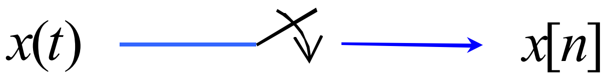
Módulo 09
A transformada Z

Revisão: Amostrando um sinal de tempo contínuo



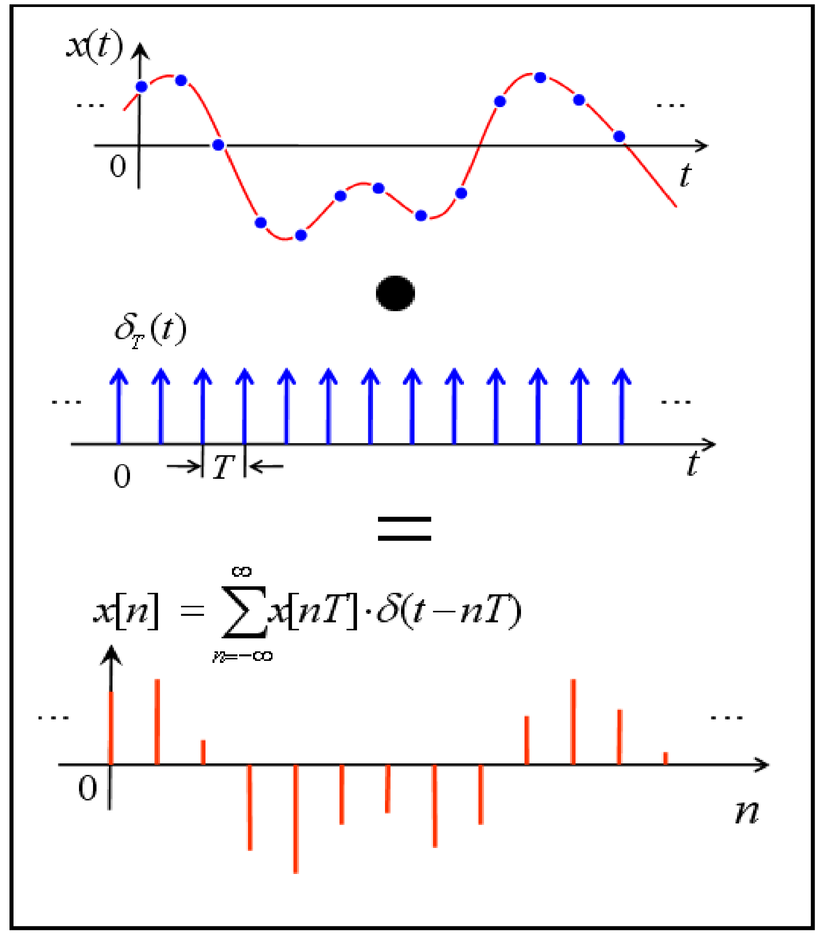
$$T = \frac{1}{F_s}$$

T = Taxa de amostragem

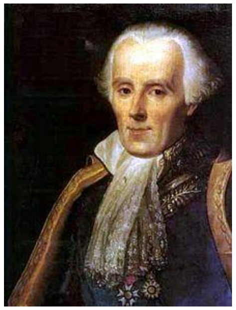
☞ não é período de de $x(t)$

$$x[n] = x(t)\big|_{t=n\cdot T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]\cdot\delta(t-nT)$$



Transformada de Laplace



$$x(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad X(s) \;=\; \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-s\,t}\cdot dt$$

$$s=\sigma+j\omega$$

- Generalização da Transformada de Fourier
- Propriedades semelhantes (deslocamentos, diferenciação, convolução, etc.)
- Simplifica o cálculo em sinais com descontinuidades, por exemplo
- É fundamental especificar a região de convergência
- Aplicação a sinais de tempo discreto → Transformada Z

Transformada de Laplace de $x[n]$

$$x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT) \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x[n]\cdot e^{-s\,t}dt$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)\right]\cdot e^{-s\,t}dt$$

$$X(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot e^{-s\,t}dt\right]$$

Comutando somatório e integral

$$X(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot e^{-s\;nT}dt\right]$$

Amostragem dos impulsos

independe de t

$$X(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot e^{-s\;nT}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot dt\right]$$

$$\boxed{=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot e^{-s\;nT}}$$

RDC =?

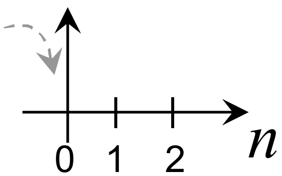
continua...

Transformada Z (bilateral) de $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x(nT) = x[n] \quad \forall n \in \aleph$$

$T = 1$



$\updownarrow$

$(f = f/f_s)$

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot e^{-s\,nT}$$

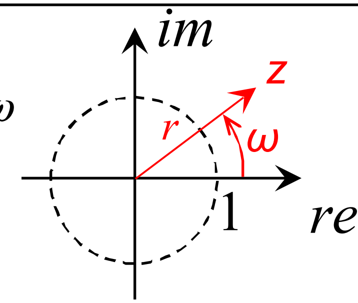
RDC =?

$$z = e^{sT} = \underbrace{e^{s}}_{T=1} = e^{\sigma + j\varpi} = e^{\sigma}\, e^{j\varpi} = re^{j\varpi}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

RDC =?

$$z = \underbrace{e^{\sigma}}_{r} e^{j\omega}$$



Contínuo e periódico em ω

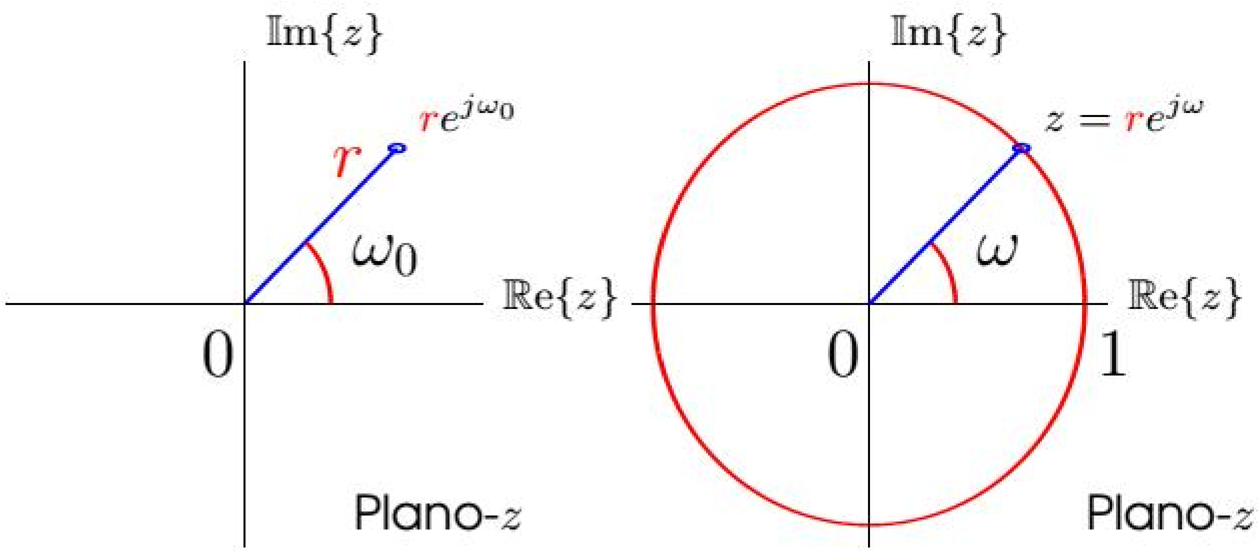
discreto no tempo

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ x[n]\cdot r^{-n} \right\} e^{-j\omega n}$$

Relação com a transformada de Fourier em tempo discreto

Sinal Exponencial Discreto

- $z^n = r^n e^{j\omega n}$
  - Se $r = |z| < 1$, $z^n \to 0$
  - Se $r = |z| > 1$, $z^n \to \infty$
- $z = e^s = e^{(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma} e^{j\omega} = r e^{j\omega}$



Determinação da Transformada $\mathcal{Z}$

A DTFT de um sinal $x[n]$ é:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

desde que $x[n]$ satisfaça a condição:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Muitos sinais não atendem esta condição
- Os sinais: $x[n] = 1$, $u[n]$ e $\cos(\omega n)$ também não satisfazem esta condição.

Determinação da Transformada $\mathcal{Z}$

"Forçando" que $x[n]$ seja absolutamente somável $x[n]e^{-\sigma n} = x[n]r^{-n}$, com $r = |z| \ll 1$

Aplicando a transformada de Fourier, tem-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x[n]r^{-n}]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

com $z = re^{j\omega}$. Sendo,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

A Transformada $\mathcal{Z}$.

Região de Convergência

- Lembrando o desenvolvimento anterior:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n]r^{-n}}_{\text{nova função}} \; e^{-j\omega n}$$

- Para que o somatório exista é preciso que:

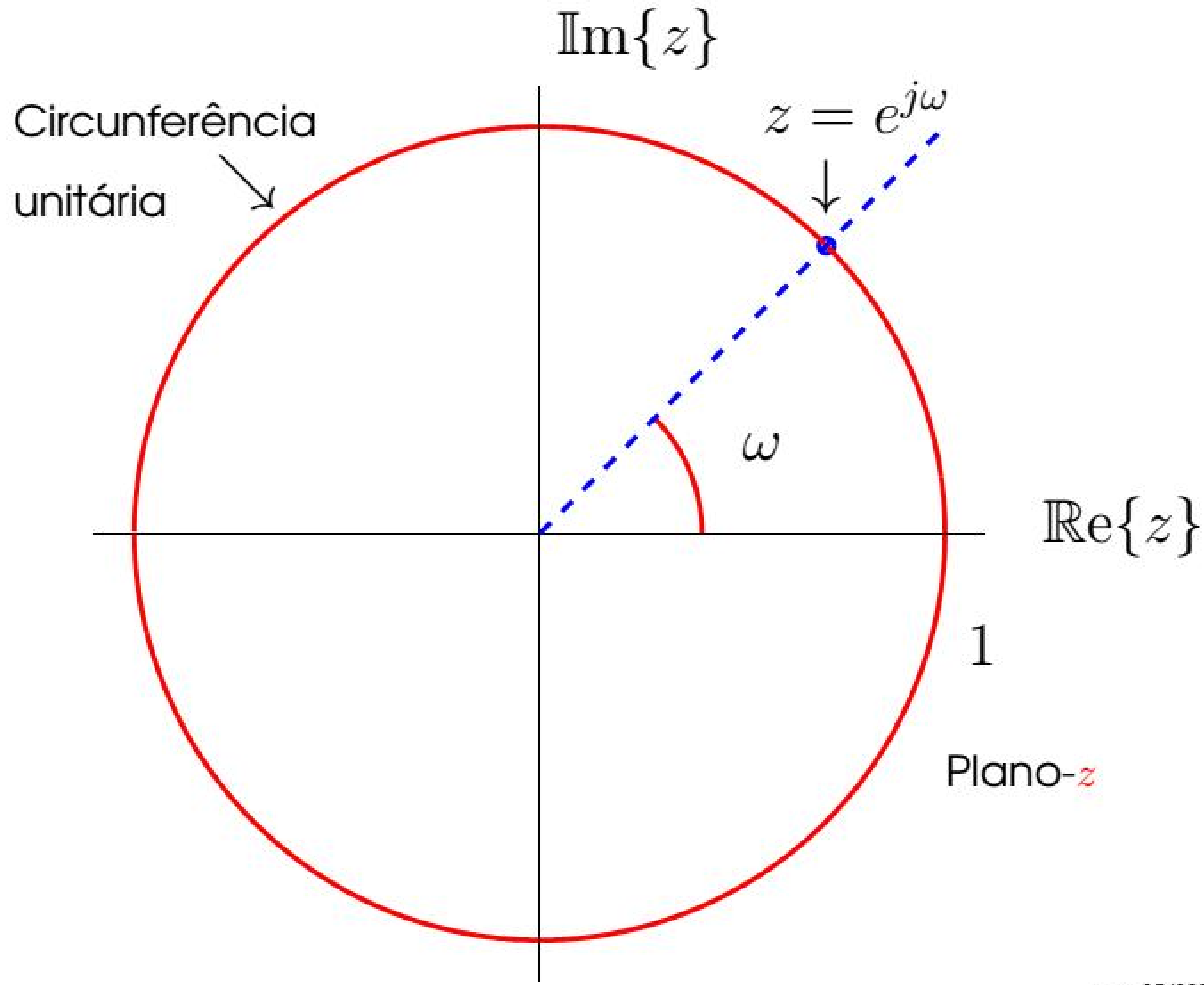
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

- O conjunto de valores de r para os quais o somatório converge é chamado Região de Convergência (RDC)

ZT e DTFT

- A Transformada de Fourier transforma um sinal $x[n]$ em $1 - D$ em um espectro de frequência $X(e^{j\omega})$ em $1 - D$
- A Transformada $\mathcal{Z}$ transforma um sinal $x[n]$ em $1 - D$ em uma nova função da variável z, $X(z)$ em $2 - D$. Um plano complexo chamado de plano-z:

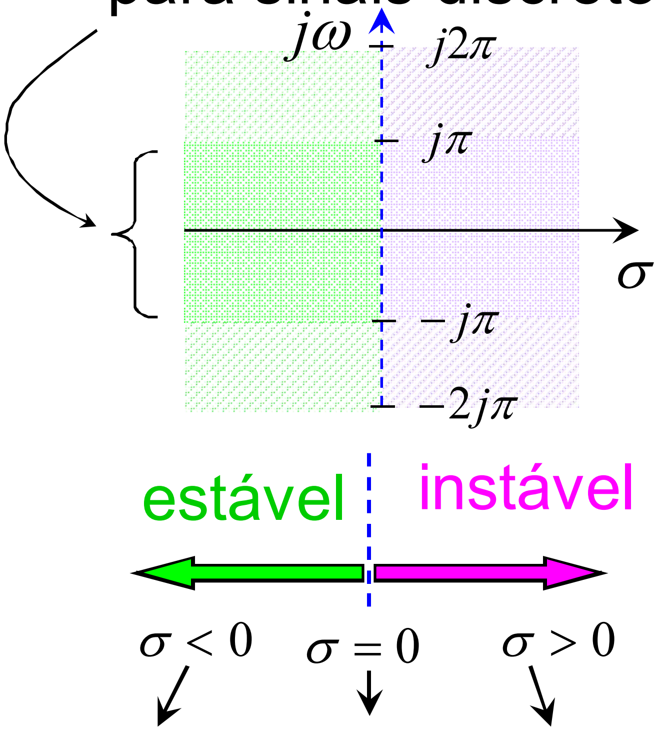
Plano z



$\mathbb{I}\mathrm{m}\{z\}$
Circunferência
unitária
$z = e^{j\omega}$
ω
$\mathbb{R}\mathrm{e}\{z\}$
1
Plano-z

Relação entre as variáveis s e z

Plano s: periodicidade em frequência para sinais discretos



$\boxed{r < 1}$	$\boxed{r = 1}$	$\boxed{r > 1}$

$$z = \underbrace{e^{\sigma}}_{=r} \cdot e^{j\omega}$$

$$z = e^{sT} = \underbrace{e^{s}}_{T=1} = e^{\sigma + j\omega}$$

$$\boxed{z} = \underbrace{e^{\sigma}}_{=r} \cdot e^{j\omega}$$

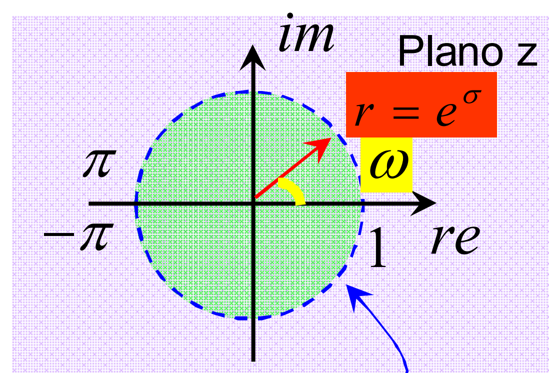
módulo

$0 < r < \infty$

ângulo

$0 < \omega < 2\pi$

$-\pi < \omega < \pi$

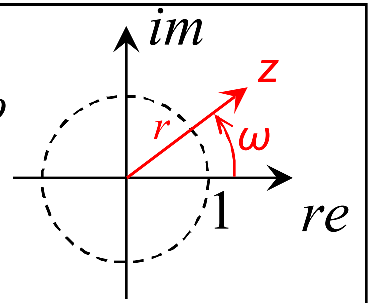


circunferência unitária: $z = e^{j\omega}$, $|z| = 1$

Relação entre $X[z]$ e $X[e^{j\omega}]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$z = \underbrace{e^{\sigma}}_{r} e^{j\omega}$$



$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ x[n] \cdot \boxed{r^{-n}} \right\} e^{-j\omega n}$$

decaimento/
crescimento

$$\boxed{r^{-n} = e^{-\sigma n}}$$

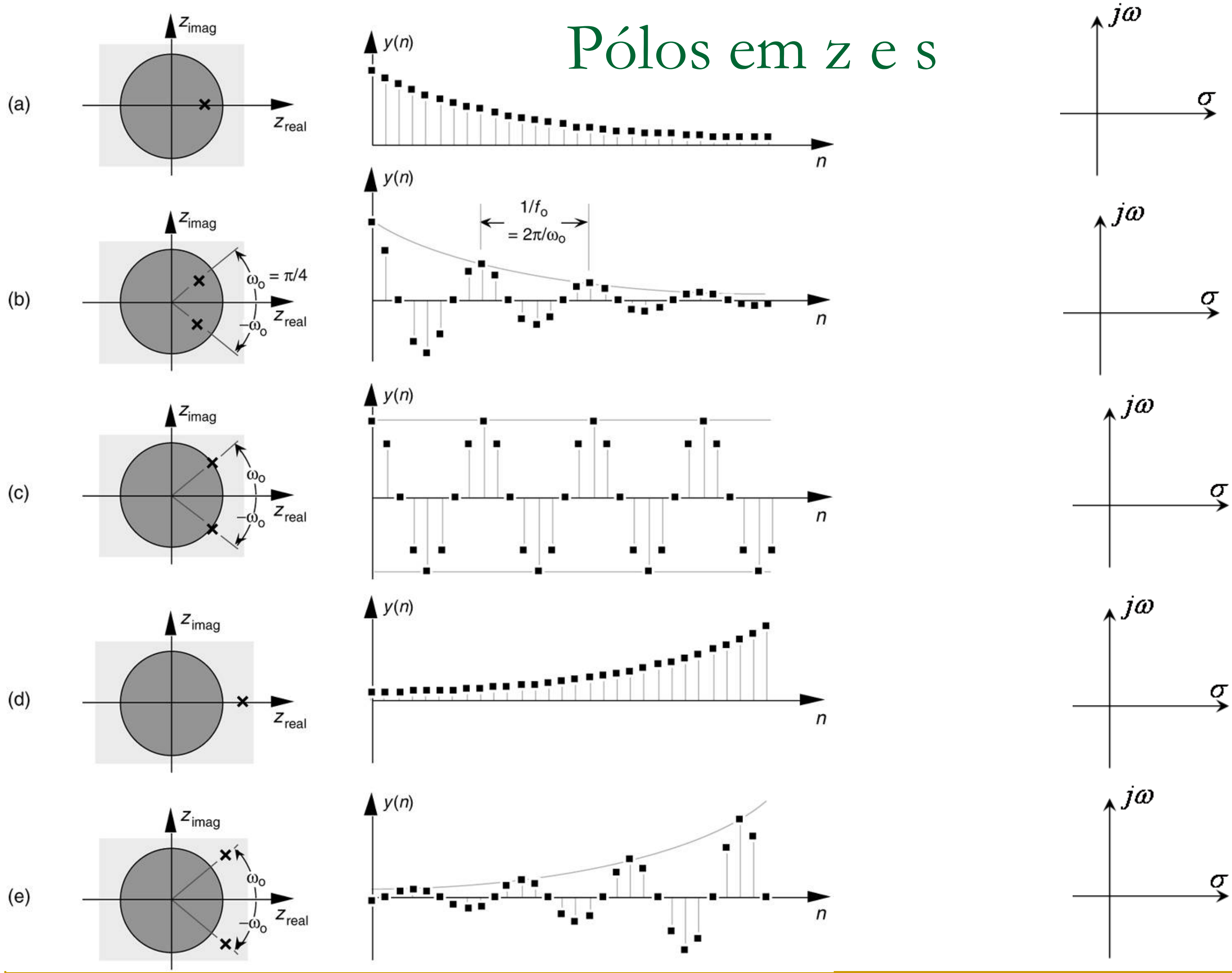
$$\downarrow$$

$$X(z) \equiv \mathcal{F}\left\{ x[n] \cdot r^{-n} \right\}$$

Além disso:

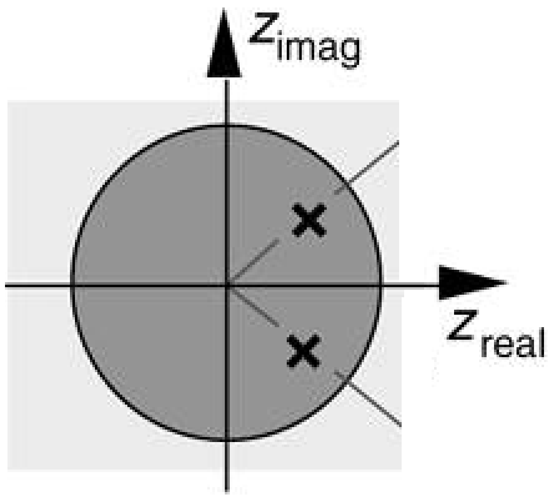
$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}}$$

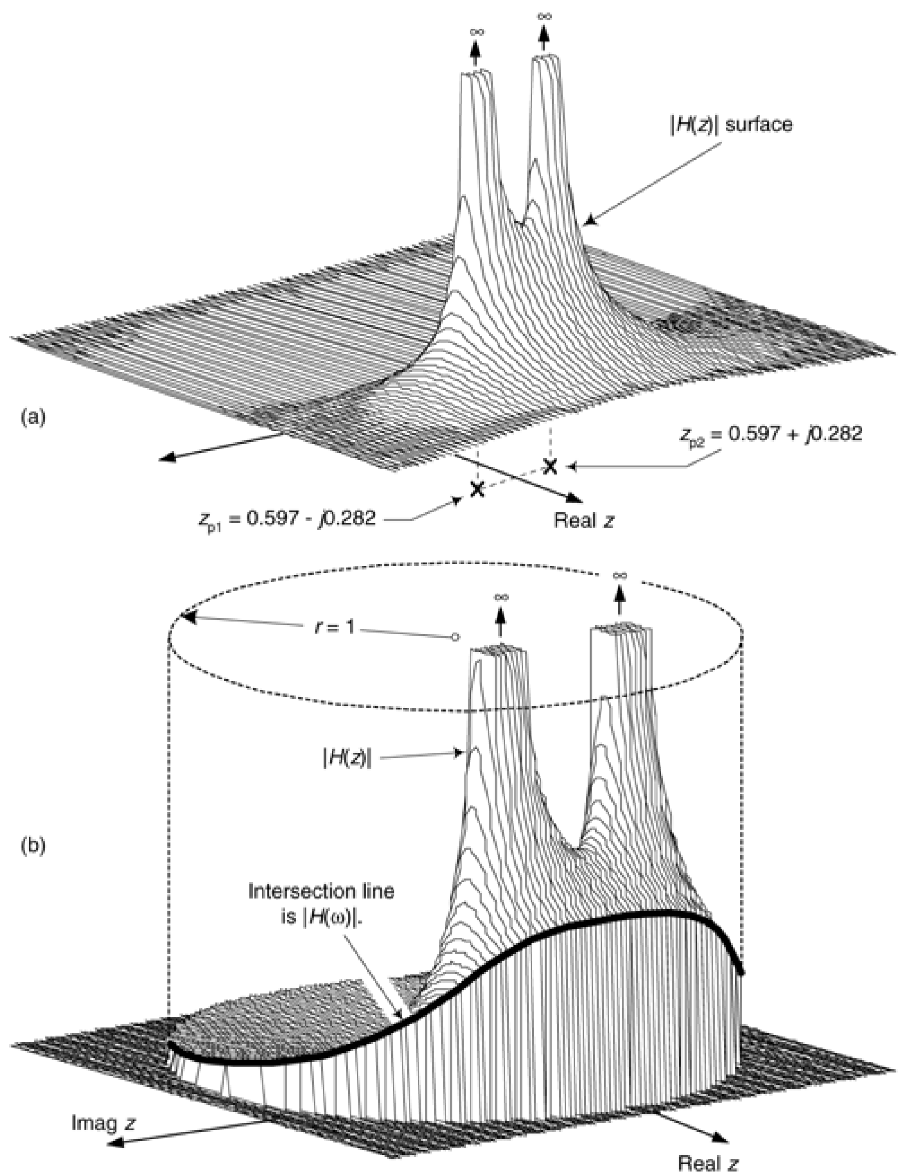
Pólos em z e s



http://sincorrer.com/images/0131089897/graphics/06fig15_alt.jpg

A “superfície” da transformada *z*





Veja também

http://dspcan.homestead.com/files/idxpages.htm

http://sincorrer.com/ch06lev1sec3.html

Pólos e Zeros

- A forma usual (não em todos os casos) da Transformada $\mathcal{Z}$ é:

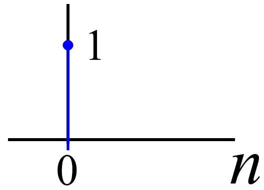
$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

- Que pode ser reescrita na forma

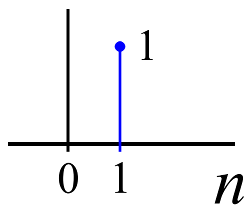
$$X(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

- c_k são zeros e d_k são pólos de $X(z)$.

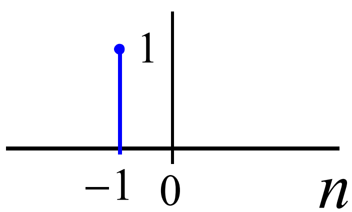
Ex. 10.5



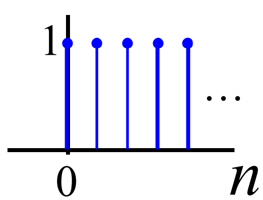
$$\delta[n] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \qquad RDC = \forall\, z$$



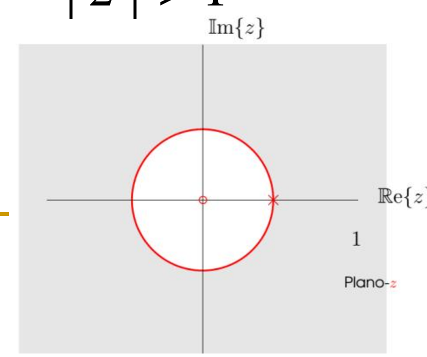
$$\delta[n-1] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1} \qquad RDC = \forall\, z \neq 0$$



$$\delta[n+1] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z, \qquad RDC = \forall\, z \neq \infty$$



$$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$



Sinal	Transformada	RDC
1. $\delta[n]$	1	Todo z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z, exceto 0 (se $m > 0$) ou ∞ (se $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$

Sinal	Transformada	RDC
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\text{sen}\, \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\text{sen}\, \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\, \text{sen}\, \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\,\text{sen}\, \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Pares de transformada z de maior utilidade (pág. 462)

Ex. 10.1

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

convergência:

$$|\ a \cdot z^{-1}\ | < 1$$

ou $|z| > |a|$.

causal

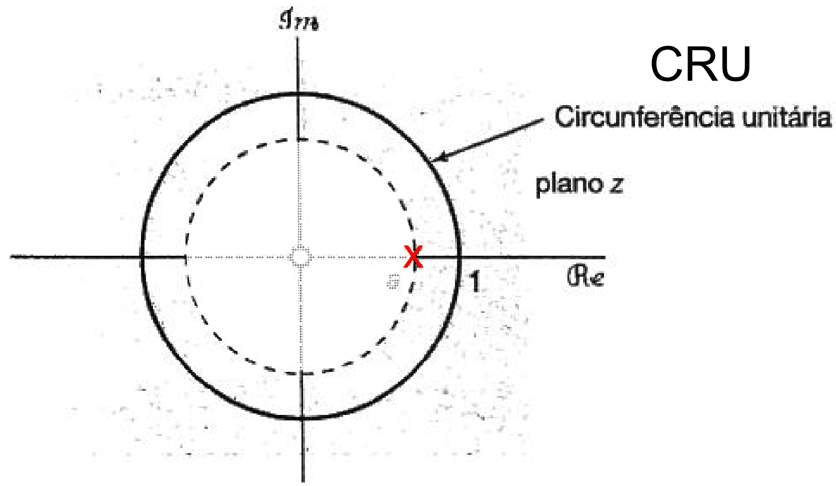
$$x[n] = a^n u[n]$$

RDC

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

$X(z)$ = racional
→ pólos e zeros
no plano z

CRU



Circunferência de raio unitário = CRU

Ex. 10.2 $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{-1} (a \cdot z^{-1})^n$$

Convergência (n<0)

$|a \cdot z^{-1}| > 1$ ou $\boxed{|z| < |a|}$

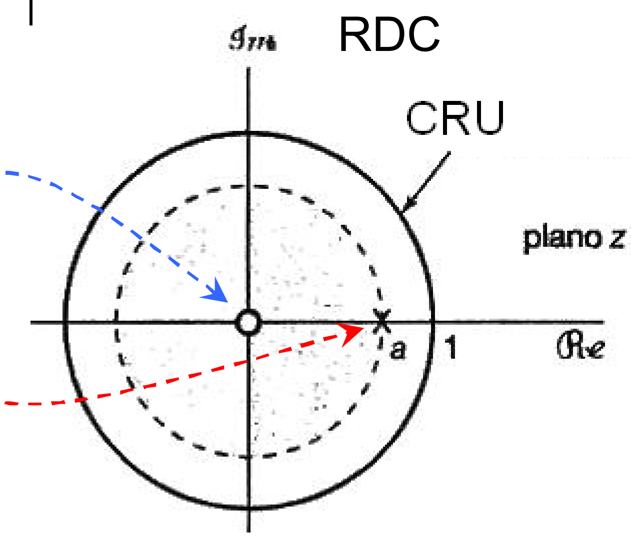
$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

anticausal

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}}$$



Ex. 10.1: mesma expressão da transformada z, mas RDC é diferente

Ex. 10.3

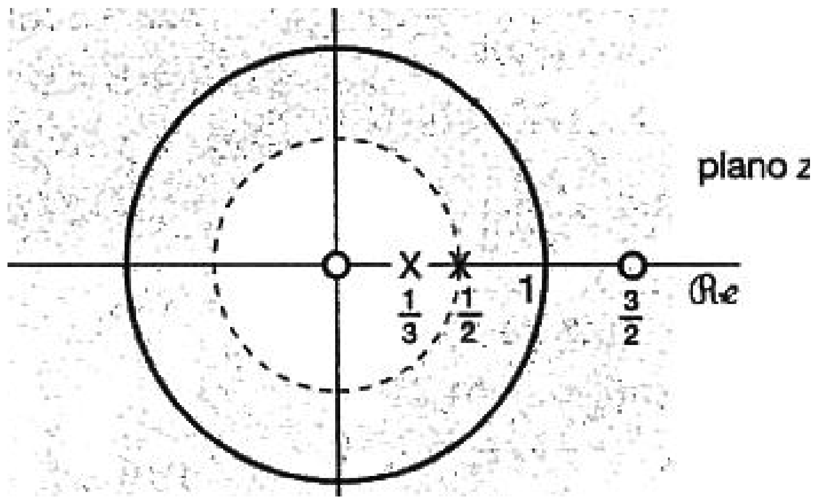
$$x[n] = a^n u[n] \qquad \text{RDC}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$



Ex. 10.4 $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$

$$x[n]=a^n u[n]$$

RDC

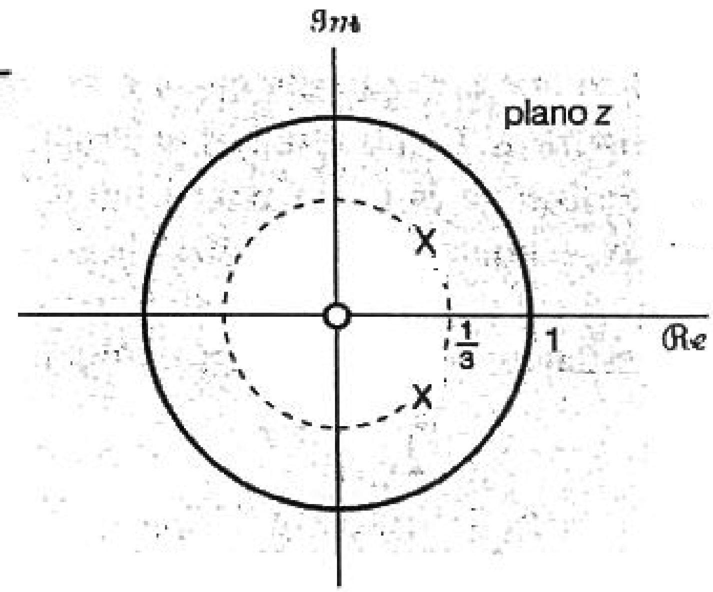
$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

$$x[n]=\underbrace{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n]}-\underbrace{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]}$$

$$\updownarrow z \qquad \qquad \updownarrow z$$

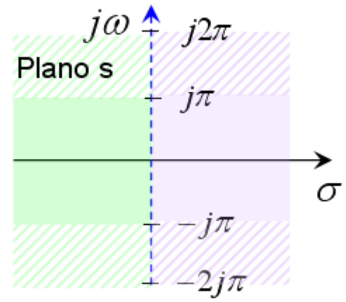
$$\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}}-\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}}$$

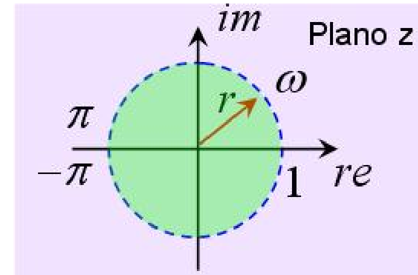
$$X(z)=\frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{\left(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)\left(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)}$$



$|z| > \left|\frac{1}{3}e^{\pm j\pi/4}\right| \longrightarrow |z| > 1/3$

10.2 Propriedades da RDC





Popriedades
semelhantes às de $\mathcal{L}$

$$z = \underbrace{e^{\sigma}}_{=r} \cdot e^{j\omega}$$

Exemplos:

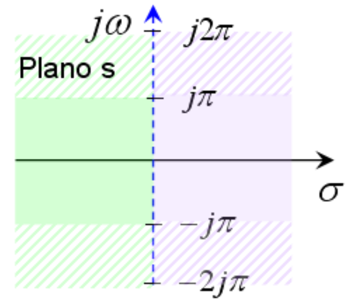
Propriedade 2: A RDC não contém polos.

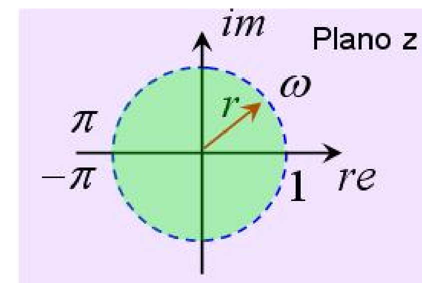
Propriedade 3: Se $x[n]$ tiver duração finita, então a RDC será o plano z inteiro, exceto possivelmente $z = 0$ e/ou $z = \infty$.

Sempre converge

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

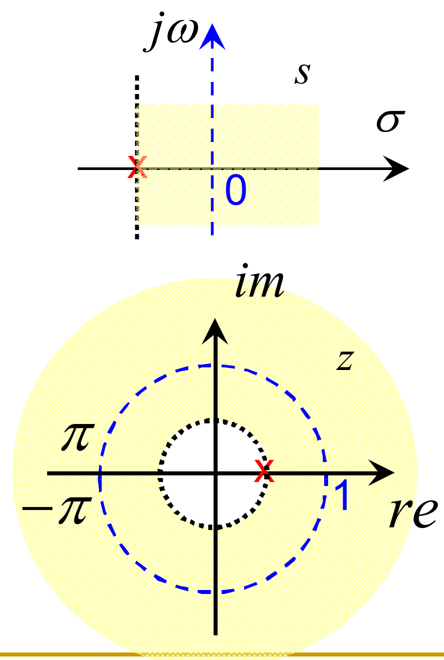
Propriedades da RDC



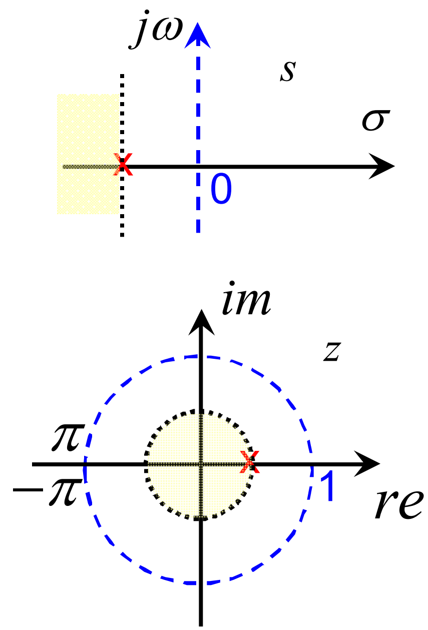


Propriedade 1: A RDC de $X(z)$ consiste em um anel no plano z centrado na origem.

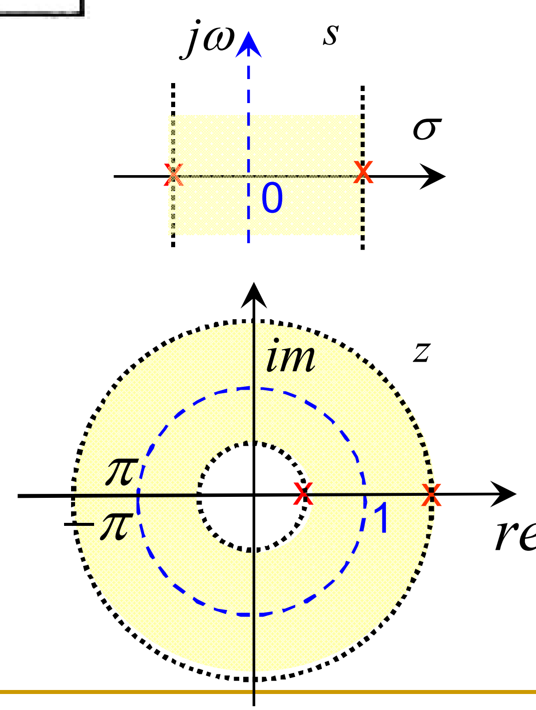
$$z = \underbrace{e^{\sigma}}_{|z|=r} \cdot e^{j\omega}$$



Lateral direito,



Lateral esquerdo,



Bilateral,

Ex. 10.6

$$x[n]=\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1,\ a>0 \\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n$$

$$=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\underbrace{\frac{1}{z^{N-1}}}_{\text{N-1 pólos em } z=0}\underbrace{\frac{z^N-a^N}{z-a}}_{\text{pólo } z=a}$$

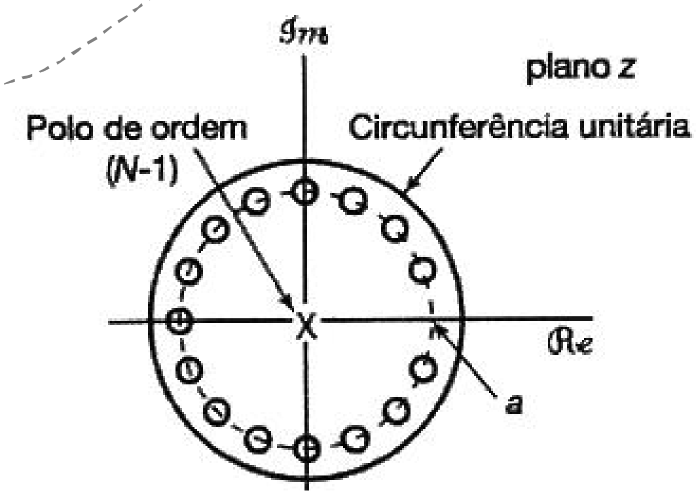
Numerador : zeros

$$z^N=a^N=a^N\cdot e^{j2\pi}$$

$$z=\sqrt[N]{a^N\cdot e^{j2\pi}}$$

$$z_k=ae^{j2\pi k/N},\ 0\le k\le N$$

$z_0=a$ ∴ cancelamento zero/pólo



N=16

Se $X(z)$ é racional, e se $x[n]$ for lateral direito, então a RDC será a região no plano z fora do pólo mais externo. Além disso, se $x[n]$ for causal, então a RDC incluirá $z = \infty$.

Para o um sinal causal x[n]=0 para n<0, então

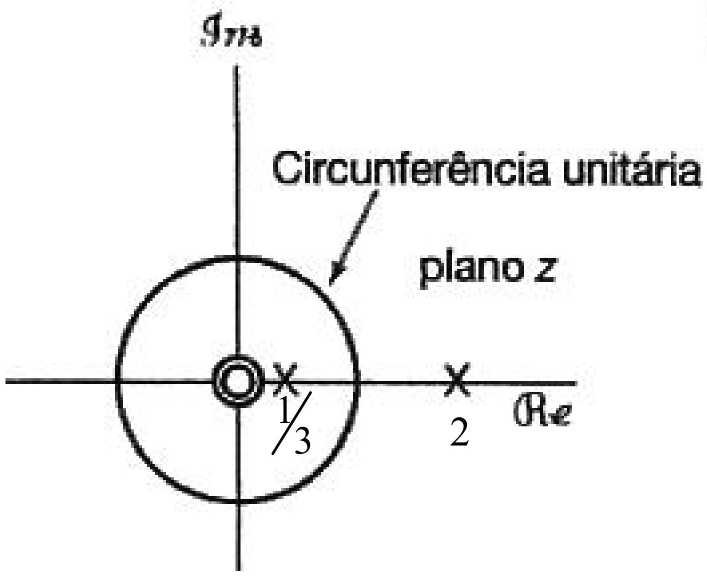
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = x[0] + x[1] \cdot z^{-1} + x[2] \cdot z^{-2} + \ldots$$

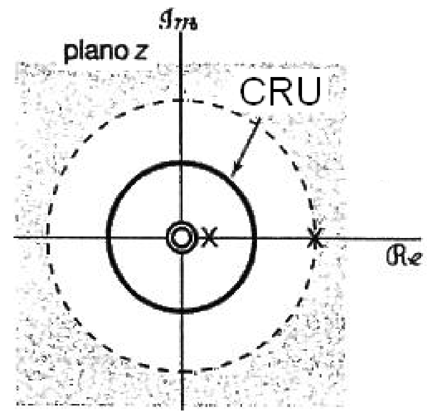
$$\Rightarrow X(+\infty) = x[0] < \infty$$

Ex. 10.8 Possíveis RDCs?

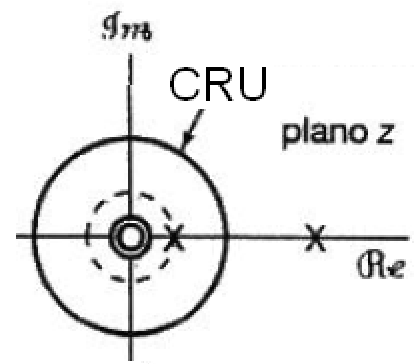
$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$=\frac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}$$

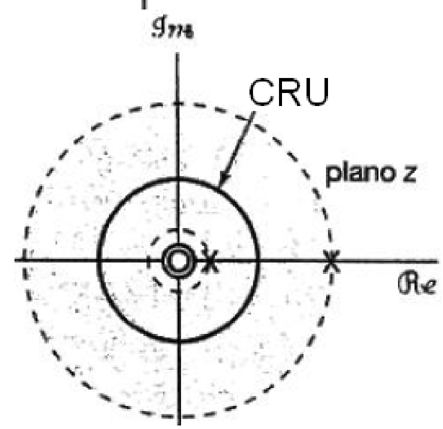




causal,



anticausal,



bilateral,

10.3 Transformada z inversa

$x[n]$: recuperado para um r fixo $\in$ RDC

Considerando

$$X(re^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\} \qquad e \quad z = e^{\sigma}\cdot e^{j\omega} = re^{j\omega} \quad (r \ fixo \in RDC)$$

Segue que

$$x[n]r^{-n} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \longrightarrow x[n] = r^{n}\underbrace{\mathfrak{F}^{-1}[X(re^{j\omega})]}$$

$$x[n] = r^{n}\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}\,d\omega,$$

r fixo e ω variando:

$$dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\,dz,}$$

$$d\omega = (1/j)z^{-1}dz.$$

Integral de contorno ao longo da circunferência $|z| = r$

Transformada z inversa

- Cálculo direto pode ser elaborado e não é usado no curso

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z) z^{n-1}\, dz,}$$

- Se $X(z)$ é racional → expandir em soma de termos de 1ª. ordem

$$X(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$

$\boxed{r > |a_i|}$ $\boxed{r < |a_i|}$

causal

$$x[n] = a^n u[n]$$

RDC

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

anticausal

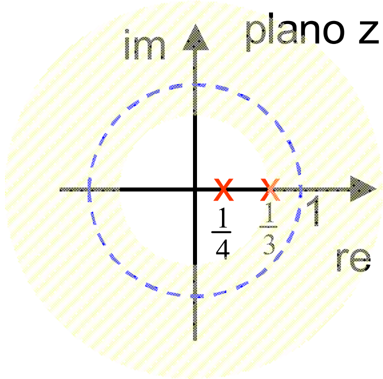
$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| < |a|$$

Ex. 10.9

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$\boxed{|z|>\frac{1}{3}}$



$$\equiv\frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$A_1=\left.\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=4} \rightarrow\cdots A_1=1$$

$$A_2=\left.\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=3} \rightarrow\cdots A_2=2$$

$x[n]=a^n u[n]$	RDC
$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

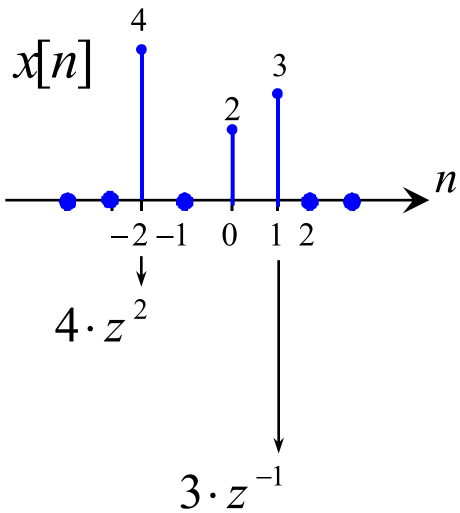
Veja também os exemplos 10.10 e 10.1

Transformada z inversa por frações parciais

Transformada inversa de séries de potência

(Ex. 10.12)

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

$$\equiv x[-2]\cdot z^{2} + x[0]\cdot z^{0} + x[1]\cdot z^{-1}$$

$$\boxed{X(z) = 4\cdot z^{2} + 2 + 3\cdot z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty}$$

Série temporal pode ser obtida por inspeção direta de uma série de potências em z

Simples e de grande utilidade

Divisão longa de polinômios

Exemplo:

$$\frac{x+7}{x+1}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x+7 & x+1 \\ \hline
-(x+1) & 1+6\cdot x^{-1}-6x^{-2}+6x^{-3}-6x^{-4}\cdots \\
\text{-----------------} & \\
6 & \\
\quad -(6+6x^{-1}) & \\
\quad \text{-----------------} & \\
\qquad -6x^{-1} & \\
\qquad -(-6x^{-1}-6x^{-2}) & \\
\qquad \text{-----------------} & \\
\qquad\qquad 6x^{-2} & \\
\qquad\qquad \cdots &
\end{array}$$

Verificação:

$$1+6x^{-1}-6x^{-2}+6x^{-3}-6x^{-4}+\ldots$$

Transformada inversa por divisão longa

Ex. 10.13

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

dividendo | divisor

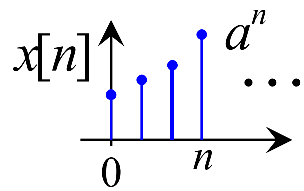
resto | quociente

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 - a\cdot z^{-1} \\ \hline 1 - a\cdot z^{1} & 1 + a\cdot z^{-1} + a^2\cdot z^{-2} + \cdots \\ \hline a\cdot z^{-1} & \\ a\cdot z^{-1} - a^2 z^{-2} & \\ \hline a^2\cdot z^{-2} & \\ \cdots & \end{array}$$

converge pois $|z| > a$

Logo $$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots$$

$$x[n] = \delta[n] + a\cdot\delta[n-1] + a^2\cdot\delta[n-2] + \cdots$$



$$x[n] = a^n \cdot u[n]$$

A série não convergiria se $|z| < a$ (sinal anticausal)

Transformada inversa por divisão longa

Ex. 10.13b

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & -a\cdot z^{-1} + 1 \\ \hline
1 - a^{-1}\cdot z & -a^{-1}\cdot z \; -a^{-2}\cdot z^{2} \; -a^{-3}\cdot z^{3} - \cdots \\
\text{----------------} & \\
\quad a^{-1}\cdot z & \\
\quad a^{-1}\cdot z - a^{-2}\cdot z^{2} & \\
\quad \text{----------------} & \\
\qquad a^{-2}\cdot z^{2} & \\
\qquad \cdots &
\end{array}$$

$$\text{converge pois } |z| < a$$

Logo $$\frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^{2} - \ldots$$

$$x[n] = -a^{-1}\delta[n+1] - a^{-2}\cdot\delta[n+1] + a^{-3}\cdot\delta[n-3] - \cdots$$

$$\boxed{x[n] = -a^{-n}u[-n-1]}$$

Veja Ex. 10.14 $X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$ Taylor e divisão longa $x[n] = \frac{-(-a)^{n}}{n}u[n-1]$

10.5 Propriedades da Transformada z

Se $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, com RDC $= R$

Deslocamento no tempo

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} \boxed{z^{-n_0}} X(z)$, com RDC = R, exceto pela possível adição ou exclusão da origem ou infinito.

n>0 → pólos em z = 0; n<0 → zeros em z = 0

Primeira diferença finita

$$x[n]-x[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X[z]-z^{-1}X[z]=(1-z^{-1})\cdot X[z]$$

deslocamento

Alguns exemplos. Veja tabela na pág. 461

Reflexão no tempo

Se $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$, com RDC $= R$

$$\boxed{x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\tfrac{1}{z}\right), \quad \text{com RDC } = \frac{1}{R}.}$$

Convolução no tempo

Se $\begin{cases} x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z), & \text{com RDC} = R_1 \\ x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z), & \text{com RDC} = R_2 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z), \\ \text{com RDC contendo R1} \cap \text{R2.} \end{array}}$$

10.5 Propriedades da Transformada z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Diferenciação em z

$$\frac{d}{dz} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\, x[n] \cdot z^{-n-1} \rightarrow \cdots$$

$$\boxed{nx[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{com RDC} = R.}$$

Ex. 10.17 $\boxed{X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|}$

$$\frac{d}{dz} X(z) = \frac{-az^{-2}}{(1+az^{-1})}$$

Sabe-se que:

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Com deslocamento no tempo:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a| \xleftrightarrow{z} nx[n] \quad a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$\boxed{x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]}$$

Diferenciação em z → frações parciais com multiplicidade de pólos

$$\boxed{nx[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{com RDC} = R.}$$

Ex. 10.18 $\boxed{X(z) = \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|}$ $x[n]$ = ?

Sabe-se que:

$$a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Assim

$$-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \boxed{na^n u[n]}$$

Seção	Propriedade	Sinal	Transformada z	RDC
		$x[n]$	$X(z)$	R
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
10.5.1	Linearidade	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Pelo menos, a intersecção de R_1 e R_2
10.5.2	Deslocamento no tempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, exceto pela possível adição ou exclusão da origem
10.5.3	Mudança de escala no domínio-z	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
		$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
		$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Versão com mudança de escala de R (ou seja, $\lvert a\rvert R =$ o conjunto de pontos $\{\lvert a\rvert z\}$ para z em R)
10.5.4	Reflexão no tempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertido (ou seja, $R^{-1} =$ o conjunto de pontos z^{-1}, sendo que z está em R)
10.5.5	Expansão no tempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algum inteiro r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (ou seja, o conjunto de pontos $z^{1/k}$, sendo que z está em R)
10.5.6	Conjugação	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	Convolução	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Pelo menos, a intersecção de R_1 e R_2
10.5.7	Primeira diferença	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Pelo menos, a intersecção de R e $\lvert z\rvert > 0$
10.5.7	Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Pelo menos, a intersecção de R e $\lvert z\rvert > 1$
10.5.8	Diferenciação no domínio-z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9	Teorema do valor inicial Se $x[n] = 0$ para $n < 0$, então $x[0] = \lim X(z)$			

Propriedades da Transformada z

Ver pág. 461

Teorema do valor inicial

$$\boxed{x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

$$x[n] = 0,\ n < 0$$

Prova

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\ x[0] + x[1]\cdot z^{-1} + \cdots$$

Teorema do valor final

$$\boxed{x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot X(z)}$$

$$x[n] = 0,\ n < 0$$

Prova segue de:

$$\lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}\{x[n+1] - x[n]\} =$$

$$\lim_{z\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\{x[n+1] - x[n])\}\cdot z^{-n} = \cdots$$

10.7 – Análise e caracterização de SLITs

Considerando o SLIT
com eq as diferenças

$$x[n] \rightarrow \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(z) \end{matrix}} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = -2y[n-2] - 3y[n-1] + x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$\downarrow$$

$$2y[n-2] + 3y[n-1] + y[n] = x[n-2] + 2x[n-1] + x[n]$$

$$\updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad x[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-n} X(z)$$

$$2z^{-2}Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + Y(z) = z^{-2}X(z) + 2z^{-1}X(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{2z^{-2} + 3z^{-1} + 1} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^i},$$

Função de transferência de H(z)

Causalidade de um SLIT

Para um sistema LTI causal: $h[n] = 0$ para $n < 0$ e, portanto, é lateral direito

1. A RDC associada à função de transferência de um sistema LTI causal é o exterior de uma circunferência.
2. Para $H(z)$ racional, a causalidade é equivalente a: RDC = exterior de um circulo incluindo o infinito.

Causalidade de um SLIT

Divisão longa

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^i}=c_1 z^{M-N}+c_2 z^{M-N-1}+c_2 z^{M-N-2}+\dots.$$

$$\Rightarrow h[n]=c_1\delta[n+M-N]+c_2\delta[n+M-N-1]+c3\delta[n+M-N-2]+\dots$$

H(z) é causal somente se N>=M 

(mas preciso que RCD seja |z|>polo externo)

Estabilidade de um SLIT

1. Sistema LTI é estável se, e somente se,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

2. $h[n]$ é absolutamente somável $\exists \Longrightarrow$ DTFT

3. Como ZT = DTFT se $z = e^{j\omega}$:

$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega}).$$

$\Longrightarrow RDC_H \supset |z| = 1$, circunferência unitária.

- Um sistema LTI é estável se, e somente se, a RDC de sua função de transferência $H(z)$ incluir $|z| = 1$, circunferência unitária.

Estabilidade + causalidade de um SLIT

1. Um sistema LTI é estável se, e somente se, a RDC de sua $H(z) \supset |z| = 1$.
2. Para $H(z)$ racional, a causalidade é equivalente a: RDC = exterior de um circulo incluindo o infinito.

- Portanto, um sistema LTI causal é estável se, e somente se, todos os pólos de sua função de transferência $H(z)$ tiverem magnitude menor que 1.

10.7 – Análise e caracterização de SLITs

Ex. 1

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z}{1-2z+z^2}=\frac{z^{-2}+z^{-1}}{z^{-2}-2z^{-1}+1}$$

RDC = ? Estável?

$$z^{-2}\cdot Y(z)-z^{-1}\cdot 2\cdot Y(z)+Y(z)=z^{-2}\cdot X(z)+z^{-1}\cdot X(z)$$

$$\updownarrow z$$

$$y[n-2]-2y[n-1]+y[n]=x[n-2]+x[n-1]$$

(causal)

atenção! 

Ex. 2

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z+z^2}{0.8+z}=\frac{\boxed{z^{-1}}+1+z}{0.8\boxed{z^{-1}}+1}$$

RDC = ? Estável?

$$0.8z^{-1}\cdot Y(z)+Y(z)=z^{-1}\cdot X(z)+X(z)+z\cdot X(z)$$

$$\updownarrow z$$

$$0.8y[n-1]+y[n]=x[n-1]+x[n]+x[n+1]$$

(não causal)

Ex. 10.20

$$H(z)=\frac{z^3-3z^2+z}{z^2+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}}.$$

Causal? Estável?

Ex 10.35 $H(z)=\dfrac{z^2}{z-a}$ $|z|>|a|$

Lateral direito

Não causal:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{1-az^{-1}} \overset{Z}{\longleftrightarrow} y[n]-ay[n-1]=x[n+1]$$

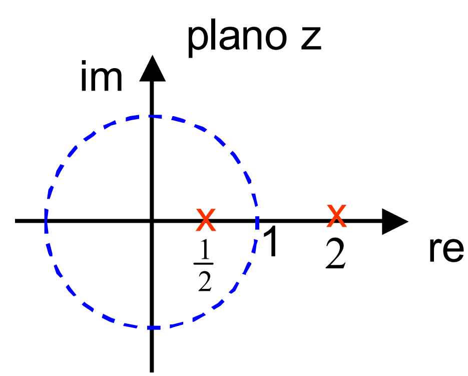
Ex. 10.35

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z|>2$$

$$=\frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

Lateral direito/esquerdo?

Causal? Estável?

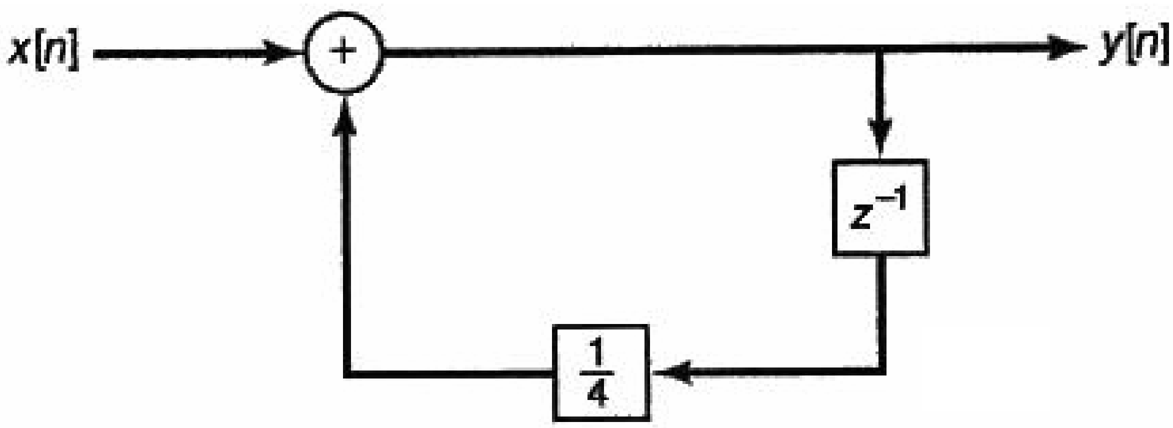


Estabilidade e causalidade em funções de transferência racionais

10.8 Diagrama de blocos

Sistema de 1ª. ordem

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$



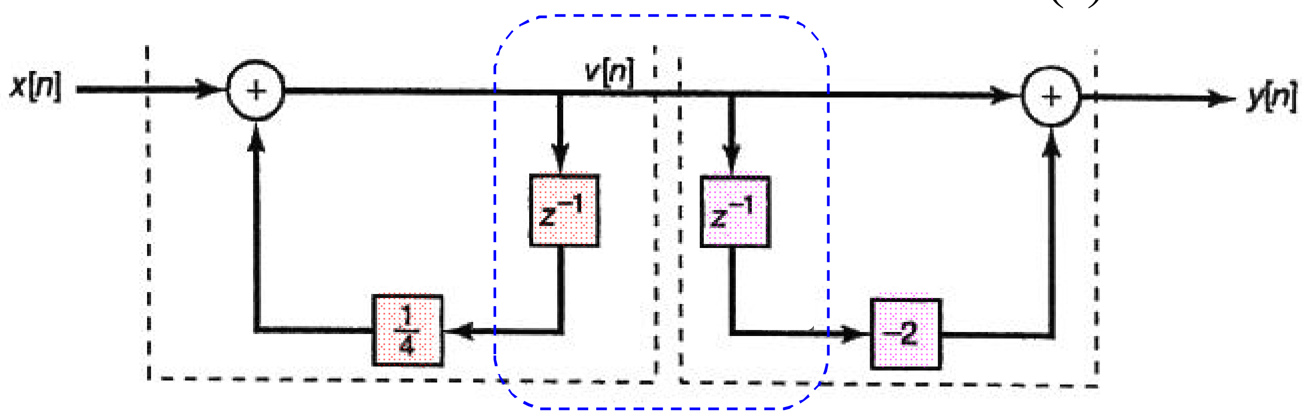
Forma direta – só pólo

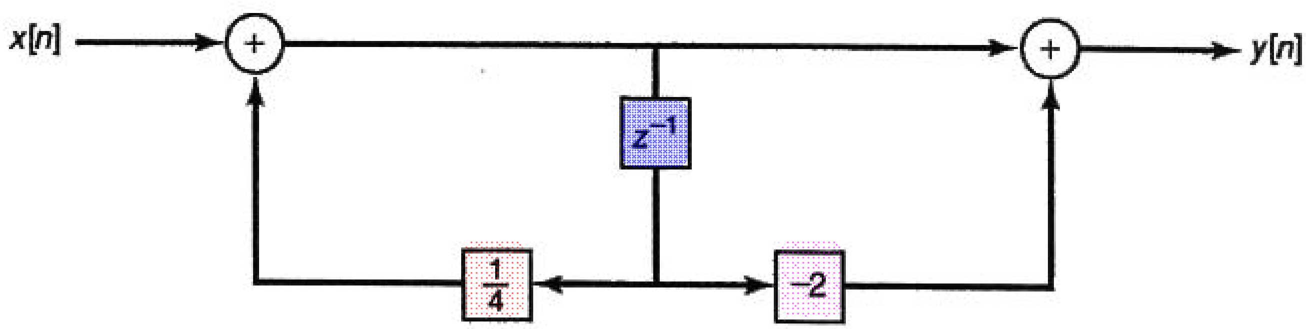
Sistema de 1ª. ordem

em cascata

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1-2z^{-1})$$

$$=\frac{V(z)}{X(z)}\times\frac{Y(z)}{V(z)}$$





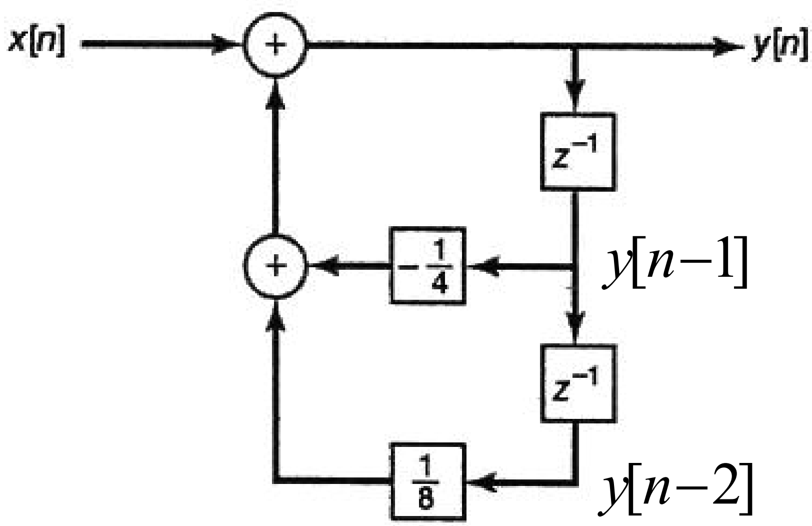
Forma direta – pólo e zero

Sistema de 2ª. ordem

$$H(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}, = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\overset{z}{\longleftrightarrow} \quad y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n].$$

$$y[n] = x[n] - \tfrac{1}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2]$$



Forma direta

Sistema de 2ª. ordem

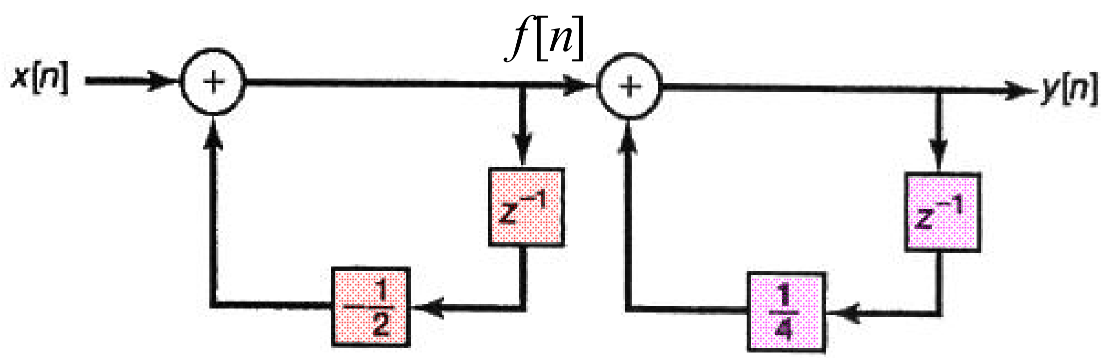
em cascata

$$H(z)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{F(z)}{X(z)}\times\frac{Y(z)}{F(z)}$$

$$\boxed{f[n]=x[n]-\tfrac{1}{2}x[n-1]}$$

$$\boxed{y[n]=f[n]+\tfrac{1}{4}y[n-1]}$$



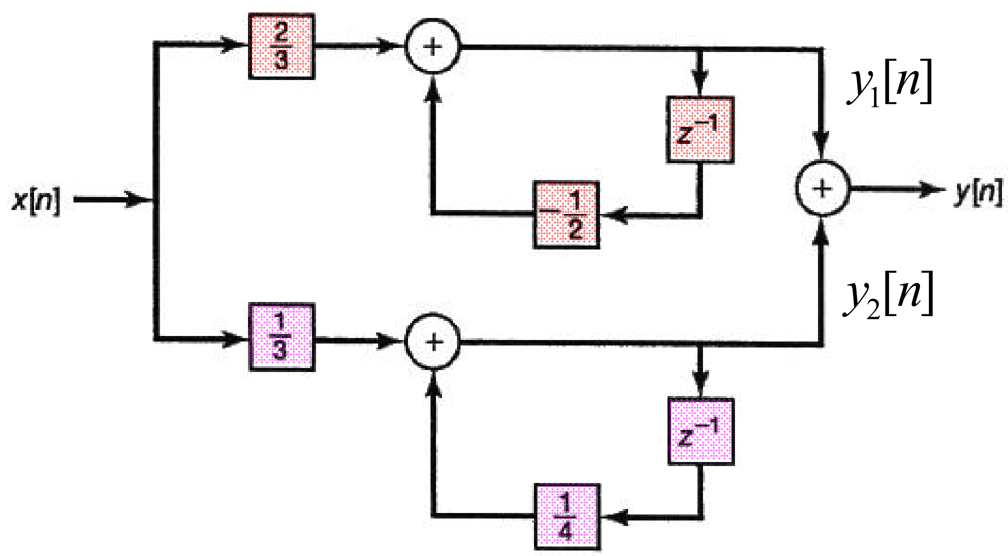
Forma “em cascata”

Sistema de 2ª. ordem

$$H(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$= \frac{Y_1(z)}{X(z)} + \frac{Y_2(z)}{X(z)}$$

$$\boxed{y_1[n] = \tfrac{2}{3}x[n] - \tfrac{1}{2}y_1[n-1]} \qquad \boxed{y_2[n] = \tfrac{1}{3}x[n] + \tfrac{1}{4}y_2[n-1]}$$



Forma "em paralelo"

Diagramas de blocos em tempo discreto

- Veja Ex. 10.31 (2ª. ordem com pólos e zeros)
- Precisão numérica dos cálculos: na prática, há diferença no comportamento entre as diversas configurações

10.9 – Transformada Z unilateral $\mathcal{UZ}$

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Útil para estudo de sistemas causais especificados por equações a diferenças finitas
- Sinais laterais direitos → RDC é sempre o exterior de uma circunferência
- Semelhanças e diferenças em relação à transformada bilateral
- Convolução só se aplica se os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ forem nulos para $n < 0$
- Deslocamentos no tempo: há diferenças para sistemas com condições iniciais não-nulas (ver. pag. 474)

Propriedade	Sinal	Transformada z unilateral
—	$x[n]$	$\mathcal{X}(z)$
—	$x_1[n]$	$\mathcal{X}_1(z)$
—	$x_2[n]$	$\mathcal{X}_2(z)$
Linearidade	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\mathcal{X}_1(z) + b\mathcal{X}_2(z)$
Atraso no tempo	$x[n-1]$	$z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$
Avanço no tempo	$x[n+1]$	$z\mathcal{X}(z) - zx[0]$
Mudança de escala no domínio z	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$\mathcal{X}(e^{-j\omega_0} z)$
	$z_0^n x[n]$	$\mathcal{X}(z/z_0)$
	$a^n x[n]$	$\mathcal{X}(a^{-1}z)$
Expansão no tempo	$x_k[n] = \begin{cases} x[m], & n = mk \\ 0, & n \neq mk \quad \text{para qualquer } m \end{cases}$	$\mathcal{X}(z^k)$
Conjugação	$x^*[n]$	$\mathcal{X}^*(z^*)$
Convolução (supondo que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulas para $n < 0$)	$x_1[n] * x_2[n]$	$\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$
Primeira diferença	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})\mathcal{X}(z) - x[-1]$
Acumulação	$\sum_{k=0}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\mathcal{X}(z)$
Diferenciação no domínio z	$nx[n]$	$-z\frac{d\mathcal{X}(z)}{dz}$

Teorema do valor inicial

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} \mathcal{X}(z)$$

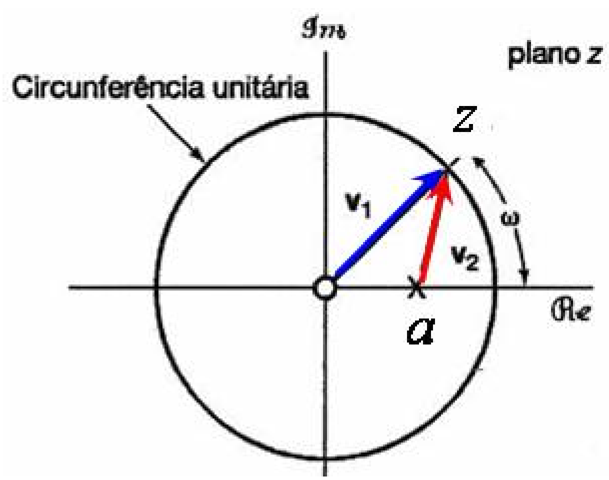
Propriedades da Transformada z unilateral (p. 473)

10.4 Cálculo geométrico de $H(z = e^{j\omega})$

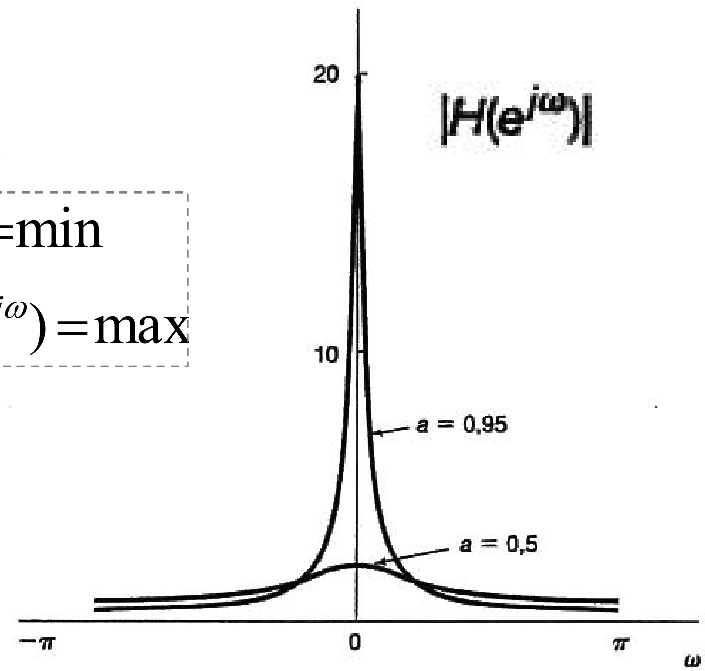
Sistema de 1.a ordem

$$h[n] = a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{\overbrace{\boxed{z}}^{\mathbf{v}_1 = z}}{\underbrace{\boxed{z - a}}_{\mathbf{v}_2}}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z)\Big|_{z = e^{j\omega}} = \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2}$$



$$\mathbf{v}_2 = \min$$
$$\rightarrow |H(e^{j\omega})| = \max$$



Transformada de Fourier ($z = e^{j\omega}$) a partir de pólos e zeros

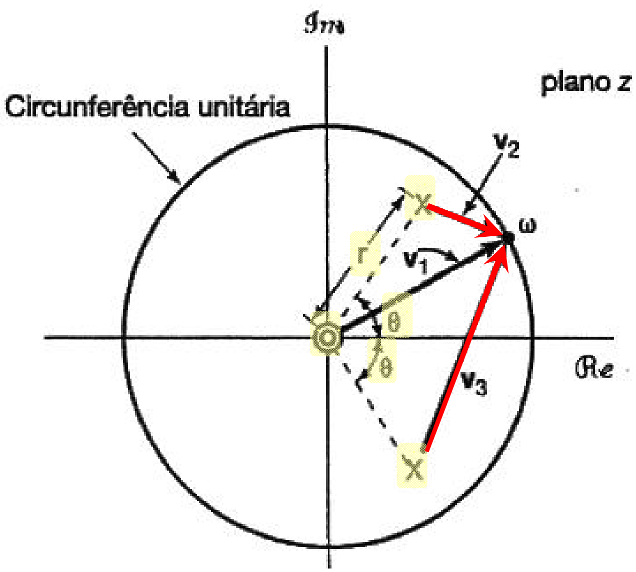
Sistema de 2.a ordem (cap. 6)

$$H(z)=\frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

faça...

$$\mathbf{v}_1 = z$$

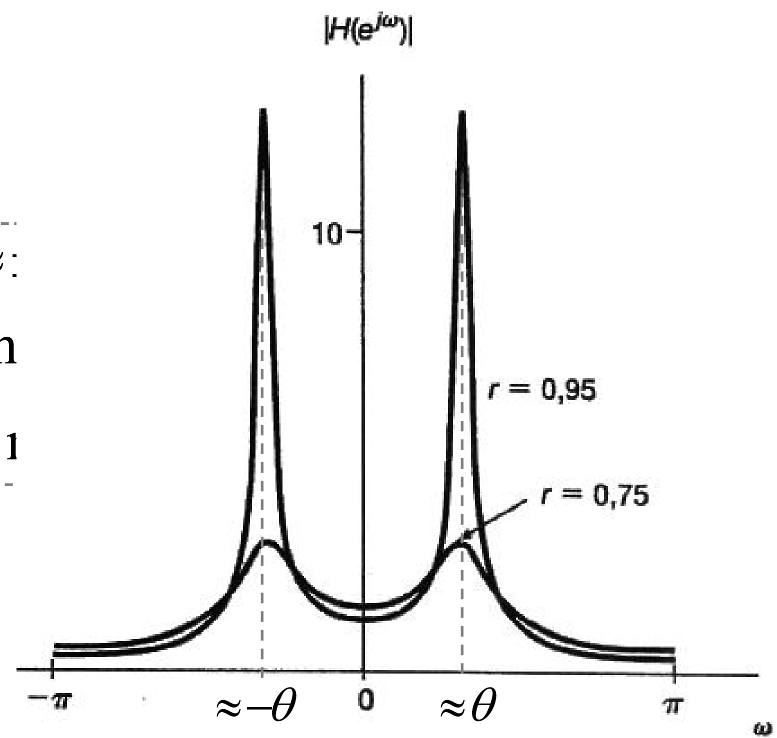
$$\cdots = \frac{z^2}{\underbrace{[z-(r\cdot e^{j\theta})]}_{\mathbf{v}_2}\cdot\underbrace{[z-(r\cdot e^{-j\theta})]}_{\mathbf{v}_3}}$$



$em \quad \omega \approx$:

$|\mathbf{v}_2|\cdot|\mathbf{v}_2|=$m

$\rightarrow |H(e^{j\omega})=$1



Transformada de Fourier a parte de pólos e zeros no plano z

Equações a diferenças c/ transformada z unilateral

- Resposta à entrada nula e ao estado nulo

Ex. 10.36-37

$$x[n] \to \boxed{\text{SLIT}} \to \quad y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$

$$x[n] = \alpha u[n]$$

$$\boxed{y[-1] = \beta}$$

$$\mathcal{X}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}} \qquad \mathcal{Y}(z) + 3\{z^{-1}\mathcal{Y}(z) + y[-1]\} = \mathcal{X}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}}$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}.$$

→ entrada nula → estado (inicial) nulo

Exercícios sugeridos

- 10.21, 10.23, 10.24, 10.25, 10.28, 10.29, 10.30, 10.33, 10.34, 10.35, 10.36, 10.38, 10.39, 10.42,
- 10.2, 10.4, 10.5, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.16, 10.18, 10.20