Índice general

Clase 7
Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas son seis (6)

- Seno que se escribe matemáticamente como $f(x) = \sin(x)$
- Coseno que se escribe matemáticamente como $f(x) = \cos(x)$
- Tangente que se escribe matemáticamente como $f(x) = \tan(x)$
- Cotangente que se escribe matemáticamente como $f(x) = \cot(x)$
- Secante que se escribe matemáticamente como $f(x) = \sec(x)$
- Cosecante que se escribe matemáticamente como $f(x) = \csc(x)$

7.1 ¿Cómo graficar una función trigonométrica?

Para graficar una función trigonométrica se deben tener en claro algunos conceptos importantes:

7.1.1 Amplitud

La amplitud como su nombre lo indica, determina la medida de las ondas de la función trigonométrica, medida desde un máximo hasta un mínimo de forma vertical.

7.1.2 Periodo

El periodo determina en que intervalo estará graficado un **ciclo completo** de la función

7.1.3 Desfasamiento

El desfasamiento indica cuántas unidades angulares se desfasará la función trigonométrica sobre el eje x

7.1.4 Desplazamiento

El desplazamiento **(desplazamiento vertical)** mueve la gráfica hacia arriba o hacia abajo dependiendo de su valor.

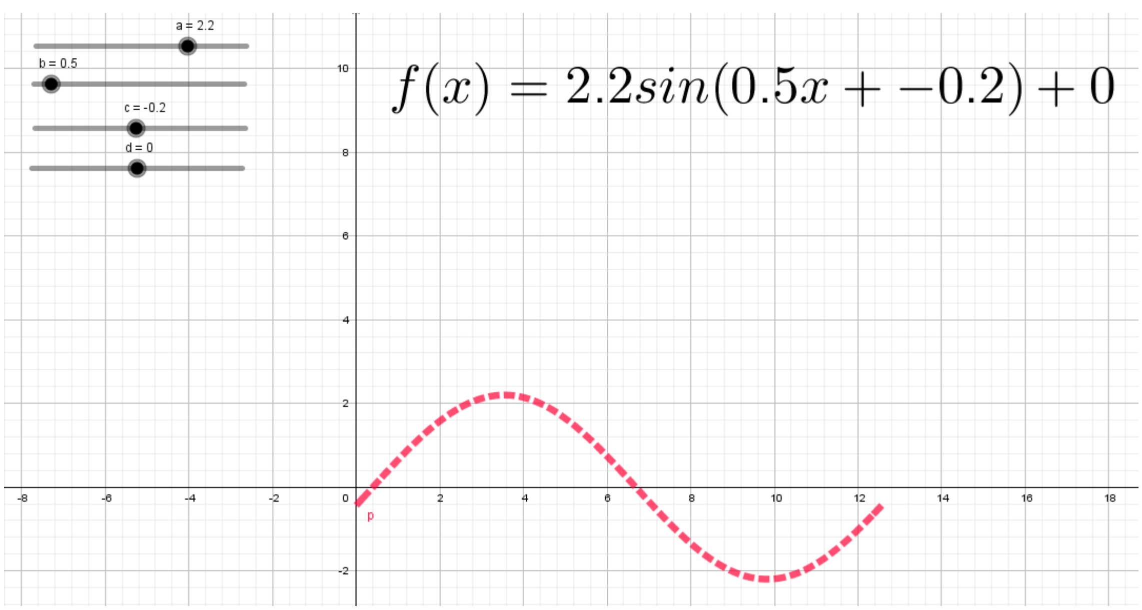

Figura 7.1: Gráfica de la función trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi]$

7.2 Función Trigonométrica Seno

Ejemplo: Graficar la función trigonométrica

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + 1$$

Solución
Sacar los datos

- **Amplitud** es 3
- **Periodo**: Para la función seno se sabe que un ciclo completo se obtiene de 0 a 2π, de tal manera que para encontrar el nuevo periodo se debe calcular mediante la siguiente formula

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{b} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \end{aligned}$$

- **Desfasamiento**: Se obtiene de la función que tiene la forma

$$f(x) = a\sin(bx - c) + d$$

  en el caso de la función del ejemplo hacemos

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + 1$$

  - Si el signo de c es negativo el desplazamiento horizontal es hacia la derecha.
  - Si el signo de c es positivo el desplazamiento horizontal es hacia la izquierda

- **Desplazamiento** es una unidad hacia arriba.

La gráfica de la función hecha de forma manual es la siguiente, donde la función terminal es la de color morado.

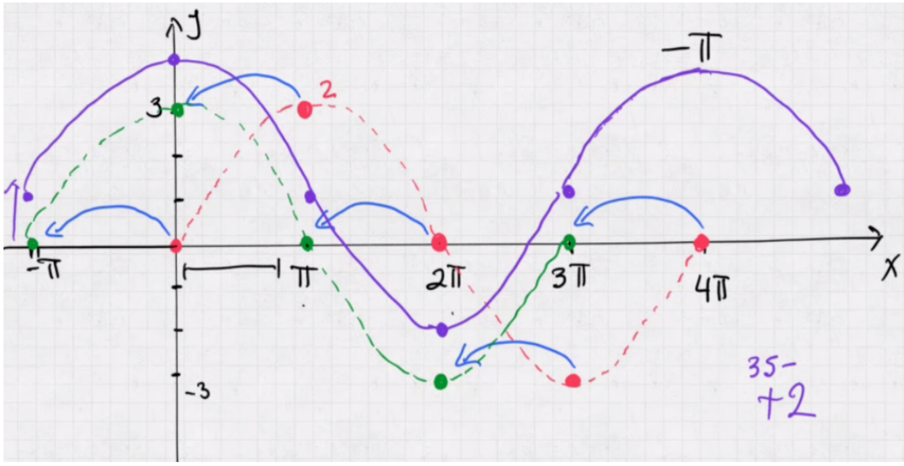

Figura 7.2: Gráfica de la Función hecha a Mano

7.3 Función Coseno

Ejemplo: Graficar la función trigonométrica

$$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

Solución

- **Amplitud**: Se determinar por el valor de $a = 4$
- **Periodo**: Se determina por la fórmula

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{b} \\ &= \frac{2\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

- **Desfasamiento**: Se determinar por el valor de $c = \dfrac{\pi}{4}$
- **Desplazamiento**: Se determinar por el valor de $d = -1$

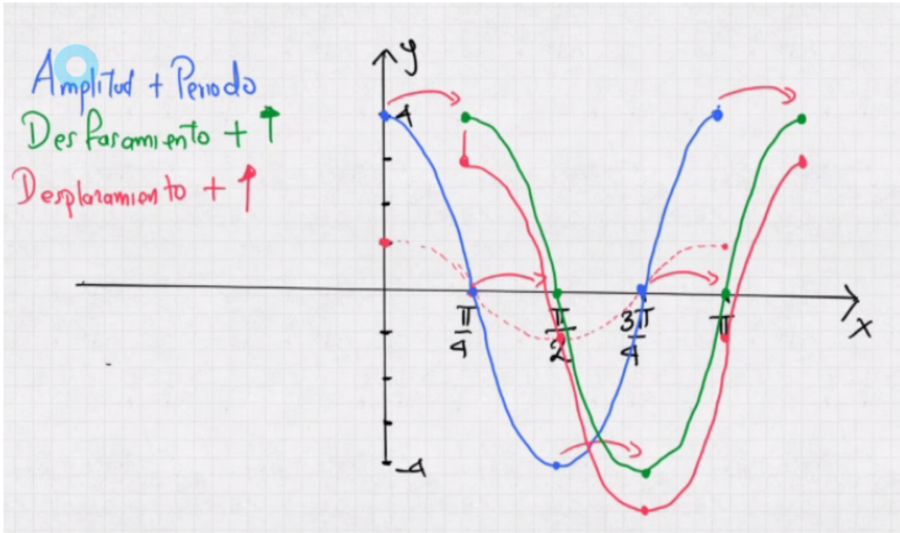

Figura 7.3: Gráfica de la función trigonométrica coseno hecha manualmente

7.4 Función Trigonométrica Cosecante

Se define la función cosecante como

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Ejemplo

Graficar la función

$$f(x) = \frac{3}{2} \csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Solución

- **Amplitud**: $\frac{3}{2}$
- **Periodo** se calcula usando la fórmula

$$P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

- **Desfasamiento** es $c = \frac{\pi}{2}$
- **Desplazamiento** Vertical es $d = \frac{1}{2}$

7.4.1 ¿Cómo encontrar las asíntotas?

Sabemos que

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

entonces si seno se hace cero aparece una asíntota, de tal forma que debemos determinar cuando

$$g(x) = \sin(bx + c)$$

se hace cero, entonces

$$\begin{aligned} \sin(bx + c) &= 0 \\ bx + c &= \arcsin(0) \\ bx &= -c \\ x &= -\frac{c}{b} \end{aligned}$$

y se repite cada medio periodo así que

$$P = \frac{\frac{2\pi}{b}}{2} = \frac{\pi}{b} n$$

donde n es el incrementador de tal manera que la ecuación de las asíntotas esta en

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{c}{b} + \frac{n\pi}{b} \\ &= \frac{n\pi - c}{b} \end{aligned}$$

7.5 Ejercicios

Graficar las siguientes funciones trigonométricas

1. $f(x) = 2\sin(x + \pi)$

a) Amplitud: 2

b) Periodo: 2π

c) Desfasamiento: $-\pi$

d) Desplazamiento: 0

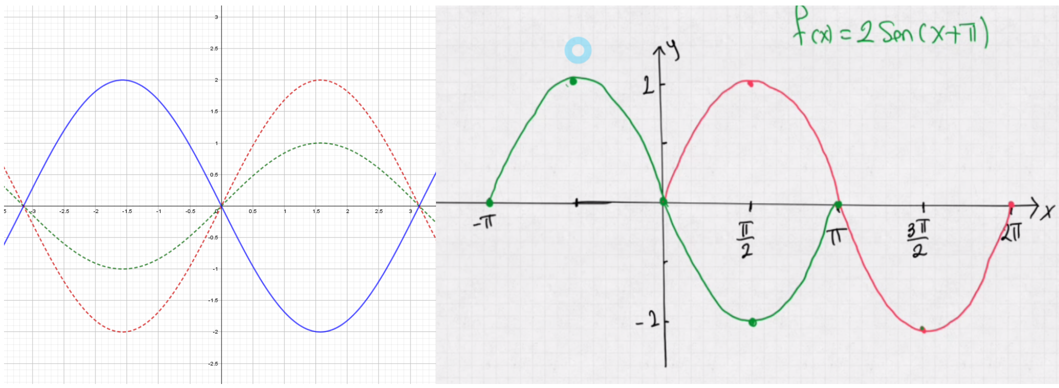

Figura 7.4: Gráfica del problema hecha manualmente y en Geogebra

e)

2. $f(x) = -3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$

a) Amplitud: -3

b) Periodo: $P = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

c) Desfasamiento: $\dfrac{\pi}{3}$

d) Desplazamiento: -1

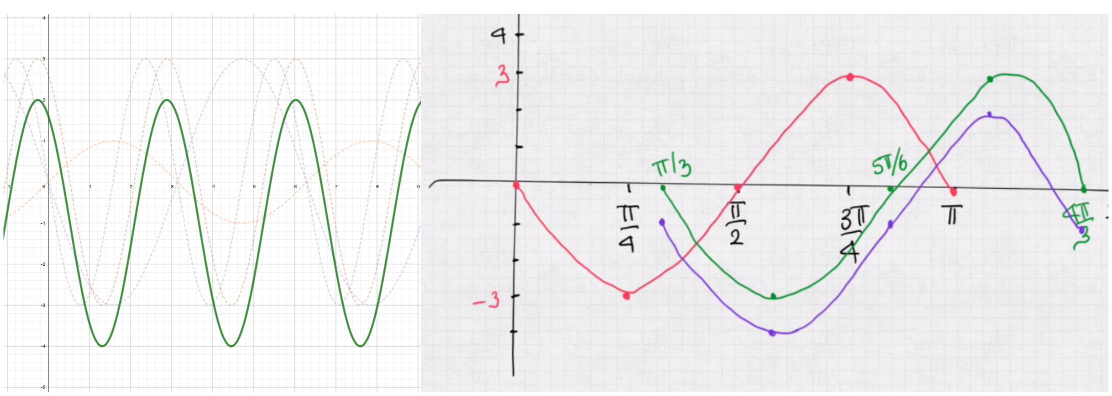

Figura 7.5: Gráfica de la Función

3.

4. $f(x) = 2\cos(x+\pi)$

5. $f(x) = -3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

6. $f(x) = 2\sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

   a) Amplitud: 2
   b) Periodo: $P = 2\pi$
   c) Desfasamiento: $-\frac{\pi}{3}$
   d) Desplazamiento: -1

7. Para determinar las asíntotas tenemos

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

cuando el argumento es $bx + c$

$$\sec(bx+c) = \frac{1}{\cos(bx+c)}$$

en esta función racional

$$\begin{aligned}
\cos(bx+c) &\neq 0 \\
bx + c &\neq \arccos(0) \\
bx + c &\neq \frac{\pi}{2} \\
bx &\neq \frac{\pi}{2} - c \\
bx &\neq \frac{\pi - 2c}{2} \\
x &\neq \frac{\pi - 2c}{2b}
\end{aligned}$$

luego como la asíntota se repite cada medio periodo

$$P = \frac{\frac{2\pi}{b}}{2} = \frac{2\pi}{2b}$$

el cual multiplicamos por n para que genere todas las asíntotas, así la fórmula para generar todas las asíntotas es

$$\begin{aligned}
x &\neq \frac{\pi - 2c}{2b} + \frac{2\pi n}{2b} \\
x &\neq \frac{2\pi n + \pi - 2c}{2b}
\end{aligned}$$

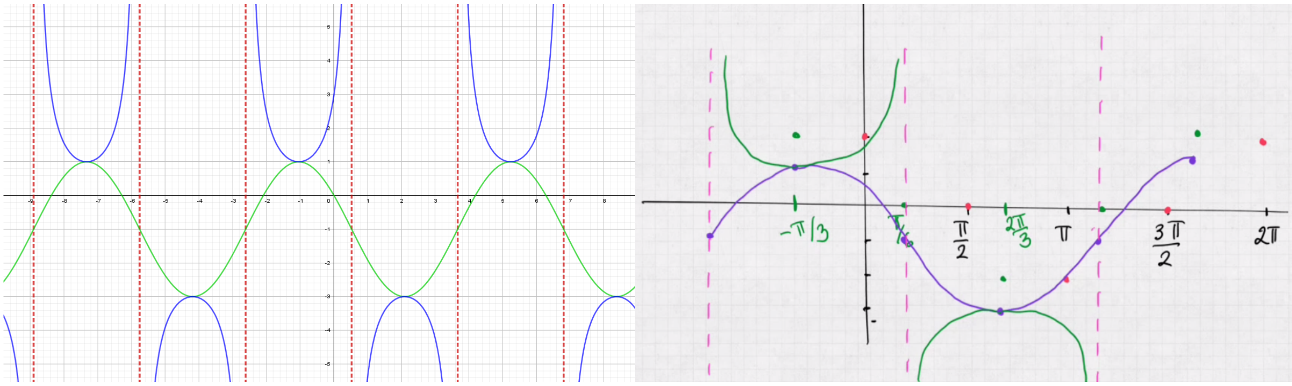

Figura 7.6: Gráfica de la función de forma manual y en Geogebra

8. $f(x) = -2\csc\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$