Clase 6

El Problema del Valor Inicial

Hasta este punto ya estamos familiarizados con la constante C que aparece cada vez que se resuelve una ecuación diferencial de primer orden. Comúnmente se le conoce con el nombre de parámetro o constante de integración. Cunado se le asigna un cierto valor a esta constante se obtiene una solución particular de la ecuación diferencial. Así por ejemplo, en:

$$y = t^2 + C \text{ (solución de } 2y' = t \text{)}$$

si $C = 0$ se tiene la parábola $y = t^2$. Análogamente, $C = -1$,$C = \dfrac{3}{2}$, etc, dan lugar a las parábolas trasladadas $y = t^2 - 1$, $y = t^2 + \dfrac{3}{2}$, cada una soluciones particulares de la ecuación diferencial.

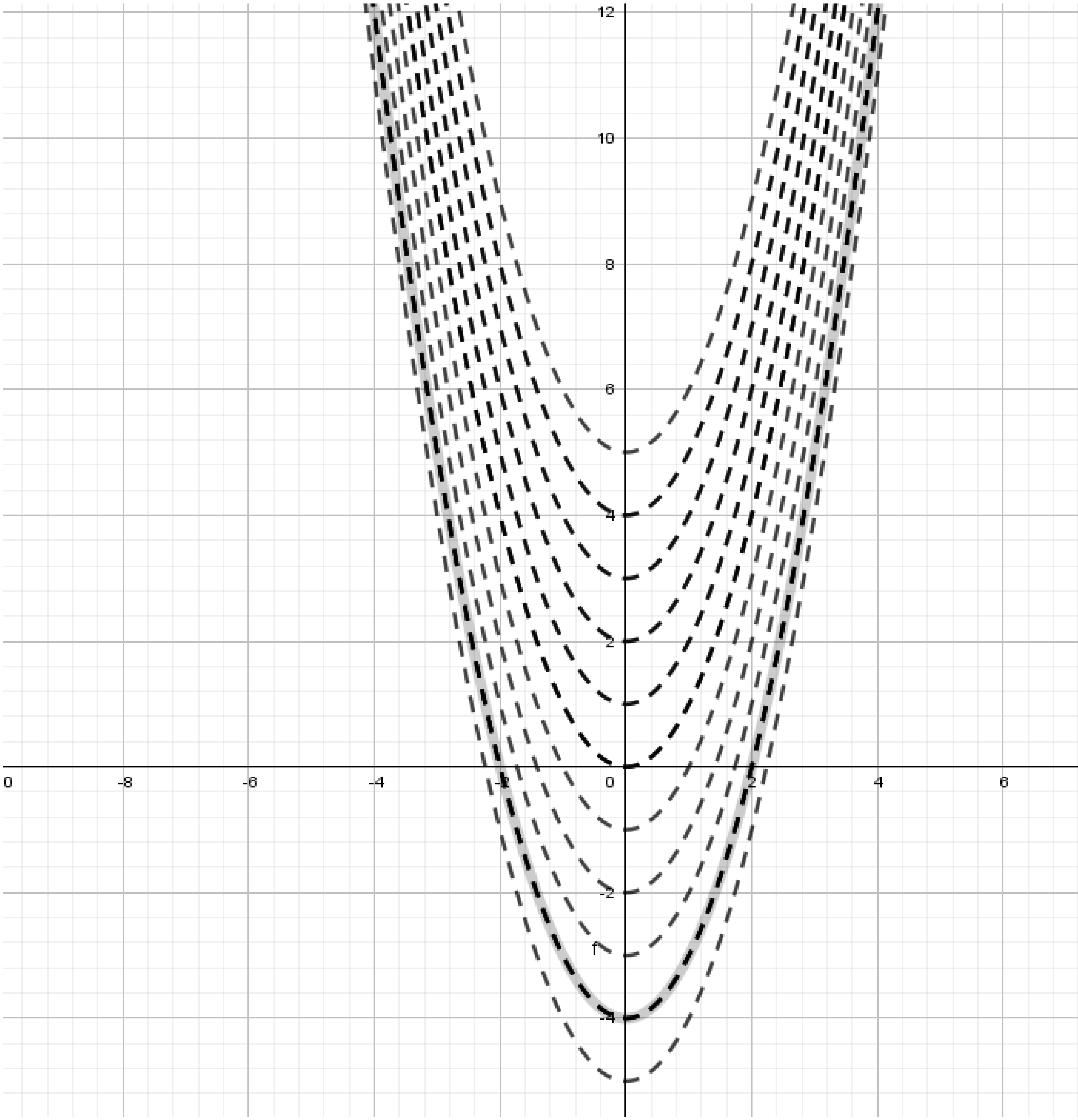


Figura 6.1: Familia de Soluciones de la Ecuación Diferencial

Resumiendo: Al resolver una ecuación diferencial $F(t, y, y') = 0$ usualmente obtenemos un conjunto o familia de soluciones $G(t, y, C) = 0$. Cada elemento de la familia es una solución particular de la ecuación.

Se se tratara de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden n $F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, esperariamos obtener una familia de soluciones con n parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n : G\left(t, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$.

Así por ejemplo, $y'' = t$ es una sencilla ecuación lineal de segundo orden cuya solución es $y = \frac{1}{6}t^3 + c_1 t + c_2$ involucra los parámetros c_1 y c_2 (Para obtener esta solución fue necesario integrar dos veces).

Una solución de una ecuación diferencial que no contiene parámetros se llama **solución particular**. Una manera de obtener una solución particular es elegir un específico del parámetro, tal como la hicimos anteriormente.

Otra manera es enunciando alguna condición que debe satisfacer algún miembro de la familia de soluciones. Esto ocurre en el **problema de valor inicial**, cuya definición se dará enseguida.

Definión: Consideremos la ecuación diferencial de primer orden $y' = f\left(t, y\right)$. Consideremos también el punto $\left(t_0, y_0\right)$. El problema de encontrar la función $y\left(t\right)$ tal que:

- $y\left(t\right)$ sea solución de $y' = f\left(t, y\right)$
- $y\left(t_0\right) = y_0$ condición inicial.

Se llama problema de valor inicial, Por comodidad se escribe PVI.

El nombre es muy significativo y da a entender que de la familia de soluciones de $y' = f\left(t, y\right)$ se debe encontrar aquella solución que pasa por lo el punto $\left(t_0, y_0\right)$ del plano ty, o dicho de otra manera, se debe hallar la solución $y\left(t\right)$ cuyo valor en t_0 sea y_0. Para lograr esto, se deben seguir los siguientes casos:

1. Hallar $y\left(t\right)$ solución de la ecuación. (Debe contener el parametro C)
2. Encontrar el valor de C a partir de la condición inicial
3. Finalmente, sustituir, el valor de C en la solución

Ejemplo: Resolver el PVI

$$PVI = \begin{cases} y' = y \\ y\left(1\right) = 3 \end{cases}$$

El punto de la condición es $(t=1, y=3)$
Solución:

1. **Primer paso:** La familia de soluciones esta dada por: $y(t) = Ce^t$

   a)
   $$\frac{dy}{dt} = y$$
   Separamos variables
   $$\frac{dy}{y} = dt$$
   integramos
   $$\int \frac{dy}{y} = \int dt$$
   $$\ln|y| = t + C$$
   $$y = Ce^t$$

2. **Segundo paso:** De la condición inicial $y(1) = 3$ obtenemos
   $$3 = Ce^1 = Ce$$
   de donde $C = 3e^{-1}$

3. **Tercer paso:** Por último $y = 3e^{-1}e^t = 3e^{t-1}$ es la solución del PVI

Al considerar un PVI surgen dos preguntas fundamentales:

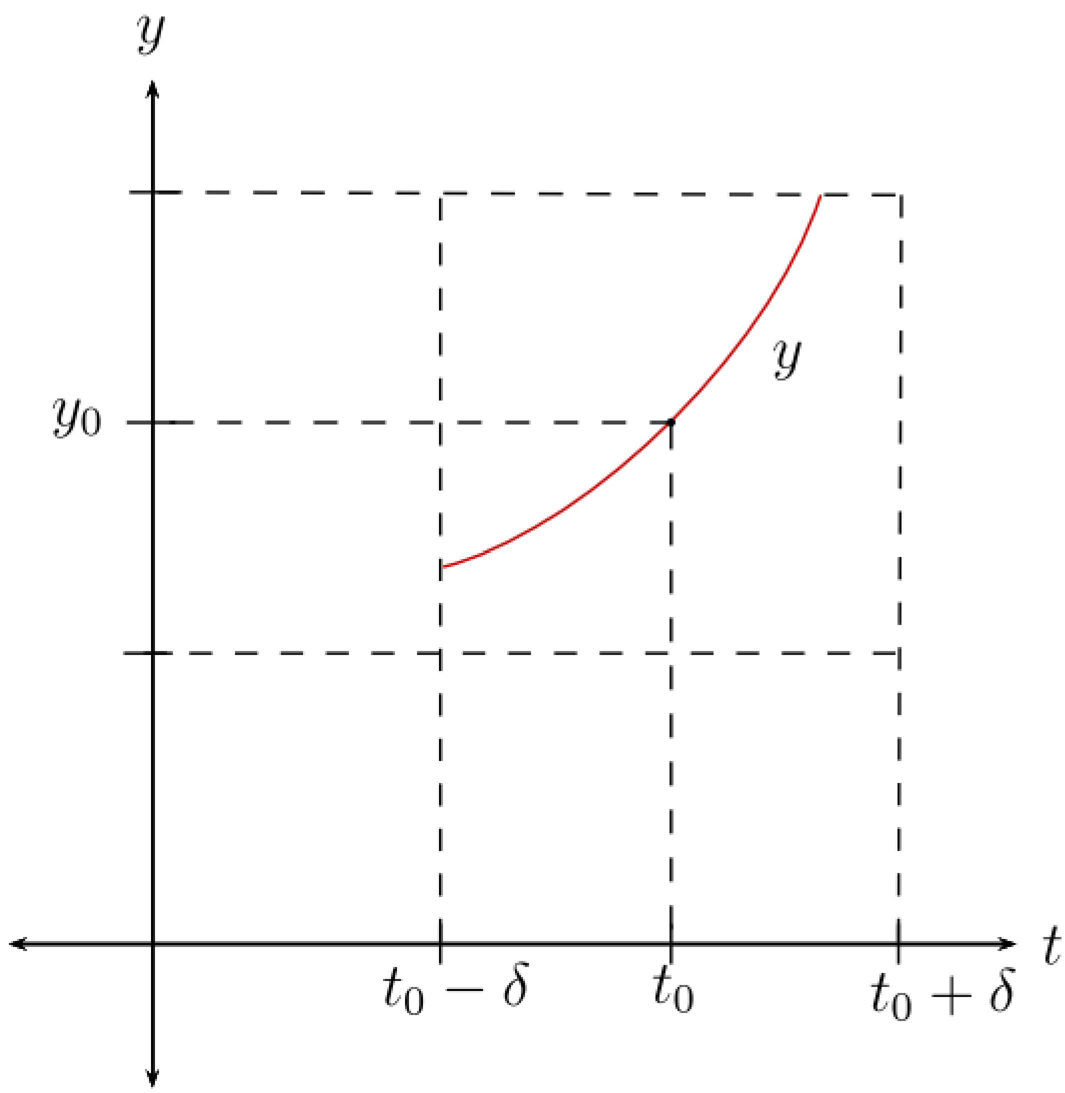
- ¿Existe una solución del problema?
- Dado que tal solución exista, ¿es la única?, es decir, ¿es ella la única solución al problema?

El siguiente teorema, cuyo autor es **Emile Picard**, establece condiciones para la existencia de una solución única.

Teorema: Existencia de solución única para un PVI.
Consideremos una región R del plano ty que contiene el punto (t_0, y_0). Si $f(t,y)$, $y \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, existe encontes un intervalo I centrado en t_0 y una única función $y(t)$, definida en I, que satisface el

$$PVI = \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nota: Este es uno de los teoremas más populares de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La interpretación gráfica del teorema es la siguiente.



Ejemplo: Resolver el problema de valor inicial

$$PVI = \begin{cases} y' = ye^{t+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: Observe que tanto $f(t, y) = ye^{t+1}$, como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{t+1}$ son funciones continuas en cualquier punto (t_0, y_0) del plano ty. En consecuencia, el teorema afirma que existe una **única** función $y(t)$ definida en un intervalo con centro en el origen. Para hallar la solución separamos las variables en la ecuación diferencial, así

$$\frac{dy}{dt} = ye^{t+1}$$
$$\frac{dy}{y} = e^{t+1}dt$$

e integrando los dos miembros

$$\int e^{t+1}dt - \ln y = C$$
$$e^{t+1} - C = \ln y$$

aplicamos la función exponencial

$$e^{e^{t+1}}C = y$$

Como $y\left(0\right) = 0$ entonces cuando $t = 0$ $y = 0$, así

$$Ce^{e^{0+1}} = 0$$
$$Ce^{e^{1}} = 0$$

por lo tanto al despejar la C se tiene $C = 0$ entonces la solución particular de la es $y = 0$ ¿Por qué?

$$y = Ce^{e^{t+1}}$$

como $C = 0$ la solución es $y = 0$.

Ejemplo: Resolver el PVI

$$PVI = \begin{cases} y' = \dfrac{t}{t+1} \\ y\left(0\right) = 2 \end{cases}$$

Solución: Se verifique que $f\left(t, y\right) = \dfrac{t}{t+1}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ son continuas en toda la región que contiene el punto $(0, 2)$. Para resolver la Ecuación Diferencial se hace

$$\frac{dy}{dt} - \frac{t}{t+1} = 0$$

es una ecuación diferencial lineal homogenea, que se puede resolver por separación de variables o por el método de la ecuación diferencial lineal. En este caso aplicando el método de seperación de variables

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t+1}$$
$$dy = \frac{t}{t+1}dt$$

integramos en ambos lados

$$\int dy = \int \frac{t}{t+1} dt$$

haciendo $m = t+1$ se tiene que $dm = dt$ y $t = m-1$ entonces

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{m-1}{m} dm \\ &= \int dm - \int \frac{1}{m} dm \\ &= m - \ln|m| + C \end{aligned}$$

devolvemos la sustitución

$$y = t + 1 - \ln|t+1| + C$$

de la condición inicial $(0,2)$ donde $t = 0$ y $y = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= 0 + 1 - \ln|0+1| + C \\ 2 &= 1 + C \end{aligned}$$

entonces $C = 1$, así la solución particular del PVI es

$$\begin{aligned} y &= t + 1 - \ln|t+1| + 1 \\ y &= t - \ln|t+1| + 2 \end{aligned}$$