Índice general

Clase 1

Operaciones con números reales

Es conveniente señalar que lo importante de estas propiedades no es que usted las aprenda de memoria, sino que las pueda utilizar cuando sea necesario, por ejemplo para abreviar algunos cálculos o para despejar ecuaciones y que sepa también qué tipo de operaciones no se pueden hacer.

Los números reales permiten dentro de su estructura operaciones fundamentales sobre las cuales rigen unas propiedades. Las operaciones básicas permitidas para los números reales son:

- Suma
- ~~Resta~~
- Multiplicación
- División
- Radicación
- Potenciación

1.1 La Suma

La suma de números reales, también llamada adición, es una operación que se efectúa entre dos números, pero se pueden considerar también más de dos sumandos. Siempre que se tengan números reales, se pueden sumar entre si.

Propiedad Interna

El resultado de sumar dos números reales es otro número real

$$(a+b) \in \mathbb{R}$$
$$2+3=5$$

Propiedad Asociativa

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(3+5)+\sqrt{2}=3+\left(5+\sqrt{2}\right)$$

Propiedad Conmutativa

El orden de los sumandos no varía la suma

$$a+b=b+a$$
$$\sqrt{2}+5=5+\sqrt{2}$$

Propiedad del elemento neutro

El 0 (cero) es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$$b+0=b$$
$$\pi+0=\pi$$

Propiedad del elemento opuesto o elemento inverso

Todo número real tiene un **inverso aditivo**, lo que quiere decir que si se suman el número y si inverso, el resultado es 0 (cero): Si a es un número real, entonces

$$a-a=0$$
$$-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=0$$

El opuesto del opuesto o inverso de un número es igual al mismo número

$$-(-a) = a$$
$$-\left(-3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

1.2 Multiplicación

La regla de los signos que se aplica para el producto de los números enteros y racionales se sigue manteniendo con todos los números los números reales.

Entre las propiedades del **producto o multiplicación** con números reales tenemos:

Propiedad Interna (Clausurativa)

El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real.

$$(a \cdot b) \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R}$$

Propiedad Asociativa

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si se tienen más de dos factores, da igual cuál de las multiplicaciones se efectúe primero:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}\right)$$

Propiedad conmutativa

La expresión usual de esta propiedad es: "el orden los factores no altera el resultado". Si a y b son dos números reales, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a$$
$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$$

Propiedad del elemento neutro

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$a \cdot 1 = a$$
$$\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Propiedad del elemento opuesto

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad **(Inverso Multiplicativo)**

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Propiedad distributiva

El producto de un número por su suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$\sqrt{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) = 3\sqrt{2} + \sqrt{5}\sqrt{2}$$

1.3 División

La división es la **operación inversa de la multiplicación**, es una operación entre dos números: el dividendo y el divisor. Con una excepción, siempre que se tengan dos números reales, se pueden dividir, por ejemplo:

$$1.86 \div 3.1 = 0.6$$
$$\frac{1.86}{3.1} = 0.6$$

donde 1.86 es el Dividendo, 3.1 es el Divisor y 0.6 es el Cociente.

La excepción es que el divisor no puede ser cero. Esto es, no se puede dividir entre cero. El dividendo puede ser cero, y cuando esto ocurre el resultado o cociente siempre es cero.

Ejemplo:

$$0 \div 5.41 = 0$$

Las reglas de los signos en el caso de la división son las mismas que para la multiplicación:

- el cociente de dos números de igual signo siempre es positivo;
- el cociente de dos números de distinto signo siempre es negativo.

Aunque la división está emparentada con la multiplicaicón, no tiene todas las propiedades de la multiplicación.

Por ejemplo, la división no es una operación conmutativa, ya que

$$6.24 \div 3 = 2.08$$

mientras que

$$3 \div 6.24 \approx 0.4807$$

La división no es tiene **propiedad asociativa**, se observa que:

$$(8 \div 4) \div 2 = 1$$

mientra que

$$8 \div (4 \div 2) = 4$$

Tomado de `https://es.slideshare.net/joseramirez539/nmeros-reales-y-sus-propiedades`

1.4 Potenciación

La potenciación es una multiplicación de varios factores iguales, al igual que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales, (la potenciación se considera una multiplicación abreviada).

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian dos partes, la base y el exponente, que se escribe en forma de supérindice. El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por si misma.

Ejemplo:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

en forma general

$$a^n = a \times \cdots \times a$$

1.4.1 Propiedades de la potenciación de números naturales.

1. **Un número elevado a** 0 **es igual a** 1.
   a) $a^0 = 1$
   b) $5^0 = 1$
2. **Un número elevado a** 1 **es igual al mismo.**
   a) $a^1 = a$
   b) $5^1 = 5$
3. **Producto de potencias de la misma base:** Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.
   a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
   b) $2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$
4. **División de potencias con la misma base:** Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.
   a) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   b) $\dfrac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$

5. **Potencia de una potencia:** Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

   a) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
   b) $(2^5)^3 = 2^{15}$

6. **Producto de potencias con el mismo exponente:** Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases.

   a) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
   b) $2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$

7. **Cociente de potencias con el mismo exponente:** Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

   a) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
   b) $\dfrac{6^3}{2^3} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Tomado de: La Potenciación y sus Propiedades

1.5 Radicación

La radicación es el proceso contrario a la potenciación. Veamos que

$$r = a^n$$

luego

$$a = \sqrt[n]{r}$$

Ejemplo: Calcular la raíz cúbica de 8

Solución:

$$\sqrt[3]{8} = a$$

elevar al cubo en ambos lados

$$8 = a^3$$

debemos buscar un número a que elevado a la 3 sea 8. En este caso $a = 2$, porque $2^3 = 8$.

1.5.1 Propiedades de la radicación

1. **Raíz de raíz:** Se multiplican los índices

   a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

   b) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$ ¿Por qué? $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ la raíz sexta es

   $$\begin{aligned} \sqrt[6]{64} &= \sqrt[6]{2^6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. **Índice de la raíz como una fracción:** Se puede escribir el índice de la raíz como una fracción

   a) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

   b) $\sqrt[2]{2^3} = 2^{3/2}$

3. **Simplificación de exponentes e índices**: En la potenciación y radicación, por ser operaciones inversas, pueden simplificarse exponentes con índices.

   a) $\left(\sqrt[3]{8^1}\right)^6 = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 8^{\frac{6}{3}} = 8^2 = 64$

   b) $\sqrt[2]{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1 = 3$

4. Propiedad distributiva respecto del producto y la división

   a) $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

   b) $\sqrt[2]{100} = \sqrt[2]{25 \cdot 4} = \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{4} = 5 \cdot 2 = 10$

5. **Suma y resta de raíces con igual índice:** Por no ser la radicación distributiva con respecto a la suma (o resta), no se puede aplicar la propiedad contraria, la Asociatividad. Por consiguiente la sima de $\sqrt{3} + \sqrt{12}$ no es igual a $\sqrt{15}$.

   a) Se deben sumar raíces iguales, con idénticos radicales. En este caso se puede intentar factorar el número que no es primo:

   $$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{12} &= \sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

aquí se observa que se saca el factor común $\sqrt{3}$ entonces resultaría:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+\sqrt{12} &= \sqrt{3}+\sqrt{4\cdot 3}\\
&= \sqrt{3}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\\
&= 1\sqrt{3}+2\sqrt{3}\\
&= \sqrt{3}\,(1+2)\\
&= \sqrt{3}\cdot 3\\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

6. **Producto y cociente de raíces con igual índice:** La radicación SI es distributiva respecto a la multiplicación (o división) y se puede aplicar la propiedad asociativa como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{8} &= 3\cdot 5\cdot\sqrt{2\cdot 8}\\
&= 3\cdot 5\cdot\sqrt{16}\\
&= 3\cdot 5\cdot 4\\
&= 60
\end{aligned}$$