Índice general

Clase 1

Máximo común divisor

Antes de iniciar con el máximo común divisor es necesario atender otros temas, por ejemplo, los números primos, la descomposición de un número en sus factores primos y cómo crear un algoritmo para calcular los números primos.

1.1 ¿Qué son los números primos?

Un número natural distinto de 1 es un número primo si y sólo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.

Por ejemplo 3 es un número primo porque sus únicos divisores son 1 y 3.

Ejercicio: Construir una tabla de los números naturales menos que 100, sin incluir el 1.

- A partir del 2, tachar los múltiplos de 2.
- A partir del 3, tachar los múltiplos de 3.
- A partir de 5, tachar los múltiplos de 5.
- A partir de 7, tachar los múltiplos de 7.
- A partir de 11, tachar los múltiplos de 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.1.1 ¿Cómo determinar si un número es Primo?

Para determinar si un número es primo o compuesto, se divide por la sucesión de números primos $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ hasta llegar a una división cuyo cociente sea igual o menor que el divisor. Si todas las divisiones tienen el resto distinto de cero, el número propuesto es un número primo.

Otra forma de determinar si un número es primo es dividiendolo por todos los números menores que él empezando desde el 1, y contando cuántos divisores exactos tiene, si al terminar el ciclo se tienen solo dos, entonces el número es primo.

A continuación se muestra un algoritmo construido en JavaScript para determinar los primos del 2 hasta el 100.

```
console.clear();
primos = [];

for (var i=1; i<100; i++) {
    var cont=0;

    for (var j=1; j<=i; j++) {
        if (i %j == 0) {
            cont = cont+1;
        }
    }

    if (cont==2) {
        console.log(i + ' es un número primo');
        primos.push(i);
```

```
    }
}

console.log(primos);
```

Al ejecutar el código obtenemos como resultado lo siguiente:

```
2 es un número primo          VM92:14
3 es un número primo          VM92:14
5 es un número primo          VM92:14
7 es un número primo          VM92:14
11 es un número primo         VM92:14
13 es un número primo         VM92:14
17 es un número primo         VM92:14
19 es un número primo         VM92:14
23 es un número primo         VM92:14
29 es un número primo         VM92:14
31 es un número primo         VM92:14
37 es un número primo         VM92:14
41 es un número primo         VM92:14
43 es un número primo         VM92:14
47 es un número primo         VM92:14
53 es un número primo         VM92:14
59 es un número primo         VM92:14
61 es un número primo         VM92:14
67 es un número primo         VM92:14
71 es un número primo         VM92:14
73 es un número primo         VM92:14
79 es un número primo         VM92:14
83 es un número primo         VM92:14
89 es un número primo         VM92:14
97 es un número primo         VM92:14
                              VM92:19
 (25) [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,
▸23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 5
 9, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

1.2 Descomposición de un número en producto de factores primos

Para descomponer un número, por ejemplo 36, en producto de factores primos se siguen estos pasos:

- Se escribe el número a la izquierda de una raya vertical y a su derecha el menor número primo $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ por el cual dicho número sea divisible. El cociente obtenido se coloca debajo del número propuesto
- Se procede como en el paso anterior con el cociente obtenido (18), y así sucesivamente hasta llegar a un cociente igual a 1.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

entonces la descomposición de factores primos del 36 es $2^2 \cdot 3^2$

1.3 ¿Cómo obtener los divisores de un número?

Para hallar los divisores naturales de un número, por ejemplo, 60, se siguen los siguientes pasos:

1. Se descompone el número en producto de factores primos.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Se hace una tabla poniendo en la primera fila el 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo, obteniendo la fila A

1	2	4

3. Se multiplica cada número de la fila A por el siguiente factor primo (3), obteniendo la fila B

A	1	2	4	
B	3	6	12	$A \times 3$

4. Se multiplica cada número de las filas A y B por el último factor primo 5, obteniendo las filas C y D

A	1	2	4	
B	3	6	12	$A \times 3$
C	5	10	20	$A \times 5$
D	15	30	60	$B \times 5$

El conjunto de divisores naturales de 60 es el formado por los números de las filas A, B, C y D, así los divisores de 60 son

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Información tomada de: `https://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/numeros_primos.pdf`

1.4 Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos enteros m y n es el mayor entero que divide a ambos simultáneamente, y se suele denotar como mcd(m, n) o simplemente, cuando no hay duda por el contexto, como (m, n). Por ejemplo. el máximo común divisor de 8 y 12 es mcd $(8, 12) = 4$.

El máximo común divisor es siempre positivo. Cuando los enteros cuyo máximo común divisor se factorizan de forma sencilla, la manera habitual de calcular el máximo común divisor consiste en tomar los factores primos comunes a m y n, con el menor de los exponentes con el que aparecen.

Así como $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \times 3$, el único factor primo es 2, apareciendo en 12 con el menor exponente 2, de ahí que mcd $(8, 12) = 4$.

Un caso sencillo de cálculo del máximo común divisor se da cuando uno de los enteros es multiplo del otro; así, si m divide a n, entonces mcd $(m, n) = |m|$.

La definición de máximo común divisor se aplica también a mas de dos enteros, siendo en cualquier caso el mayor entero que divide a todos ellos simultáneamente, y pudiendo nuevamente calcularse como el producto de los factores primos comunes a todos los enteros, con el mismo exponente con el que aparecen.

Así el máximo comun divisor de

$$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$$

y $15 = 3 \times 5$ y $27 = 3^3$,luego el mcd $(2010, 15, 27) = 3$, pues no hay otro factor común a los tres, y aparece con exponente 1, tanto en 2010 como en 15.

1.5 Algoritmo de Euclides para el mcd

Si tenemos dos números m y n que no podemos factorizar fácilmente, es muchas veces mas sencillo el siguente procedimiento ideado por Euclides para calcular el máximo común divisor: Dividimos el mayuor de ellos (supongamos que es m) entre el menor, y calculamos el cociente de la división, que llamaremos m_1 entonces, mcd $(m, n) =$ mcd (m_1, n).

Se calcula ahora el máximo común divisor de dos números, donde ahora $m_1 < n$, por lo tanto

$$\text{mcd}\,(m, n) = \text{mcd}\,(m_1, n) = \text{mcd}\,(n_1, m_1)$$

Se continua el proceso, hasta llegar a dos números que sea fácil de calcular el **mcd**.

Por ejemplo, para hallar el mcd de 2010 y 1960 se hace lo siguiente

$$\begin{aligned} 2010 &= 1 \times 1960 + 50 \\ 1960 &= 39 \times 50 + 10 \\ 50 &= 5 \times 10 \end{aligned}$$

1.6 Algoritmo Tradicional

El algoritmo tradicional, implica conocer los números primos, en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{cc|l} 2010 & 1960 & 2 \\ 1005 & 980 & 5 \\ 201 & 196 & \end{array}$$

por lo tango el mcd $(2010, 1960) = 2 \cdot 5 = 10$

1.7 Problemas

1. En un almacen tenemos 100 cartones de zumo, 60 piezas de fruta y 40 bocadillos. Queremos guardarlos en cajas que tengan el mismo número de objetos. ¿Cuántos artículos habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas harán falta?

   Solución: Se debe calcular el máximo común divisor de los tres números

$$\begin{array}{rrr|l} 100 & 60 & 40 & 2 \\ 50 & 30 & 20 & 2 \\ 25 & 15 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & \end{array}$$

   por lo tanto el mcd $(100, 60, 40) = 20$ lo que quiere decir que habran 20 artículos en cada caja, es decir

   - $\dfrac{100}{20} = 5$ cajas de zumo.
     - $\dfrac{60}{20} = 3$ cajas de fruta.
     - $\dfrac{40}{20} = 2$ cajas de bocadillos.

2. Una habitación tiene $230\,cm$ de largo por $120\,cm$ de ancho. Queremos cubrir el suelo con baldosas cuadradas. ¿Cuánto tienen que medir estas baldosas? ¿Cuántas baldosas harán falta?

   Solución: Se calcula el **mcd**

$$\begin{array}{rr|l} 230 & 120 & 2 \\ 115 & 60 & 5 \\ 23 & 12 & \end{array}$$

   a) El mcd $(120, 230) = 10$. Así se necesitan $\dfrac{230}{10} = 23$ baldosas de largo y $\dfrac{120}{10} = 12$ baldosas se ancho, así $23 \times 12 = 276$

   b) Se necesitan 276 baldosas cuadradas de 100 cm^2

3. Alan y Pedro comen en la misma pizzeria, pero alan asiste cada 20 días y pedro cada 38 días. ¿Cuando volveran a encontrarse?.

   Solución: Si se empieza a contar los múltiplos se llega a la cuenta del día exacto en que se encontrarán de nuevo.

$$\begin{array}{cc|c} 24 & 38 & 2 \\ 12 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & \end{array}$$

el mcd es 6, por lo tanto David puede repartir a cuatro familiares y Fernando puede repartir a seis familiares.

4. Andrés tiene una cuerda de 120 metros de largo y otra de 96 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posibles. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá?

   Solución: Para cortar las cuerdas en trozos iguales la longitud de los trozos debe dividir la longitud de ambas cuerdas. Es decir debe ser un divisor de 96 y 120

$$\begin{array}{cc|c} 96 & 120 & 2 \\ 48 & 60 & 2 \\ 24 & 30 & 2 \\ 12 & 15 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}$$

   el mcd $(96, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24$

   Las cuerdas deben medir 24 metros, así $\dfrac{120}{24} = 5$ cuerdas y $\dfrac{96}{24} = 4$ cuerdas. En total son 9 trozos de cuerda.

5. Pablo quiere pintar una casa pequeña. Según sus cálculos, necesitará 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca. Quiere comprar botes de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de botes sea el menor posible ¿Cuántos litros debe tener cada bote y cuántos botes de cada color debe comprar máximo?

   Se calcula el mcd de los litros de cada color

Roja	Blanca	Verde	
12	16	24	2
6	8	12	2
3	4	6	

   el mcd $(12, 16, 24) = 4$, cada bote debe tener 4 litros

   - Botes de pintura roja

$$\frac{12}{4} = 3 \text{ botes}$$

- Botes de pintura blanca

$$\frac{16}{4} = 4 \text{ botes}$$

- Botes de pintura verde

$$\frac{24}{4} = 6 \text{ botes}$$

6. Daniel y Matias compraron 40 y 32 caramelos, respectivamente, para una fiesta de cumpleaños. Quieren repartirlos entre todos los invitados de modo que cada uno da el mismo número de caramelos a cada persona pero que todos los invitados tenga el mismo número de caramelos y sea máximo. Calcular el número máximo de invitados que deben asistir para que ninguno se quede sin caramelos.

   Solución: Se calcula el mcd de 40 y 32

Matias	Daniel	
32	40	2
16	20	2
8	10	2
4	5	

   El mcd $(32, 40) = 8$

   El número de caramelos por persona es 8

   Para saber cuántas personas se pueden invitar se hace el cálculo

$$\frac{40+32}{8} = \frac{72}{8} = 9 \text{ personas}$$

7. Un acuario pequeño se quedó en bancarrota, por lo que otros acuarios van a comprar los peces que tienen. En total, se venderan 48 peces payaso, 60 peces globo, 36 tiburones bebés, 24 pulpos y 72 peces león.

   Para la venta, se desea que los contenedores sean del mismo tamaño y que alberguen la mayor cantidad de animales posible. Además, en cada contenedor sólo puede haber peces de una única especie.

   ¿Cuántos peces debe haber por contenedor y cuántos contenedores se necesitan para cada especie?

   Solución: Como en cada contenedor soló puede haber una especie, el número de peces que hay en cada contenedor debe dividir al número total de peces de cada especie. Además, debe ser máximo. Por lo tanto, se debe calcularl el mcd de las cantidades de peces.

Peces Payaso	Peces Globo	Tiburones Bebé	Pulpos	Peces León	
48	60	36	24	72	2
24	30	18	12	36	2
12	15	9	6	18	3
4	5	3	2	6	

El mcd$(48, 60, 36, 24, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Para determinar cuántos contenedores para cada especie se necesitan, se divide la cantidad de animales de cada especie entre la cantidad de contenedores

Especie	No de Peces	Contenedores
Payaso	48	4
Globo	60	5
Tiburón	36	3
Pulpo	24	2
León	72	6

8. Una empresa pequeña que vende leche cuenta con tres sucursales: una en el norte, una en el sur y una en el este. Sabemos que la sucursal del norte produce 300 botellas de leche diarios, la del sur produce 240 y la del este produce 360. Se quieren transportar estas botellas de leche en camionetas que lleven el mismo número de botellas, pero que sea el mayor número de botellas posible. ¿Cuántas botellas de leche debe transportar cada camioneta?

   Solución: para saber el número máximo de botellsa de leche que debe llevar cada camioneta, debemos calcular el mcd

Norte	Sur	Este	
300	240	360	2
150	120	180	2
75	60	90	3
25	20	30	5
5	4	6	

   El mcd $(300, 240, 360) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Así cada camioneta debe transportar 60 botellas de leche.

9. Una tienda compra memorias USB de diferentes colores al por mayor. Para Navidad hizo un pedido extraordinario de 84 memorias rojas, 196 azules y 252 verdes. Para guardar la mercancia de forma organizada,

exigió que le enviaran las memorias en cajas iguales, sin mezclar los colores y conteniendo el mayor número posible de memorias. ¿Cuántas memorias habrá en cada caja y cuántas caja de cada color habra?

Solución: Se debe calcular el mcd de cada número de memorias de cada color

Rojas	**Azules**	**Verdes**	
84	196	252	2
42	98	126	2
21	49	63	7
3	7	9	

El mcd $(84, 196, 252) = 2^2 \cdot 7 = 28$

Para determinar cuántas cajas se deben tener de cada color se hace lo siguiente: Se toma la última fila del cálculo del mcd, así se necesitan 3 cajas de memorias rojas, 7 cajas de memorias azules y 9 cajas de memorias verdes.

También se puede desarrollar la división

- $\frac{84}{28} = 3$ cajas de memorias rojas
- $\frac{196}{28} = 7$ cajas de memorias azules
- $\frac{252}{28} = 9$ cajas de memorias verdes

10. Jaime tiene una compañia que fabrica instrumentos musicales y tiene que suplir un pedido de 320 guitarras para la tienda A, 240 bajos para la tienda B, 400 saxofones para la tienda C y 160 teclados para la tienda D.

    Si Jaime decide utilizar camiones cargados con la mista cantidad de instrumentos, pero que sea la máxima posible para optimizar el tiempo, ¿Cuántos camiones debe enviar a cada tienda?

    Solución: Calculamos el mcd del número de instrumentos

Guitarras	**Bajos**	**Saxofones**	**Teclados**	
320	240	400	160	2
160	120	200	80	2
80	60	100	40	2
40	30	50	20	2
20	15	25	10	5
4	3	5	2	
A	**B**	**C**	**D**	**Tienda**

el mcd $(320, 240, 400, 160) = 2^4 \cdot 5 = 80$

Por lo tanto cada camion debe llevar 80 instrumentos y la cantidad de camiones por cada tienda se obtienen de la última fila del cálculo del mcd.

11. Una empresa Mexicana que fabrica celulares debe enviar un pedido de un millón de celulares a Europa. Esta empresa cuenta con cinco modelos de celulares: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. El pedido se especifíca en la siguiente tabla:

	Unidades $(\times 1000)$
A_1	230
A_2	165
A_3	155
A_4	210
A_5	240

El pedido se realiza en lotes con la misma cantidad de celulares y separados por modelos. Si se desea que la cantidad de lotes sea la mínima posible, ¿Cuántos lotes de cada modelo debe haber?

Solución: Se debe calcular el mcd (sabiendo que se debe multiplicar el resultado por 1000)

$$\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \\ \hline 230 & 165 & 155 & 210 & 240 & 5 \\ 46 & 33 & 31 & 42 & 48 & \end{array}$$

El mcd $(230, 165, 155, 210, 240) = 5$ por 1000 es 5000. Cada lote debe contener 5000 celulares y la cantidad de lotes de cada tipo se obtienen de la última fila calculada en el mcd, del tipo $A_1 = 46$ lotes, del tipo $A_2 = 33$ lotes, del tipo $A_3 = 31$ lotes, del tipo $A_4 = 42$ lotes y del tipo $A_5 = 48$ lotes.

12. Una aerolínea que parte de Alemania lleva pasajeros a todo el mundo. Su sistema de compra de boletos proporcionó los siguientes resultados.

País	Pasajeros
Bélgica	1200
Inglaterra	1950
Noruega	1500
Irlanda	1350
Francia	1650

Se desa el mayor número de personas por avión y que todos los aviones tenga la mismca capacidad. Calcular:

a) Cuántos pasajeros habrá por avión

b) Cuántos aviones volarpan a cada país

c) Cuántos aviones volarán en total

Solución: Para resolver el problema se debe calcular el mcd

Bélginca	**Inglaterra**	**Noruega**	**Irlanda**	**Francia**	
1200	1950	1500	1350	1650	2
600	975	750	675	825	3
200	325	250	225	275	5
40	65	50	45	55	5
8	13	10	9	11	

El mcd $(1200, 1950, 1500, 1350, 1650) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$. En cada avión deben viajar 150 pasajeros. Para determinar cuántos aviones salen de cada país se obtiene la última fila del cálculo del mcd.

a) Bélgica 8 aviones

b) Inglaterra 13 aviones

c) Noruega 10 aviones

d) Irlanda 9 aviones

e) Francia 11 aviones

f) En **total 51** aviones

13. Pablo está trazando los planos de un proyecto de mécanica sobre una hoja de dimensiones $56\text{cm} \times 104\text{cm}$. Necesita dibujar una cuadrícula de modo que:

a) La cuadrícula está formada por cuadrados iguales (todos los lados iguales)

b) El tamaño de los cuadrados debe ser máximo

c) La longitud en centímetros de los lados del cuadrado debe ser un número natural, es decir, sin decimales.

d) Calcular el número total de cuadrados que debe tener la cuadrícula.

Solución: para determinar la longitud de cada cuadro se debe calcular el mcd

$$\begin{array}{cc|c} 56 & 104 & 2 \\ 28 & 52 & 2 \\ 14 & 26 & 2 \\ 7 & 13 & \end{array}$$

El mcd $(56, 104) = 8$. Los cuadros deben medir 8 centímetros de lado. Así el ancho debe tener $\frac{56\text{cm}}{8} = 7$ cuadros y de largo $\frac{104\text{cm}}{8} = 13$ cuadros. En total el plano tendra 91 cuadros.