“Introducción a la Estadística, Probabilidad e Inferencia”

Maestría en Estadística Aplicada

Facultad de Ciencias Económicas y Estadística

UNR

Unidad 3

- Experimentos aleatorios. Espacio muestral. Eventos.
- Definiciones de probabilidad. Axiomas. Propiedades.
- Probabilidad condicional. Independencia. Teorema de Bayes.

Introducción

Cualquier texto introductorio sobre estadística, mencionará en sus primeros capítulos que la esencia de la mayor parte de los problemas que abordaremos en el campo de la estadística provienen de ***experimentos aleatorios***, observando fenómenos que están sujetos a variabilidad, es decir, que a pesar de realizar las observaciones de forma idéntica y bajo iguales circunstancias, los resultados observados pueden ser diferentes, no pudiendo predecirse de antemano el resultado que se obtendrá en una observación particular.

"…ya sea por falta de instrumentos de medición adecuados o precisos, por desconocimiento de las leyes que rigen los fenómenos o por no poder manejar todas las variables que intervienen en los mismos, por lo general nuestro conocimiento de la realidad circundante es sólo parcial…" (Arriojas (2004) p.5), hay incertidumbre. La ***incertidumbre*** es inherente a la naturaleza.

Introducción

¿Cómo tomar una decisión en situaciones de incertidumbre?

La ***Teoría de Probabilidades*** juega un rol fundamental en este sentido, ya que permite de cierto modo "medir" o "cuantificar" la incertidumbre, que forma parte de todo lo que nos rodea.

En efecto, a diario enfrentamos en la vida cotidiana muchas situaciones de incertidumbre frente a las que debemos tomar una decisión. Más aún, cuando pretendemos inferir conclusiones a partir de información parcial, tales inferencias tendrán un grado de incertidumbre.

En esta unidad se presentará una introducción a la Teoría de Probabilidades, como fundamento para la inferencia estadística, la que finalmente nos permitirá tomar una decisión sobre nuestro problema.

Definiciones y notación

Experimento aleatorio (*E*): llamamos experimento al proceso de obtener y observar el resultado de algún fenómeno. Llamaremos experimento aleatorio a aquellos que pueden repetirse bajo idénticas condiciones pero cuyos resultados no pueden predecirse exactamente, es decir, no puede anticiparse el resultado que ocurrirá en cada repetición, aunque sí hay ***regularidad*** de los mismos en la observación repetida bajo iguales condiciones.

Espacio muestral (*Ω*): es el conjunto que reúne a todos los posibles resultados del experimento.

Resultado elemental (*ω*): cada uno de los resultados posibles del experimento, son los elementos individuales que componen el espacio muestral.

Evento o suceso (A, B, C,…): cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, subgrupos de resultados elementales. Se dice que un evento ***ocurre*** si se presenta alguno de sus elementos al realizar el experimento.

Definiciones y notación

Ejemplos:

- $\boldsymbol{E_1}$: arrojar dos monedas al aire y observar la cara superior de cada moneda.
- $\boldsymbol{\Omega = \{CC, XC, CX, XX\}}$
- Evento A: obtener al menos una cara $\Rightarrow \boldsymbol{A = \{CC, XC, CX\}}$

- $\boldsymbol{E_2}$: lanzar una moneda al aire repetidamente hasta obtener cara
- $\boldsymbol{\Omega = \{C, XC, XXC, XXXC, \dots\}}$
- Evento B: la moneda se lanza a lo sumo 2 veces $\Rightarrow \boldsymbol{B = \{C, XC\}}$

- $\boldsymbol{E_3}$: probar una lamparita y medir las horas transcurridas hasta que se quema
- $\boldsymbol{\Omega = \{t \in \mathbb{R} \ / \ t \geq 0\}}$
- Evento C: la lamparita dura al menos 5 horas $\Rightarrow \boldsymbol{C = [5, +\infty)}$

Definiciones y notación

Diferentes experimentos pueden originar distintos tipos de espacios muestrales:

- **Espacio muestral finito:** Ω consiste de un número finito de resultados posibles (ejemplo E_1).

- **Espacio muestral infinito numerable:** los elementos de Ω pueden ponerse en una correspondencia uno a uno con los número naturales (ejemplo E_2).

- **Espacio muestral discreto:** diremos que Ω es discreto si es finito o infinito numerable.

- **Espacio muestral continuo:** Ω está compuesto por resultados que pueden asumir cualquier valor en un intervalo real (ejemplo E_3).

Definiciones y notación

Mas definiciones:

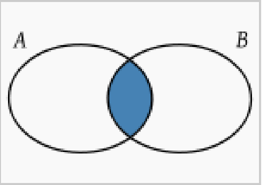
- **Evento seguro:** aquel que ocurre siempre en todas las realizaciones del experimento (Ω).
- **Evento imposible:** aquel que no ocurre nunca en las realizaciones del experimento ($\emptyset$).
- **Evento elemental:** aquel evento que contiene sólo uno de los resultados posibles de Ω.

Vemos que los eventos son conjuntos de elementos. Como tales, valen para ellos las operaciones de conjuntos que repasamos a continuación:

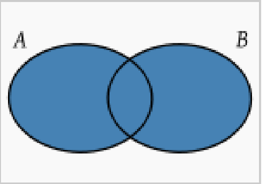
Definiciones y notación

Sea Ω el espacio muestral de un determinado experimento E, y sean A y B dos eventos. Entonces:

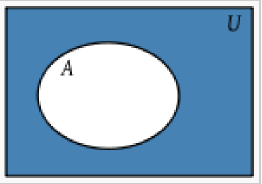
- **Intersección: $\boldsymbol{A \cap B}$.** Evento en el que A y B ocurren simultáneamente.



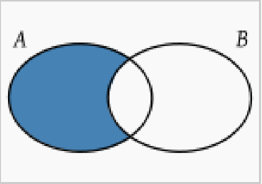
- **Unión: $\boldsymbol{A \cup B}$**. Evento en el que A o B ocurren (uno o ambos).



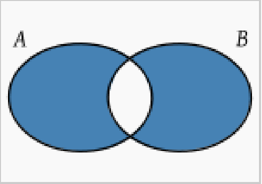
- **Complemento: $\boldsymbol{A^c}$**. Evento complemento de A (no ocurre A).



- **Diferencia: $\boldsymbol{A - B = A \cap B^C}$**. Evento en el que ocurre A y no ocurre B.



- **Diferencia simétrica: $\boldsymbol{(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)}$**. Evento en el que ocurre exclusivamente A o exclusivamente B.



Definiciones y notación

<u>Generalizaciones:</u> Siendo A_i eventos para todo i, las operaciones de unión e intersección se pueden extender a un número finito o infinito numerable de eventos:

- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ $\qquad$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ $\qquad$ $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ $\qquad$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

<u>Leyes de De Morgan:</u> leyes de intercambio de la unión y la intersección bajo la complementación:

- $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ $\qquad$ $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$
- $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$ $\qquad$ $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

con I un conjunto finito o infinito numerable.

<u>Eventos mutuamente excluyentes (o disjuntos):</u> Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.
Más de dos eventos A_1, A_2, A_3,… son mutuamente excluyentes si son mutuamente excluyentes de a pares, es decir, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

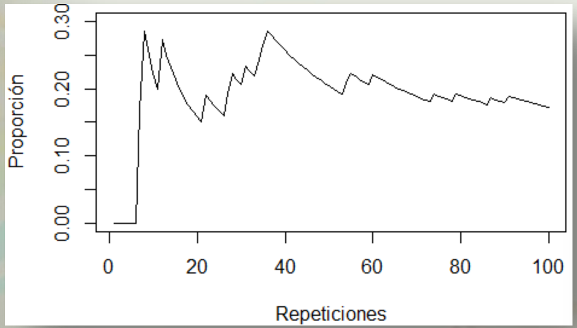
Definiciones de probabilidad

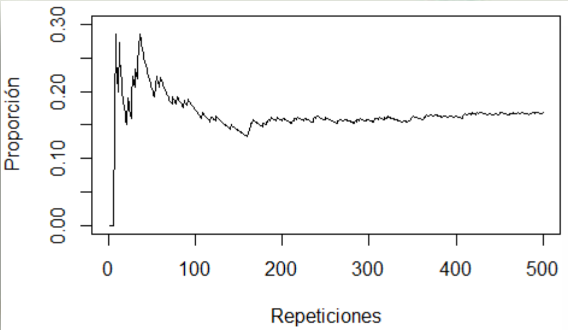
Dado un experimento aleatorio, ***¿cómo asignar probabilidad a un evento de interés?***

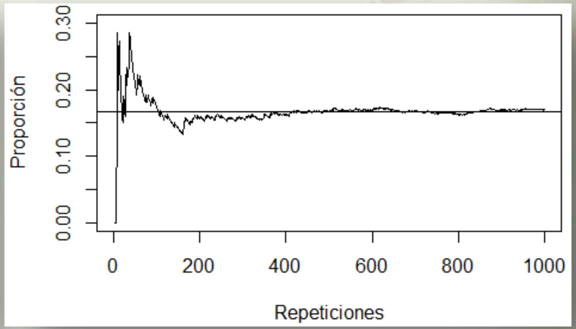
¿Cuál será, por ejemplo, la probabilidad de obtener un 6 al lanzar un dado?

Probemos lanzar el dado al aire y observar el resultado: 2, 3, 1, 5, 4, 6, …
¿cuántas veces será necesario hacerlo? 2, 3, 2, 5, 4, 6, 2, 3, 6, 3, 5, 6, …

En estas 12 repeticiones obtuvimos 3 veces el número 6… ¿podemos decir que la probabilidad de obtener 6 al lanzar el dado es entonces 3/12?







Definición frecuencial de probabilidad

En los experimentos aleatorios, la proporción de veces que ocurre un determinado evento es muy variable a corto plazo, pero tiende a estabilizarse alrededor de un valor a medida que el número de repeticiones del experimento aumenta. Esta propiedad se conoce como ***regularidad estadística*** y provee una base para la definición de la probabilidad del evento.

Si llamamos con $n(A)$ a la frecuencia de ocurrencia del evento A en N realizaciones del experimento, entonces, la ***frecuencia relativa de A*** en esas realizaciones está dada por $f_A = \frac{n(A)}{N}$.

Si para el evento A existe el límite de f_A cuando N tiende a infinito, ese valor límite se llama ***probabilidad de A***, y se simboliza $\boldsymbol{P(A)}$.

OBS: Enfatizamos que $f(A)$ y $P(A)$ no son lo mismo!

Definición frecuencial de probabilidad

Con esta definición frecuencial de la probabilidad,

¿qué significa entonces que el número 6 tenga probabilidad 1/6 de ocurrir al lanzar un dado?

Esto significa que la proporción de veces que saldrá 6 al lanzar el dado en una larga secuencia de tiradas es 1/6.

¿qué significa que el pronóstico del clima diga que la probabilidad que hoy llueva es del 70%?

La definición dada dice "…cuando N tiende a infinito..."

¿Por qué necesitamos tener un gran número de repeticiones para poder definir un valor de probabilidad?

Definición clásica de probabilidad

La definición frecuencial es una de las formas en que se puede asignar probabilidad a un evento, aunque existen otras.

La ***definición clásica*** (o ley de Laplace) asigna a cada evento A una probabilidad igual a la proporción de resultados favorables a la ocurrencia del evento A, entre todos los casos posibles. Esto es:

$$P(A) = \frac{resultados\ de\ \Omega\ favorables\ a\ A}{resultados\ posibles\ en\ \Omega}$$

Aunque esta definición es muy intuitiva y simple, es también muy limitante ya que sólo es válida para ***espacios muestrales finitos*** y ***resultados equi-probables***.

Definición axiomática de probabilidad

Hacia principios del siglo XX, luego del desarrollo de la teoría de conjuntos y de la teoría de la medida, fue posible una axiomatización de la probabilidad. En el año 1933 Andrey Kolmogorov formuló un ***sistema de axiomas para la probabilidad***, de modo tal que esta construcción axiomática incluye a las probabilidades clásica y frecuencial como casos particulares, pero superando sus carencias.

Este desarrollo basado en la teoría de la medida le proporcionó a la teoría de probabilidad un fundamento lógico para el cálculo de las mismas y lo conectó a la corriente principal de la matemática moderna, transformándola en una disciplina abstracta, simbólica y sin referencia a ninguna interpretación particular. Esta definición estableció las bases para la moderna Teoría de Probabilidad.

Definición axiomática

Dado un experimento aleatorio, sea Ω el espacio muestral y sean A_1, A_2, A_3, …posibles eventos.

Una función que asigna un valor $P(A)$ a cada evento A se llama función de probabilidad si satisface los siguientes **axiomas** (conocidos como axiomas de Kolmogorov):

- $P(A) \geq 0$ para todo evento A
- $P(\Omega) = 1$
- Si $A_i \cap A_j = \emptyset \;\Rightarrow\; P\left(A_i \cup A_j\right) = P(A_i) + P(A_j)$

Si esto se verifica, el valor $P(A)$ se llama **probabilidad del evento A**.

Definición axiomática

Tanto la definición clásica como la frecuencial de probabilidad verifican los axiomas.

En efecto, si $P(A) = n(A)/N$, entonces:

- $P(A) \geq 0$ puesto que las cantidades $n(A)$ y N son no negativas.
- $P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{N} = \frac{N}{N} = 1$, puesto que Ω ocurre en cada una de las N repeticiones del experimento.
- Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ con lo cual $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} = P(A) + P(B)$

Lo mismo sucede con la probabilidad definida clásicamente.

Algunas propiedades de la probabilidad

A partir de los axiomas dados en la definición, se pueden deducir numerosas propiedades que verifica la función probabilidad, algunas de las cuales se mencionan a continuación:

- Si A es un evento y A^c es su complemento, entonces:
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Para cualquier evento A resulta $P(A) \leq 1$.

- Para dos eventos <u>cualesquiera</u> A y B, se verifica que:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Para tres eventos <u>cualesquiera</u> A, B y C se verifica que:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

Probabilidad condicional

¿Qué pasaría con la probabilidad de obtener un 6 al lanzar un dado, si supiéramos que el resultado del lanzamiento es un número par?

En ocasiones es necesario ***actualizar*** *o* ***revisar*** el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un evento A, a partir de la información que provee la ocurrencia de otro evento B. Es decir, interesa saber cuán probable es que ocurra A si ya se ha presentado el evento B.

Estas probabilidades *revisadas* reciben el nombre de ***probabilidades condicionales*** y se calculan, siempre que $P(B) \neq 0$, como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De la definición se desprende que el cálculo de una probabilidad condicional no es más que ***el cálculo de la probabilidad del evento de interés restringiendo el espacio muestral al conjunto de eventos favorables a B***.

Probabilidad condicional

<u>Ejemplo 1:</u> Retomemos el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire y observar el número de la cara superior.

Si sabemos que el resultado del lanzamiento es un número par, ¿cuál es la probabilidad que el resultado sea un 6?

Todos los resultados del espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ son igualmente probables con probabilidad 1/6.

Sean los sucesos:

A: el resultado es un 6 $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

B: el resultado es un número par $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{A \cap B}$: el resultado es par y es igual a 6 $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Luego, la probabilidad de interés es: $\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

La probabilidad del evento A aumentó frente al conocimiento aportado por la ocurrencia de B.

Probabilidad condicional

<u>Ejemplo 2:</u> una mujer es portadora de la enfermedad de Duchenne, un tipo de distrofia muscular hereditaria.

Según las leyes de Mendel, los posibles genotipos de un hijo de una madre portadora (xX) y un padre sano (XY) son xX (niña portadora), xY (niño enfermo), XX (niña sana) y XY (niño sano), y todos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Si la mujer tiene un hijo varón, ¿cuál es la probabilidad que el niño tenga la enfermedad?. Sean los sucesos:

A: el hijo es varón $\Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = 0.50$

B: el hijo tiene la enfermedad $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = 0.50$

$\boldsymbol{A \cap B}$**:** el hijo es varón y tiene la enfermedad $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0.25$

Luego, la probabilidad de interés es: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.50} = 0.50$

¿Qué sucedió con la probabilidad de B en función de la información aportada por A?

Probabilidad condicional

La probabilidad condicional así definida verifica los tres axiomas de Kolmogorov:

- $P(A|B) \geq 0$, puesto que es cociente de probabilidades.

- $P(\Omega|B) = P(B)/P(B) = 1$, pues $\Omega \cap B \ = B$.

- Si A_1 y A_2 son disjuntos $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, pues $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$, y si A_1 y A_2 son disjuntos, también lo son $A_1 \cap B$ y $A_2 \cap B$.

Por lo tanto la probabilidad condicional es también una función de probabilidad.

Probabilidad condicional - Propiedades

Las propiedades derivadas de los axiomas para la probabilidad, también se verifican para la probabilidad condicional:

- $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

- $P(A|B) \leq 1$

- Si A_1 y A_2 son eventos cualesquiera, entonces:
  $$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$$

De la definición de probabilidad condicional se deduce una importante regla para el cálculo de probabilidades, conocida como ***teorema de la multiplicación o regla del producto.***

Teorema de la multiplicación
(regla del producto)

Si A y B son eventos cualesquiera, entonces:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)}$$

Esta regla puede generalizarse al caso de la probabilidad simultánea de más de dos eventos. En general:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son eventos cualesquiera, entonces:

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n \middle| \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}$$

<u>Ejemplo:</u> Suponga un experimento consistente en selccionar 3 cartas de una baraja de 50 cartas, sin reposición ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 reyes?

Eventos independientes

Retomemos el ejemplo de las mujeres con la enfermedad de Duchenne y la posibilidad que sus hijos varones tuvieran también la enfermedad.

Calculamos que la probabilidad de tener un hijo varón es 0.50 y que la de tener un hijo con la enfermedad (ya sea niña o niño) es también 0.50.

Luego, si el bebé que nace es varón, obtuvimos que la probabilidad de que tenga la enfermedad, sabiendo que es varón, es también 0.50.

Saber el sexo del bebé recién nacido, ¿aportó información adicional a la probabilidad de que se haya heredado la enfermedad?

Cuando la ocurrencia de un evento no altera o modifica la probabilidad de ocurrencia de otro evento, se dice que ellos son ***eventos independientes.***

Eventos independientes

La definición de probabilidad condicional nos permite *actualizar* la $P(A)$ asignada a un evento, cuando se sabe que otro evento B ha ocurrido.

En algunos casos $P(A|B) \neq P(A)$, pero en otros, como hemos visto, $P(A|B) = P(A)$, es decir, la ocurrencia del evento B no modifica la probabilidad de ocurrencia de A, y en ese caso los eventos se dicen ***independientes.***

Definición: Los eventos A y B son independientes si y sólo si:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Si la igualdad no se cumple, los eventos son dependientes.

Esta definición es equivalente a decir que A y B son eventos independientes si $P(A|B) = P(A)$ o si $P(B|A) = P(B)$. Sin embargo estas condiciones son válidas, siempre que $P(B) \neq 0$ o $P(A) \neq 0$, respectivamente, mientras que la definición dada es válida para todo par de eventos.

Eventos independientes

La definición dada, haba de la independencia entre dos eventos. Si se tienen más de dos eventos, es posible generalizar la noción de independencia:

Los eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ se dicen **colectivamente independientes** o **mutuamente independientes** si para todos los posibles subconjuntos de estos n eventos se verifica que:

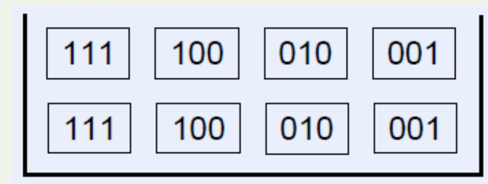
$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right) \qquad \forall\, k = 2, \ldots, n$$

es decir, si la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades individuales para todos subgrupos de a $2, 3, \ldots, n$ eventos. Dados n eventos, en total habrá $2^n - n - 1$ condiciones a verificar.

Precaución: la independencia de a pares NO implica independencia colectiva.

Eventos independientes

Ejemplo: Una caja contiene 8 tickets identificados con números binarios y se selecciona uno al azar.



Sean los eventos:

A: el primer dígito es 1

B: el segundo dígito es 1

C: el tercer dígito es 1

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Entonces hay independencia de a pares, puesto que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B); P(A \cap C) = P(A)P(C) \;\; y \;\; P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Pero no hay mutua independencia, pues:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Probabilidad total y Regla de Bayes

Hemos visto como utilizar el concepto de probabilidad condicional para calcular la probabilidad de la ocurrencia simultánea de dos (o más) eventos.

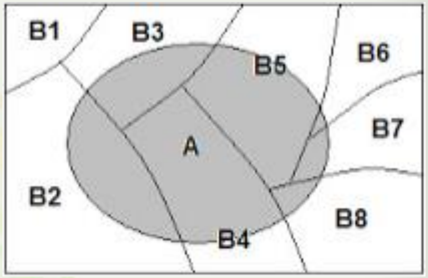
Veremos ahora que estos conceptos nos permiten también:

- Calcular la probabilidad marginal de un evento de interés, a partir del conocimiento de ciertas probabilidades condicionales: ***Teorema de la probabilidad total.***
- Revisar la probabilidad condicional de un evento A dado un evento B, a partir del conocimiento de la probabilidad condicional "invertida", es decir, P(B/A): ***Teorema de Bayes.***

Teorema de la probabilidad total

Sea $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k\}$ una ***partición*** del espacio muestral Ω. Esto es, los B_i son mutuamente excluyentes y exhaustivos. Sean las $P(B_i)$ conocidas para todo $i = 1, \ldots, k$.

Sea $A \subset \Omega$ un evento de interés y supongamos que sólo se conocen las probabilidades de A condicionado a cada uno de los B_i, es decir, $P(A|B_i)$.



El ***teorema de la probabilidad total*** permite calcular la probabilidad total de A a partir de dichas probabilidades condicionales de la siguiente manera:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)$$

Teorema de la probabilidad total

<u>Ejemplo:</u> Suponga que en un proceso productivo, los productos resultantes son obtenidos mediante una de tres líneas de montaje en funcionamiento. La línea 1 genera el 30% de la producción, con una tasa de defectuosos del 1.2%, la línea 2 genera el 25% de la producción con una tasa de defectuosos del 1.5%, y la línea 3, responsable del resto de la producción genera un 1% de defectuosos.

Si se selecciona al azar un producto de entre los generados por este proceso, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Teorema de la probabilidad total

<u>Ejemplo 1:</u> Suponga que en un proceso productivo, los productos resultantes son obtenidos mediante una de tres líneas de montaje en funcionamiento. La línea 1 genera el 30% de la producción, con una tasa de defectuosos del 1.2%, la línea 2 genera el 25% de la producción con una tasa de defectuosos del 1.5%, y la línea 3, responsable del resto de la producción genera un 1% de defectuosos.

Si se selecciona al azar un producto de entre los generados por este proceso, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

En este mismo problema, suponga ahora que ha seleccionado un producto y éste es defectuoso… ***¿podría calcular la probabilidad de que haya sido generado por una de las líneas en particular?***

Regla de Bayes

Bajo las mismas condiciones del teorema de la probabilidad total, el ***Teorema de Bayes*** permite ***revisar*** la probabilidad a priori del evento B_i para incorporar la información adicional que provee la ocurrencia de un evento relacionado (el evento A).

Dado que ocurrió el evento A, la probabilidad revisada o a posterior del evento B_i es:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Nótese que se ha usado la regla del producto en el numerador y el teorema de la probabilidad total en el denominador.

Regla de Bayes

<u>**Ejemplo 2:**</u> sobre los datos del ejemplo de las líneas de montaje, suponemos que se ha seleccionado un producto y el mismo fue defectuoso. ***¿Cuál es la probabilidad de que haya sido generado por una de las líneas en particular, por ejemplo, la línea 2?***

Teníamos:

$P(L_1) = 0.30$ y $P(D|L_1) = 0.012$

$P(L_2) = 0.25$ y $P(D|L_2) = 0.015$

$P(L_3) = 0.45$ y $P(D|L_3) = 0.010$

La probabilidad de interés: $\boldsymbol{P(L_2|D)}$

Aplicando la regla de Bayes, tenemos:

$$P(L_2|D) = \frac{P(D|L_2)P(L_2)}{P(D|L_1)P(L_1) + P(D|L_2)P(L_2) + P(D|L_3)P(L_3)} =$$

$$= \frac{0.015\ \ 0.25}{0.012\ \ 0.30 + 0.015\ \ 0.25 + 0.010\ \ 0.45} = 0.316$$

Probabilidad total y Regla de Bayes

Ejemplo 3: Suponga que cierta prueba para detectar una enfermedad, cuya prevalencia es 0.01, da un resultado positivo en un individuo enfermo con probabilidad 0.99 y en un individuo sano con probabilidad 0.02.

Siendo A el evento *"la prueba es positiva"* y B el evento *"la persona padece la enfermedad"*, la información provista indica que:

$P(A|B) = 0.99$; $P(A|B^c) = 0.02$ y $P(B) = 0.01$

A partir de las propiedades de probabilidad puede deducirse además que:

$P(A^c|B) = 0.01$ y $P(A^c|B^c) = 0.98$

Si se selecciona un individuo al azar de la población, ¿cual es la probabilidad que la prueba le de positiva?

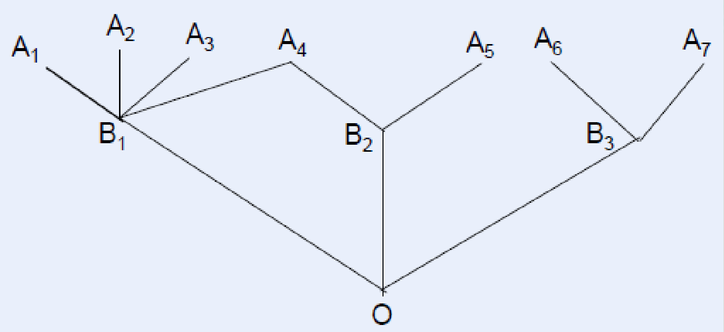
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) = 0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.02 = 0.0297$$

Ahora, supongamos que se selecciona un individuo al azar de la población, se le aplica la prueba y da positiva, ¿cuál es la probabilidad de que en efecto esté enferma?

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.0297} = 0.333$$

Probabilidad total y Regla de Bayes

Ejemplo 4: Un excursionista comienza a caminar en el punto O del mapa que se muestra. Primero elige un camino al azar y lo sigue hasta llegar a alguno de los puntos B_1, B_2 o B_3. Luego vuelve a elegir un camino al azar y lo sigue hasta llegar a alguno de los puntos $A_i, i = 1{:}\,7$.



¿Cuál es la probabilidad que la persona llegue al punto A_4?

Si la persona efectivamente arribó al punto A_4, ¿Cuál es la probabilidad que haya pasado por el punto B_1? ¿y por el B_2?

$$P(A_4) = P(A_4|B_1)P(B_1) + P(A_4|B_2)P(B_2) + P(A_4|B_3)P(B_3)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(B_1|A_4) = \frac{P(A_4|B_1)P(B_1)}{P(A_4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{1}{3}$$

$P(B_2|A_4) =$…

ANEXO - Técnicas de conteo

Son técnicas que permiten contar todas las formas posibles en que ocurre un evento determinado.

Principio de la multiplicación:

Sea una actividad que implica la realización de r operaciones sucesivas. Cada una de estas operaciones, r_i, puede ser realizada de n_i formas diferentes. Entonces, el número total formas de realizar la actividad completa es el producto:

$$\prod_{i=1}^{r} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$$

Ejemplos:

- ¿De cuántas maneras se puede responder un examen de 10 preguntas de tipo verdadero-falso?

-¿Cuántas matrículas de autos pueden formarse con el nuevo formato? (2 letras, 3 números, 2 letras, considere 26 letras en el alfabeto).

ANEXO - Técnicas de conteo

Principio aditivo:

Sea una actividad que puede ser realizada de r formas diferentes. Cada una de ellas puede implementarse de n_i formas distintas. Entonces, el número total formas de realizar la actividad es la suma:

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

Ejemplos:

- Para llegar de su hogar al trabajo una persona puede optar por ir caminando, ir en su auto, para lo cual tiene dos caminos alternativos o tomar el subte, optando por tres líneas alternativas que llegan a la misma estación. ¿De cuántas maneras diferentes puede ir esta persona a su trabajo?

ANEXO - Técnicas de conteo

Permutaciones de n elementos:

Una permutación es un ***arreglo ordenado*** de un conjunto de objetos, donde por arreglo ordenado se entiende que el orden en que se presentan los elementos importa.

La fórmula para hallar el número de permutaciones de n elementos distintos es:

- $P_n = n!$ si no se permite repetición de los elementos.
- $P_n{}' = n^n$ si se permite que los elementos se repitan.

Si entre los n elementos hay subgrupos de elementos iguales de tamaños n_1, n_2, …, n_k, el número de permutaciones diferentes se obtiene como:

- $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

Ejemplo:

- N° de 3 cifras que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3 sin repetir: $P_3 = 3! = 6$
- Y repitiendo las cifras? $P_3' = 3^3$
- Se tienen 5 bolillas, 3 son blancas y 2 negras. ¿Cuántos arreglos distinguibles pueden formarse con las 5 bolillas? $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

ANEXO - Técnicas de conteo

Arreglos o variaciones:

Dados n elementos distintos, un arreglo es una selección ordenada de r de ellos.

La fórmula para hallar el número de arreglos de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos es:

- $A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ si no se permite la repetición de elementos.
- $A'_{n,r} = n^r$ si se permite que los elementos se repitan en el arreglo.

Ejemplo: En una clase de 10 alumnos van a repartirse tres premios distintos. De cuántos modos puede hacerse si:

- Una misma persona puede recibir más de un premio: $A'_{10,3} = 10^3 = 1000$
- Una misma persona no puede recibir más de un premio:

$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!}$ =720

ANEXO - Técnicas de conteo

Combinaciones:

Las combinaciones de un conjunto son las diferentes formas en que se pueden seleccionar los elementos de un conjunto dado, sin importar el orden en que se presentan los elementos.

La fórmula para hallar el número de combinaciones de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos es:

- $nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ si no se permite repetir los elementos en la selección
- $nC'r = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ si se permite la selección repetida de elementos.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se puede formar un consejo compuesto por 3 miembros elegidos entre 8 candidatos?

$$ {}_8C_3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56 $$

Bibliografía.

- Agresti A., Franklin C. (2009) The art and science of learning from data. 2° Ed. New Jersey. Pearson Prentice Hall.
- DeGroot M., Schervish M. (2012). Probability and Statistics. 4° Ed. Pearson Education Inc.
- Grimmett G.R., Stirzaker, D.R. (2001). Probability and Random Processes. 3° Ed. Oxford University Press.
- Meyer P. (1998). Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Edición revisada. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Ross S. (2010). A First Course in Probability. 8° Ed. Pearson Prentice Hall.