Clase 2

Ecuaciones Transformables a Variables Separables

Muchas de las ecuaciones diferenciales se puede resolver mediante separación de variables haciendo una sustitución adecuada. Se resuelve la ecuación diferencial y luego se devuelve la sustitución.

Una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$y' = f\left(at + by + c\right)$$

donde a, b y c son constantes arbitrarias, se puede convertir en separable mediante la sustitución

$$m = at + by + c$$

Aquí m se expresa finalmente en términos de la variable independiente t. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dm}{dt} = a + b\frac{dy}{dt}$$

como $y' = \dfrac{dy}{dt}$ entonces $\dfrac{dy}{dt} = f\left(at + by + c\right)$ y como $m = at + by + c$

$$\frac{dy}{dt} = f\left(m\right)$$

así la última ecucación se representa como

$$\frac{dm}{dt} = a + bf\left(m\right)$$

que es una ecuación de variables separables.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$y' = 3t - y + 4$$

La ecuación se puede reescribir de la forma

$$\frac{dy}{dt} = 3t - y + 4$$

donde

$$m = 3t - y + 4$$

derivando con respecto a t

$$\frac{dm}{dt} = 3 - \frac{dy}{dt}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3t - y + 4\\ \frac{dy}{dt} &= m\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dm}{dt} = 3 - m$$

separando variables se tiene

$$\frac{dm}{3 - m} = dt$$

al integrar en ambos lados se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{dm}{3 - m} &= \int dt\\ -\ln|3 - m| + C &= t\end{aligned}$$

devolviendo la sustitución

$$\begin{aligned}-\ln|3 - (3t - y + 4)| + C &= t\\ -\ln|3 - 3t + y - 4| + C &= t\\ -\ln|y - 3t - 1| + C &= t\end{aligned}$$

multiplicamos por -1

$$\ln|y - 3t - 1| + C = -t$$

aplicamos exponencial

$$\begin{aligned} e^{\ln|y-3t-1|+C} &= e^{-t} \\ C\left(y-3t-1\right) &= e^{-t} \\ y-3t-1 &= Ce^{-t} \\ y &= Ce^{-t}+3t+1 \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \tan^2\left(t+y\right)$$

se hace la sustitución

$$m = t+y$$

de donde

$$\frac{dm}{dt} = 1+\frac{dy}{dt}$$

como

$$\frac{dy}{dt} = \tan^2\left(t+y\right)$$

y $m=t+y$ entonces

$$\frac{dy}{dt} = \tan^2\left(m\right)$$

entonces la ecuación queda transformada como

$$\frac{dm}{dt} = 1+\tan^2\left(m\right)$$

haciendo separación de variables se tiene

$$\frac{dm}{1+\tan^2\left(m\right)} = dt$$

integrando en ambos lados de la ecuación

$$\int \frac{dm}{1+\tan^2\left(m\right)} = \int dt$$

aplicando la identidad pitagórica $1+\tan^2\left(m\right)=\sec^2\left(m\right)$ obtenemos

$$\int \frac{dm}{\sec^2\left(m\right)} = \int dt$$

aplicando la propiedad del cociente $\cos\left(m\right)=\dfrac{1}{\sec\left(m\right)}$ se transforma en

$$\int \cos^2\left(m\right)dm = \int dt$$

aplicando la idenatidad de ángulo doble $\cos^2(m) = \dfrac{1+\cos(2m)}{2}$ se simplifica a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int(1+\cos(2m))\,dm &= \int dt\\ \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\sin(2m)\right) &= t+C\\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\sin(2m) &= t+C\end{aligned}$$

devolviendo la sustitución

$$\frac{1}{2}(t+y)+\frac{1}{4}\sin 2(t+y) = t+c$$

2.1 Ecuación Diferencial Homogenea

Sin una función $f(t,y)$ tiene la propiedad que $f(\alpha t,\alpha y) = \alpha^n f(t,y)$ para algun número real n, se dice que f es homogénea de grado n.

Ahora se dice que la ecuación diferencial $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ es homogénea si las funciones $M(t,y)$ y $N(t,y)$ son homogéneas del mismo grado.

Luego si la ecuación diferencial $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ es homogenea cualquiere de las susticiones

- $y = mt$ con $dy = mdt + tdm$
- $t = ny$ con $dt = ndy + ydn$

transforma una ecuación diferencial en una variables separables.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$\left(y^2+yt\right)dt + t^2dy = 0$$

- Primero se debe comprobar si la ecuación es homogenera, para ello $M(t,y)$ y $N(t,y)$ deben ser homogeneas del mismo grado.

- Sea $M(t,y) = y^2 + yt$ entonces

$$\begin{aligned} M(\alpha t, \alpha y) &= (\alpha y)^2 + (\alpha y)(\alpha t) \\ &= \alpha^2 y^2 + \alpha^2 yt \\ &= \alpha^2 \left(y^2 + yt\right) \\ &= \alpha^2 M(y,t) \end{aligned}$$

- Sea $N(t,y) = t^2$ entonces

$$\begin{aligned} N(\alpha t, \alpha y) &= (\alpha t)^2 \\ &= \alpha^2 t^2 \\ &= \alpha^2 N(t,y) \end{aligned}$$

se concluye que $M(t,y)$ y $N(t,y)$ homogénas de grado 2, por lo tango la Ecuación Diferencial es Homogéna.

- Se realiza la sustitución

$$y = mt$$

entonces

$$dy = tdm + mdt$$

reemplazamos en la Ecuación Diferencial

$$\left(y^2 + yt\right) dt + t^2 dy = 0$$

$$\begin{aligned} \left((mt)^2 + (mt)\,t\right) dt + t^2 (tdm + mdt) &= 0 \\ \left(m^2t^2 + mt^2\right) dt + t^2 (tdm + mdt) &= 0 \\ m^2t^2dt + mt^2dt + t^3dm + mt^2dt &= 0 \end{aligned}$$

separamos las variables

$$\begin{aligned} \left(m^2t^2 + 2mt^2\right) dt + t^3 dm &= 0 \\ t^2 \left(m^2 + 2m\right) dt + t^3 dm &= 0 \\ t^3 dm &= -t^2 \left(m + m^2\right) dt \\ \frac{dm}{2m + m^2} &= -\frac{t^2 dt}{t^3} \end{aligned}$$

- Se integra en ambos y lados y se aplica el Método de fracciones parciales

$$\int \frac{dm}{2m + m^2} = -\int \frac{dt}{t}$$

❑ Sea

$$\frac{1}{2m+m^2}=\frac{1}{m\left(2+m\right)}=\frac{A}{m}+\frac{B}{2+m}$$

entonces

$$1=A\left(2+m\right)+Bm$$

aplicando el Método de los anuladores, si $m=-2$ entonces

$$\begin{aligned}1&=A\left(2-2\right)+B\left(-2\right)\\1&=-2B\end{aligned}$$

por lo tango $B=-\dfrac{1}{2}$, luego si $m=0$ entonces

$$\begin{aligned}1&=A\left(2+0\right)+B\left(0\right)\\1&=2A\end{aligned}$$

entonces la integral se reescribe como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\frac{1}{m}dm-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+m}dm&=-\int\frac{dt}{t}\\\frac{1}{2}\ln\left|m\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1+m\right|&=-\ln\left|t\right|+C\end{aligned}$$

se multiplica por 2 y se aplica las propiedades del logaritmo

$$\ln\left|\frac{m}{2+m}\right|=-2\ln\left|t\right|+C$$

aplicamos la función exponencial

$$\begin{aligned}e^{\ln\left|\frac{m}{2+m}\right|}&=e^{-2\ln\left|t\right|+C}\\e^{\ln\left|\frac{m}{2+m}\right|}&=Ce^{\ln\left|t\right|^{-2}}\\\frac{m}{2+m}&=C\frac{1}{t^2}\\t^2m&=C\left(2+m\right)\\t^2m&=C+Cm\\t^2m-Cm&=C\end{aligned}$$

se devuelve la sustitución

$$\begin{aligned}t^2\left(\frac{y}{t}\right)-C\left(\frac{y}{t}\right)&=C\\\frac{yt^2-Cy}{t}&=C\\y\left(t^2-C\right)&=Ct\\y&=\frac{Ct}{t^2-C}\end{aligned}$$

se factoriza la C

$$\begin{aligned} y &= \frac{C\,(t)}{C\,(Ct^2 - 1)} \\ &= \frac{t}{Ct^2 - 1} \end{aligned}$$

2.2 Método para funciones de la forma $\dfrac{dy}{dt} = f\left(\dfrac{y}{t}\right)$

Toda ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

mediante la sustitución $m = \dfrac{y}{t}$ se puede transformar en una ecuación de variables separables.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t + y}{t - y}$$

Mutiplicando y dividiendo por $\dfrac{1}{t}$ el lado dercho de la ecuación se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}$$

luego se hace la sustitución $m = \dfrac{y}{t}$ con

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t^2}$$

luego se factoriza $\dfrac{1}{t}$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{t}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t}\right)$$

como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1+\frac{y}{t}}{1-\frac{y}{t}}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1+m}{1-m}$$

haciendo que la ecuación se transforme a

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{t}\left(\frac{1+m}{1-m} - m\right)$$

lo cual permite separar las variables

$$\frac{dm}{\frac{1+m}{1-m} - m} = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{dm}{\frac{1+m-m+m^2}{1-m}} = \frac{dt}{t}$$
$$\frac{(1-m)\,dm}{1+m^2} = \frac{dt}{t}$$

se integra en ambos lados

$$\int \frac{dm}{1+m^2} - \int \frac{m}{1+m^2}dm = \int \frac{dt}{t}$$
$$\arctan(m) - \frac{1}{2}\ln\left|1+m^2\right| = \ln|t| + C$$

multiplicamos por 2

$$2\arctan(m) - \ln\left|1+m^2\right| = 2\ln|t| + C$$

se devuelve la sustitución

$$2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \ln\left|1+\left(\frac{y}{t}\right)^2\right| = 2\ln|t| + C$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \ln\left|\frac{t^2-y^2}{t^2}\right| = \ln\left|t^2\right| + C$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \left(\ln\left|t^2-y^2\right| - \ln\left|t^2\right|\right) = \ln\left|t^2\right| + C$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \ln\left|t^2-y^2\right| + \ln\left|t^2\right| = \ln\left|t^2\right| + C$$
$$2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \ln\left|t^2-y^2\right| = C$$