# Clase 9
## Trayectorias Ortogonales

**Definición:** Dos curvas $C_1$ y $C_2$ son ortogonales en su punto de intersección, si y solo si sus tangentes $T_1$ y $T_2$ son perpendiculares en ese punto.

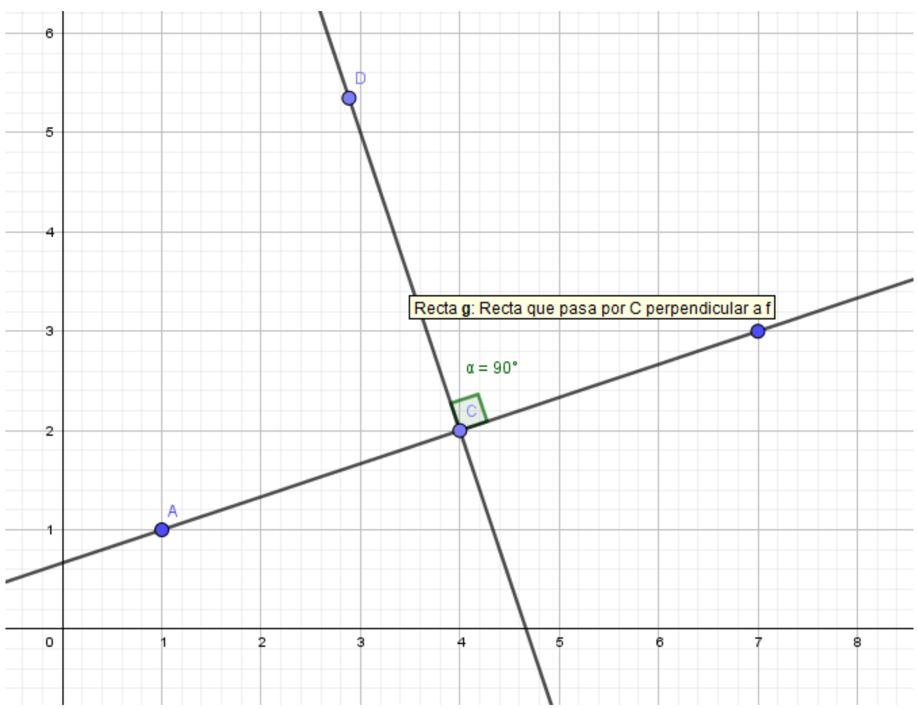


Figura 9.1: Curvas perpendiculares

Recuerde que si $m_1$ y $m_2$ son las pendientes de $T_1$ y $T_2$, respectivamente, se cumple que

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= -1 \\ m_1 &= -\frac{1}{m_2} \end{aligned}$$

para que las tangentes sean perpendiculares.

**Defnción:** Cuando todas las curvas de las familias de curvas $G(t, y, c_1) = 0$ y $H(t, y, c_2) = 0$ son ortogonales en sus puntos de intersección, decidimos que son familias de **trayectorias ortogonales**.

Una aplicación elemental de trayectorias ortogonales se ilustra en la siguiente figura.

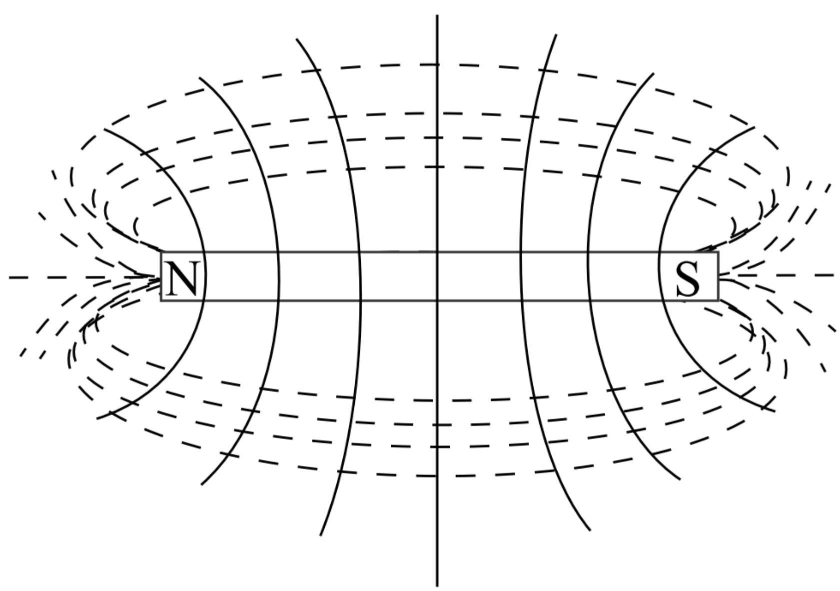


Figura 9.2: Ilustración del Ejemplo

Aquí $NS$ representa una barra magnética, siendo $N$ su polo norte y $S$ el polo sur. Al esparcir limaduras de hierro alrededor de la barra, se observa que ellas presentan un ordenamiento como las curvas punteadas en la figura. Estas curvas se llamam líneas de fuerzas; las curvas perpendiculares a estas (líneas gruesas) se llaman líneas equipotenciales o curvas de igual potencia.

## 9.1 Método para hallar trayectorias ortogonales

- Se halla la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada, y se escribe en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t,y\right)$$

- La ecuación diferencial de la familia ortogonal a la familia dada, debe tener la forma:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{f'\left(t,y\right)}$$

### Ejemplo 1:

Con el fin de ilustrar el método, se pide encontrar la familia de trayectorias ortogonales de: t

Para encontrar la ecuación diferencial se depeja el parámetro $c$ contenido en la ecuación de la familia inicial; luego se deriva la expresión resultante con respecto a $t$.

$$\begin{aligned}
t^2 + y^2 &= ct \\
c &= \frac{t^2+y^2}{t} \\
0 &= \frac{\left(2t + 2y\dfrac{dy}{dt}\right)t - \left(t^2+y^2\right)}{t^2} \\
0 &= 2t^2 + 2yt\frac{dy}{dt} - t^2 - y^2 \\
-2yt\frac{dy}{dt} &= t^2 - y^2 \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y^2-t^2}{2yt}
\end{aligned}$$

Finalmente, la familia de trayectorias ortogonales tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{f'\left(t,y\right)} = -\frac{2ty}{y^2-t^2} = \frac{2ty}{t^2-y^2}$$

Escrita en la forma:

$$2tydt + \left(y^2 - t^2\right)dy = 0$$

podemos observar que esta ecuación diferencial **no es exacta**, pues haciendo $M(t,y) = 2ty$ y $N(t,y) = y^2 - t^2$, se concluye

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2t \neq -2t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

el factor integrante $-\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{M} = -\dfrac{2t+2t}{2ty} = -\dfrac{2}{y}$ luego

$$\begin{aligned} e^{-\int \frac{2}{y} dy} &= e^{-2\ln|y|} \\ &= e^{\ln\left|y^{-2}\right|} \\ &= y^{-2} \end{aligned}$$

que convierte a la ecuación en una ecuación diferencial exacta.

Multiplicamos la Ecuación Diferencial por el factor integrante

$$\begin{aligned} y^{-2}\left(2tydt + \left(y^2 - t^2\right) dy = 0\right) \\ \frac{2t}{y} dt + \frac{y^2 - t^2}{y^2} dy = 0 \end{aligned}$$

existe una función $f(t,y)$ tal que

1. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{2t}{y}$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^2 - t^2}{y^2}$

Integramos la primera ecuación

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t} &= \int \frac{2t}{y} dt \\ f(t,y) &= \frac{t^2}{y} + g(y) \end{aligned}$$

luego derivamos la función con respecto a $y$ y la igualamos a la segunda ecuación

$$\begin{aligned} \frac{y^2 - t^2}{y^2} &= -\frac{t^2}{y^2} + g'(y) \\ &= \frac{-t^2 + y^2 g'(y)}{y^2} \end{aligned}$$

al comparar las ecuaciones $g'(y) = 1$ por lo tanto

$$\int 1dy = y$$

así

$$\begin{aligned} f(t,y) &= \frac{t^2}{y} + y \\ c &= \frac{t^2+y^2}{y} \\ cy &= t^2 + y^2 \end{aligned}$$

por lo tanto la familia de ecuaciones ortogonales a $t^2 + y^2 = ct$ es $t^2 + y^2 = cy$

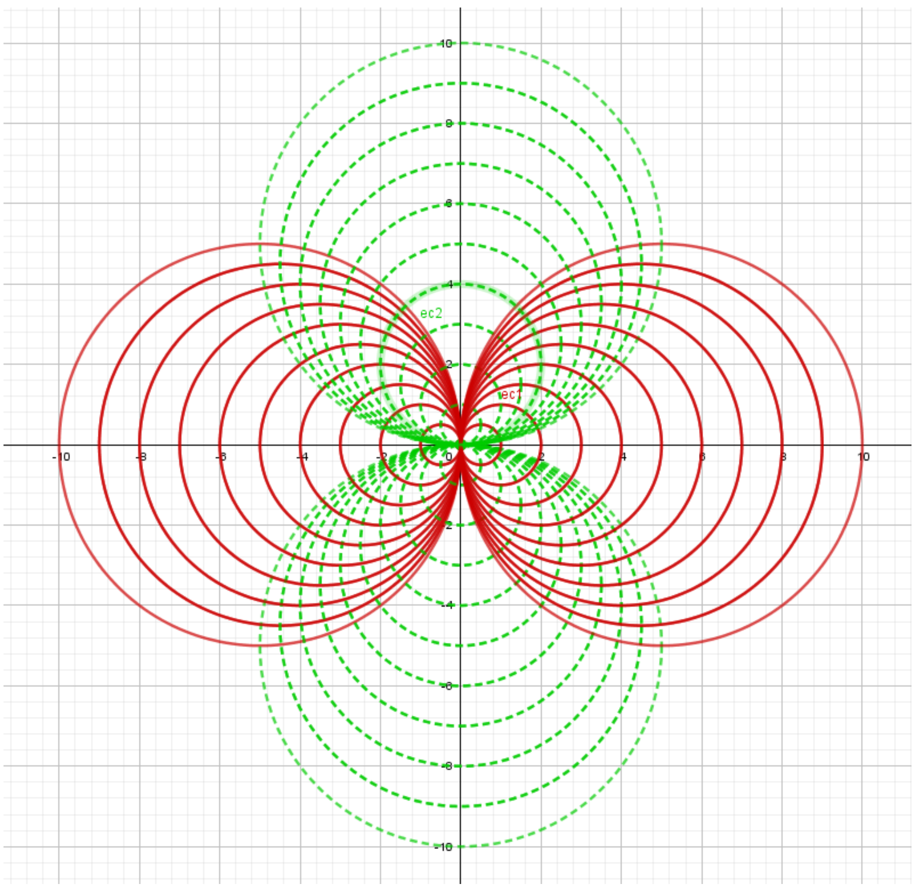


Figura 9.3: Gráfica de las familias de curvas $t^2 + y^2 = ct$ y $t^2 + y^2 = cy$