -f\left(x\right) &= -\left(x^3 - 9x\right) \end{aligned}$$

lo que nos comprueba que la función es impar.

Ejemplo 8:

Realizar la gráfica de la función

$$f\left(x\right) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{25-x^2} \\
f(-x) &= \sqrt{25-(-x)^2} \\
&= \sqrt{25-x^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

por lo tanto es una función par.

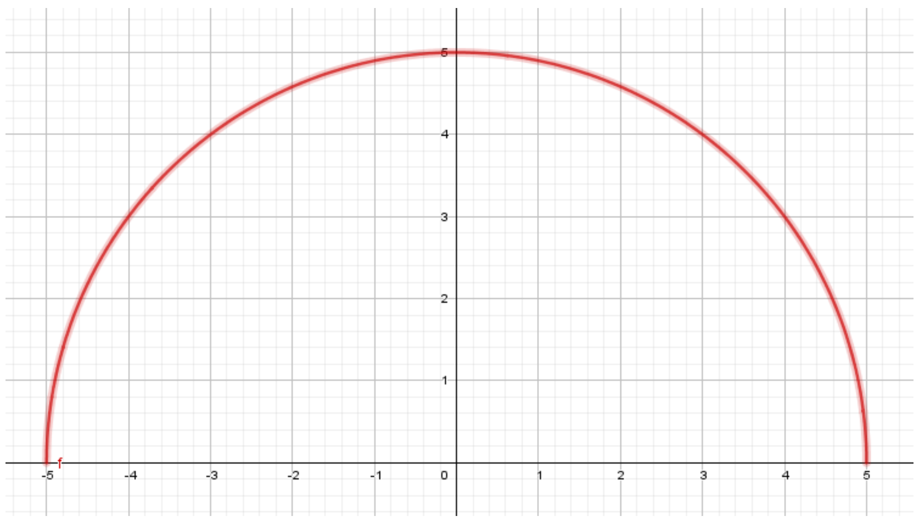

Figura 12.3: Gráfica de la función $\mathrm{f}(x) = \sqrt{25-x^2}$

Se observa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y, se dice que la función es par.

Al calcular

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \sqrt{25-(-x)^2} \\
f(x) &= \sqrt{25-x^2}
\end{aligned}
$$

lo cual nos confirma que la función es par.

Ejemplo 9:

Realizar la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 28x + 48$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 28x + 48 \\ f(-x) &= (-x)^4 - 3(-x)^3 - 24(-x)^2 + 28(-x) + 48 \\ &= x^4 + x^3 - 24x^2 - 28x + 48 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función no es par o impar

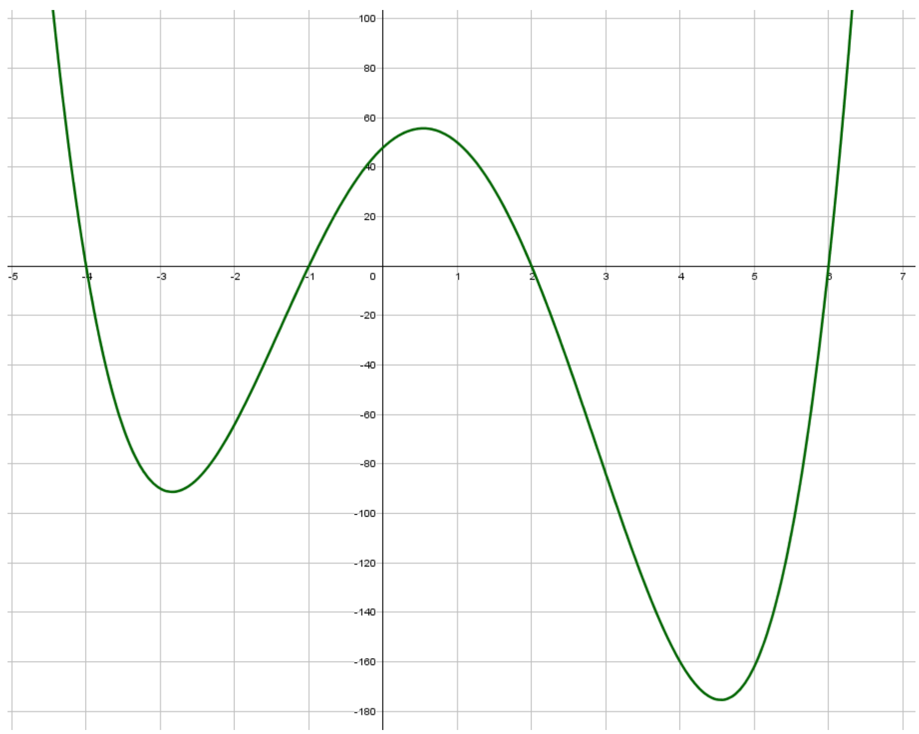

Figura 12.4: Gráfica de la función $\mathrm{f}(x) = x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 28x + 48$

❍ Al calcular $f(-x)$ tenemos

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 3(-x)^3 - 24(-x)^2 + 28(-x) + 48 \\ &= x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 28x + 48 \end{aligned}$$

lo cual no es ni $-f(x)$ ni $f(x)$, por lo tanto la función no es par ni impar.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios **determine analíticamente** si la función es par, impar o ninguna de esos dos tipos.

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$
3. $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$