

Clase 26

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real es su distancia al cero. Puesto que un número real puede ser positivo, negativo o cero, se tiene:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recuerde que si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Es claro que

$$|a| = |-a| = a \geq 0$$

pues a dista de 0 lo mismo que su simétrico.

El valor absoluto de cualquier número es no negativo, es decir siempre será positivo.

26.1 Propiedades del Valor Absoluto

Si a y b son dos números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $|-a| = |a| = a \geq 0$
- $|a|^2 = a^2$
- $|a| = \sqrt{a^2}$ donde \sqrt{a} denota la raíz no negativa de a , para cualquier número $a \geq 0$.

$$\bigcirc |ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\bigcirc \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Ejemplos:

$$1. |-11| = |11| = 11$$

$$2. |-12|^2 = (-12)^2 = 144$$

$$3. |5| = \sqrt{5^2} = 5$$

$$4. |8 \cdot 15| = |8| \cdot |15| = 120$$

$$5. \left| \frac{-7}{3} \right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}$$

$$6. \text{ Resolver la ecuación } |x| = 7$$

Solución: Dado que la ecuación aparece en valor absoluto se deben considerar dos casos

$$\bigcirc \text{ Si } x \geq 0, \text{ entonces } |x| = x \text{ de donde } x = 7$$

$$\bigcirc \text{ Si } x < 0, \text{ entonces } |x| = -x, \text{ de donde } -x = 7. \text{ Así, } x = -7$$

Por lo tanto $x = -7$ y $x = 7$ satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales distintos de cero.

26.2 Desigualdades y valor absoluto

En una fabrica de cuadernos se forma una comisión de control de calidad, pues en una encuesta se detectó que los consumidores opinan que el papel es bueno, pero el tamaño de los cuadernos no es uniforme: Unos son más anchos que otros. El ancho requerido es de 21.5 cm, y un cuaderno pasará el control de calidad si el error es de a lo más, 0.04 cm ¿Qué anchos pueden tener los cuadernos que hayan aprobado el contro del calidad?

Solución

Llamaremos x al ancho de un cuaderno,. El defecto en el ancho del cuaderno es la diferencial

$$x - 21.5$$

Como el cuaderno puede ser más ancho o más angosto, entonces consideremos el valor absoluto de la diferencia anterior. Dicho error puede ser de, a lo más 0.04 cm, es decir

$$|x - 21.5| = \begin{cases} x - 21.5 & \text{si } x - 21.5 \geq 0 \\ -(x - 21.5) & \text{si } x - 21.5 < 0 \end{cases}$$

Ahora resolvemos las siguientes desigualdades:

○ Si $x - 21.5 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} x - 21.5 &\leq 0.04 \\ x &\leq 0.04 + 21.5 \\ x &\leq 21.54 \end{aligned}$$

○ Si $x - 21.5 < 0$ entonces

$$\begin{aligned} -(x - 21.5) &\leq 0.04 \\ x - 21.5 &\geq -0.04 \\ x &\geq -0.04 + 21.5 \\ x &\geq 21.46 \end{aligned}$$

Un cuaderno para el control de calidad si su ancho está entre 21.46 y 21.54 cm.

26.3 Propiedades del Valor Absoluto

1. Si $|x| < k$ y $k > 0$ entonces

$$-k < x < k$$

. Los valores que satisface esta desigualdad, son todos los que estan comprendidos entre $-k$ y k

2. Si $|x| > k$ entonces $x > k$ o $x < -k$. Los puntos que satisfacen esta desigualdad son los valores desde menos infinito hasta $-k$ unido con los valores de k hasta más infinito

Ejemplo 2:**Resolver** $|5w - 2| < 5$

Utilizando una de las propiedades del valor absoluto tenemos, por ser 5 un número positivo que:

$$\begin{aligned} -5 &< 5w - 2 < 5 \\ 2 - 5 &< 5w < 5 + 2 \\ -\frac{3}{5} &< w < \frac{7}{5} \end{aligned}$$

es decir que $w \in \left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$

Ejemplo 3:**Resolver** $|3y + 2| \leq y + 4$

○ Se debe garantizar que $y + 4$ debe ser mayor que cero entonces

$$y + 4 \geq 0$$

para que halla solución, entonces

$$y \geq -4$$

entonces $y \in [-4, +\infty)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} |3y + 2| &\leq y + 4 \\ -(y + 4) &\leq 3y + 2 \leq y + 4 \\ -y - 4 - 2 &\leq 3y \leq y + 4 - 2 \\ -y - 6 &\leq 3y \leq y + 2 \\ -6 &\leq 3y + y \leq 2 + 2y \\ -6 &\leq 4y \leq 2 + 2y \\ -3 - 2y &\leq 2y \leq 2 \end{aligned}$$

○ hacerlo de es ta forma es un error, porque se vuelve un proceso ciclico.

○ Se debe resolver así

$$\begin{aligned} -(y + 4) &\leq 3y + 2 \text{ y } 3y + 2 \leq y + 4 \\ -y - 4 &\leq 3y + 2 \text{ y } 3y \leq y + 4 - 2 \\ -y - 6 &\leq 3y \text{ y } 3y - y \leq 2 \\ -6 &\leq 3y + y \text{ y } 2y \leq 2 \\ -\frac{3}{2} &\leq y \text{ y } y \leq 1 \end{aligned}$$

entonces $y \geq -4$ y $-\frac{3}{2} \leq y \leq 1$ cumplen la condición, entonces se hace una intersección y obtenemos con resultado

$$y \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$

Ejemplo 4:

Resolver $|6x - 5| > 4x + 7$

Utilizando la propiedad 2 del valor absoluto, tenemos:

$$\begin{aligned} 6x - 5 &> 4x + 7 \\ 6x - 4x &> 7 + 5 \\ 2x &> 12 \\ x &> 6 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (6x - 5) &< -(4x + 7) \\ 6x - 5 &< -4x - 7 \\ 6x + 4x &< -7 + 5 \\ 10x &< -2 \\ x &< -\frac{2}{10} \\ x &< -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Así, x es solución si satisface $x > 6$ y $x < -\frac{1}{5}$ es decir

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup (6, +\infty)$$