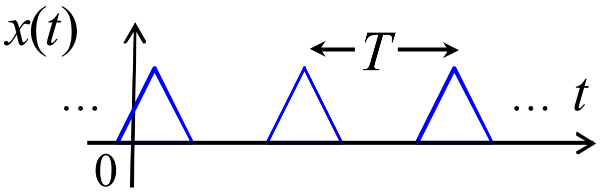
Modulo 04
Transformada de Fourier de tempo Contínuo

Série de Fourier (forma exponencial)

Espectro
de frequências

Sinal periódico

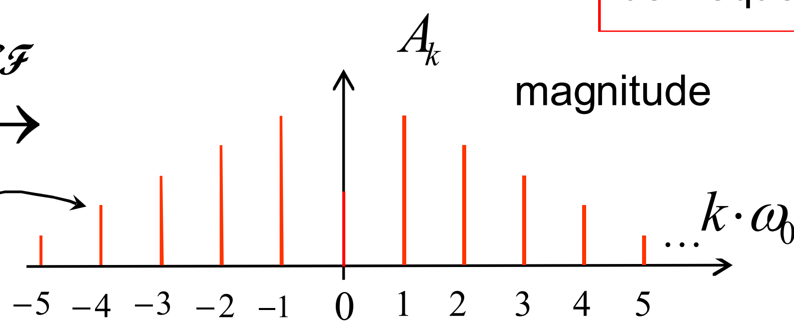


$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

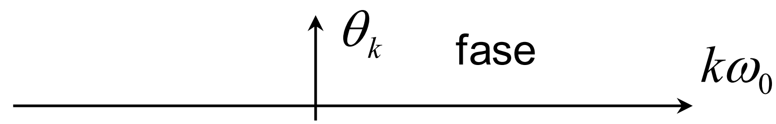
$\mathcal{SF}$

$\leftrightarrow$

Série de Fourier



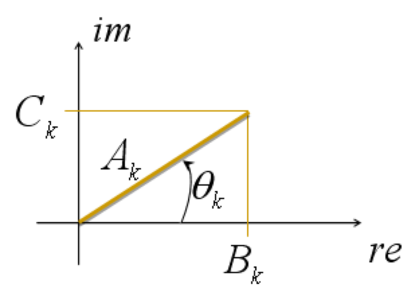
fasores



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j(k\omega_0)t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-j(k\omega_0)t} dt$$

$$a_k = A_k \cdot e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$$



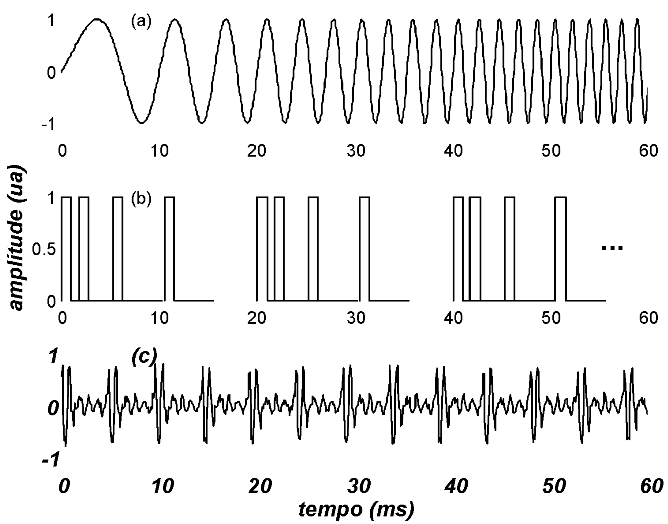
$$\theta_k = \tan^{-1}(C_k / B_k)$$

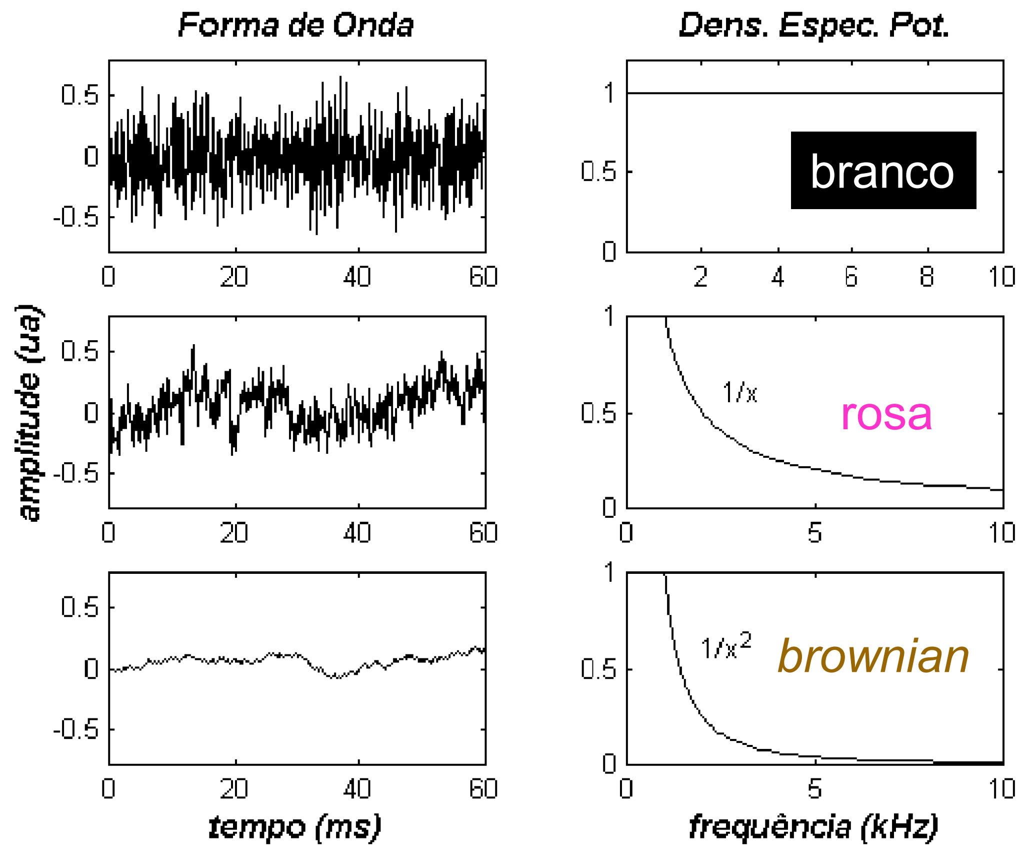
$$A_k = \sqrt{(B_k)^2 + (C_k)^2}$$

Sinais não periódicos

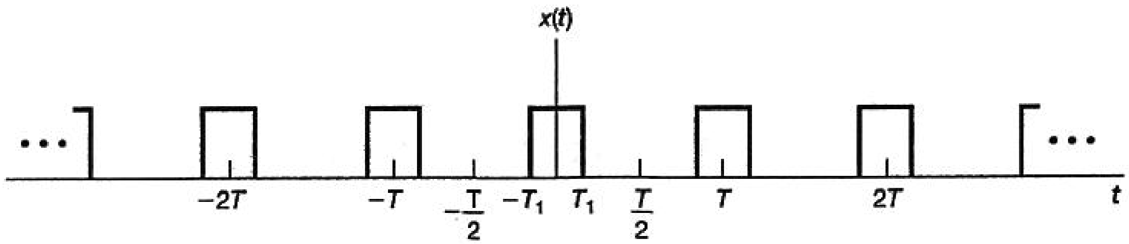
ruídos

pseudoperiódicos





Não têm série de Fourier

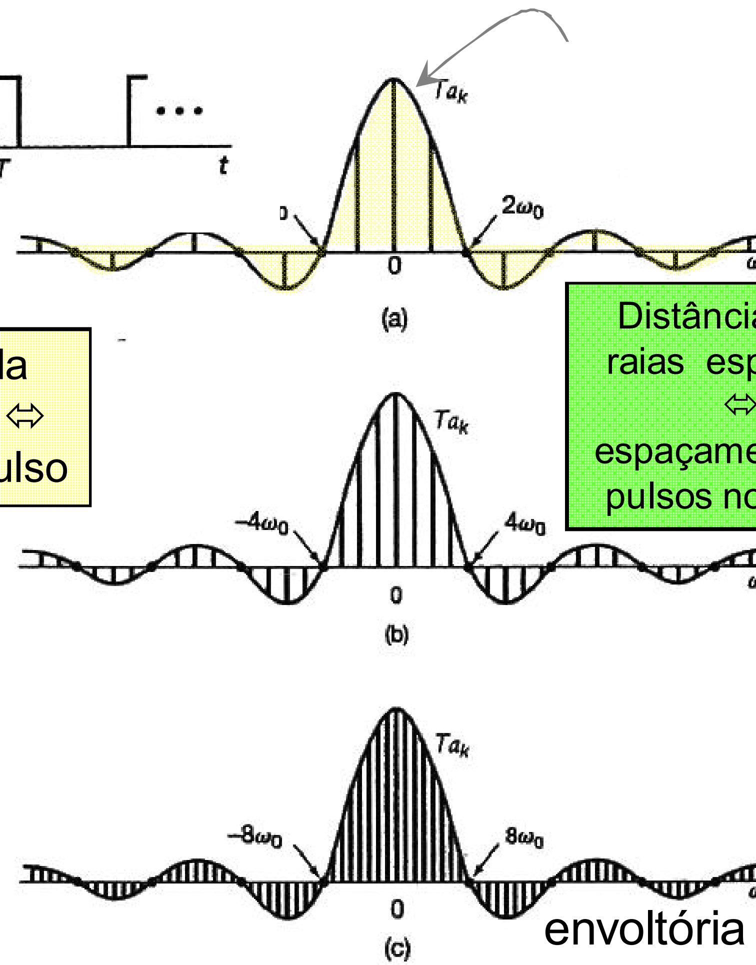


$$a_k = \frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

Formato da envoltória ⇔ forma do pulso

$$Ta_k = \left.\frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

Coeficientes = amostras da envoltória



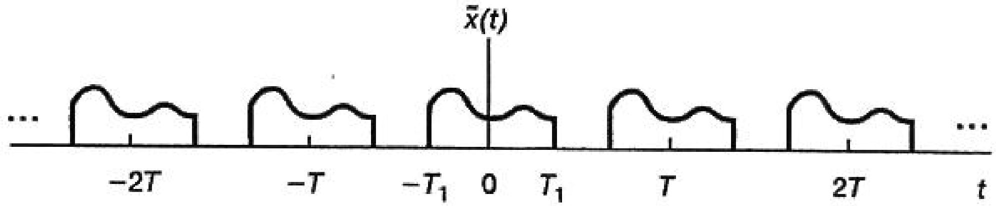
Distância entre raias espectrais ⇔ espaçamento dos pulsos no tempo

Figura 4.2 Os coeficientes da série de Fourier e sua envoltória para a onda quadrada periódica na Figura 4.1, para diferentes valores de T (com T_1 fixo): (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

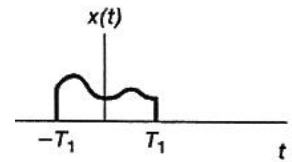
(densidade espectral)

Densidade espectral: Espectro fica contínuo quando $T \rightarrow \infty$

4.1 Integral de Fourier



$$x(t) = \lim_{T\to\infty} [\tilde{x}(t)]$$



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Coeff da SF

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \tfrac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \longrightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}\,\omega_0$$

$$\boxed{T \to \infty}$$

$$\boxed{X(j\omega) = X(jk\omega_o)\big|_{k\omega_o=\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Transformada de Fourier Transformada Inversa de Fourier

Transformada de Fourier (análise)

Transformada inversa (síntese)

$$X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad x(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Condições de Dirichlet

1. $x(t)$ seja absolutamente integrável; ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty. \qquad \textbf{(4.13)}$$

2. $x(t)$ tenha um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito.
3. $x(t)$ tenha um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito. Além do mais, cada uma dessas descontinuidades precisa ser finita.

X(jω): espectro de x(t). Eemplo (4.1)

$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$

complexo

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} \rightarrow \boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \qquad a>0}$$

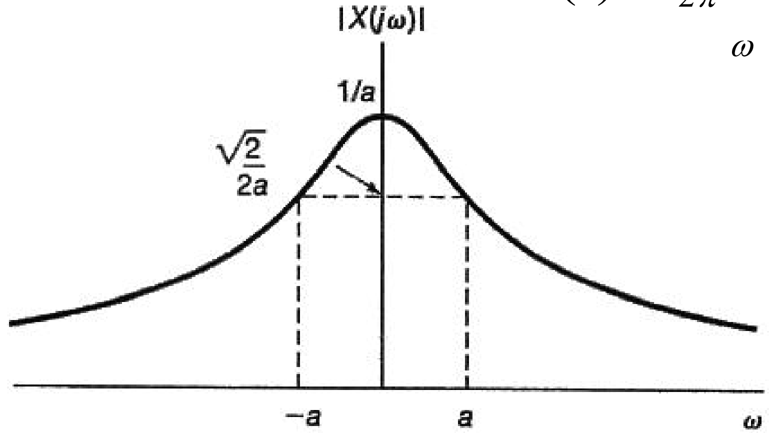
Modulo:
Amplitude dos fasores que compõem x(t)

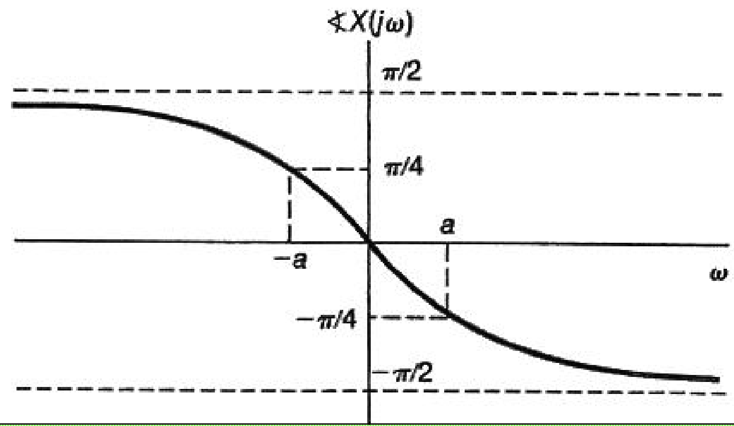
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\sphericalangle X(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

fase:
Fase (atraso) dos fasores que compõem x(t)

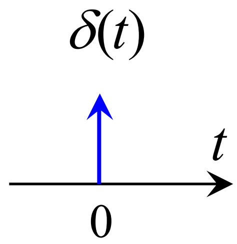
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega\cdot t}d\omega$$



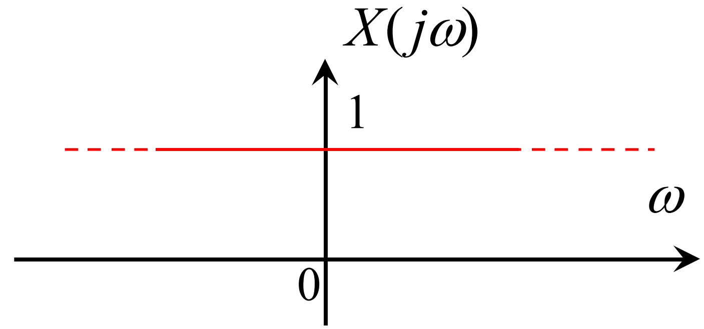


Cálculo direto da Transformada de Fourier

Ex. 4.3

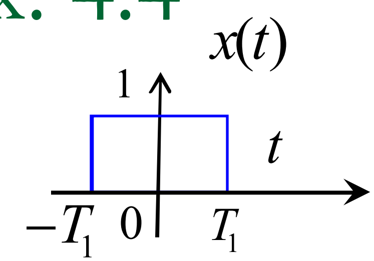


$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

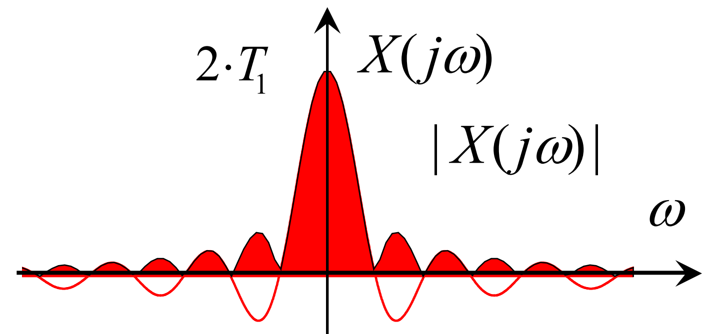


$$X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{1\ em\ \ t=0} \cdot dt = 1$$

Ex. 4.4



$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$



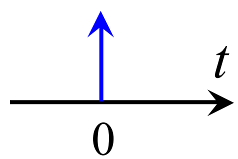
$$X(j\omega) = \int_{t=-T_1}^{+T_1} 1\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt == \left.\frac{-e^{-j\omega\ t}}{j\omega}\right|_{t=-T_1}^{T_1} = 2\,\frac{sen\,(\omega\cdot T_1)}{\omega} = \boxed{2T_1\,\frac{sen\,(\omega\cdot T_1)}{(\omega\cdot T_1)}}$$

$$= \frac{-e^{-j\omega\ T_1} - e^{j\omega\ T_1}}{j}\times\frac{2}{2}$$

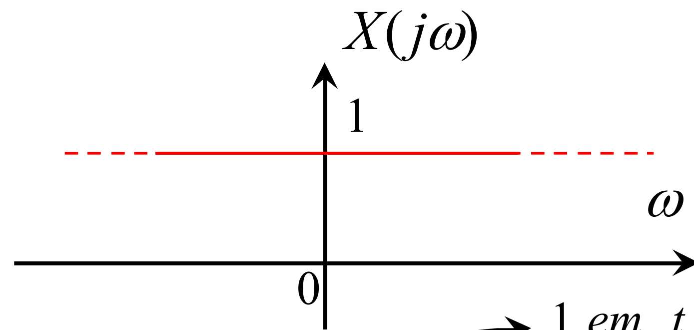
Função sinc()

Fasores e impulsos

$\delta(t)$

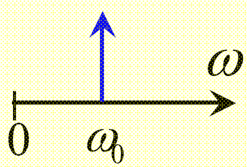


$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$



$$X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \overbrace{e^{-j\omega t}}^{1\ em\ \ t=0} \cdot dt = 1$$

$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$



Linha ou raia espectral

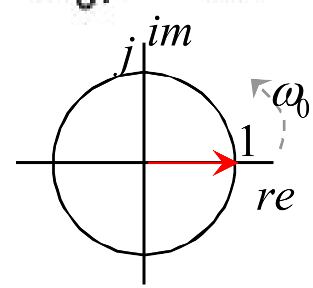
$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$

$\omega_0 = 2\pi / T$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

Fasor no tempo



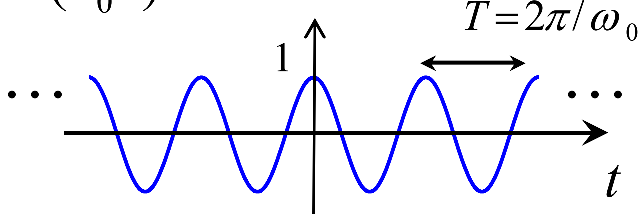
Generalizando:

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

Transformada de Fourier $\longleftrightarrow$ Série de Fourier

seno e cosseno eternos

$$x(t) = cos(\omega_0\, t)$$



Série de Fourier

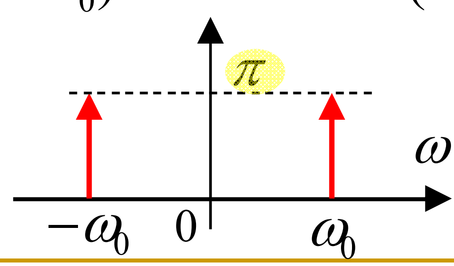
$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t}$$

$(2\pi \cdot a_k)$

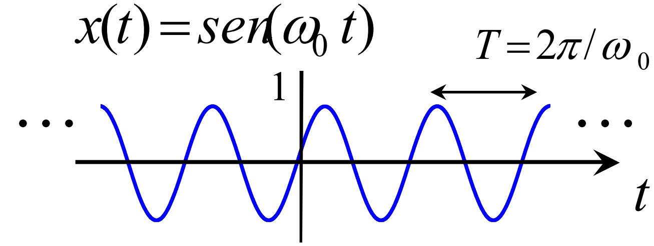
$\mathcal{F}$

Transformada de Fourier

$$\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) \qquad \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$



$$x(t) = sen(\omega_0\, t)$$

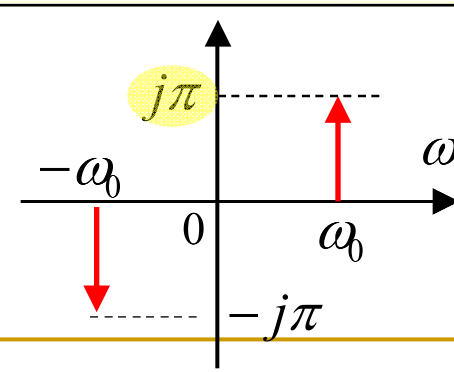


De forma similar

$$x(t) = sen(\omega_0\, t)$$

$$\Updownarrow \mathcal{F}$$

$$j[\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)]$$



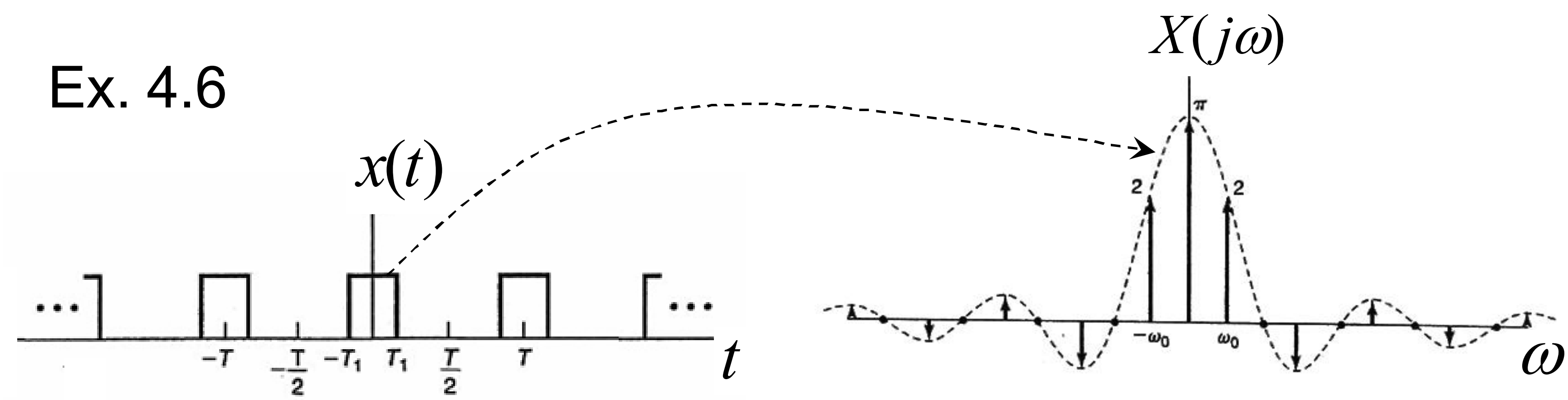
4.2 Transformada de sinais periódicos

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Série de Fourier

Transformada de Fourier

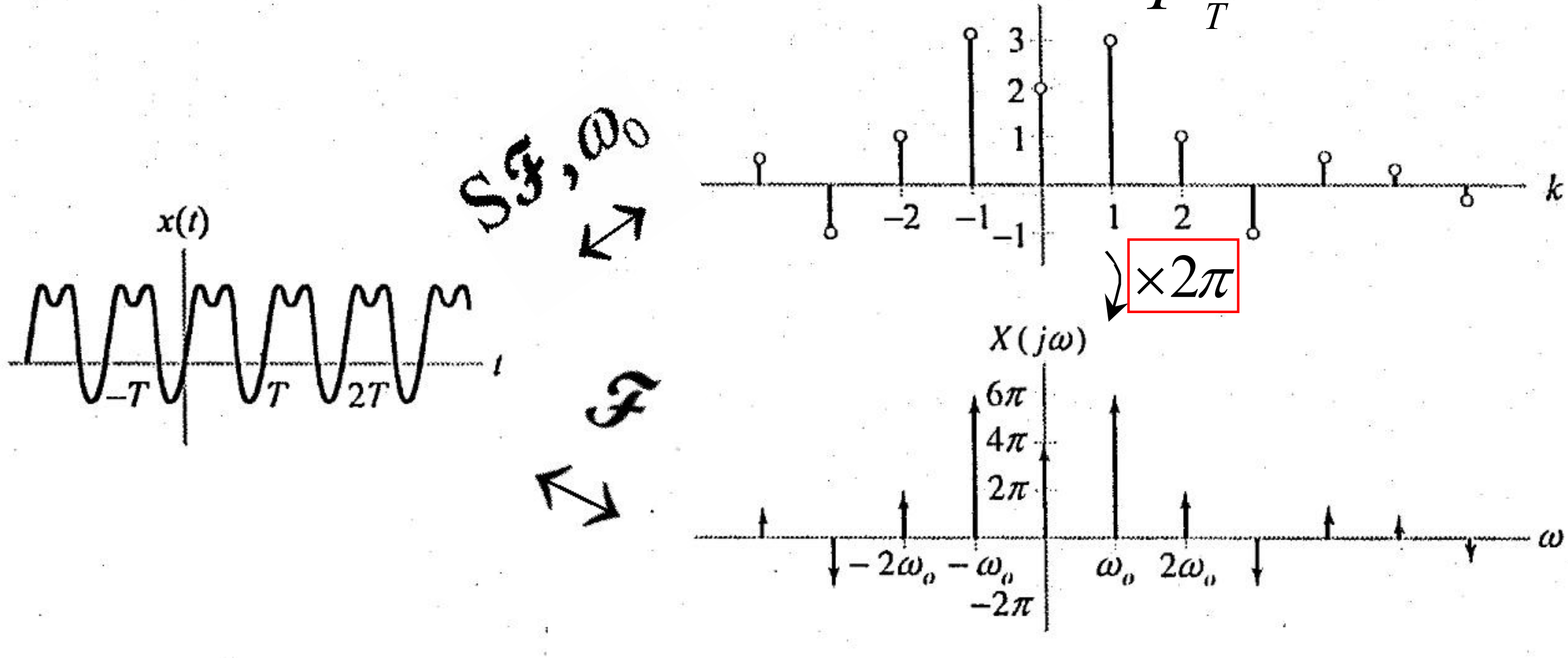
Ex. 4.6



$$a_k = \frac{\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{\pi k} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0).$$

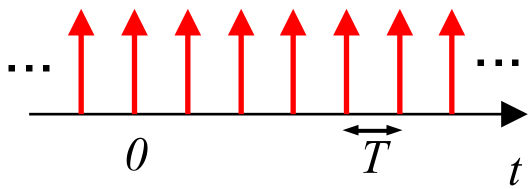
Série e transformada de Fourier de um sinal periódico

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-j(k\omega_0)t}dt$$



Transformada de um trem periódico de impulsos

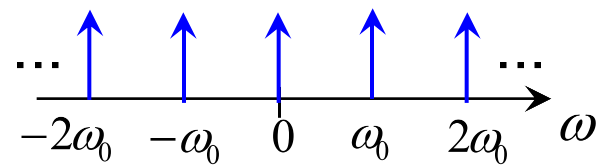
$$x(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$$

$$\omega_0=2\pi/T$$

$$X(j\omega)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$



$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

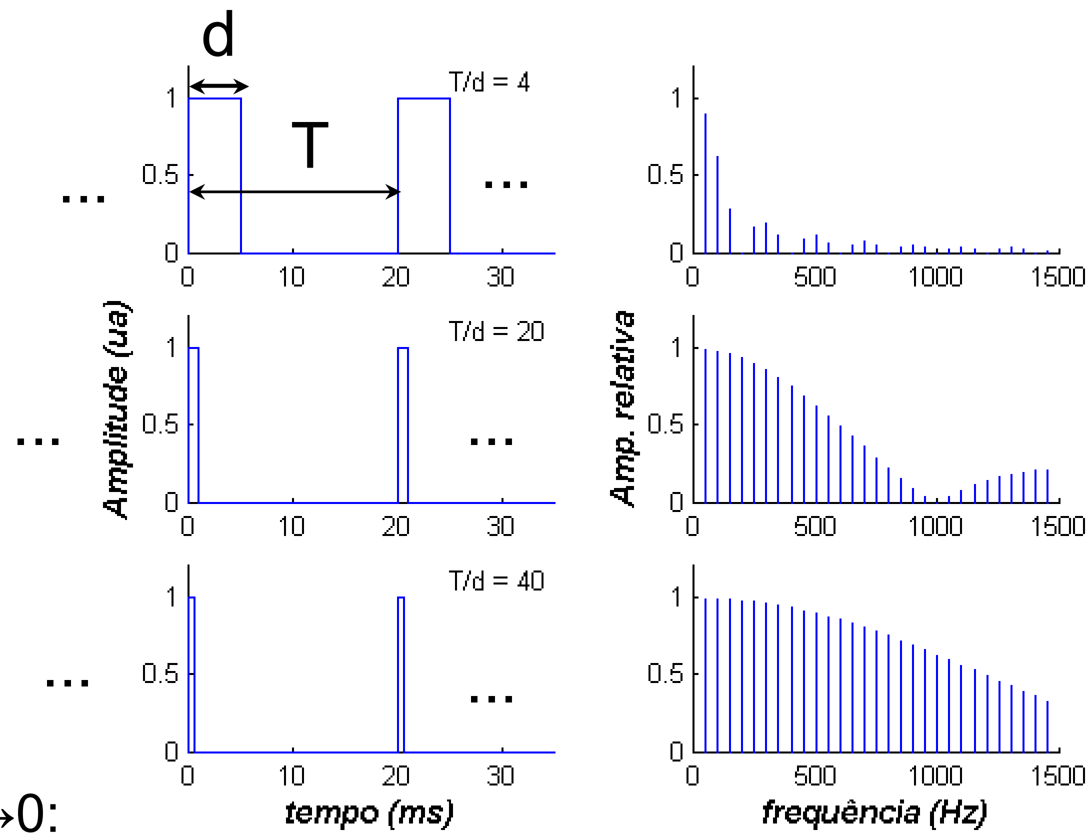
$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$X(j\omega)=\boxed{\frac{2\pi}{T}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$X(j\omega)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

Trem de pulsos

Mesmo período (T)
Duração variável da largura do pulso (T/d)



d→0:
Impulsos

d→0:
Espectro plano

Pulso encurta ↔ envoltória do espectro alarga

4.3 Propriedades da $\mathcal{F}\{x(t)\}$

Derivação no tempo

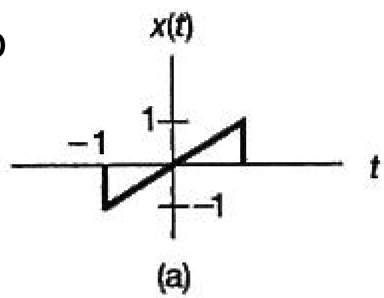
$$\frac{d^n[x(t)]}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j\omega)^n \cdot \mathbf{X}(j\omega)$$

Integração no tempo

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\cdot dt \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}\mathbf{X}(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

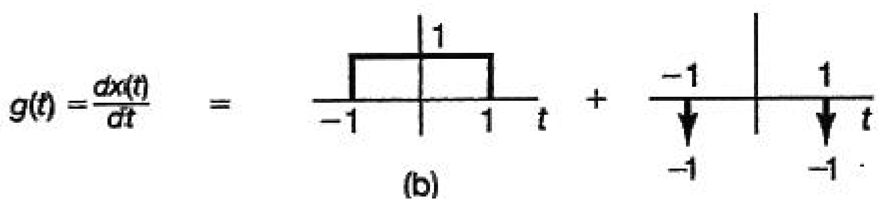
valor médio

Exemplo



$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}\,\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

$$G(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)$$



$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad G(j\omega) = \left(\frac{2\,\text{sen}\,\omega}{\omega}\right) \underbrace{-e^{j\omega} - e^{-j\omega}}_{-2\cos(\omega)}$$

Veja demonstrações no livro-texto

Propriedades da $\mathcal{F}\{x(t)\}$

Deslocamento no tempo

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0}\cdot \mathbf{X}(j\omega)$$

Demonstração

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{=k})\cdot e^{-j\omega t}\cdot \underbrace{dt}_{=dk}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(k)\cdot e^{-j\omega(t_0+k)}\cdot dk=$$

$$e^{-j\omega t_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(k)\cdot e^{-j\omega k}\cdot dk}_{\mathbf{X}(j\omega)}$$

Ver Ex. 4.9

Interpretação

$$e^{-j\omega t_0}\cdot \mathbf{X}(j\omega) \equiv e^{-j\omega t_0}\underbrace{|\mathbf{X}(j\omega)|}_{módulo}\cdot \underbrace{e^{j\theta(\omega)}}_{fase}$$

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} |\mathbf{X}(j\omega)|\cdot e^{j[\theta(\omega)-\omega t_0]}$$

Deslocamento no tempo $\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$ Fase varia linearmente com ω...

Distorção de fase...

Deslocamento em freqüência

De forma similar:

$$e^{+j\omega t_0}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathbf{X}[j(\omega-\omega_0)]$$

Multiplexação por divisão de frequência...

Propriedades da $\mathcal{F}\{x(t)\}$

Escalonamento

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}\mathbf{X}(j\omega/a)$$

Dilatar no tempo $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ Contrair espectro

e vice-versa

Teoremas da convolução e multiplicação

$$se \begin{cases} x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathbf{X}_1(j\omega) \\ x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathbf{X}_2(j\omega) \end{cases}$$

então

Convolução no tempo

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathbf{X}_1(j\omega) \cdot \mathbf{X}_2(j\omega)}$$

multiplicação no tempo

$$\boxed{x_1(t) \cdot x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\mathbf{X}_1(j\omega) * \mathbf{X}_2(j\omega)}$$

Ver demonstração no livro-texto

detalhes a seguir

4.4 e 4.5 Teoremas da convolução e multiplicação

$$\boxed{\mathcal{F}[\underbrace{h(t)*x(t)}]=}$$

$$=\int_{t=-\infty}^{\infty}\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau\right]\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

(rearranjando)

$$=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}h(\tau)\left[\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt\right]\cdot d\tau$$

(deslocamento)

$$=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot X(j\omega)\,e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=X(j\omega)\bullet\int_{\tau=-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

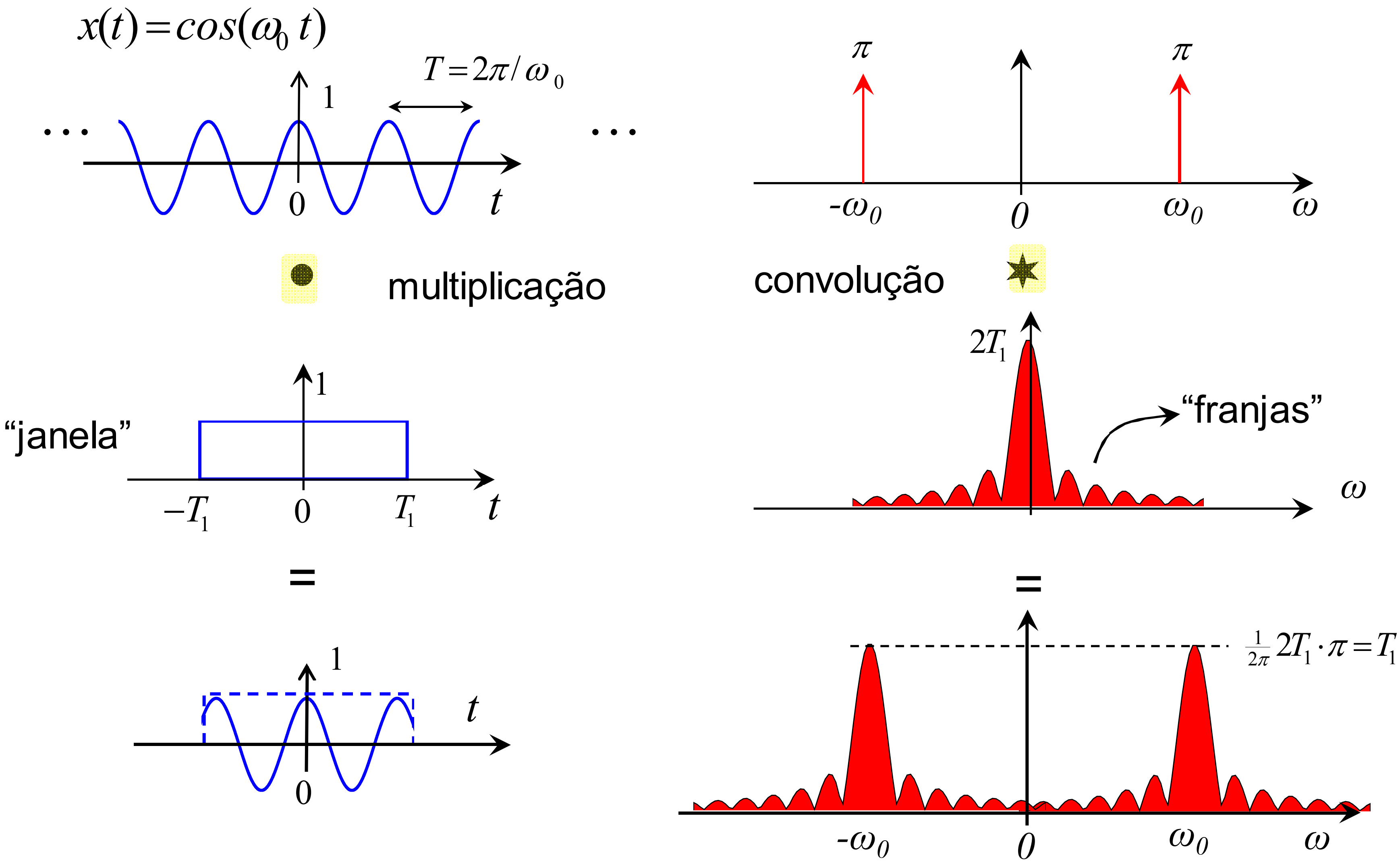
$$\boxed{=X(j\omega)\bullet \overbrace{H(j\omega)}}$$

convolução no tempo $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ multiplicação de espectros

e vice-versa (dualidade)

$$x(t)\cdot h(t)\ \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*H(j\omega)$$

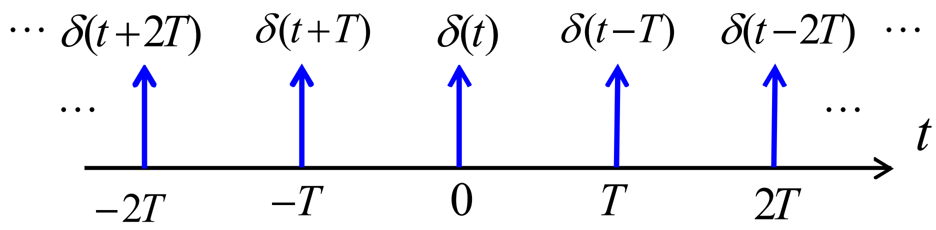
Espectro de uma cosenóide truncada



Aplicação das propriedade da convolução/multiplicação

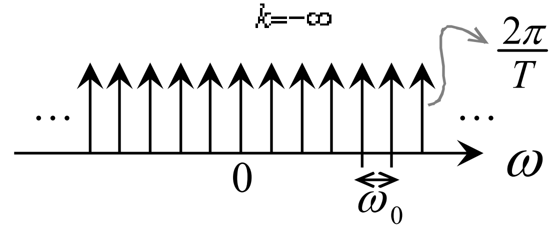
Espectro de sinais periódicos (nova interpretação)

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

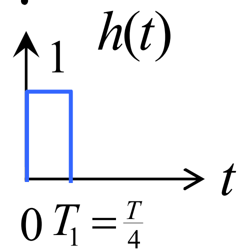


$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$$

$$\delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

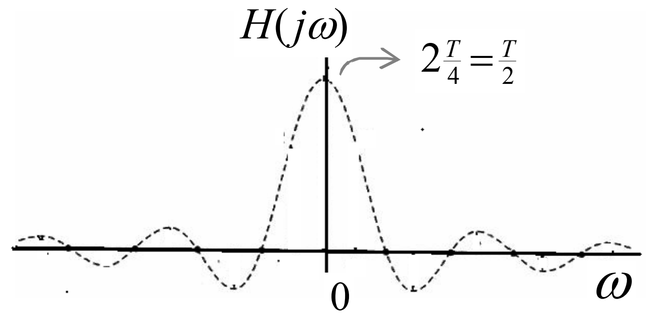


$$*$$



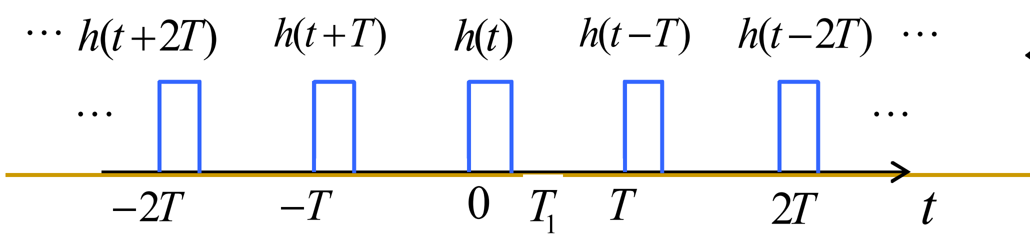
$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$$

$$\bullet$$



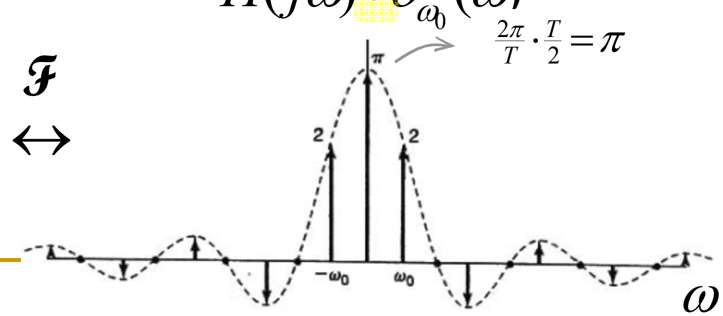
Sinal periódico =
pulso * trem de impulsos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT)$$



$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$$

$$H(j\omega) \bullet \delta_{\omega_0}(\omega)$$



Aplicação das propriedade da convolução/multiplicação

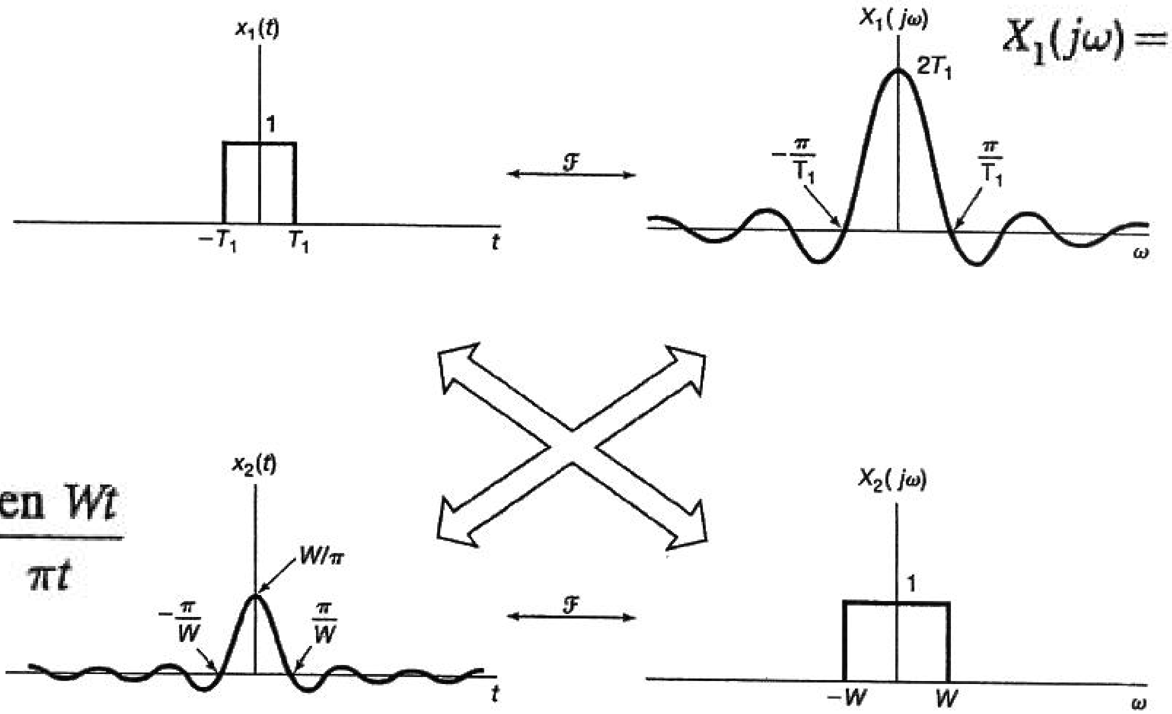
Propriedades da $\mathcal{F}\{x(t)\}$

Dualidade ("quase" simetria)

Transformadas diretas e inversas <u>similares</u>.

Exemplo:

$$X_1(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}\,\omega T_1}{\omega}$$



$$x_2(t) = \frac{\text{sen}\,Wt}{\pi t}$$

Dualidade – Aplicação (Ex. 4.13)

$$Se \quad \boxed{g(t)=\frac{2}{1+t^2}} \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \boxed{G(j\omega)=?}$$

$$Ex.\ 4.2: \quad \boxed{x(t)=e^{-|t|}} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \boxed{X(j\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}}$$

$$e^{-|t|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{j\omega t}d\omega \rightarrow 2\pi e^{-|t|}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{-j\omega t}d\omega$$

Transf. Inversa

$$2\pi e^{-|\omega|}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)e^{-j\omega t}dt}_{\boxed{G(j\omega)=2\pi\cdot e^{-|\omega|}}}$$

Permutando t e ω:

propriedade	$f(t)$	$F(\omega)$
1. Escalonamento	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
2. Deslocamento em tempo	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Deslocamento em freqüência	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
4. Diferenciação em tempo	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
5. Diferenciação em freqüência	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F}{d\omega^n}$
6. Integração em tempo	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{(j\omega)} F(\omega)$ $F(0) = 0$
7. Convolução em tempo	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
8. Convolução em freqüência	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

Principais propriedades da Transformada de Fourier de tempo contínuo

Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
Simetria conjugada para sinais reais	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
Simetria para sinais reais e pares	$x(t)$ real e par	$X(j\omega)$ real e par
Simetria para sinais reais e ímpares	$x(t)$ real e ímpar	$X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar

Sinal	Transformada de Fourier	Coeficientes da série de Fourier (se periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, caso contrário
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, caso contrário
$\text{sen}\, \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, caso contrário
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (esta é a representação em série de Fourier para qualquer escolha de $T > 0$)
Onda quadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t \rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ e $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k\pi}$

Sinal	Transformada de Fourier	Coeficientes da série de Fourier (se periódica)
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k=\frac{1}{T}$ para todo k
$x(t)=\begin{cases}1, & \|t\|<T_1\\ 0, & \|t\|>T_1\end{cases}$	$\frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & \|\omega\|<W\\ 0, & \|\omega\|>W\end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),$ $\mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

4.7 – Sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(j\omega) \qquad H(j\omega) \qquad Y(j\omega)$$

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega).}$$

Comportamento temporal

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Resposta em freqüência

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Relações?

Ex. 4.24 – Resposta em freqüência

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t),$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Por autofunção

$$\begin{cases} x(t) = e^{j\omega t} \\ y(t) = H(j\omega)\cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$j\omega \cdot H(j\omega)\cdot \cancel{e^{j\omega t}} + a\cdot H(j\omega)\cdot \cancel{e^{j\omega t}} = \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}}$$

Por Transformada de Fourier

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t),$$

$$\Uparrow$$

propriedade da derivada

$$\Downarrow$$

$$j\omega \cdot Y(j\omega) + a\cdot Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \boxed{\frac{1}{j\omega + a}}$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\boxed{h(t) = e^{-at}u(t)}$$

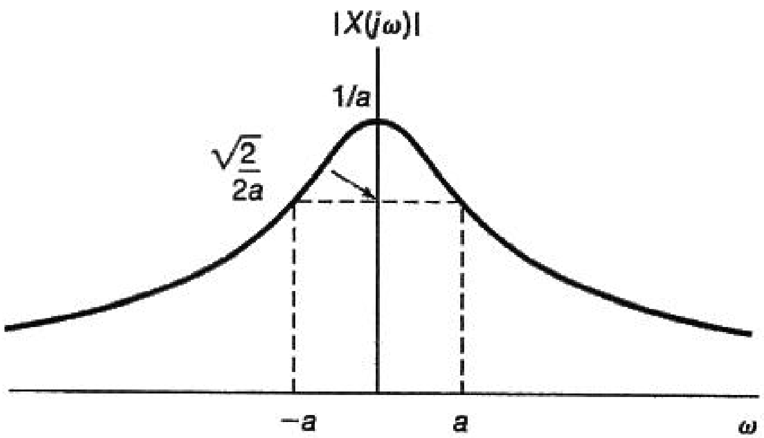
(resultado anterior)

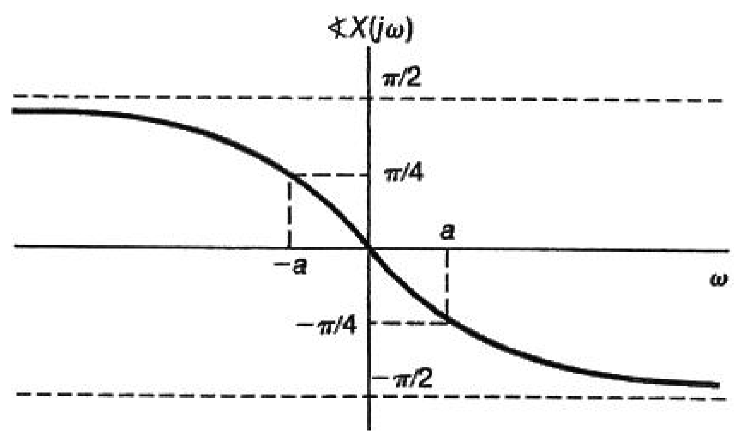
Sistema de primeira ordem

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t),$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt \quad = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^\infty \rightarrow \boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \qquad a > 0}$$



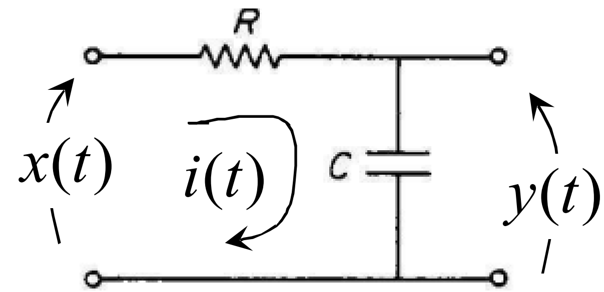


$$\boxed{|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}}$$ módulo

$$\boxed{\sphericalangle X(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$ fase

Resposta impulsiva e em frequência

Sistema de 1ª. Ordem



$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = R\underbrace{C\frac{dy(t)}{dt}}_{i(t)} + y(t)$$

$$1\cdot\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \overset{FT}{\Rightarrow} 1\cdot j\omega Y(j\omega) + \frac{1}{RC}Y(j\omega) = \frac{1}{RC}X(j\omega)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{FT}{\Rightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} \overset{FT^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

Generalizando...

Sistema de ordem N

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$ (Transformada de Fourier)

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$ (linearidade)

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$ (propriedade da diferenciação)

Função racional (razão de polinômios)

$$\rightarrow Y(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right] = X(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right] \rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

Resposta em freqüência

Independem de k

Exercício: Propriedades

Determine a saída $y(t)$ de um sistema LIT, cuja resposta ao impulso é

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

quando uma entrada

$$x(t) = 3e^{-t}u(t)$$

foi aplicada.

Exercício: Propriedades

- Pela propriedade da Convolução, temos:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

- Calculando a FT dos sinais $h(t)$ e $x(t)$:

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2}{j\omega + 2}$$

$$x(t) = 3e^{-t}u(t) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad \frac{3}{j\omega + 1}$$

- Portanto:

$$Y(j\omega) = \frac{6}{(j\omega + 2)(j\omega + 1)} = \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{j\omega + 1}$$

Exercício: Propriedades

- Calculando A e B

$$(A+B)(j\omega)+(2B+A) = 6 \rightarrow \begin{cases} A+B=0 & \rightarrow \quad A=-B \\ 2B+A=6 & \rightarrow \quad 2B-B=6 \\ & \rightarrow \quad B=6 \text{ e } A=-6 \end{cases}$$

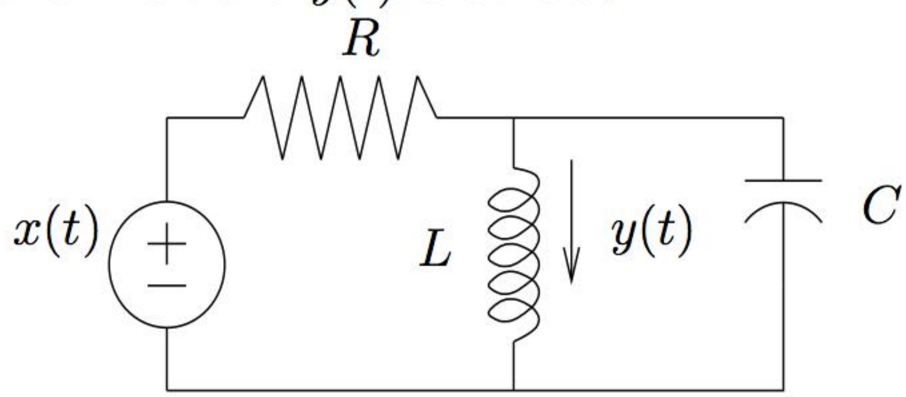
- Finalmente

$$Y(j\omega) = 6\left(\frac{-1}{j\omega+2} + \frac{1}{j\omega+1}\right)$$

- $Y(j\omega) \overset{FT}{\longleftrightarrow} y(t) = -6e^{-2t}u(t) + 6e^{-t}u(t)$

Exercício: Propriedades

Seja $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída,



a) a equação diferencial que descreve o circuito;

b) a resposta em frequência do circuito;

c) a resposta ao impulso $h(t)$.

$$v_\ell = L\frac{di}{dt}, \quad i_c = C\frac{dv}{dt}$$

Exercício: *Propriedades*

- Considerando i a corrente no resistor (soma da corrente no indutor, y, mais a corrente no capacitor, i_C), e as tensões v_L e v_C, temos:

$$
\begin{aligned}
v_L = v_C &= L\dot{y} \\
i_C = C\dot{v}_C &= CL\ddot{y} \\
i = y + i_C &= y + CL\ddot{y}
\end{aligned}
$$

- Finalmente:

$$
\begin{aligned}
x &= Ri + v_L \\
x &= Ry + RCL\ddot{y} + L\dot{y}
\end{aligned}
$$

- Ou seja

$$
\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{CL}y = \frac{1}{RCL}x
$$

Exercício: Propriedades

- Usando a propriedade de diferenciação, podemos escrever a equação diferencial no domínio da frequência:

$$
\begin{array}{rcl}
\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{CL}y & = & \frac{1}{RCL}x \\
\downarrow & FT & \downarrow \\
\left((j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}\right)Y(j\omega) & = & \frac{1}{RCL}X(j\omega)
\end{array}
$$

- A última equação é algébrica, logo, podemos escrever:

$$
\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{RCL}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}
$$

- Pela propriedade de Convolução, sabemos que:

$$
Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}
$$

pois o sistema é LIT.

Exercício: Propriedades

- No caso do circuito em questão, a expressão para a resposta em frequência é:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{RCL}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}$$

- $H(j\omega)$ pode ser expandido em frações parciais:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\frac{1}{RCL}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}} \\ &= \frac{A}{j\omega + \frac{1}{2RC} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} + \frac{B}{j\omega + \frac{1}{2RC} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} \end{aligned}$$

onde $A = -\frac{1}{RCL\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}}$ e $B = \frac{1}{RCL\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}}$

Exercício: Propriedades

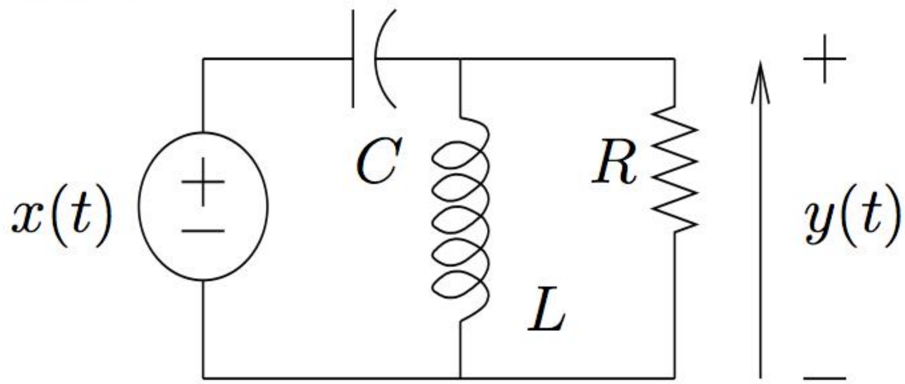
- Fica claro da última expressão que $h(t)$ é uma soma de duas exponenciais:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= -\frac{1}{RCL\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}-\frac{4}{CL}}}e^{-\left(\frac{1}{2RC}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}-\frac{4}{CL}}\right)t} \\
&\quad +\frac{1}{RCL\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}-\frac{4}{CL}}}e^{-\left(\frac{1}{2RC}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}-\frac{4}{CL}}\right)t}
\end{aligned}
$$

- Deve ser verificado se o sinal encontrado $h(t)$ é absolutamente integrável.

Exercício: Propriedades

Considerando $x(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída,



a) a equação diferencial que descreve o circuito;

b) a resposta em frequência do circuito;

c) a resposta ao impulso $h(t)$.

Exercício: Propriedades

- Considerando i_C a corrente no capacitor (soma da corrente no indutor, i_L, mais a corrente no resistor, i_R), e as tensões v_L, v_R e v_C, temos:

$$
\begin{aligned}
v_L = v_R &= y \\
i_r &= \frac{y}{R} \\
i_L = \frac{1}{L}\int v_L dt &= \frac{1}{L}\int y dt \\
i_C = i_L + i_R &= \frac{1}{L}\int y dt + \frac{y}{R}
\end{aligned}
$$

- Finalmente:

$$
\begin{aligned}
x &= v_C + y = \frac{1}{C}\int\left(\frac{1}{L}\int y dt + \frac{y}{R}\right) dt + y \\
x &= \frac{1}{CL}\int\int y dt + \frac{1}{CR}\int y dt + y
\end{aligned}
$$

Exercício: Propriedades

- Diferenciando duas vezes:

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{CL}y = \ddot{x}$$

- Usando a propriedade de diferenciação, podemos escrever a equação diferencial no domínio da frequência:

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{CL}y & = & \ddot{x} \\ \downarrow & FT & \downarrow \\ \left((j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}\right)Y(j\omega) & = & (j\omega)^2 X(j\omega) \end{array}$$

- A última equação é algébrica, logo, podemos escrever:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}$$

Exercício: Propriedades

- Pela propriedade de Convolução, sabemos que:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

pois o sistema é LIT.

- No caso do circuito em questão, a expressão para a resposta em frequência é:

$$H(j\omega) \quad = \quad \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}$$

- $H(j\omega)$ não pode ser expandido em frações parciais. É preciso "tratar" a expressão:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}} = 1 - \frac{\frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{CL}}$$

Exercício: Propriedades

- A parte de $H(j\omega)$ que corresponde à uma fração própria pode ser expandida em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= 1 - \frac{A}{j\omega + \frac{1}{2RC} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} \\
&\quad + \frac{B}{j\omega + \frac{1}{2RC} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\left\{
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{RC} - \frac{\frac{1}{CL} + \frac{1}{2(RC)^2} - \frac{1}{2RC}}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} \\
B &= \frac{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2(RC)^2} + \frac{1}{2RC}}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}}
\end{aligned}
\right.
$$

Exercício: Propriedades

- Fica claro da última expressão que $h(t)$ é uma soma de duas exponenciais mais um impulso:

$$
\begin{aligned}
h(t) \quad = \quad & \delta(t) + \left(\frac{1}{RC} - \frac{\frac{1}{CL} + \frac{1}{2(RC)^2} - \frac{1}{2RC}}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2RC} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}\right)t} \\
& + \left(\frac{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2(RC)^2} + \frac{1}{2RC}}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2RC} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{CL}}\right)t}
\end{aligned}
$$

- Deve ser verificado se o sinal encontrado $h(t)$ é absolutamente integrável.

Exercícios sugeridos

- 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9(a), 4.10, 4.12, 4.13, 4.17, 4.18, 4.19, 4.21 (a-h)

4.21b: $x(t) = e^{-3|t|} \cdot sen(2t) \cdot u(t)$

4.22(a-e), 4.23, 4.33(a), 4.34(a)