Clase 4

Ecuación Diferencial Lineal

Toda la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} + p\left(t\right)y = q\left(t\right) \tag{4.1}$$

se denomina ecuación diferencial lineal de **primer orden**.

Esta ecuación se resolvio con anterioridad usando las ecuaciones diferenciales exactas y también por separación de variables, pero estas ecuaciones tienen un tratamiento diferente y se resuelven mediante el procedimiento que se expondrá a continuación. En primer lugar llegaremos a la solución general a través de un procedimiento un poco diferente al enunciado de la clase anterior, pero en la práctica se espera que el estudiante no haga uso de la fórmula, y en lugar de ello, desarrolle los pasos que llevan a la solución, lo que a menudo reduce el proceso de simplificación al tiempo que se obtiene una mejor aprehensión del método.

Por el método de las ecuaciones diferenciales exactas se tiene:

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial lineal:

$$y' + p\left(t\right)y = q\left(t\right)$$

Solución: Reescribiendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + p(t)\,y &= q(t) \\ \frac{dy}{dt} &= q(t) - p(t)\,y \\ dy &= [q(t) - p(t)\,y]\,dt \\ dy &= -[p(t)\,y - q(t)]\,dt \\ [p(t)\,y - q(t)]\,dt - dy &= 0 \end{aligned}$$

Se observa que

- $M(t,y) = p(t)\,y - q(t)$
- $N(t,y) = 1$

Esta ecuación no es exacta, ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &\neq \frac{\partial N}{\partial t} \\ p(t) &\neq 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula para obtener el factor integrante con respecto a N se tiene

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{p(t) - 0}{1} = p(t)$$

encontes el **factor integrante** es $e^{\int p(t)dt}$que al multiplicar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt}e^{\int p(t)dt} + p(t)\,ye^{\int p(t)dt} = q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

ecuación que se transforma en

$$\frac{d}{dt}\left[ye^{\int p(t)dt}\right] = q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

e integrando en ambos lados se obtiene la solución implicita:

$$ye^{\int p(t)dt} = \int q(t)\,e^{\int p(t)dt} + C$$

luego

$$y = e^{-\int p(t)dt}\left[\int q(t)\,e^{\int p(t)dt} + C\right]$$

Para comenzar, se hace necesario verificar cierta derivada exacta, que se convierte en la **clave** de la solución de la ecuación descrita.

Primero verificamos que la expresión $\left(\frac{dy}{dt}+p(t)\,y\right)e^{\int p(t)dt}$ es una derivada exacta. Se usa la regla de la cadena y en efecto

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dt}+p(t)\,y\right)e^{\int p(t)dt} &= e^{\int p(t)dt}\frac{dy}{dt}+e^{\int p(t)dt}p(t)\,y\\ &= ye^{\int p(t)}p(t)+\frac{dy}{dt}e^{\int p(t)dt}\\ &= \frac{d}{dt}\left(y\cdot e^{\int p(t)dt}\right)\end{aligned}$$

concluimos que

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{\int p(t)dt}\right)=\left(\frac{dy}{dt}+p(t)\,y\right)e^{\int p(t)dt} \tag{4.2}$$

Una vez comprobado este resultado multiplicamos la ecuación diferencial lineal por el factor de integración

$$e^{\int p(t)dt}\left(\frac{dy}{dt}+p(t)\,y\right)=q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

del resultado 4.2 se reemplaza el lado izquierdo y tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{\int p(t)dt}\right)=q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

integramos en ambos lados

$$\begin{aligned}\int\frac{d}{dt}\left(ye^{\int p(t)dt}\right) &= \int q(t)\,e^{\int p(t)dt}dt\\ ye^{\int p(t)dt} &= \int q(t)\,e^{\int p(t)dt}dt+C\\ y &= e^{-\int p(t)dt}\left[\int q(t)\,e^{\int p(t)dt}dt+C\right]\end{aligned}$$

este resultado presenta la solución de cualquier ecuación lineal.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$t^2y'+t\,(t+2)\,y=e^t$$

Solución: Dividimos toda la ecuación entre t^2

$$y'+\frac{t+2}{t}y=\frac{e^t}{t^2}$$

identificamos que $p(t) = \dfrac{t+2}{t}$ con factor integrante

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{t+2}{t} dt} &= e^{\int \left(1+\frac{2}{t}\right) dt} \\ &= e^{t+2\ln|t|} \\ &= e^t e^{\ln\left|t^2\right|} \\ &= t^2 e^t \end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante

$$t^2 e^t \left[\frac{dy}{dt} + \frac{t+2}{t} y\right] = \frac{e^t}{t^2} \cdot t^2 e^t$$

aplicando el resultado 4.2 tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(y t^2 e^t\right) = e^{2t}$$

integramos en ambos lados

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}\left(y t^2 e^t\right) &= \int e^{2t} dt \\ y t^2 e^t &= \frac{1}{2} e^{2t} + C \end{aligned}$$

despejamos a y

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{2t}}{e^t} + \frac{C}{e^t}\right) \\ y &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{2} e^t + C e^{-t}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$t y' + (1+t)\, y = e^t \sin(2t)$$

Solución: Dividimos toda la ecuación por t

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1+t}{t} y = \frac{e^t \sin(2t)}{t}$$

identificamos a $p(t) = \dfrac{1+t}{t}$ con factor integrante

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{1+t}{t} dt} &= e^{\int \left(1+\frac{1}{t}\right) dt} \\ &= e^{t+\ln|t|} \\ &= e^t e^{\ln|t|} \\ &= t e^t \end{aligned}$$

multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante

$$te^t\left(\frac{dy}{dt}+\frac{1+t}{t}y\right)=\frac{e^t\sin(2t)}{t}\cdot te^t$$

aplicamos el resultado de transformación

$$\frac{d}{dt}\left(yte^t\right)=e^{2t}\sin(2t)$$

Integramos en ambos lados

$$\begin{aligned}\int\frac{d}{dt}\left(yte^t\right)&=\int e^{2t}\sin(2t)\,dt\\ yte^t&=\int e^{2t}\sin(2t)\,dt+C\end{aligned}$$

Se propone como ejercicio resolver la integral.

Finalmente

$$yte^t=\frac{e^{2t}}{4}(\sin 2t-\cos 2t)+C$$

despejando a y se tiene

$$y=\frac{e^t}{4t}(\sin 2t-\cos 2t)+\frac{C}{x}e^{-x}$$