Modulo 03
Representação de sinais periódicos em série de Fourier

3.2 Reposta de SLITs a exponenciais complexas

O sinal exponencial complexo não altera a sua forma sob uma transformação linear

$$\boxed{x(t) = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega_0 t}} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow \quad y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$h(t)$$

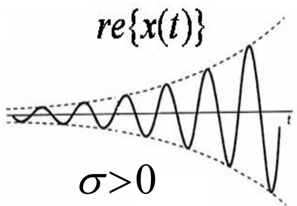
$$= e^{(\sigma + j\omega_0)t}$$

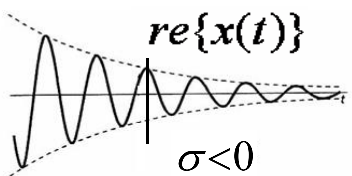
$$\boxed{= e^{st}}$$

$$onde \quad s = \sigma + j\omega_0$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{s(t-\tau)} \cdot d\tau$$

$$= e^{st} \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau}_{H(s)}$$





$x(t)$

Autofunção (função própria)

$$= \boxed{e^{st}} \cdot H(s)$$

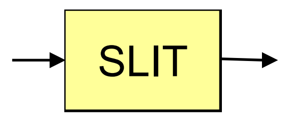
Fator multiplicador (autovalor)

Importância das exponenciais complexas em sistemas LIT

Combinações lineares de autofunções

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$



$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Importância das exponenciais complexas em sistemas LIT

3.10 – Resposta em freqüência/filtragem em SLITs

$$s = \sigma + j\omega_0$$

Se $\sigma = 0$, então

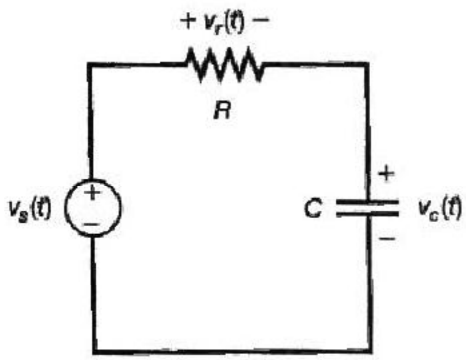
$$\underbrace{x(t) = e^{st} = e^{j\omega t}}_{\text{Oscilações harmônicas não amortecidas}} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow y(t) = \underbrace{H(j\omega)}_{\text{“reposta em freqüência”}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \overbrace{\left| H(j\omega) \right|}^{\text{Fator de amplificação (note: pode ser <1)}} \cdot e^{j(\omega t + \underbrace{\angle [H(j\omega)]}_{\text{“defasagem” (atraso, adiantamento)}})}$$

$$\underbrace{H(j\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau}_{\text{Pode ser calculado } a\ priori\text{, precisa somente de h(t)}}$$

Importância das exponenciais complexas em sistemas LIT

3.10 – Resposta em freqüência/filtragem em SLITs



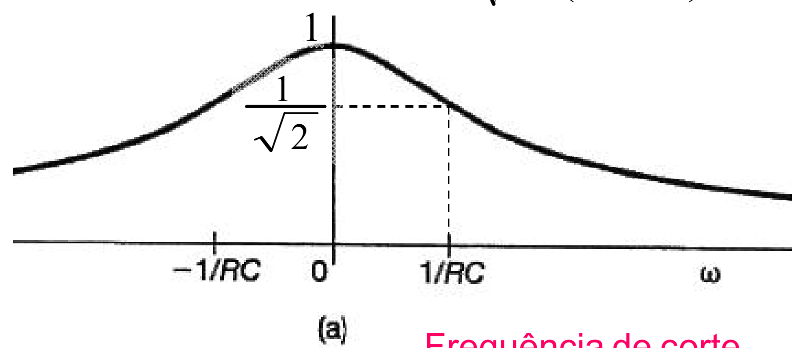
$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)$$

$$v_s(t) = e^{j\omega t}, \qquad v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$RC\frac{d}{dt}[H(j\omega)e^{j\omega t}]+H(j\omega)e^{j\omega t}=e^{j\omega t}$$

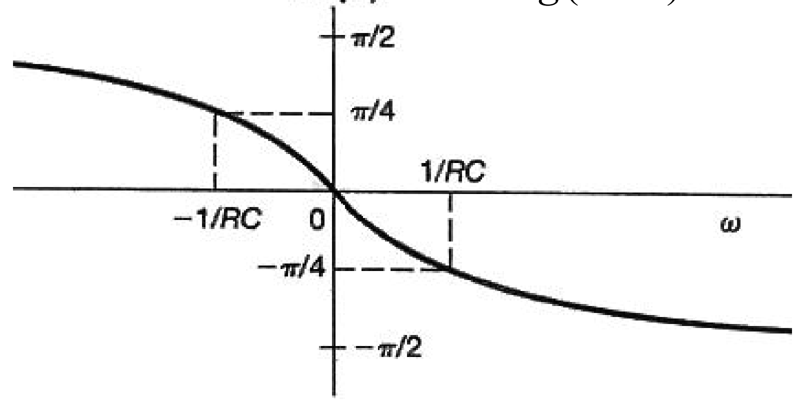
$$H(j\omega)=\frac{1}{1+RC\,j\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot RC)^2}}$$



Frequência de corte
(1/2 potência)

$$\sphericalangle H(j\omega) = -atang(\omega RC)$$

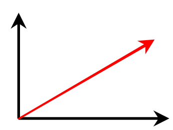
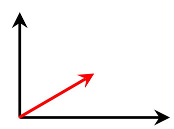


Filtro passa-baixas de 1ª. ordem

Autovetores e autovalores

- Representação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Transformação linear}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{entrada}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\text{saída}} \rightarrow \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

- Se $\mathbf{H} \cdot$  $=$ 

$\mathbf{x}$ $\downarrow$ autovetor

$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ $\downarrow$ autovalor

Entrada e saída colineares

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{x}$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \mathbf{H} \right| = 0 \rightarrow \ldots \lambda_1, \lambda_2$$

Representação de sitemas por Espaço de Estados...

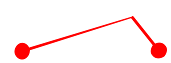
3.1 Séries de Fourier (história)

Euler

- Combinação linear de sinais de um conjunto básico (base ortogonal)
- Debate matemático:
- Euler (1748)
  - configurações da corda vibrante = ∑modos normais

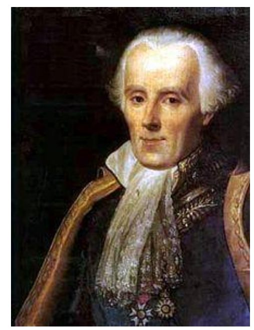
Bernoulli

- Bernoulli (1753):
  - Superposição supostamente válida para todos os movimentos físicos
- Lagrange (1758): crítico do uso de séries trigonométricas (não válidas para representar quebras ou descontinuidades)



- Fourier (1807-1822) – Propagação e difusão do calor
  - “qualquer” sinal periódico poderia ser representado por um somatório (série trigonométrica) → Ira de Lagrange; apoio de Laplace, Lacroix e Monge.
  - mas, a série trigonométrica: aplica-se a quase todos os sinais de interesse na engenharia → condições de Dirichlet
  - Grande contribuição: representação de sinais aperiódicos por uma integral (“Transformada de Fourier”)

Lagrange Fourier

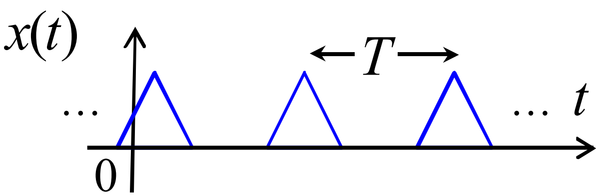


Laplace

Dirichlet

3.3 Série de Fourier (forma exponencial)

Sinal periódico



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

fasores

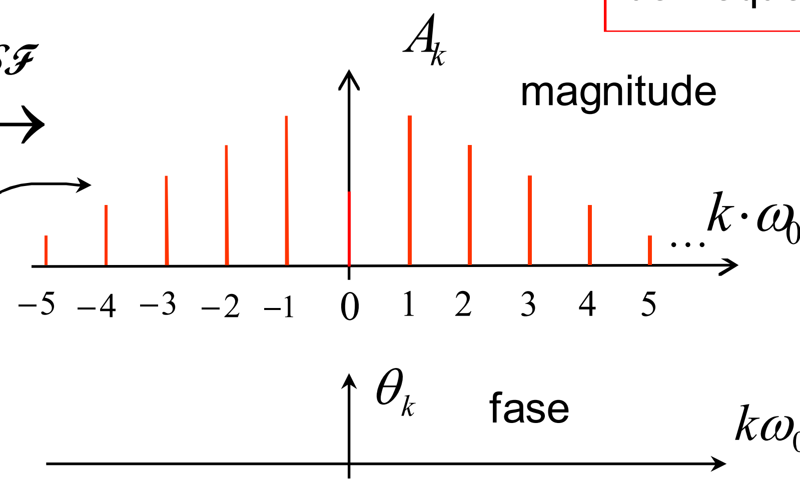
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot e^{jk\omega_0 t + \vartheta_k}$$

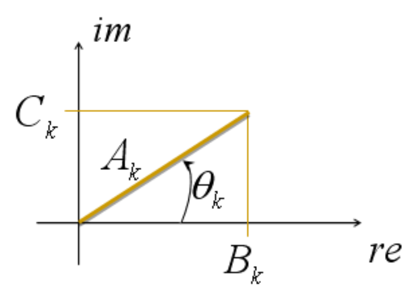
Série de Fourier

Espectro
de frequências

$\mathcal{SF}$
$\leftrightarrow$



$$a_k = A_k \cdot e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$$



$$\theta_k = \tan^{-1}(C_k / B_k)$$

$$A_k = \sqrt{(B_k)^2 + (C_k)^2}$$

Exemplo

Encontre a representação em FS do sinal

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Período Fundamental é:

$$\begin{cases} T_o = 4, \\ \omega_0 = \pi/2 \end{cases}$$

Exemplo

- Portanto, de posse de $\omega_0 = \pi/2$, temos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= 3\frac{e^{j(\pi/2t+\pi/4)} + e^{-j(\pi/2t+\pi/4)}}{2} \\
&= \underbrace{\frac{3}{2}e^{j\pi/4}}_{a_1} e^{j(1)(\pi/2)t} + \underbrace{\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}}_{a_{-1}} e^{j(-1)(\pi/2)t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Logo,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

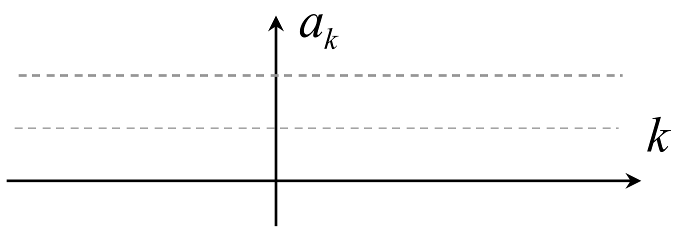
sendo $\omega_0 = \pi/2$ e

$$a_k = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4} & k=-1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4} & k=1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 3.2

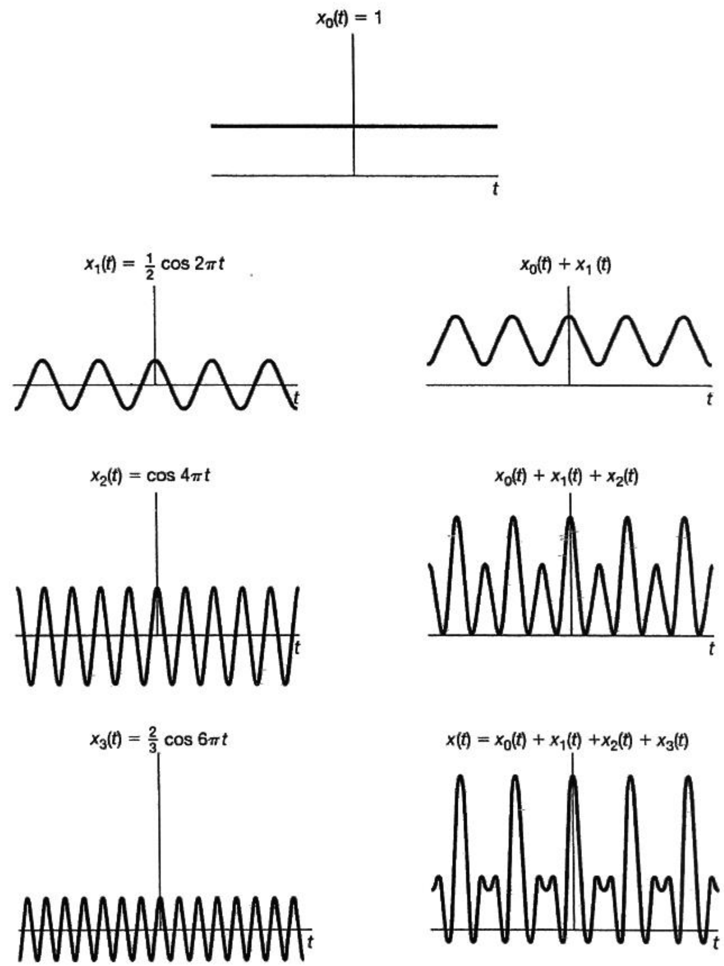
$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = a_{-1} = \dfrac{1}{4}, \\ a_2 = a_{-2} = \dfrac{1}{2}, \\ a_3 = a_{-3} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$



$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$



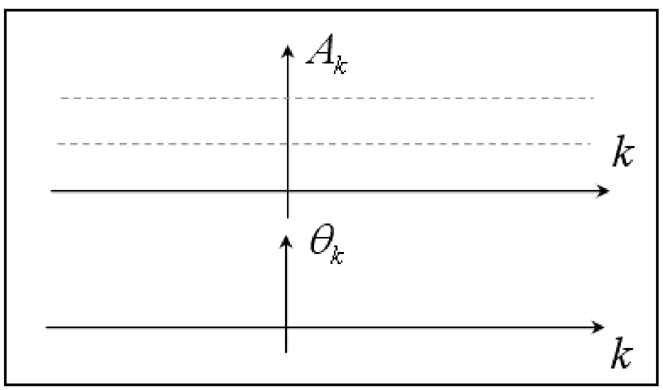
Exemplo 3.3

$$x(t) = \text{sen}\,\omega_0 t, \quad = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$

$$a_k = 0, \qquad k \neq +1 \text{ ou } -1.$$

Complete:



Ver Exemplo 3.4

Formas alternativas

- *$x(t)$ periódico e real*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot [\cos(k\omega_0 t) + j sen(k\omega_0 t)]$$

$$= a_0 + \underbrace{\sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t)}_{\cos(\theta)=\cos(-\theta)} + j \underbrace{\sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty} a_k \cdot sen(k\omega_0 t)}_{\substack{=0 \text{ porque x(t) é real} \\ \text{mas } \mathrm{sen}(\theta) = -\mathrm{sen}(-\theta) \\ \text{então } a_k = a_{-k}}}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

a_k = em geral, complexo, no livro texto (Oppenheim & Willsky)

Determinação dos coeficientes a_k

síntese

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}.$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt\right]}_{\begin{matrix} a_n \cdot T, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{matrix}}.^{*}$$

*

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t\,dt + j\int_0^T \operatorname{sen}(k-n)\omega_0 t\,dt.$$

$$= \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Área do período de uma (co)senoide

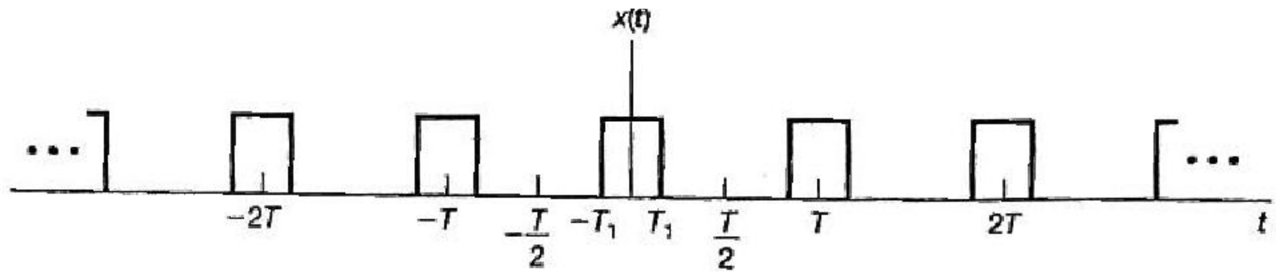
$$\int_0^T e^{j0} \cdot dt = T$$

análise

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt}$$

Valor médio (DC) $\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt}$

Ex. 3.5

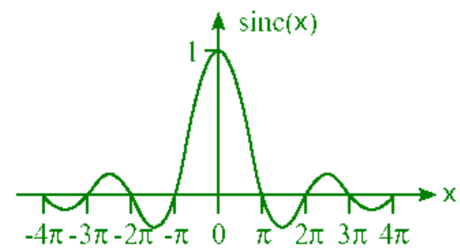


$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$

$$\boxed{a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}\,dt=-\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

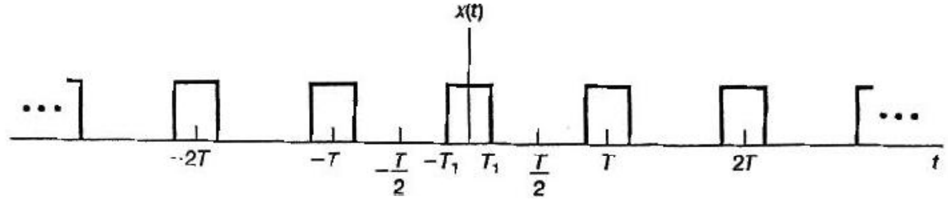


$$=\frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]=\boxed{\frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}=2\frac{T_1}{T}\frac{sen(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}{(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}}$$

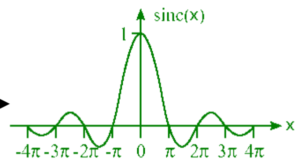
continua...

Ex. 3.5

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$



SF

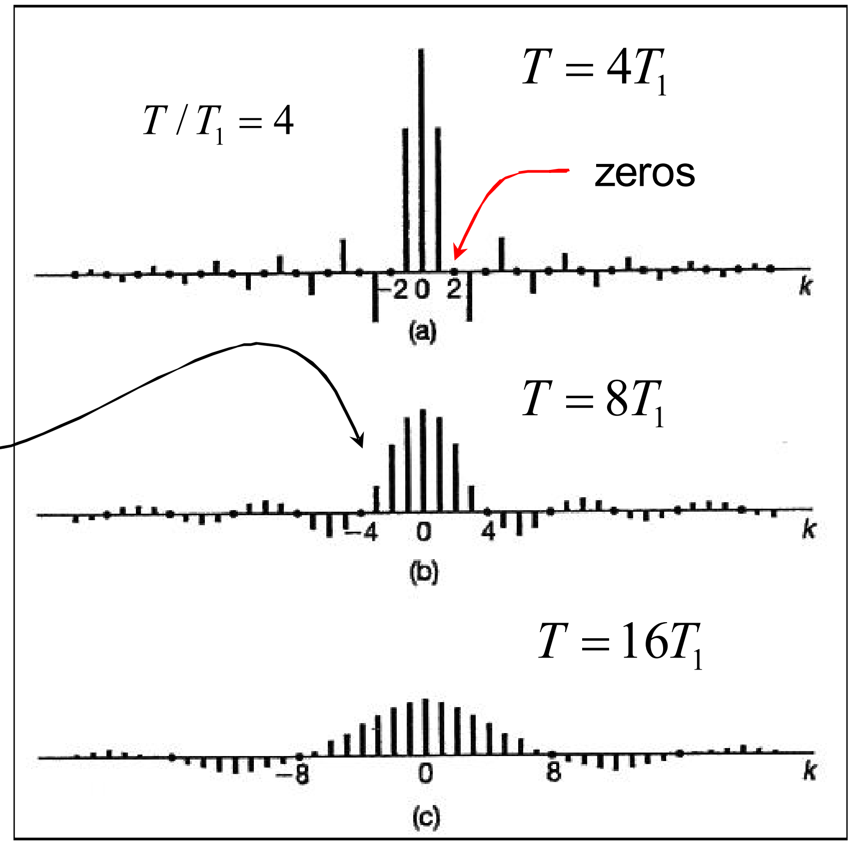


$$a_k=2\frac{T_1}{T}\frac{sen(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}{(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}$$

envoltória

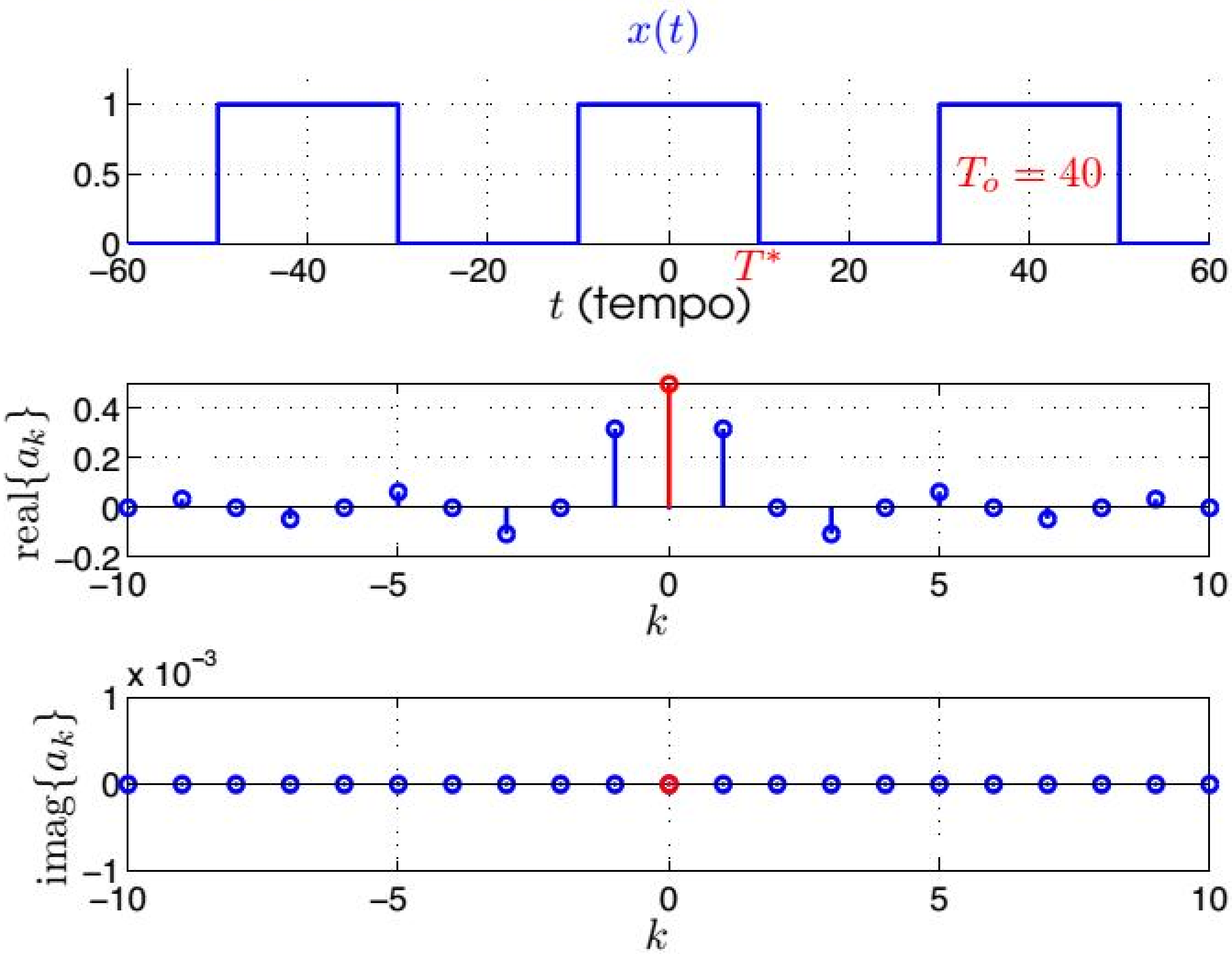
$$=\frac{sen(k\cdot 2\pi\cdot\frac{T_1}{T})}{k\cdot\pi}$$

Zeros em $\rightarrow k=\dfrac{m}{2}\dfrac{T}{T_1}$

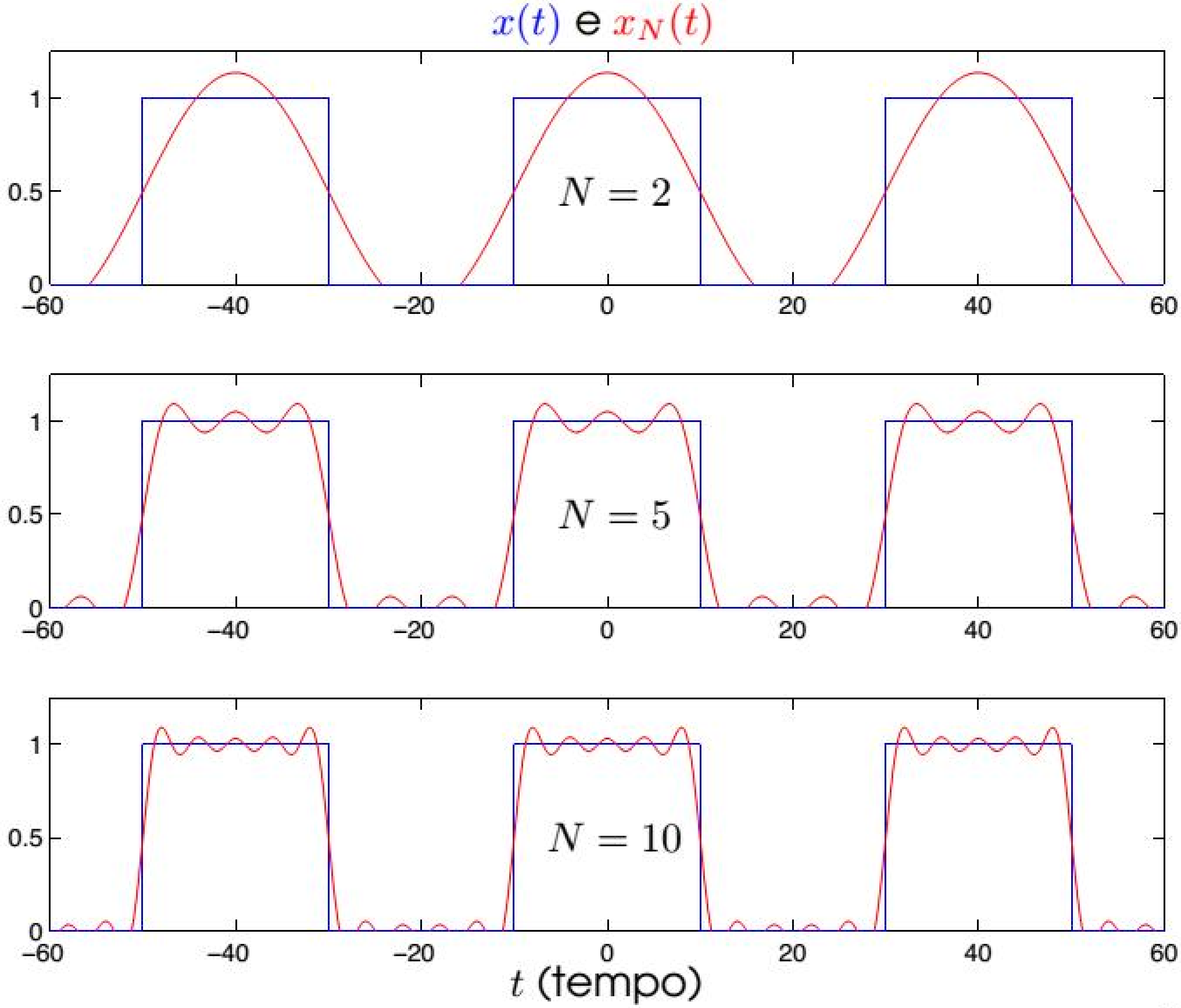


T aumenta, ω_0 diminui. Espectro mais denso

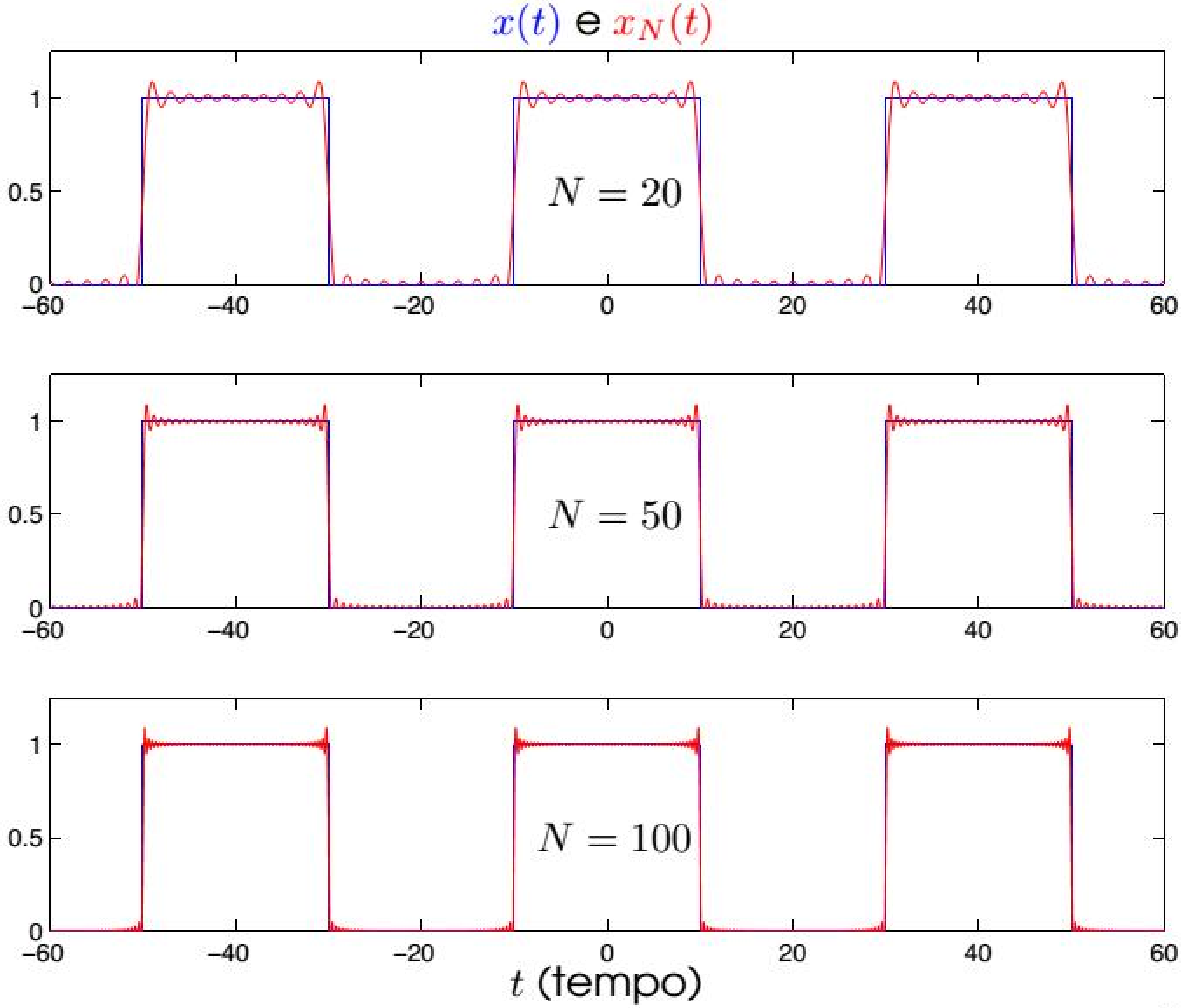
FS da Onda Quadrada



Ex.: $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ *(Onda Quadrada)*



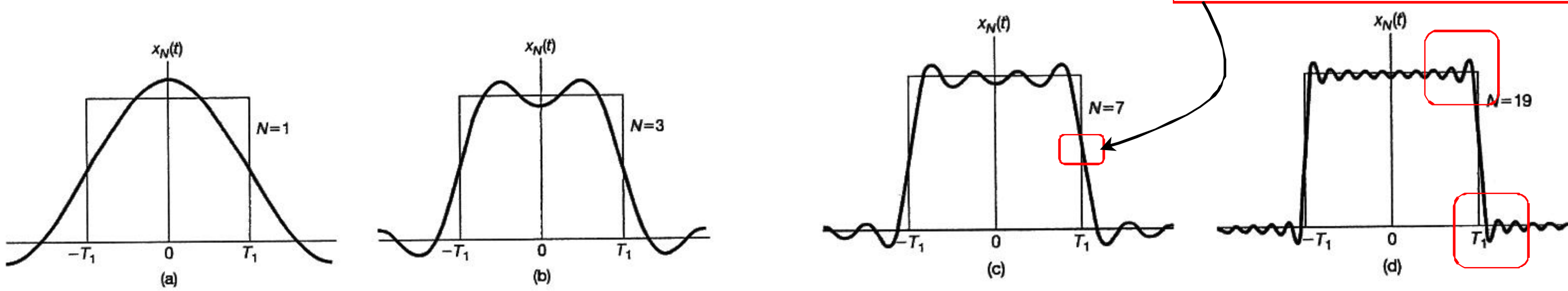
Ex.: $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ *(Onda Quadrada)*



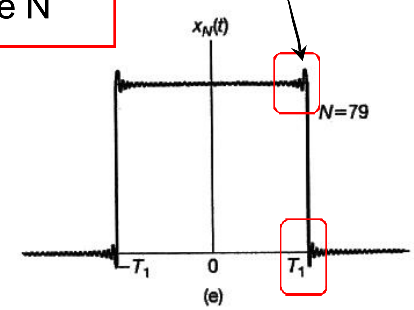
3.4 Convergência da série de Fourier

Sinal c/ descontinuidades: série sintetizada difere do sinal original. Exemplo: (Fenômeno de Gibbs)

média da descontinuidade



Amplitude dos picos não diminui com aumento de N



- Motivo da discórdia de Euler e Lagrange
- Convergência pela minimização da energia do "sinal de erro"→ aplicação a diversos sinais com discontinuidade de interesse na engenharia

Minimização da energia do erro

- Seja a aproximação por uma série de N elementos:

$$\boxed{x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

(reais)

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2\, dt$$ (energia do erro)

(reais)

$$E_N = \int_T [x(t) - \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}]^2\, dt$$

$$= \int_T [x^2(t) - 2x(t)\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_k a_k^2 e^{j2k\omega_0 t}]\,dt$$

$$\frac{\partial E_N}{\partial a_k} = 0$$

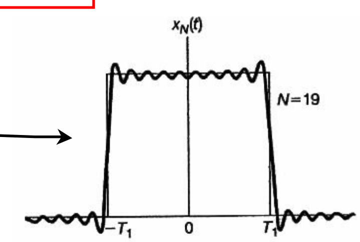
Detalhes no próximo slide

$$-2\int_T x(t)\cdot e^{jk\omega_0 t}\, dt + 2\cdot a_k \int_T e^{j2k\omega_0 t}\, dt = 0$$

T

$$e^{-j2k\omega_0 t}\int_T x(t)\cdot a_k e^{jk\omega_0 t}\, dt = a_k \int_T dt$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$



$x_N(t)$ e sua série não são necessariamente iguais, mas $E_N \to 0$

$$\boxed{E_n = \int_T [x_N^2(t) - 2x_N(t)\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_k a_k^2 e^{j2k\omega_0 t}]dt =}$$

$$= \int_T [x_N^2]dt +$$

$$\boxed{\cdots - 2a_k \int_T x_N(t) e^{jk\omega_0 t}\, dt + \cdots}$$

$$-2\int_T x_N(t)[a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots a_k e^{jk\omega_0 t} \cdots + a_N e^{jN\omega_0 t}]dt +$$

$$+\int_T [a_1^2 e^{j2\omega_0 t} + a_2^2 e^{j4\omega_0 t} + \cdots a_k^2 e^{j2k\omega_0 t} \cdots + a_N^2 e^{j2N\omega_0 t}]dt$$

$$\boxed{\cdots + a_k^2 \int_T e^{j2k\omega_0 t}\, dt + \cdots}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_N}{\partial a_k} = 0} \quad \therefore -2\int_T x_N(t)\cdot e^{jk\omega_0 t}dt + 2\cdot a_k \int_T e^{j2k\omega_0 t}dt = 0$$

$$\rightarrow \int_T x_N(t)\cdot e^{jk\omega_0 t}dt = a_k \int_T e^{j2k\omega_0 t}dt \quad \rightarrow e^{-j2k\omega_0 t}\int_T x_N(t)\cdot e^{jk\omega_0 t}dt = a_k e^{-j2k\omega_0 t}\int_T e^{j2k\omega_0 t}dt$$

$$\rightarrow \int_T x_N(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = a_k \int_T dt \quad \rightarrow \int_T x_N(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = a_k \cdot T \quad \boxed{\rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T x_N(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

Exercício 5: Trem de Impulsos

Encontre a representação em FS para o seguinte trem de impulsos:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

Exercício: Trem de Impulsos

- O sinal $x(t)$ é periódico com período T_o.
- Podemos calcular os coeficientes a_k:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 0}dt \\
&= \frac{1}{T_o}, \quad \forall k
\end{aligned}
$$

Exercício 5: Trem de Impulsos

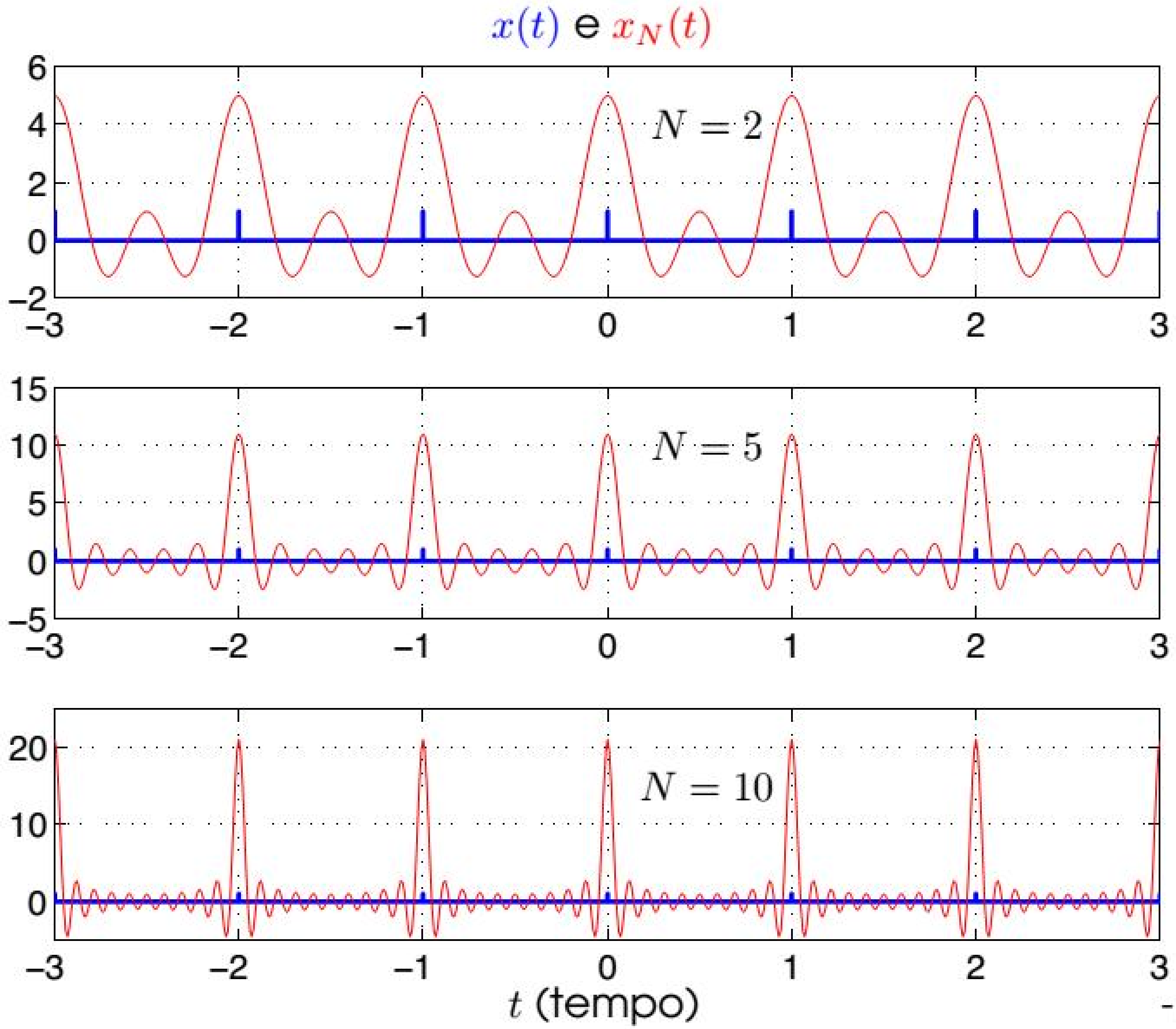
A representação em FS para o seguinte trem de impulsos:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

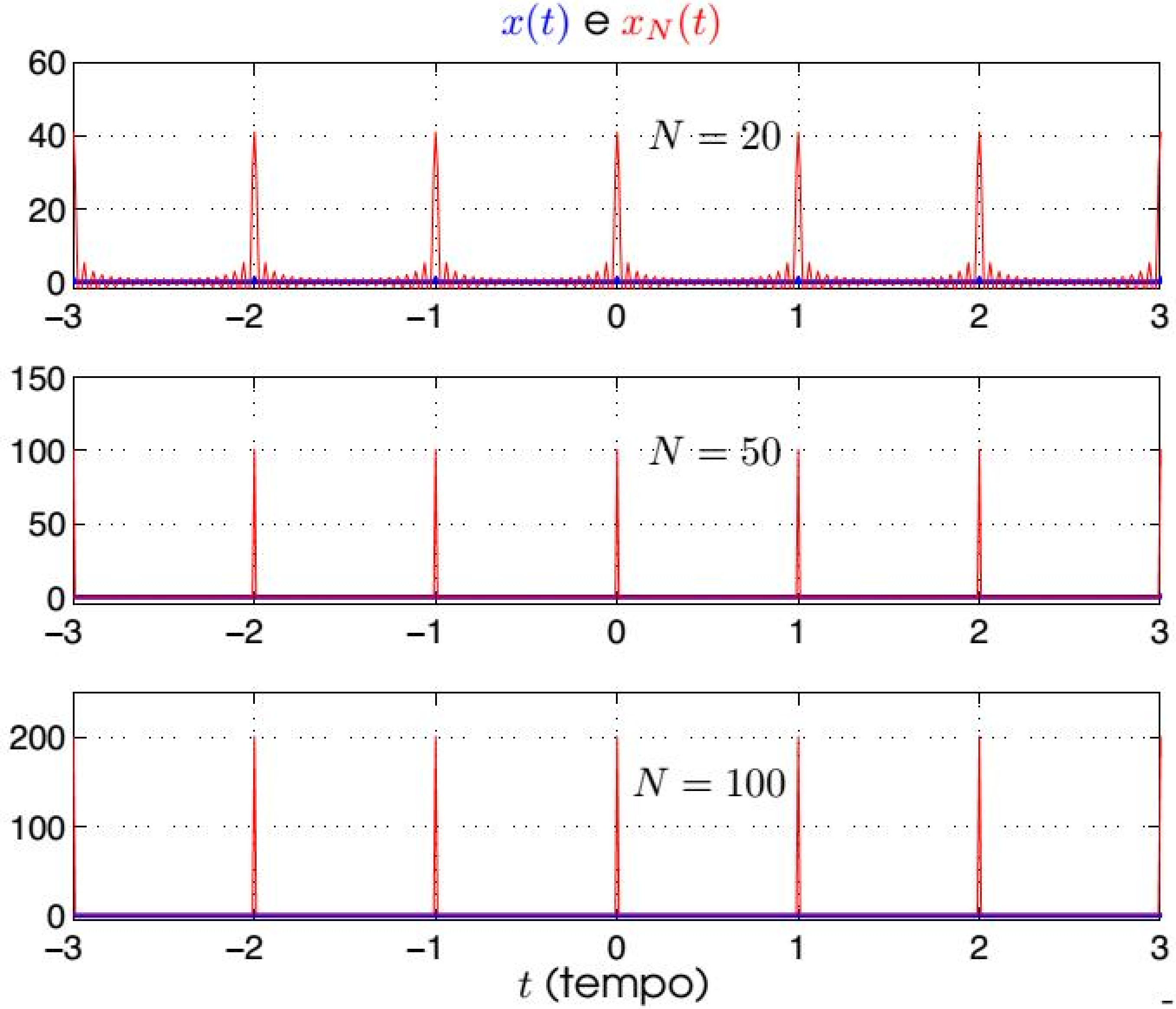
é

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_o} e^{jk(2\pi/T_o)t}$$

Exercício: $x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ (Trem de impulsos)



Exercício: $x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ (Trem de impulsos)



Condições de existência da série

- Energia finita por período $\boxed{\int_T |x(t)|^2 \, dt < \infty}$

- Descontinuidades → Condições de Dirichlet:
  - $x(t)$ é equivalente à série exceto nas descontinuidades

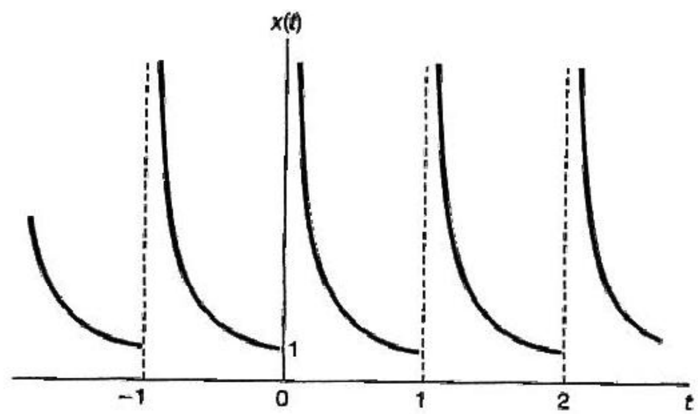
Condição 1: Integrabilidade absoluta

$$\boxed{\int_T |x(t)| dt < \infty.}$$

$$|a_k| \le \frac{1}{T}\int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)| dt.$$

$$\rightarrow \quad |a_k| < \infty$$

Viola Condição 1

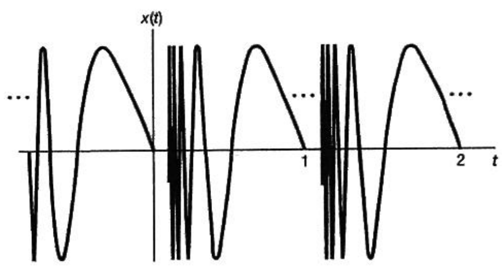


Condições de existência da série

- Descontinuidades → Condições de Dirichlet:
  - $x(t)$ é equivalente à série exceto nas descontinuidades

<u>Condição 2</u>: número finito de máximos e mínimos num período qualquer

Viola Condição 2

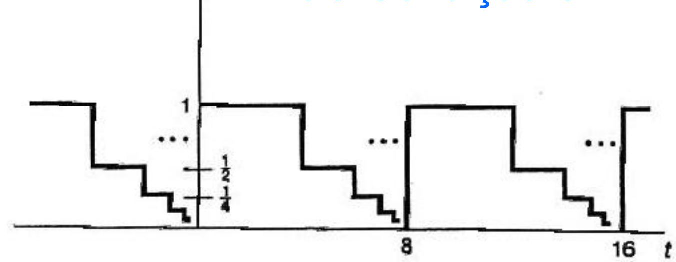


$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1$$

<u>Condição 3</u>: número finito de descontinuidades num período qualquer

x(t)

Viola Condição 3



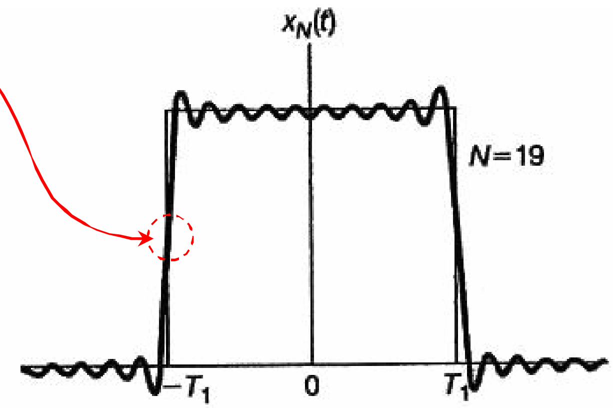
o valor de $x(t)$ diminui por um fator de 2 sempre que a distância entre t e 8 diminui por um fator de 2; ou seja, $x(t) = 1$, $0 \leq t < 4$, $x(t) = 1/2$, $4 \leq t < 6$, $x(t) = 1/4$, $6 \leq t < 7$, $x(t) = 1/8$, $7 \leq t < 7{,}5$ etc.].

Sinais de menor interesse na Engenharia

Sumário (convergência)

- $x(t)$ periódico e sem descontinuidades: a série de Fourier converge e é igual a $x(t)$ para todo t.
- $x(t)$ periódico e com nº finito de descontinuidades por período: a série de Fourier converge e é igual a $x(t)$ para todo t exceto nas descontinuidades
  - converge para a média dos valores do sinal nos dois lados da descontinuidade.
  - *A* energia do sinal de erro é nula

$$E = \int_T [x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{k\omega_0 t}]^2 \, dt = 0$$



Propriedade	Seção	Sinal periódico	Coeficientes da série de Fourier
		$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ Periódicos com período T e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linearidade	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Deslocamento no tempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Deslocamento em frequência		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugação	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Reflexão no tempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Mudança de escala no tempo	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periódico com período T/α)	a_k
Convolução periódica		$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicação	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciação		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Integração		$\int_{-\infty}^{t} x(t) dt$ (com valor finito e periódica somente se $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi / T)}\right) a_k$

Propriedades da série de Fourier de tempo contínuo (1/2)

Propriedade	Seção	Sinal periódico	Coeficientes da série de Fourier
		$x(t)$, $y(t)$ Periódicos com período T e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Simetria conjugada para sinais reais	3.5.6	$x(t)$ real	$a_k = a^*_{-k}$ $\Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\}$ $\Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\}$ $\lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert$ $\sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k}$
Sinais reais e pares	3.5.6	$x(t)$ real e par	a_k real e par
Sinais reais e ímpares	3.5.6	$x(t)$ real e ímpar	a_k puramente imaginário e ímpar
Decomposição par-ímpar de sinais reais		$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$ $x_0(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$\Re e\{a_k\}$ $j\{a_k\}$

Relação de Parseval para sinais periódicos

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Calendar

Propriedades da série de Fourier de tempo contínuo (2/2)

Propriedades principais

- Deslocamento no tempo

$$x(t) \xleftrightarrow{SF} a_k$$

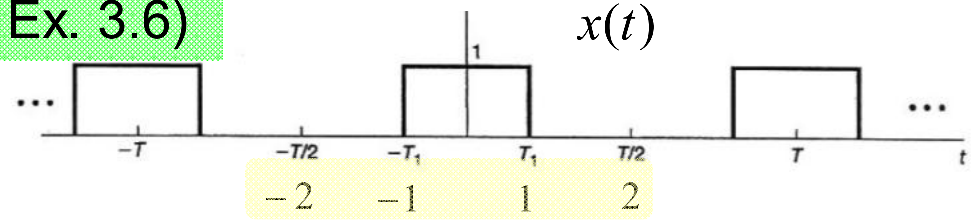
$$y(t) = x(\boxed{t-t_0}) \xleftrightarrow{SF} b_k = \frac{1}{T}\int_T \underbrace{x(t-t_0)}_{\tau = t - t_0} e^{-jk\omega_0 t}\,dt \;=\; \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}\,d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau \;=\; \boxed{e^{-jk\omega_0 t_0}}\,a_k$$

defasagem

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k\omega_0 t \boxed{-k\omega_0 t_0})}$$

Ex. 3.6)



$$\xleftrightarrow{s\mathcal{F}} a_k = 2\frac{T_1}{T}\frac{sen(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}{(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}$$

$T_1 = 1,\ T = 4$

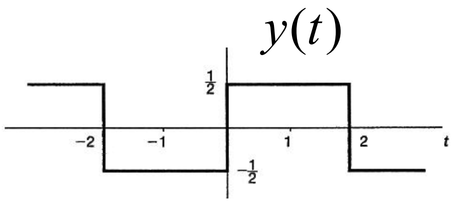
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$$a_k = \frac{1}{2}\frac{sen(k\cdot\pi/2)}{(k\cdot\pi/2)}$$

$$a_0 = 2\frac{T_1}{T} = +\frac{1}{2}$$

L´hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$y(t) = x(t-1) - \frac{1}{2} \xleftrightarrow{S\mathcal{F}} b_k = \begin{cases} e^{-jk\cdot\omega_0 t_0} a_k, & k \neq 0 \\ a_k - ½ = 0, & k = 0 \end{cases}$$

$\omega_0 = \pi/2$ $\quad$ $T_0 = 1$

$$\therefore \underset{k\neq 0}{b_k} = e^{-jk\cdot(\pi/2)\cdot 1} a_k \rightarrow \underset{k\neq 0}{b_k} = e^{-jk\cdot\pi/2}\frac{1}{2}\frac{sen(k\pi/2)}{(k\pi/2)}$$

$$\left(e^{-j\cdot\pi/2}\right)^k = (-j)^k$$

Aplicação da propriedade do deslocamento

Propriedades principais

- **Reflexão no tempo**

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{a_k} e^{jk\omega_0 t} \\ x(-t) = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}}_{\boxed{k=-m}} \end{cases}$$

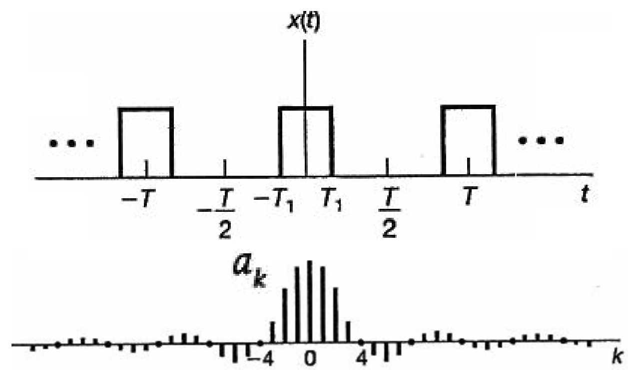
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boxed{a_{-m}} e^{jm2\pi t/T}$$

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{SF}} a_k \\ x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{SF}} a_{-k} \end{cases}$$

- **Conseqüências**

se $x(t)$ é par, $x(-t) = x(t)$

então $a_k = a_{-k}$ (par)



se $x(t)$ é ímpar, $x(-t) = -x(t)$

então $a_k = -\, a_{-k}$ (ímpar)

Verificar condições de simetria a partir de $a_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x_N(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

Algumas simetrias no espectro

$$Se \quad x(t) \quad é \quad real \quad e \quad par \quad \overset{S\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k \quad é \quad real \quad (e \quad par)$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot[\cos(k\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)]dt$$

$$\boxed{a_k = B_k + jC_k}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\cdot dt}_{B_k \neq 0} - j\underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot\mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt}_{C_k = 0}$$

$$Se \quad x(t) \quad é \quad real \quad e \quad ímpar \quad \overset{S\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k \quad é \quad imaginário \quad (e \quad ímpar)$$

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\cdot dt}_{B_k = 0} - j\underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot\mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt}_{C_k \neq 0}$$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} \qquad Demonstra-se \ que \ se \ x(t) \ real: A_k = par, \quad \theta_k = ímpar$$

Propriedades: algumas demonstrações

- Relação de Parserval

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2} =$$

Potência média do sinal

$$= \frac{1}{T}\int_T |\, x(t)\,|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\, a_k e^{jk\omega_0 t}\,|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\, a_k\,|^2 \cdot \underbrace{\boxed{\int_T dt}}_{=T}$$

Propriedades: algumas demonstrações

- Derivação e integração no tempo

Se $x(t) \xleftrightarrow{SF} a_k$

Então

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} \xleftrightarrow{S\mathcal{F}} jk\omega_0 \cdot a_k$$

$$\int x(t) \cdot dt \xleftrightarrow{S\mathcal{F}} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

Prova (derivação)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j(k\omega_0)t} \quad \therefore$$

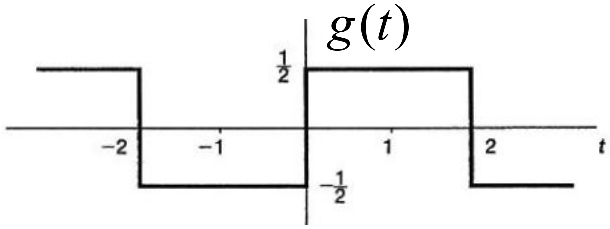
$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j(k\omega_0)t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{j(k\omega_0) \cdot a_k} \cdot e^{j(k\omega_0)t}$$

Prova (integração) é similar

Ex. 3.7

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



$$g_k = \begin{cases} e^{-jk\cdot\pi/2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{sen(k\pi/2)}{(k\pi/2)}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{dx(t)}{d(t)}$$

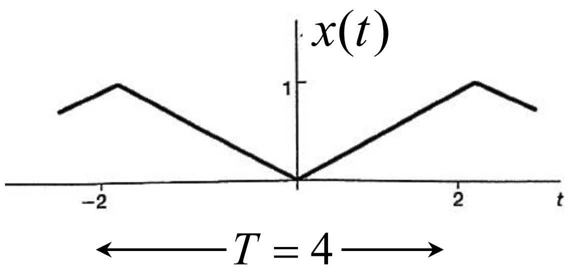
$$\updownarrow s\mathcal{F}$$

$$g_k = (jk\omega_o)\cdot b_k$$

$$b_k = \frac{1}{jk\omega_o} g_k$$

$$\underset{k\neq 0}{b_k} = \frac{1}{jk(\pi/2)}\,\frac{1}{2}\,\frac{sen(k\pi/2)}{(k\pi/2)}\,e^{-jk\cdot\pi/2}$$

$$\boxed{\underset{k\neq 0}{b_k} = \frac{1}{2j}\,\frac{sen(k\pi/2)}{(k\pi/2)^2}\,e^{-jk\cdot\pi/2}}$$



$$x(t) \overset{s\mathcal{F}}{\leftrightarrow} b_k\ ?$$

$$b_0 = \frac{1}{T}\underbrace{\int_T x(t)\cdot dt}_{=\frac{4\times 1}{2}=2} \rightarrow \boxed{b_0 = \frac{1}{2}}$$

$T = 4$

Propriedades principais: convolução periódica

Multiplicação ⇔ convolução

$$x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = T a_k b_k$$

sendo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Propriedades principais: convolução periódica

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \\
&= \int_T x(\tau)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0(t-\tau)}\right)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \underbrace{\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau}_{Ta_k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{Ta_k b_k}_{c_k} e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

3.6 Série de Fourier para sinais periódicos de tempo discreto

- $x[n]$ com período N
  - A série de Fourier é finita! → não há problema de convergência → fenômeno de Gibs não ocorre;
  - $x[n]$ completamente especificado pela série finita (ver exemplo na fig. 3.18)
  - Os coeficientes repetem-se periodicamente

Soma em um período

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Estudo mais detalhado futuramente, no cap. 5

Representações de sinais por Fourier

Representações de sinais como uma combinação linear de um conjunto de sinais básicos.

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

Resposta Senoidal Sistema LTI (Discreto)

- Temos:

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k e^{j\omega_k n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum_{k=1}^{M} \alpha_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k n}$$

- Se a entrada de um sistema LTI for uma combinação de exponenciais complexas, então a saída também será uma combinação de exponenciais complexas.

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j(2\pi/N)n}$$

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

- A soma de sinais periódicos é um sinal periódico se todos estes sinais possuem o mesmo período, N.
- $x[n]$, na eq. acima, é periódico então:

$$\omega_k = k\omega_0$$

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

fazendo, $\omega_k = k\omega_0$, temos

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k \phi_k$$

sendo $\phi_k = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N_0)n}$, funções exponenciais *harmonicamente relacionadas* com $x[n]$.

Série de Fourier Discreta

- Repare que:

$$e^{j(k+M)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n}\underbrace{e^{jM\omega_0 n}}_{=1} = e^{jk\omega_0 n}$$

se

$$e^{jM\omega_0} = e^{j2\pi n} = 1$$

logo

$$M\omega_0 = 2\pi \Rightarrow M = 2\pi/\omega_0 = \underline{N}$$

- Portanto, só existem N exponenciais complexas distintas, ou seja

$$e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$$

Série de Fourier Discreta

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Só existem N exponenciais complexas distintas, ou seja

$$e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$$

- Portanto, a série de DTFS leva em conta apenas N coeficientes a_k, pois $a_k = a_{k+N}$,

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Série de Fourier Discreta

- Série de Fourier Discreta:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Considere k no intervalo de 1 a N:

$$x[n] = \underline{a_1 e^{j1\omega_0 n}} + a_2 e^{j2\omega_0 n} + \ldots + a_N e^{jN\omega_0 n}$$

- Considere k no intervalo de 2 a $N+1$:

$$x[n] = a_2 e^{j2\omega_0 n} + \ldots + a_N e^{jN\omega_0 n} + \underline{a_{N+1} e^{j(N+1)\omega_0 n}}$$

- $a_k = a_{k+N}$

Exercício 1

Determine os coeficientes da DTFS de

$$x[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

Exercício 1

Determine os coeficientes da DTFS de

$$x[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

- logo $\omega_0 = \pi/12$ então temos

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{e^{j(\frac{\pi}{12}n+\frac{3\pi}{8})} - e^{-j(\frac{\pi}{12}n+\frac{3\pi}{8})}}{2j} \\ &= 1 - \frac{e^{(-1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(-1)j\frac{\pi}{12}n} + \frac{e^{(+1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(+1)j\frac{\pi}{12}n} \end{aligned}$$

Exercício 1

- Sem escolher os $N = 24$ valores de k:

$$x[n] = 1 + \frac{e^{j(\frac{\pi}{12}n+\frac{3\pi}{8})} - e^{-j(\frac{\pi}{12}n+\frac{3\pi}{8})}}{2j}$$

$$= 1 - \frac{e^{(-1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(-1)j\frac{\pi}{12}n} + \frac{e^{(+1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(+1)j\frac{\pi}{12}n}$$

$$= 1e^{(0+qN)j\frac{\pi}{12}n} - \frac{e^{(-1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(-1+qN)j\frac{\pi}{12}n}$$

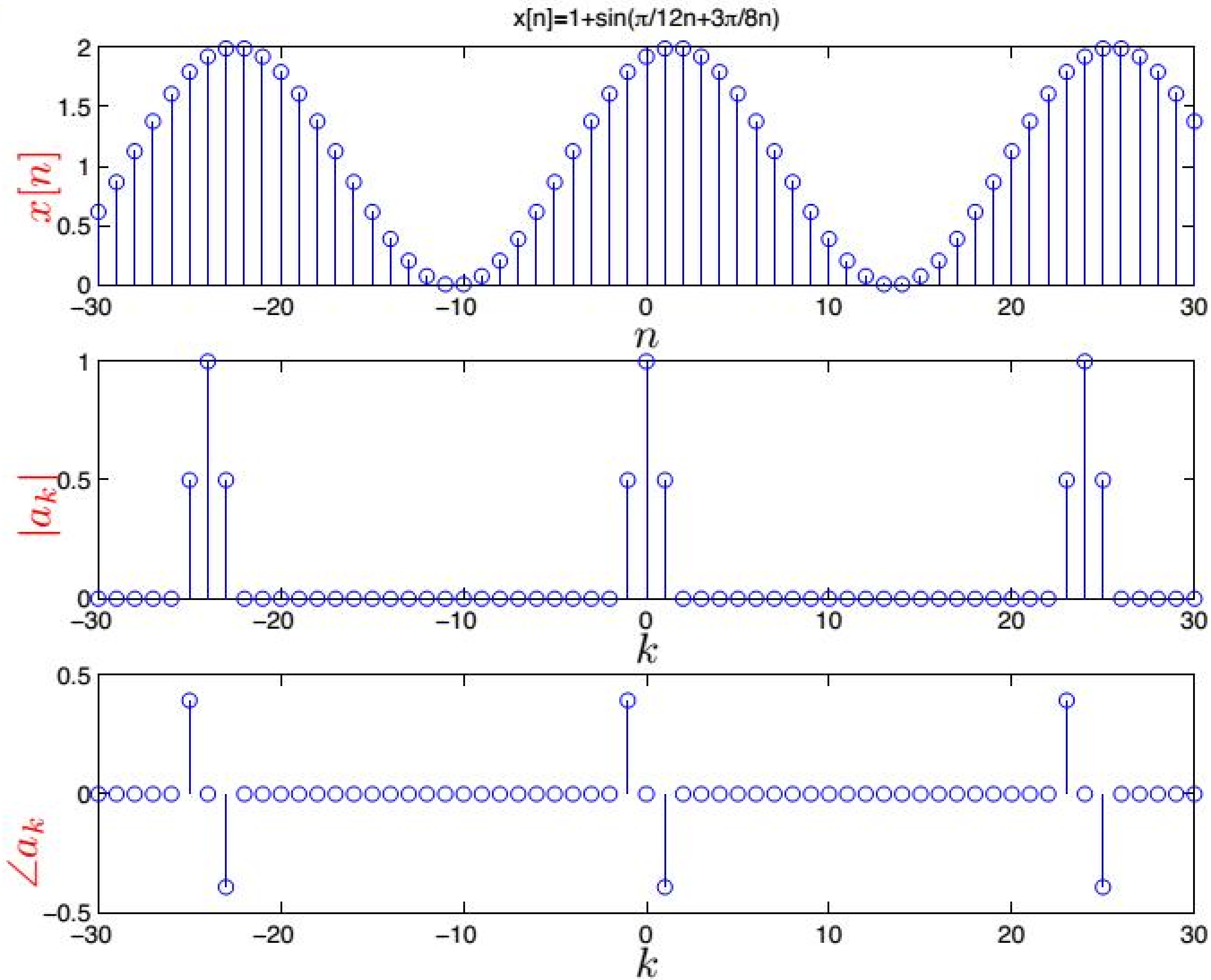
$$+\frac{e^{(+1)j\frac{3\pi}{8}}}{2j}e^{(+1+qN)j\frac{\pi}{12}n}$$

Exercício 1

- Sabendo que $\omega_0 = \pi/12$, logo $N = 24$.
- Sem escolher os $N = 24$ valores de k:

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{e^{-j\frac{3\pi}{8}}}{2j}, & \forall k = -1 + qN, \;\; q \in \mathbb{I} \\ 1, & \forall k = \;\; 0 + qN, \;\; q \in \mathbb{I} \\ \dfrac{e^{j\frac{3\pi}{8}}}{2j}, & \forall k = \;\; 1 + qN, \;\; q \in \mathbb{I} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 1



Determinação dos Coeficientes da DTFS

Determinação dos coeficientes da FS

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Multiplicando por $e^{-jr\omega_0 n}$

$$x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} e^{-jr\omega_0 n}$$

Somando N parcelas

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{jk\omega_0 n} e^{-jr\omega_0 n}$$

Determinação dos Coeficientes da DTFS

Determinação dos coeficientes da FS

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

Temos que:

$$\sum_{n=<N>} e^{j(k-r)2\pi/Nn} = \begin{cases} N, & k=r \\ (1-e^{j(k-r)2\pi n})/(\cdot) = 0, & k \neq r \end{cases}$$

Soma finita

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ (1-\alpha^N)/(1-\alpha), & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Determinação dos Coeficientes da DTFS

Determinação dos coeficientes da FS

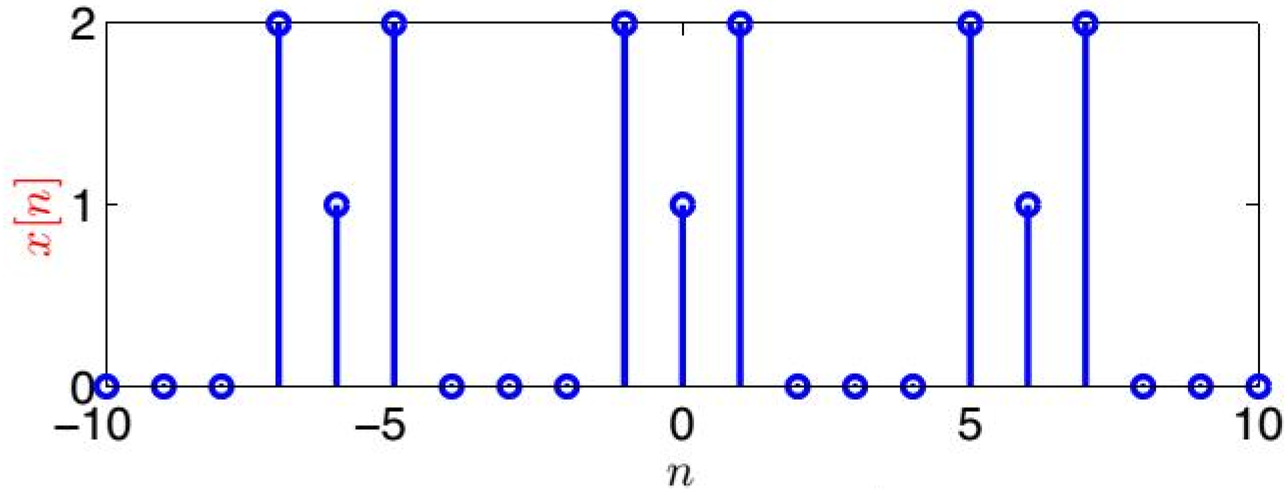
$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\omega_0 n} = a_r N$$

Portanto:

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n}$$

Exemplo

Determine os coeficientes da DTFS do sinal

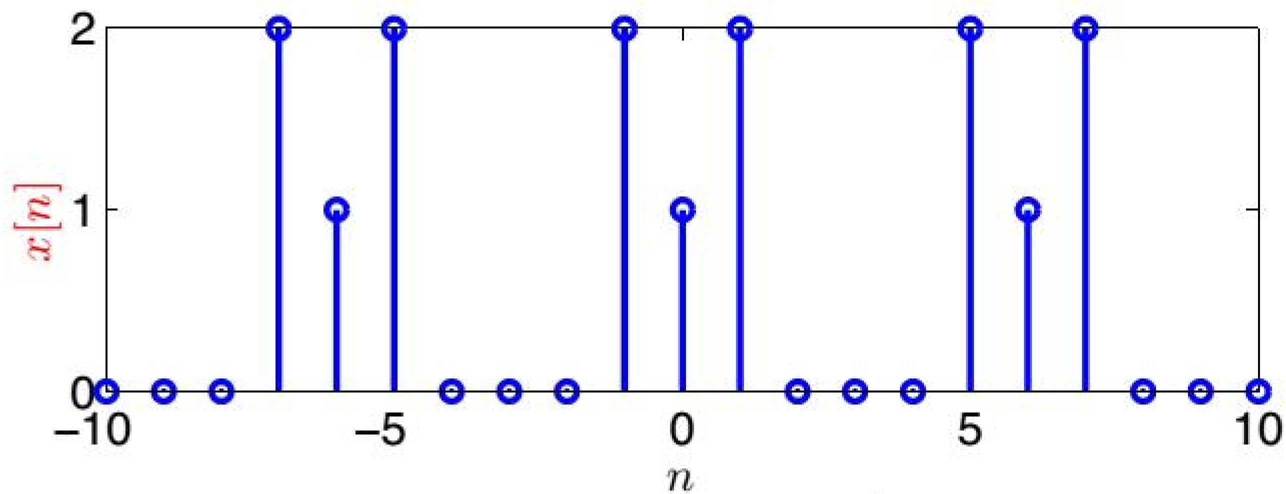


$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \text{ com } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

- $\omega_0 \; = ??? \quad \rightarrow \quad N \; = ???$

Exemplo

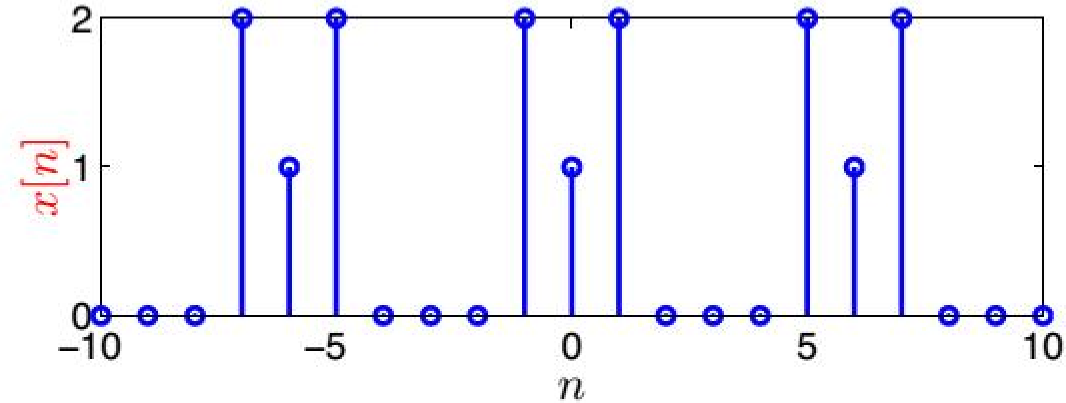
Determine os coeficientes da DTFS do sinal



$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \text{ com } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

- $N = 6 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi/6 = \pi/3$

Exemplo

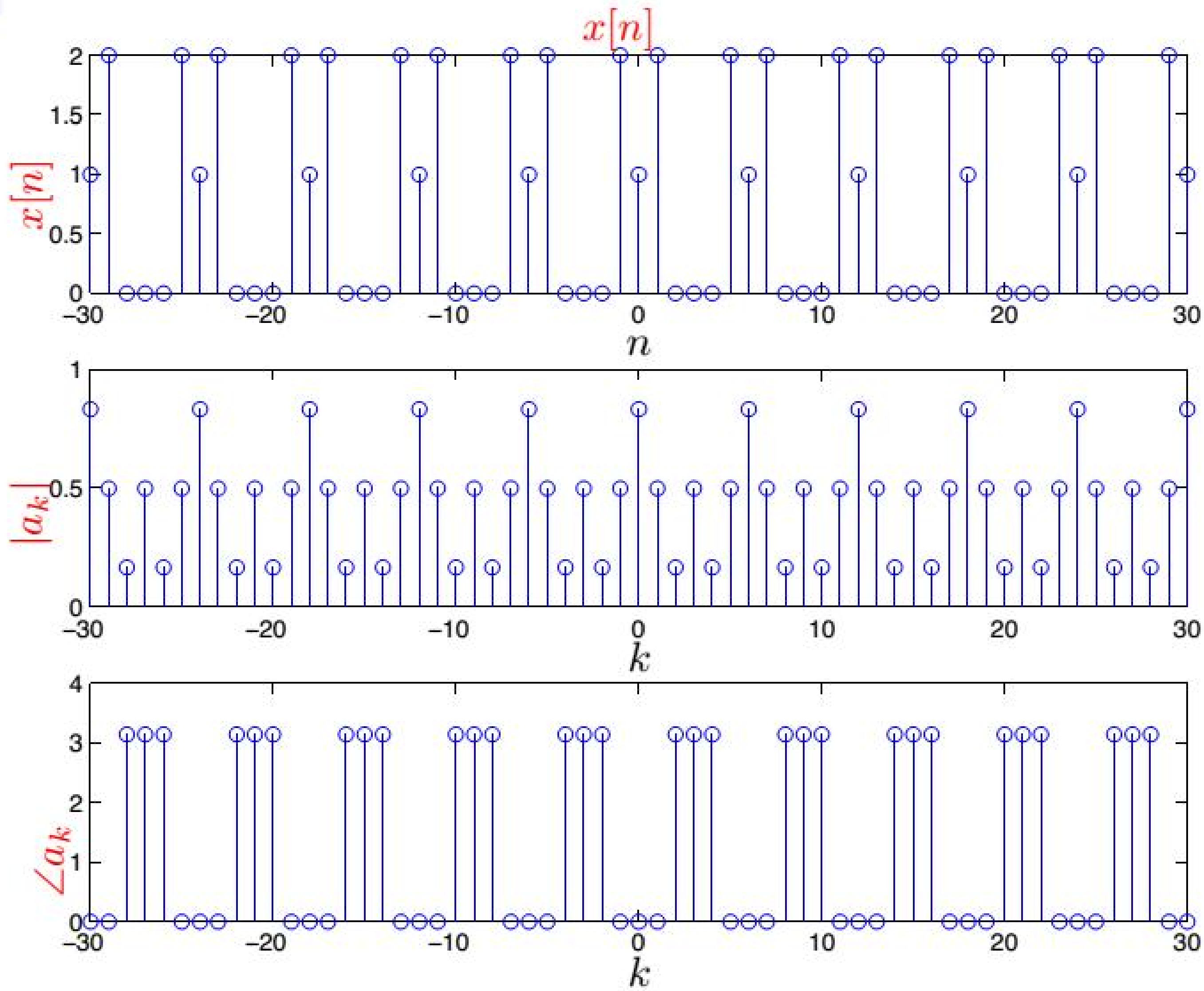


$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=-1}^{1} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$= \frac{2}{6}e^{jk\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}e^{-jk\frac{\pi}{3}}$$

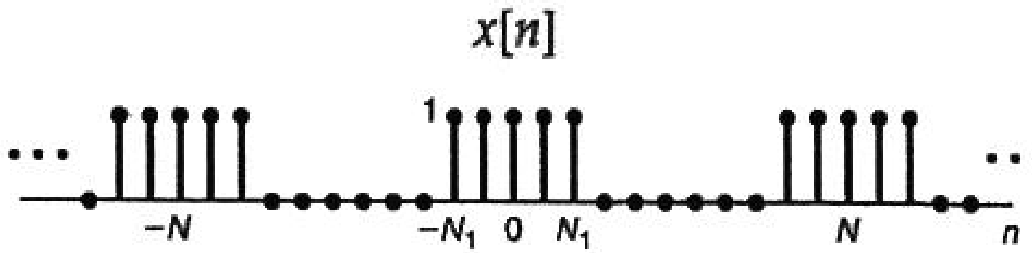
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\frac{e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos(k\frac{\pi}{3})$$

Exemplo



Ex. 3.12

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}:$$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \xrightarrow{m\,=\,n\,+\,N_1,} a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

$$a_k = \frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \overset{\boxed{k \neq 0,\, \pm N,\, \pm 2N,\, \ldots}}{=} \frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\left(\frac{1-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}\right)$$

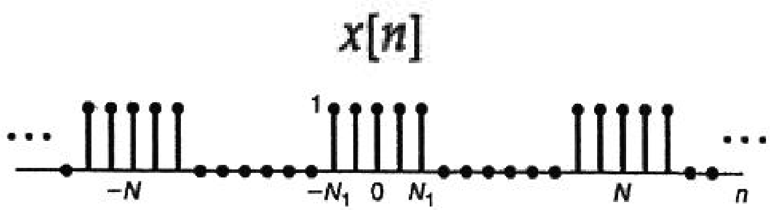
$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots.$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]}$$

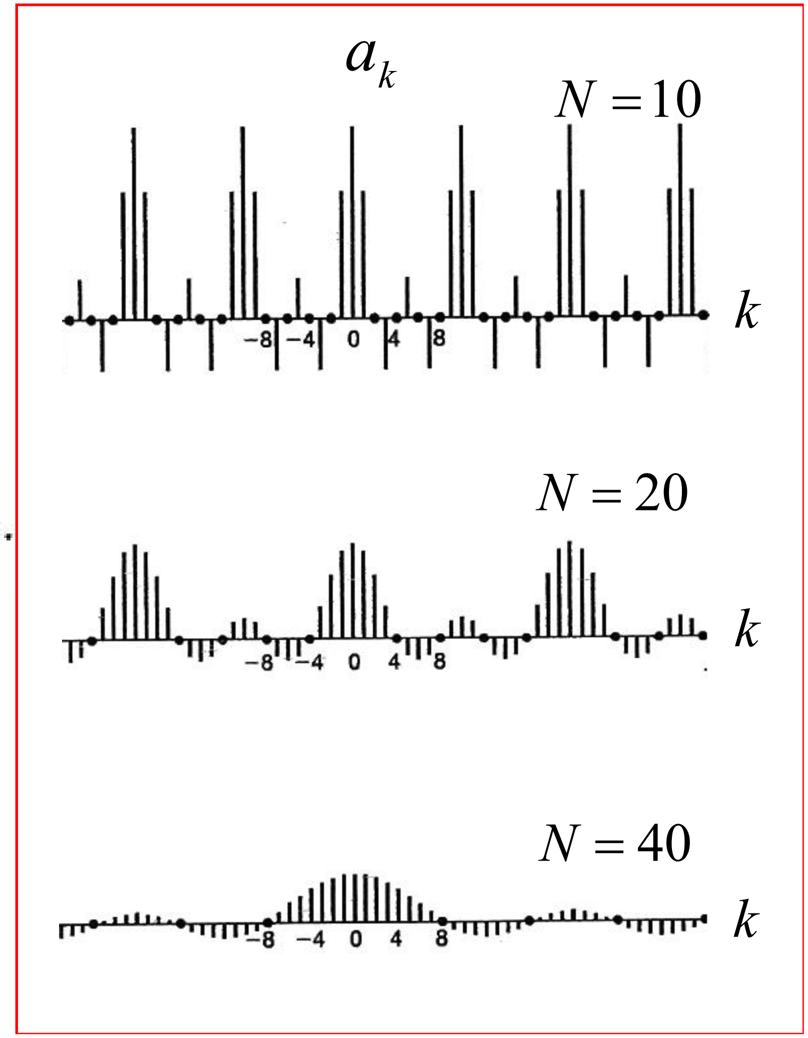
$$= \frac{1}{N}\frac{\text{sen}[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\text{sen}(\pi k/N)}, \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

Não é da forma *sen(x)/x*, mas é similar (veja próximo slide)

Ex. 3.12



$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\operatorname{sen}[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\operatorname{sen}(\pi k/N)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots . \end{cases}$$



Não há problemas de convergência

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

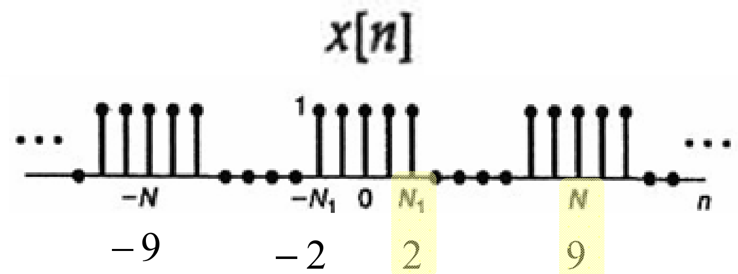
série completa : N termos

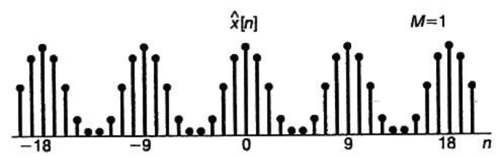
N par $\quad \boxed{M = N/2}$

$$x[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

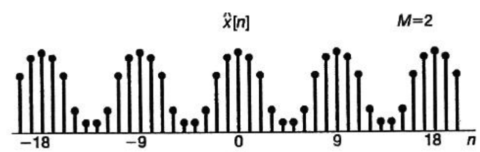
N ímpar $\quad \boxed{M = (N-1)/2}$

$$x[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

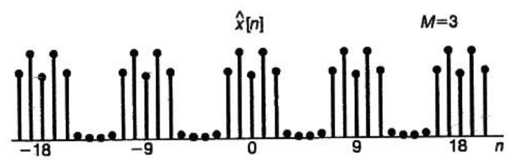




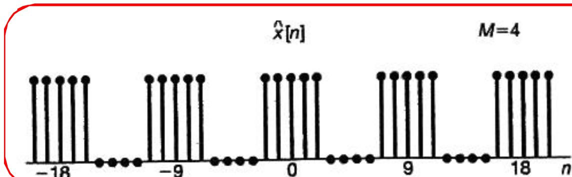
$a_0 \cdots a_{\pm 1}$
$\rightarrow 3$ *termos*



$a_0 \cdots a_{\pm 2}$
$\rightarrow 5$ *termos*



$a_0 \cdots a_{\pm 3}$
$\rightarrow 7$ *termos*



$a_0 \cdots a_{\pm 4}$
$\rightarrow 9$ *termos*

Série de Fourier de tempo discreto é finita e exata

Propriedades das Séries de Fourier

- Notação:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

relaciona o sinal $x(t)$ com seus coeficientes da série de Fourier

- de maneira similar:

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

Propriedades da DTFS

- Linearidade

$$z[n] = Ax[n] + By[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- Deslocamento no tempo

$$x[n - n_0] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

- Deslocamento na frequência

$$e^{jm\omega_0 n} x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{k-m}$$

Propriedades da DTFS

- Conjugação

$$x^*[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$$

- Reflexão no tempo

$$x[-n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

- Mudança de escala no tempo

$$x[n/m] \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{m} a_k$$

se n é múltiplo de m e $m > 0$

Propriedades da DTFS

- Convolução periódica

$$\sum_{k=<N>} x[r]y[n-r] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} N a_k b_k$$

- Multiplicação

$$x[n]y[n] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{m=<N>} a_m b_{k-m}$$

- Primeira diferença

$$x[n]-x[n-1] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} (1-e^{-jk\omega_0})a_k$$

Propriedades da DTFS

- Somatório

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega_0})^{-1} a_k$$

- Sinais reais

$$x[n] \in \mathbb{R} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a^*_{-k}$$

- Sinais reais e pares

$$x[n] = x[-n] \in \mathbb{R} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k} \in \mathbb{R}$$

Propriedades da DTFS

- Sinais reais e ímpares

$$x[n] = x[-n] \in \mathbb{R} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k} \in \mathbb{I}m$$

- Decomposição Par e Ímpar

$$x_{\text{par}}(t) = \text{Par}\{x(t)\} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} \text{Real}\{a_k\}$$

$$x_{\text{ímpar}}[n] = \text{Ímpar}\{x[n]\} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} j\text{Imag}\{a_k\}$$

- Relação de Parseval

$$\sum_{n=<N>} |x(t)|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

Exercícios recomendados

- Básicos com respostas:
  - 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.12, 3.13, 3.20
- Básicos (sem respostas)
  - 3.22, 3.23, 3.24, 3.25
- Básicos avançados
  - 3.40, 3.42, 3.46a-b, 3.54, 3.62,
- Problemas de Extensão
  - 3.65a (pares a, c, d), 3.65b, 3.65d, 3.71