Clase 5

Ecuación Diferencial de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es un caso especial de la ecuación **diferencial no lineal**, que mediante una sustitución adecuada se transforma en una ecuación diferencial lineal, la cual se puede resolver por el método visto en la clase anterior. Al final se devuelve la sustitución como es costumbre.

Definición: Toda ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t)\,y^n,\ \ n \in \mathbb{R} \neq 0, 1$$

se conoce como ecuación diferencial de Bernoulli.

Para transformar la ecuación de Bernoulli en una lineal, sigamos los siguientes pasos:

- Multiplicamos la ecuación por y^{-n} esto nos da

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)\,y^{1-n} = q(t)$$

- Se hace la sustitución $z = y^{1-n}$, que derivando se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dt}$$

de donde $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dt} = y^{-n}\dfrac{dy}{dt}$

❍ Se reemplaza en la ecuación inicial

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dt}+p(t)\,z&=q(t)\\ \frac{dz}{dt}+(1-n)\,p(t)\,z&=(1-n)\,q(t)\end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt}=y\left(ty^3-1\right)$$

Solución: Operando y reordenando la ecuación se tiene

$$\frac{dy}{dt}+y=ty^4$$

la cual es una ecuación de Bernoulli. Luego se divide toda la ecuación por y^4

$$y^{-4}\frac{dy}{dt}+y^{-3}=t$$

se toma la sustitución

$$\begin{aligned}z&=y^{1-4}\\ &=y^{-3}\\ \frac{dz}{dt}&=-3y^{-4}\frac{dy}{dt}\\ -\frac{1}{3}\frac{dz}{dt}&=y^{-4}\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

al reemplazar en la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\frac{dz}{dt}+z&=t\\ \frac{dz}{dt}-3z&=-3t\end{aligned}$$

luego $p(t)=-3$ entonces el factor integrante es $e^{-\int 3dt}=e^{-3t}$. Multiplicamos la ecuación diferencial lineal por el factor integrante

$$\frac{d}{dt}\left(ze^{-3t}\right)=-3te^{-3t}$$

integramos en ambos lados

$$\begin{aligned}\int\frac{d}{dt}\left(ze^{-3t}\right)&=-3\int te^{-3t}dt\\ ze^{-3t}&=-3\end{aligned}$$

Sea

$$u = t \Rightarrow du = dt$$
$$dv = e^{-3t}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3t}$$

al hacer la integral por parte se tiene

$$ze^{-3t} = -3\left(-\frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3}\int e^{-3t}dt\right)$$
$$ze^{-3t} = te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + C$$

se devuelve la sustitución

$$y^{-3}e^{-3t} = te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + C$$
$$y^{-3} = t - \frac{1}{3} + Ce^{3t}$$

despejando a y

$$\frac{1}{y^3} = \left(t - \frac{1}{3} + Ce^{3t}\right)$$
$$y^3 = \frac{1}{t - \frac{1}{3} + Ce^{3t}}$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{t - \frac{1}{3} + Ce^{3t}}}$$