“Introducción a la Estadística, Probabilidad e Inferencia”

Maestría en Estadística Aplicada

Facultad de Ciencias Económicas y Estadística

UNR

fppt.com

Unidad 4

- Conocer algunas de las distribuciones de probabilidad discretas y continuas más usuales.
- Momentos.
- Propiedades.

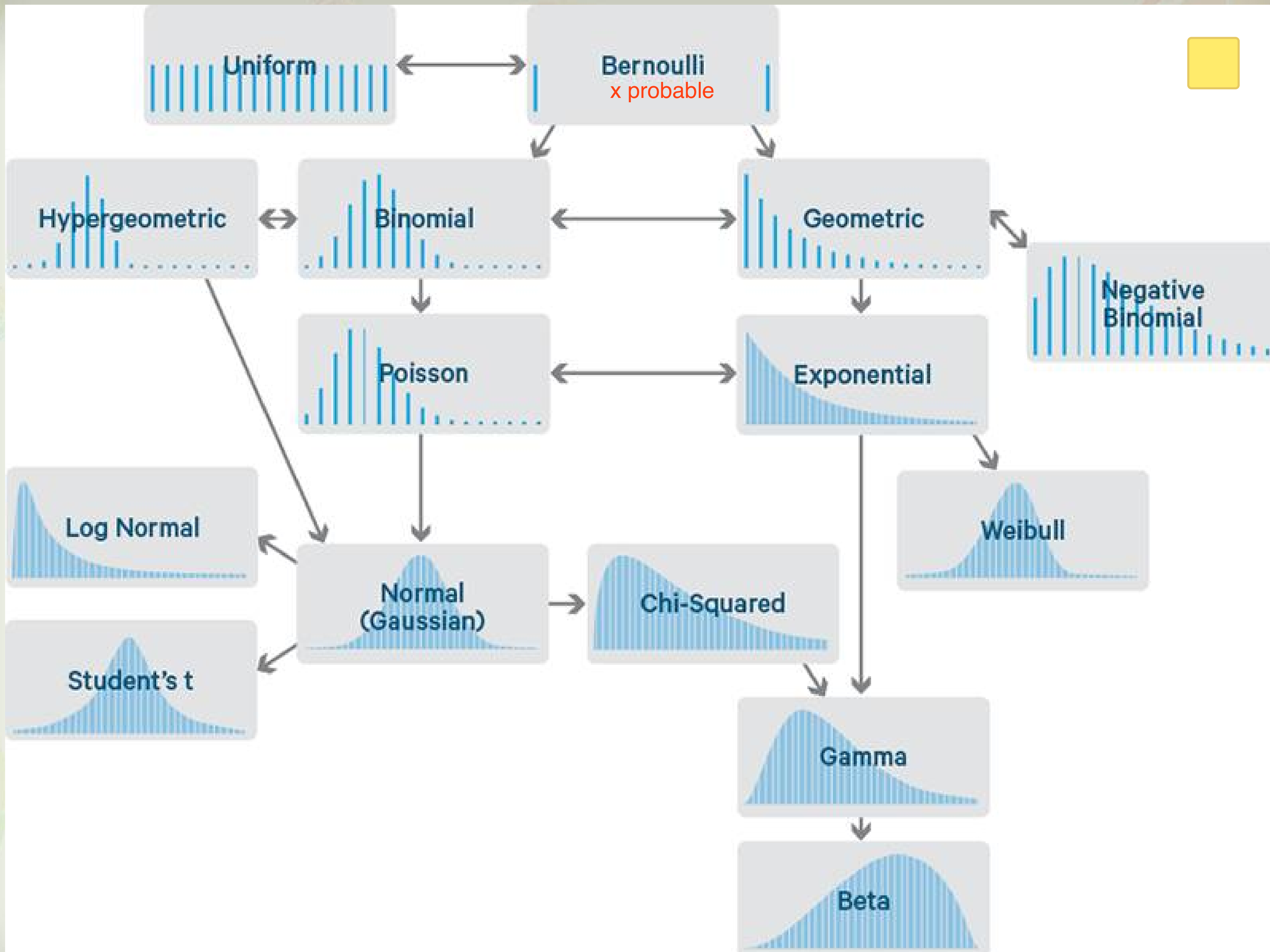
fppt.com

“Cuando se elaboran modelos no determinísticos para fenómenos observables, encontramos que ciertas distribuciones de probabilidades aparecen más frecuentemente que otras.

Una razón de esto es que, como en el caso determinístico, ciertos modelos matemáticos relativamente simples parecen ser capaces de describir un gran número de fenómenos.”

Paul L. Meyer

fppt.com


Uniform
Bernoulli
x probable
Hypergeometric
Binomial
Geometric
Negative Binomial
Poisson
Exponential
Weibull
Log Normal
Normal (Gaussian)
Chi-Squared
Student's t
Gamma
Beta

fppt.com

Distribuciones discretas

fppt.com

Ejemplo 1

Se tiene un dado con caras numeradas del 1 al 6.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 al arrojar el dado?.

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución de Bernoulli

Comprende un único intento de un experimento donde hay sólo dos eventos: E y E´

P(E)=p y P(E´)=q=1-p

p=1/6

La variable aleatoria correspondiente es: $X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in E \\ 0 & \text{si } e \in E' \end{cases}$

La función de probabilidad es: $P(X=k)=p^k q^{1-k} \qquad k=0,1$

p(x=1)=1^1 q^(1-1) = p

Esperanza y variancia: $E(X)=p \qquad Var(X)=pq$

fppt.com

Ejemplo 2

Se tienen 10 fichas negras y 20 blancas en una urna.
El experimento consiste en extraer 5 fichas con reemplazo.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 fichas negras?

n=5
2da) p = 10/30
1ra) Éxito: obtuvieron fichas negras

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Binomial

Sea:

- *n*: número de pruebas de Bernoulli independientes.
- *p*: probabilidad de éxito en cada prueba; $q=1-p$.

La variable aleatoria X se define como:

"*número de éxitos en los n ensayos independientes*".

Con reposición

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Binomial

La función de probabilidad es: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad k=0,1,\ldots n$

Esperanza y variancia: $E(X)=np \quad Var(X)=npq$

La función de distribución es: $F_X(x)=\sum_{k=0}^{x} p(k) \quad x=0,1,\ldots n$

P(X<=x)

fppt.com

Ejemplo 3

Se tiene un examen con 20 preguntas con respuesta múltiple, cada una de ellas con 4 opciones posibles.
Se supone que el alumno desconoce en absoluto el tema.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 80% de respuestas correctas?
  Se resuelve a traves de Distribución Binomial - Probabilidad puntual
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener como máximo el 50% de respuestas correctas?
  Probabilidad acumulada
  Utilizando R el resultado es 0.9960579

fppt.com

Ejemplo 4

Se embarcan motores eléctricos pequeños en lotes de 50.
Antes de que un cargamento sea aceptado, un inspector elige 5 motores y los inspecciona. Si ninguno de los motores es defectuoso, el lote es aceptado.
Si se encuentra que al menos uno es defectuoso, se inspecciona el cargamento completo.
Suponga que, en realidad, hay 3 motores defectuosos en el lote.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesaria una inspección del 100%?.

Probabilidad de encontrar 1 defectuoso en un lote de 50.

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Hipergeométrica

Sea:

- una población finita con *N* elementos. Tipo 1: Nro de éxitos
- *M*: número de elementos de tipo 1; (*N*-*M*) son de tipo 2.
- *n* : el número de elementos que se extraen aleatoriamente y **<u>sin reposición</u>**.

La variable aleatoria X correspondiente es:

"*número de elementos de tipo 1 extraídos en las n extracciones sin reposición*".

La función de probabilidad es:

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k=0,1,2,\ldots$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Hipergeométrica

Lógicamente no se pueden obtener más que M elementos tipo 1, pero la probabilidad cero será asignada a ese suceso y por eso se define la P(X=k) con k=0,1,2,….

Esperanza y variancia:

$$E(X) = \frac{nM}{N} = np$$

$$V(X) = \frac{n(M/N)(1-M/N)(N-n)}{(N-1)}$$

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{x} p(x) \quad x=0,1,2,\ldots$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Relación entre la Binomial y la Hipergeométrica

La distribución Hipergeométrica se aproxima a la Binomial.

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow[N\to\infty]{} \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}$$

La distribución Binomial se aplica cuando se muestrea con reposición (la probabilidad de obtener un elemento tipo 1 es constante), mientras que la distribución Hipergeométrica se aplica al muestrear sin reposición.

Si el tamaño de la población es grande, no hay diferencia si se devuelve o no un elemento antes de elegir el siguiente.

La aproximación es muy buena, en general, si $(n/N) \leq 0{,}1$.

fppt.com

Ejemplo 5

Un jugador de fútbol acierta un penal con una probabilidad igual a 0.80.
Se supone que los intentos son independientes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que requiera 3 intentos para convertir por primera vez? El número de intentos hasta el primer éxito

Veremos que si el jugador hubiese errado 10 penales seguidos, la probabilidad de que falle dos más y luego convierta es la misma.

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Geométrica

En la distribución Binomial, ***n*** **se considera fijo** y se calcula la probabilidad de *k* éxitos.

En la distribución Geométrica, el número de repeticiones, ***n***, **es una variable aleatoria**.

La variable aleatoria X se define como:

"*número de pruebas necesarias para obtener el primer éxito*".

La función de probabilidad es: $P(X=k)=q^{k-1}p \quad k=1,2,3,\ldots$

$X=k \Leftrightarrow$ las primeras (k-1) repeticiones son fracasos y la k-ésima es un éxito.

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Geométrica

Esperanza y variancia: $E(X) = \frac{1}{p}$ $\quad V(X) = \frac{q}{p^2}$

Con valores pequeños de p=P(éxito) se necesitan muchas repeticiones a fin de que ocurra el éxito.

La función de distribución es:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{x} pq^{i-1} = 1 - q^x \qquad x = 1,2,3...$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Geométrica

Si $X \sim Ge(p)$ y si se considera $Z=X-1$, se puede interpretar a Z como el número de fallas que preceden al primer éxito.

Luego:

$$P(Z=k)=q^k p \quad k=0,1,2,\ldots$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Geométrica

Esta distribución tiene una propiedad interesante:

$$P(X \geq s + t / X > s) = P(X \geq t)$$

Si el suceso A no ha ocurrido durante las primeras *s* repeticiones, entonces la probabilidad de que no ocurra durante las próximas *t* repeticiones es la misma que la de que no ocurra durante las primeras *t*.

La información de ningún éxito es olvidada en lo que se refiere a cálculos subsecuentes. ⇒ "La distribución Geométrica no tiene memoria".

El recíproco de esta propiedad también es cierto.

fppt.com

Ejemplo 6

Dos jugadores de tenis, A y B, juegan al mejor de 5 sets. La probabilidad de que el jugador A gane un set es 0.70. Los sets se consideran independientes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane en 5 sets?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el partido dure 5 sets?

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Binomial Negativa o de Pascal

La variable aleatoria X se define como:

"*número de pruebas necesarias hasta obtener exactamente r éxitos*".

La función de probabilidad es:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}q^{k-r} \quad k=r, r+1\ldots$$

k: nro de pruebas necesarias

Esperanza y variancia:

$$E(X)=\frac{r}{p} \qquad V(X)=\frac{rq}{p^2}$$

Es una generalización de la distribución Geométrica (caso particular si r=1).

fppt.com

Distribuciones discretas

Relación entre la Binomial y la Binomial Negativa

La Binomial Negativa es llamada también Binomial Inversa.

Supongamos que $X \sim BN(r, p)$ y que $W \sim Bin(n, p)$.

Resulta entonces que:

$$P(X \leq n) = P(W \geq r)$$

Tener r o más éxitos en los primeros n intentos significa que se necesitan n o menos intentos para obtener los primeros r éxitos.

De esta relación resulta:

$$\underbrace{F_X(x)}_{\text{Binomial Negativa}} = P(X \leq x) = P(W \geq r) = 1 - P(W < r) = 1 - F_W(r-1) = \underbrace{F_W(x-r)}_{\text{Binomial}}$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Relación entre la Binomial y la Binomial Negativa

En resumen:

✓En cada uno de los casos, interesan los ensayos repetidos de Bernoulli.

✓La distribución Binomial aparece cuando se considera un número fijo de tales ensayos (n) y estamos interesados en el número de éxitos que ocurren.

✓La distribución de Pascal se encuentra cuando se prefija el número de éxitos que se quieren obtener y luego se anota el número de ensayos de Bernoulli necesarios.

fppt.com

Ejemplo 7

Supongamos que se tira un dado y se quiere obtener 2 veces un valor igual a 1.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que tirar el dado 6 veces o menos?

La probabilidad de obtener 2 unos en 6 ó menos intentos es equivalente a la probabilidad de obtener 4 ó menos veces números distintos de 1 en 6 intentos.

fppt.com

Ejemplo 8

Las llamadas telefónicas llegan a una central y en un período especial de 180 minutos se han recibido un total de 270 llamadas, es decir, 1,5 llamadas por minuto.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban 3 llamadas por minuto?

Distribución de Poisson
Calculo en R es 0.1255107

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución de Poisson

La variable aleatoria X se define como:

"*número de ocurrencias de un suceso durante un período de tiempo fijo o bien dentro de los límites fijados de un área o un volumen*".

La función de probabilidad es:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!} \qquad k = 0,1,2,.... \qquad \mu > 0$$

Esperanza y variancia:

$$E(X) = Var(X) = \mu$$

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} p(k)$$

fppt.com

Distribuciones discretas

Relación entre la Binomial y la Poisson*

La distribución de Poisson puede ser útil para aproximar las probabilidades binomiales, siempre que *n* sea grande y *p* pequeño.

Si X~Bin(n, p), entonces cuando $n \to \infty$, $np = \mu$ (constante), o en forma equivalente, cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ tal que $np \to \mu$, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right] = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

** Se recomienda la lectura del Ejemplo 8.1 de Meyer.*

fppt.com

Distribuciones discretas

Relación entre la Binomial y la Poisson

La distribución Binomial está caracterizada por los parámetros n y p, mientras que la distribución de Poisson sólo está caracterizada por $\mu = np$, que representa **al número esperado de éxitos por unidad de tiempo (o espacio)** y se conoce como intensidad de la distribución.

Distinguir entre el **número esperado de ocurrencias por unidad de tiempo** y el **número esperado de ocurrencias en el tiempo especificado**.

fppt.com

Ejemplo 9

El 1% de los transistores producidos en una fábrica es defectuoso. Se seleccionan 100 transistores al azar de la línea de producción.

- ¿Cuál es la probabilidad exacta de seleccionar 3 transistores defectuosos?

  Se resuelve con Binomial
  Resultado en R: 0.06099917

- ¿Cuál es la probabilidad aproximada?

  Se resuelve con Poisson y difiere en el tercer decimal
  Resultado en R: 0.06131324

fppt.com

Ejemplo 8 *(cont.)*

En relación al Ejemplo 8, en el cual se recibían 1,5 llamadas por minuto.

La intensidad es 1,5 llamadas por minuto y, por lo tanto, el número esperado de llamadas en un período de 10 minutos sería 15.

fppt.com

Distribuciones discretas

Distribución Uniforme discreta

La variable aleatoria X toma valores en un conjunto de enteros consecutivos con igual probabilidad.

La función de probabilidad es:

$$P(X=k)=\frac{1}{N} \qquad k=1,2,\ldots,N$$

Ejemplo de los dados, no importa el dado que sea, la P(x) será 1/6

Esperanza y variancia:

$$E(X)=\frac{N+1}{2} \qquad V(X)=\frac{N^2-1}{12}$$

En general, los juegos de azar, loterías o dados están modelados por este tipo de distribución.
Es útil siempre que los resultados sean igualmente probables.

fppt.com

Distribuciones continuas

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Normal

Si X tiene distribución Normal, X~N(μ,s), su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-((x-\mu)/\sigma)^2/2}$$

$$-\infty < x < \infty \quad -\infty < \mu < \infty \quad y \quad 0 < \sigma < \infty$$

La distribución Normal sirve con una aproximación excelente a una gran cantidad de distribuciones que tienen mucha importancia práctica y tiene propiedades matemáticas que permiten deducir importantes resultados teóricos.

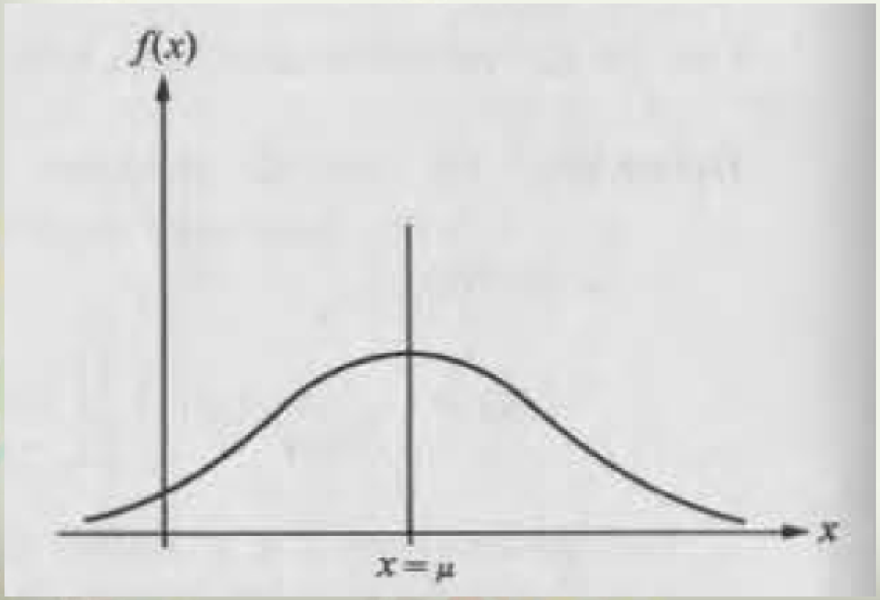
fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Normal

La forma de la $f_X(x)$ es acampanada. Dado que sólo depende de x a través de $(x-\mu)^2$, el gráfico es simétrico respecto de μ.

Para $x=\mu$ el gráfico es cóncavo hacia abajo; cuando $x \to \pm\infty$, $f_X(x) \to 0$. Para valores grandes de x, el gráfico es cóncavo hacia arriba.



Los puntos donde cambia de concavidad son puntos de inflexión; ocurren en $x = \mu \pm s$.

Así, si s es relativamente grande, el gráfico tiende a ser achatado.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Normal

Esperanza y variancia: $E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$

Los 2 parámetros que caracterizan la distribución son su media y su variancia.

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-((x-\mu)/\sigma)^2/2} dx$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Normal estandarizada

Si X era normal en origen, Z va a seguir siendo normal

Si X tiene distribución normal, $Z=(X-\mu)/\sigma$ es un caso especial: la **normal estandarizada, N(0,1)**.

Es simétrica alrededor del 0 (μ) donde alcanza el máximo, y los puntos de inflexión están en -1 y 1.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Normal estandarizada

Esta distribución está **tabulada**; cada vez que $X \sim N(\mu, s)$ se puede **estandarizar** y utilizar la distribución $Z \sim N(0,1)$ para el cálculo de probabilidades asociadas con X.

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Tener en cuenta que $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

fppt.com

Ejemplo 10

Se sabe que el tiempo de duración en meses de una pila puede modelarse a través de una N(60; σ =6).

X: Tiempo de duración en meses de una pila
X~N(Mu=60; Desvio=6)

- ¿Qué fracción de pilas es de esperar que fallen en los primeros 4 años? 0.02275013
- Cuál es el tiempo estimado en el que fallaría el 5% de las pilas? 50.13088

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Uniforme

La variable aleatoria X puede tomar valores en un intervalo acotado *(a,b)*, con igual probabilidad.

La función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$

Los *software* utilizan esta distribución para generar números al azar.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Uniforme

Esperanza y variancia: $$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La función de distribución es: $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Exponencial

Si X tiene distribución Exponencial, su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad x > 0, \theta > 0$$

Al igual que la Geométrica en el caso discreto, tiene la propiedad de "*falta de memoria*":

Sea X la vida útil de un componente. La probabilidad de que dure más de *a+t* años dado que duró más de *a* años es la misma que la probabilidad de que un componente nuevo dure más de *t* años.

$$P(X > a + t / X > a) = P(X > t)$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Exponencial

Esperanza y variancia: $E(X) = \theta \qquad Var(X) = \theta^2$

La función de distribución es: $F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta} \qquad x > 0$

Así como las distribuciones Binomial y Geométrica se vinculan, lo hacen Poisson y Exponencial: mientras que la pregunta en Poisson es: Cuántos eventos en cierto tiempo?, en Exponencial es: Cuánto tiempo pasa hasta que un evento ocurre?

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Exponencial

La distribución Exponencial se utiliza frecuentemente en el estudio de “tiempos hasta eventos”.

De hecho, es el caso particular de una distribución más general utilizada en la descripción de tiempos hasta eventos: la distribución Weibull.

Mientras que la distribución exponencial es apropiada cuando la tasa de ocurrencia del evento es constante, la distribución Weibull puede modelar tasas monótonas (crecientes o decrecientes) a lo largo del tiempo.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Weibull

Si X tiene distribución Weibull(θ; β), su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^{\beta}} \quad x > 0; \beta > 0, \theta > 0$$

- θ es un parámetros de **escala**.
- β es un parámetro de **forma** de la función de densidad.
- Si β=2, se tiene la distribución de **Rayleigh**.
- Si β=1, se tiene la distribución **Exponencial**.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Weibull

Esperanza y variancia:

$$E(X) = \theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$Var(X) = \theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

La función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^{\beta}} \qquad x > 0$$

La $F_X(x)$ verifica: $F(x,\theta,\beta)=F(x/\theta,1,\beta)$.

fppt.com

Ejemplo 11

La distancia en pulgadas desde el punto de impacto de un dardo al centro del blanco puede ser modelada por una W(10,2).

- ¿Cuál es la probabilidad de impactar en un área de 5 pulgadas a la redonda del centro?

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución de Cauchy

Si X tiene distribución de Cauchy, su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\theta} \frac{1}{\left\{1 + ((x-\eta)/\theta))^2\right\}} \quad -\infty < x < \infty, 0 < \theta$$

- η es la mediana.
- Tanto la media como la variancia y la función generatriz de momentos no existen.
- El cociente de normales tiene distribución de Cauchy.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Chi-cuadrado

Una distribución Gamma con $\theta = 2$ y $k = v/2$ es denominada distribución **Chi-cuadrado** con **v grados de libertad**.

Esperanza y variancia: $E(X) = v \qquad Var(X) = 2v$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Chi-cuadrado

Algunas propiedades importantes:

- Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$.
- Si $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria de una $N(\mu,\sigma^2)$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)} \qquad \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$$

- Además: $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$
- Si el número de gl es grande, se puede aproximar la distribución Chi-cuadrado con la distribució Normal.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución t de Student

Si $Z \sim N(0,1)$ y $V \sim \chi^2_{(v)}$ y ambas variables son independientes, entonces:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V / v}} \sim t_v$$

La forma de la distribución es muy similar a la de la Normal, se aproxima a ella a medida que su parámetro aumenta.

La característica que la diferencia son sus colas, las cuales son más pesadas que las de la Normal.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución t de Student

Función de densidad:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

Esperanza y variancia:

$$E(T) = 0 \quad v > 1, \; Var(T) = \frac{v}{v-2} \quad v > 2$$

- Si $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria de una $N(\mu,\sigma^2)$ entonces:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución F de Snedecor

Se usa para ANOVAs

Si $V_1 \sim \chi^2_{(v1)}$ y $V_2 \sim \chi^2_{(v2)}$ y ambas variables son independientes, entonces:

$$X = \frac{V_1/v_1}{V_2/v_2} \sim F_{v_1,v_2}$$

La función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1} x^{(v_1/2)-1}\left(1+\frac{v_1}{v_2}\right)^{-(v_1+v_2)/2}$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución F de Snedecor

Esperanza y variancia:

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \qquad 2 < v_2$$

$$Var(X) = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)} \qquad 4 < v_2$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Gama

La distribución Gama está relacionada con la función Gama:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \qquad \forall\, k > 0$$

La función Gama satisface las siguientes propiedades:

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k\text{-}1) \quad k > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n = 1,2,....$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Gama

Si X tiene distribución Gama(θ, *k)*, su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta} \qquad k > 0, \theta > 0, x > 0$$

- θ es un parámetros de **escala**, útil para evitar la dependencia de la escala de medición.
- *k* es un parámetro de **forma**, que determina la gráfica de la función de densidad.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Gama

Esperanza y variancia: $E(X) = k\theta \quad Var(X) = k\theta^2$

La función de distribución es: $F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} t^{k-1} e^{-t/\theta} dt$

- Si k=1, se tiene la distribución exponencial.
- Si *k* es un entero positivo, la distribución está relacionada con la distribución de Poisson: el tiempo necesario para obtener un número especificado de ocurrencias del suceso tiene distribución Gama.

fppt.com

Ejemplo 12

La cantidad de precipitación (en pulgadas) caída diariamente en un valle tiene una distribución Gama(0.2,6).

- ¿Cuál es la probabilidad de que caigan más de 2 pulgadas de lluvia en un cierto día?

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Beta

Si $X \sim F_{(v1,\, v2)}$ entonces:

$$Y = \frac{(v_1/v_2)X}{1+(v_1/v_2)X} \sim \text{Beta}$$

La función de densidad es:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1} \qquad 0 < y < 1, 0 < a, 0 < b$$

Es usualmente usada para modelar proporciones.

fppt.com

Distribuciones continuas

Distribución Beta

Esperanza y variancia: $E(Y) = \frac{a}{a+b} \qquad Var(Y) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

La gráfica de la función de densidad varía según los valores de *a* y *b*:

- $a>1, b=1$ estrictamente creciente
- $a=1, b>1$ estrictamente decreciente
- $a>1, b>1$ unimodal
- $a<1, b<1$ forma de U
- $a=b$ es simétrica alrededor de 1/2 y con media 1/2 siendo más apuntalada a medida que *a* crece
- $a=b=1$ es la distribución uniforme

fppt.com

Material consultado

- Meyer P. (1998). Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Edición revisada. Addison-Wesley Iberoamericana.

- Leon-García A. (2008). Probability, Statistics and Random Processes for Electrical Engineering. 3° Ed. Pearson Prentice Hall.

- https://blog.cloudera.com/blog/2015/12/common-probability-distributions-the-data-scientists-crib-sheet/ (consultado: marzo 2019).

- http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/302783_75485bd9eb4646698f534a4833a026e5.html (consultado: marzo 2019).

fppt.com