Clase 10

Funciones Cónicas

Las funciones cónicas son las funciones que se generan a partir de las secciones cónicas de geometría analítica.

10.1 Circunferencia

La circunferencia que tiene la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ejemplo

La gráfica de la circunferencia

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura

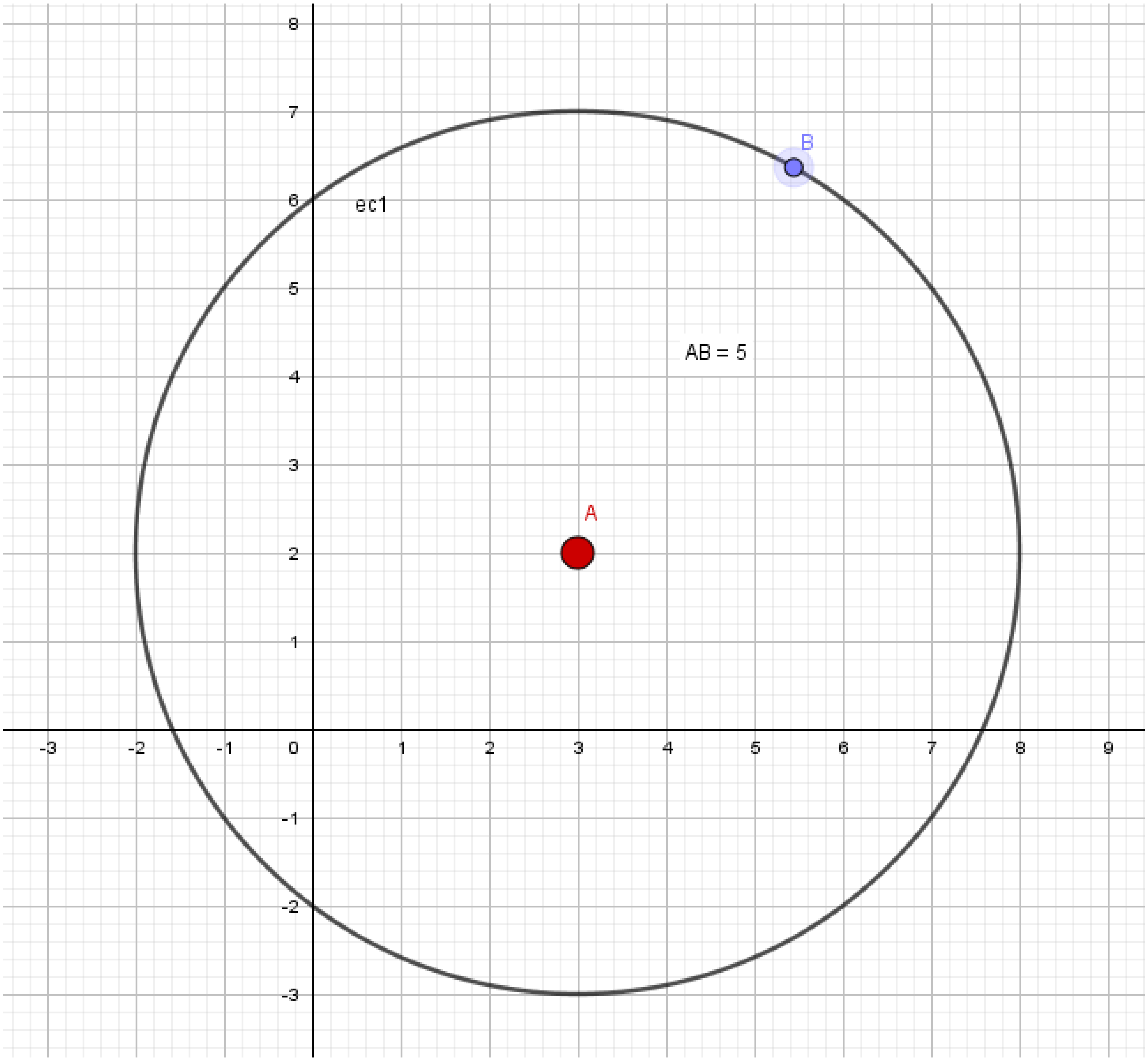

Figura 10.1: Gráfica de la circunferencia

10.2 ¿Cómo convertir la relación en una función?

Sea la ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

para convertir en función debemos despejar a y para eso hacemos lo siguiente

$$(y-k)^2 = r^2 - (x-h)^2$$
$$y - k = \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2}$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k$$

Ejemplo: Gráficar la función

$$y = \sqrt{9 - (x-2)^2} + 3$$

esta función tiene la forma

$$y = \sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k$$

donde $r = 3$, $h = 2$ y $k = 3$

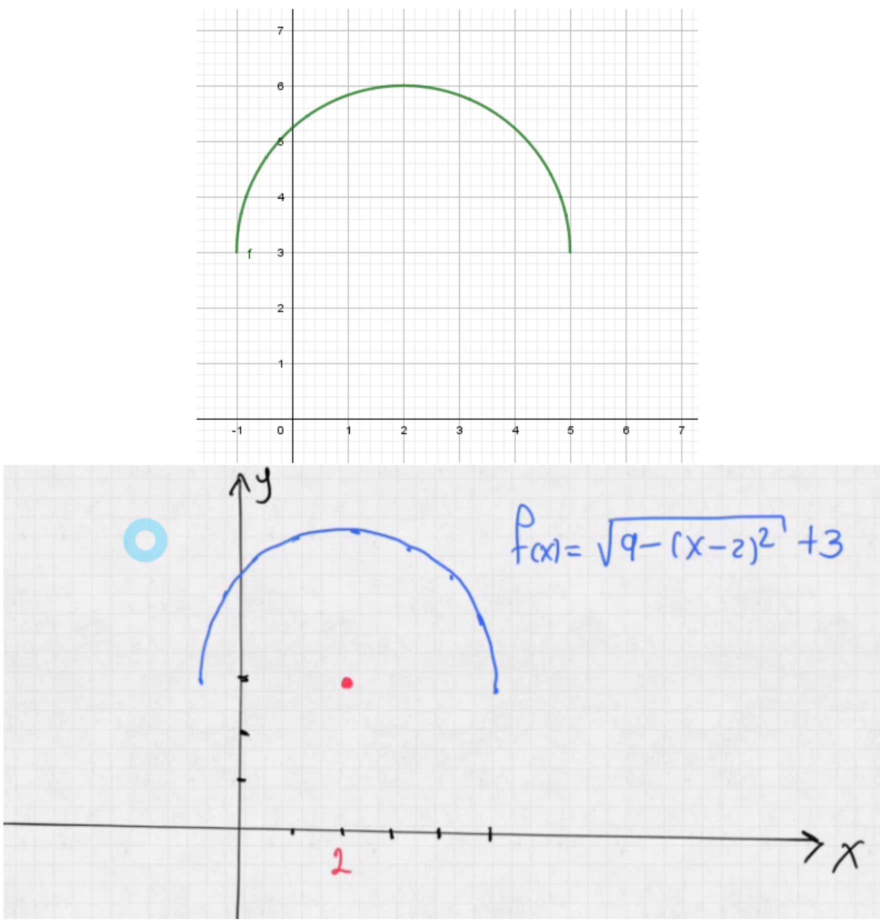

Figura 10.2: Gráfica de la función hecha manualmente y en Geogebra

10.3 Parábola

La ecuación de una parábola esta dada por

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

Ejemplo: Gráficar la parábola

$$(x-3)^2 = 12\,(y-1)$$

La gráfica de la ecuación sería la siguiente

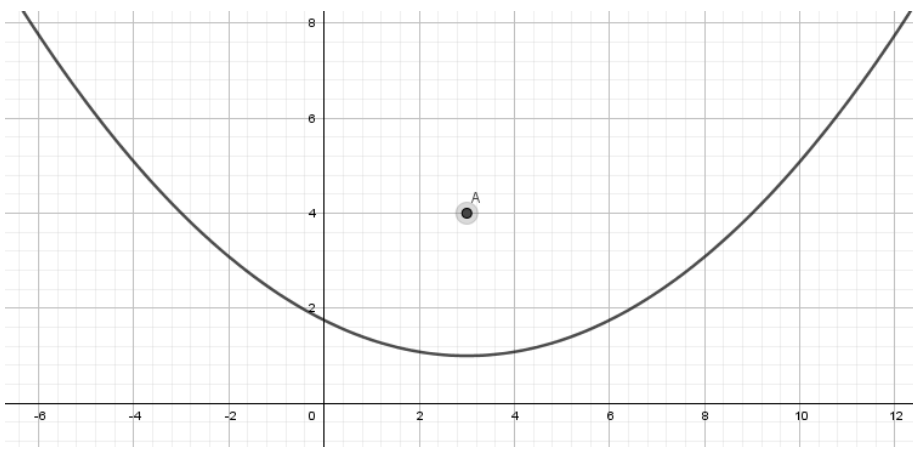

Figura 10.3: Gráfica de la ecuación

Ejemplo

Gráficar la función

$$(x-1)^2 = 8\,(y-2)$$

los parámetros son: $h = 1$, $k = 2$ y $4p = 8$ por lo tanto $p = 2$.

La gráfica de la función en geogebra y manualmente es la siguiente

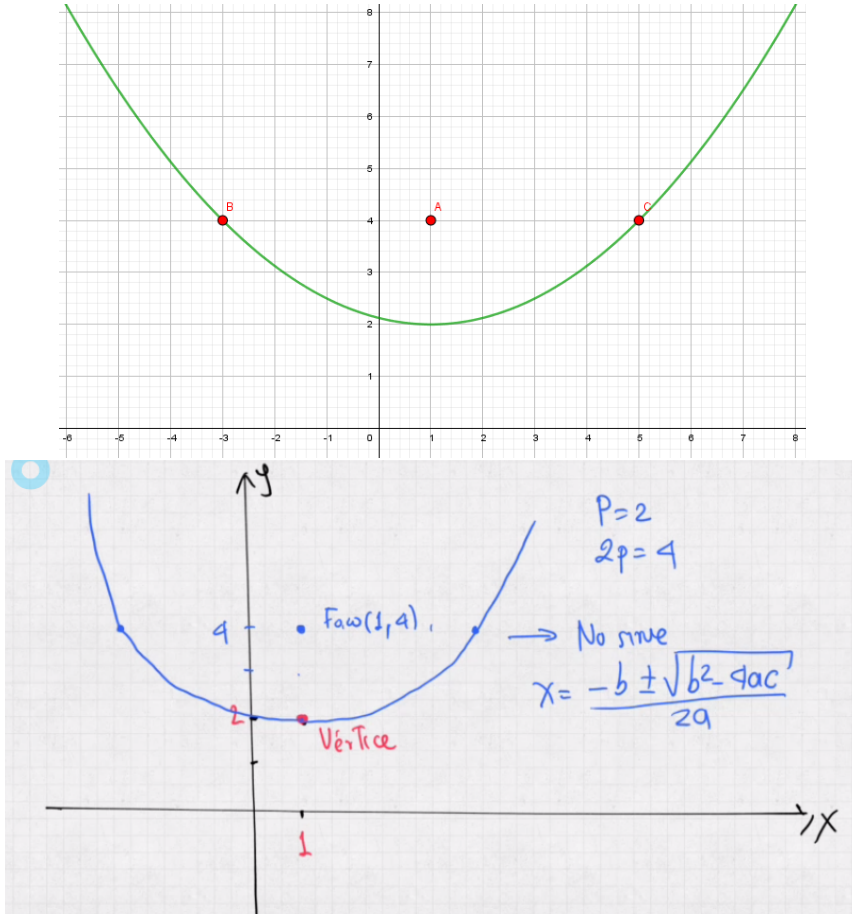

Figura 10.4: Gráfica de la función

10.4 Elipse

La elipse tiene la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

que se gráfica de la siguiente forma:

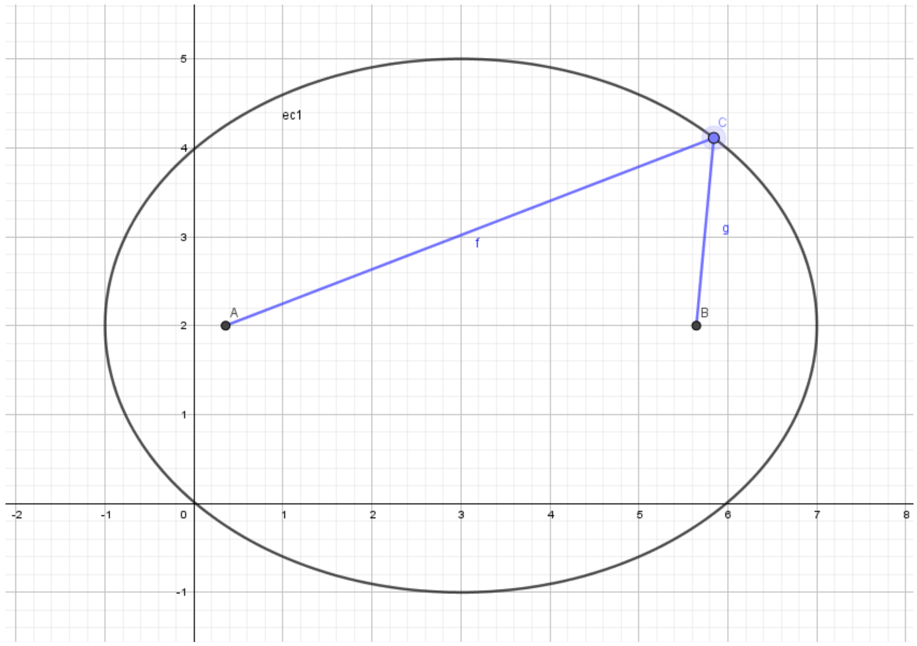

Figura 10.5: Gráfica de la elipse

Ejemplo

Graficar la función cónica dada por

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Para graficar en Geogebra se escribe el código (x-3)^2/16+(y-2)^2/9=1.

Para poder despejar esta función se debe despejar a y, así

$$\begin{aligned}
\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}&=1\\
\frac{(y-2)^2}{9}&=1-\frac{(x-3)^2}{16}\\
\frac{y-2}{3}&=\pm\sqrt{1-\frac{(x-3)^2}{16}}\\
\frac{y-2}{3}&=\pm\sqrt{\frac{16-(x-3)^2}{16}}\\
y-2&=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-(x-3)^2}\\
y&=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-(x-3)^2}+2
\end{aligned}$$

para graficar en Geogebra se escribe el siguiente código (3/4)*sqrt(16-(x-3)^2)+2.

De forma mas general dada la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

vamos a despejar y

$$\begin{aligned}
\frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1-\frac{(x-h)^2}{a^2}\\
\frac{(y-k)^2}{b^2} &= \frac{a^2-(x-h)^2}{a^2}\\
\frac{y-k}{b} &= \pm\sqrt{\frac{a^2-(x-h)^2}{a^2}}\\
y-k &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-h)^2}\\
y &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-h)^2}+k
\end{aligned}$$

Del ejemplo anterior

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-(x-3)^2}+2$$

se obtienen los valores $b=3$, $a=4$, $h=3$ y $k=2$

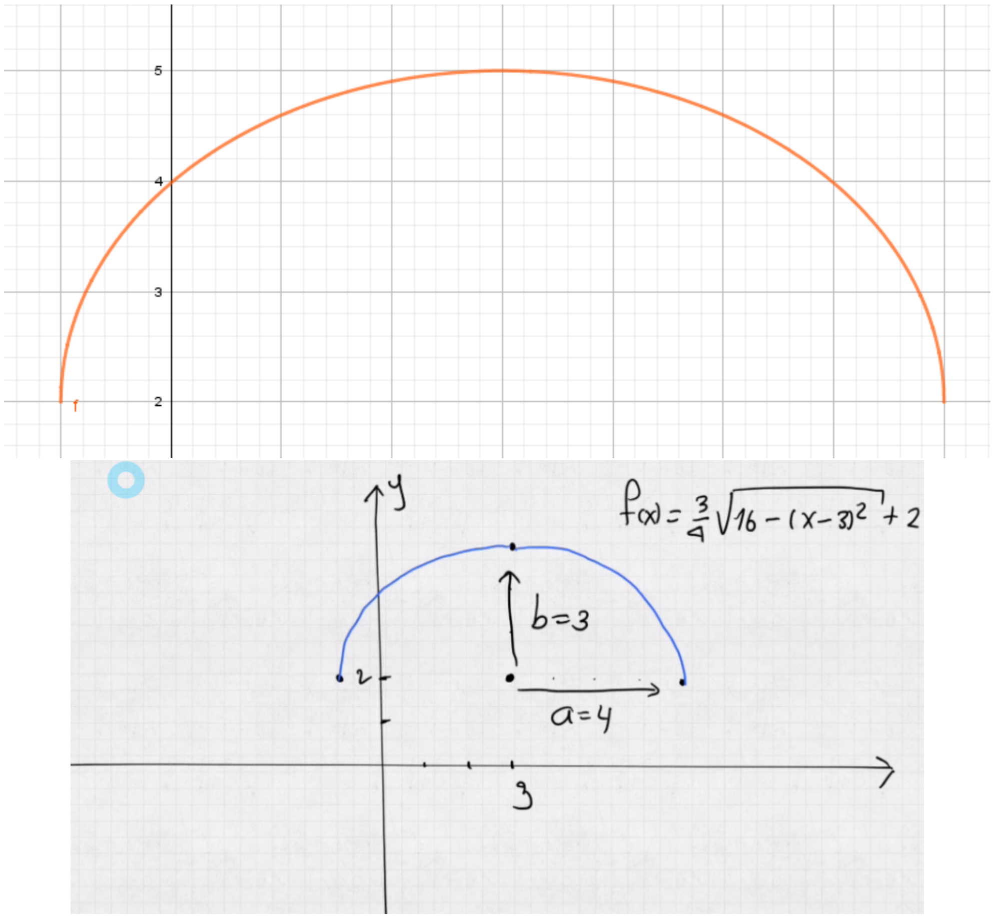

Figura 10.6: Gráfica de la función en Geogebra y Manualmente

10.5 Hipérbola

La hipérbola tiene la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

que se gráfica de la siguiente forma:

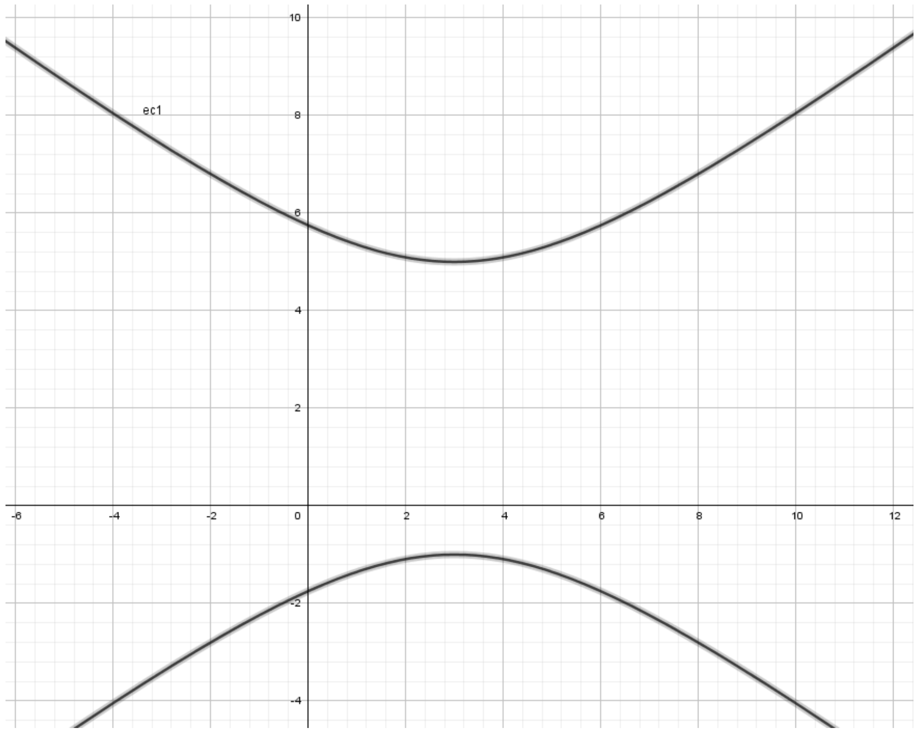

Figura 10.7: Gráfica de la Hipérbola

Ejemplo

Graficar la función cónica dada por

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

Para graficar en Geogebra se usa el siguiente código (y-2)^2/9-(x-3)^2/16=1

Para poder despejar esta función se debe despejar a y, así

$$\begin{aligned}
\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{16} &= 1\\
\frac{(y-2)^2}{9} &= 1+\frac{(x-3)^2}{16}\\
\frac{(y-2)^2}{9} &= \frac{16+(x-3)^2}{16}\\
\frac{y-2}{3} &= \sqrt{\frac{16+(x-3)^2}{16}}\\
y-2 &= \frac{3}{4}\sqrt{16+(x-3)^2}
\end{aligned}$$

De forma mas general se tiene que

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2+(x-h)^2}+k$$

del ejemplo anterior se tiene la función

$$y=\frac{3}{4}\sqrt{16+(x-3)^2}+2$$

de donde $b=3$, $a=4$, $h=3$ y $k=2$

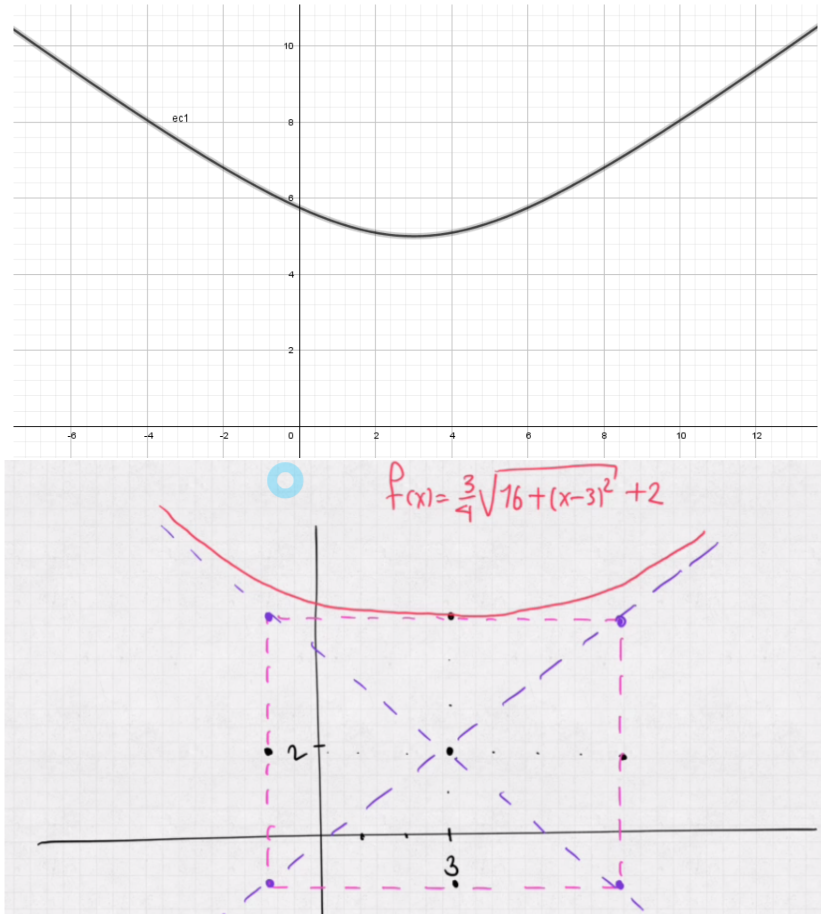

Figura 10.8: Gráfica de la función en Geogebra y Manualmente