Clase 10

Deflexión de Vigas

Consideremos una viga horizontal AB de material homogéneo y sección transversal uniforme. Debido a su elasticidad la viga puede distorsionarse bajo la acción del propio peso, o cuando es sometida a fuerzas externas que actúan sobre ella; en este caso, tales fuerzas y el eje de simetría deben estar contenidas en el mismo plano.

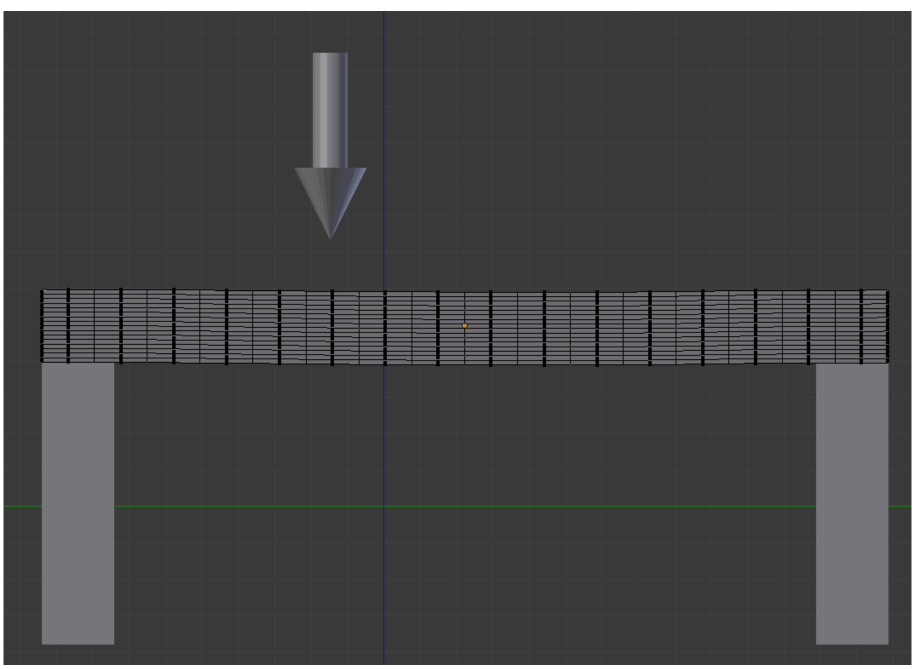
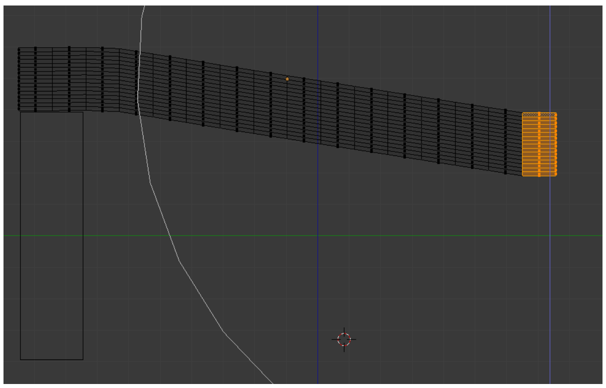


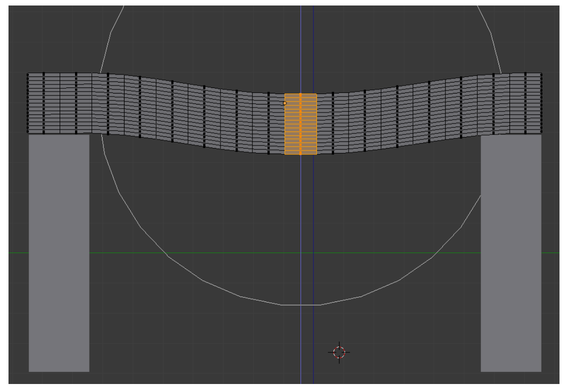
Figura 10.1: Deflexión de Vigas

La distorción del eje de simetría (curva elástica) es importante en la teoría de elasticidad y sobre ella trataremos en esta aplicación.

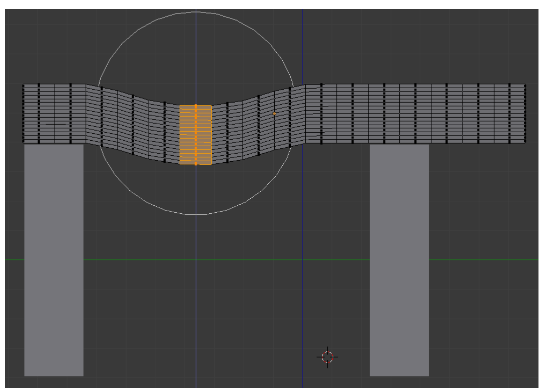
En la determinación de la curva elástica hay que tener presente las maneras de apoyar las vigas y las diferentes formas de aplicar las fuerzas externas. Estas situaciones se muestran en la siguiente figura.



(a) a



(b) b



(c) c

Figura 10.2: Diferentes situaciones de deflexión

- La figura 10.2a ilustra una viga en voladizo, con el extremo A empotrado rápidamente, mientras que el extremo B esta libre para moverse.
- La figura 10.2b esta simplemente apoyada en los extremos A y B
- La figura 10.2c ilustra otra forma de apoyar una viga

Las fuerzas externas o cargas que actúan sobre una viga pueden distribuirse uniformente a lo largo de toda la viga; o pueden aplicarse en forma variable sobre toda la viga o parte de ella; o pueden estar concentradas en un punto determinado.

10.1 Determinación de la curva elástica

Consideramos la viga horizontal OB sometida a la acción de las fuerzas variables F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5. En el plano xy hagamos coincidir el eje de simetría (línea punteada) con el eje x y el extremos O de la viga con el origen. Escojamos el semieje y como positivo hacia abajo.

Debido a la acción de las fuerzas externas y del peso de la viga (si es que el peso es apreciable) el eje de simetría se distorciona en la curva elástica que se muestra en la figura.

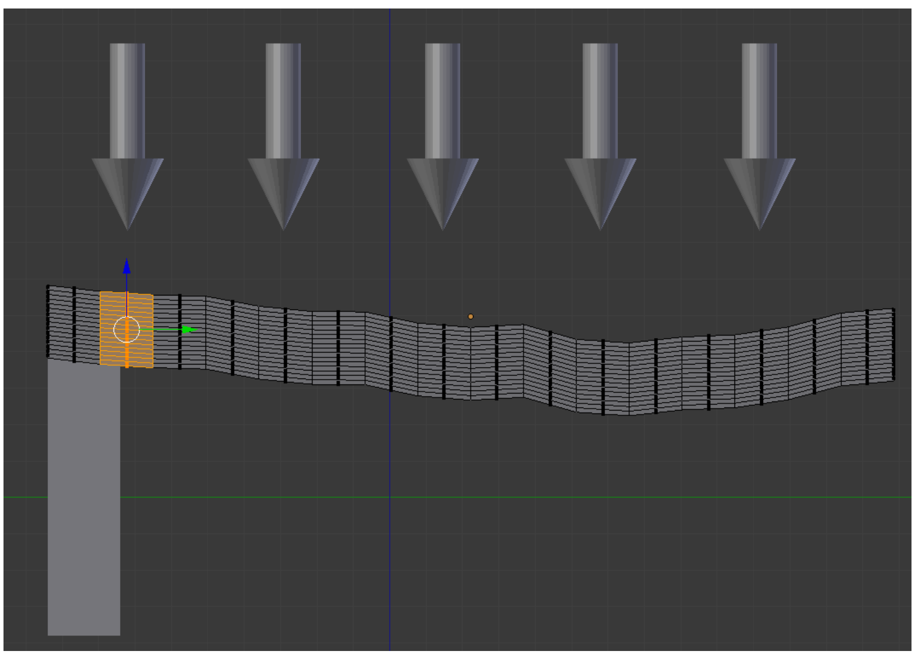


Figura 10.3: Curva elástica

El desplazamiento y asociado al punto x de la curva elástica se llama **deflexión de la viga** en la posición x. Si determinamos la ecuación de la curva elástica, podemos conocer la deflexión de la viga en cada punto.

Llamemos $M(x)$ el **momento flexionante** correspondiente a la sección transversal vertical de la viga en x. Se sabe que el momento flexionante se define como la suma algebraica de los momentos de las diversas fuerzas que actúan sobre un lado de la posición x.

Demostraremos que el momento flexionante x está simplemente relacionado con el radio de curvatura de la curva elástica en x por la expresión

$$M(x) = EI\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} \tag{10.1}$$

donde E es el **módulo de elasticidad de Young** y depende del material de la viga; I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en el punto x con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección transversal.

El producto EI es **la rigidez flexural** y se considera como una constante.

Si admitimos que la viga se distorciona levemente, lo cual es válido para muchas aplicaciones prácticas, la pendiente y' de la curva elástica es muy pequeña y su cuadrado es despreciable comparado con 1. Este efecto se refleja en la ecuación 10.1, transformándola en

$$M(x) = EIy'' \tag{10.2}$$

Como un aplicación de ésta ecuación 10.2 consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1:

Una viga horizontal, simplemente apoyada, de longitud L se distorciona bajo su propio peso, el cual es w por unidad de longitud. Se pide encontrar la ecuación de la curva elástica a que da lugar la distorción de la viga.

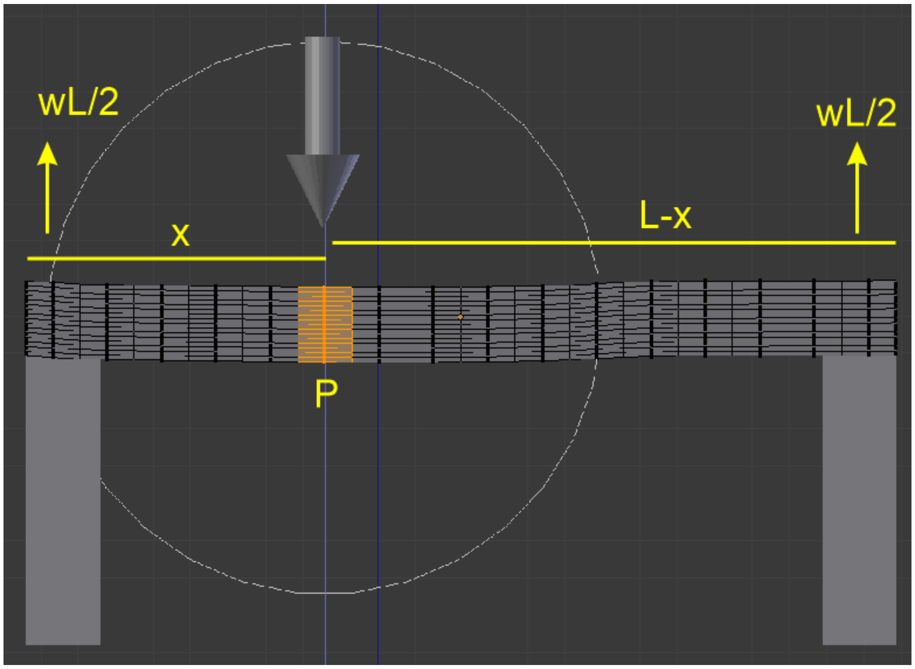


Figura 10.4: Ilustración del Ejemplo

Solución

La figura 10.4 refleja el problema en un plano de coordenadas xy. O y B son los puntos de soporte de la viga, la línea punteada corresponde a la curva elástica.
Antes que todo, observe que el peso de la viga es igual a wL y que dada uno de los puntos de apoyo soporta un peso de $\frac{wL}{2}$.

El momento flexionante $M(x)$ es la suma algebraica de los momento de estas fuerzas actuando a un lado del punto P. Si consideramos primero el lado izquierdo de P,las fuerzas que actúan son:

- La fuerza hacia arriba $\frac{wL}{2}$ a una distancia x de P. Esta fuerza produce un momento negativo.
- La fuerza hacia abajo wx que corresponde al peso del trozo de viga OP a una distancia de $\frac{x}{2}$. Esta produce un momento positivo.

El momento flexionante total en P es

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{wL}{2}x + wx\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Si hubiéramos escogido el lado derecho de P,tendríamos las dos fuerzas

- $w\left(L-x\right)$ que es el peso del trozo de viga BP, actuando a una distancia $\dfrac{\left(L-x\right)}{2}$ de P. Esta fuerza produce un momento positivo.

- La fuerza hacia arriba $\dfrac{wL}{2}$ que soporta el extremo B, a una distancia $L-x$ de P. Esta fuerza produce un momento negativo. En este caso

$$\begin{aligned} M\left(x\right) &= w\left(L-x\right)\left(\frac{L-x}{2}\right)-\frac{wL}{2}\left(L-x\right) \\ &= \frac{wx^2}{2}-\frac{wLx}{2} \end{aligned} \tag{10.4}$$

Las ecuaciones 10.3 y 10.4 muestran que al calcular el momento flexionante no importa a qué lado del punto P nos ubiquemos. Sustutuyendo $M\left(x\right)$ en la fórmula 10.2, obtenemos la ecuación de segundo orden

$$EIy'' = \frac{wx^2}{2}-\frac{wLx}{2} \tag{10.5}$$

Para determinar la deflexión y asociada al punto x de la viga, necesitamos las condiciones

$$\begin{cases} y=0 \quad \text{cuando } x=0 \ \ (i) \\ y=0 \quad \text{cuando } x=L \ \ (ii) \end{cases}$$

La razón de estas dos condiciones se debe al hecho de viga la viga no sufre distorción alguna en los extremos.

Al integrar dos veces la ecuación 10.5 se tiene,

$$EIy = \frac{wx^4}{24}-\frac{wLx^3}{12}+c_1x+c_2$$

De la condición $(i): c_2 = 0$ de modo que

$$EIy = \frac{wx^4}{24}-\frac{wLx^3}{12}+c_1x$$

de la condición $(ii): c_1 = \dfrac{wL^3}{24}$ y finalmente. la ecuación de la curva elástica es:

$$y = \frac{w}{24EI}\left(x^4-2Lx^3+L^3x\right) \tag{10.6}$$

Es de interés determinar el punto de la viga en el que ocurre la máxima deflexión. Para ello hacemos $y'=0$

$$\frac{w}{24EI}\left(4x^3-6Lx^2+L^3\right)=0$$

entonces

$$4x^3 - 6Lx^2 + L^3 = 0$$

Al resolver a x en términos de L resulta $x = \frac{L}{2}$. En este punto se consigue el máximo valor de deflexión de la viga:

- Máxima deflexión

$$\frac{5wL^4}{384EI}$$

Ejemplo 2:

Encontrar la curva elástica de una viga en voladizo de longitud L, con peso constante w por unidad de longitud. Determinar también la deflexión en el extremo libre.

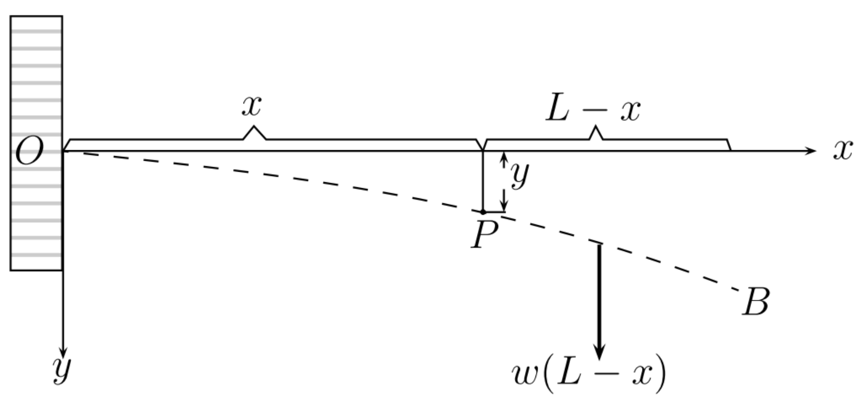


Figura 10.5: Ilustración del ejemplo

La situación del problema se muestra en la figura anterior.

Como en el ejemplo anterior, la línea punteada corresponde a la curva elástica. Para calcular el momento flexionante $M(x)$ es más simple considerar la parte de la viga a la derecha del punto P, observe que la única fuerza actuante es el peso de esta parte de la viga, a saber, $w(L-x)$ y que el momento flexionante es positivo

$$\begin{aligned} M(x) &= w(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right) \\ &= \frac{w(L-x)^2}{2} \end{aligned}$$

Así que

$$EIy'' = \frac{w(L-x)^2}{2}$$

es la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la curva elástica, sujeta a las dos condiciones siguientes

$$\begin{cases} y = 0 & \text{cuando } x = 0 \ (i) \\ y' = 0 & \text{cuando } x = 0 \ (ii) \end{cases}$$

Integrando dos veces con respecto a x se obtiene la familia con dos parámetros

$$EIy = \frac{w}{24}(L-x)^2 + c_1 x + c_2$$

De la condición $(i) : c_2 = -\dfrac{wL^4}{24}$

De la condición $(ii) : c_1 = \dfrac{wL^3}{6}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} EIy &= \frac{w}{24}\left[(L-x)^4 - L^4 + 4w^3\right] \\ &= \frac{w}{24}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right)$$

Es la ecuación de la curva elástica. Para determinar la deflexión en el extremo libre, hacemos $x = L$ obteniendo:

- Deflexión en el extremo libre

$$\frac{wL^4}{8EI}$$

Observe que este valor corresponde a la máxima deflexión.

Ejemplo 3:

Una viga uniforme de longitud L y peso despreciable, simplemente apoyada, se distorciona bajo la influencia de una carga S concentrada a una distancia $\dfrac{L}{3}$ de un extremo. Encontrar la ecuación de la curva elástica.

Los apoyos O y B están a distancia con una razón $1 : 2$ de la carga S; por lo tanto, soportan fracciones de carga S con razón $2 : 1$. En la siguiente figura se muestran las fracciones de carga que soportan los extremos O y B.

Figura 10.6: Ilustración del problema

Las fracciones de carga O y B se obtienen considerando la condición de equilibrio:

$$F_1\left(\frac{L}{3}\right) = F_2\left(\frac{2L}{3}\right)$$

entonces

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{2L}{3}}{\frac{L}{3}} = 2$$

Además, como $F_1 + F_2 = S$, entonces $F_1 = S - F_2$. Así que

$$\frac{S - F_2}{F_2} = 2$$

entonces

$$S = 3F_2$$

Para determinar el momento flexionante en el punto P se deben considerar tres casos, depeniendo de la ubicación que se elija para este punto.

- **Caso 1.** P está a la izquierda de S. En esta parte de la viga sólo hay una fuerza (hacia arriba) actuando a una distancia x de P. En el momento flexionante es negativo e igual a $M(x) = -\frac{2Sx}{3}$. Luego,

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3},\ 0 \leq x < \frac{L}{3} \tag{10.7}$$

- **Caso 2.** P está a la derecha de S. En la parte OP de la viga actúan las fuerzas $\frac{2S}{3}$ (hacia arriba) y S (hacia abajo). El momento flexionante debido a estas fuerzas $M(x) = -\frac{2Sx}{3} + S\left(x - \frac{L}{3}\right)$. Por lo tanto,

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3} + S\left(x - \frac{L}{3}\right)\ ,\frac{L}{3} < x \leq L \tag{10.8}$$

- **Caso 3.** P coincide con el punto de aplicación de S. En este caso actúan las fuerzas $\frac{2S}{3}$ y S, así el momento flexionante es:

$$-\frac{2S}{3}\left(\frac{L}{3}\right) + S(0) = -\frac{2SL}{9}$$

En consecuencia, $EIy'' = -\frac{2SL}{9}$. Es interesante ver que la anterior ecuación diferencial se puede obtener de las ecuaciones 10.7 y 10.8 reemplazando a x por $\frac{L}{3}$. Esto reduce a dos los casos considerados:

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3},\ 0 \leq x \leq \frac{L}{3}$$

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3} + \left(x - \frac{L}{3}\right), \ \frac{L}{3} \leq x \leq L \tag{10.9}$$

Para resolver las dos ecuaciones de segundo orden en 10.9 necesitamos cuatro condiciones.

Las dos primeras son inmediatas

$$y = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y } y = 0 \text{ en } x = L$$

Una tercera condición nace de observar que los valores de y obtenidos de las ecuaciones 10.9 deben ser iguales en $x = \frac{L}{3}$,de lo contrario, la solución ya no sería continua.

Finalmente, la cuarta condición se obtiene al notar que debe existir una tangente horizontal a la curva elástica en $x = \frac{L}{3}$. Dicho de otra manera,

$$y' = 0 \text{ en } x = \frac{L}{3}$$

Esta es la condición de continuidad para la derivada y'. De no ser así, no se podría hablar de la derivada de segundo orden y''.

Integrando una vez cada una de las ecuaciones 10.9, tenemos

$$EIy' = -\frac{Sx^2}{3} + c_1, \ 0 \leq x \leq \frac{L}{3}$$

$$EIy' = -\frac{Sx^2}{3} + \frac{S}{2}\left(x - \frac{L}{3}\right)^2 + c_2, \ \frac{L}{3} \leq x \leq L \tag{10.10}$$

Aplicando la cuarta condición $y' = 0$ en $x = \frac{L}{3}$ a las ecuaciones 10.10, se tiene,

$$0 = -\frac{SL^2}{27} + c_1$$
$$0 = -\frac{SL^2}{27} + c_2$$

Encones, $c_1 = c_2$.

Integrando ahora las ecuaciones 10.10,

$$EIy = -\frac{Sx^3}{9} + c_1x + c_3, \ 0 \leq x \leq \frac{L}{3}$$

$$EIy = -\frac{Sx^3}{9} + \frac{S}{6}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 + c_1x + c_4,\ \frac{L}{3} \leq x \leq L \tag{10.11}$$

Las tres primeras condiciones las aplicamos a las ecuaciones 10.11.

Las tres primeras condiciones las aplicamos a las ecuaciones 10.11, así

Primera condición:

$$y = 0 \text{ en } x = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Segundo condición:

$$y = 0 \text{ en } x = L \Rightarrow c_1 = \frac{5SL^2}{81}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{SL^3}{9} + \frac{S}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3 + c_1L \\ &= -\frac{SL^3}{9} + \frac{4SL^3}{81} + c_1L \\ &= -\frac{5SL^3}{81} + c_1L \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las constantes c_1, c_2, c_3, c_4 en 10.11 encontramos

$$y = \frac{S}{81EI}\left(5L^2x - 9x^3\right),\ 0 \leq x \leq \frac{L}{3}$$

$$y = \frac{S}{81EI}\left[5L^2x - 9x^3 + \frac{27}{2}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3\right],\ \frac{L}{3} \leq x \leq L \tag{10.12}$$