Clase 1
Ecuaciones Separables

En el estudio del Cálculo Diferencial se aprendio que por ejemplo, al derivar la función

$$y = x^2$$

se tiene como resultado

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

conocida esta derividación como **derivación implicita**, donde $\frac{dy}{dx}$ corresponde a la derivada de la función con respecto a x.

Observemos en la siguientes función

$$y = x^2 + 2x + 1$$

que

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

luego si multiplicamos en ambos lados por dx

$$dy = (2x + 2)\, dx$$

y si se integra en ambos lados

$$\int dy = \int (2x + 2)\, dx$$
$$y = x^2 + 2x + C$$

este proceso en **Ecuaciones Diferenciales** se conoce con el nombre de ecuaciones separables.

Con esta introducción, definamos que es una Ecuación Diferencial.

Definición: Una ecuación que incluya derivadas o diferenciales de una función se llama ecuación diferencial. Si las derivadas son ordinarias o parciales se clasifican como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o Ecuaciones Diferenciales Parciales.

El Orden de una ecuación diferencial está dado por el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Así para una función $y = f\left(t\right)$ en donde se reconoce a t como variable independiente y a y como variable dependiente, una ecuación diferencial ordinaria de orden n tiene la forma

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

donde

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$$

1.1 Ecuaciones de Variables Separables

Tal como vimos en el primer ejemplo, cuando se derivan funciones explicitas, los términos de y y t quedan separados, y son a estas ecuaciones a las que llamaremos ecuaciones de variables separables.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden más sencillas son las de variables separables. Estas adoptan la forma

$$M\left(t\right)dt + N\left(y\right)dy = 0$$

y para encontrar la función y , que es la solución de la Ecuación Diferencial solo basta con integrar cada término de la Ecuación. Así,

$$\int M\left(t\right)dt + \int N\left(y\right)dy = C$$

donde C se llama constante de integración.

Cuando se soluciona la Ecuación Diferencial, a veces resulta una solución explicita,en la práctica a menos de que se diga lo contrario, no se piden soluciones explicitas.

Ejemplo: Encontrar la solución de la ecuación lineal de primer orden:

$$y' + p(t)\,y = 0$$

Solución: Este es un caso particular de las ecuaciones de variables separables y además de la ecuación lineal, que será estudiada mas adelante.

Para solucionar esta ecuación se deben separar las variables, sabiendo que $y' = \dfrac{dy}{dt}$, así

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)\,y \\ \frac{dy}{y} &= -p(t)\,dt \\ \frac{dy}{y} + p(t)\,dt = 0\end{aligned}$$

esta última ecuación toma la forma de

$$M(t)\,dt + N(y)\,dy = 0$$

donde $M(t) = p(t)$ y $N(y) = \dfrac{1}{y}$, pero para resolver con más facilidad la ecuación se usará su forma previa

$$\frac{dy}{y} = -p(t)\,dt$$

integrando en ambos lados se tiene

$$\ln|y| = -\int p(t)\,dt + C$$

para despejar a y se aplica la función exponencial

$$e^{\ln|y|} = e^{-\int p(t)dt + C}$$

de donde

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(t)dt} e^{c} \\ y &= Ce^{-\int p(t)dt} \end{aligned}$$

de tal manera que si encontramos ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' + p(t)\,y = 0$$

ecuación a la que seguiremos llamando **Ecuación Lineal Homogenea**, sabremos que la solución es

$$y = Ce^{-\int p(t)dt}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$y' + \left(t^2 + 1\right) y = 0$$

Solución: Sabemos que $p(t) = t^2 + 1$ y que la solución de la Ecuación Diferencial es

$$y = Ce^{-\int p(t)dt}$$

entonces debemos calcular

$$-\int \left(t^2 + 1\right) dt = -\left(\frac{t^3}{3} + t\right)$$

así la solución de la Ecuación Diferencial es

$$y = Ce^{-\left(\frac{t^3}{3} + t\right)}$$

Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y' + \cos(t)\,y = 0$
2. $y' + t\sin(t^2 + 3)\,y = 0$
3. $y' + \ln(2 + t)\,y = 0$
4. $y' + \dfrac{t}{3t^2 + 1}y = 0$

Ejemplo: Resolver la Ecuación Diferencial

$$y' = ay - by^2;\ \text{donde } a, b \text{ son constantes positivas}$$

Solución: Para resolver esta ecuación se hace una separación de variables

$$\begin{aligned} y' &= ay - by^2 \\ \frac{dy}{dt} &= ay - by^2 \\ \frac{dy}{ay - by^2} &= dt \end{aligned}$$

para resolver se integra en ambos lados

$$\int \frac{dy}{ay - by^2} = \int dt$$

el problema central esta en resolver la integral

$$\int \frac{dy}{ay - by^2}$$

y para resolverla es necesario aplicar **fracciones parciales**

$$\begin{aligned} \frac{1}{y\left(a - by\right)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{a - by} \\ &= \frac{A\left(a - by\right) + By}{y\left(a - by\right)} \end{aligned}$$

donde

$$1 = A\left(a - by\right) + By$$

para encontrar la solución se aplica el **Método de los anuladores**:

- Si $y = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 1 &= A\left(a - b\left(0\right)\right) + B\left(0\right) \\ 1 &= A\left(a\right) \end{aligned}$$

  donde $A = \frac{1}{a}$

- Si $y = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} 1 &= A\left(a - b \cdot \frac{a}{b}\right) + B\left(\frac{a}{b}\right) \\ 1 &= A\left(a - a\right) + B\left(\frac{a}{b}\right) \\ 1 &= B\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

  donde $B = \frac{b}{a}$, así la integral se transforma en

$$\int \frac{dy}{ay - by^2} = \int \frac{1/a}{y} dy + \int \frac{b/a}{a - by} dy$$

  organizando se tiene

$$\frac{1}{a} \int \frac{dy}{y} + \frac{b}{a} \int \frac{dy}{a - by}$$

la primera integral es directa y en la segunda se hace una sustitución simple, sea $m = a - by$ entones

$$\begin{aligned} dm &= -bdy \\ -\frac{dm}{b} &= dy \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a}\ln|y| + \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\right)\int \frac{dm}{m} \\ &= \frac{1}{a}\ln|y| - \frac{1}{a}\ln|m| + C \\ &= \frac{1}{a}\ln|y| - \frac{1}{a}\ln|a-by| + C \\ &= \frac{1}{a}\left(\ln|y| - \ln|a-by|\right) + C \end{aligned}$$

aplicando propiedades de logaritmos

$$\frac{1}{a}\left(\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|\right) + C$$

de la solución inicial se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{ay - by^2} &= \int dt \\ \frac{1}{a}\left(\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|\right) + C &= t \end{aligned}$$

Se deja como *ejercicio encontrar la solución explicita.*

Ejercicio: Encontrar la solución de la Ecuación diferencial

$$y' - ay = b$$