Clase 22

Continuidad en un Intervalo y Teorema del Valor Intermedio

Definición 1:

Una función es continua en un intervalo abierto si y sólo si es continua en cada uno de los números del intervalo abierto

Ejemplo 1:

Sea la función

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

determinar si la función es continua en todo su dominio

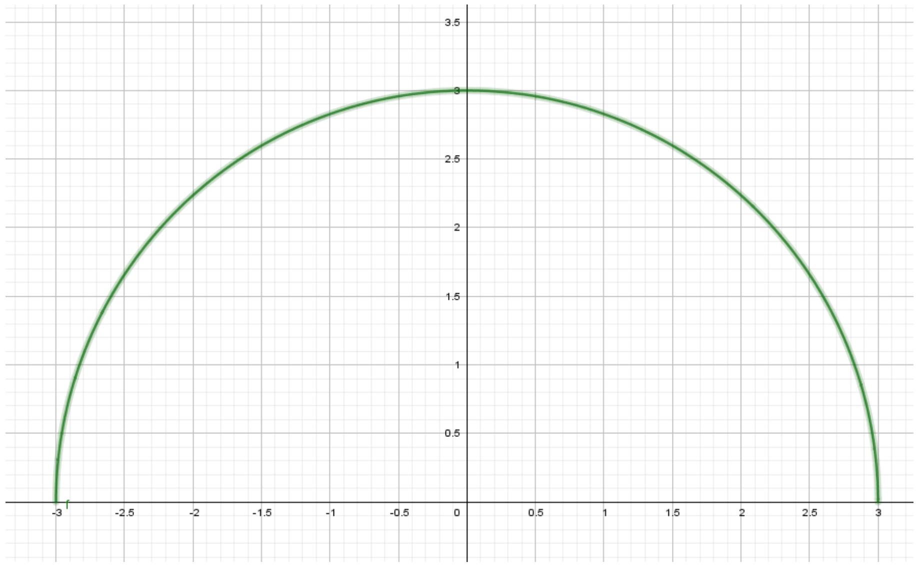

Figura 22.1: Gráfica de la función

El dominio de esta función esta definido para los $x \in [-3, 3]$. Habiamos visto antes que en esta función el límite de los extremos no existe, por lo tanto se hace necesario definir si la función es continua de forma lateral.

Definición 2:

Una función es continua de forma lateral si cumple tres condiciones:

1. $f(a)$ exista
2. $\lim\limits_{x\to a^L} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x\to a^L} f(x) = f(a)$

donde L es la lateralidad $+$ o $-$

Del ejemplo anterior la función es continua por la derecha de -3, puesto que

1. $f(-3) = \sqrt{9-(-3)^2} = 0$ por lo tanto **existe.**
2. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ existe y es igual a 0
3. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

Se dice que la función es continua por la derecha de $x = -3$.

1. $f(3) = \sqrt{9-(3)^2} = 0$ por lo tanto existe.
2. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ existe y es igual a 0

3. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$

Se dice que la función es continua por la izquierda.
Como ya demostramos que la función es continua por la derecha de -3 y continua por la izquierda de 3, la función es continua en el intervalo abierto $(-3, 3)$

Definición 3:

Una función en la cual el dominio contiene el intervalo cerrado $[a, b]$ es continua en ese intervalo si es continua en el intervalo abierto (a, b)

Del ejemplo anterior se demostro que la función es continua en cada número del intervalo abierto, además que es continua en los extremos -3 y 3 por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Teorema 1: Teorema del Valor Intermedio

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ existe un número c que pertenece al intervalo, en la cual se cumple $f(c) = k$

Ejemplo 2:

Dada la función

$$f(x) = -\frac{1}{5}\left(x^2 - 3x - 10\right)$$

- Determine el intervalo para el cual la función es mayor que cero.
- Determine si el teorema del valor intermedio se cumple para $k = 1$ trazando la gráfica de $y = 1$
- Calcule el valor de c

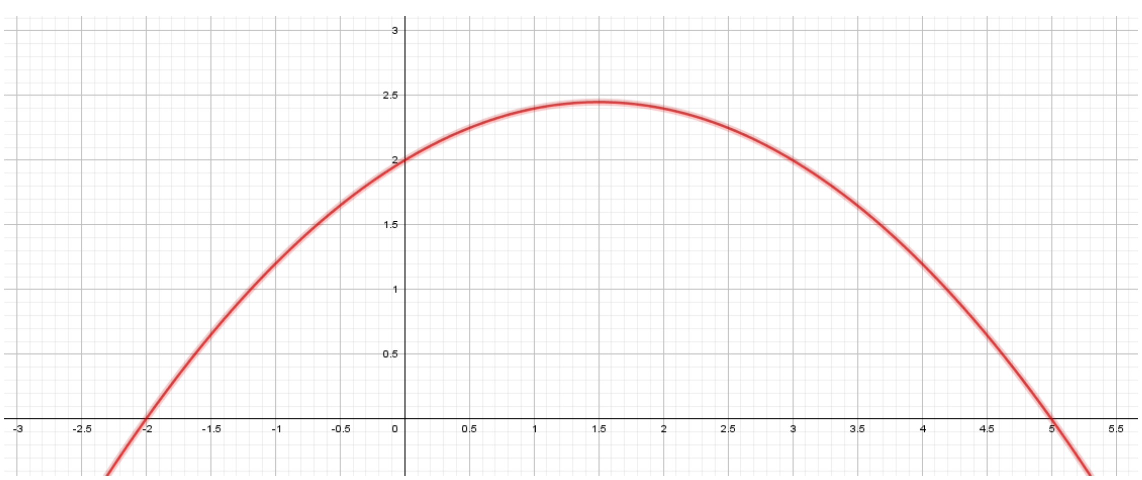

Figura 22.2: Gráfica de la función

Para encontrar el intervalo tenemos que factorizar la función.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}\left(x^2-3x-10\right)&=0\\ x^2-3x-10&=0\\ (x+2)(x-5)&=0\end{aligned}$$

luego los cortes son $x=-2$ y $x=5$. Luego el intervalo donde la función es positiva es en $[-2,5]$.

Para determinar el teorema del valor intermedio, graficamos la recta $y=1$ y resolvemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}\left(x^2-3x-10\right)&=1\\ x^2-3x-10&=-5\\ x^2-3x-5&=0\end{aligned}$$

resolvemos la ecuación cuadrática (fórmula general de segundo grado)

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-5)}}{2(1)}\\ x&=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\end{aligned}$$

por lo tanto el valor de c es el siguiente

$$c=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

la función se puede factorizar como

$$\begin{aligned}\left(x=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x=\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)&=0\\ (x\approx 1.19)(x\approx -4.19)&=0\\ (x-1.19)(x+4.19)&\end{aligned}$$

y tiene dos valores ya que $y=1$ corta a la gráfica en dos puntos como se muestra en la siguiente figura

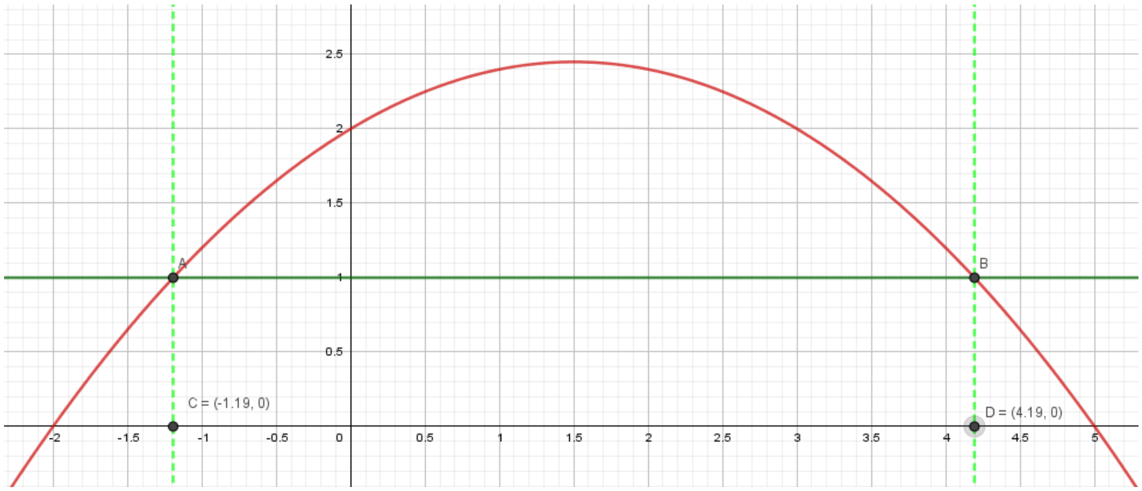

Figura 22.3: Gráfica de la función y $y = 1$