18.1 Inecuaciones

El cálculo ha sido llamado una ciencia de desigualdades. Esto puede ser una exageración, pero en realidad es cierto que necesitamos alguna habilidad en el manejo de las desigualdades.

Todo número real es positivo, negativo o cero. Sean a y b dos números reales cualesquiera; entonces $a - b$ es un número real (clausurativa) y por lo tanto $a - b$ es positivo, o negativo o cero. Si $a - b = 0$, entonces $a = b$. Cuando $a - b \neq 0$, se cumplen las siguientes propiedades.

Escribimos $a > b$, si y solamente si $a - b$ es un número positivo; $a < b$ si y solamente si $a - b$ es un núemro negativo.

Con la palabra desigualdad se quiere significar que una cantidad es mayor o menor que otra; y se formaliza esta notación de la siguiente manera:

- Si a es un número real positivo, decimos que a **es mayor que cero** y escribimos $a > 0$.
- Si a es un número real negativo, decimos que a **es menor que cero** y escribimos $a < 0$.
- Si a y b son números reales, y si existe un número real positivo k, tal que: $a - b = k$, decimos que a **es mayor que b** y escribimos $a > b$. Por ejemplo $1 > -3$, pues existe $4 > 0$ tal que $1 - (-3) = 4$.

Sea $a = 1$ y $b = -3$ entonces $a - b = 1 - (-3) = 4$ entonces $k = 4$.

Los símbolos $a \leq b$ se usa para indicar que $a = b$ o que $a < b$; análogamente los símbolos $a \geq b$ se usan para indicar que $a = b$ o que $a > b$.

A continuación enumeramos algunas propiedades de las desigualdades. Dichas propiedades se enunciarán sólo en términos de mayor que, pero es necesario aclarar que también se cumplen para el caso menor que.

1. *Propiedad transitiva:* Si a, b, y c son números reales tales que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. *Propiedad de la adición:* Si a, b, y c son números reales tales que $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

3. *Producto por un número positivo y negativo:* Si a, b, y c son números reales tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$, ésto es, si una desigualdad se multiplica por un número positivo el sentido de la desigualdad se mantiene.

4. Si a, b, y c son números reales tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. Esto significa que si una desigualdad se divide por un número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

5. Si a, b, c y d son números reales tales que $a > b$ y $c > d$, entonces, $a + c > b + d$.

6. Si a y b son números reales, $a > b \Longleftrightarrow -a < -b$

7. Si a es un número real $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

8. Si a es un número real, $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

9. Si a y b son números reales, entonces $a.b > 0 \Longleftrightarrow (a > 0\ y\ b > 0)\ o\ (a < 0\ y\ b < 0)$. Es decir, el producto de dos números reales es mayor que cero si ambos son positivos o ambos son negativos.

10. Si a y b son números reales, entonces $a.b < 0 \Longleftrightarrow (a > 0\ y\ b < 0)\ o\ (a < 0\ y\ b > 0)$.

11. si a y b son números reales y $a \neq b$, entonces $a^2 + b^2 > 2ab$

El resultado neto de estas propiedades es que las desigualdades se comportan casi siempre como las igualdades; la única diferencia en el comportamiento de las desigualdades, con respecto a las igualdades, es que cuando se multiplican o dividen por un número negativo, tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

18.1.1 Explicación de las propiedades

1. Sean $a = 10$, $b = 8$ y $c = 5$ entonces si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$ es decir que si $10 > 8$ y $8 > 5$ entonces $10 > 5$

2. Sean $a = 10$, $b = 8$ y $c = 5$ entonces $a > b$ así $a + c > b + c$ es decir

$$10 + 5 > 8 + 5$$
$$15 > 13$$

3. Sean $a = 10$, $b = 8$, $c = 5$ y $d = -4$

$$\begin{aligned} a &> b \\ 10 &> 8 \\ 10\,(5) &> 8\,(5) \\ 50 &> 40 \end{aligned}$$

con $d = -4$

$$\begin{aligned} a &> b \\ 10 &> 8 \\ 10\,(-4) &> 8\,(-4) \\ -40 &< -32 \end{aligned}$$

Otro ejemplo

$$\begin{aligned} -5 &< -2 \\ -5\,(10) &< -2\,(10) \\ -50 &< -20 \end{aligned}$$

pero ahora considere

$$\begin{aligned} -5 &< -2 \\ -5\,(-3) &< -2\,(-3) \\ 15 &> 6 \end{aligned}$$

4. Sean $a = 10$, $b = 8$ y $c = 5$ entonces

$$\begin{aligned} a &> b \\ 10 &> 8 \\ \frac{10}{5} &> \frac{8}{5} \\ 2 &> 1.6 \end{aligned}$$

5. Sean $a = 10$, $b = 8$, $c = 5$ y $d = 2$

$$\begin{aligned} a > b &\text{ y } c > d \\ 10 > 8 &\text{ y } 5 > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 + 5 &> 8 + 2 \\ 15 &> 10 \end{aligned}$$

6. Sean $a = 10$, $b = 8$ entonces
$$10 > 8$$
multiplicar por menos uno
$$-10 < -8$$
7. Sean $a = 10$ y $a = -8$ en el primer caso
$$\begin{aligned} 10 &> 0 \\ 10^2 &> 0 \\ 100 &> 0 \end{aligned}$$
en el segundo caso
$$\begin{aligned} -8 &< 0 \\ (-8)^2 &> 0 \\ 64 &> 0 \end{aligned}$$
8. Sean $a = 10$ entonces
$$\begin{aligned} a &> 0 \\ 10 &> 0 \\ \frac{1}{10} &> 0 \end{aligned}$$
9. Sean $a = 10$, $b = 8$ o $a = -10$ y $b = -8$
Si se multiplican a y b entonces
$$\begin{aligned} (10)(8) &> 0 \\ 80 &> 0 \end{aligned}$$
en el segundo caso
$$\begin{aligned} (-10)(-8) &> 0 \\ 80 &> 0 \end{aligned}$$