Clase 3

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición: Se llama *diferencial total* de la función $z = f(t, x)$ a la expresión

$$dz = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Ejemplo: Sea la función $z = f(t, y) = t^2 \sin 3y$ el diferencial total es

$$dz = df = 2t \sin 3y dt + 3t^2 \cos 3y dy$$

Definición: La ecuación diferencial

$$M(t, y)\, dt + N(t, y)\, dy = 0$$

es exacta si existe una función $f(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M(t, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N(t, y)$$

Ejemplo: Veamos que la ecuación diferencial:

$$2t \sin 3y dt + 3t^2 \cos 3y dy = 0$$

es exacta, ya que existe una función $f(t, y) = t^2 \sin 3y$ que cumple que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 2t \sin 3y dy$ y
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3t^2 \cos 3y dy$

Cuando la ecuación diferencial $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ es exacta, podemos escribirla de la forma:
$$\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$
de donde se concluye que $f(t,y) = C$ es la solución de la edcuación diferencial. Según esto, $t^2 \sin 3y = C$ es la solución de la ecuación diferencial:

$$2t \sin 3y dt + 3t^2 \cos 3y dy = 0$$

El teorema que se enuncia a continuación proporciona un criterio para saber cuando una ecuación diferencial es exacta. Además, en la demostración se exhibe el procedimiento para encontrar la solución.

Teorema: *Criterio para una ecuación diferencial exacta.*

La ecuación diferencial

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$$

es exacta, si y solo si
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$
Supongamos que la ecuación diferencial es exacta, existe $f(t,y)$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M(t,y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N(t,y)$$

Derivando parcialmente de manera que obtengamos derivadas parciales mixtas, obtenemos
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$
como las segundas derivadas parciales mixtas de f son iguales, concluimos que:
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$
Debemos mostrar que existe una función $f(t,y)$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = M(t,y)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(t,y)$

De la condición **a)**, integrando parcialmente con respecto a t, obtenemos

$$f(t,y)=\int M(t,y)\,\partial t+g(y) \tag{3.1}$$

Integrar con respecto a una variable es el proceso inverso de derivar parcialmente con respecto a esa variable, en ambos casos las demás variables permanecen constantes. En 3.1 $g(y)$ se toma como la constante de integración.

Aplicando la condición b) a la función $f(t,y)$ obtenida en 3.1 se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y)\,\partial t+g'(y)=N(t,y)$$

De aquí se concluye que

$$g'(y)=N(t,y)-\int \frac{\partial M}{\partial t}\partial t$$

el miembro derecho de esta igualdad no depende de t, pues su derivada parcial con respecto a t se anula. En efecto:

$$\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\partial M}{\partial y}\partial t$$

que se reduce a

$$\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

Por lo tanto, $g'(y)$ no contiene términos en t, de modo que por integración directa, obtenemos $g(y)$. Así hemos encontrado la función $f(t,y)$ que se mostraba en 3.1.

Encontrada la función $f(t,y)$ se escribe sencillamente $f(t,y)=C$ solución de la ecuación diferencial exacta.

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(ty^2+\sin t\right)dt+\left(t^2y+2e^{-y}\right)dy=0$$

Solución: Primero verifiquemos que la ecuación **diferencial es exacta**, para ello identificamos

- $M(t,y)=ty^2+\sin t$ entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2ty$
- $N(t,y)=t^2y+2e^{-y}$ entonces $\dfrac{\partial N}{\partial t}=2ty$

Según el criterio del teorema la ecuación diferencial es exacta.

Existe entonces, una función $f(t,y)$, tal que

1. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = ty^2 + \sin t$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = t^2y + 2e^{-y}$

De (1) obtenemos por integración parcial con respecto a t

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} = \int \left(ty^2 + \sin t\right) dt$$
$$f(t,y) = \frac{t^2y^2}{2} - \cos t + g(y)$$

este resultado lo derivamos parcialmente con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(t,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{t^2y^2}{2} - \cos t + g(y)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = t^2y + g'(y)$$

igualamos a la condición (2)

$$t^2y + 2e^{-y} = t^2y + g'(y)$$
$$g'(y) = 2e^{-y}$$

para encontrar $g(y)$ se integra directamene

$$\int g'(y)\,dy = \int 2e^{-y}dy$$
$$g(y) = -2e^{-y} + C$$

por lo tanto la función $f(t,y)$ esta definda como

$$\begin{aligned} f(t,y) &= \frac{t^2y^2}{2} - \cos t + g(y) \\ &= \frac{t^2y^2}{2} - \cos t - 2e^{-y} + C \end{aligned}$$

donde

$$f(t,y) = \frac{t^2y^2}{2} - \cos t - 2e^{-y} + C$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Hallar una función $M(t,y)$ de tal manera que la ecuación diferencial

$$M(t,y)\,dt + \left(2ye^{t} + y^{2}e^{3t}\right)dy = 0$$

sea exacta.

Solución: Para que la ecuación diferencial sea exacta se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial t} \\
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(2ye^{t} + y^{2}e^{3t}\right) \\
\frac{\partial M}{\partial y} &= 2ye^{t} + 3y^{2}e^{3t}
\end{aligned}$$

integramos con respecto a y para obtener M

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial M}{\partial y} &= \int \left(2ye^{t} + 3y^{2}e^{3t}\right)dy \\
M(t,y) &= y^{2}e^{t} + y^{3}e^{3t} + g(t)
\end{aligned}$$

Por lo tango la función $M(t,y)$ que hace la ecuación diferencial sea exacta es

$$M(t,y) = y^{2}e^{t} + y^{3}e^{3t} + g(t)$$

3.1 Transformar Ecuaciones a Ecuaciones Exactas

Existen ecuaciones de primer orden que no son exactas, pero que se pueden llevar a exactas multiplicándolas por un factor apropiado, llamdo **factor integrante**.

Supongamos que $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ no exacta. Si el cociente

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} \tag{3.2}$$

es una función de t, digamos $f(t)$, entonces $e^{\int f(t)dt}$es un factor integrante que convierte en exacta la ecuación.

De igual manera, si el cociente

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{M}$$

es una función de y, digamos $g\left(y\right)$, entonces $e^{-\int g(y)dy}$ es un factor integrante de la ecuación.

La forma cómo se obtuvo el factor integrante .

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial lineal:

$$y'+p\left(t\right)y=q\left(t\right)$$

Solución: Reescribiendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}+p\left(t\right)y&=q\left(t\right)\\ \frac{dy}{dt}&=q\left(t\right)-p\left(t\right)y\\ dy&=\left[q\left(t\right)-p\left(t\right)y\right]dt\\ dy&=-\left[p\left(t\right)y-q\left(t\right)\right]dt\\ \left[p\left(t\right)y-q\left(t\right)\right]dt-dy&=0\end{aligned}$$

Se observa que

- $M\left(t,y\right)=p\left(t\right)y-q\left(t\right)$
- $N\left(t,y\right)=1$

Esta ecuación no es exacta, ya que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&\neq\frac{\partial N}{\partial t}\\ p\left(t\right)&\neq 0\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula para obtener el factor integrante con respecto a N se tiene

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}=\frac{p\left(t\right)-0}{1}=p\left(t\right)$$

encontes el factor integrante es $e^{\int p(t)dt}$que al multiplicar la ecuación diferencial

$$y'e^{\int p(t)dt}+p\left(t\right)ye^{\int p(t)dt}=q\left(t\right)e^{\int p(t)dt}$$

ecuación que se transforma en

$$\frac{d}{dt}\left[ye^{\int p(t)dt}\right] = q\left(t\right)e^{\int p(t)dt}$$

e integrando en ambos lados se obtiene la solución implicita:

$$ye^{\int p(t)dt} = \int q\left(t\right)e^{\int p(t)dt} + C$$

luego

$$y = e^{-\int p(t)dt}\left[\int q\left(t\right)e^{\int p(t)dt} + C\right]$$

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial:

$$3y' + y - 3 = 0$$

Solución: Reescribiendo la ecuación se tiene

$$3\frac{dy}{dt} = 3 - y$$

se divide y se multiplica por 3 y dt respectivamente

$$dy = \left(1 - \frac{y}{3}\right)dt$$

$$\left(\frac{y}{3} - 1\right)dt + dy = 0$$

De esta ecuación se tiene

- $M\left(t, y\right) = \frac{y}{3} - 1$ entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{3}$
- $N\left(t, y\right) = 1$ entonces $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

se debe aplicar la fórmula para deteminar el factor integrante

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1} = \frac{1}{3}$$

entonces el factor integrante será $e^{\int \frac{1}{3}dt} = e^{\frac{1}{3}t}$. Luego se multiplica la ecuación diferencial por el factor de integración

$$3y' + y - 3 = 0$$

$$y' + \frac{1}{3}y = 1$$

$$y'e^{\frac{1}{3}t} + \frac{1}{3}ye^{\frac{1}{3}t} = e^{\frac{1}{3}t}$$

que se transforma en

$$\frac{d}{dt}\left[ye^{\frac{1}{3}t}\right] = e^{\frac{1}{3}t}$$

integrando en ambos lados

$$\begin{aligned} ye^{\frac{1}{3}t} &= 3e^{\frac{1}{3}t} + C \\ y &= 3 + Ce^{-\frac{1}{3}t} \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$y' - \frac{1}{t}y = t^2$$

Solución: Se debe reescribir la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= t^2 + \frac{1}{t}y \\ dy &= \left[t^2 + \frac{1}{t}y\right] dt \\ -\left[t^2 + \frac{1}{t}y\right] dt + dy &= 0 \\ \left[t^2 + \frac{1}{t}y\right] dt - dy &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que

- $M(t, y) = t^2 + \frac{1}{t}y$ entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{t}$
- $N(t, y) = -1$ entonces $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

se aplica la fórmula para calcular el factor de integración

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{\frac{1}{t} - 0}{-1} = -\frac{1}{t}$$

el factor de integración es

$$\begin{aligned} e^{-\int \frac{1}{t}dt} &= e^{-\ln|t|} \\ &= e^{\ln\left|t^{-1}\right|} = t^{-1} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

multiplicamos la ecuación diferencial por el factor de integración

$$y'\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}y = \frac{1}{t}t^2$$
$$\frac{d}{dt}\left[y\cdot\frac{1}{t}\right] = t$$

integramos en ambos lados

$$\int \frac{d}{dt}\left[y\cdot\frac{1}{t}\right] = \int t dt$$
$$y\cdot\frac{1}{t} = \frac{t^2}{2} + C$$
$$y = \frac{t^3}{2} + tC$$

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$(y+\cos t)\,dt + (t+ty+\sin t)\,dy = 0$$

Solución: Se tiene que

- $M(t,y) = y+\cos t$ entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$
- $N(t,y) = t+ty+\sin t$ entonces $\dfrac{\partial N}{\partial t} = 1+y+\cos t$

Cómo

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

entonces se aplica la fórmula para determinar el factor integrante

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{M} &= \frac{1-(1+y+\cos t)}{y+\cos t}\\ &= \frac{1-1-y-\cos t}{y+\cos t}\\ &= \frac{-(y+\cos t)}{(y+\cos t)} = -1\end{aligned}$$

El factor integrante es

$$e^{-\int -1 dy} = e^{y}$$

multiplicamos la ecuación diferencial por el factor de integración

$$e^y\left(y+\cos t\right)dt+e^y\left(t+ty+\sin t\right)dy=0$$
$$\left(ye^y+e^y\cos t\right)dt+\left(e^yt+te^yy+e^y\sin t\right)dy=0$$

ahora

- $M\left(t,y\right)=ye^y+e^y\cos t$ entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y}=e^y+ye^y+e^y\cos t$
- $N\left(t,y\right)=e^yt+te^yy+e^y\sin t$ entonces $\dfrac{\partial N}{\partial t}=e^y+ye^y+e^y\cos t$

La ecuación se convirtio en una ecuación diferencial exacta, por lo tango existe una función $f\left(t,y\right)=C$ tal que

- $\dfrac{\partial f}{\partial t}=ye^y+e^y\cos t$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}=te^y+tye^y+e^y\sin t$

Se integra parcialmente

$$\int\frac{\partial f}{\partial t}=\int\left(ye^y+e^y\cos t\right)\partial t$$
$$f\left(t,y\right)=yte^y+e^y\sin t+g\left(y\right)$$

luego se deriva la función M con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=te^y+yte^y+e^y\sin t+g'\left(y\right)$$

la cual igualamos a la función $N\left(t,y\right)$

$$te^y+te^yy+e^y\sin t=te^y+te^yy+e^y\sin t+g'\left(y\right)$$
$$g'\left(y\right)=0$$

por integración $g\left(y\right)=k$ entonces la solución de la Ecuación Diferencial es

$$yte^y+e^y\sin t=C$$