Modulo 01
Sinais e Sistemas

Ementa

- Sistemas lineares invariantes no tempo;
- Análise de Fourier para sinais e sistemas de tempo contínuo;
- Análise de Fourier para sinais e sistemas de tempo discreto;
- Caracterização de sistemas por meio da transformada de Laplace;
- A transformada Z.
- Amostragem de sinais;
- Modulação;

Bibliografia

Livro Texto

- A.V. Oppenheim & A.S. Willsky (2010), Sinais e Sistemas (2ª. Edição) – Pearson

Leitura complementar

- B.P. Lathi (2007), Sinais e Sistemas Lineares (2ª. Edição Revisada) - bookman

Planejamento

Aula	Data	Dia	assunto	Cap
1	03/03/15	ter	Apresentação da disciplina. 1.2 Transf. Temporais	1
2	06/03/15	sex	1.3 - Exponenciais complexas; 1.4 - Impulso e degrau unitário	1
3	10/03/15	ter	1.5 Sistemas de tempo contínuo e discreto; 1.6 Proprieades básicas de sistemas lineares	1
4	13/03/15	sex	Exercícios	1
5	17/03/15	ter	2.1 Resposta ao impulso e convolução em tempo discreto; 2.2 Convolução em tempo contínuo	2
6	20/03/15	sex	2.3 Propriedades de SLITs causais descritos por eq. Diferenciais/diferenças; 2.4 diagrams de blocos	2
7	24/03/15	ter	Exercícios	2
8	27/03/15	sex	**Prova 1 (30 pontos)**	1, 2
9	31/03/15	ter	3 Série de Fourier em tempo contínuo e discreto	4
	03/04/15	sex	Feriado, não haverá aula	3
10	07/04/15	ter	3 Série de Fourier em tempo contínuo e discreto	4
11	10/04/15	sex	4.1Intergral de Fourier; 4.2: Transf. Fourier (TF) de sinais periódicos; 4.3 Prop. da TF em tempo contínuo	4
12	14/04/15	ter	4.7 Sistemas caract por Eq. Dif. Lineares; Exercícios	5
13	17/04/15	sex	5.1-5.2 Transformada de Fourier em tempo discreto; 5.3 Algumas propriedades	3,4,5
	21/04/15	ter	Feriado, não haverá aula	3,4,5
14	24/04/15	sex	Exercícios	3,4,5,7
15	28/04/15	ter	Exercícios	3,4,5,7
	01/05/15	sex	Feriado, não haverá aula	
16	05/05/15	ter	7.1 Teorema da amostragem; 7.2 Reconstrução; 7.3 Aliasing	7
17	08/05/15	sex	8.1 Noção de sistemas de comunicação; 8.1, 8.3, 8.5: AM; 8.3 Multiplexação FDM; 8.5 PAM; 8.7 Noções de FM	8
18	12/05/15	ter	9.1 Transformada de Laplace (TL) bidirecional; 9.2 Algumas propriedades da RDC; 9.3 TL inversa	9
19	15/05/15	sex	Exercícios (GILSON)	3,4,5,7
20	19/05/15	ter	**Prova 2 (35 pontos)**	3,4,5,7
21	22/05/15	sex	9.5 (Principais) propriedades da TL;	9
22	26/05/15	ter	9.7 Análise/Caract SLITs; 9.8 Diagrams em blocos; 9.9 TL unidirecional	9
23	29/05/15	sex	Exercícios	9
24	02/06/15	ter	10.1 Transformada Z (TZ) bidirecional; 10.2 Algumas prop. RDC; 10.3 TZ Inversa	10
	05/06/15	sex	Feriado, não haverá aula	
25	09/06/15	ter	10.4 Cálculo geométrico da TF a partir da TZ; 10.5 propriedades da TZ 10.8 diagramas de blocos; 10.9 TZ unidireciona	10
26	12/06/15	sex	Exercícios	10
27	16/06/15	ter	Exercícios	10
28	19/06/15	sex	6.2 Representação Magnitude-fase (diagramas de Bode, DB); 6.5.1Sistemas de 1a. Ordem de tempo contínuo (DB)	6
29	23/06/15	ter	6.5.2 Sistemas 2a. Ordem de tempo contínuo; 6.5.3 DB para respostas em frequência racionais 6.6 Diagramas de Bo	6
30	26/06/15	sex	Exercícios	6
31	30/06/15	ter	**Prova 3 (35 pontos)**	9,10,6
	03/07/15	sex		
	07/07/15	ter	**Exame Especial**	Tudo

Avaliações

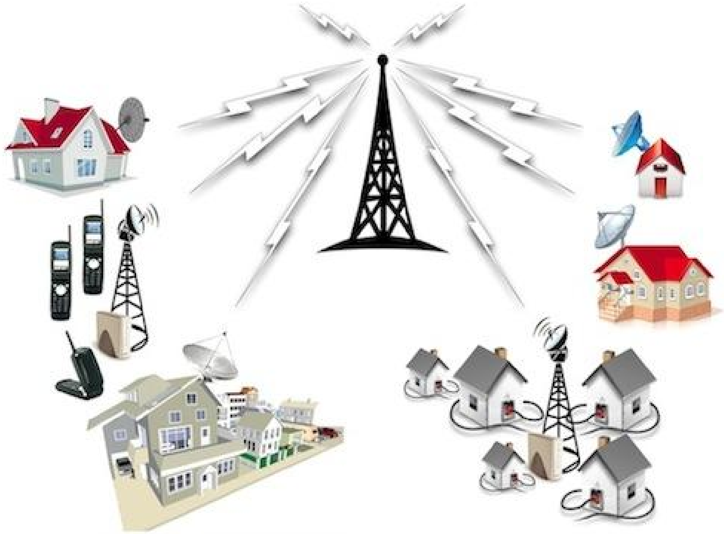
Prova 1	27/03	30 pontos
Prova 2	19/05	35 pontos
Prova 3	30/06	35 pontos

Visão Geral

Grandes áreas

Instrumentação e Controle

Telecomunicações

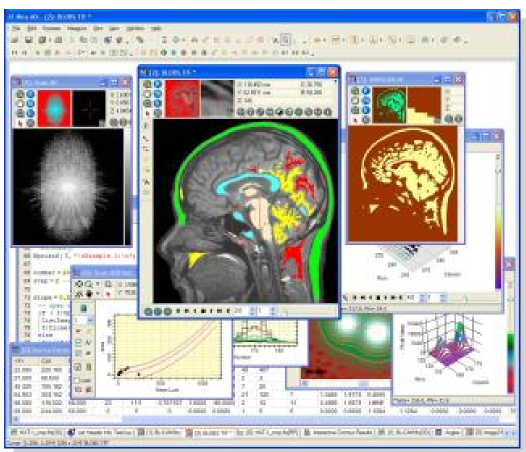


Outras áreas ou aplicações

Processamento de voz

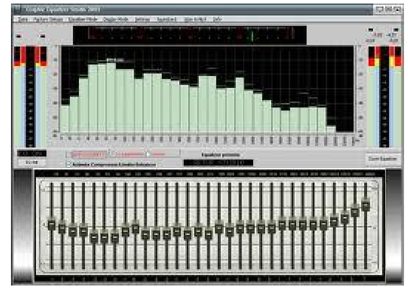
Reconhecimento
Síntese
Codificação
Filtragem

Processamento de imagens



Medicina
Indústria
Laser

Áudio



Efeitos
Restauração

Sinais Biomédicos

EEG
ECG
Ultrasom

Mercado Financeiro

predição

Alguns pré-requisitos do curso....

- Números complexos (representação cartesiana e polar)
- Frequência e fase de um sinal senoidal: representação, significado, unidades, identificação
- Solução de eq. diferenciais lineares de 1ª e 2ª ordem (solução natural e forçada)

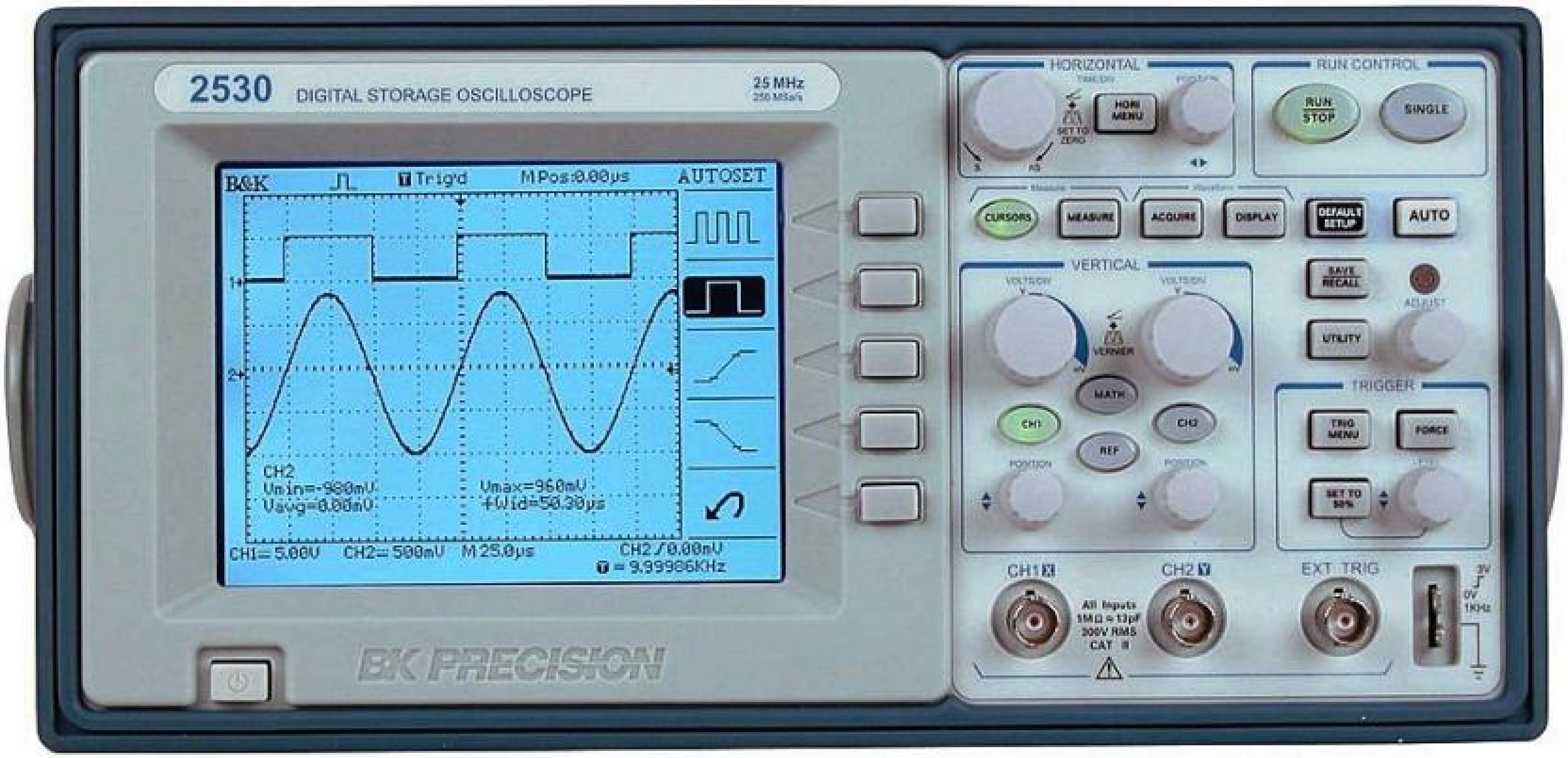
Sinais

Podemos dizer que sinal é uma abstração de qualquer quantidade mensurável que é uma função de uma ou mais variáveis independentes (por exemplo, tempo ou espaço) e que carrega informação da natureza de um fenômeno.

Exemplos:

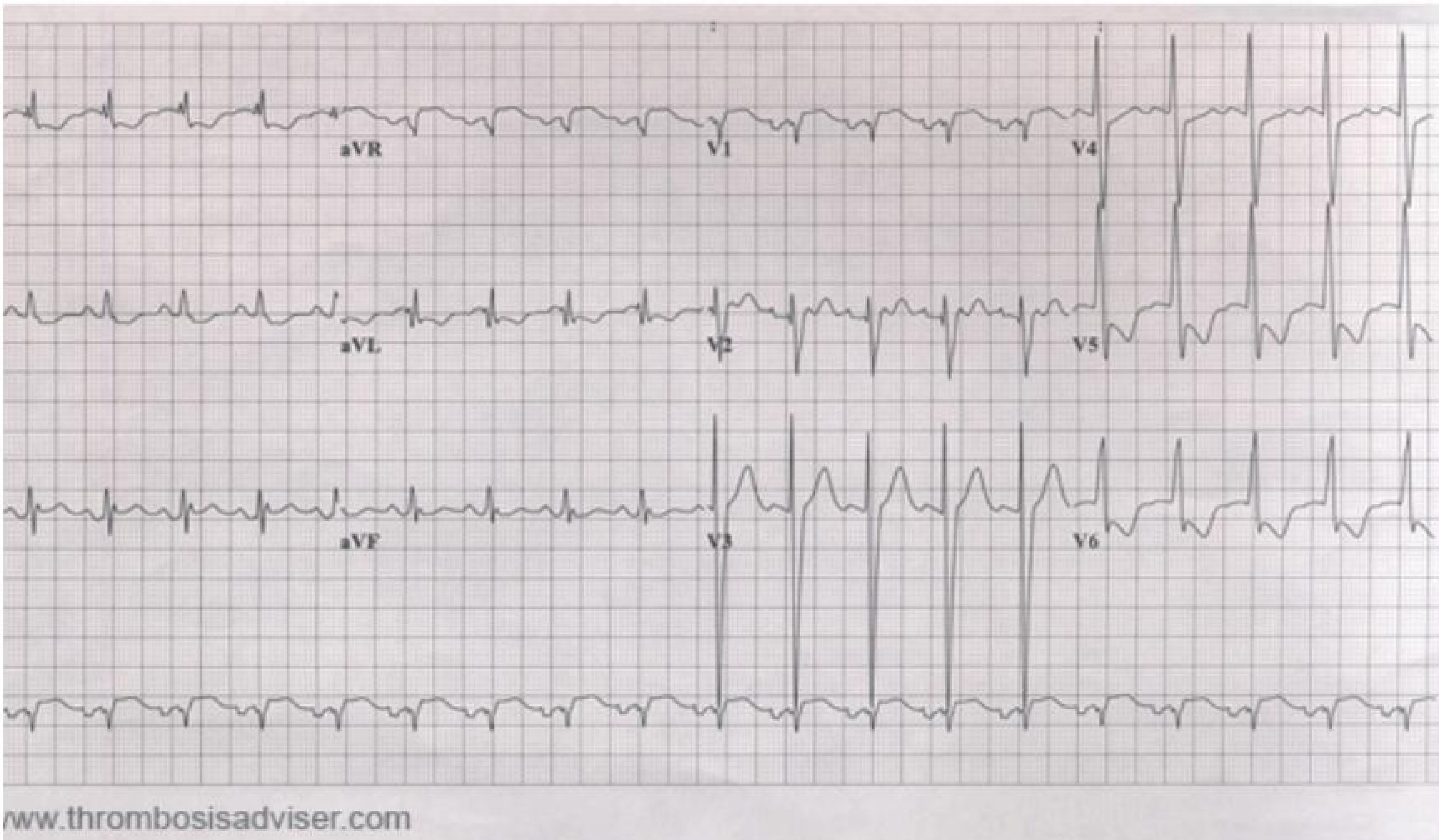
- Tensão ou corrente em um circuito
- Vídeo e áudio
- Índice Bovespa
- Eletrocardiograma, Eletroencefalograma etc.
- Imagem Monocromática

Tensão em um circuito

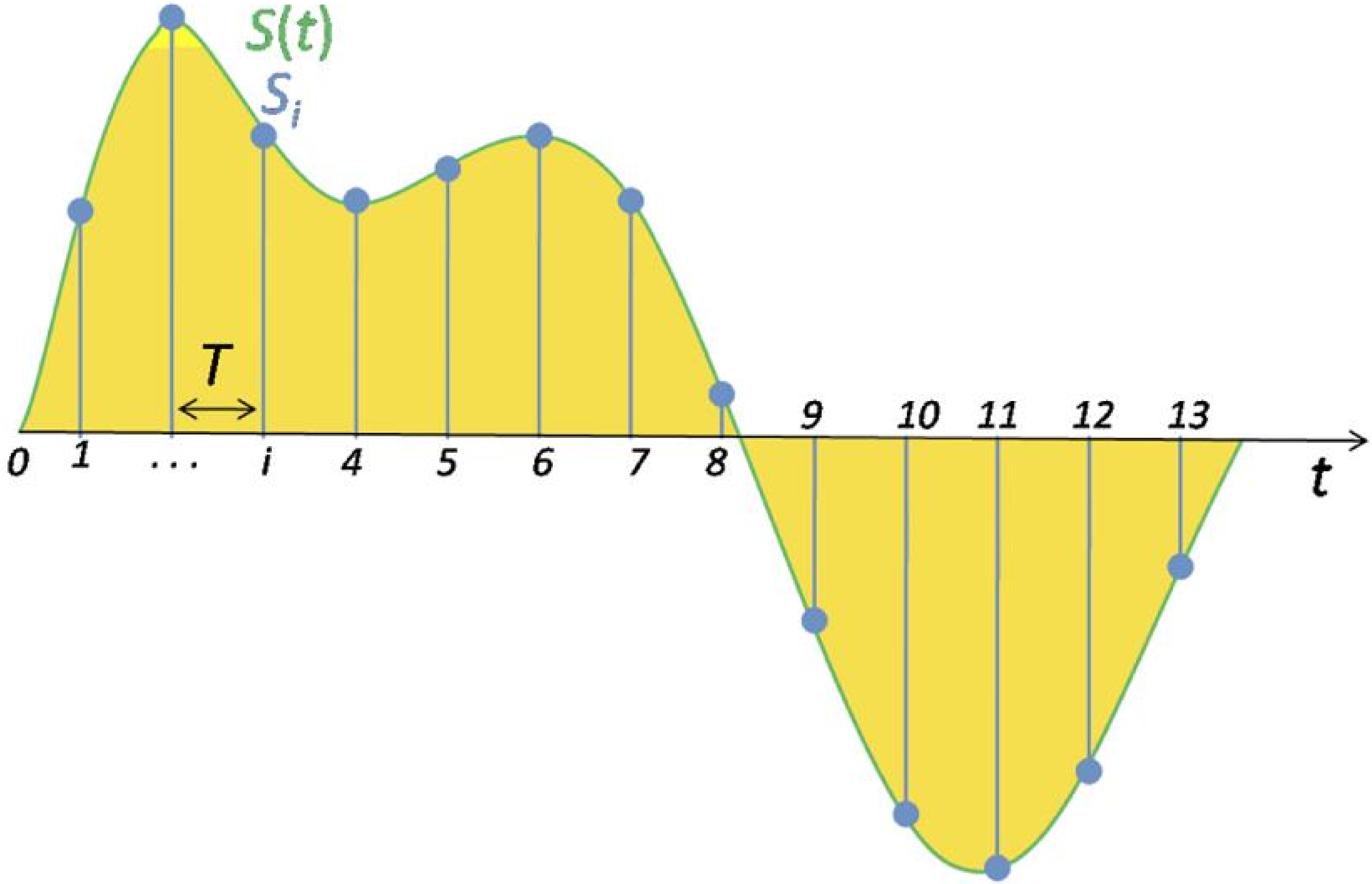


Índice Bovespa

Eletrocardiograma



Sinal amostrado



Sistemas

$$x \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y$$

entrada(s) saída(s)

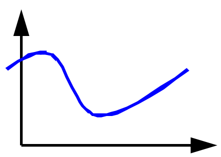
H = transformação (sistema físico, modelo computacional)

- Interesses:
  - Caracterizar (identificar) o sistema para prever respostas a entradas diferentes
  - Remover (filtrar) ruído dos sinais
  - Extrair informações específicas dos sinais (ECG, voz, etc)
  - Gerar novos sinais para modificar ou controlar certas características do sistema

Principais classes de sinais e sistemas

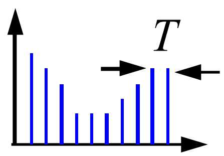
Tempo contínuo x discreto

$x(t)$



t

$x(n)$



n

Instantâneo x dinâmico

$y = ax$

$y = ax + b\dfrac{dy}{dt}$

"memória"...

Determinístico x estocástico

Formas de ondas previsíveis

Formas de onda aleatórias (⇨ estatística)

linear x não linear

$y = ax$

$y = ax^3$

$y = ax + b$

Variante x invariante, etc.

SLIT: Sistema (dinâmico, determinístico) Linear e Invariante no Tempo

Sistema linear (SL)

$$x \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y = H(x)$$

Homegeneidade (proporcionalidade)

$$H(ax_1) = a \cdot H(x_1)$$

Aditividade

$$H(x_1 + x_2) = H(x_1) + H(x_2)$$

Princípio da Superposição

$$H(ax_1 + bx_2) = a \cdot H(x_1) + b \cdot H(x_2)$$

se e somente se

Sistema Linear: *sse* obedece ao princípio da superposição

- Sistemas Físicos diferentes:

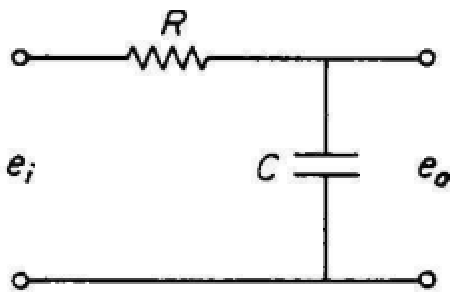
  entrada(s) → Transformação → saída(s)

- Características comuns:

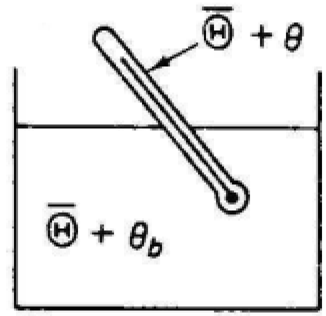
  modelos matemáticos análogos

Sistemas de 1ª. Ordem

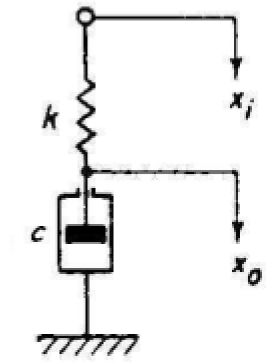
$\tau =$ constante de tempo



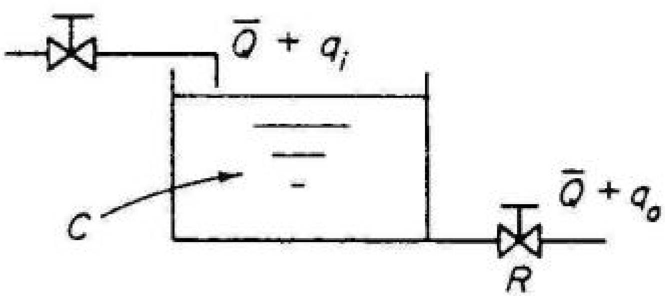
$$RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$



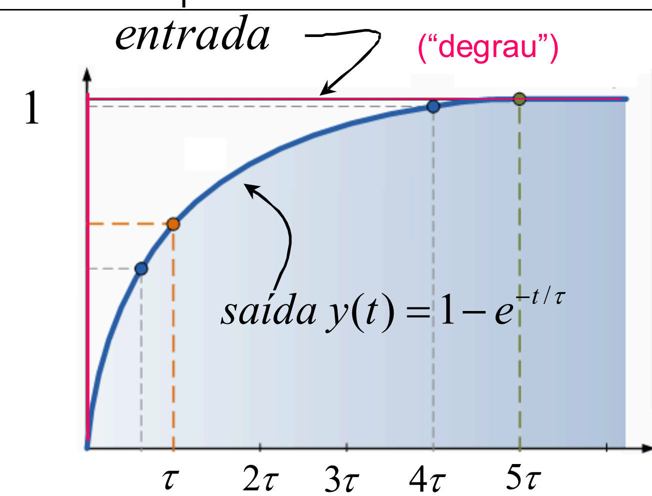
$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b$$



$$\frac{c}{k}\frac{dx_o}{dt} + x_o = x_i$$



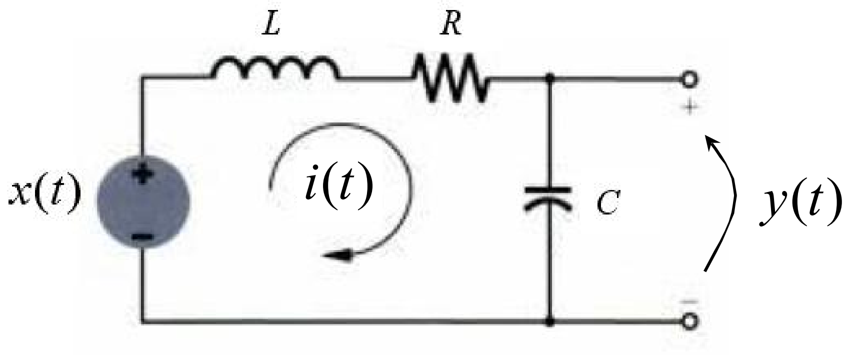
$$RC\frac{dq_o}{dt} + q_o = q_i$$



t	$y(t)$
τ	.632
2τ	.865
3τ	.950
4τ	.982
5τ	.993

http://www.ime.usp.br/~oda/contents/01Matem%E1tica/01Sistemas%20Din%E2micos/14_An_Resp_Temp_Sist_Prim_Ord.pdf

Modelos físico-matemáticos (2ª. Ordem)



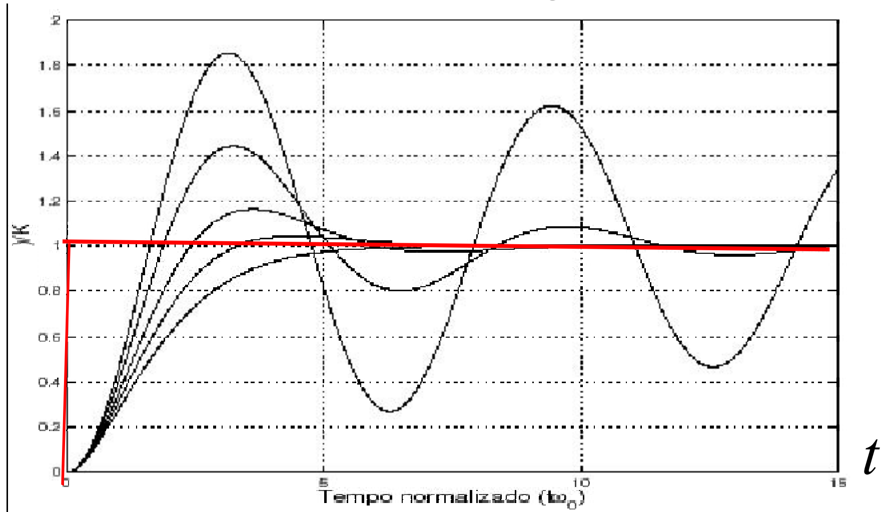
$$x(t) = V_L + V_R + V_C$$

$$mas \begin{cases} y(t) = V_C \\ i = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

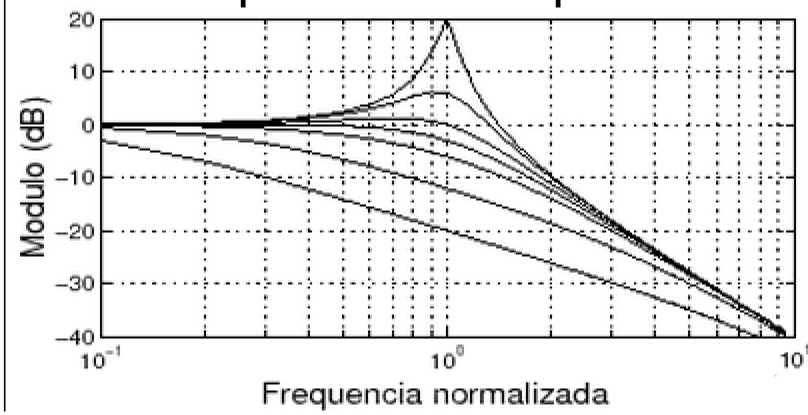
$$\therefore x(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + y(t)$$

$$\boxed{\ldots\ x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy}{dt} + y(t)}$$

Resposta ao degrau

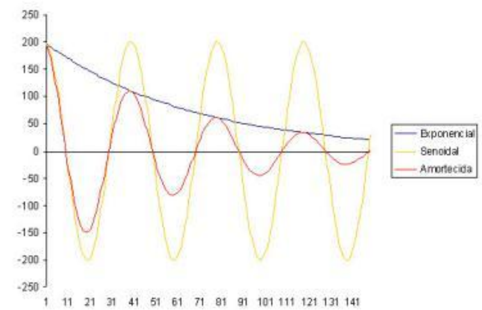


Resposta em freqüência

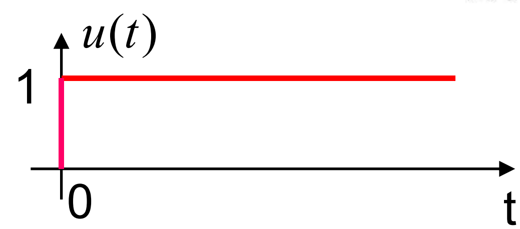


Sinais importantes em Sistemas LIT

- Senoides (com ou sem amortecimento exponencial)



- Degrau unitário

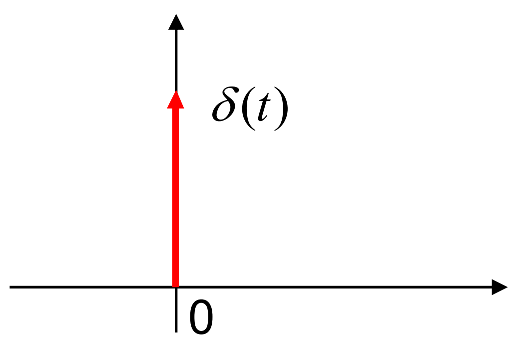


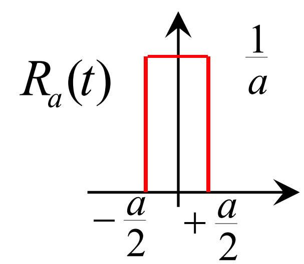
- Impulso

Duração $\rightarrow 0$

Amplitude $\rightarrow \infty$

Área $\rightarrow 1$

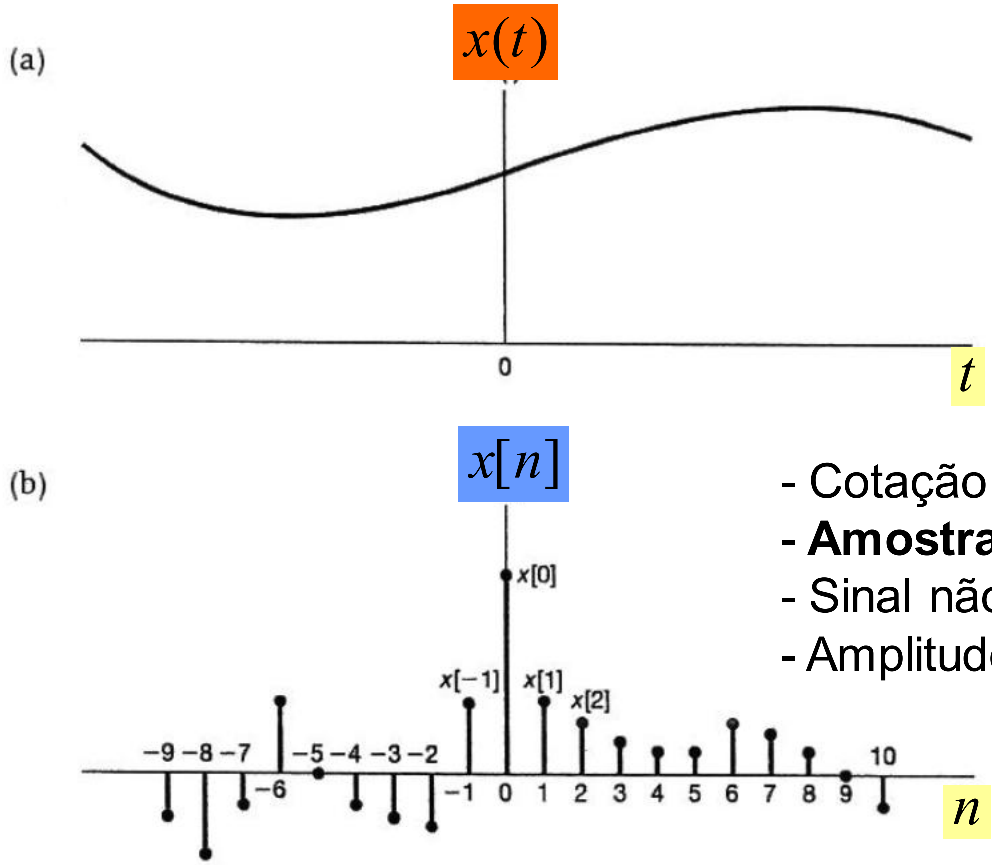




$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} R_a(t)$$

Cap. 1 – Sinais e Sistemas

1.1 – Sinais de tempo contínuo e de tempo discreto



Tensão elétrica
Temperatura,
Velocidade de um carro, etc.

- Cotação diária de uma ação
- **Amostragem** de um sinal contínuo
- Sinal não está definido entre amostras
- Amplitude pode ser **quantizada**

Fig. 1.7

Sinais Contínuos

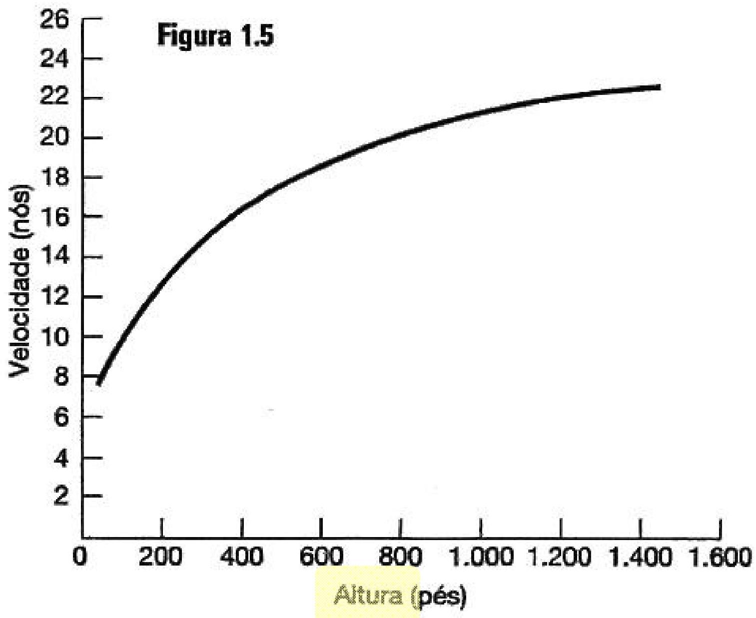
- Normalmente podem ser escritos com uma função da variável t
- No curso procuraremos usar parêntesis para funções contínuas no tempo
- Exemplo: $x(t)$
- t é variável independente contínua (conjunto dos reais).

Sinais Discretos

- Normalmente podem ser escritos com uma função da variável n
- No curso procuraremos usar colchetes para funções discretas no tempo
- Exemplo: $x[n]$
- n é variável independente discreta (conjunto dos inteiros).

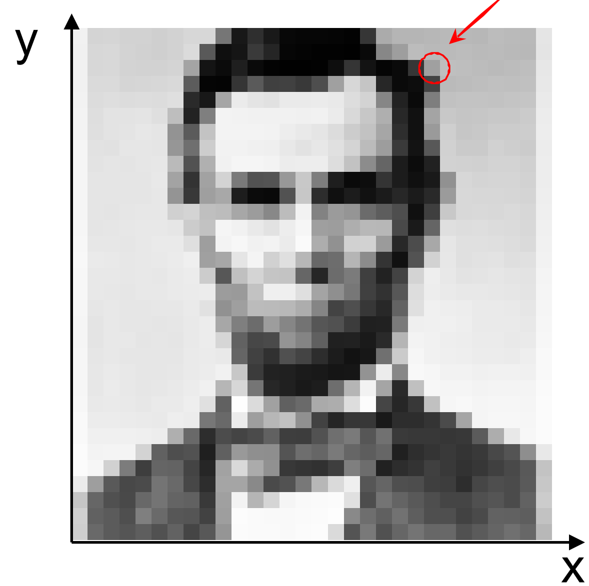
Variável independente

- Não necessariamente o tempo



Bidimencional: imagens

Pixel (picture element): f(x,y)



Na disciplina: sinais unidimensionais de tempo contínuo ou discreto

1.1.2 Energia total (E_∞) e potência total (P_∞)

- Definições sem rigor no significado físico

contínuo

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

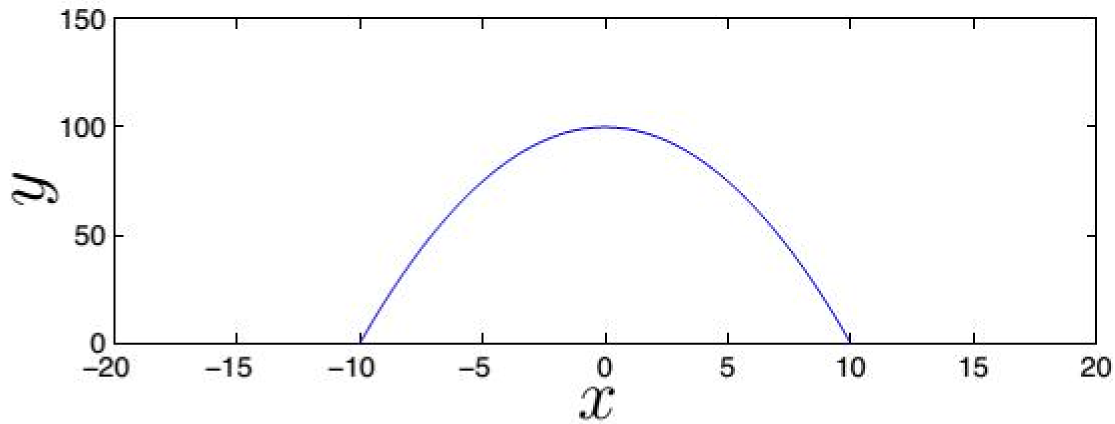
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

discreto

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2.$$

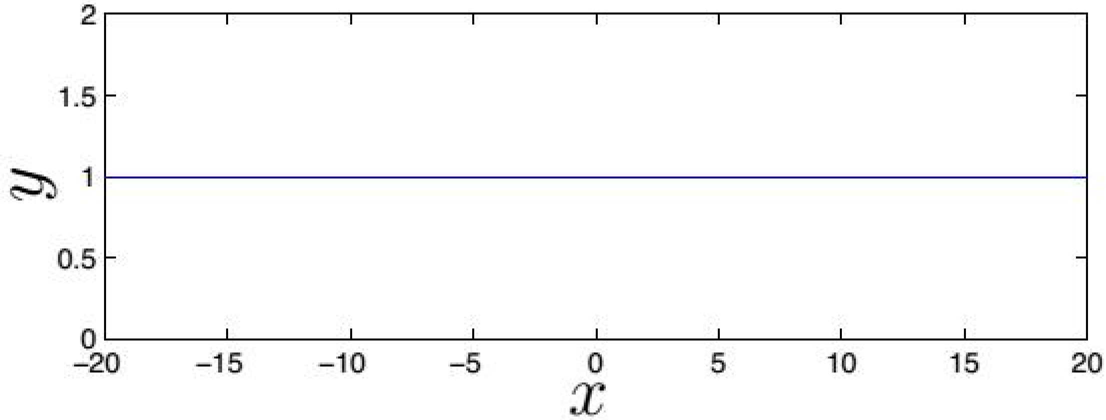
$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

Potência e Energia de um Sinal



- Sinais com energia total finita
  - $E_\infty < \infty$
  - $P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$
    - $P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{E_\infty}{2N+1} = 0$

Potência e Energia de um Sinal



- Sinais com energia total infinita
  - $E_\infty = \infty$
  - $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} > 0$
    - $P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N+1} > 0$

Exemplo: Potência e Energia de um Sinal

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a energia

Exemplo: Potência e Energia de um Sinal

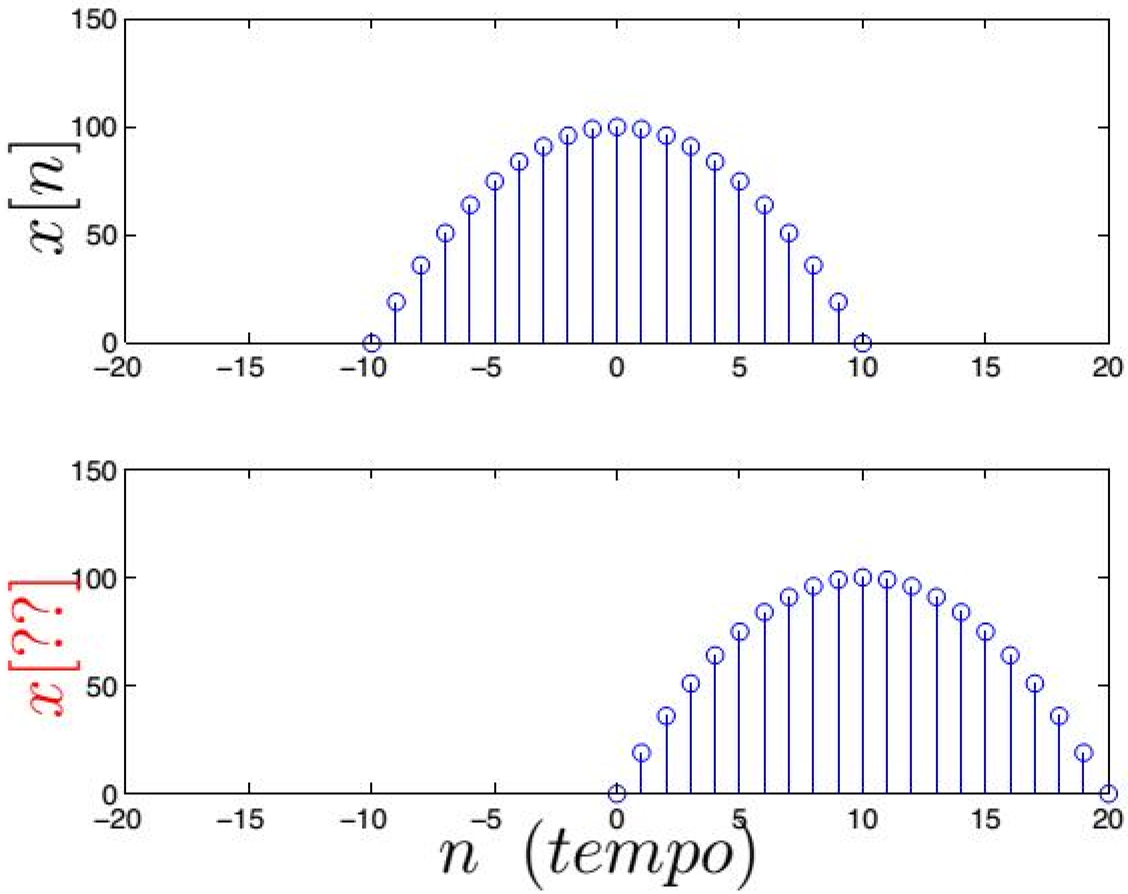
Solução:

Usando a definição de Energia, temos:

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{3}(2-t)^3\right|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

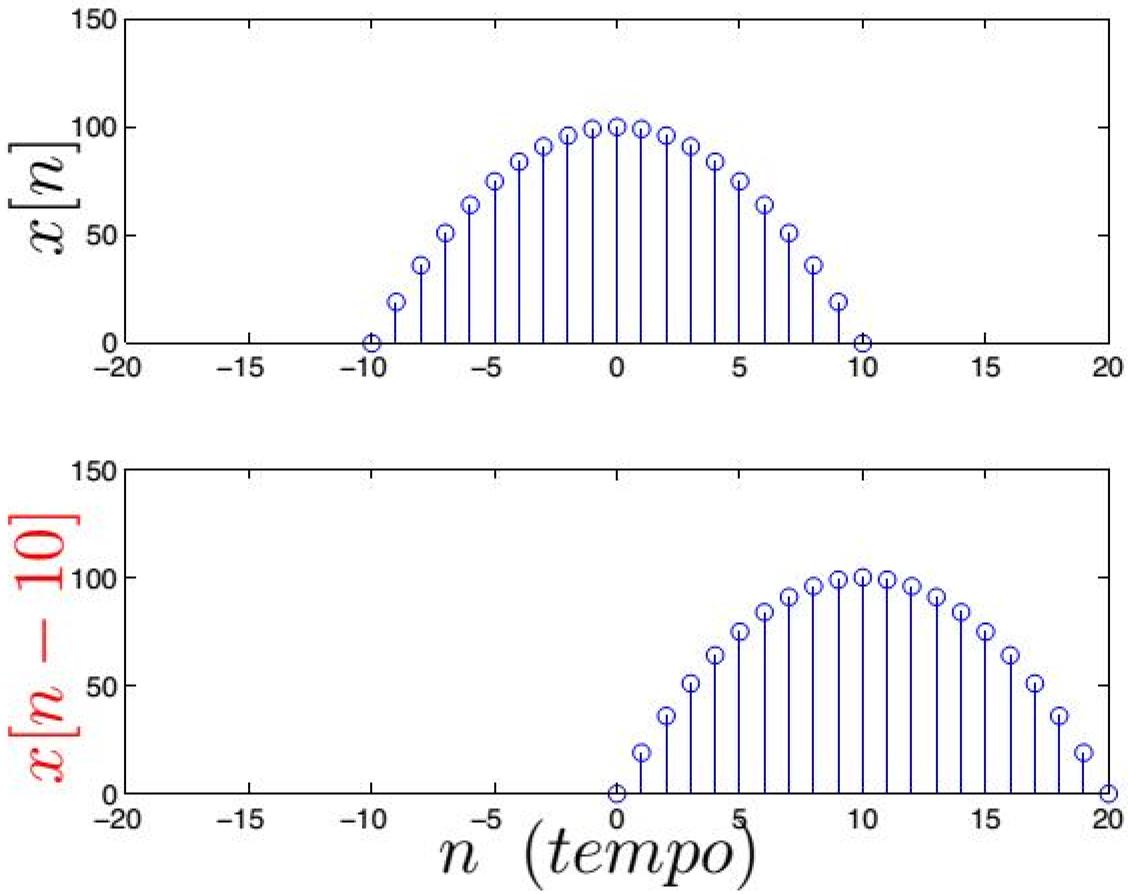
Deslocamento no tempo

- Atrasar e Adiantar um sinal no tempo



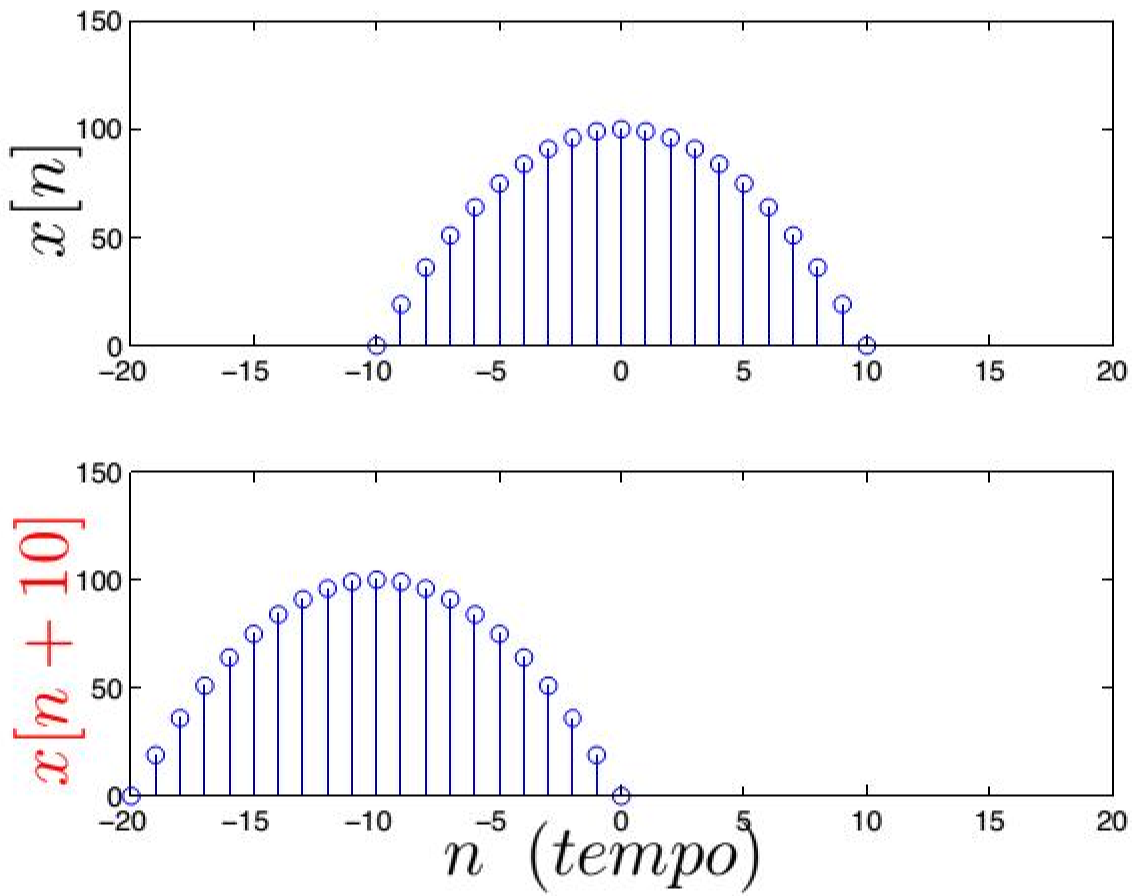
Deslocamento no tempo

- Exemplo de sinal atrasado:

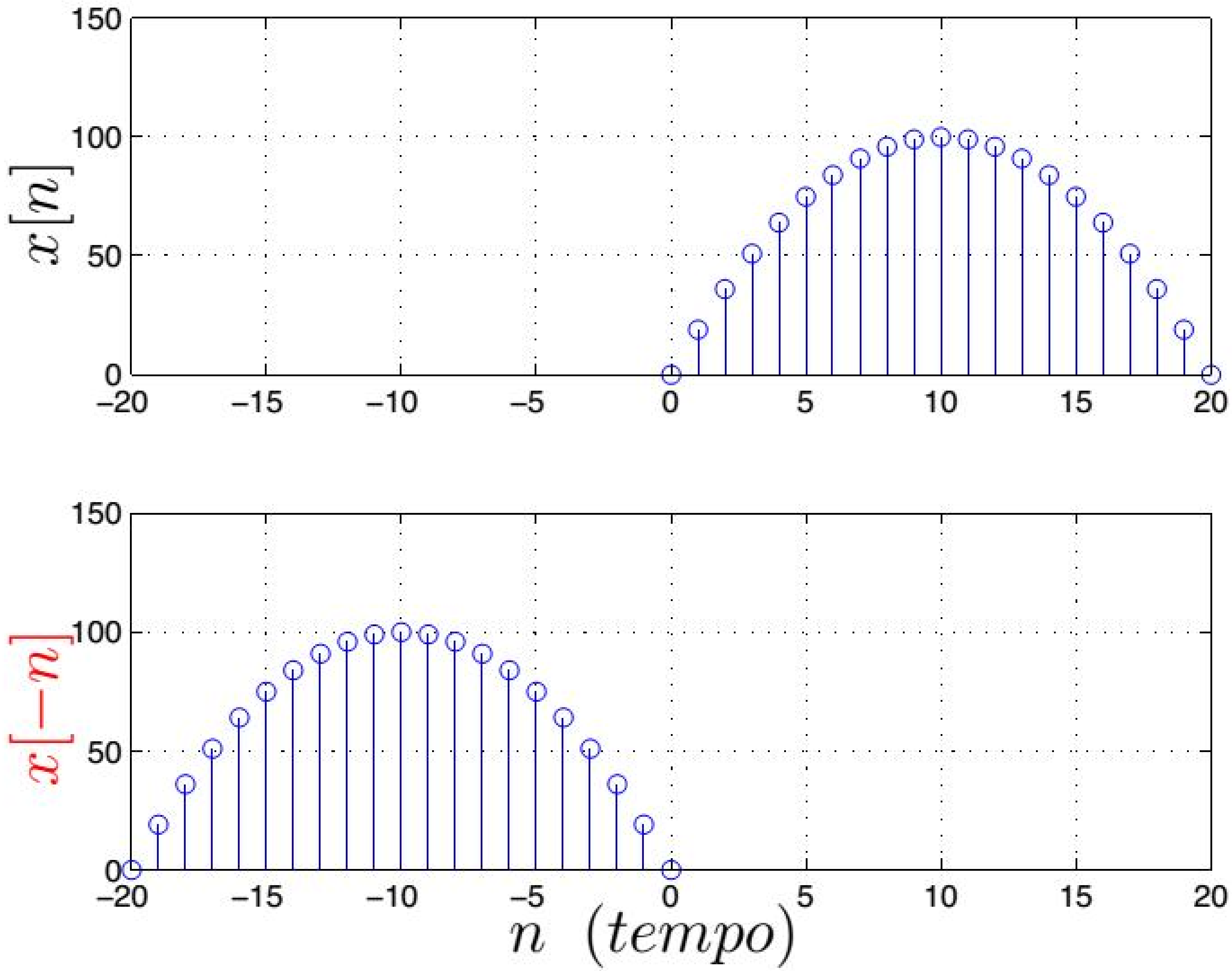


Deslocamento no tempo

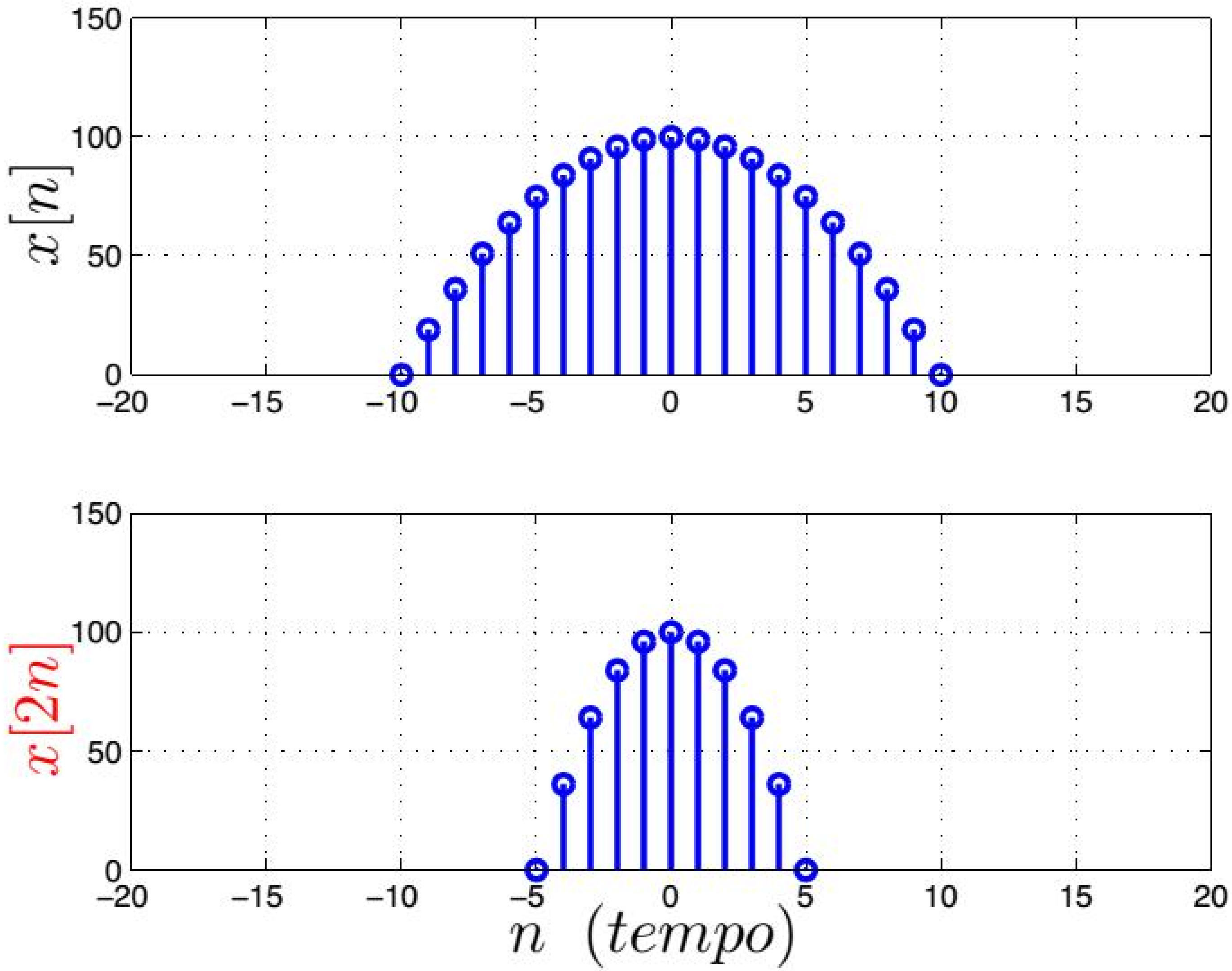
- Exemplo de sinal avançado:



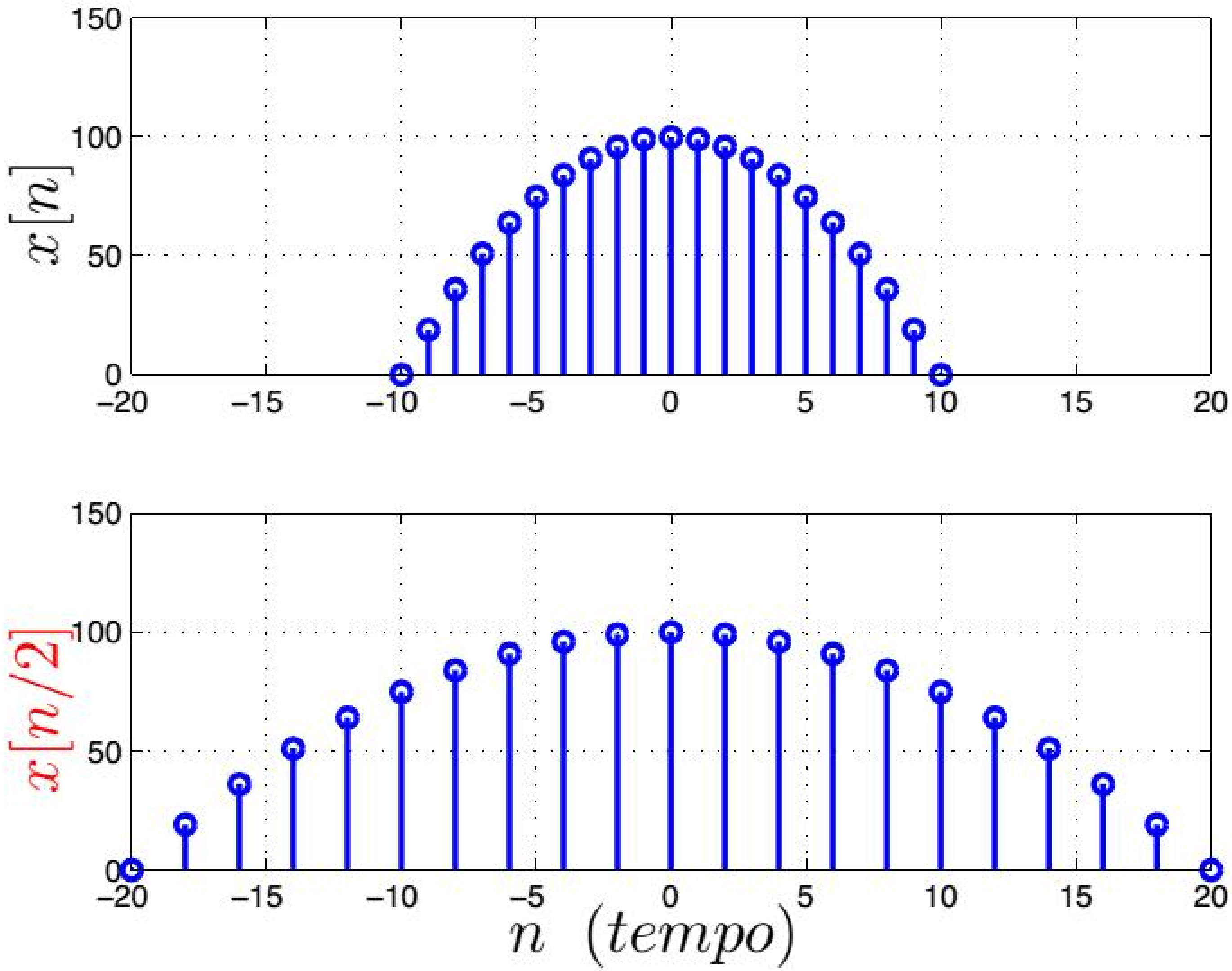
Reflexão no tempo



Mudança de escala no tempo



Mudança de escala no tempo

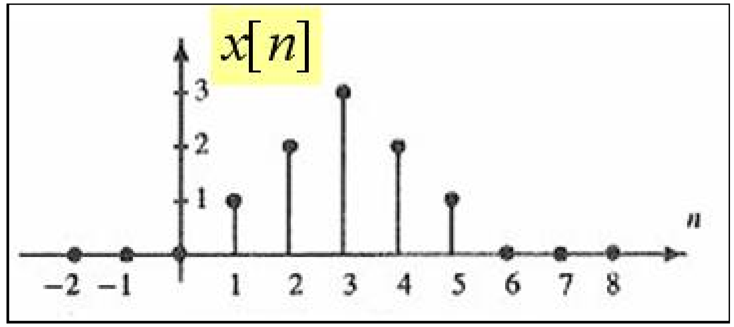


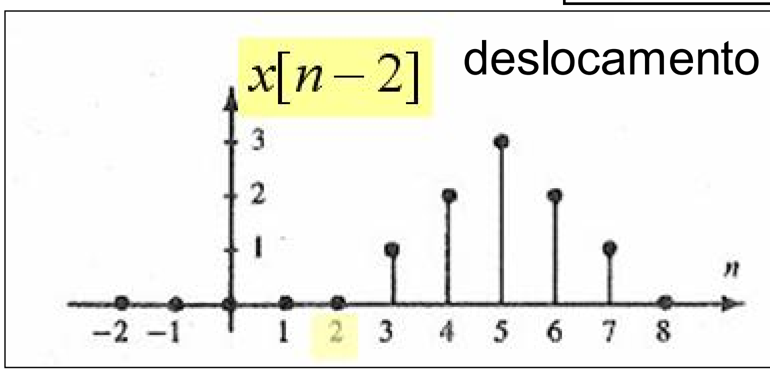
Transformações (na variável independente)

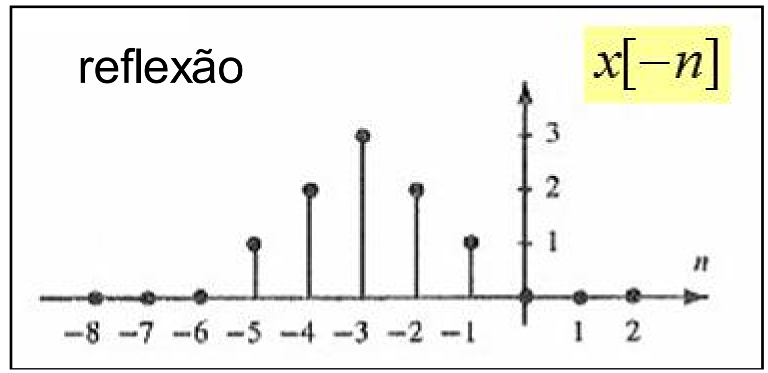
$$x(t) \rightarrow x(\alpha t - t_0) \qquad x[n] \rightarrow x[\alpha n - n_0]$$

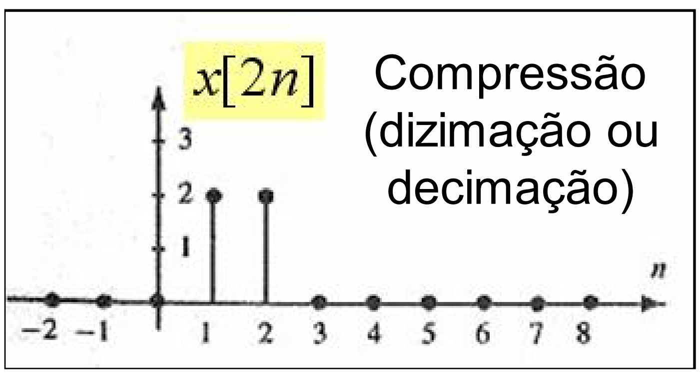
- Deslocamento no tempo:
  - Se $t_0 > 0$ ou $n_0 > 0$ então o sinal é deslocado para a direita (Atraso)
  - Se $t_0 < 0$ ou $n_0 < 0$ então o sinal é deslocado para a esquerda (Avanço)
- Mudança da escala/reflexão no tempo:
  - Se $|\alpha| > 1$ o sinal será linearmente comprimido
  - Se $|\alpha| < 1$ o sinal será linearmente estendido
  - Se $\alpha < 0$ o sinal será refletido

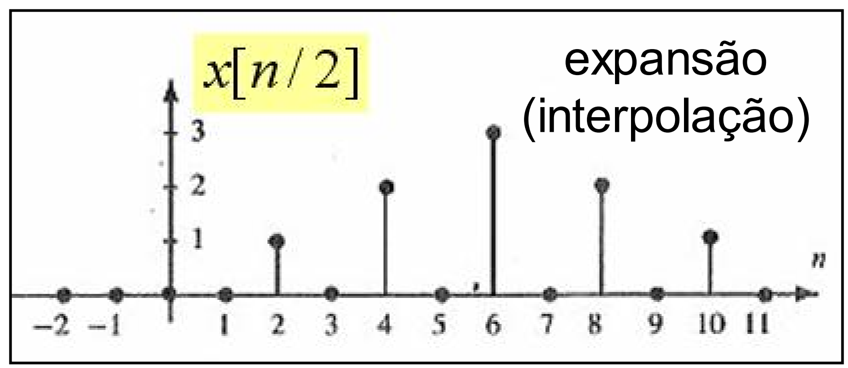
Transformações da variável independente discreta





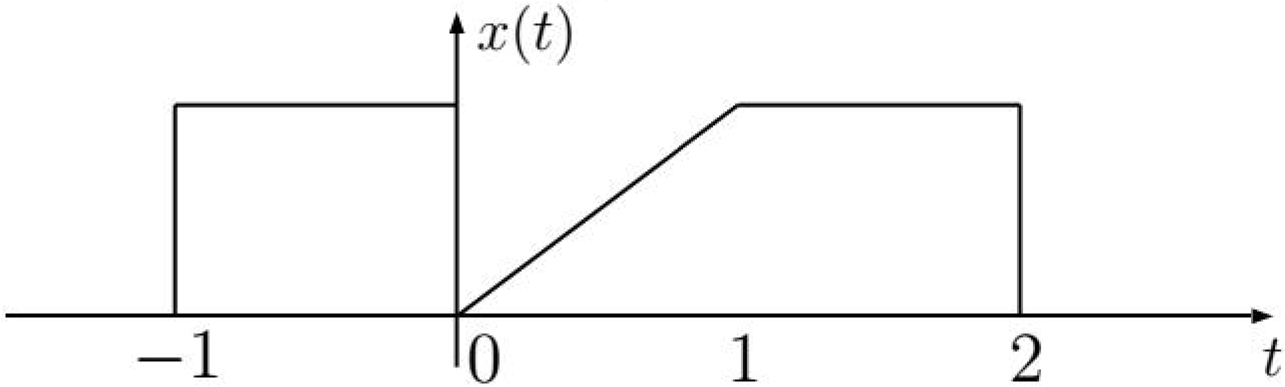






Exemplo: Transformações

Considere o sinal na figura abaixo:

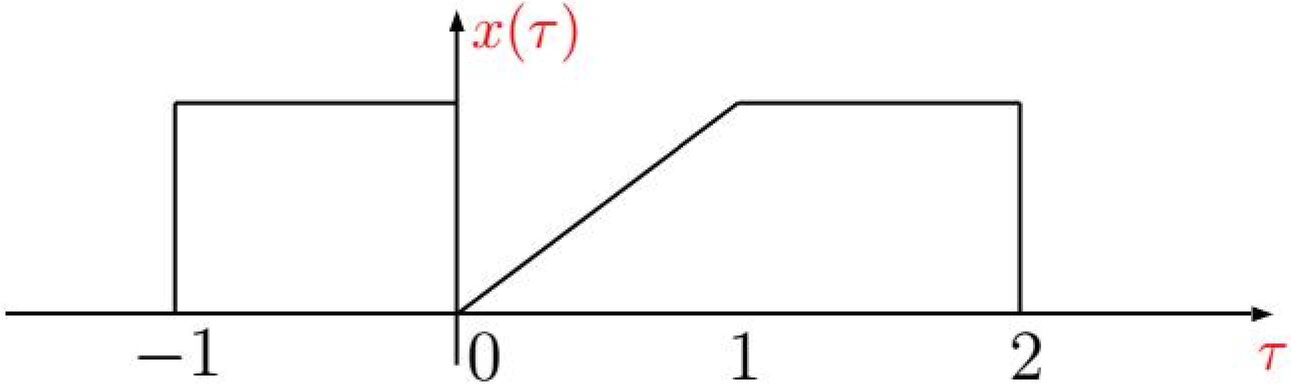


Esboce:

$$y(t) = x(1 - t/2)$$

Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



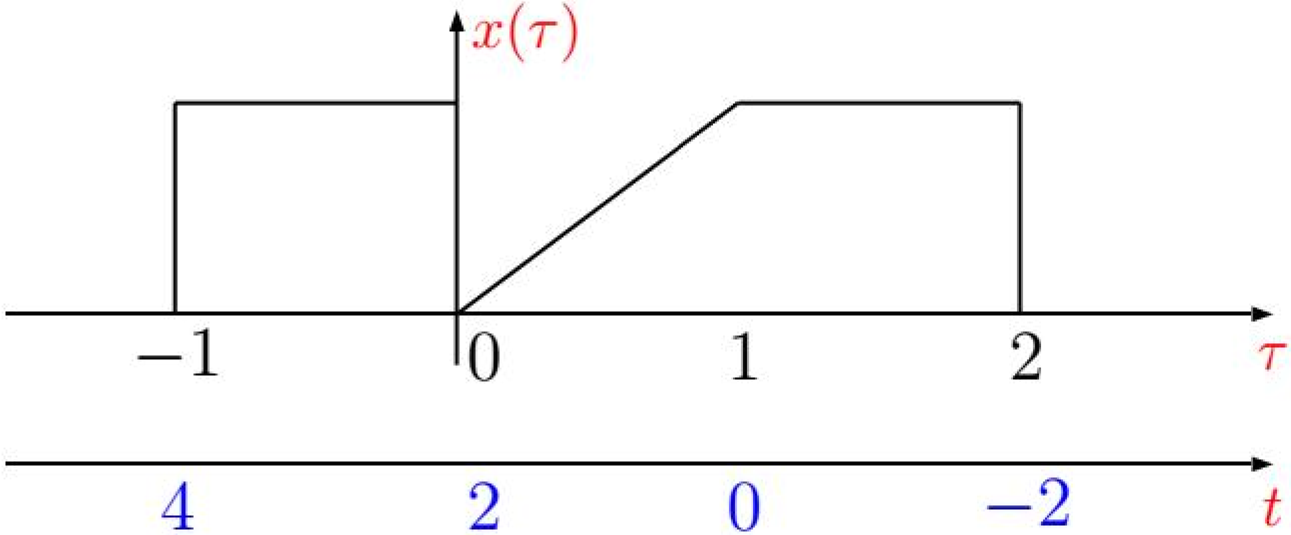
1) Trocar t por τ no sinal: $x(t) \to x(\tau)$

2) Encontrar o valor de t considerando, $\tau = 1 - t/2$, ou seja: $t = -2\tau + 2$

$$t = \begin{cases} 4, & \text{para } \tau = -1 \\ 2, & \text{para } \tau = 0 \\ 0, & \text{para } \tau = 1 \\ -2, & \text{para } \tau = 2 \end{cases}$$

Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



1) Trocar t por τ no sinal: $x(t) \to x(\tau)$

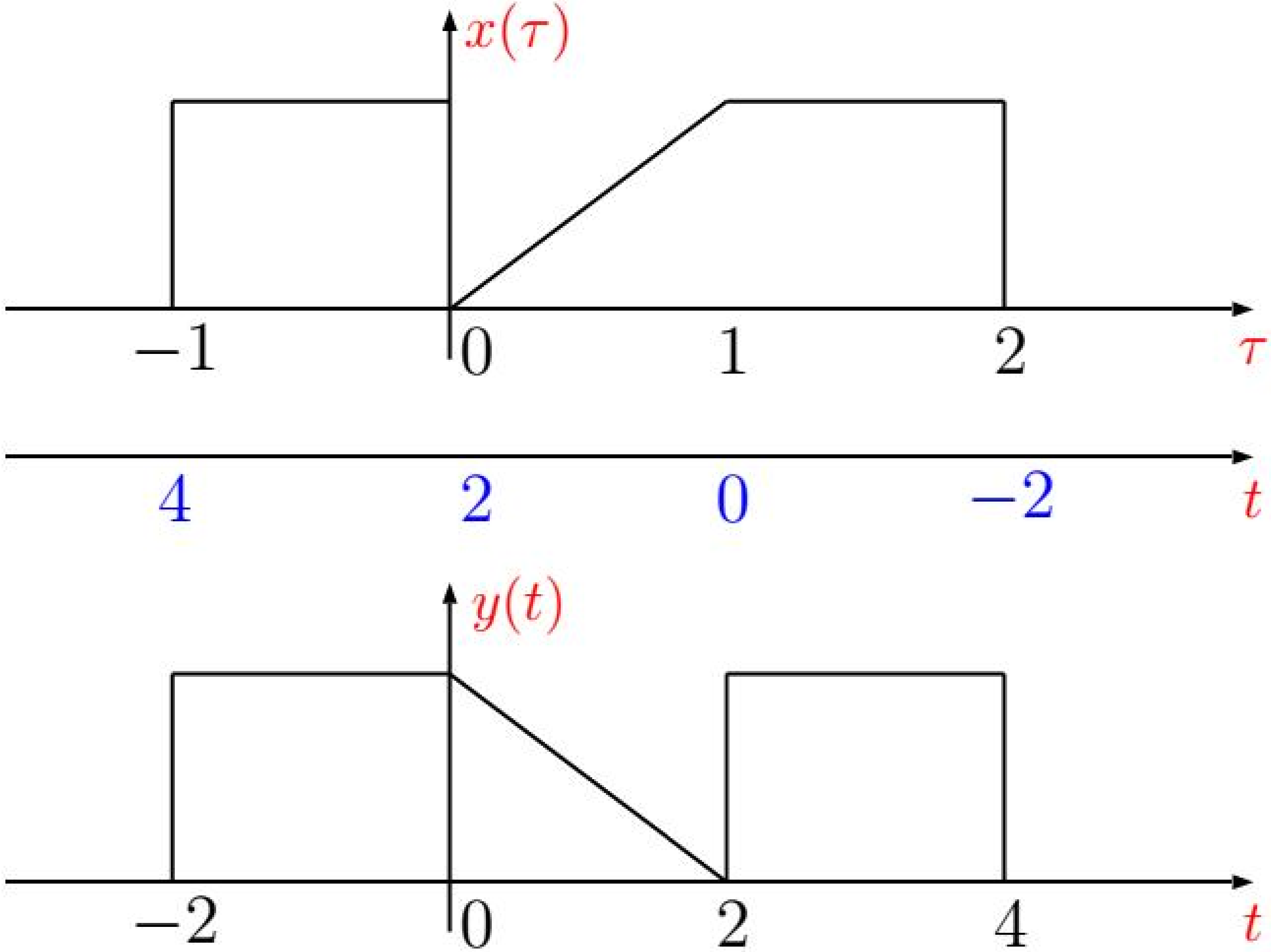
2) Encontrar o valor de t considerando, $\tau = 1 - t/2$, ou seja: $t = -2\tau + 2$

3) Esboçar o eixo t transformado abaixo do eixo τ

4) Esboçar $y(t)$

Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



1.4 Suponhamos que $x[n]$ seja um sinal com $x[n] = 0$ para $n < -2$ e $n > 4$. Para cada um dos sinais dados a seguir, determine os valores de n para os quais os sinais são garantidamente iguais a zero.

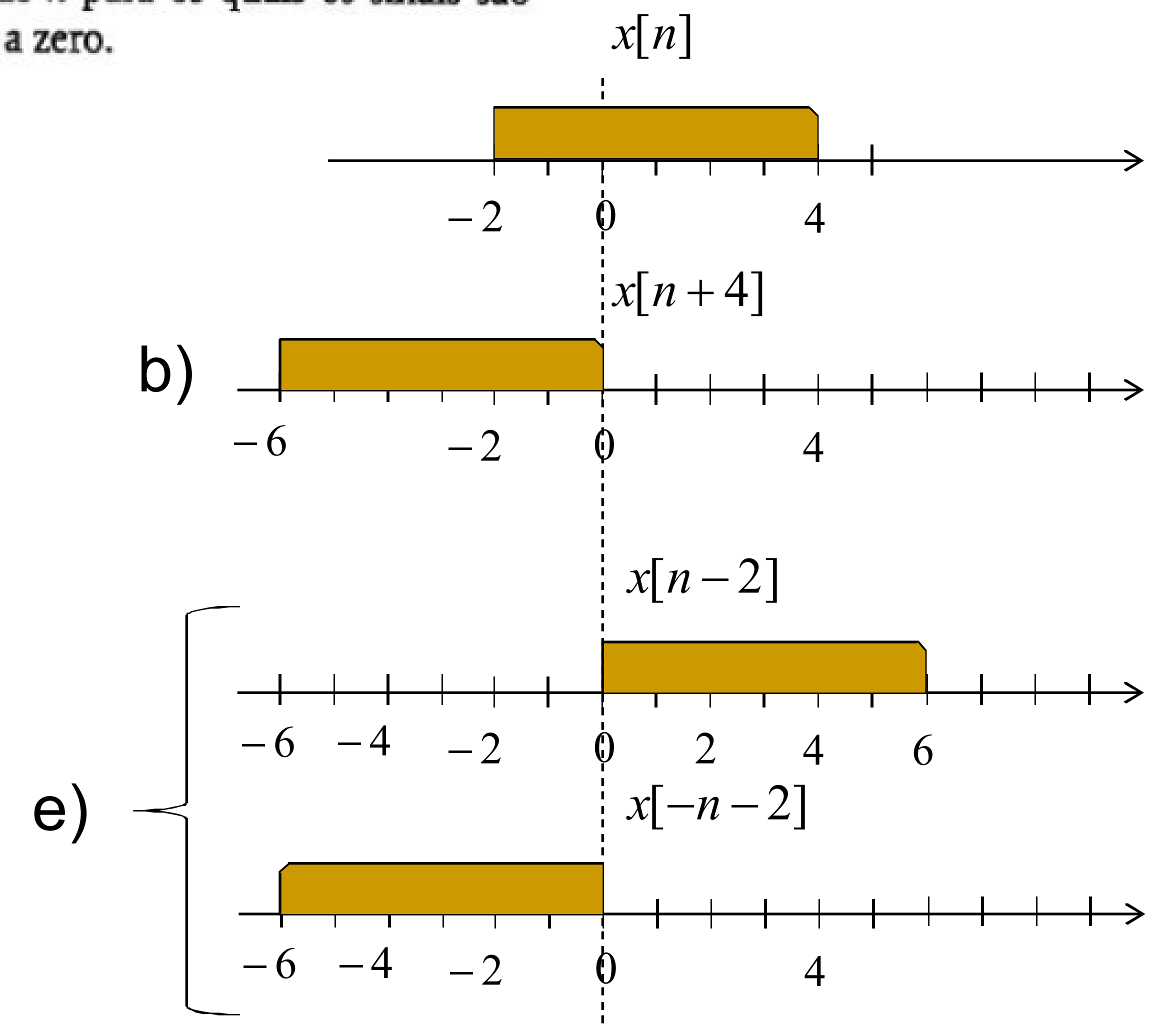
(a) $x[n-3]$

(b) $x[n+4]$

(c) $x[-n]$

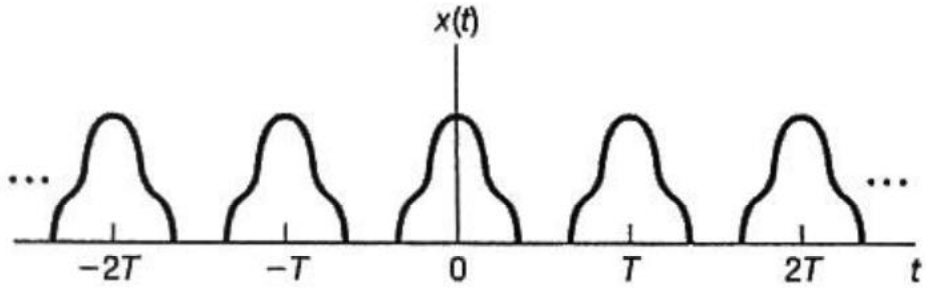
(d) $x[-n+2]$

(e) $x[-n-2]$



1.2.2 Sinais periódicos

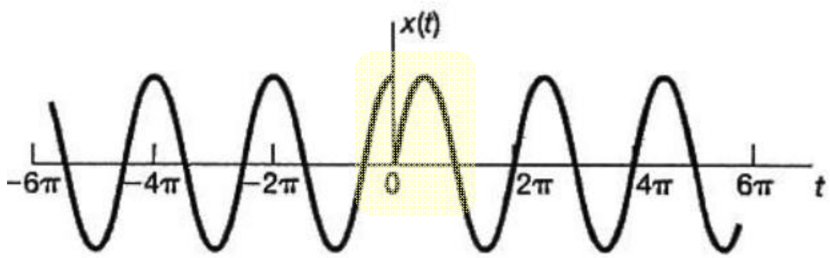
- Periódico com período $T > 0$: $x(t) = x(t+T)$



$x(t) = x(t + mT),$

m inteiro

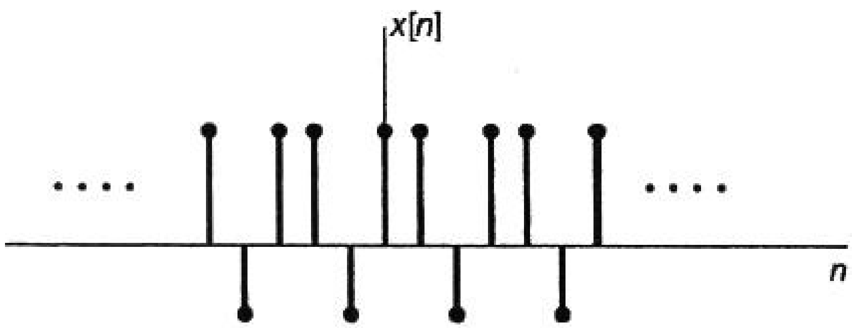
- Também é periódico com *2T, 3T, ...*
- Período fundamental: T_0 = *menor período que satisfaz*
- Sinal aperiódico: não satisfaz $x(t) = x(t + mT)$



1.2.2 Sinais periódicos

Tempo discreto

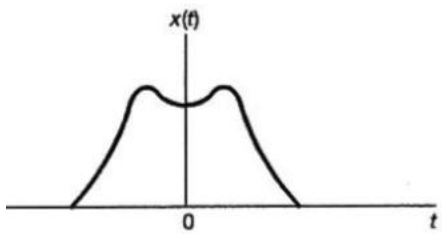
$$x[n] = x[n + mN], \quad m,\ N = inteiros$$



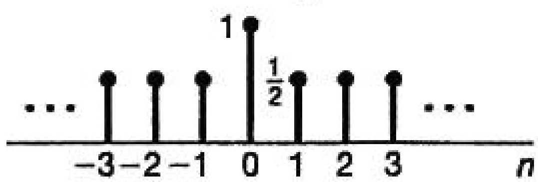
(período fundamental: $N_0 = 3$)

1.2.3 Simetria de sinais

Simetria par

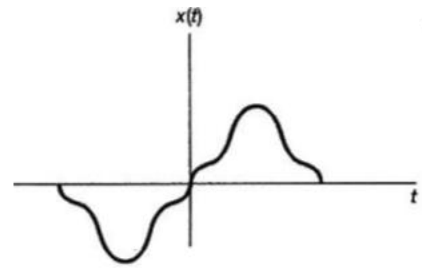


$$x(t) = x(-t)$$

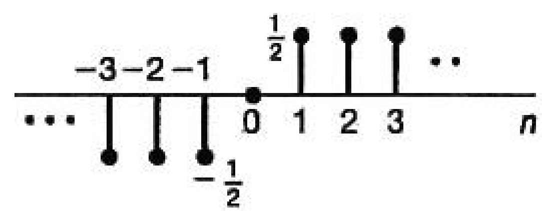


$$x[n] = x[-n]$$

Simetria ímpar



$$x(t) = -x(-t)$$



$$x[-n] = -x[n]$$

1.2.3 Simetria de sinais

Decomposição
de um sinal qualquer

parte par
(even)

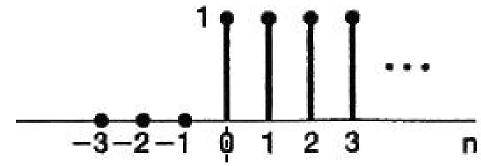
parte ímpar
(odd)

$$x(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} + \mathcal{O}d\{x(t)\}$$

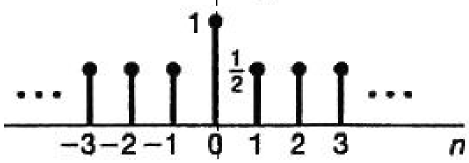
$$\tfrac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] + \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Ex. (tempo discreto)

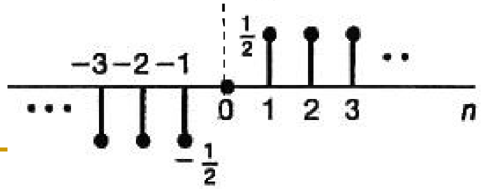
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{E}v\{x[n]\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{O}d\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$

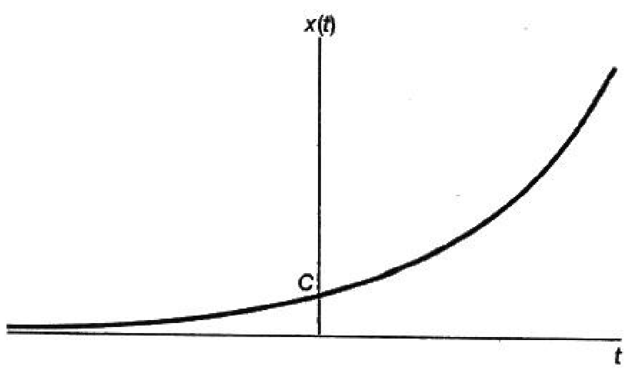


1.3 Sinais senoidais e exponenciais

$$x(t) = Ce^{at}$$

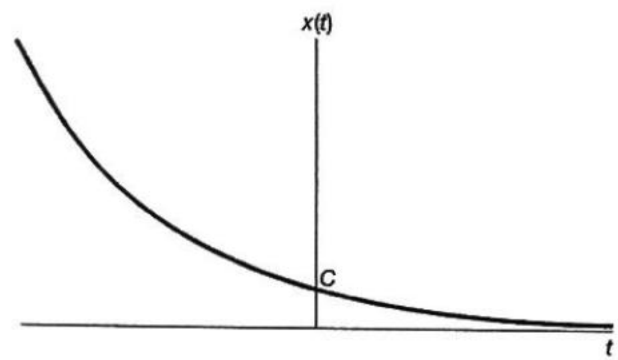
Exponenciais reais (não oscilatórias): C, a = reais

crescente: $a > 0$



fenômenos instáveis

decrescente: $a < 0$



sistemas amortecidos

Sinais senoidais e exponenciais complexas periódicas

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Ce^{at} \\ C = 1,\ a &= j\omega_0 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t}}$$

$x(t)$ = complexa

Pequena revisão...

Revisão: séries de Taylor

- Aproximação polinomial de uma função analítica em torno de um ponto "a"

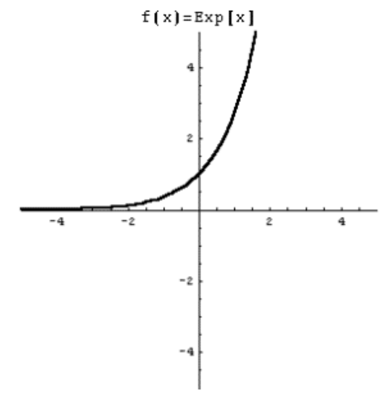
$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + a_3 \cdot (x-a)^3 + \cdots}$$

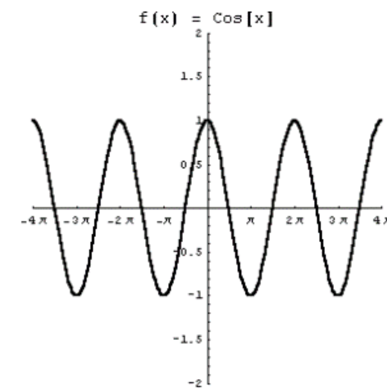
$$\boxed{f(a) = a_0}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots \qquad \boxed{\therefore a_1 = f'(a)}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\times 2 \cdot a_3(x-a) + \cdots \qquad \boxed{\therefore a_2 = \frac{f''(a)}{2}}$$

$$f'''(x) = 2\times 3 \cdot a_3 + 2\times 3\times 4 \cdot a_4(x-a) + \cdots \qquad \boxed{\therefore a_3 = \frac{f'''(a)}{2\times 3}}$$





Se a = 0

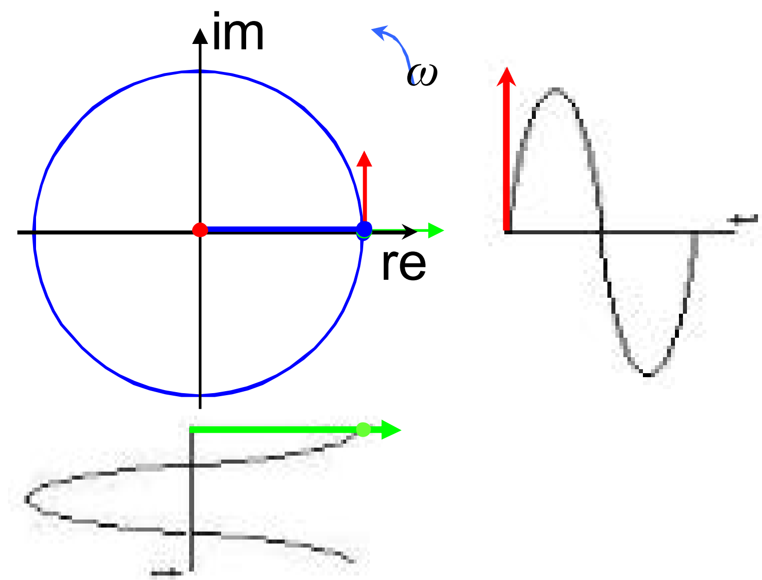
$$\boxed{f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 \cdots}$$

Animações: http://mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/TaylorPolynomials/

Revisão: exponencial complexa e fasores

- Séries de Taylor

$$\left.\begin{aligned} sen(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}\right\}$$

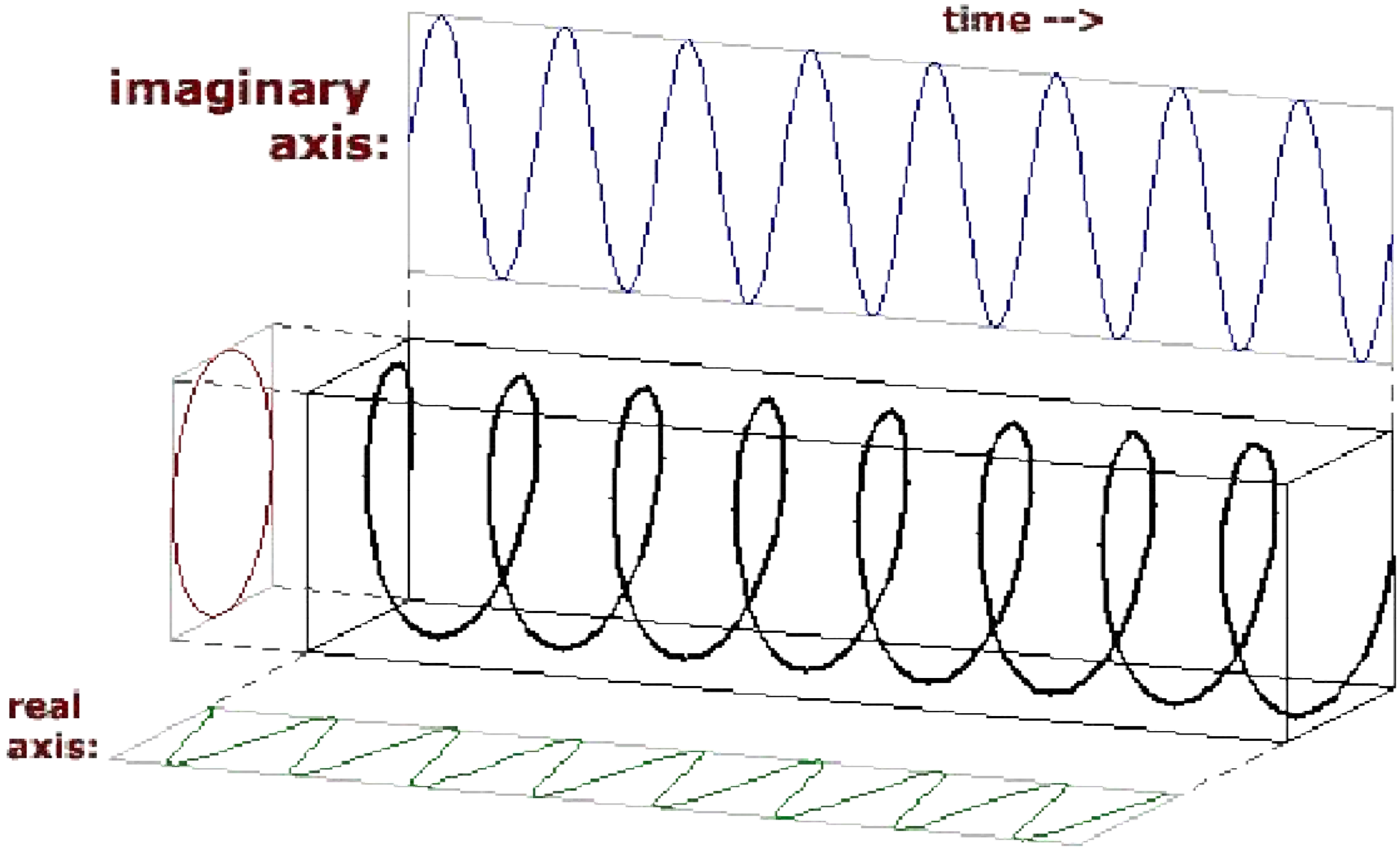


$$e^{jx} = cos x + j \cdot sen x$$

$$e^{j\omega t} = cos\,\omega t + j \cdot sen\,\omega t$$

$e^{j\omega t}$ = fasor que gira com veloc. angular ω *no sentido anti-horário*

Revisão: interpretação geométrica

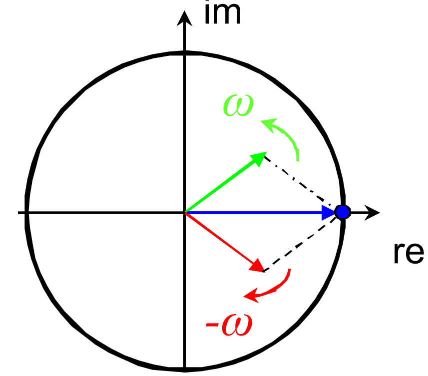


Revisão: fórmula(s) de Euler

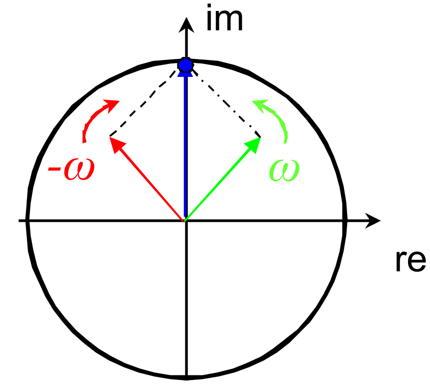
Verifique que (EPC)*

$$\left.\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos\omega t + i\cdot sen\,\omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos\omega t - i\cdot sen\,\omega t \end{aligned}\right\}$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$



$$i\cdot sen\,\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}$$



*Exercício para casa

Revisão: resultados úteis

- Serão usadas corriqueiramente (simplificam passagens)

$$f(t) = A\cos\omega t = re\left\{Ae^{j\omega t}\right\}$$

$$\boxed{j = e^{j\frac{\pi}{2}}} \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} + j\underbrace{sen(\tfrac{\pi}{2})}_{=1} \quad \boxed{-j = e^{j(-\frac{\pi}{2})}} \quad \boxed{-1 = e^{\pm j\pi}}$$

$$se \quad f(t) = Ae^{j\omega t}, \quad então \quad \begin{cases} f'(t) = j\omega \cdot Ae^{j\omega t} = j\omega \cdot f(t) \\ \int f(t)\, dt = \dfrac{1}{j\omega} Ae^{j\omega t} = \dfrac{f(t)}{j\omega} \end{cases}$$

derivar ⇨ multiplicar por $j\omega$

integrar ⇨ dividir por $j\omega$

Verifique os resultados acima

1.1 Expresse cada um dos seguintes números complexos na forma cartesiana $(x + jy)$: $\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/2}, e^{j5\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, \sqrt{2}e^{j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$.

1.2 Expresse cada um dos seguintes números complexos na forma polar $(re^{j\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi)$: $5, -2, -3j, \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + j, (1 - j)^2, j(1 - j), (1 + j)/(1 - j), (\sqrt{2} + j\sqrt{2})/(1 + j\sqrt{3})$.

1.8 Expresse a parte real dos sinais a seguir na forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$ sendo A, a, ω e ϕ números reais com $A > 0$ e $-\pi < \phi \leq \pi$:

(a) $x_1(t) = -2$

(b) $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$

(c) $x_3(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(3t + \pi)$

(d) $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

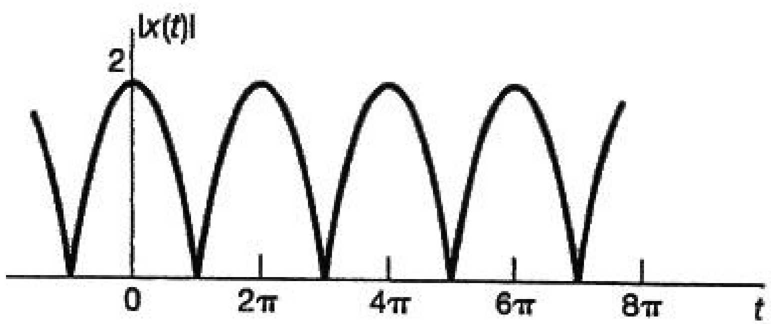
Manipulação de exponenciais complexas Ex. 1.5 (p. 13)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{j2,5t}\underbrace{(e^{-j0,5t} + e^{j0,5t})}$$

$$x(t) = 2e^{j2,5t}\cos(0,5t)$$

$$|x(t)| = 2|\cos(0,5t)|$$



1.55 Usando os resultados do Problema 1.54, calcule cada uma das somas a seguir e expresse sua resposta na forma cartesiana (retangular):

(a) $\sum_{n=0}^{9} e^{j\pi n/2}$

(b) $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$

(e) $\sum_{n=0}^{9} \cos(\frac{\pi}{2} n)$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{2} n)$

1.3.1 Sinais senoidais e exponenciais complexas periódicas

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t}}$$ complexa e periódica

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

$$se \;\; T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \;\; e^{j\omega_0 T} = e^{j2\pi} = 1$$ (T_0 = período fundamental)

$$De\ forma\ similar,$$

$$se \;\; T = k \cdot T_0, \;\; e^{j\omega_0 \cdot kT_0} = e^{j2k\pi} = 1$$ (harmônicos: $k\omega_0$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$)

Funções harmonicamente relacionadas: $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 \cdot t}$

múltiplos inteiros de uma freqüência fundamental

Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais exponenciais complexos gerais de tempo contínuo

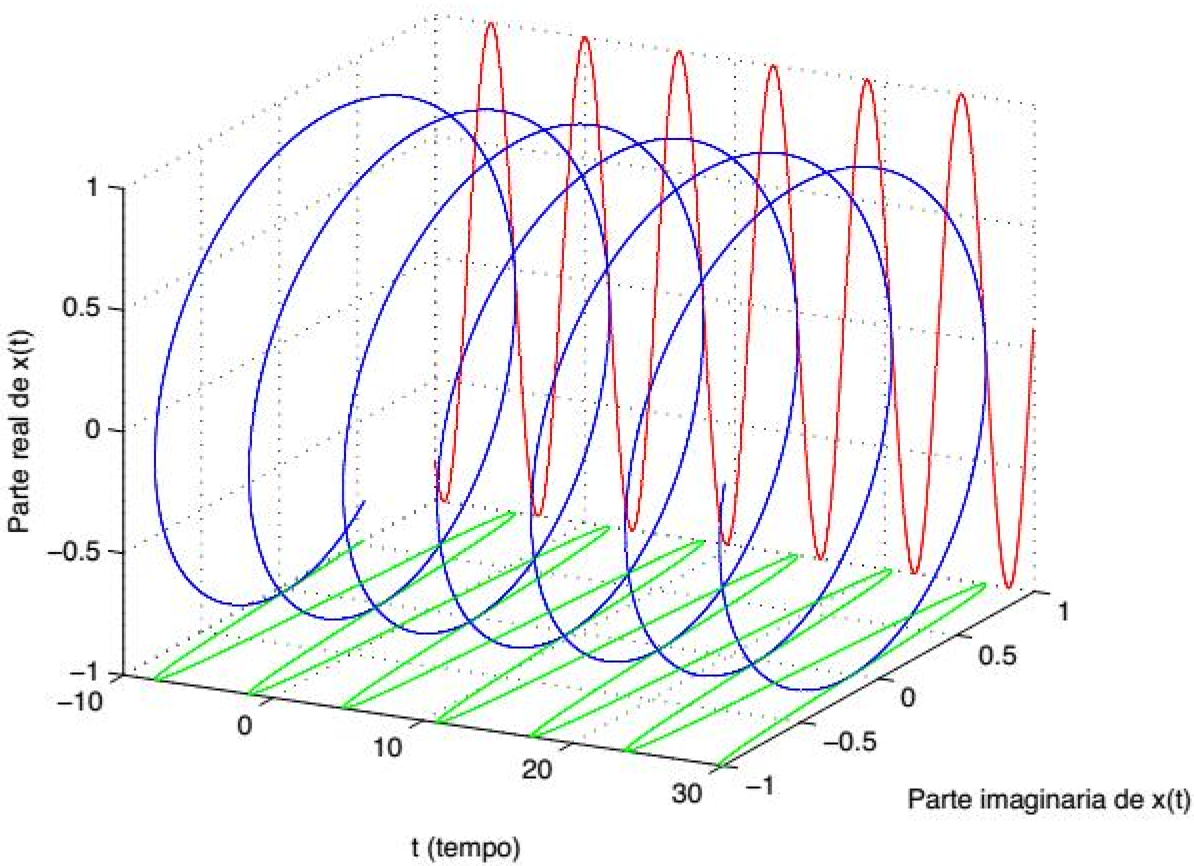
$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ \alpha = r + j\omega \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} Ce^{\alpha t} &= |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} \\ &= |C|e^{rt}e^{j(\omega t+\theta)} \\ &= |C|e^{rt}\cos(\omega t + \theta) + j|C|e^{rt}\mathrm{sen}(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

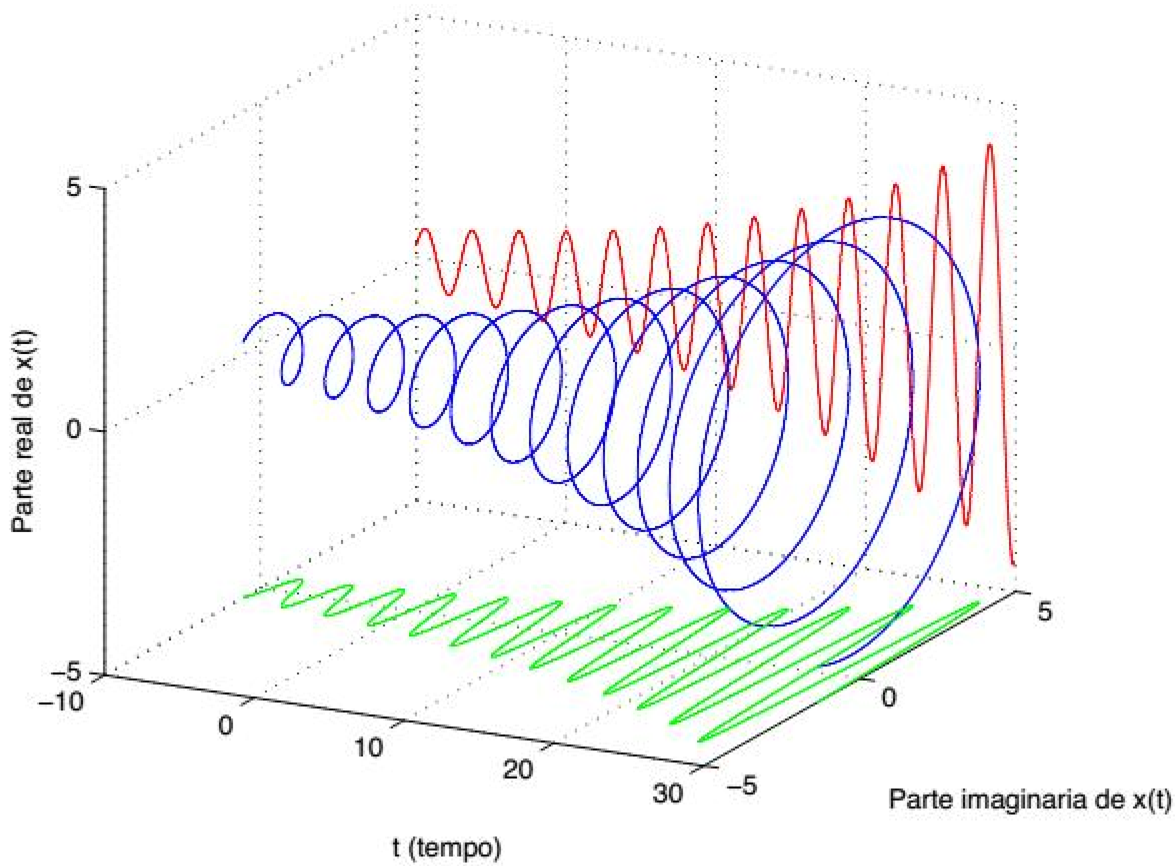
Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = j \end{cases}$$



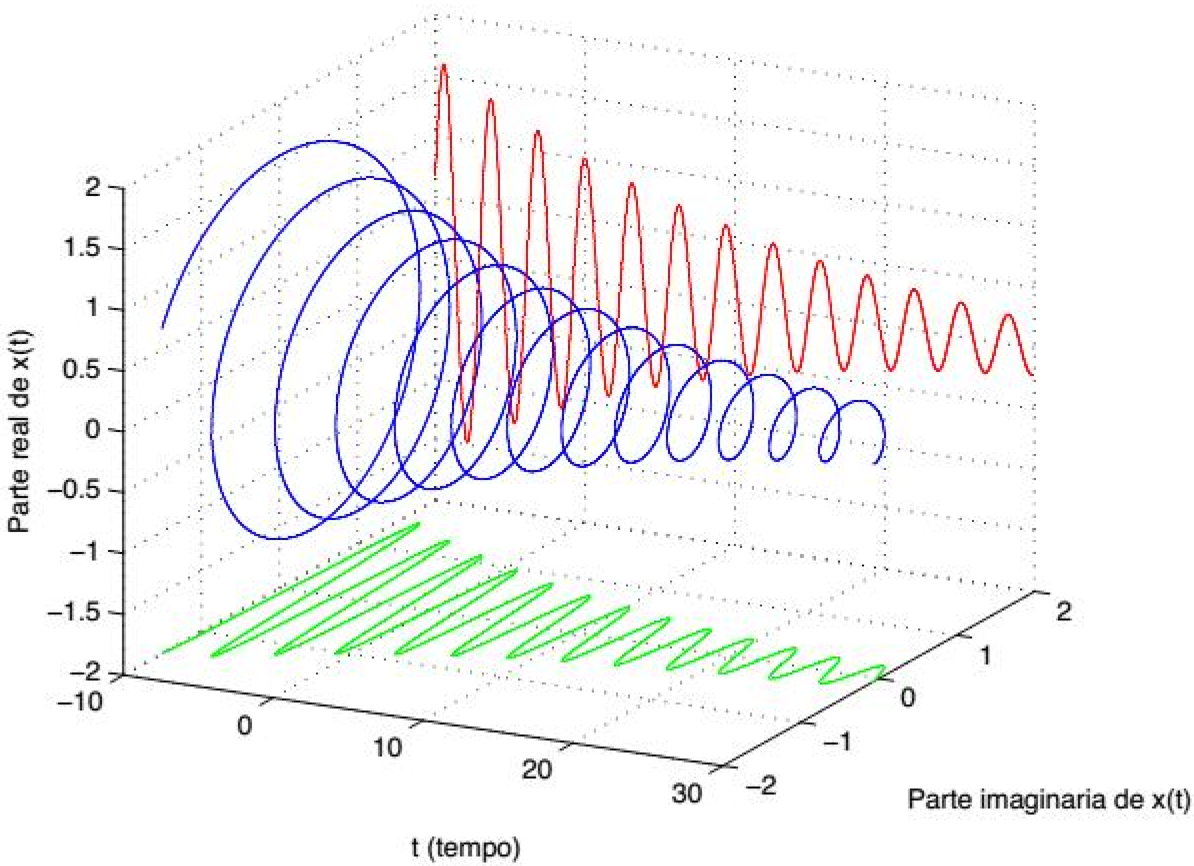
Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = 0{,}05 + j2 \end{cases}$$



Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = -0{,}05 + j2 \end{cases}$$



1.3.2 Senoide e exponenciais de tempo discreto

- Notação geral usual:

$$x[n] = C\alpha^n$$

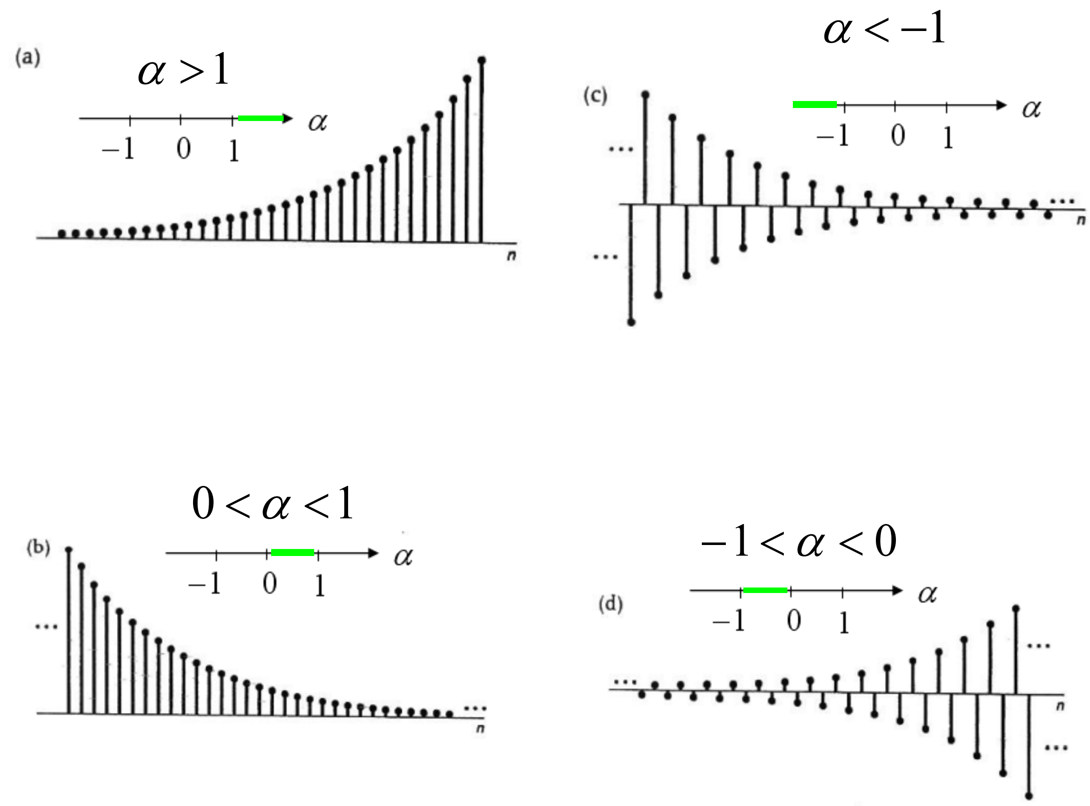
complexos

Forma alternativa

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

$$\alpha = e^{\beta}$$

- C , α reais:



1.3.3 Periodicidade de exponenciais complexas de tempo discreto

$e^{j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 n}$: Semelhanças e diferenças importantes

Propriedades em tempo contínuo:

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}}$$

1) Sinais distintos para **quaisquer** valores diferentes de ω_0

2) Aumento de ω_0, **sempre** aumenta a taxa de oscilação do sinal

3) Periódico para **qualquer** ω_0

Tempo discreto:

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}}$$

diferenças!

1) Discreto: Sinais não distintos para qualquer ω_0

$$\underbrace{e^{j(\omega_0 + 2\pi)n}} = \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} e^{j\omega_0 n} = \underbrace{e^{j\omega_0 n}}.$$

Sinais iguais para $\omega_0 \pm 2\pi,\ \omega_0 \pm 4\pi,\ \ldots$

Sinais discretos: Considerar apenas o intervalo

$$\boxed{0 \le \omega_0 < 2\pi} \quad ou \quad \boxed{-\pi \le \omega_0 < \pi}$$

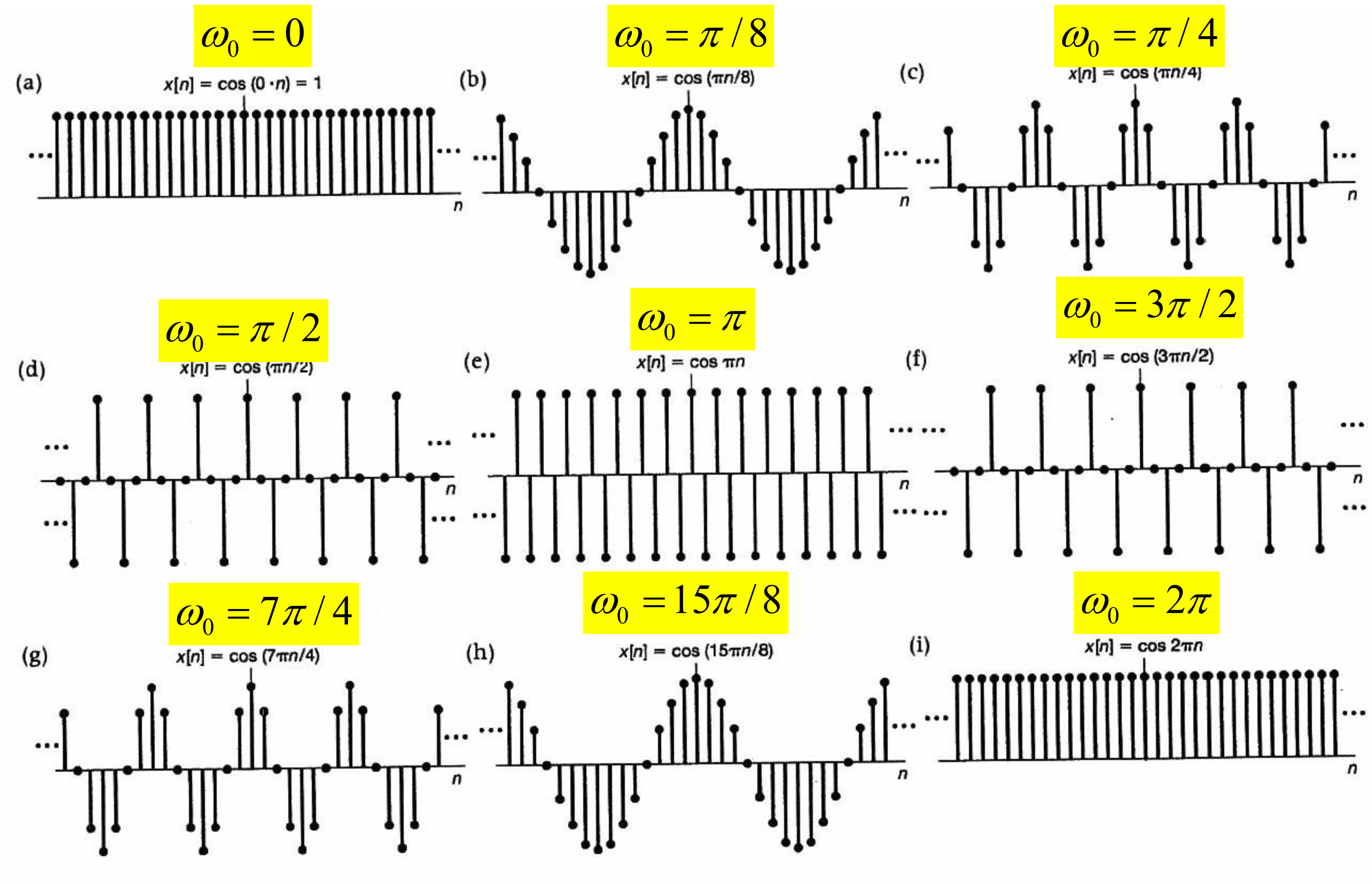
2) Discreto: variação da taxa de oscilação c/ ω_0

Taxa de oscilação de $e^{j\omega_0 n}$

aumenta para $0 \le \omega_0 < \pi$

diminui para $\pi \le \omega_0 < 2\pi \quad ou \quad 0 \le \omega_0 < -\pi$

observar atentamente a fig. 1.27



$\omega_0 = 0$
(a)
x[n] = cos (0 · n) = 1
$\omega_0 = \pi/8$
(b)
x[n] = cos (πn/8)
$\omega_0 = \pi/4$
(c)
x[n] = cos (πn/4)
$\omega_0 = \pi/2$
(d)
x[n] = cos (πn/2)
$\omega_0 = \pi$
(e)
x[n] = cos πn
$\omega_0 = 3\pi/2$
(f)
x[n] = cos (3πn/2)
$\omega_0 = 7\pi/4$
(g)
x[n] = cos (7πn/4)
$\omega_0 = 15\pi/8$
(h)
x[n] = cos (15πn/8)
$\omega_0 = 2\pi$
(i)
x[n] = cos 2πn

Fig. 1.27

3. Discreto: não é periódico para qualquer ω_0

- Para $e^{j\omega_0 n}$ ser periódico com período N>0,

$$e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 N}}$$

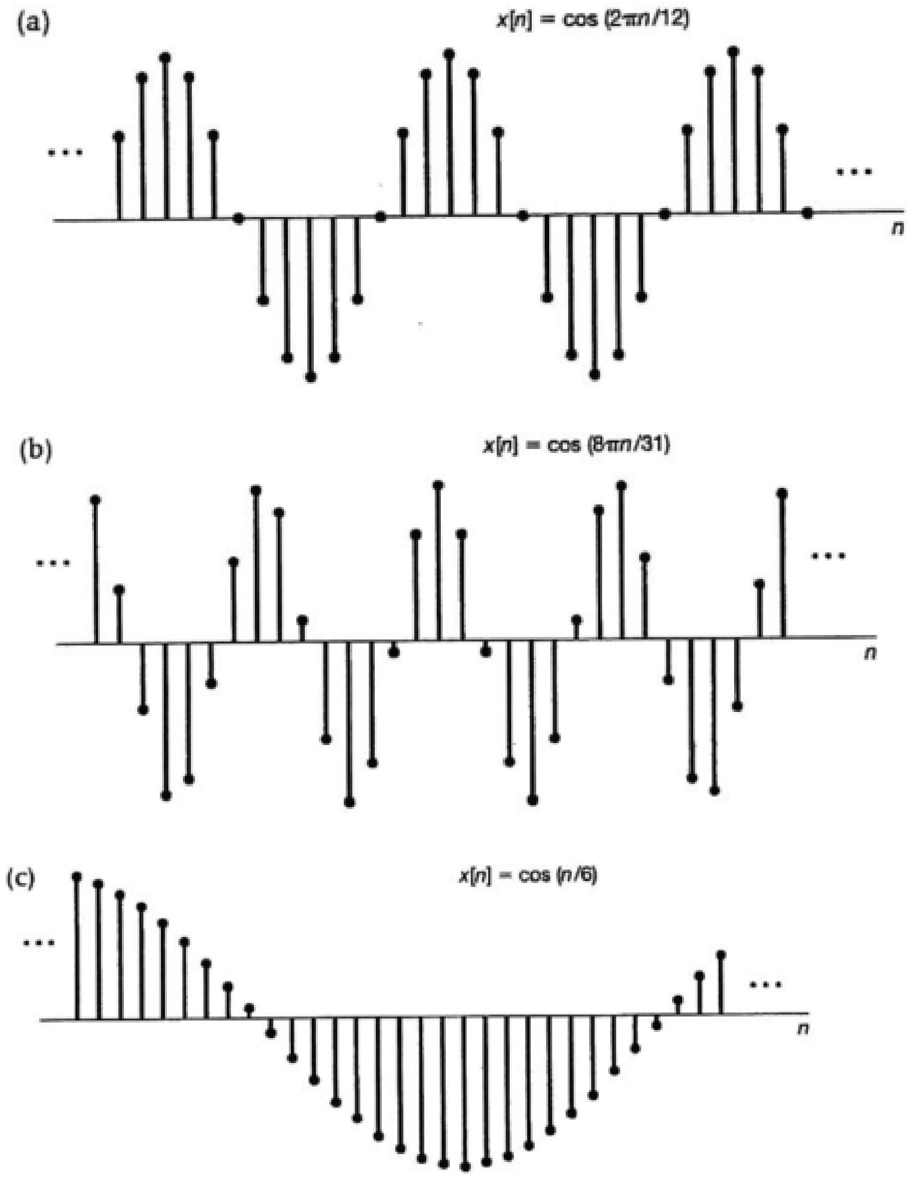
= 1?

$$e^{j\omega_0 N} = 1 \quad \boxed{se \ \ \omega_0 N = 2\pi \cdot m}$$

$$\boxed{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{m}{N}, \quad m \ e \ n = inteiros$$

Deve ser um número racional

Caso contrário, $e^{j\omega_0 n}$ será aperiódico



$$m \ e \ n = inteiros$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2\pi/12}{2\pi} = \frac{1}{12} = \frac{m}{N}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{8\pi/31}{2\pi} = \frac{4}{31} = \frac{m}{N}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1/6}{2\pi} = \frac{1}{12\pi} \neq \frac{m}{N}$$

Fig. 1.25

1.9 Determine se cada um dos sinais é ou não periódico. Se um sinal for periódico, especifique seu período fundamental.

(a) $x_1(t) = je^{j10t}$

(b) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

(c) $x_3[n] = e^{j7\pi n}$

(d) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

(e) $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$

Resumo

TABELA 1.1 Comparação dos sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 n}$.

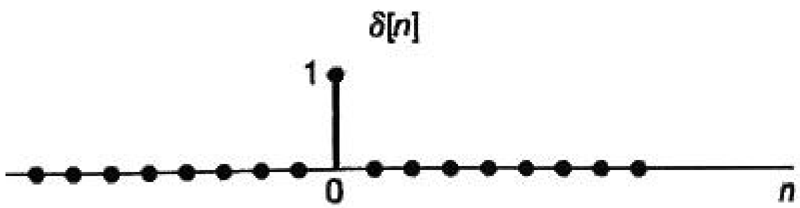
$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Sinais diferentes para valores diferentes de ω_0	Sinais idênticos para valores de ω_0 espaçados por múltiplos de 2π
Periódico para qualquer escolha de ω_0	Periódico somente se $\omega_0 = 2\pi m/N$ para valores inteiros de $N > 0$ e m
Frequência fundamental ω_0	Frequência fundamental* ω_0/m
Período fundamental $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Período fundamental* $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

*Supõe que m e N não têm fatores em comum.

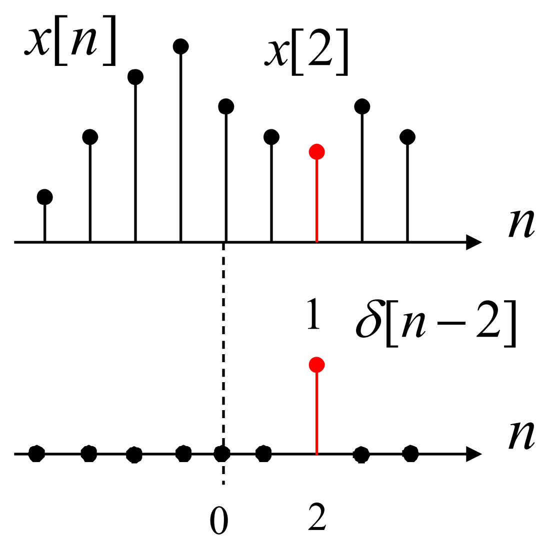
1.4 Impulso δ[n] unitário de tempo discreto

- Usado para excitar/caracterizar sistemas LIT

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



Propriedade da amostragem:

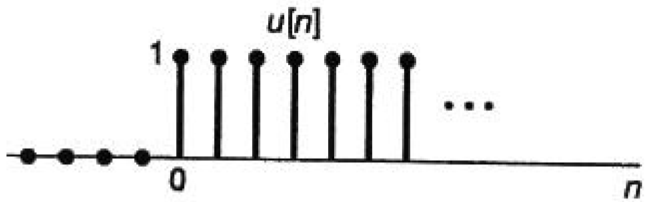


$$\boxed{x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]}$$

1.4 Degrau u[n] unitários de tempo discreto

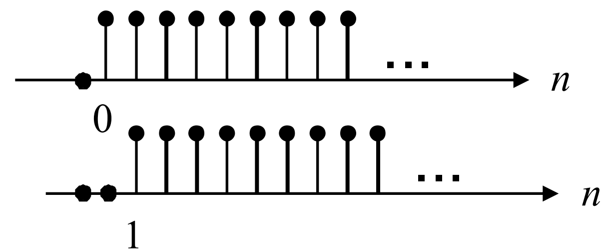
- Usado para excitar/caracterizar sistemas LIT

$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}.$$



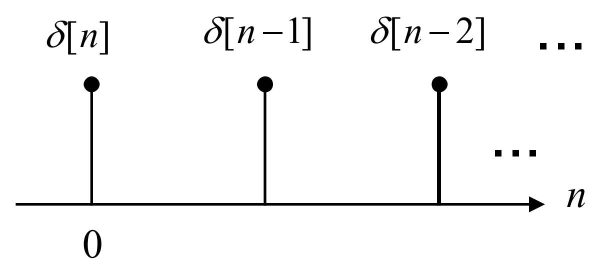
Diferença finita de 1ª. ordem

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



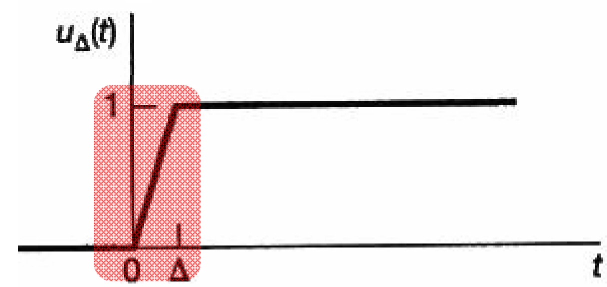
soma cumulativa

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$



1.4 Degrau *u(t)* e impulso *δ(t)* unitário de tempo contínuo

- Dificuldades formais nas descontinuidades

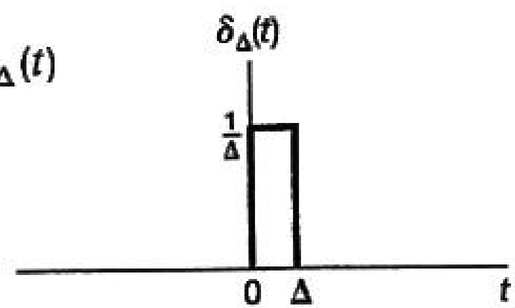


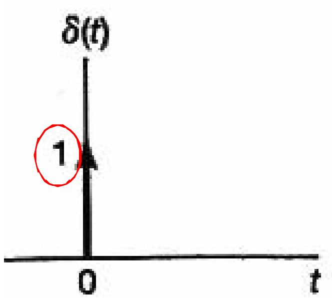
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$



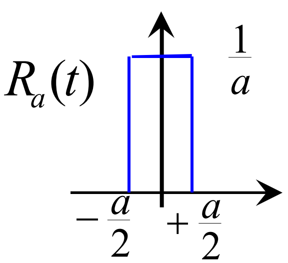


Duração = 0
Amplitude = ∞
Área = 1

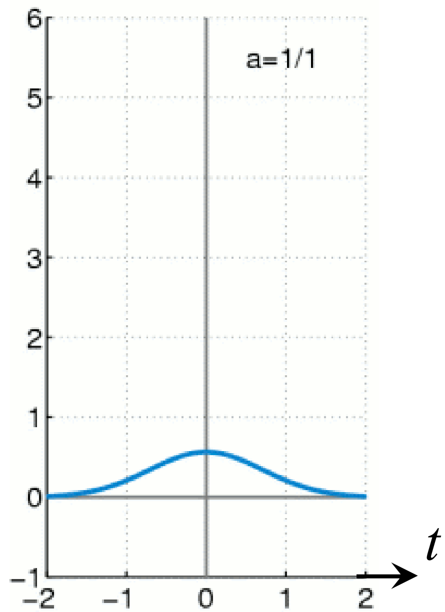
Delta de Dirac $\delta(t)$

$\delta(t)$: limite da “seqüência” de funções, como:

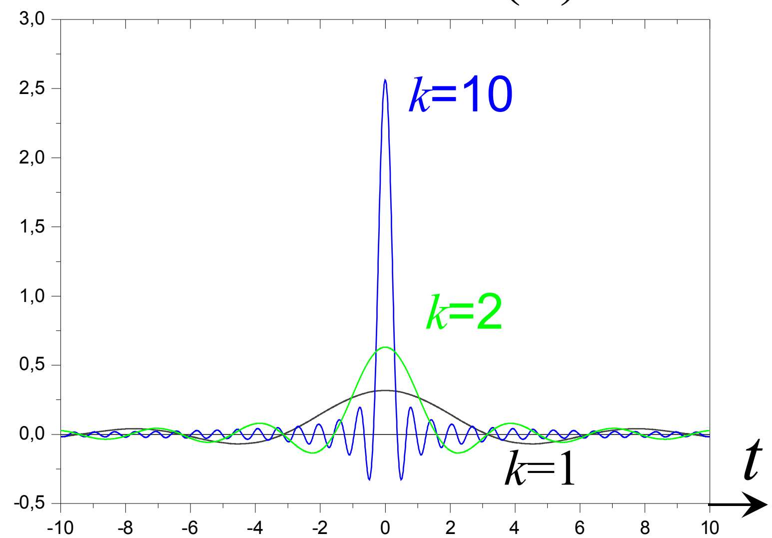
Retângulo



gaussiana



$$sinc(kt) = \frac{k}{\pi}\frac{sen(kt)}{(kt)}$$



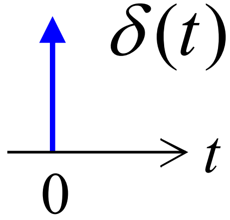
$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} R_a(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} exp(-\pi t^2 / a^2)$$

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} \frac{sen(kt)}{(kt)}$$

Animação: http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

Impulso unitário



$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad se \quad t \neq 0 \end{cases}$$

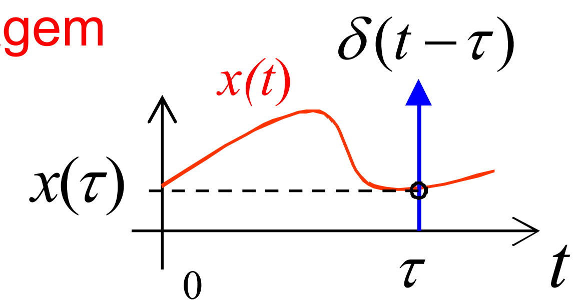
área unitária

amplitude infinita

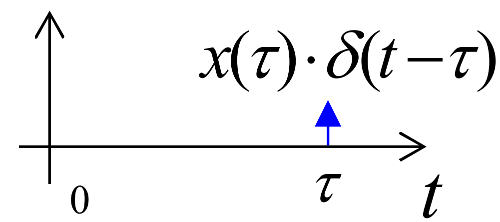
instantâneo

Propriedade da amostragem

$$x(t)\cdot\delta(t-\tau) =$$
$$x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$$

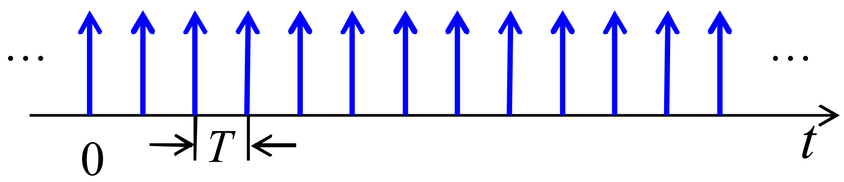


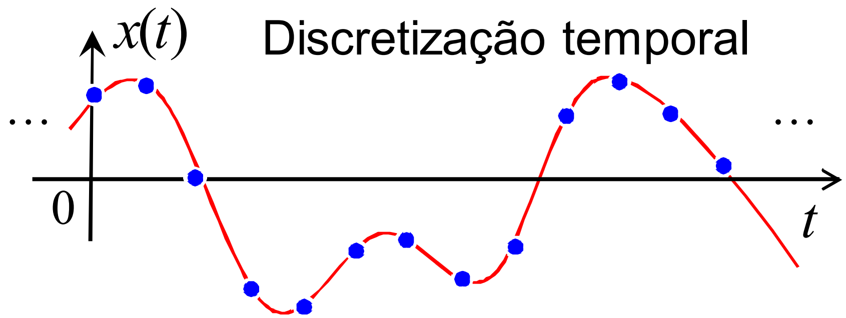
área ponderada



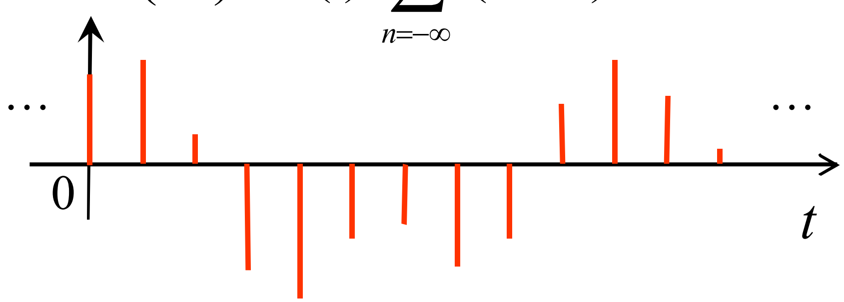
Digitalização de sinais analógicos

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

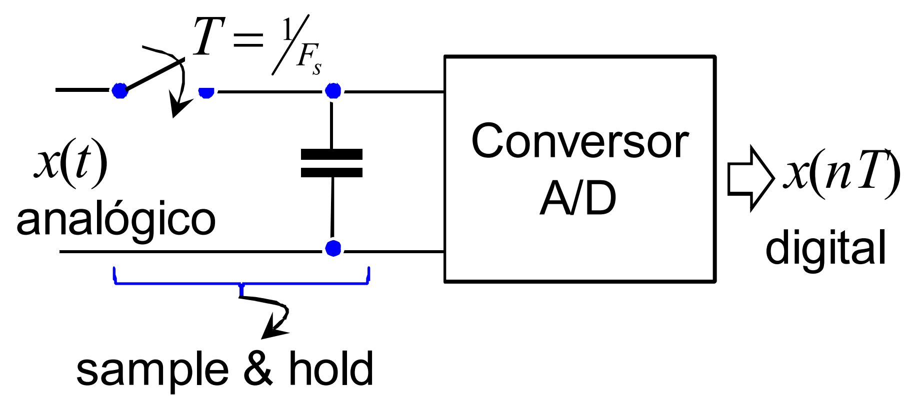




$$x(nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



Discretização no tempo



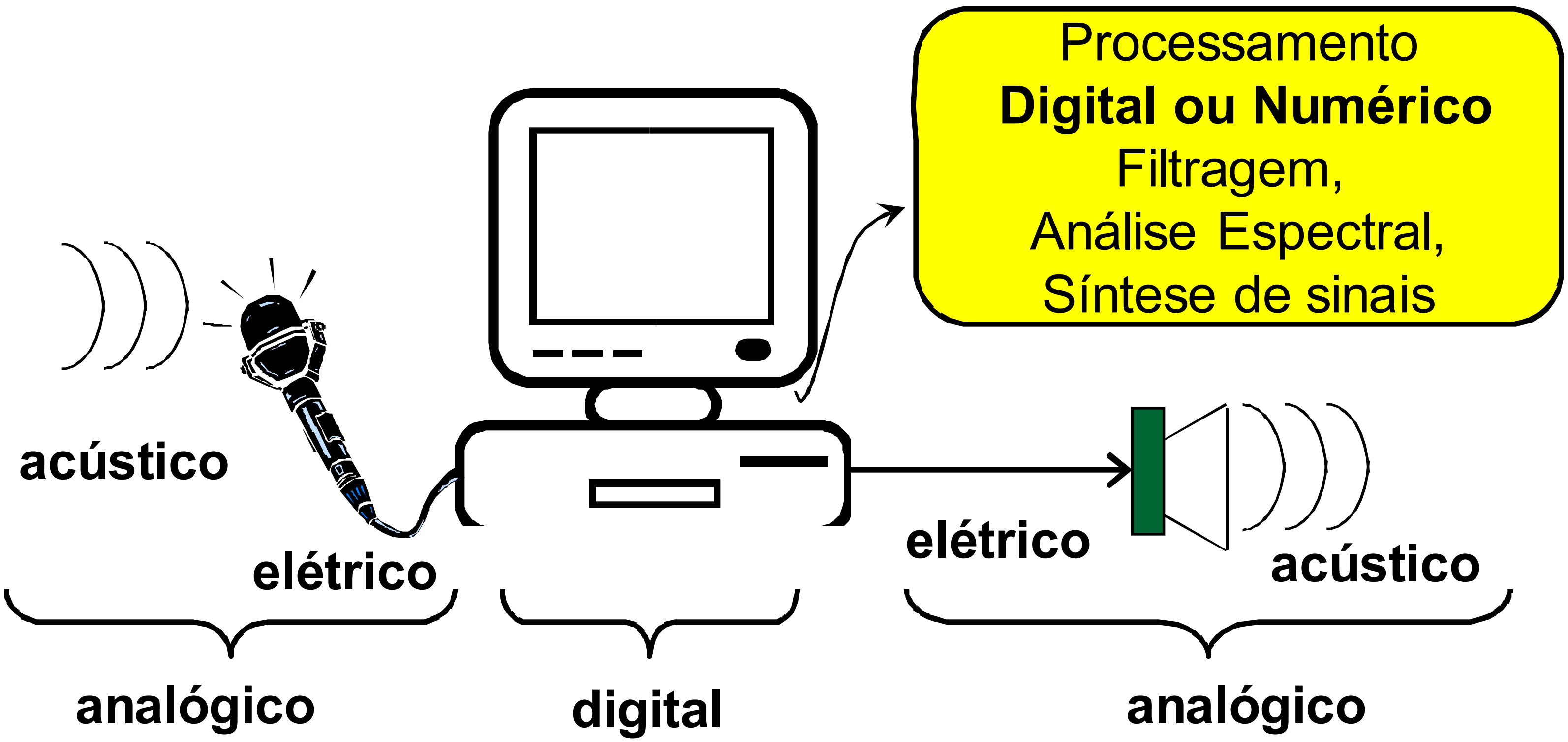
Quantização da amplitude

16 bits $\rightarrow 2^{16}$ *= 64*1024 níveis*

Teorema da amostragem...

Placas de som, interfaces USB, etc.

Processamento digital de sinais analógicos



Fundamentos de Sistemas

- Um sistema é um modelo matemático de um processo físico que relaciona o sinal de entrada (ou excitação) com um sinal de saída (ou resposta).
- Propriedades
  - Invertibilidade
  - Memória
  - Causalidade
  - Linearidade
  - Invariância no Tempo
  - Estabilidade

Sistema

- Um sistema é visto como uma transformação (ou mapeamento) da entrada na saída. O qual pode ser representado como:

$$y = \mathbf{T}x$$

  - $\mathbf{T}$ é o operador que representa alguma regra
  - x: entrada
  - y: saída
    - $x|y$ representa tanto $x(t)|y(t)$ quanto $x[n]|y[n]$

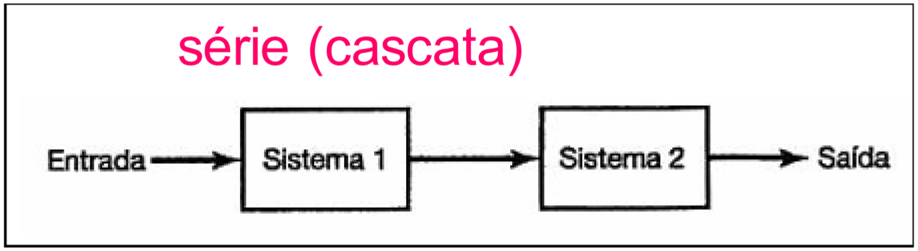
Sistema:

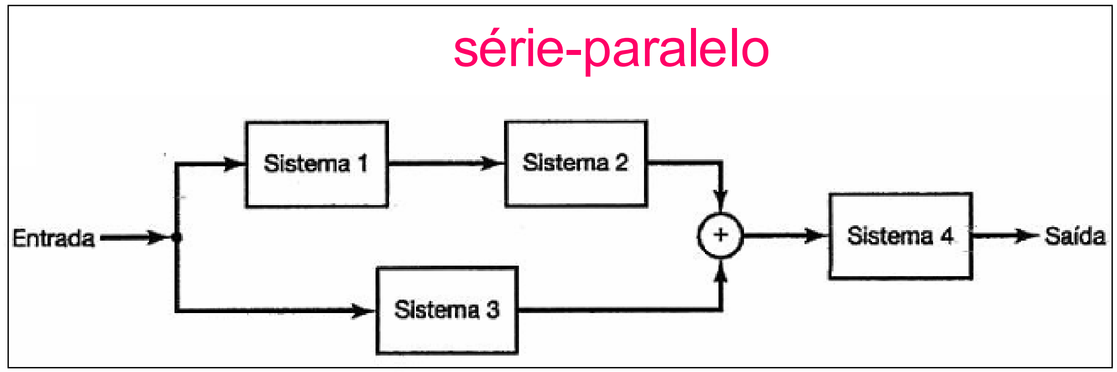
$$y = \mathbf{T}x$$

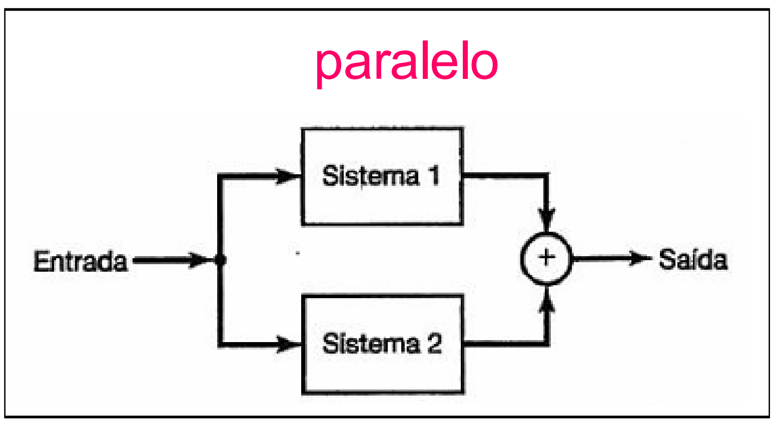
- Sistema com uma entrada e uma saída (SISO):

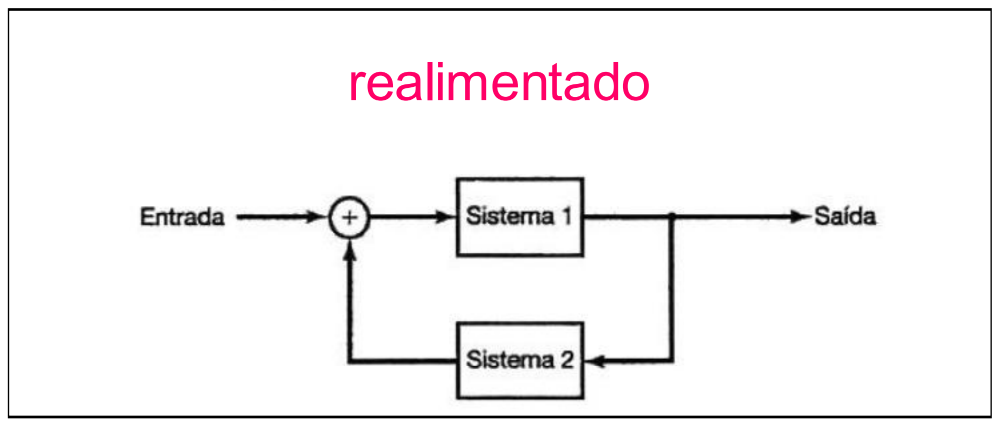
- Sistema com múltiplas entradas e saídas (MIMO):

1.5.2 – Diagramas de blocos

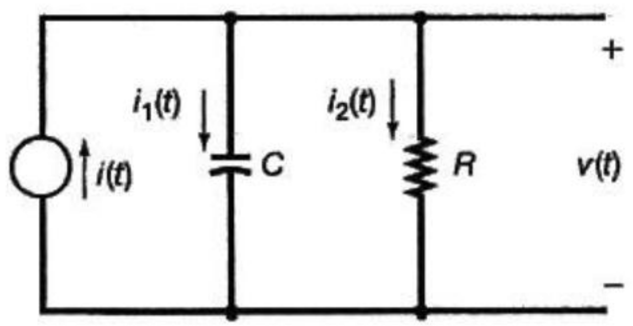




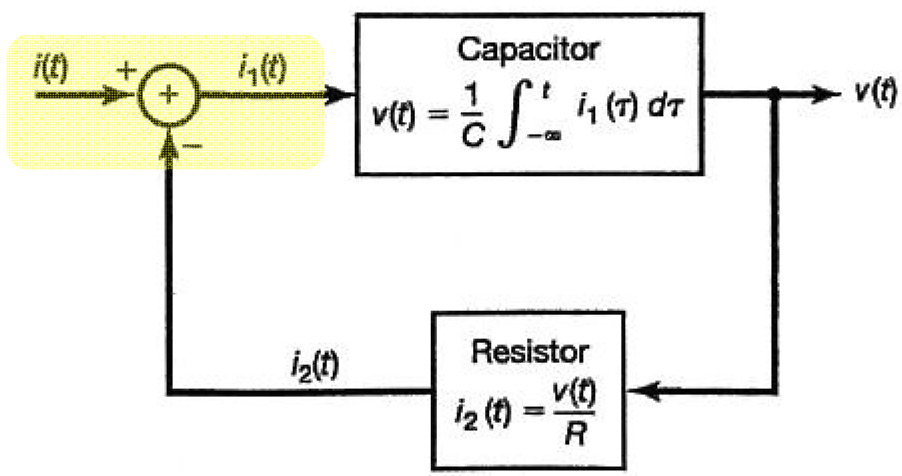




Representação c/ realimentação



$$i_1(t) = i(t) - i_2(t)$$

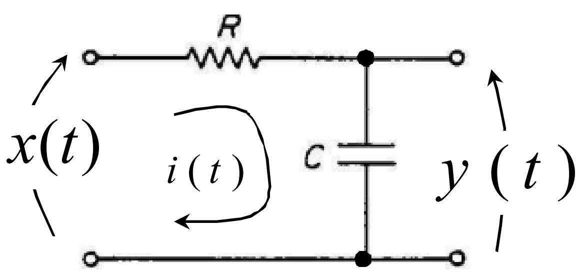


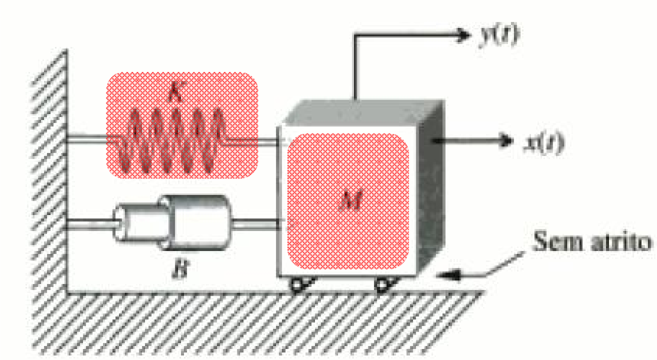
1.6.1 Sistemas com e sem memória

- Memória $\leftrightarrow$ mecanismos de armazenamento de energia ou informação
- Sistema sem memória (instantâneo): saída num dado instante depende apenas da entrada naquele instante

$$y(t) = Rx(t) \qquad\qquad y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

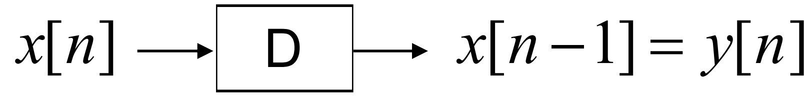
- Sistemas com memória em tempo contínuo (exemplos)





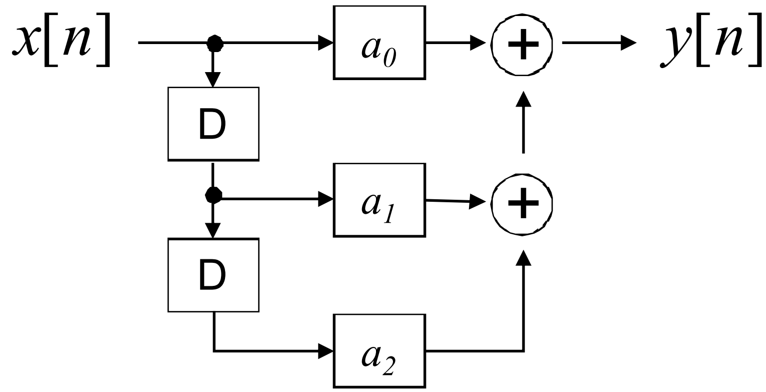
Memória: Exemplos em tempo discreto

Atrasador: $y[n] = x[n-1]$



Combinação de entradas

$$y[n] = a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2]$$

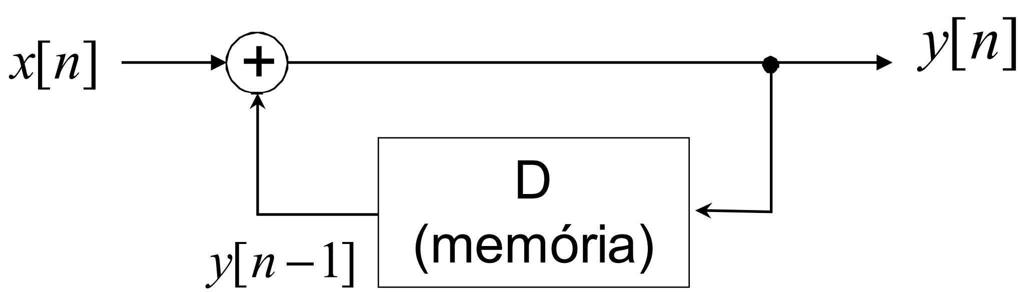


Acumulador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

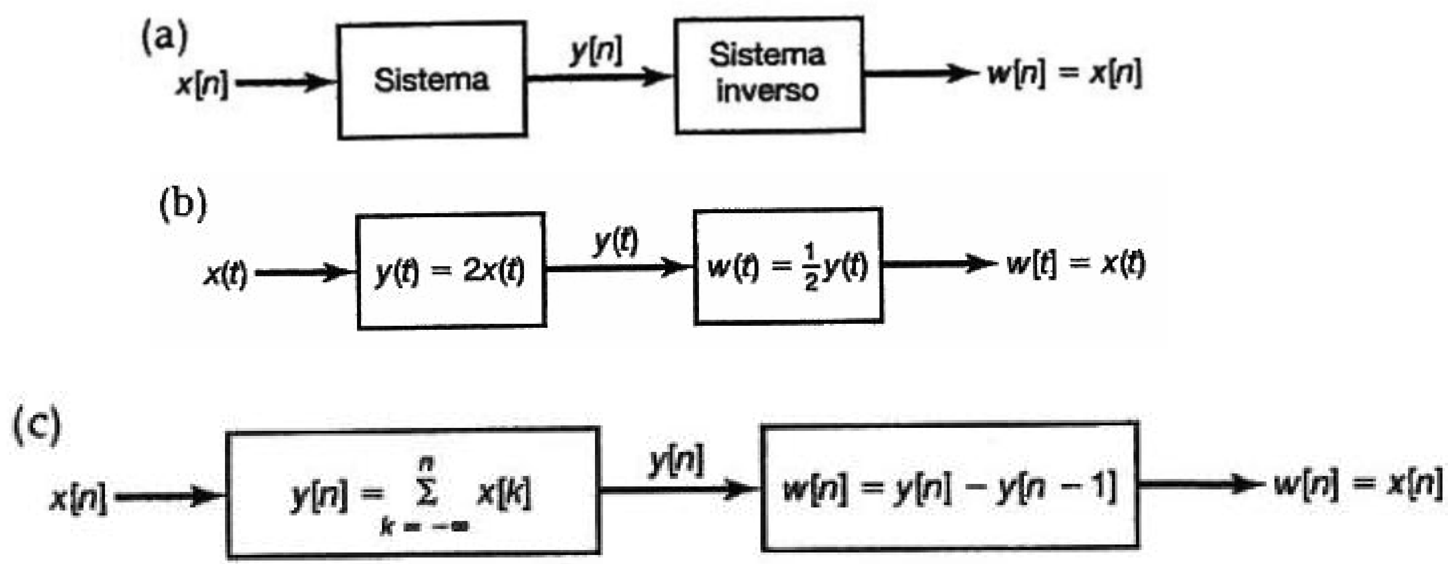
$$= \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

$$= y[n-1] + x[n]$$



1.6.2 Sistemas inversos e invertibilidade

- Invertível: entradas distintas levam a saídas distintas



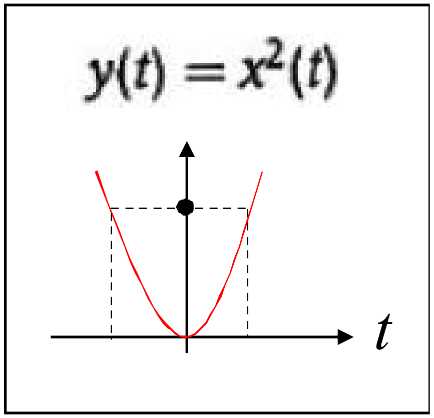
- Identificação de sistemas (análise por síntese), etc.

Exemplos

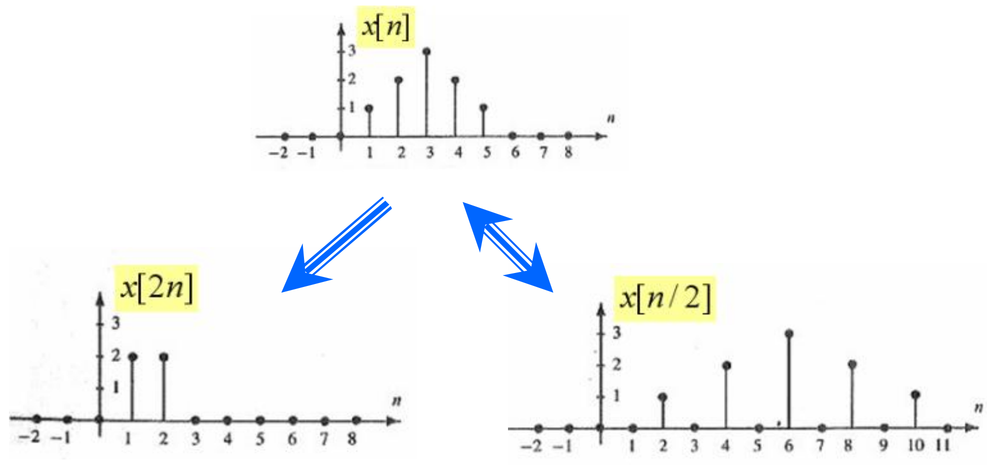
Mesma saída para entradas diferentes

$$y(t) = 10$$

Não invertível

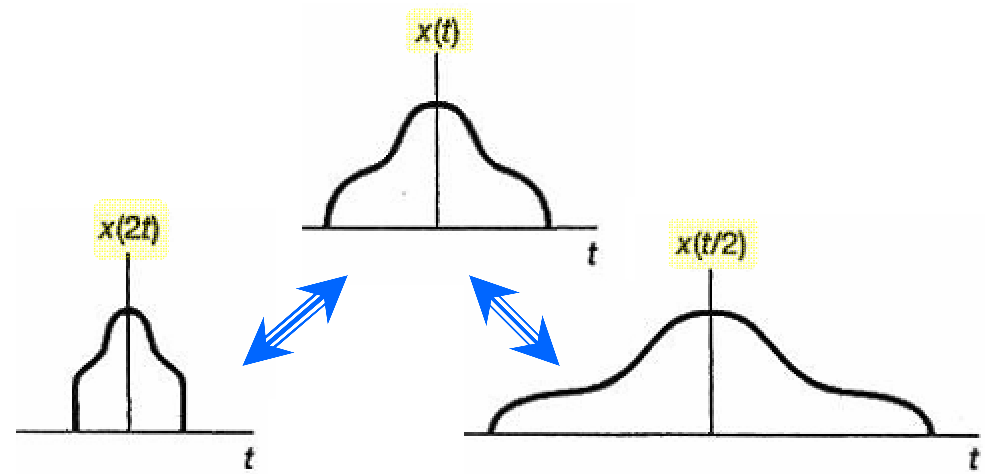


Não invertível



Não invertível

Invertível



Invertível

Invertível

1.6.3 Causalidade

- Sistema causal: saída, em qualquer instante, depende somente da entrada atual e/ou passadas
- Sistemas físicos (circuitos elétricos, sistemas mecânicos, etc.) são causais (não antecipativos)
- Sistema sem memória são causais
- Não causalidade: processamento *off-line* de sinais

futuro

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k].$$

passado

Exemplos:

$$y[n] = x[-n] \quad \begin{cases} n > 0 \ldots \\ n < 0 \ldots \end{cases}$$

Não causal

$$y(t) = x(t)\underbrace{\cos(t+1)}_{}$$

não envolve
entradas futuras

Causal

1.6.5 Invariância no tempo

- Sistema invariante no tempo:
  - comportamento e características não variam ao longo do tempo
  - deslocamento de tempo na entrada → deslocamento idêntico na saída:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{H}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{H}} \longrightarrow y[n-n_0]$$

Exemplos

$$y(t) = \mathrm{sen}[x(t)]$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \mathrm{sen}[x_1(t)] \\ y_1[t - t_0] = sen[x_1(t - t_0)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(t - t_0) \\ y_2(t) = \mathrm{sen}[x_2(t)] = \mathrm{sen}[x_1(t - t_0)] \end{cases}$$

$$= y_1(t - t_0)$$

Invariante no tempo

$$y[n] = nx[n]$$

$$\begin{cases} y_1[n] = n \cdot x_1[n] \\ y_1[n - n_0] = (n - n_0) \cdot x_1[n - n_0] \end{cases}$$

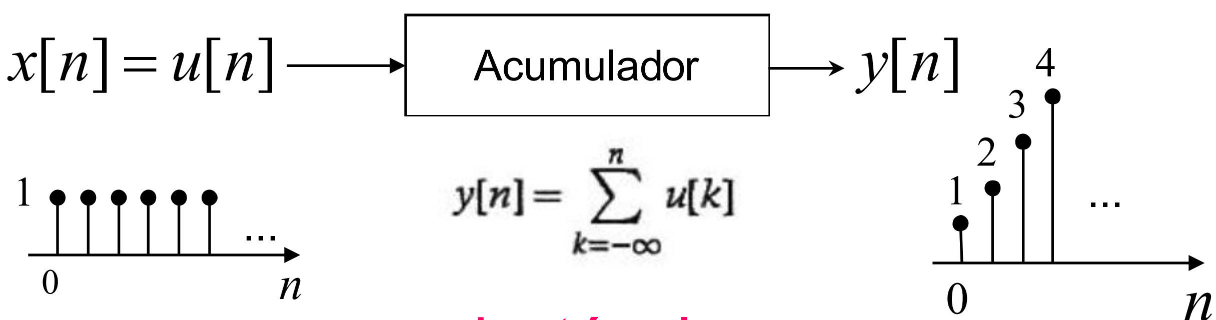
$$\begin{cases} x_2[n] = x_1[n - n_0] \\ y_2[n] = n \cdot x_2[n] = n \cdot x_2[n - n_0] \end{cases}$$

$$y_2[n] \neq y_1[n - n_0]$$

Variante no tempo

1.6.4 Estabilidade

- Estabilidade: entradas limitadas → saídas limitadas
- Estabilidade → mecanismos de dissipação de energia
- Instabilidade → crescimentos ilimitados (reações em cadeia, populações sem predador, juros bancários, etc.) a partir de entradas limitadas



instável

Exemplos

$$S_1: y(t) = tx(t)$$

t cresce ilimitadamente $\therefore$ instável

$$S_2: y(t) = e^{x(t)}.$$

$y(t)$ Limitado para qualquer $x(t)$ limitado

$\therefore$ estável

Estabilidade

Um sistema é chamado estável com entrada-limitada/saída-limitada (BIBO estável) se, para qualquer entrada limitada x:

$$|x| \leq k_x$$

a saída y correspondente é também limitada:

$$|y| \leq k_y$$

sendo que, $k_x < \infty$ e $k_y < \infty$ e $k_x, k_y \ \in \mathbb{R}$

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são BIBO estáveis:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y[n] = x[-n]$
- $y(t) = \text{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$
- $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$
- $y(t) = x(2t)$
- $y[n] = nx[n+3]$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Solução: $y[n] = x[n]^2$

- Usando a definição
  - Assuma a entrada finita: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| \leq M$, sendo M é um número real finito.

  Logo:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n]^2 \\
|y[n]| &= |x[n]^2| \\
|y[n]| &= |x[n]|^2 \\
|y[n]| &\leq M^2 \quad \text{mas } M^2 \text{ é também um número real finito}
\end{aligned}
$$

- $|y[n]| \leq M^2 \Rightarrow$ sistema estável.

1.6.6 Linearidade: aditividade e homogeneidade

Aditividade

se
$$\begin{cases} x_1(t) \to \boxed{H} \to y_1(t) \\ x_2(t) \to \boxed{H} \to y_2(t) \end{cases}$$

então

$$x_1(t) + x_2(t) \to \boxed{H} \to y_1(t) + y_2(t)$$

Homegeneidade

(mantém fator de escala)

$a = no.complexo$

se $x_1(t) \to \boxed{H} \to y_1(t)$

então

$$a \cdot x_1(t) \to \boxed{H} \to a \cdot y_1(t)$$

Sistema Linear: aditividade e homogeneidade

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \to \boxed{H} \to a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Propriedade da superposição

Exemplo 1.17

$$y(t) = tx(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$
$$y_3(t) = tx_3(t) \quad = \ldots$$

linear

Exemplo 1.18

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = \cdots$$

não linear

Exemplo 1.19

$$y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}$$

$$x_1[n] = r[n] + js[n]$$

$$y_1[n] = r[n]$$

$$x_2[n] = jx_1[n] = -s[n] + jr[n]$$

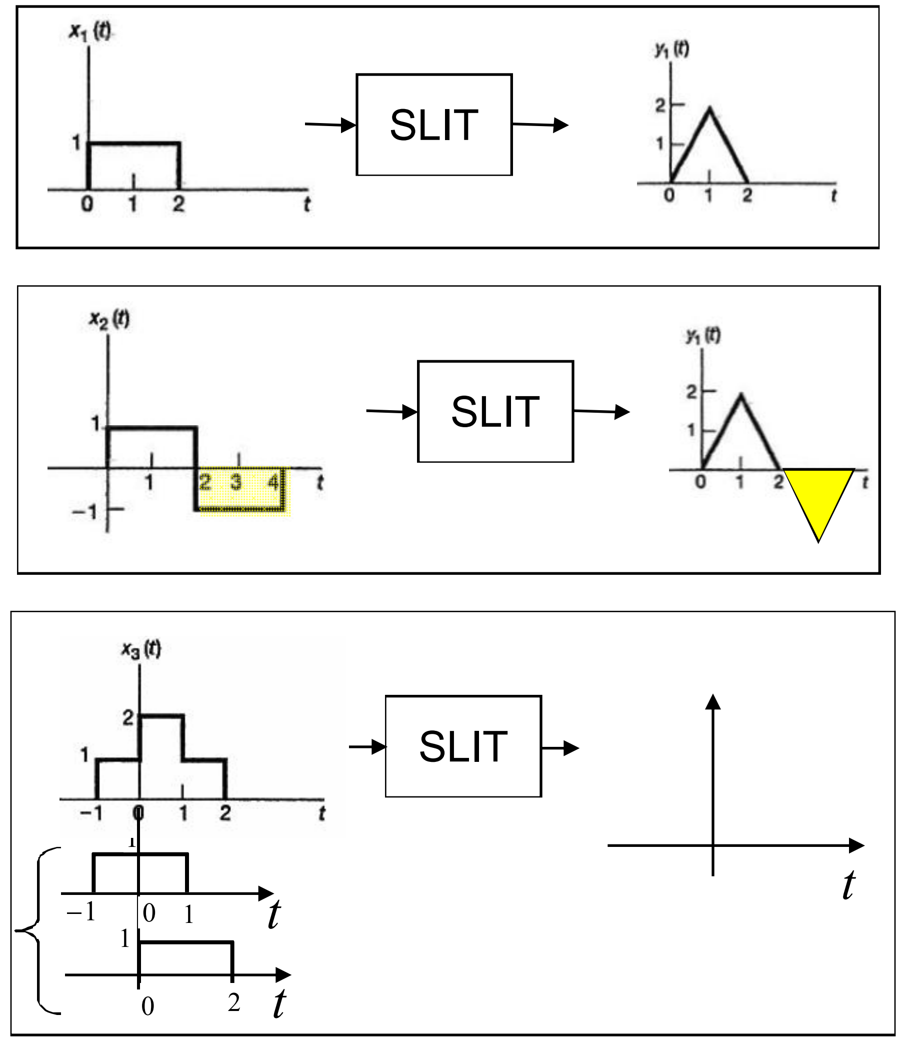
$$y_2[n] = \mathcal{R}e\{x_2[n]\} = -s[n]$$

$$y_2(t) \neq jy_1$$

Não linear

Sistema linear invariante no tempo (SLIT)

- Conhecendo-se a resposta de um SLIT a uma entrada *x(t)*, pode-se prever a resposta a outras entradas formadas por combinações lineares de *x(t)*



Reposta ao impulso (comentar)...

Problema 1.31

Exercício 1 - Propriedades

$$y(t) = 3x(3t + 3)$$

Determine se o sistema descrito pela equação acima é:

- com memória,
- causal,
- invertível,
- linear
- invariante no tempo,
- estável

Exercício 1(solução): $y(t) = 3x(3t+3)$

- Memória - Para $t = 0$, temos

$$y(0) = 3x(3)$$

ou seja, tem memória.

- Causal - O sistema é antecipativo (depende de entradas futuras), portanto ele é não causal
- Invertibilidade - Fazendo $\tau = 3t + 3$, temos

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\tau}{3} - 3\right) &= 3x(\tau) \\ \frac{1}{3}y\left(\frac{\tau}{3} - 3\right) &= x(\tau) \end{aligned}$$

ou seja, $x(t) = \frac{1}{3}y\left(\frac{t}{3} - 3\right)$ e gera valores únicos, logo o sistema é invertível

Exercício 1(solução): $y(t) = 3x(3t+3)$

- Linearidade - Temos

$$\begin{aligned} ax_1(t) &\rightarrow y_1(t) = 3ax_1(3t+3) \\ bx_2(t) &\rightarrow y_2(t) = 3bx_2(3t+3) \\ ax_1(t) + bx_2(t) &\rightarrow y(t) = \underbrace{3(ax_1(3t+3) + bx_2(3t+3))}_{=y_1(t)+y_2(t)} \end{aligned}$$

  logo o sistema é linear.

- Invariância no tempo - Temos

$$3x(3(t-t_0)+3) \neq 3x(3t-t_0+3)$$

  logo o sistema é variante no tempo.

- Estabilidade - Supondo $x(t) \leq M$, temos $y(t) \leq 3M$, logo o sistema é estável.

Exercício 2 - Propriedades

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau - \alpha)d\tau$$

Determine se o sistema descrito pela equação acima é:

- com memória,
- causal
- invertível,
- linear
- invariante no tempo,
- estável

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Memória - Para $t = 0$, temos

$$y(0) = \int_0^1 x(\tau - \alpha) d\tau = X(1 - \alpha) - X(-\alpha)$$

ou seja, tem memória.

- Causalidade - Temos que

$$y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau = X(t + 1 - \alpha) - X(t - \alpha)$$

para que seja causal, é preciso que:

$$\begin{aligned} t + 1 - \alpha &\leq t \\ \alpha &\geq 1 \end{aligned}$$

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Invertibilidade - Fazendo $\nu = \tau - \alpha$

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu) d\nu$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$y(t) = X(t-\alpha+1) - X(t-\alpha)$$

logo,

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t-\alpha+1) - x(t-\alpha)$$

que é invertível.

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Linearidade - Temos

$$
\begin{aligned}
ax_1(t) \quad &\rightarrow \quad y_1(t) = \int_t^{t+1} ax_1(\tau - \alpha) d\tau \\
bx_2(t) \quad &\rightarrow \quad y_2(t) = \int_t^{t+1} bx_2(\tau - \alpha) d\tau \\
ax_1(t) + bx_2(t) \quad &\rightarrow \quad y(t) = \int_t^{t+1} (ax_1(\tau - \alpha) + bx_2(\tau - \alpha)) d\tau \\
& \qquad\quad y(t) = \int_t^{t+1} ax_1(\tau - \alpha) d\tau \\
& \qquad\qquad + \int_t^{t+1} bx_2(\tau - \alpha)) d\tau \\
& \qquad\quad y(t) = y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}
$$

logo o sistema é linear.

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha)d\tau$

- Invariância - Fazendo $\nu = \tau - \alpha$

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu)d\nu$$

temos:

$$\begin{aligned} y(t)|_{t-t_0} &= \int_{t-t_0-\alpha}^{t-t_0-\alpha+1} x(\nu)d\nu \\ y(t)|_{x(t-t_0)} &= \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu - t_0)d\nu \end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \nu - t_0$, temos:

$$y(t)|_{x(t-t_0)} = \int_{t-t_0-\alpha}^{t-t_0-\alpha+1} x(\eta)d\eta$$

portanto, o sistema é invariante no tempo

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Estabilidade - Supondo $x(t) \leq M$, temos:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau \\
|y(t)| &= \left| \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) \right| d\tau \\
&\leq \int_t^{t+1} |x(\tau - \alpha)| d\tau \\
&\leq \int_t^{t+1} M d\tau \\
&\leq M\tau|_t^{t+1} = M
\end{aligned}$$

portanto, o sistema é estável.

1.27 Neste capítulo, apresentamos diversas propriedades gerais dos sistemas. De modo particular, um sistema pode ou não ser:

(1) Sem memória

(2) Invariante no tempo

(3) Linear

(4) Causal

(5) Estável

(a) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$ (3, 5)

(b) $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$ (1, 3, 4, 5)

(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$ (3)

(d) $y(t) = \begin{cases} 0, & \boxed{t < 0} \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$ (3, 4, 5)

(e) $y(t) = \begin{cases} 0, & \boxed{x(t) < 0} \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$ (2, 3, 4, 5)

(f) $y(t) = x(t/3)$ (3,4)

(g) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ (2,3,4)

1.28

(1) Sem memória
(2) Invariante no tempo
(3) Linear
(4) Causal
(5) Estável

(a) $y[n] = x[-n]$ (2, 5)

(b) $y[n] = x[n-2] - 2x[n-8]$ (2, 3, 4, 5)

(c) $y[n] = nx[n]$ (3, 4)

(d) $y[n] = \mathcal{E}v\{x[n-1]\}$ (2, 5)

(e) $y(n) = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$ (3, 5)

(f) $y(n) = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$ (1, 3, 4, 5)

(g) $y[n] = x[4n+1]$ (3, 5)

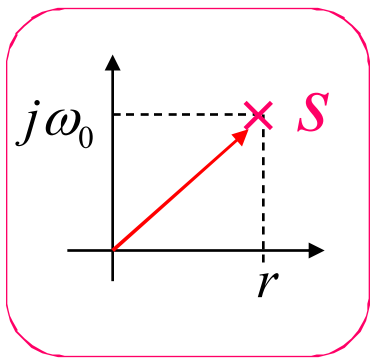
Freqüência complexa e o plano s

$$x(t) = Ae^{rt} \cdot e^{j\omega_0 t} = Ae^{\overbrace{(r+j\omega_0)}^{\boxed{s}}t}$$

amortecimento

Freqüência complexa

plano s

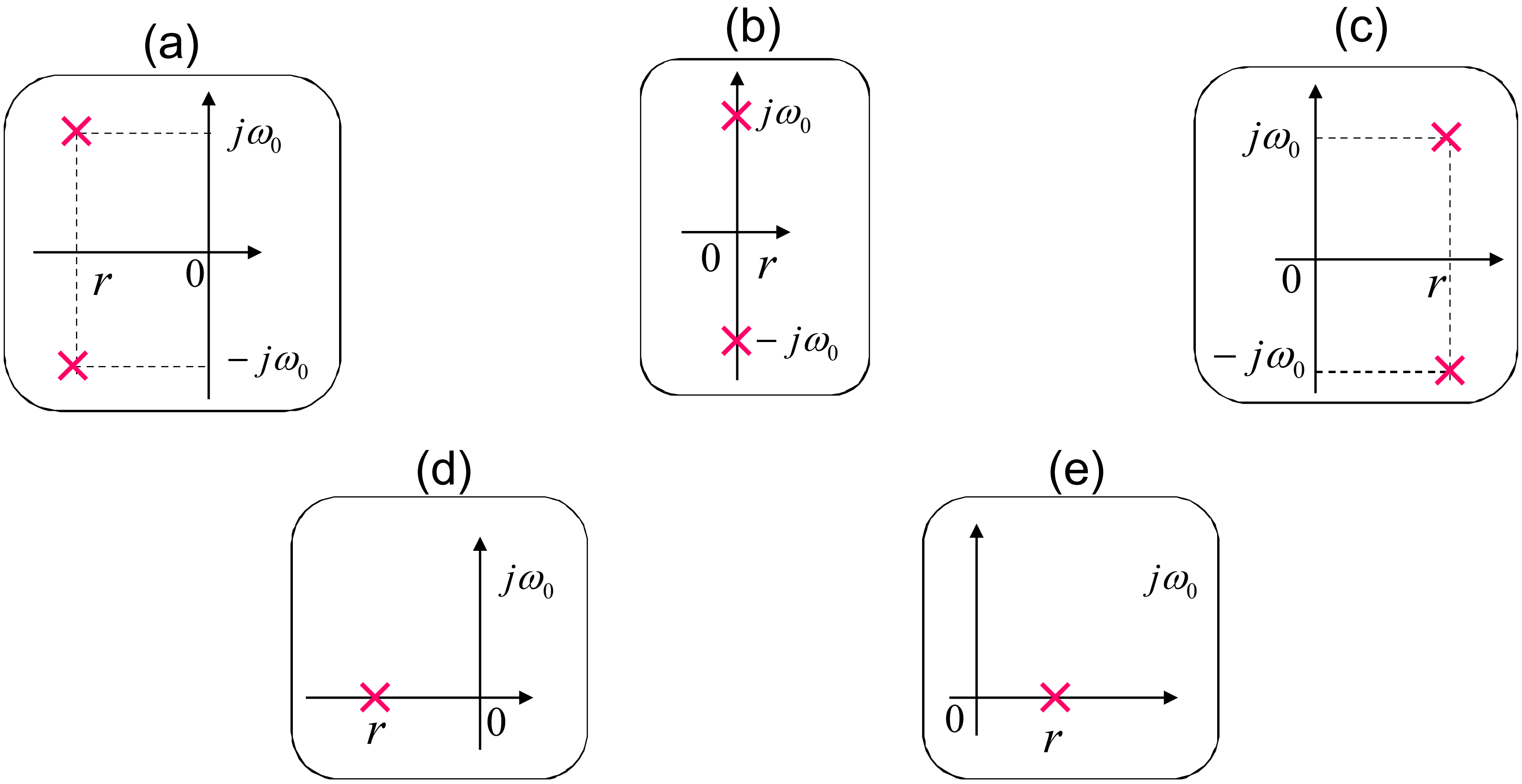


$r > 0$

(amplitude crescente)

Freqüência complexa e o plano *s*

$$x(t) = e^{rt} \cdot \cos(\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}\left[e^{(r+j\omega_0)t} + e^{(r-j\omega_0)t}\right]$$



Esboce as formas de onda de *x(t)* para cada caso

$$\mathbf{x}_1(t) = j \cdot exp(j\omega t) \rightarrow x_1 = re\{\mathbf{x}_1\} = -sen(\omega t)$$

Alternativamente:

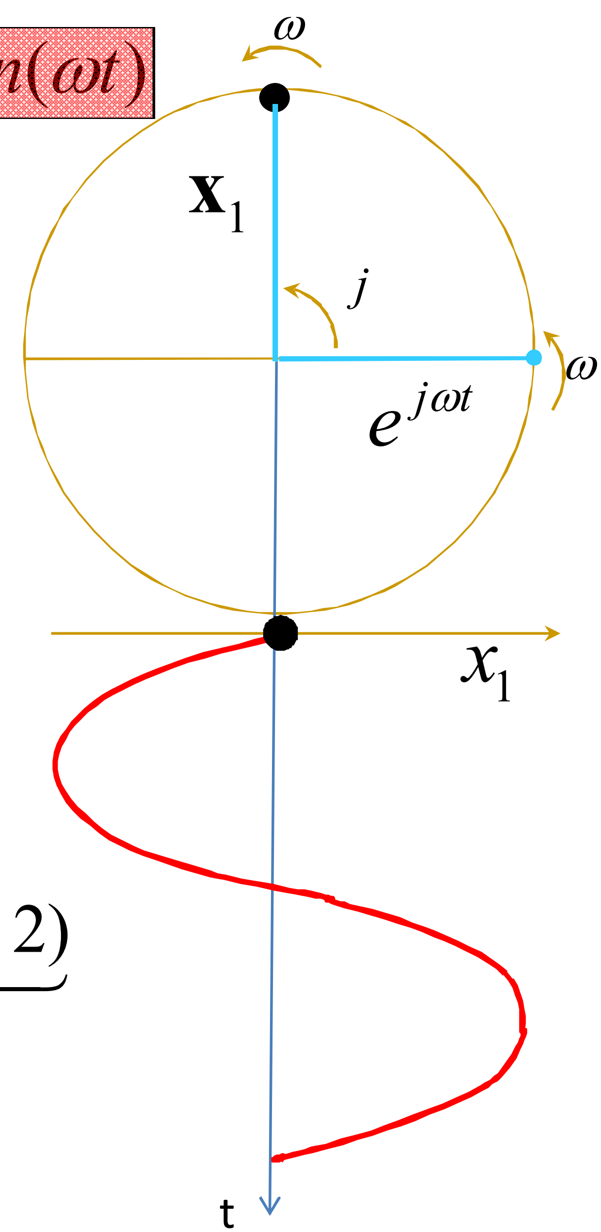
Visualizando:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{j(\pi/2)} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

$$x_1(t) = re\{\mathbf{x}_1\} = cos(\omega t + \pi / 2)$$

x_1 adiantado de 90º em relação a $cos(\omega t)$



$$x_1(t) = cos(\omega t) \cdot \underbrace{cos(\pi/2)}_{=0} - sen(\omega t) \cdot \underbrace{sen(\pi/2)}_{=1}$$

$$x_1(t) = -sen(\omega t)$$

Manipulando fasores

Sistema linear incremental

Sistema linear: entrada nula $\rightarrow$ saída nula

$$y(t) = a \cdot x(t) + b$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = a \cdot x_1(t) + b \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = a \cdot x_2(t) + b \end{array}\right\} \therefore y_1(t) + y_2(t) =$$

$$a \cdot x_1(t) + a \cdot x_2(t) + 2b$$

$$x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow a \cdot [x_1(t) + x_2(t)] + b = a \cdot x_1(t) + ax_2(t) + b$$

$\therefore$ não linear!

$y(t) = a \cdot x(t) + b$ é linear incremental pois

responde linearmente à diferença entre duas entradas