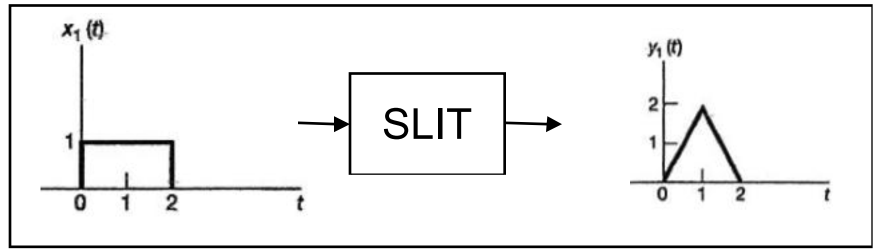
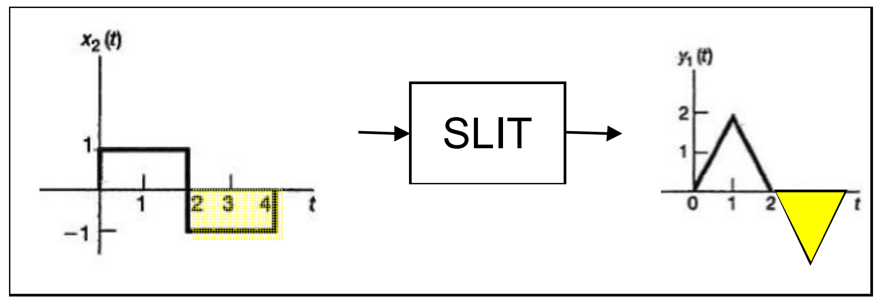
Modulo 02
Sistemas LTI e Convolução

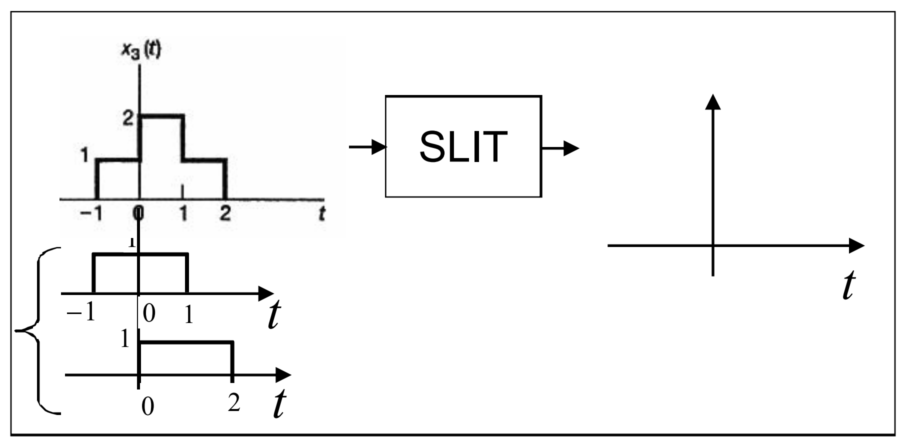
Sistema linear invariante no tempo (SLIT)

Propriedade da superposição

- Conhecendo-se a resposta de um SLIT a uma entrada *x(t)*, pode-se prever a resposta a outras entradas formadas por combinações lineares de *x(t)*

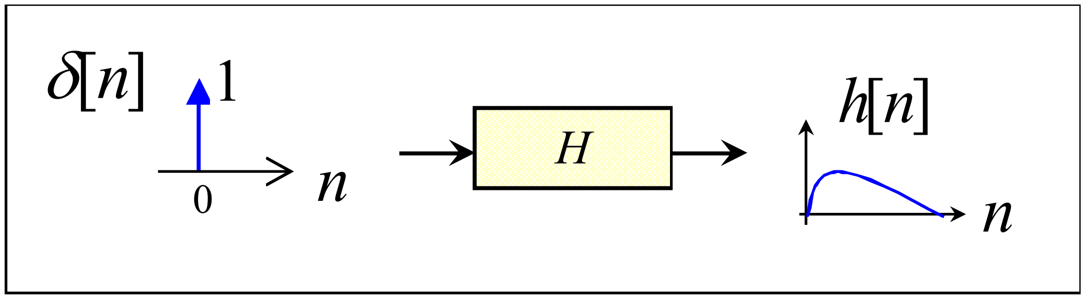






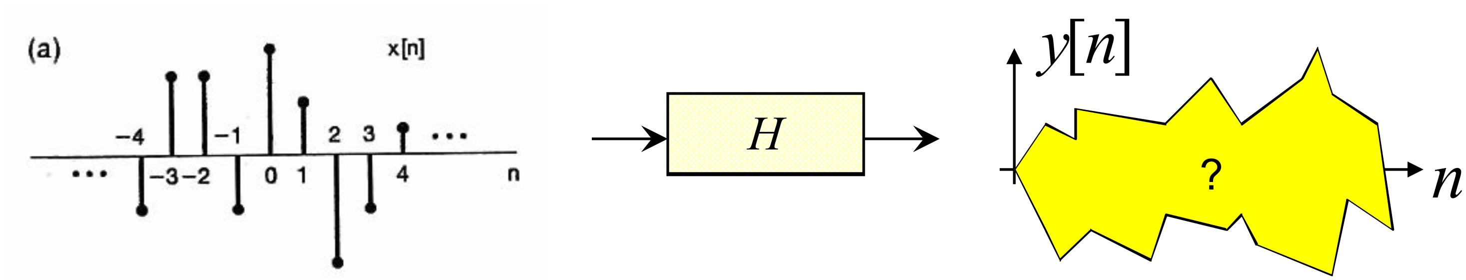
Problema 1.31

2.1 Resposta ao impulso unitário



impulso → Sistema → resposta ao impulso

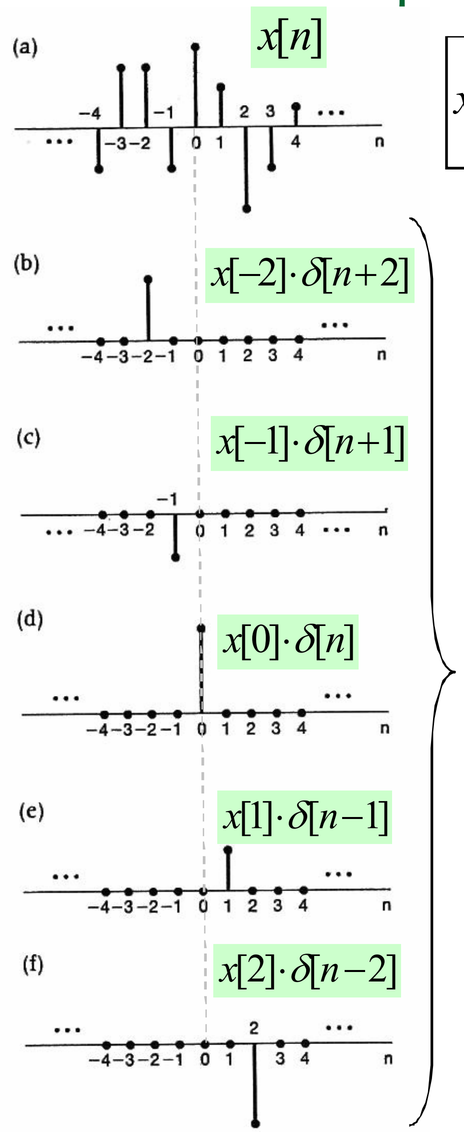
- Para uma entrada $x[n]$ qualquer:



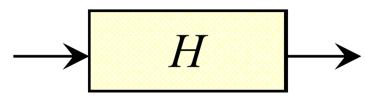
Superposição de impulsos deslocados

combinação linear de respostas a impulsos

Entradas quaisquer

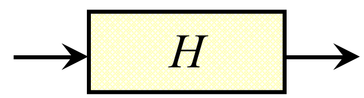


$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\delta[n-k]$$

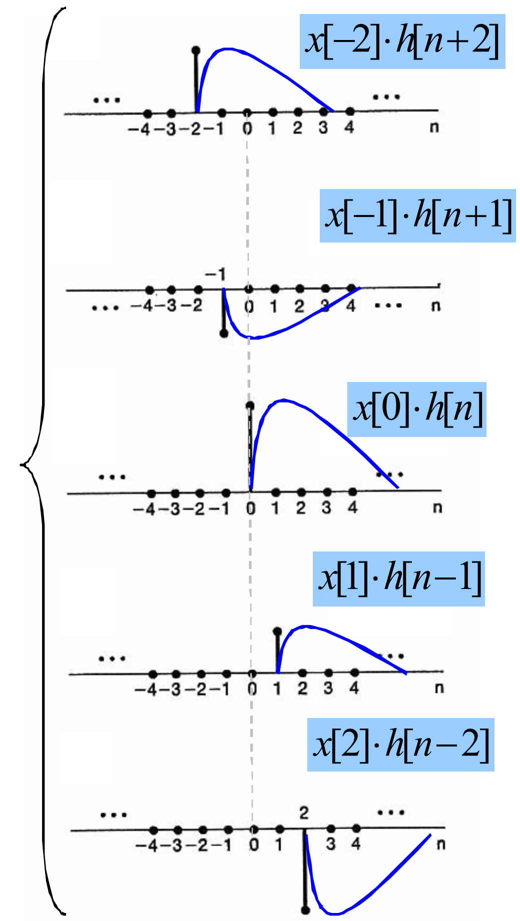


Soma de convolução

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

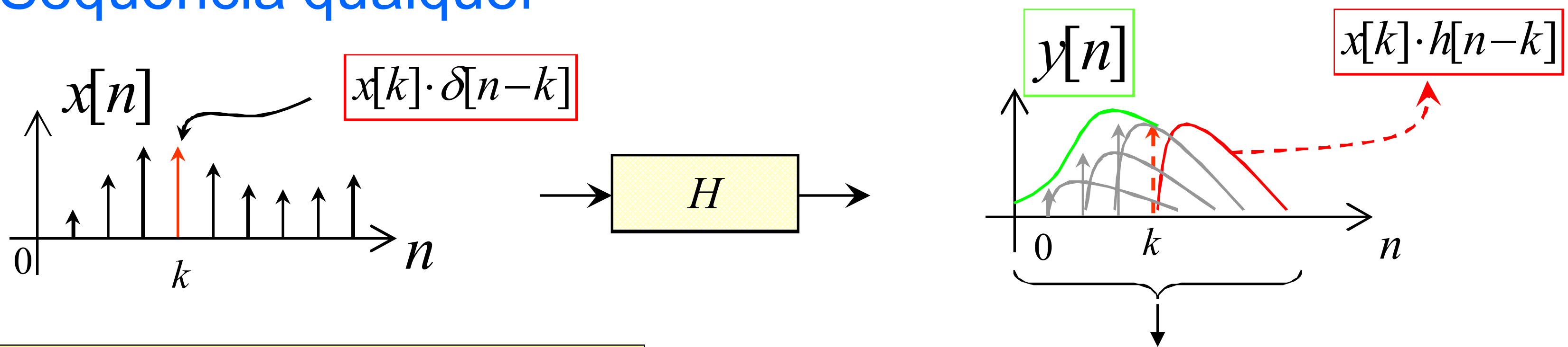


Linear e invariante no tempo



Soma de convolução

Seqüência qualquer



Conhecendo-se a resposta ao impulso e a entrada, é possível prever a saída → Superposição de respostas a impulsos ponderadas

soma de convolução: $$\boxed{y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k] \equiv x[n]*h[n]}$$

$$Se\ \ n-k=u \rightarrow k=n-u,\ então$$

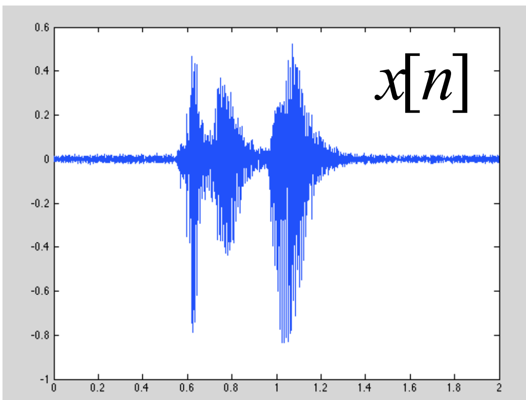
$$\boxed{y[n]=\sum_{u=-\infty}^{\infty}h[u]\cdot x[n-u] \equiv x[n]*h[n]}$$

(comutatividade)

Ex.: simulação de ambientes acústicos

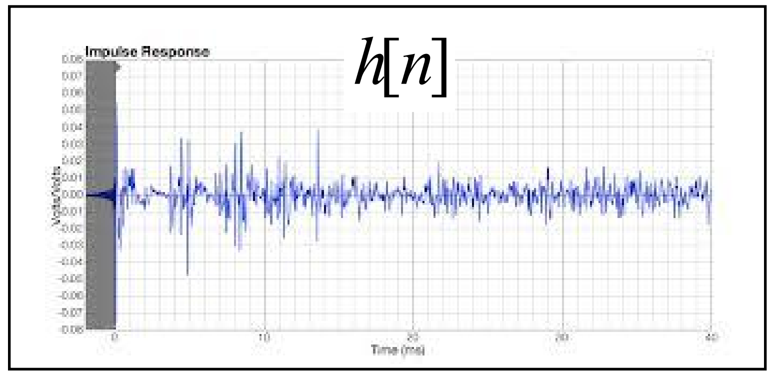
Gravação feita num estúdio pode ser processada *a posteriori* pela resposta impulsiva de uma sala de concerto

Estúdio



$\Rightarrow$

Sala de concerto

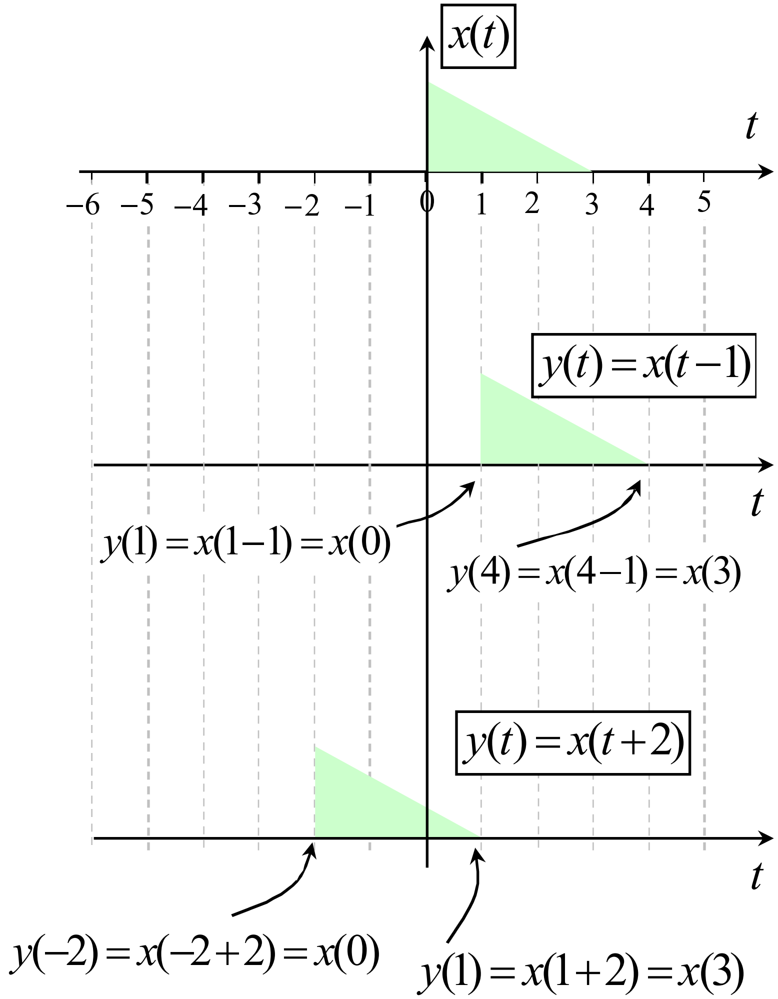


$\Rightarrow$ $y[n]$

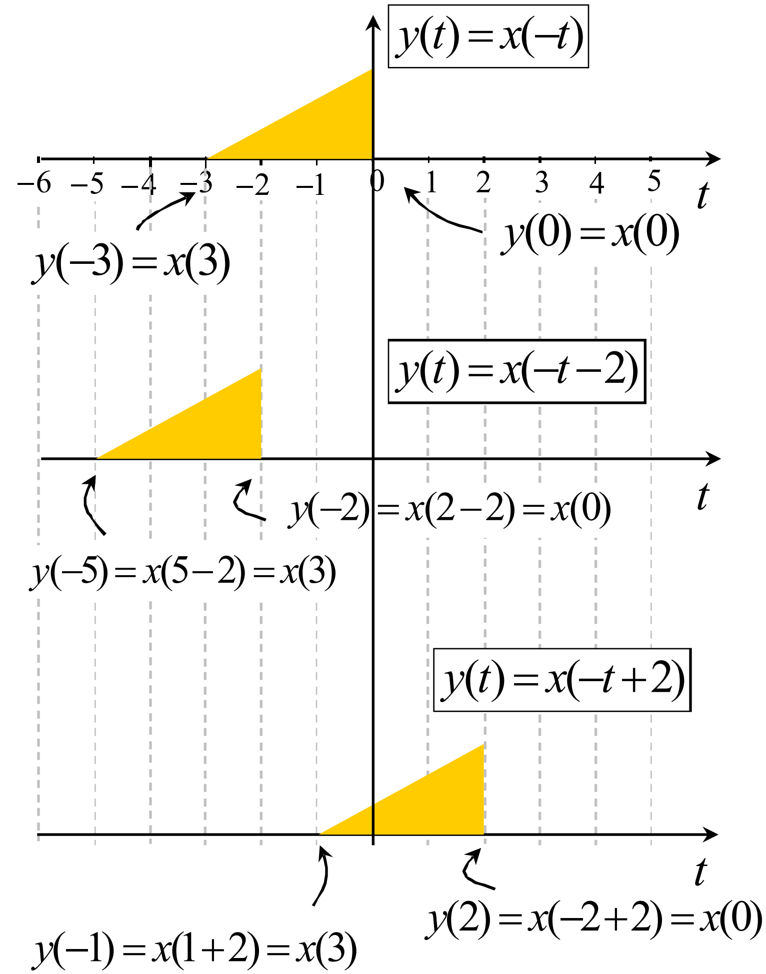
microfone

$h[n]$

Deslocamento de sinais



$$x(t-t_0)\begin{cases} t_0>0 \rightarrow \ \ \textit{desloca p/ direita} \\ t_0<0 \rightarrow \textit{desloca p/ esquerda} \end{cases}$$



$$x(-t-t_0)\begin{cases} t_0<0 \rightarrow \ \ \textit{desloca p/ direita} \\ t_0>0 \rightarrow \textit{desloca p/ esquerda} \end{cases}$$

Ex. 2.1

Dados $h[n]$ (resposta impulsiva)

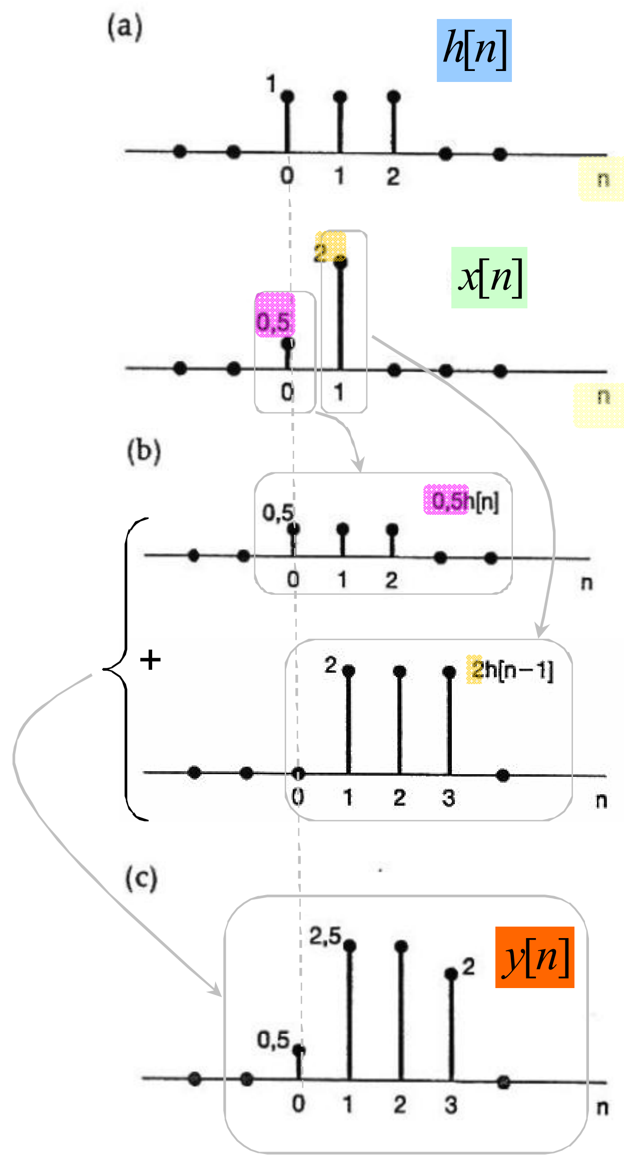
e a entrada $x[n]$,

determinar a saída $y[n]$

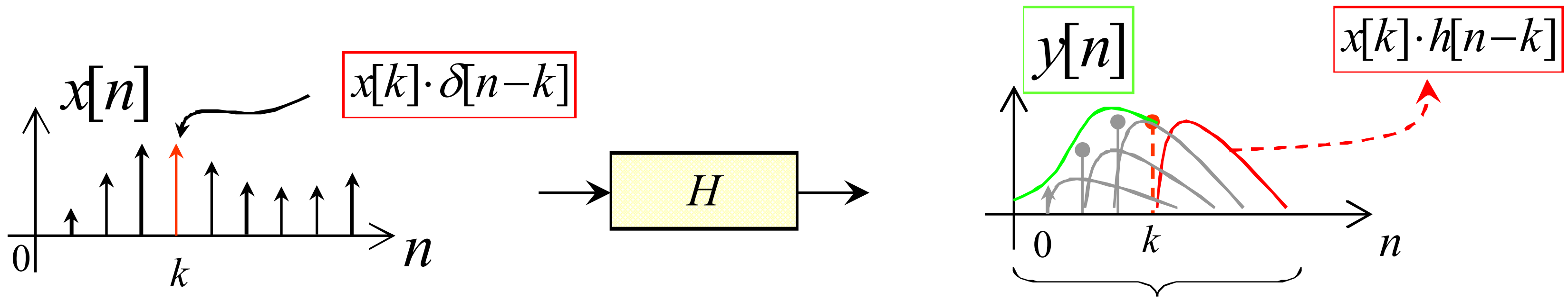
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overbrace{x[k] \cdot h[n-k]}^{\text{Resposta } h[\text{n}] \text{ deslocada de } k \text{ e ponderada por } x[k]} =$$

$$= \underbrace{x[0] \cdot h[n-0]}_{k=0} + \underbrace{x[1] \cdot h[n-1]}_{k=1}$$

$$= 0{,}5 \cdot h[n] + 2 \cdot h[n-1]$$



Reinterpretando a soma de convolução



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot \underbrace{h[n-k]} \equiv x[n]*h[n]$$

sinal refletido e deslocado
n amostras no eixo auxiliar k

$x[n]*h[n]$

No eixo k, traçar: $x[k]$ e $h\,[-k]$

Deslocar $h\,[-k]$ n amostras $\Rightarrow$ $h\,[n\text{-}k]$

Para cada n, calcular o somatório do produto dos sinais

Esta é uma forma mais conveniente de visualizar a convolução

Exemplo *(Livro Haykin, Ex. 2.1)*

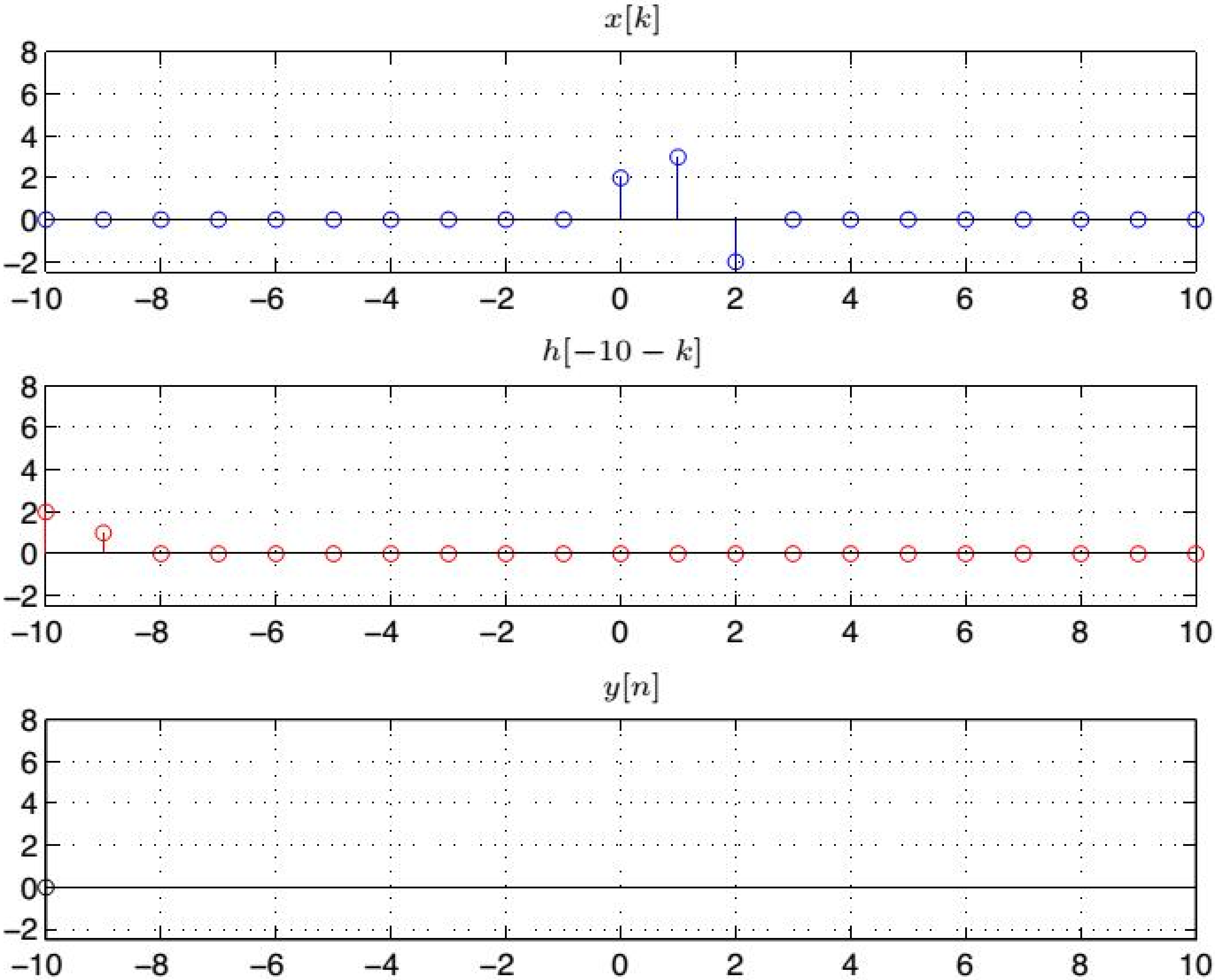
Considere que o sistema LIT $\mathbf{H}$ tem a seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

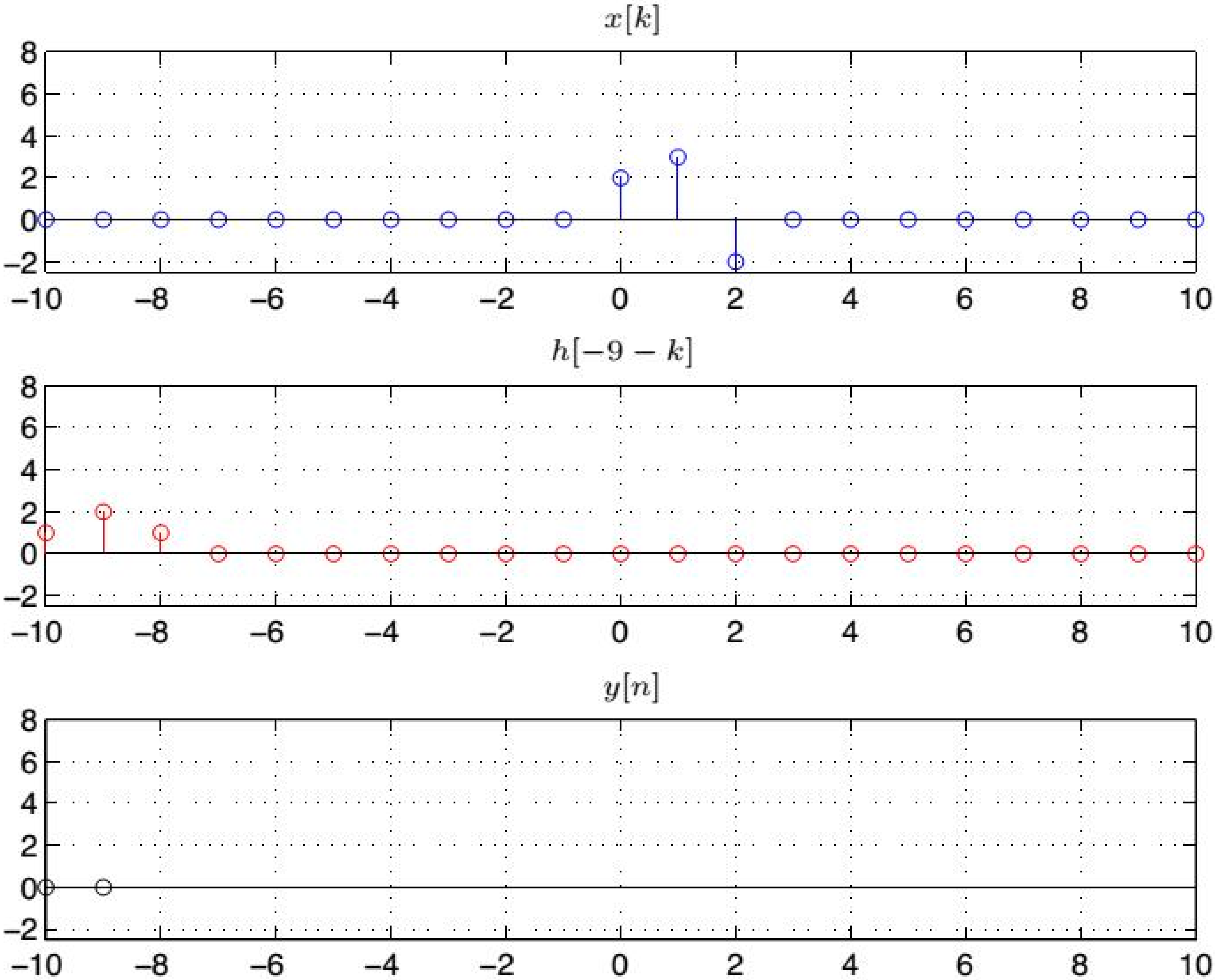
Determine a saída deste sistema em resposta à entrada

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ -2, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

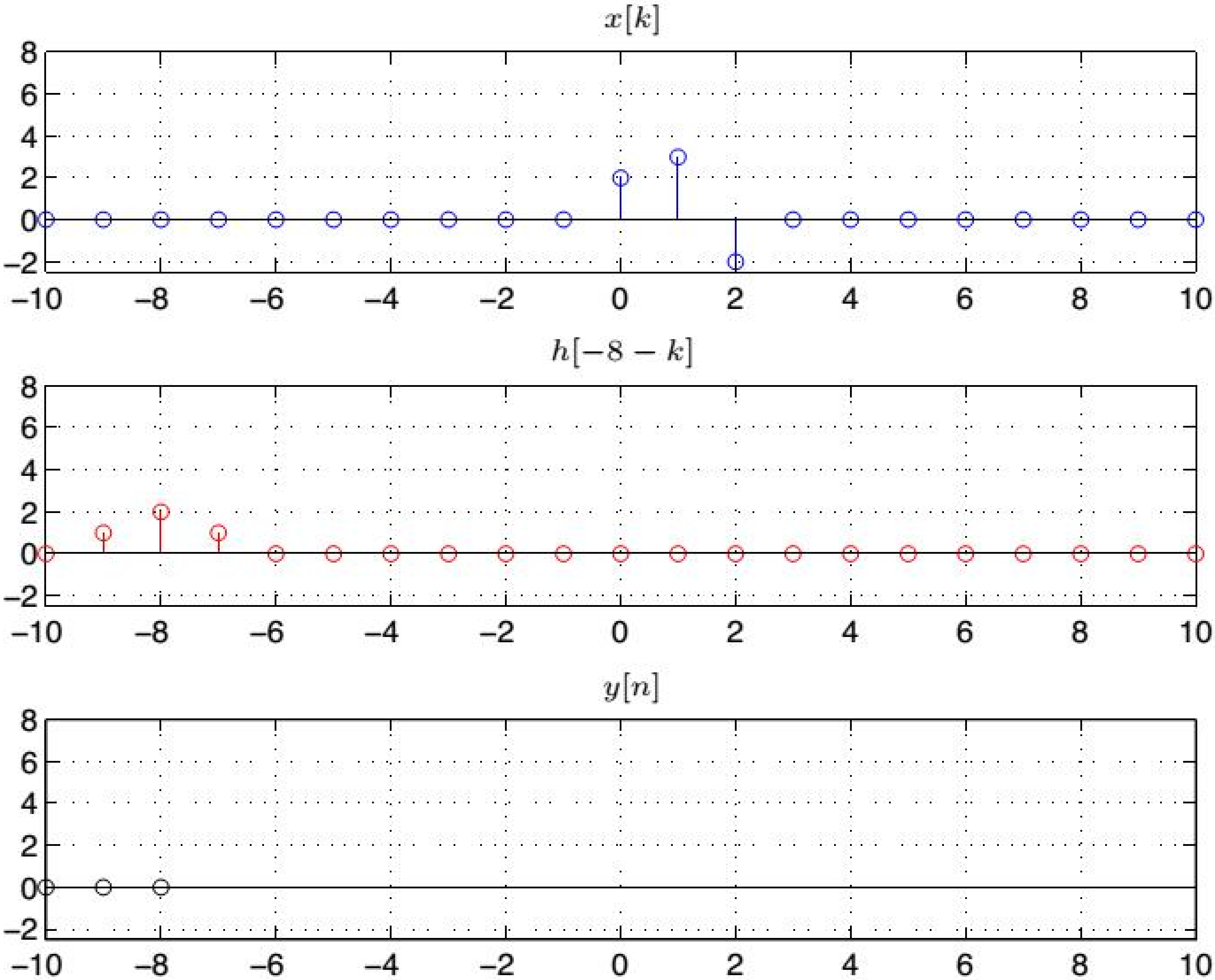
Exemplo solução 3: $y[-10] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-10-k]$



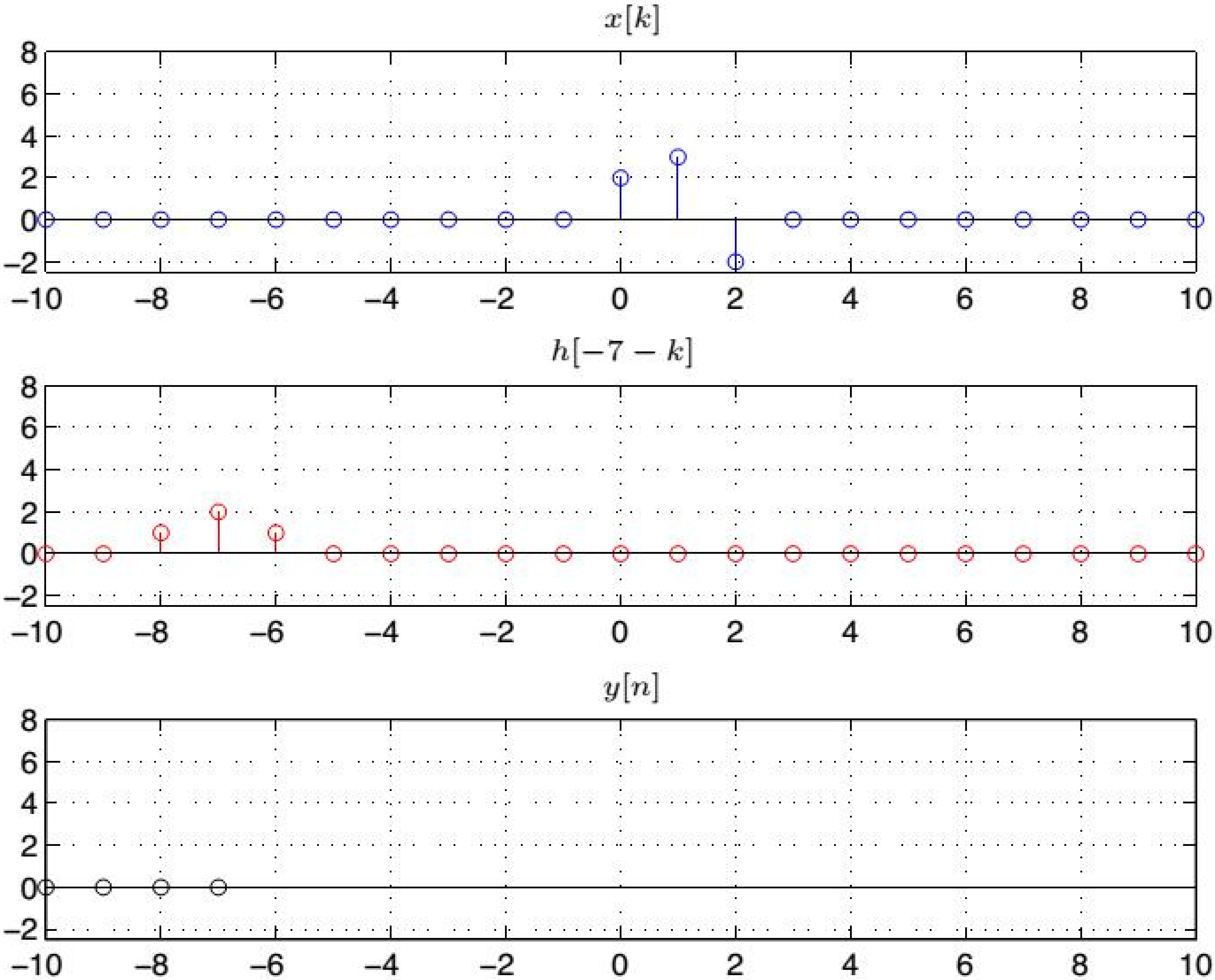
Exemplo solução 3: $y[-9] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-9-k]$



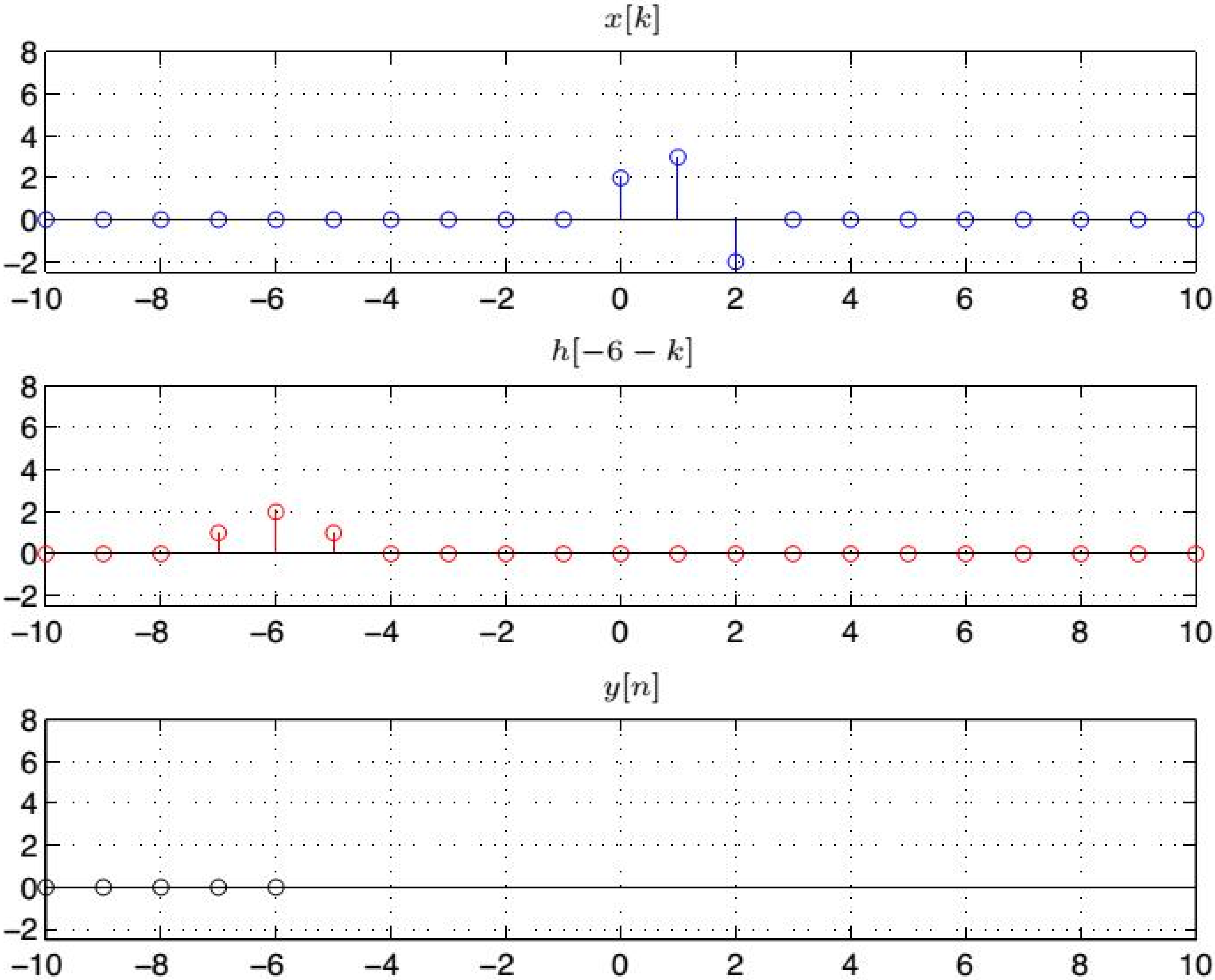
Exemplo solução 3: $y[-8] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-8-k]$



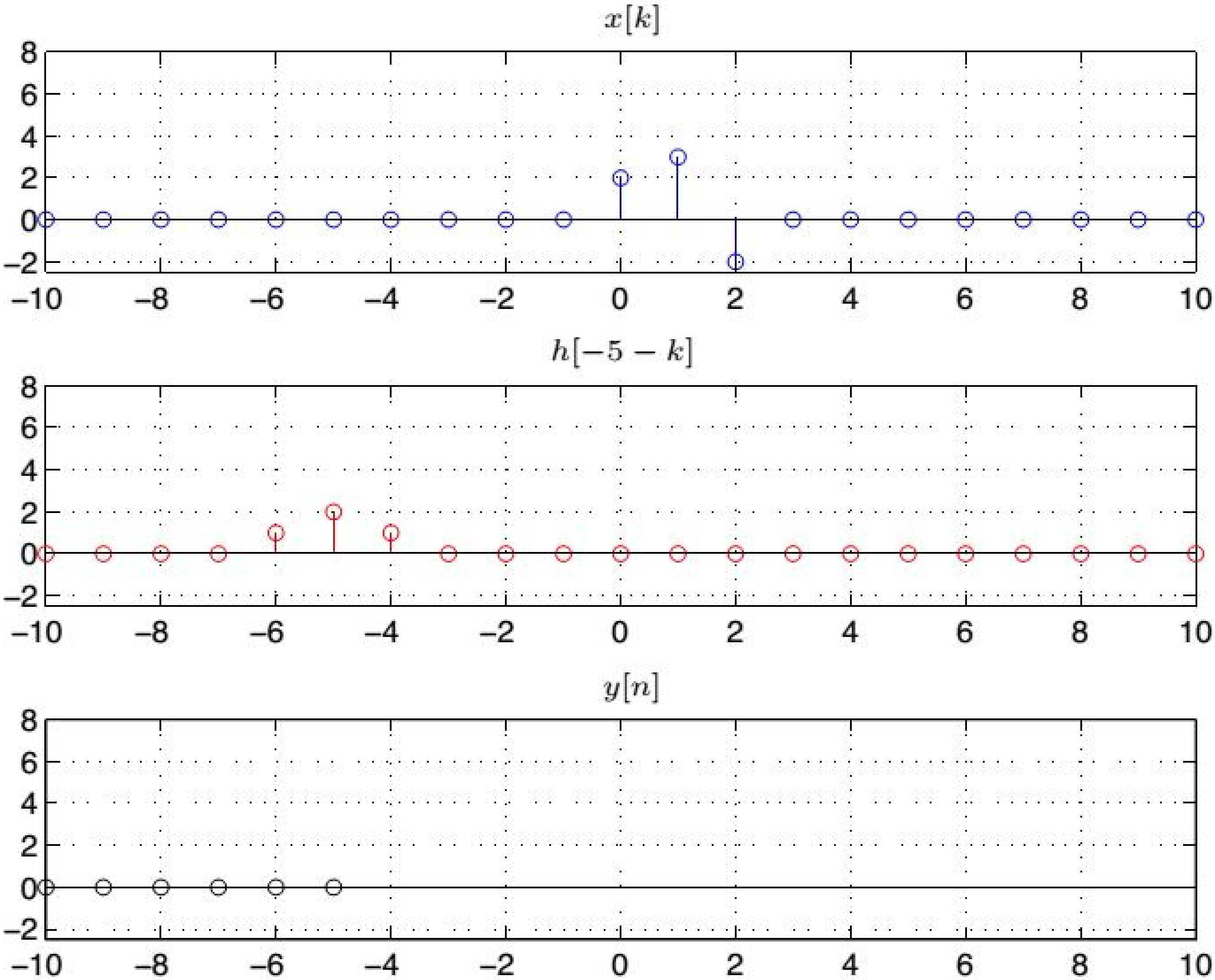
Exemplo solução 3: $y[-7] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-7-k]$



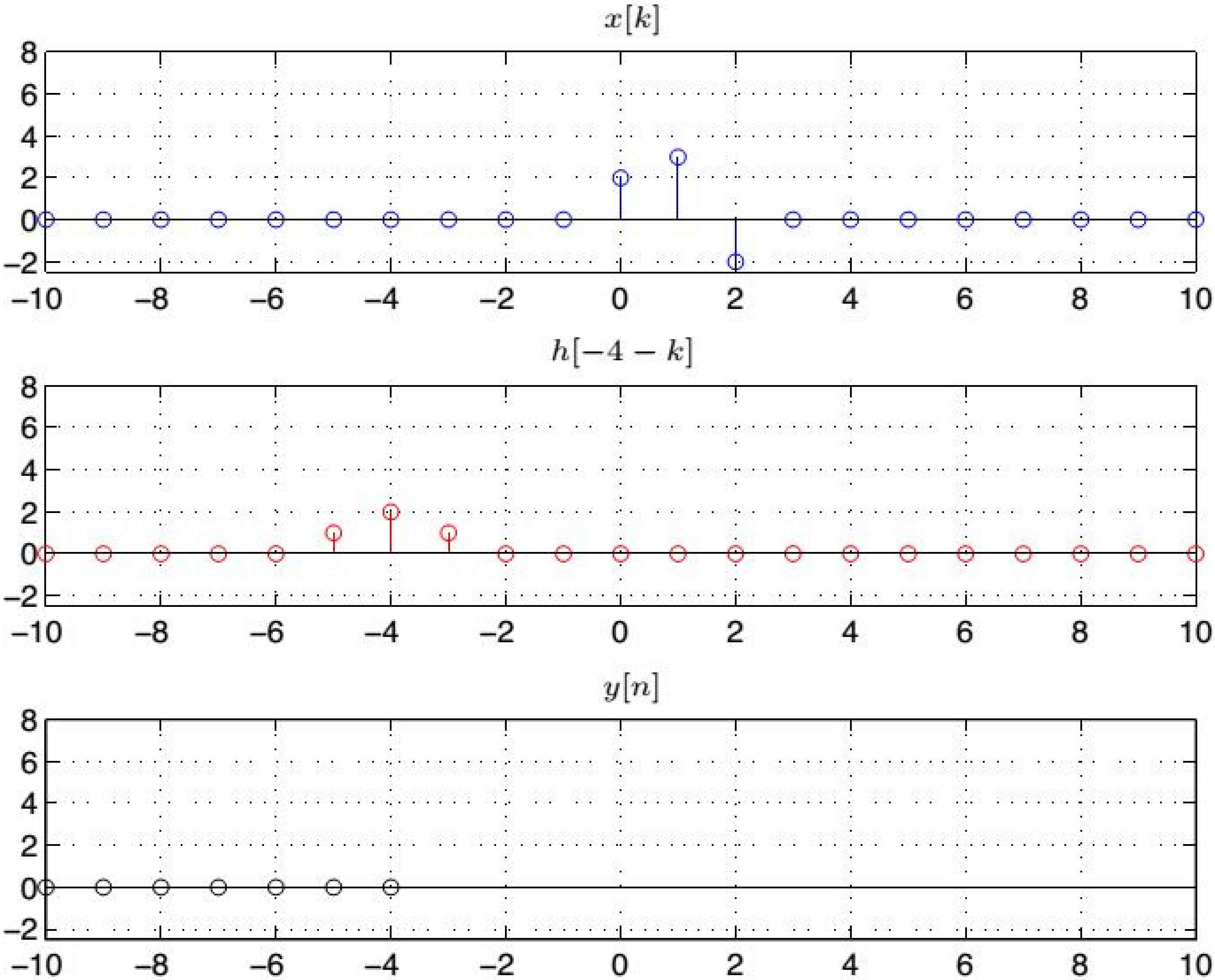
Exemplo solução 3: $y[-6] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-6-k]$



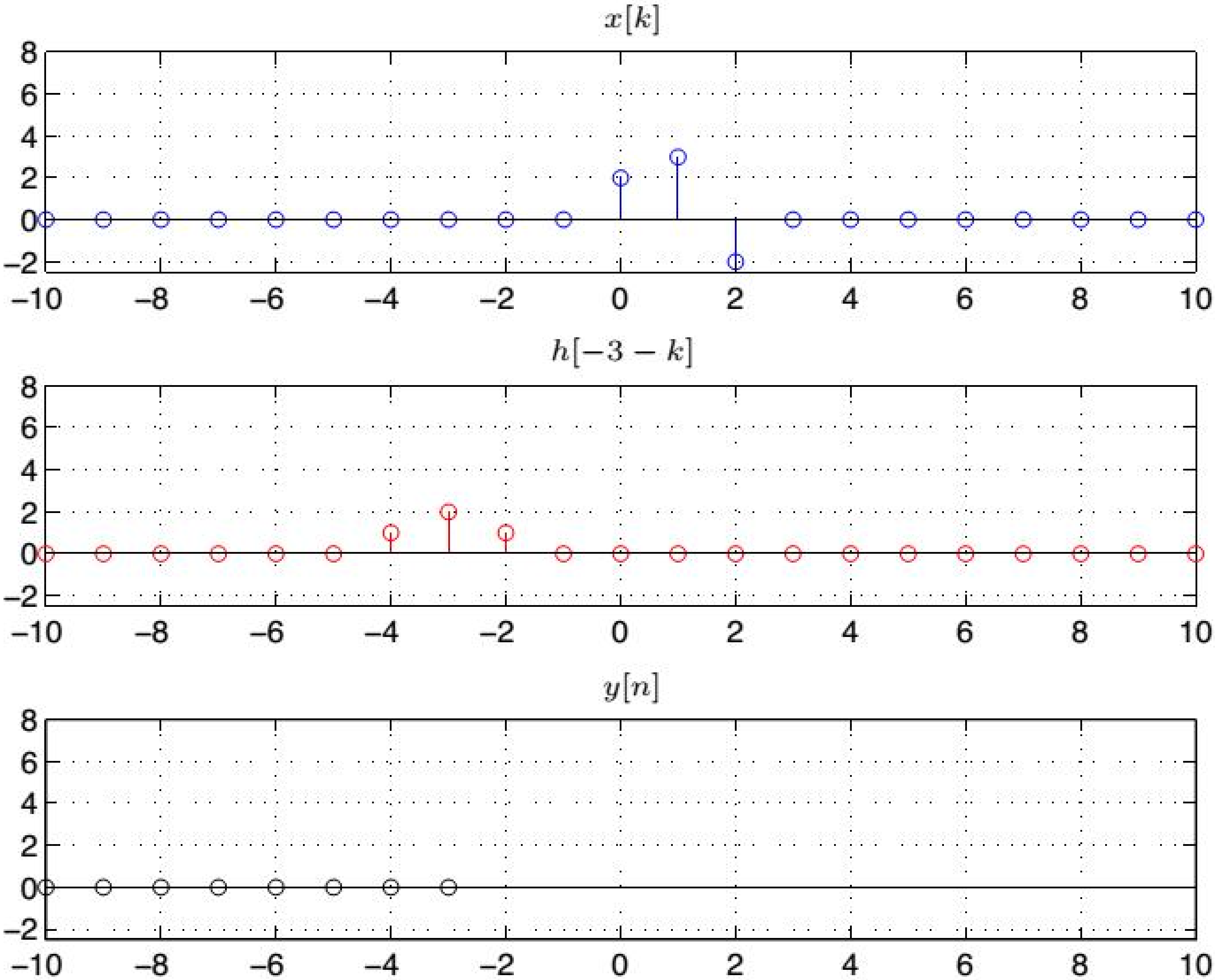
Exemplo solução 3: $y[-5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-5-k]$



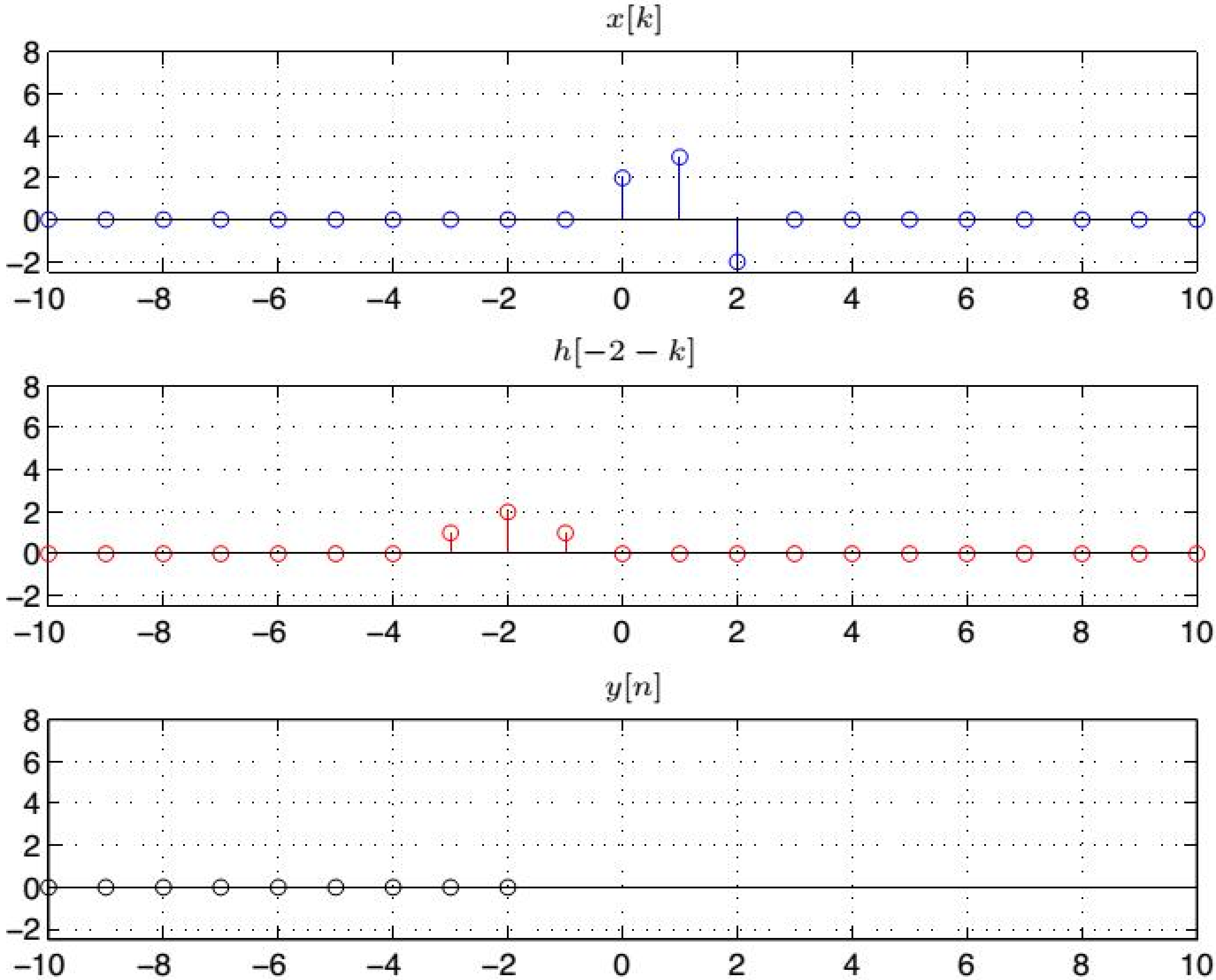
Exemplo solução 3: $y[-4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-4-k]$



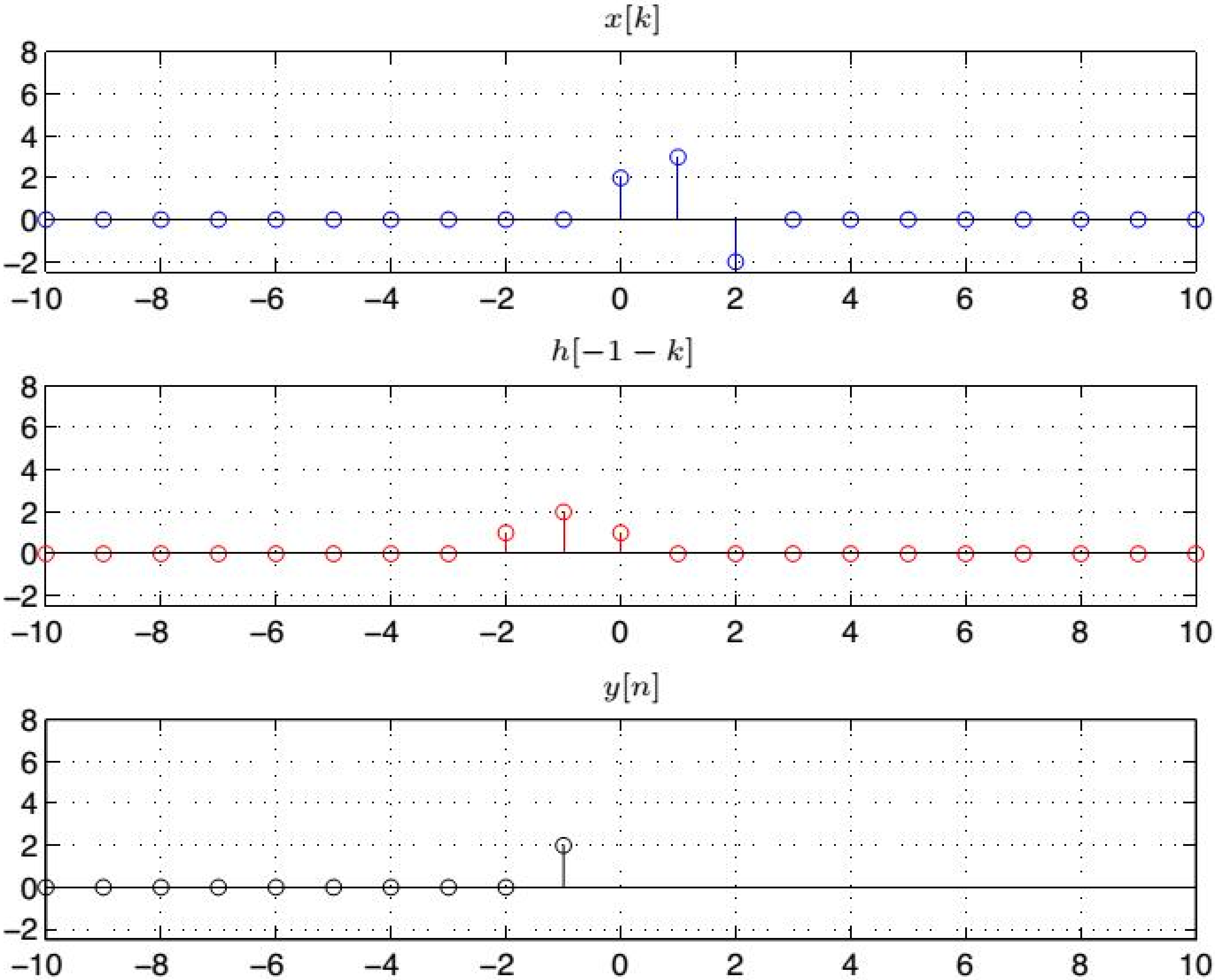
Exemplo solução 3: $y[-3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-3-k]$



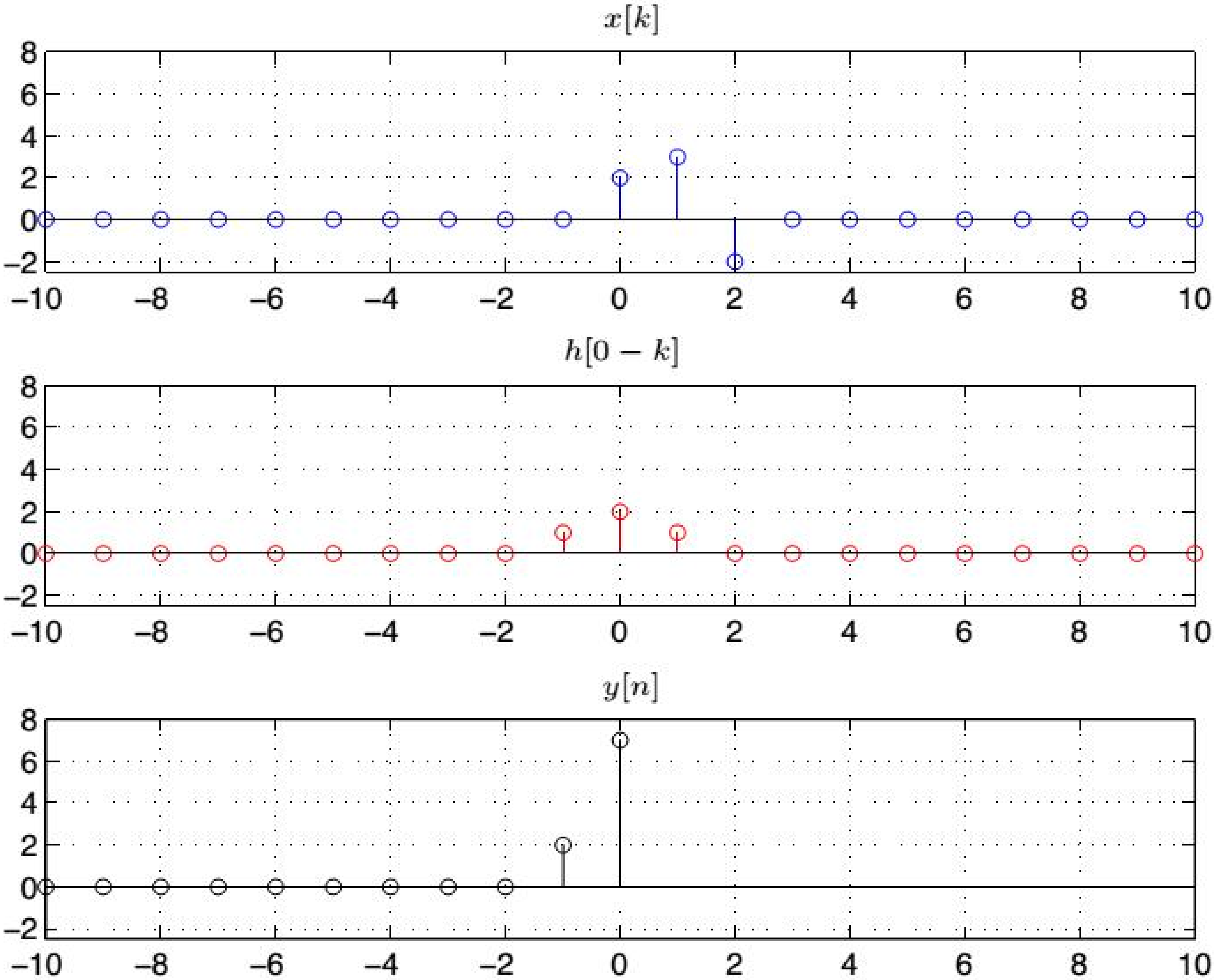
Exemplo solução 3: $y[-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-2-k]$



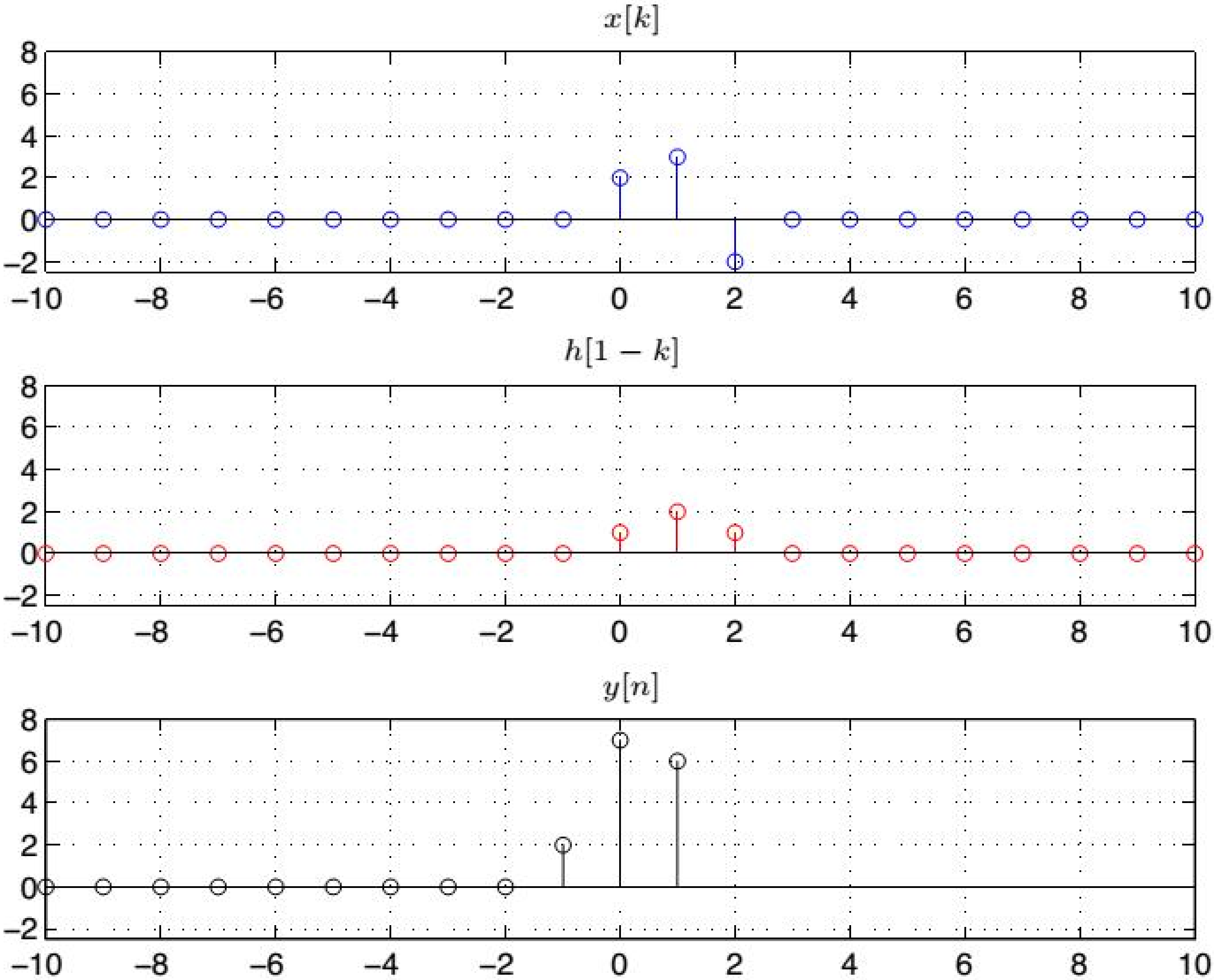
Exemplo solução 3: $y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-1-k]$



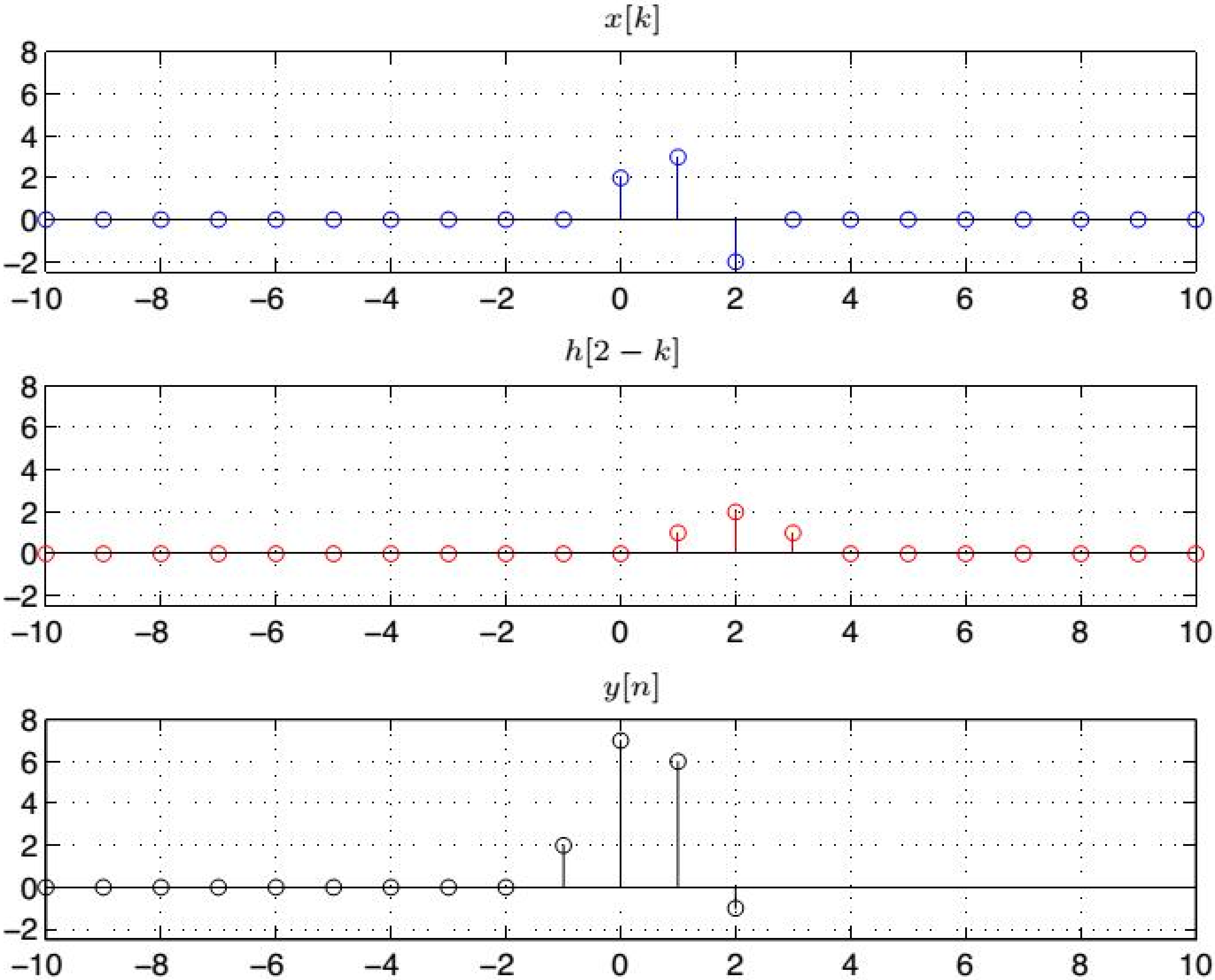
Exemplo solução 3: $y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$



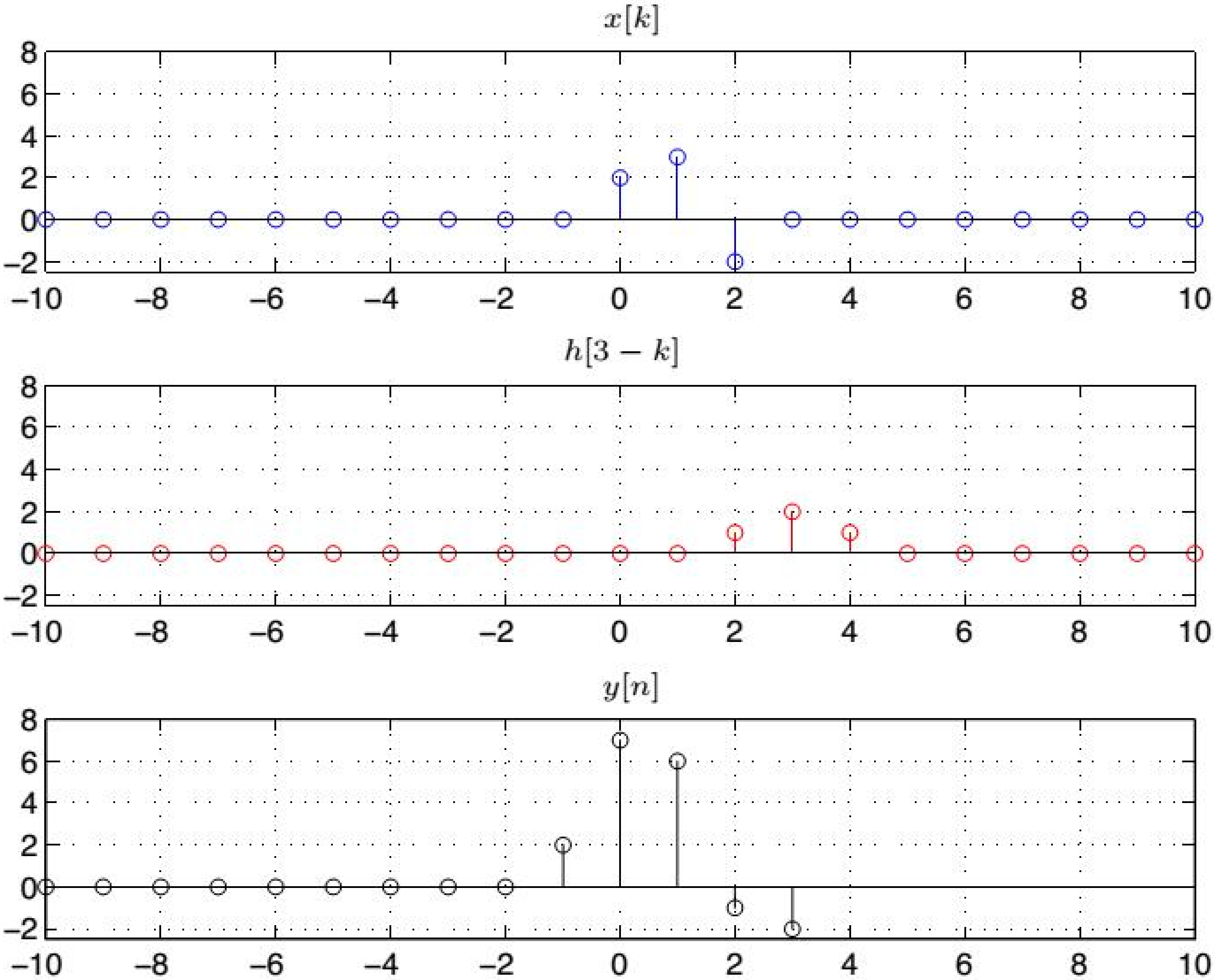
Exemplo solução 3: $y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$



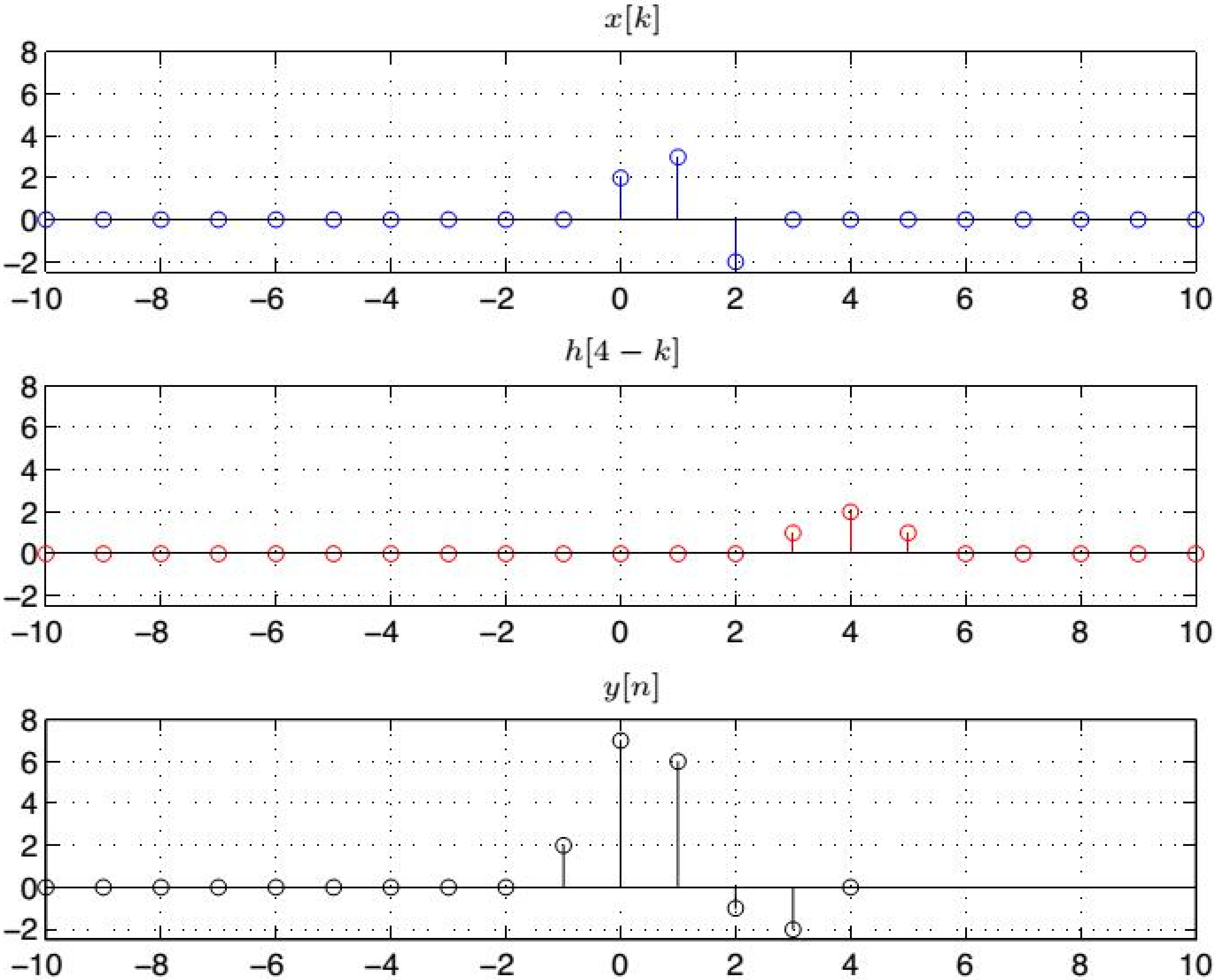
Exemplo solução 3: $y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]$



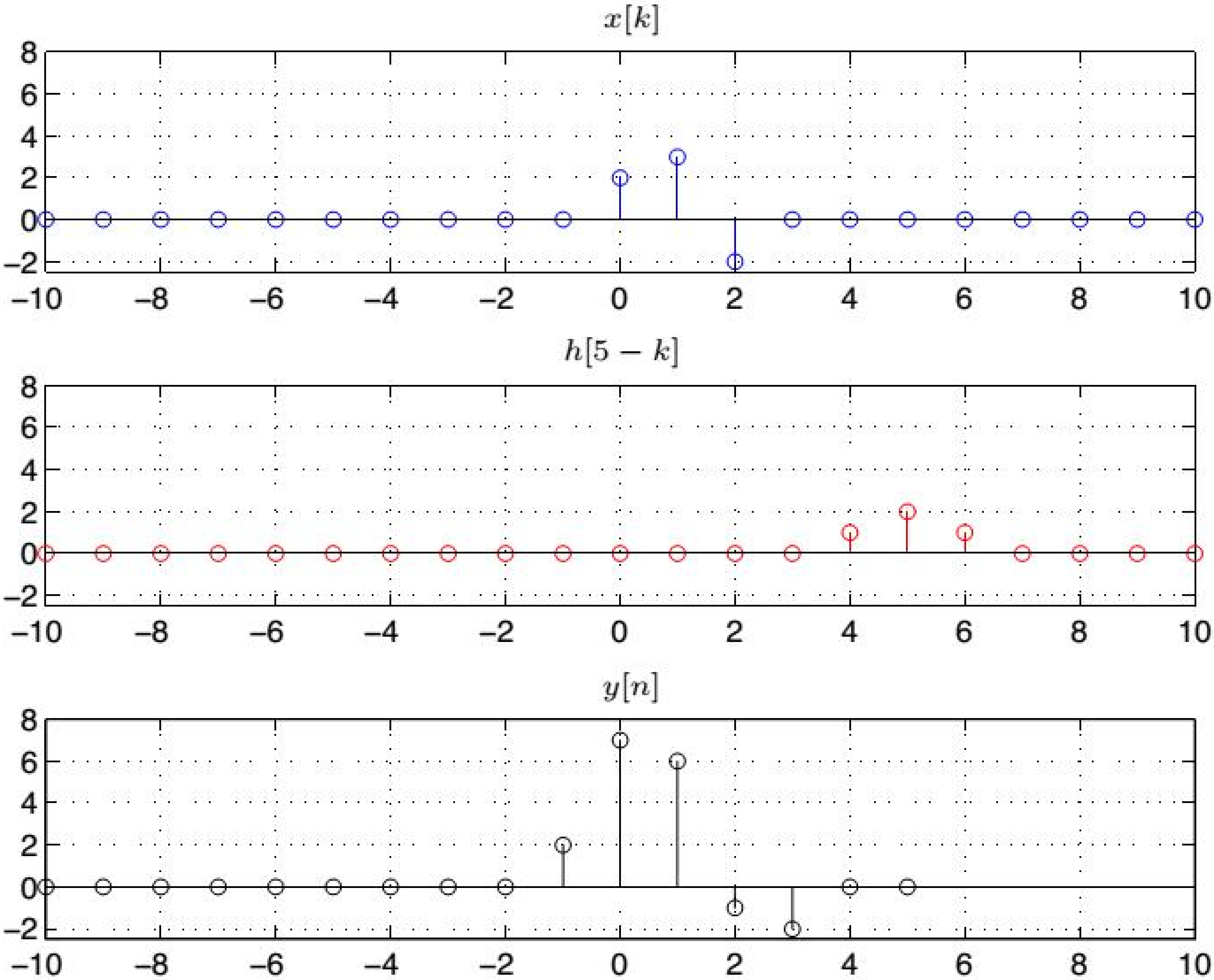
Exemplo solução 3: $y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k]$



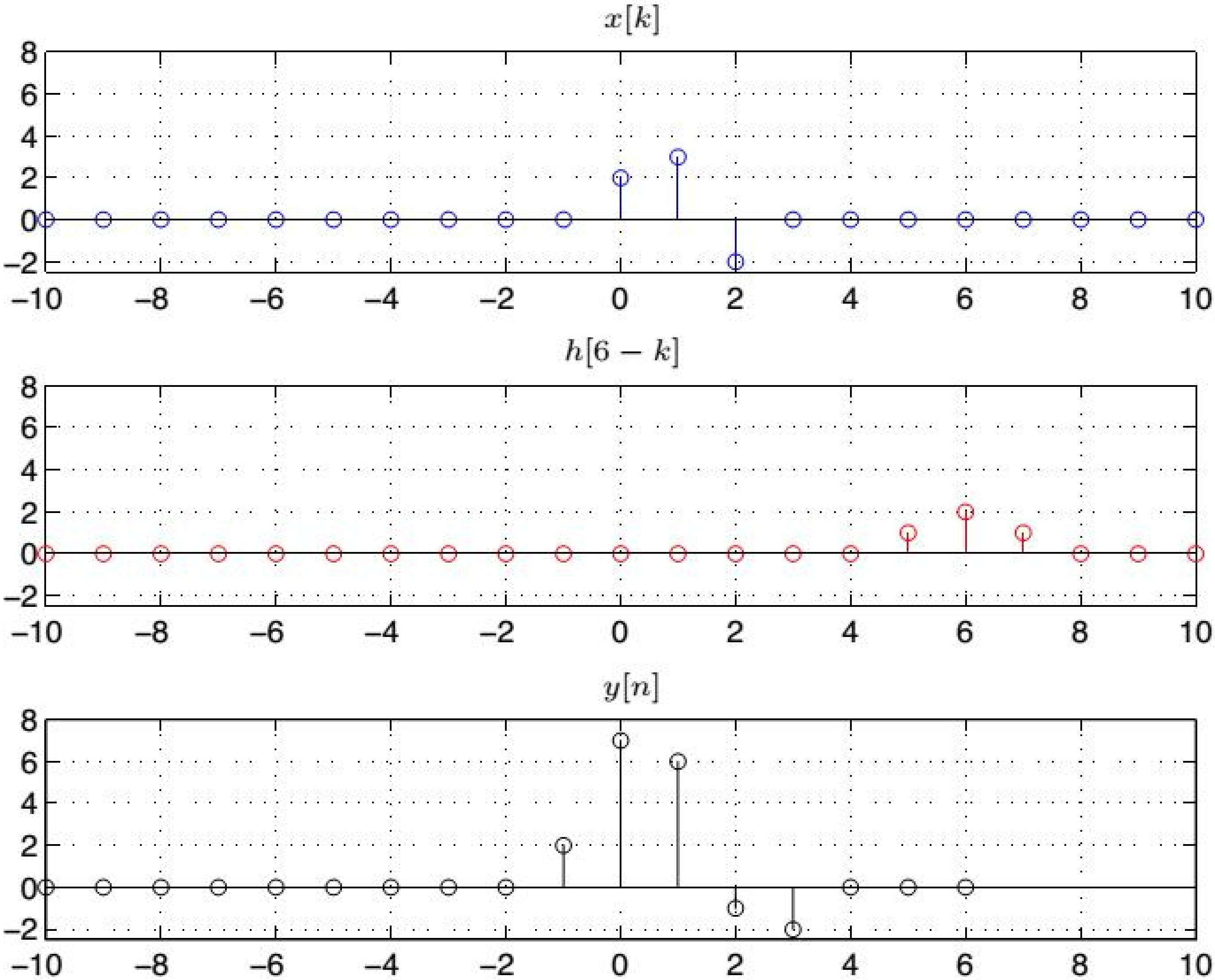
Exemplo solução 3: $y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k]$



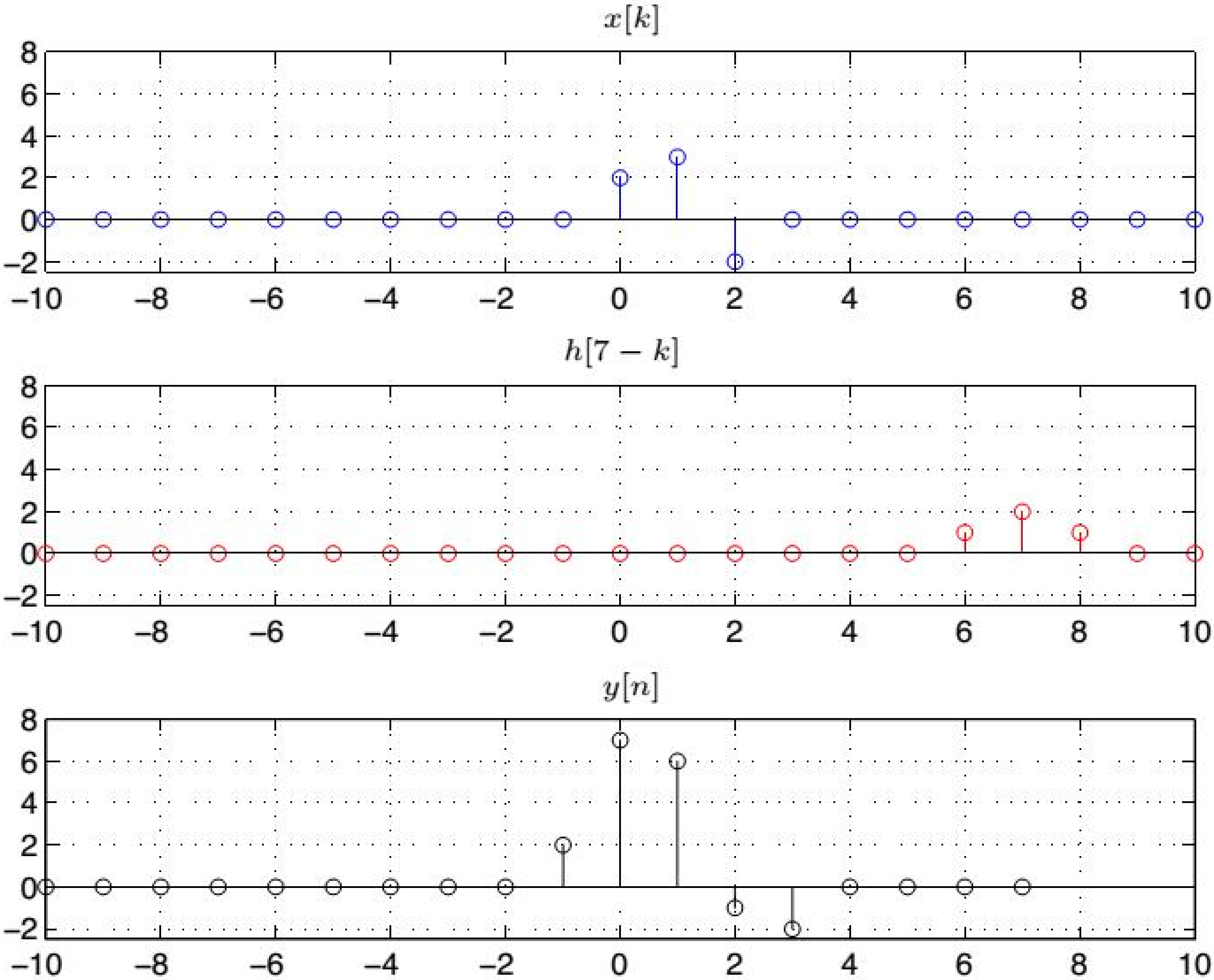
Exemplo solução 3: $y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k]$



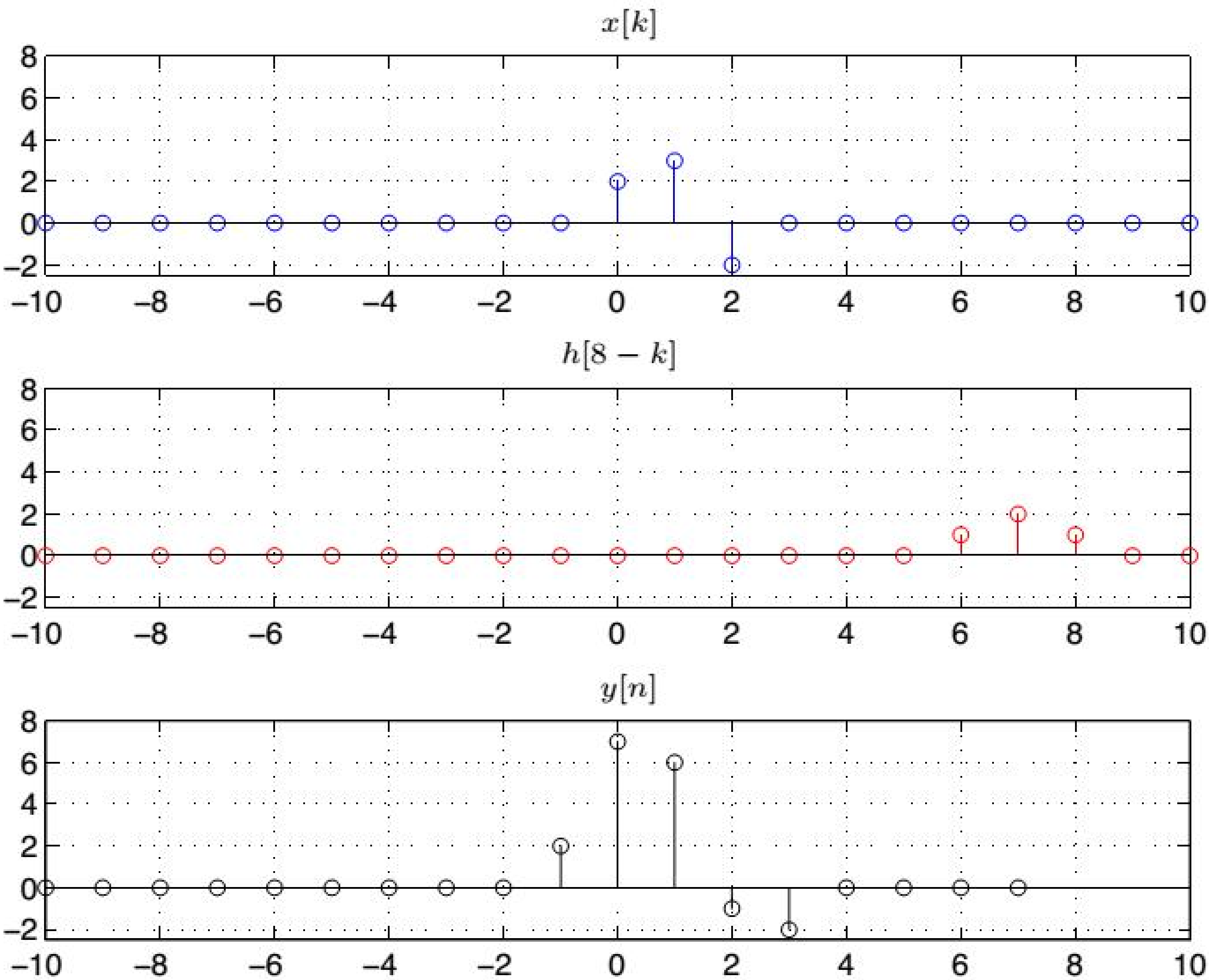
Exemplo solução 3: $y[6] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[6-k]$



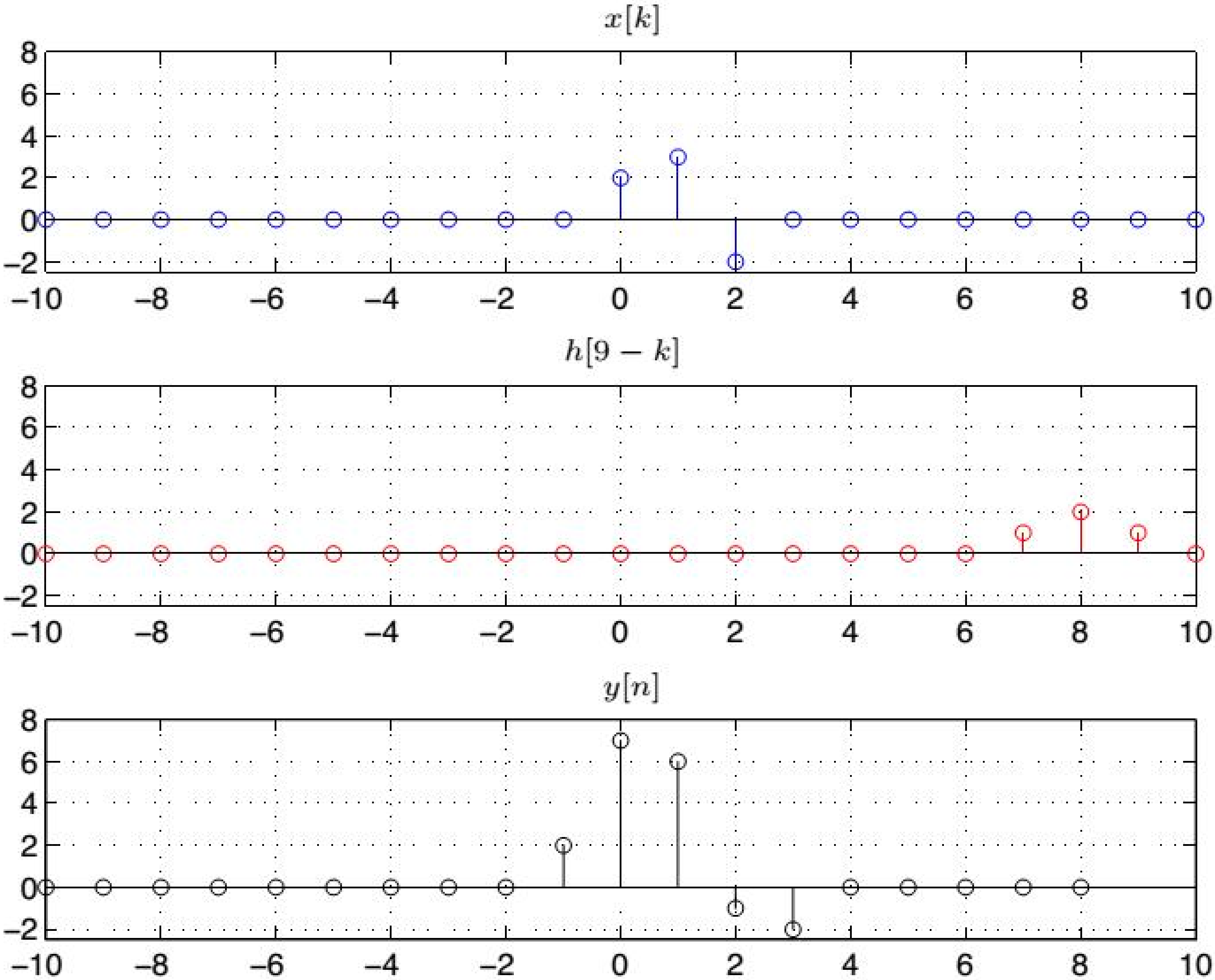
Exemplo solução 3: $y[7] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[7-k]$



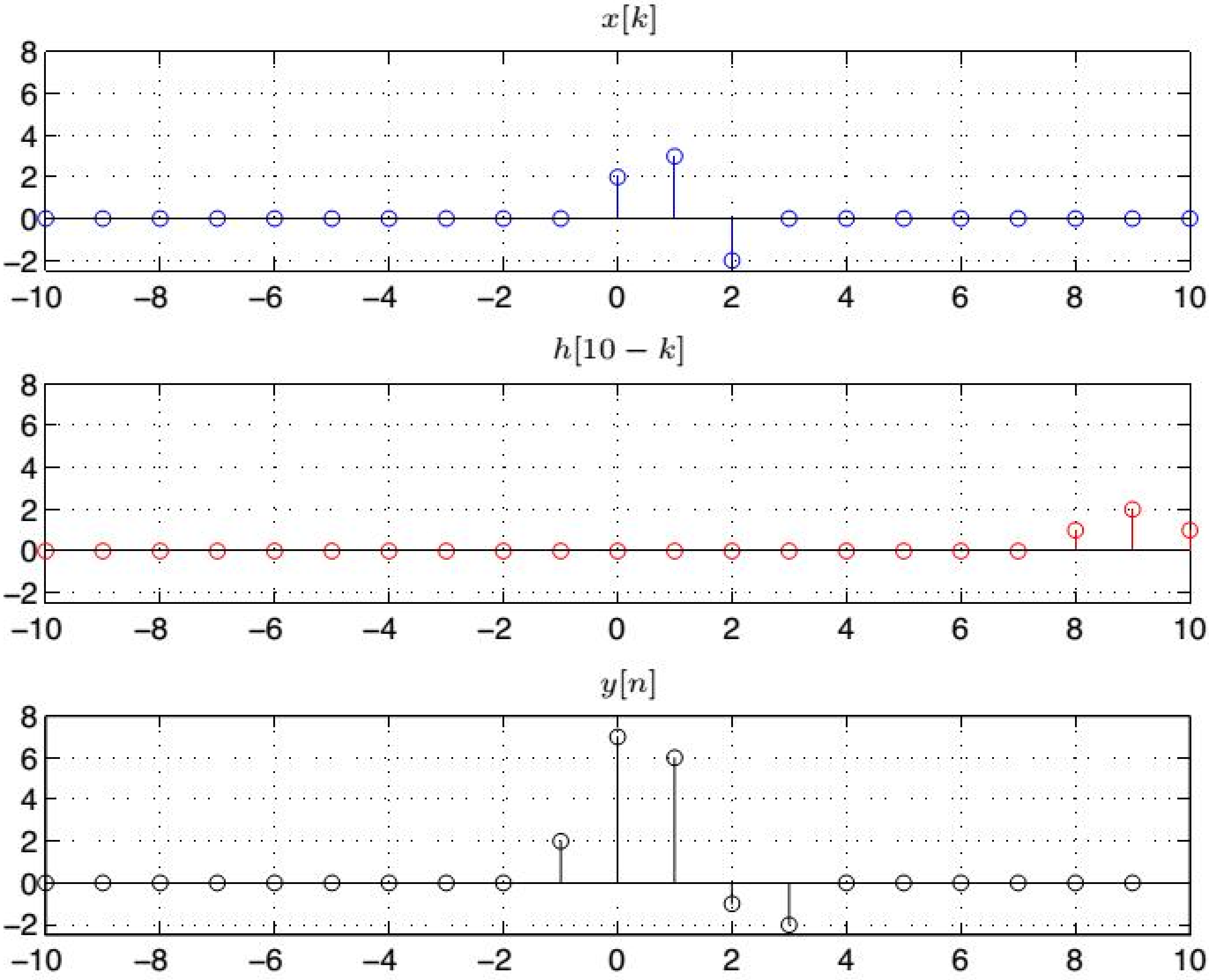
Exemplo solução 3: $y[8] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[8-k]$



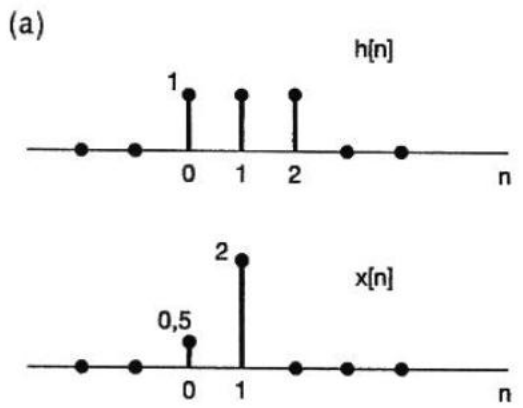
Exemplo solução 3: $y[9] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[9-k]$



Exemplo solução 3: $y[10] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[10-k]$



Ex. 2.2 (interpretação gráfica da convolução)



$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

$x[n]*h[n]$

No eixo k, traçar: $x[k]$ e $h\,[-k]$

Deslocar $h\,[-k]$ n amostras $\Rightarrow h\,[n\text{-}k]$

Para cada n, calcular o somatório do produto dos sinais

$n<0:\ y[n]=0$

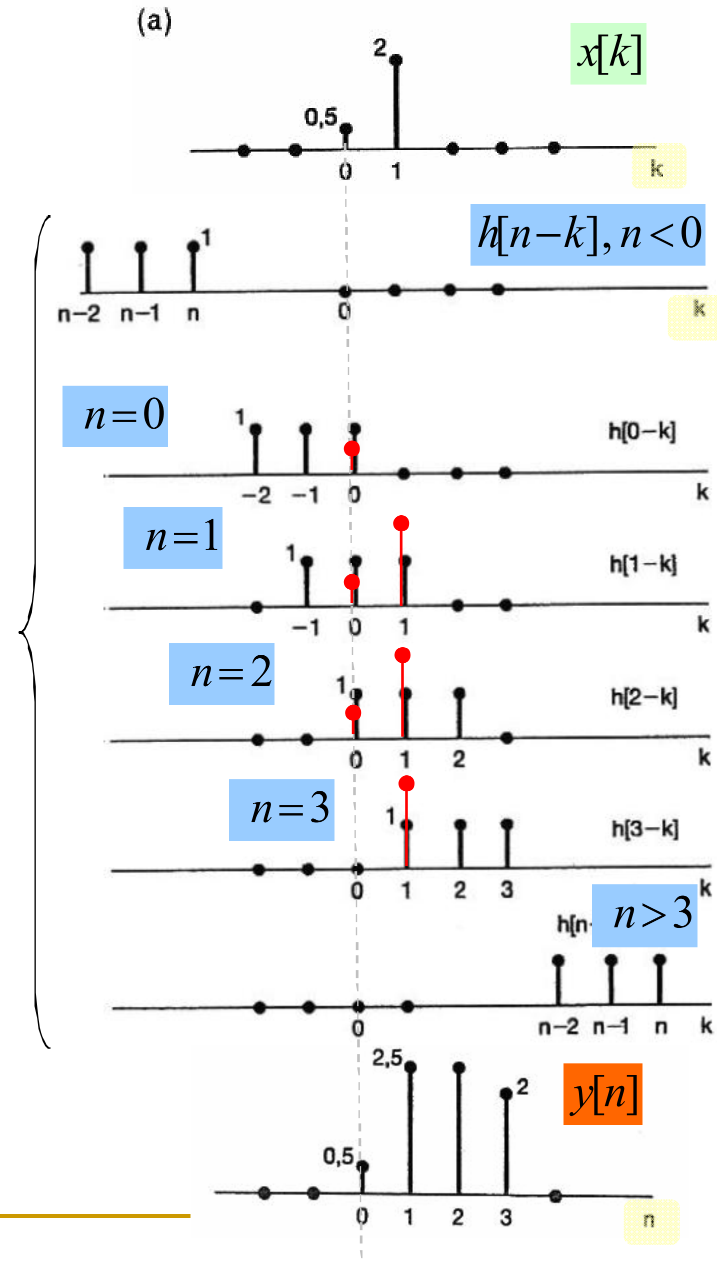
$n=0:\ y[n]=0{,}5$

$n=1:\ y[n]=2{,}5$

$n=2:\ y[n]=2{,}5$

$n=3:\ y[n]=2{,}0$

$n>3:\ y[n]=0$



Convolução c/ impulso

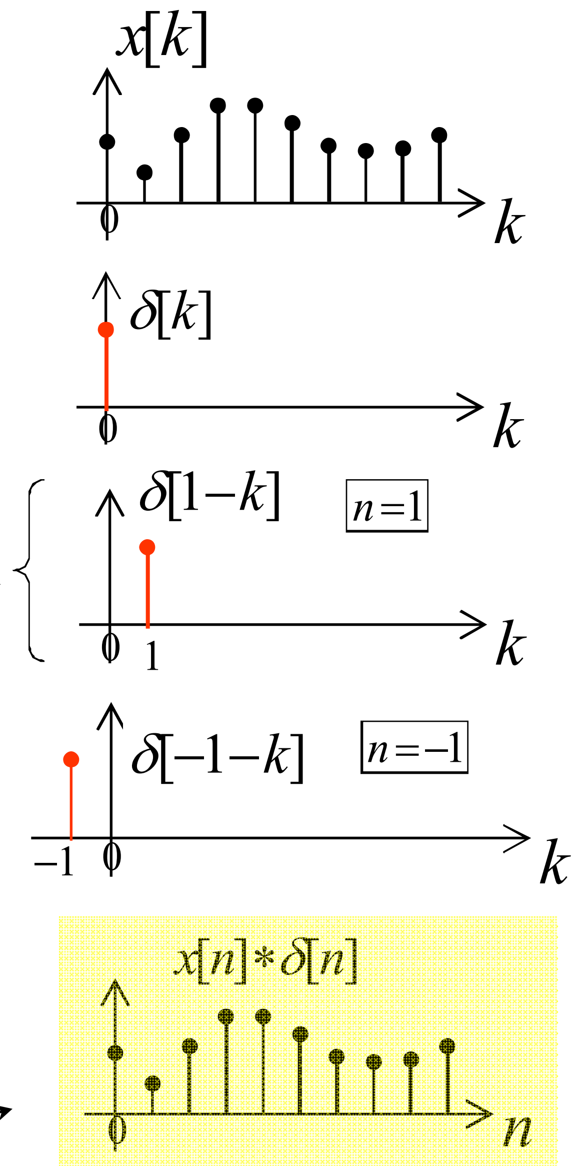
- Para qualquer $x[n]$,

$$x[n]*\delta[n]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\delta[n-k]=x[n]$$

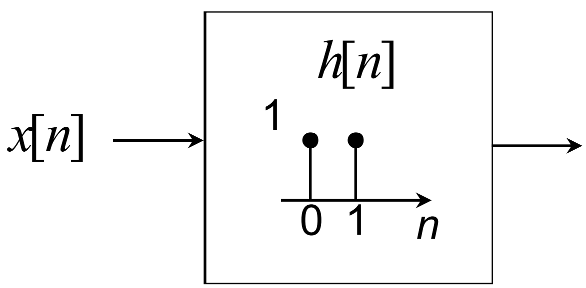
- δ[n] é o unitário da convolução ("propriedade seletiva")

À medida que, $\delta[k]$ desloca, $x[k]$ é amostrado e reproduzido



Exemplo

- Dada a resposta impulsiva, determinar a saída para uma entrada qualquer:



$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

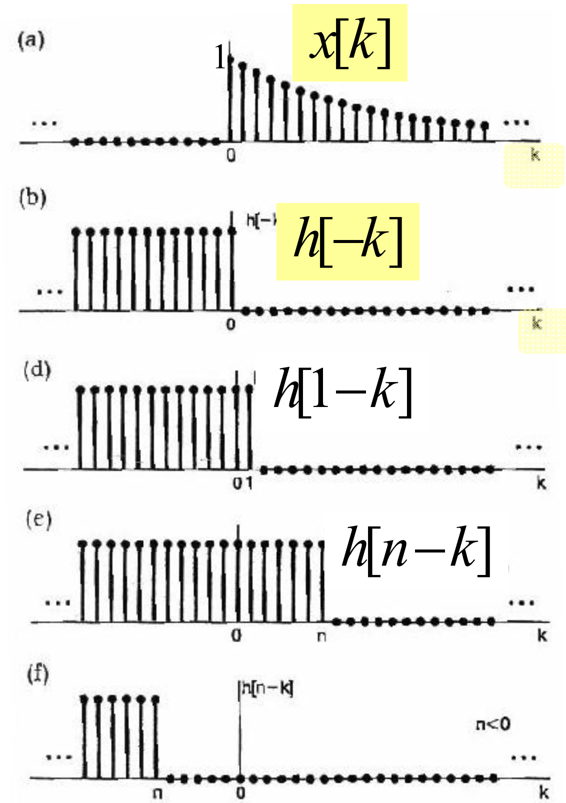
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

Entrada é reproduzida, na saída, para cada termo da resposta impulsiva

Ex. 2.3

$$x[n]=\alpha^n u[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$0 < \alpha < 1$ $\qquad h[n]=u[n]$



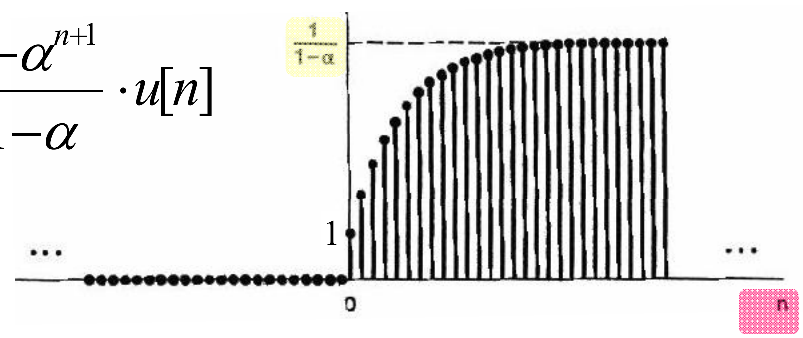
$$y[n]=1 \iff n=0$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \iff n>0$$

$$y[n]=0 \iff n<0$$

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

$$y[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\cdot u[n]$$

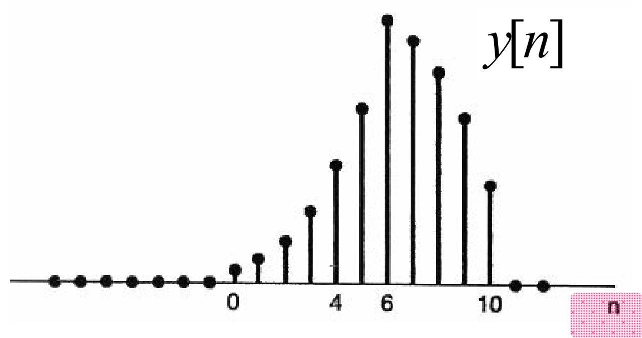


Ex. 2.4 (discussão qualitativa)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$



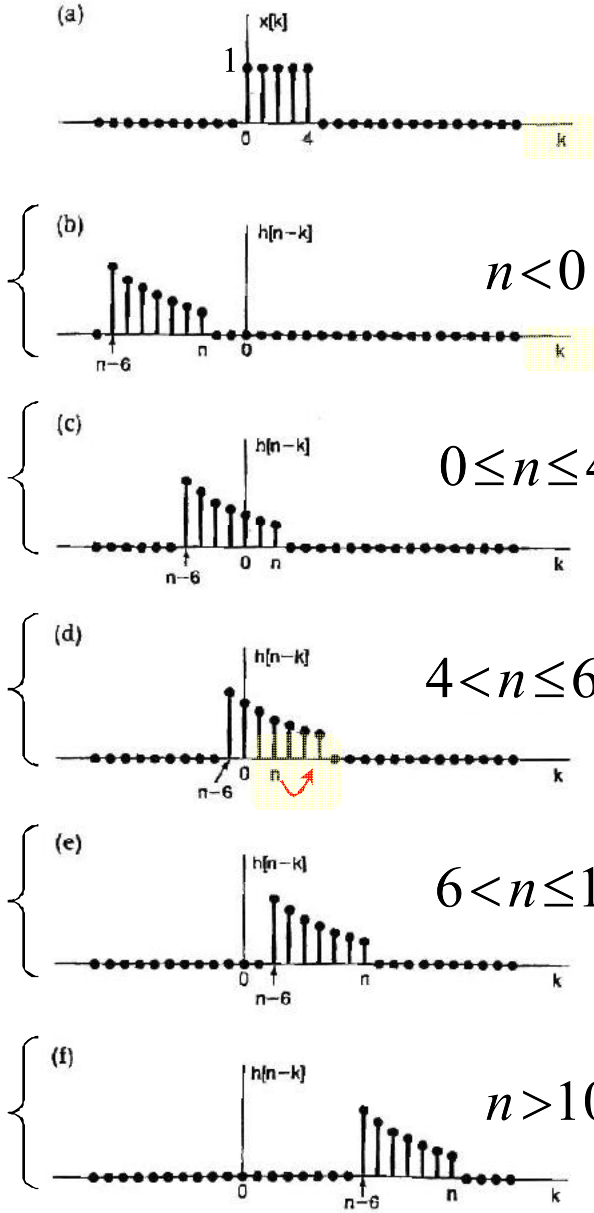
$$y[n] = 0 \qquad n<0$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \qquad 0 \le n \le 4$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} \qquad 4 < n \le 6$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} \qquad 6 < n \le 10$$

$$y[n] = 0 \qquad n>10$$



$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Ver as manipulações algébricas no livro-texto

Ex. 2.5 (discussão qualitativa)

não causal

Exemplo 2.5

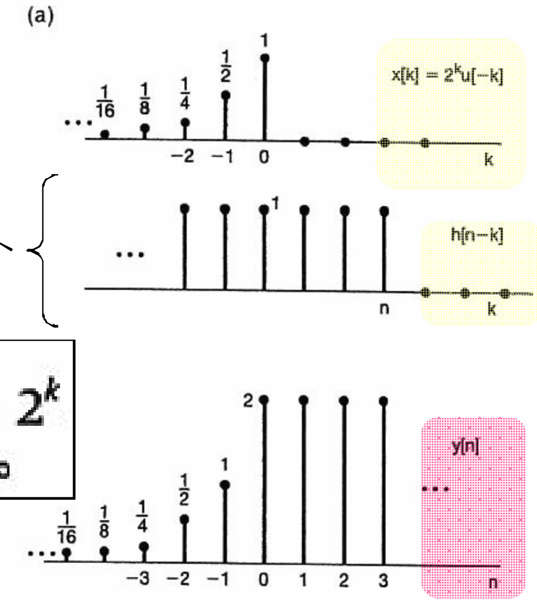
Considere um sistema LIT com entrada $x[n]$ e resposta ao impulso unitário $h[n]$ especificadas como se segue:

$$\boxed{x[n] = 2^n u[-n],} \qquad (2.17)$$

$$h[n] = u[n]. \qquad (2.18)$$

As sequências $x[k]$ e $h[n-k]$ estão representadas graficamente como funções de k na Figura 2.11(a). Note-se que $x[k]$ é zero para $k > 0$ e $h[n-k]$ é zero para $k > n$. Também observamos que, independentemente do valor de n, a sequência $x[k]h[n-k]$ sempre tem amostras não nulas ao longo do eixo k. Quando $n \geq 0$, $x[k]h[n-k]$ tem amostras ~~nulas~~ no intervalo $k \leq 0$. Segue-se que, para $n \geq 0$,

não nulas



$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k}$$

$$l = -k$$

$$y[n] = \sum_{l=\infty}^{-n} 2^{-l} = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{l} \xrightarrow{m = l + n}$$

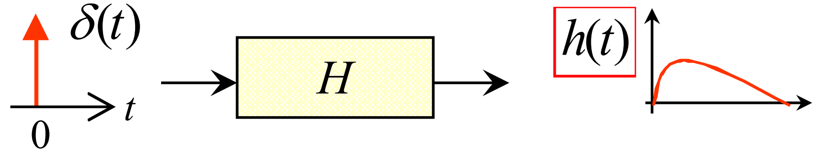
$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m} = 2^n \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^n \times 2 = \boxed{2^{n+1}}$$

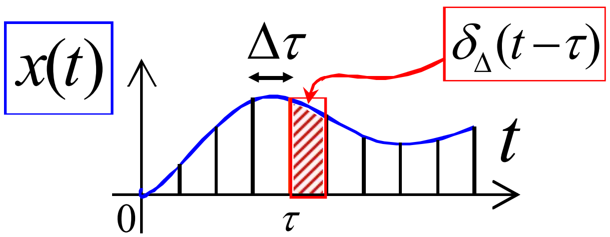
Para $n<0$ $y[n]=2^{n+1}$

Para $n\geq 0$ $y[n]=2$

2.2.2 Resposta ao impulso e convolução em tempo contínuo

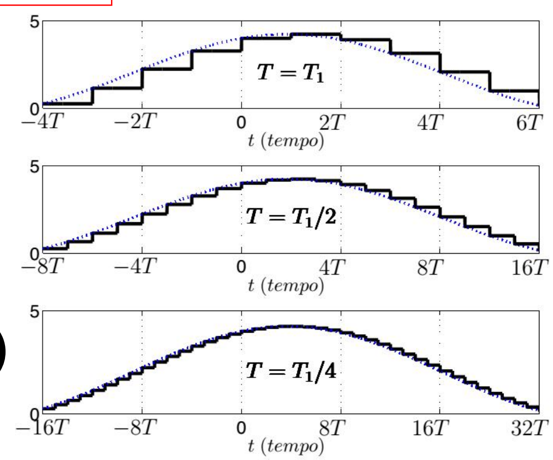


- $x(t)$ qualquer aproximado por superposição de pulsos



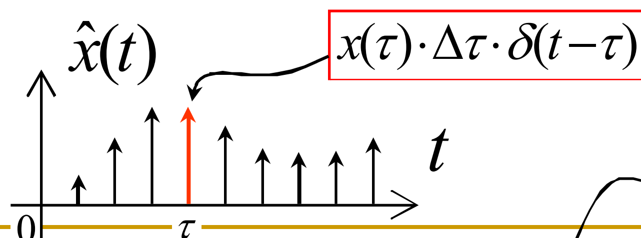
$$\delta_\Delta = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}, & 0 \le 0 \le \Delta \\ 0, & caso \ \ contrário \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta_\Delta(t-\tau)\cdot\Delta\tau$$



- No limite, pulsos tendem a impulsos:

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \hat{x}(t)$$

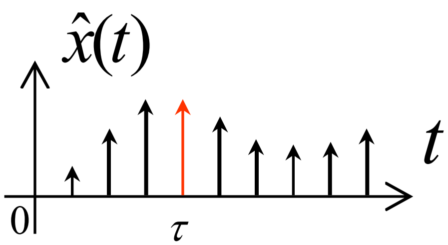


$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau = x(t) * \delta(t)$$

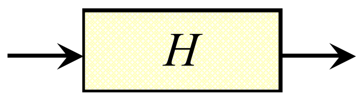
convolução com impulso

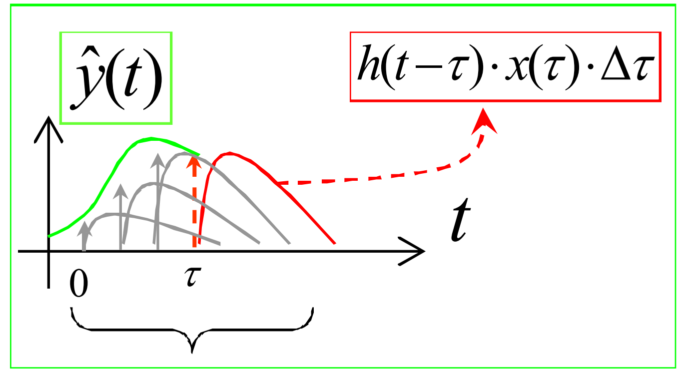
Continua...

Continuação...



$$\hat{x}(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot\Delta\tau$$





Superposição de respostas impulsivas

$$\hat{y}(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot\Delta\tau$$

$$y(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot\Delta\tau$$

$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

Integral de convolução

$$y(t)\equiv x(t)*h(t)$$

Conhecendo-se *h(t)* obtém-se a resposta a um *x(t) qualquer*

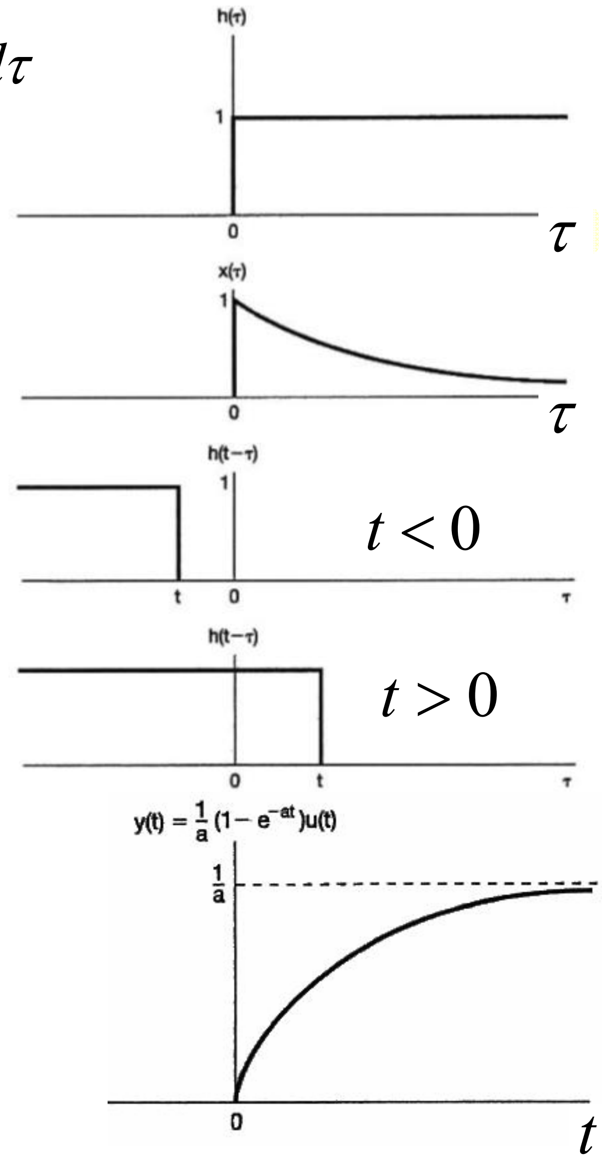
Ex. 2.6

$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$x(t)=e^{-at}\cdot u(t) \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{u(t)}} \longrightarrow y(t)$$

$$a>0$$

$y(t)=0$



$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}\cdot u(\tau)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-a\tau}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau=$$

$$=\int_{\tau=0}^{t} e^{-a\tau}d\tau\cdot u(t)=-\left.\frac{e^{-a\tau}}{a}\right|_{0}^{t}\cdot u(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

Ver exemplos 2.7 e 2.8

Sistemas Invertíveis e Deconvolução

- Um sistema é invertível se a entrada pode ser recuperada da saída
- Em termos de sistemas, temos:

$$
\begin{aligned}
x(t) * \left(h(t) * h^{-1}(t)\right) &= x(t) \\
h(t) * h^{-1}(t) &= \delta(t)
\end{aligned}
$$

- O processo para recuperar $x(t)$ de $y(t) = h(t) * x(t)$ é chamado Deconvolução

Explorando a interpretação geométrica da convolução

Seja:

$$x(t) = \begin{cases} A, & |\,t\,| \le \frac{T}{2} \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

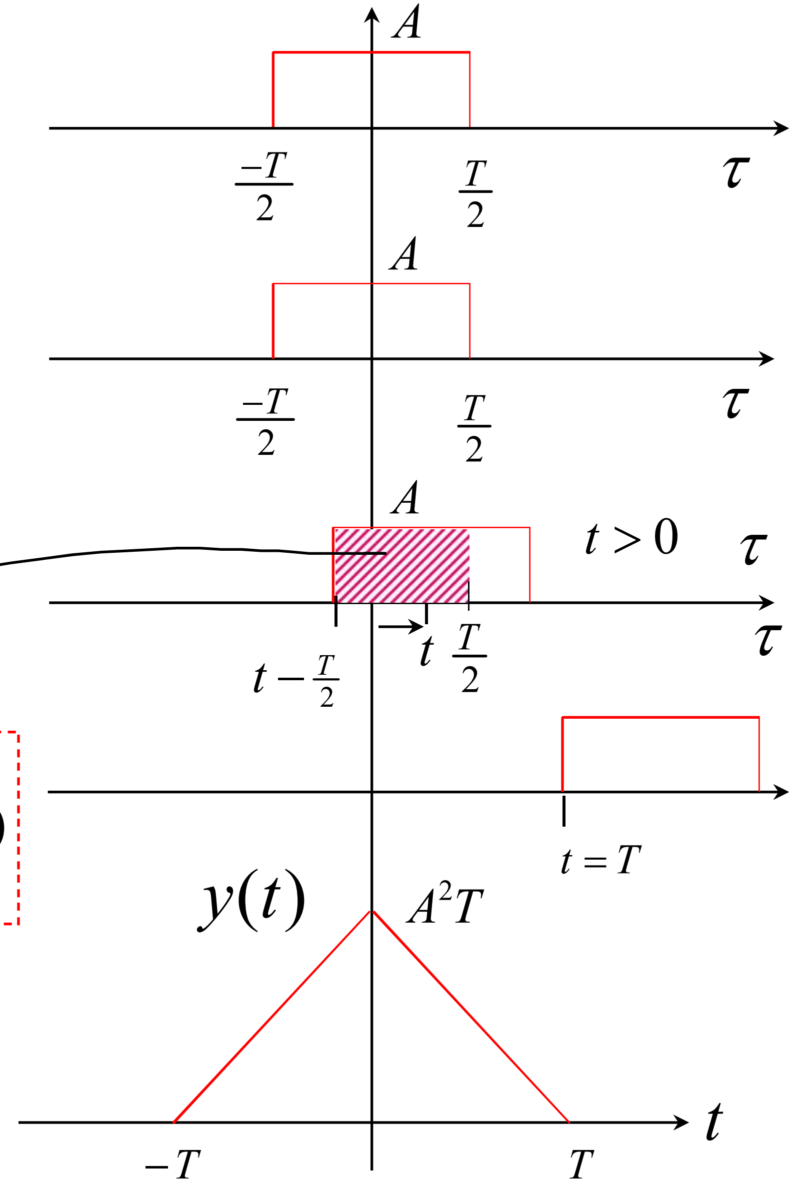
$$y(t) = x(t) * x(t) = ?$$

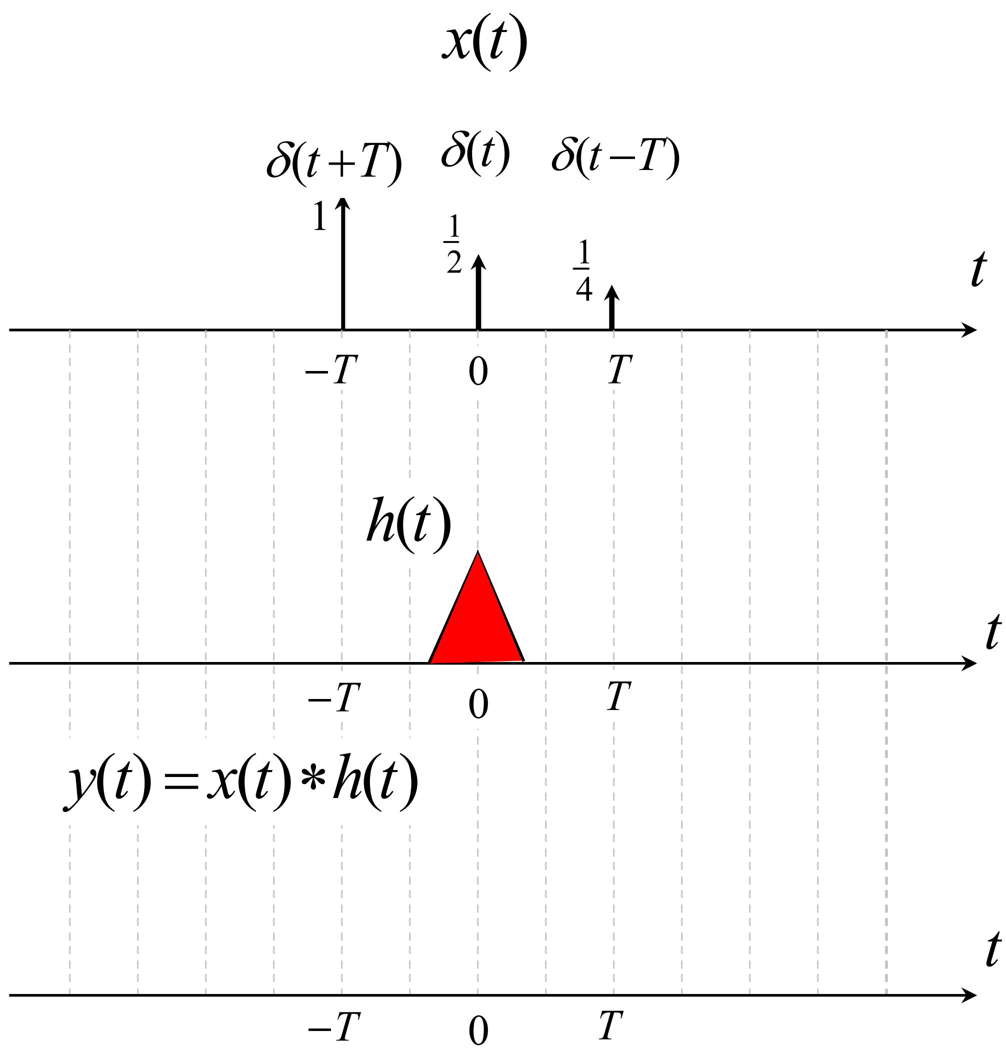
$$y(t) = \int_{t-T/2}^{T/2} A^2 \cdot d\tau = A^2 \tau \Big|_{t-T/2}^{T/2} = A^2 (T - t)$$

$0 \le t \le T$

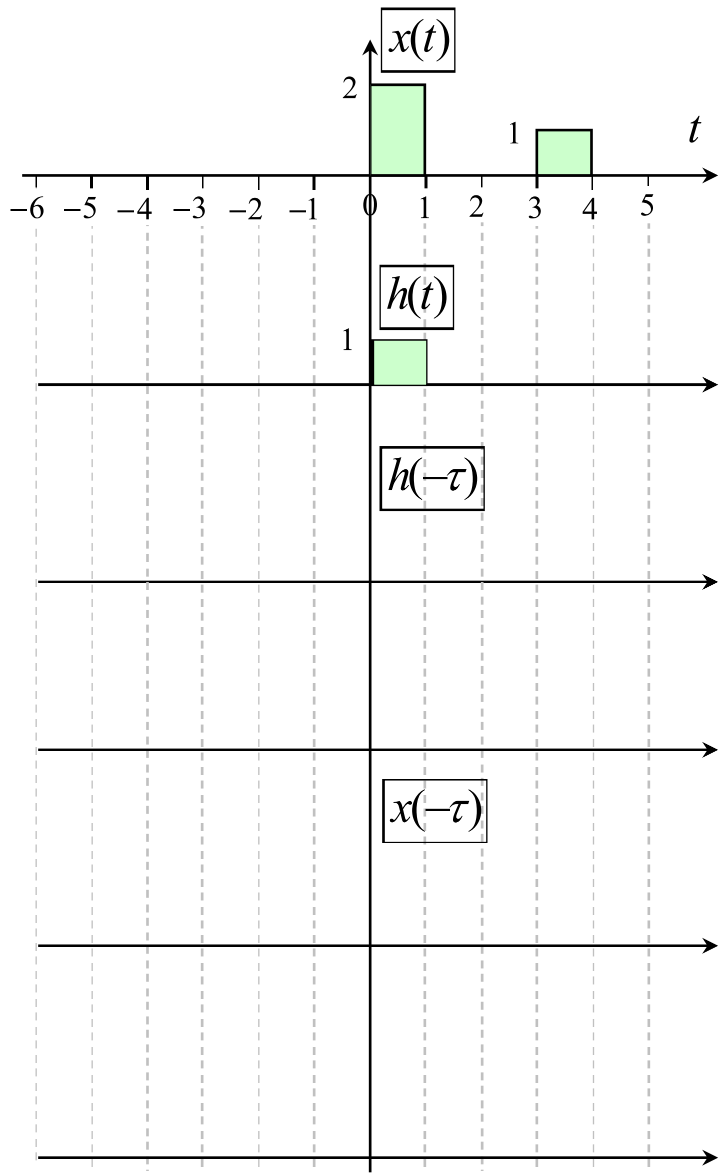
$$y(t) = A^2 (T + t)$$

$0 \ge t \ge -T$




$x(t)$
$\delta(t+T)$
$\delta(t)$
$\delta(t-T)$
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
t
$-T$
0
T
$h(t)$
t
$-T$
0
T
$y(t)=x(t)*h(t)$
t
$-T$
0
T

Exercício



$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

2.3 Propriedades de SLIT

- Características totalmente determinadas pela resposta impulsiva
- Saída:

$$\boxed{\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \end{aligned}}$$

- Causalidade, estabilidade, etc. ⇔ resposta impulsiva

comutatividade

Prova

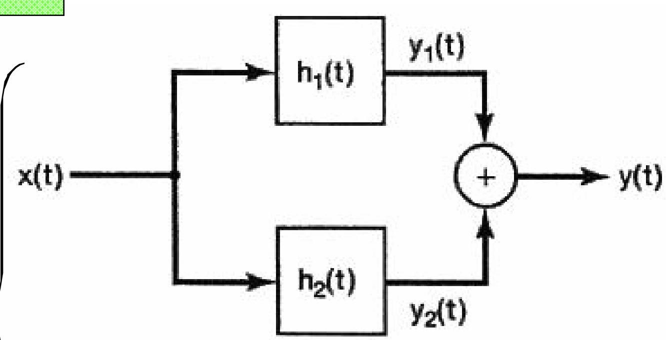
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k],$$

$$n-k=r \rightarrow k=n-r \quad \cdots$$

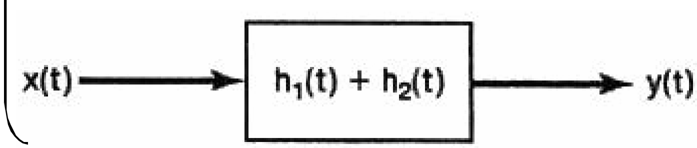
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Distributividade

Sistemas equivalentes



$$= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] =$$



$$= x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

Ver exemplo 2.10

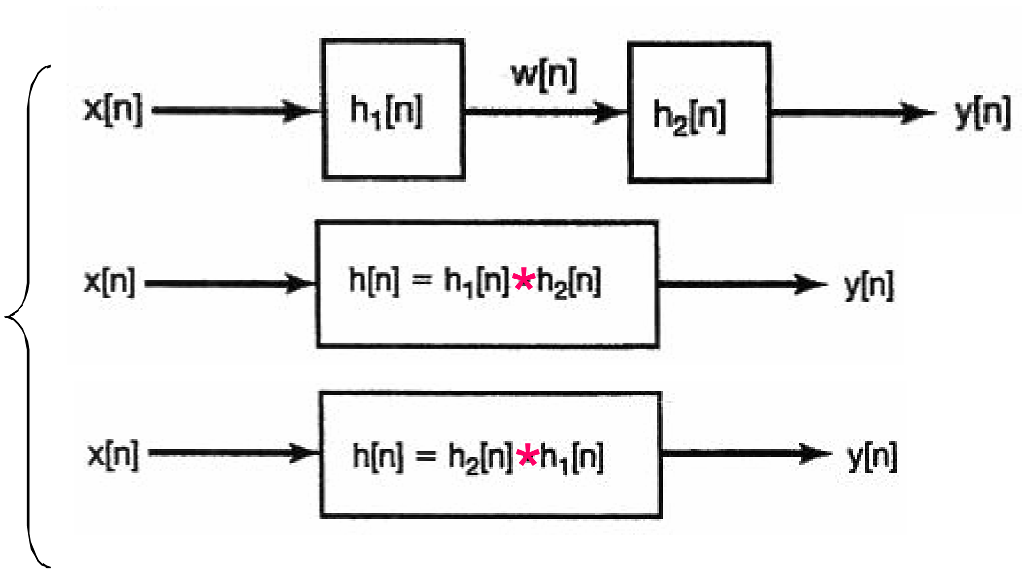
Associatividade

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n].$$

$$= x[n] * h_1[n] * h_2[n] \longrightarrow$$

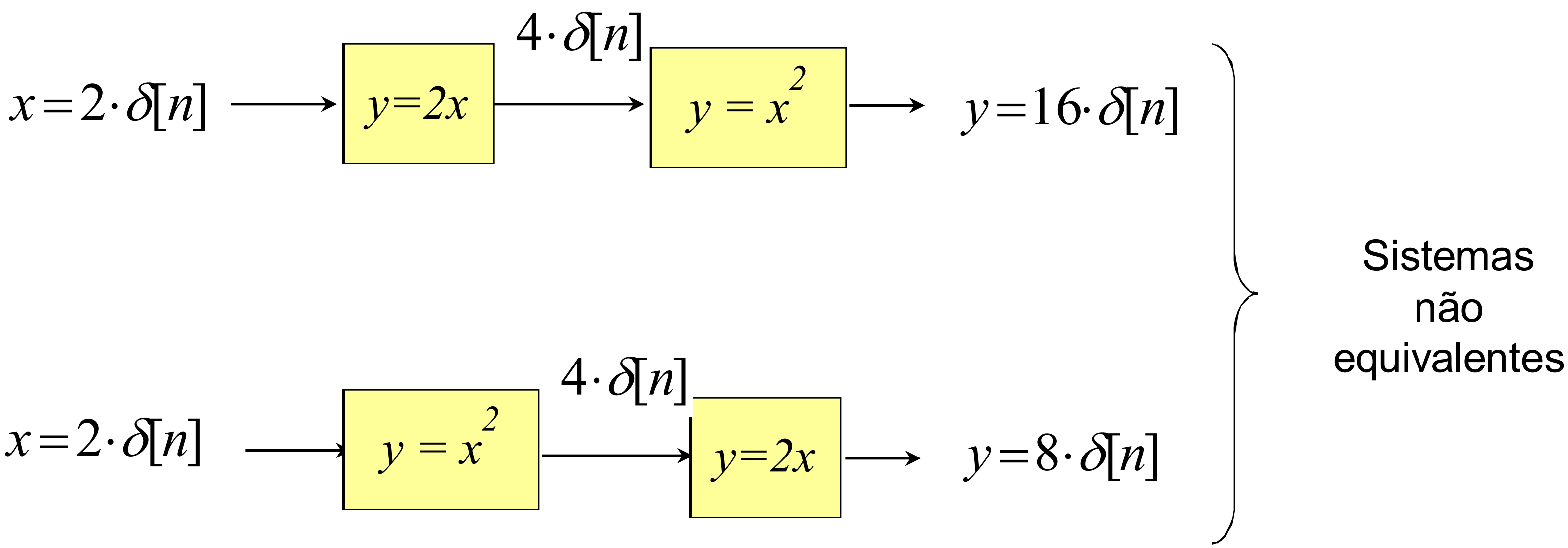
parêntesis desnecessários

Sistemas equivalentes



Comutatividade e associatividade

- Contra-exemplo (sistema não linear)



Exercício *Ex.: 2.24 do Oppenheim*

Considere a interconexão em cascata de três sistemas:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_1}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_2}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_2}} \longrightarrow y[n]$$

A resposta ao impulso de $\mathbf{H}_2$ é:

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$

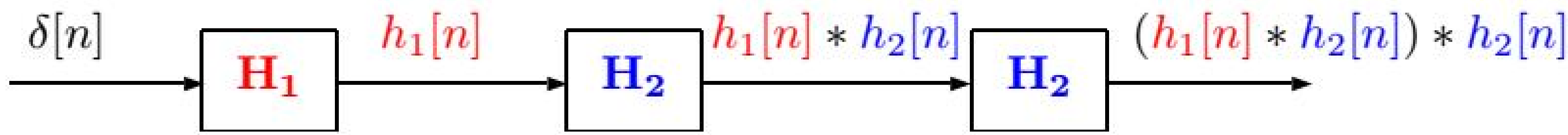
e a resposta ao impulso global é dada por:

$$\begin{aligned} h[n] = \quad & \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + \ldots \\ & \ldots + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] \end{aligned}$$

- Ache $h_1[n]$, a resposta ao impulso do sistema $\mathbf{H}_1$.

Exercício *Ex.: 2.24 do Oppenheim*

Considerando a resposta ao impulso do sistema global:



Portanto, a resposta ao impulso global é:

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

- Calculado $h_2[n] * h_2[n]$, sendo, $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$, ou, $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. Então,

$$h_2[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]h_2[n-k]$$

note que $h_2[k] \neq 0$ apenas para $k = 0$ e $k = 1$, logo,

$$h_2[n] * h_2[n] = \sum_{k=0}^{1} h_2[k]h_2[n-k]$$

Exercício Ex.: 2.24 do Oppenheim

Portanto, a resposta ao impulso global é:

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

- Calculado $h_2[n] * h_2[n]$, sendo, $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$, ou, $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. Então,

$$h_2[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]h_2[n-k]$$

note que $h_2[k] \neq 0$ apenas para $k = 0$ e $k = 1$, logo,

$$\begin{aligned} h_2[n] * h_2[n] &= \textstyle\sum_{k=0}^{1} h_2[k]h_2[n-k] \\ &= h_2[0]h_2[n] + h_2[1]h_2[n-1] \\ &= h_2[n] + h_2[n-1] \\ &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2] \\ &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

Exercício *Ex.: 2.24 do Oppenheim*

Então, a resposta ao impulso global é:

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

sendo,

$$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

- Então, temos que

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] \\ &= h_1[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) \end{aligned}$$

Logo,

$$h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

Exercício Ex.: 2.24 do Oppenheim

- Sabendo que $h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$ e de posse dos valores de $h[n]$, podemos calcular $h_1[n]$.
  - Para $n = 0$

$$h[0] = 1 = h_1[0] + 2h_1[0-1] + h_1[0-2] \rightarrow h_1[0] = 1$$

    como $h[n] = 0$ para $n < 0$, então $h_1[n] = 0$ para $n < 0$.
  - Para $n = 1$

$$h[1] = 5 = h_1[1] + 2h_1[1-1] + h_1[1-2] \rightarrow h_1[1] = 3$$

  - Para $n = 2$

$$h[2] = 10 = h_1[2] + 2h_1[2-1] + h_1[2-2] \rightarrow h_1[2] = 3$$

  - Para $n = 3$

$$h[3] = 11 = h_1[3] + 2h_1[3-1] + h_1[3-2] \rightarrow h_1[3] = 2$$

Exercício *Ex.: 2.24 do Oppenheim*

- Sabendo que $h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$ e de posse dos valores de $h[n]$, podemos calcular $h_1[n]$.
  - Para $n = 4$

$$h[4] = 8 = h_1[4] + 2h_1[4-1] + h_1[4-2] \rightarrow h_1[4] = 1$$

  - Para $n = 5$

$$h[5] = 4 = h_1[5] + 2h_1[5-1] + h_1[5-2] \rightarrow h_1[5] = 0$$

  - Para $n = 6$

$$h[6] = 1 = h_1[6] + 2h_1[6-1] + h_1[6-2] \rightarrow h_1[6] = 0$$

- Logo,

$$h_1[n] = 1\delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

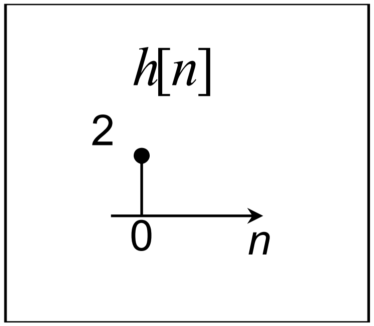
Memória

- Sistema sem memória: $y[n]$ depende apenas de $x[n]$ naquele instante

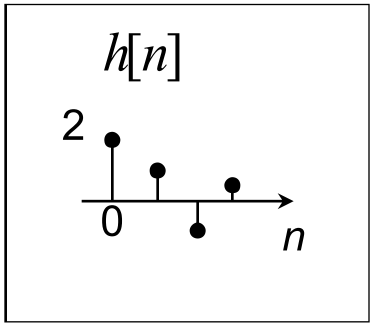
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]=x[n]\cdot h[n]$$

$$\boxed{\therefore\ h[n]=0\ \forall\ n\neq 0}$$

- Exemplos:



Sem memória



com memória

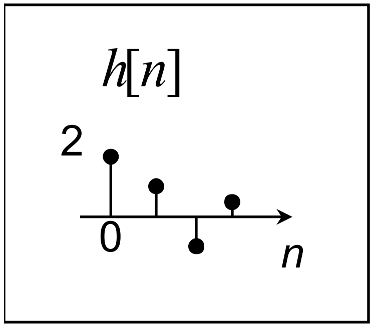
Causalidade

- Sistema causal: $y[n]$ depende apenas de valores presentes e passados de $x[n]$

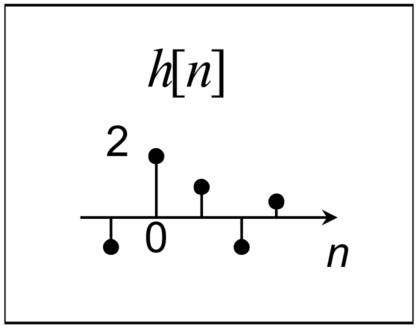
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\cdot h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\cdot h[n-k] \qquad \boxed{\therefore\ h[n]=0\ \forall\, n<0}$$

- Resposta impulsiva deve ser nula antes do impulso

- Exemplos



causal

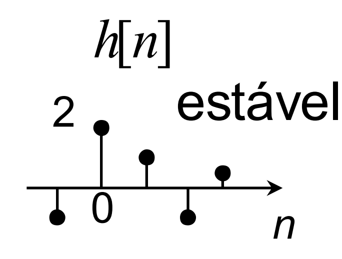


Não causal

Estabilidade

- Sistema estável: saída $y[n]$ limitada para entrada $x[n]$ limitada

Exemplo:



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

$$|y[n]| \le |x[n]| * |h[n]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| \cdot |h[n-k]|$$

$$Se\ |x[k]| < B = finito,\ então\ \overset{<\infty}{|y[n]|} \le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|$$

$$Logo,\quad se \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| < \infty$$

o sistema é estável

Em tempo contínuo

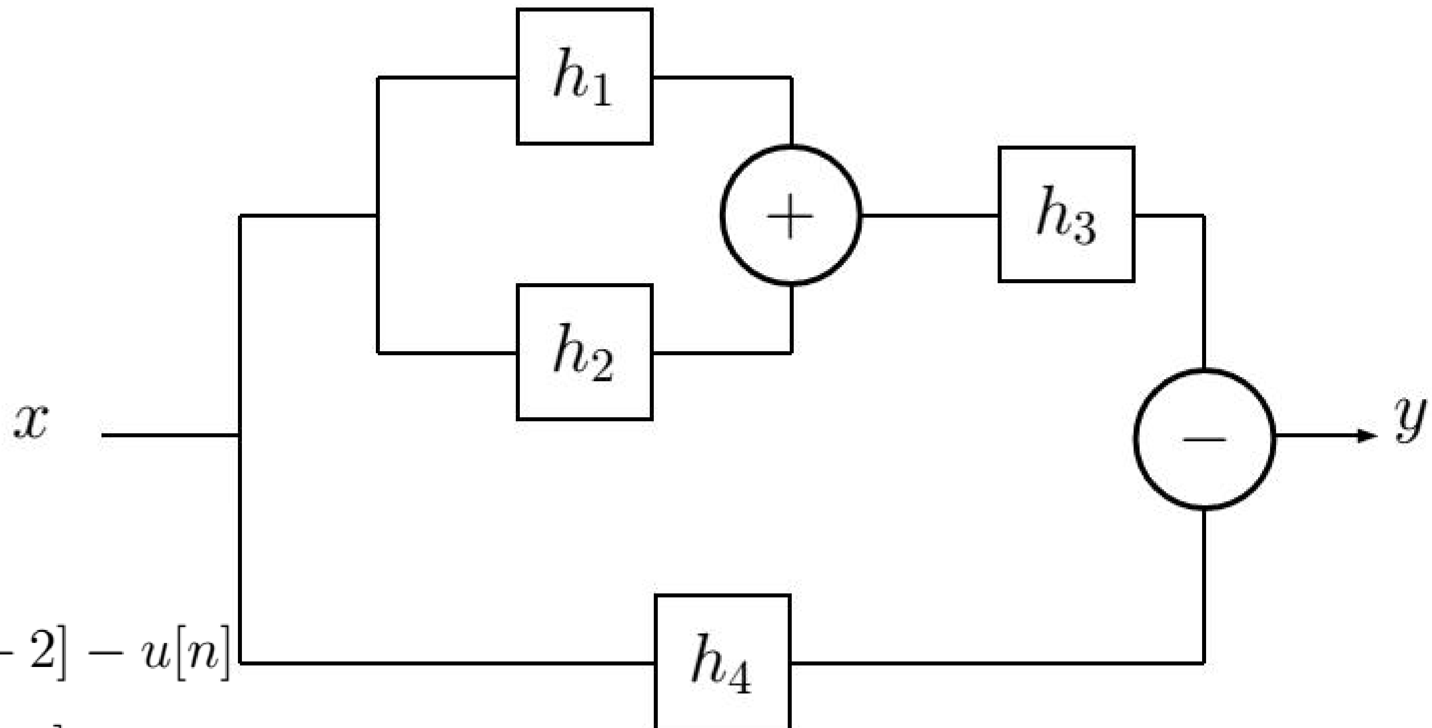
$$se \int_{t=-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$$

o sistema é estável

Ver exemplo 2.13

Exercício (Diagrama de Blocos)

1) Encontre a resposta ao impulso global, h, do sistema.



$h_1 = u[n]$

$h_2 = u[n+2] - u[n]$

$h_3 = \delta[n-2]$

$h_4 = \alpha^n u[n]$

Exercício *(Diagrama de Blocos)*

2) Calcule h, sendo:

$$h = (h_1 + h_2) * h_3 - h_4$$

e

$$h_1 = u[n]$$

$$h_2 = u[n+2] - u[n]$$

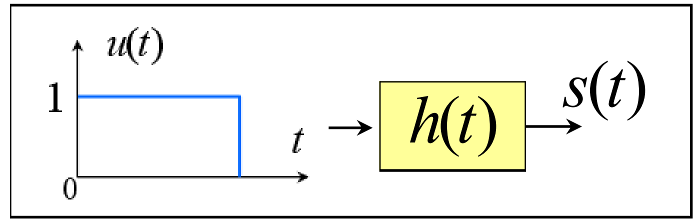
$$h_3 = \delta[n-2]$$

$$h_4 = \alpha^n u[n]$$

Resposta ao degrau

- Degraus $u(t)$: mais simples de serem realizados fisicamente que impulsos.

- $s(t) \equiv$ resposta ao degrau (step):



$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\tau} h(\tau)\cdot d\tau$$

- Derivando ambos os lados: $s'(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$

$$s'(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot u'(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot \delta(t-\tau)\cdot d\tau \rightarrow \boxed{s'(t) = h(t)}$$

$$\boxed{s(t) = \int h(t)\cdot dt}$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{s(t)} \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow h(t)$$

Resposta impulsiva *h(t)* = derivada temporal da resposta ao degrau *s(t)*

Resposta Senoidal (Contínuo)

Considere $x(t) = e^{j\omega t}$, logo

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\
&= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= e^{j\omega t} H(j\omega)
\end{aligned}
$$

- $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg\{H(j\omega)\}}$
- $H(j\omega)$ resposta em frequência

Resposta Senoidal (Contínuo)

$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$, logo

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{j\omega t}H(j\omega) \\
&= e^{j\omega t}|H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}} \\
&= |H(j\omega)|e^{(j\omega t + \arg\{H(j\omega)\})}
\end{aligned}
$$

- $H(j\omega)$ resposta em frequência
- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$
  - $|H(j\omega)|$ resposta em módulo ou magnitude
  - $\arg\{H(j\omega)\}$ resposta em fase

Resposta Senoidal (Discreto)

Considere:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k], \text{ com } x[n] = e^{j\omega n}$$

então,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

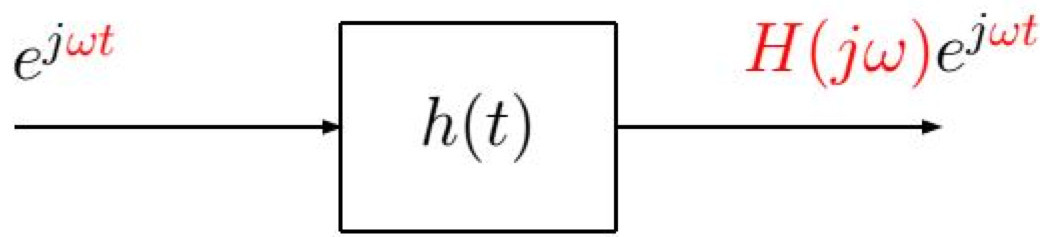
Resposta em Frequência

- $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$
  - $H(e^{j\omega})$ é chamado de *Resposta em Frequência* do sistema discreto.
- $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
  - $H(j\omega)$ é chamado de *Resposta em Frequência* do sistema contínuo.

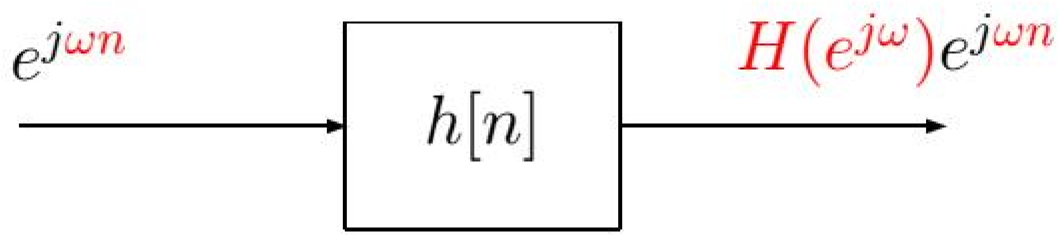
Resposta Senoidal *(Diagramas de Blocos)*

Em termos de diagrama de blocos,

- Tempo contínuo

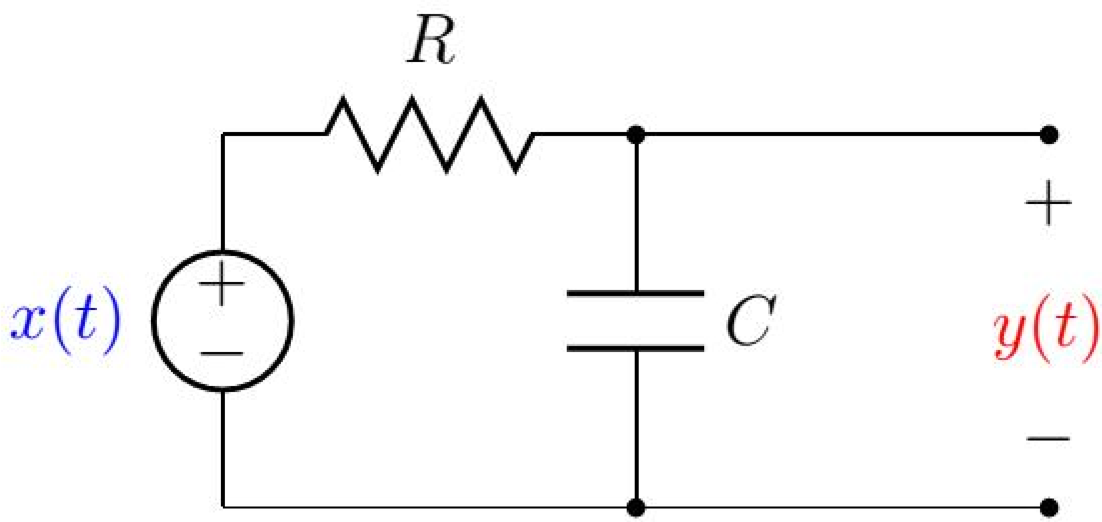


- Tempo discreto



Exemplo: resposta em frequência

Considere o seguinte circuito-RC



Sendo

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$x(t) = RC\frac{dy}{dt} + y(t)$$

Exemplo: resposta em frequência

- Calculando $H(j\omega)$,

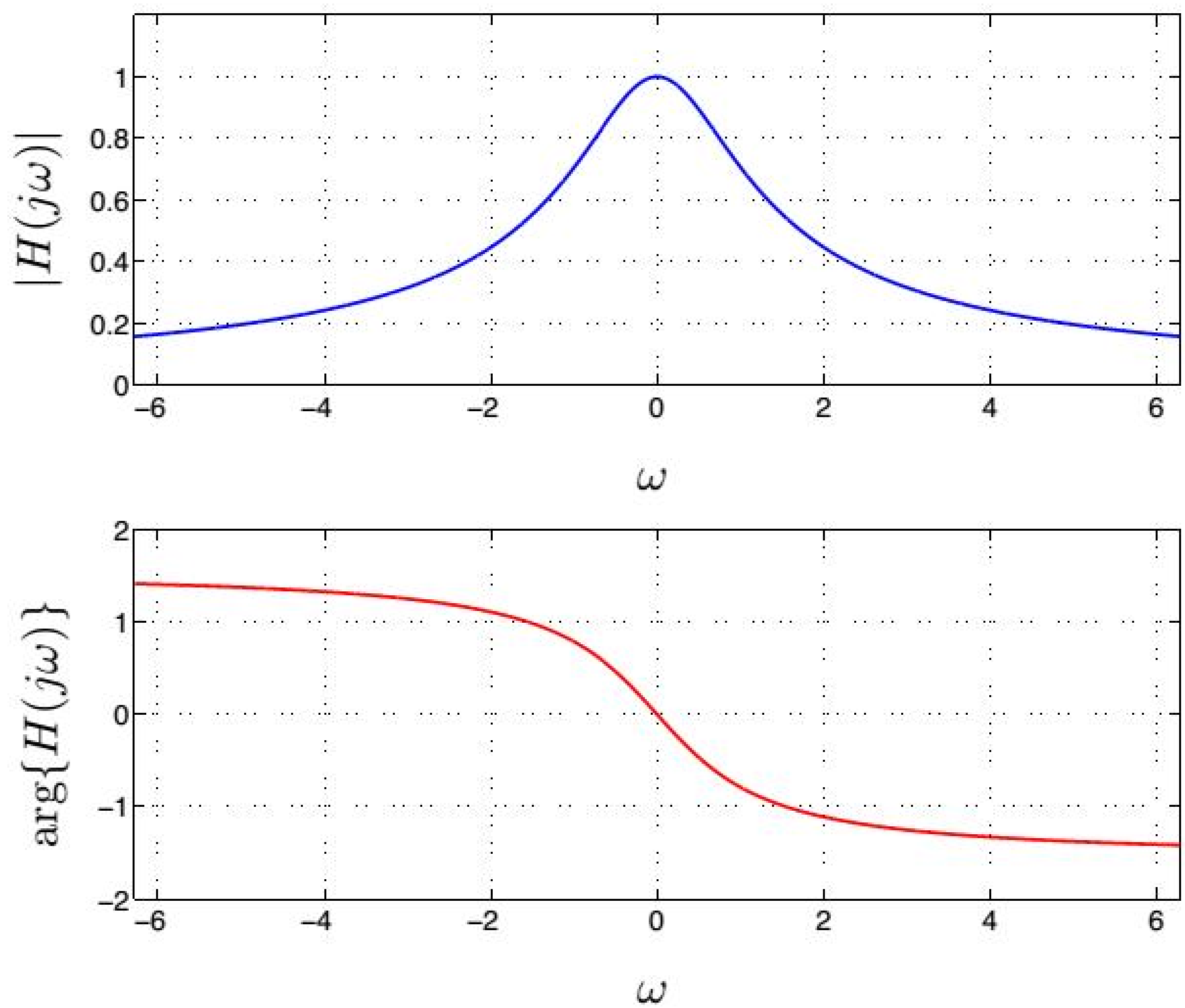
$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau)\right)}_{h(t)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} u(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{RC} \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{RC}} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} \Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}
\end{aligned}
$$

Exemplo: resposta em frequência

- Normalmente a resposta em frequência é dada em módulo e fase:

$$
\begin{aligned}
|H(j\omega)| &= \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \\
\arg(H(j\omega)) &= -\mathrm{atan}(\omega RC)
\end{aligned}
$$

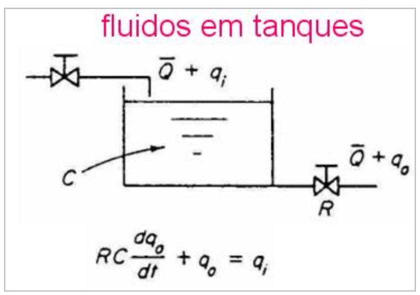
Exemplo: resposta em frequência

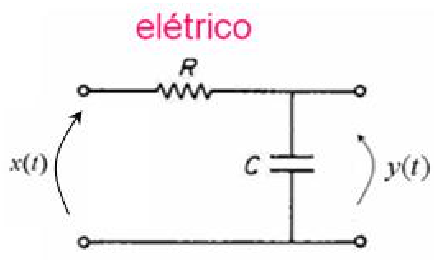


2.4.1 SLITs de tempo contínuo: modelagem por equações diferenciais

- Eq. diferencial (tempo contínuo) ou a diferenças finitas (tempo discreto), linear, com coeficientes constantes: descrevem inúmeros sistemas físicos de interesse
- Condições inicias nulas (repouso inicial: entrada nula → saída nula)

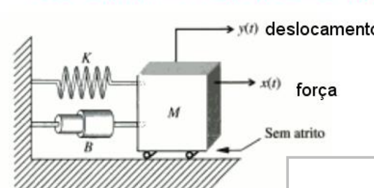
1ª. ordem



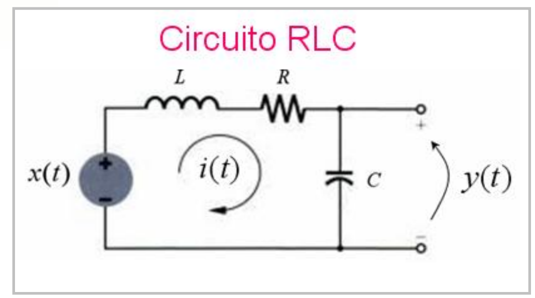


$$x(t) = RC\frac{dy}{dt} + y(t)$$

Massa (M), mola (K), atrito (B)



2ª. ordem

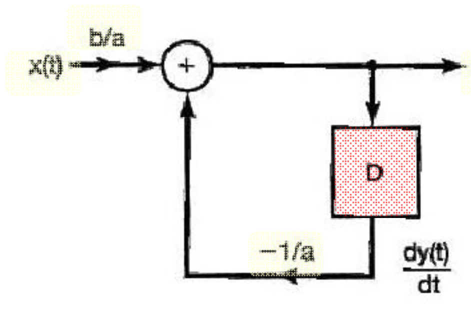


$$x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy}{dt} + y(t)$$

Respostas ao degrau?

Sistemas de tempo contínuo de ordem elevada

- 1ª. Ordem: $\dfrac{dy}{dt} + a \cdot y(t) = b \cdot x(t)$

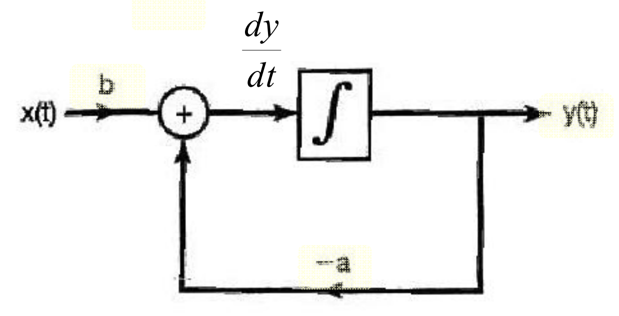


$$y(t) = \frac{-1}{a}\frac{dy}{dt} + \frac{b}{a} \cdot x(t)$$

D = derivada

problema com derivada temporal (ruído...)

$$\frac{dy}{dt} = b \cdot x(t) - a \cdot y(t)$$



- Em geral: $$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

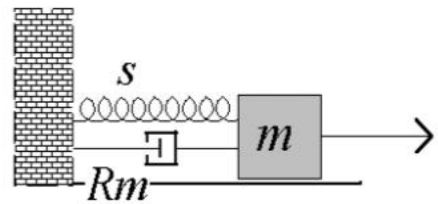
$$N = 0: \quad y(t) = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

não há recorrência a valores passados de $y(t)$

Repouso inicial!

Resposta ("solução") completa de sistemas lineares

Sistema de 2ª. ordem



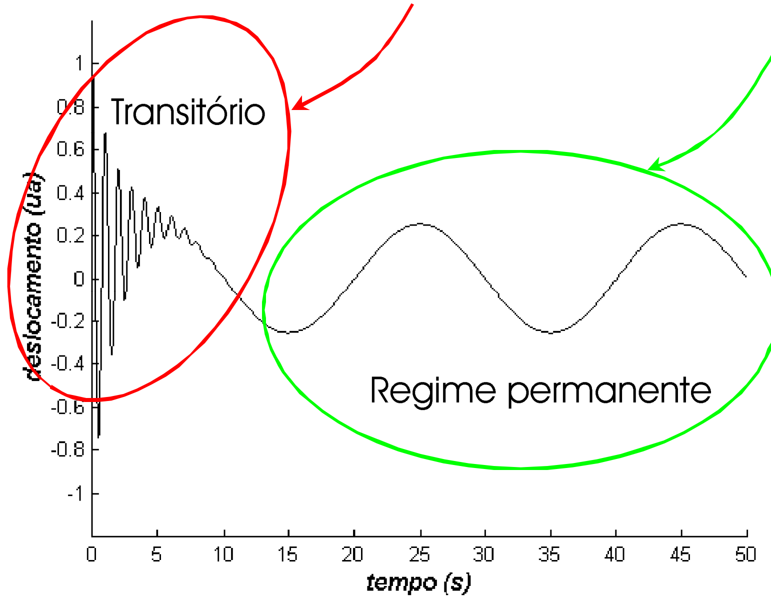
$$f(t) = re\{Fe^{j\omega t}\}$$

ω_d ω *qualquer*

freqüência natural amortecida

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\beta = \frac{R_m}{2 \cdot m}$$



- Duração e "aparência" do transitório: dependem da freqüência natural e da freqüência externa; no caso, $\omega \ll \omega_d$

Sobre a solução das equações diferenciais

$$\frac{dy}{dt} + 2y = x(t) \begin{cases} \text{resposta homogênea (livre): } x(t) = 0 \\ \downarrow \\ y(t) = y_h(t) + y_p(t) \\ \uparrow \\ \text{resposta particular (forçada): } x(t) \neq 0 \end{cases}$$

Resposta homogênea: $x(t) = 0, \quad y_h(t) = Ae^{st}$ (por quê?)

Substituindo: $\dfrac{dy_h}{dt} + 2y_h = 0 \rightarrow s \cdot Ae^{st} + 2Ae^{st} = 0 \rightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ \forall A \end{matrix}$

Resposta particular: $x_p(t) = Ke^{3t} \cdot u(t), \quad y_p(t) = Ye^{3t} \cdot u(t)$

Substituindo: $\dfrac{dy_p}{dt} + 2y_p = Ke^{3t} \rightarrow 3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \rightarrow Y = \dfrac{K}{5}$

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left[Ae^{-2t} + \tfrac{K}{5}e^{3t}\right] \cdot u(t)}$$

Uso de “transformadas”...

EDL: Resposta Natural

$$a_1 \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + a_2 \frac{d y_n(t)}{dt} + a_3 y_n(t) = 0$$

- $y_n(t) = ?$
- $\dfrac{d^k}{dt^k}(ce^{\lambda t}) = \lambda^k c e^{\lambda t}$

logo,

$$\begin{aligned} c(a_1\lambda^2 e^{\lambda t} + a_2 \lambda e^{\lambda t} + a_3 e^{\lambda t}) &= 0 \\ c\,\underbrace{(a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)}_{\text{Eq. característica}}\, e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

EDL: Exercício *(Resposta Natural)*

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 0$$

EDL: Solução (Resposta Natural)

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 0$$

- Logo a equação característica é

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0$$

Então, raízes distintas,

$$y_n(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}$$

EDL: Exercício *(Resposta Natural)*

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$$

EDL: Solução (Resposta Natural)

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$$

- Logo a equação característica é

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

Então, raízes repetidas,

$$y_n(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

EDL: Resposta Forçada

- Problema, encontrar $y_p(t)$, tal que

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_p(t)}{dt} + y_p(t) = f(x)$$

  - A combinação de $y_p(t)$ com suas derivadas deve ser igual a $f(x)$;
  - Escolha: $y_p(t)$ com a mesma "forma"que $f(x)$;

EDL: Exemplo *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 3t + 2$$

- Logo, um palpite é $y_p(t) = \alpha t + \beta$, logo

$$(0) + 3(\alpha) + 4(\alpha t + \beta) = 3t + 2$$

Comparando os termos,

$$4\alpha = 3 \;\; \text{e} \;\; 3\alpha + 4\beta = 2$$

Obtendo, $\alpha = 3/4$ e $\beta = -1/16$, então

$$y_p(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{16},$$

EDL: Exercício *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = 2e^{3t}$$

EDL: Solução *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = 2e^{3t}$$

- Logo, um palpite é $y_p(t) = \alpha e^{3t}$, logo

$$(9\alpha e^{3t}) - 4(\alpha e^{3t}) = 2e^{3t}$$

Comparando os termos,

$$5\alpha = 2 \text{ logo } \alpha = 2/5$$

Obtendo,

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{3t},$$

Equações diferenciais lineares (EDL)

Sistematização para obtenção da solução:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

1) Obtenha a resposta natural, $y_n(t)$
2) Obtenha a resposta forçada, $y_p(t)$
3) Com as condições iniciais, obtenha o valor dos coeficientes constantes

EDL: Exemplo (Resposta Completa)

Encontre a solução de

$$5\dot{y}(t) + y(t) = t + 10, \text{ com } y(0) = -10$$

A eq. característica é:

$$5\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = -0{,}2$$

- A resposta natural é

$$y_n(t) = ke^{-0{,}2t}$$

EDL: Exemplo (Resposta Completa)

- Um palpite para solução forçada é:

$$y_p(t) = c_1 t + c_0$$

então,

$$\begin{aligned} 5\dot{y}(t) + y(t) &= t + 10 \\ +5c_1 + (c_1 t + c_0) &= t + 10 \end{aligned}$$

logo $c_1 = 1$, e $, c_0 = 5$, portanto

$$y_p(t) = t + 5$$

EDL: Exemplo *(Resposta Completa)*

- Então a solução é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + y_p(t) \\ &= ke^{-0{,}2t} + t + 5 \end{aligned}$$

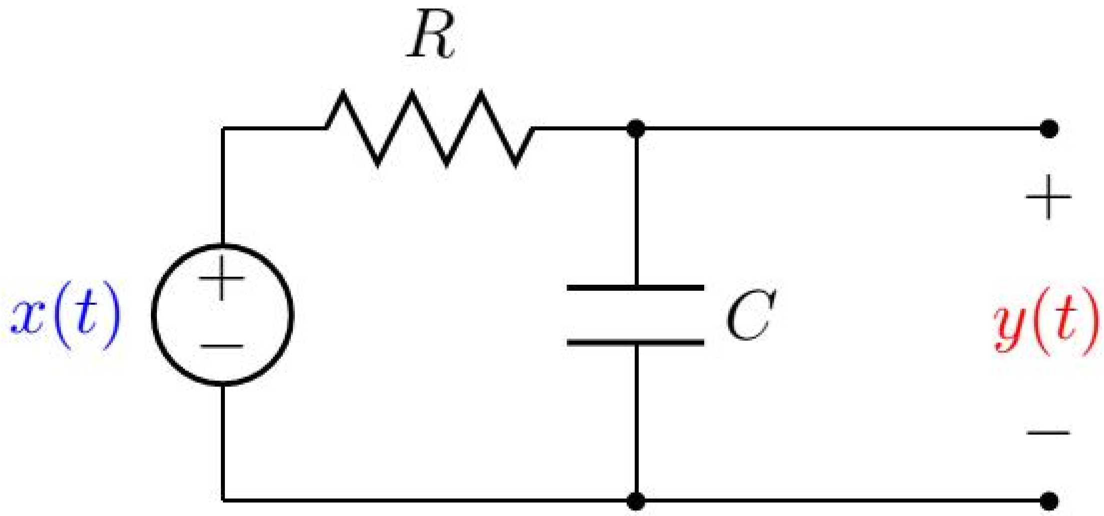
- Considerando $y(0) = -10$, temos

$$\begin{aligned} y(0) &= ke^{0} + 0 + 5 \\ &= k + 5 = -10 \quad \longrightarrow k = -15 \end{aligned}$$

- Portanto: $y(t) = -15e^{-0{,}2t} + t + 5$

EDL: Exercício *(Resposta Completa)*

Encontre a resposta ao degrau unitário do sistema



assuma condições iniciais nulas.

EDL: Solução (Resposta Completa)

- Tensão e Corrente

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ri + \frac{1}{C}\int i dt \\
y(t) &= \frac{1}{C}\int i dt \rightarrow i = C\dot{y}(t)
\end{aligned}
$$

- Logo, $x(t) = RC\dot{y} + y$, então

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

EDL: Solução *(Resposta Completa)*

- Resposta natural

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0$$

Logo:

$$y_n(t) = c_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

EDL: Solução (Resposta Completa)

- Resposta forçada, note que

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Então, para ($t > 0$) consideramos $y_p(t) = c_1$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) &= \frac{1}{RC}x(t) \\ 0 + \frac{1}{RC}c_1 &= \frac{1}{RC}1, \quad \rightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

Logo:

$$y_p(t) = 1u(t)$$

EDL: Solução *(Resposta Completa)*

- Resposta completa:

$$y(t) = [c_0 e^{-\frac{t}{RC}} + 1]u(t)$$

sabendo que $y(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 e^{-\frac{0}{RC}} + 1 \\ &= c_0 + 1 = 0 \quad \rightarrow c_0 = -1 \end{aligned}$$

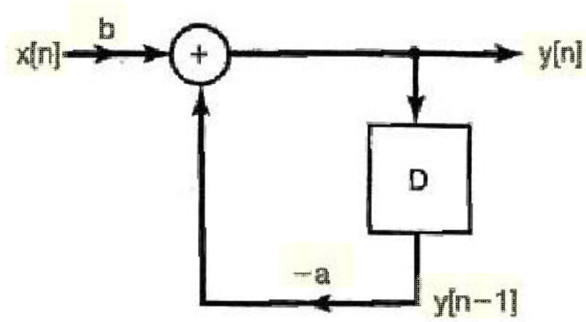
Logo:

$$y(t) = [1 - e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$

2.4.1 SLITs de tempo discreto: modelagem por equações a diferenças finitas

- 1ª. Ordem:

$$y[n] + a_0 \cdot y[n-1] = b \cdot x[n]$$



D = atraso

- Em geral: $$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

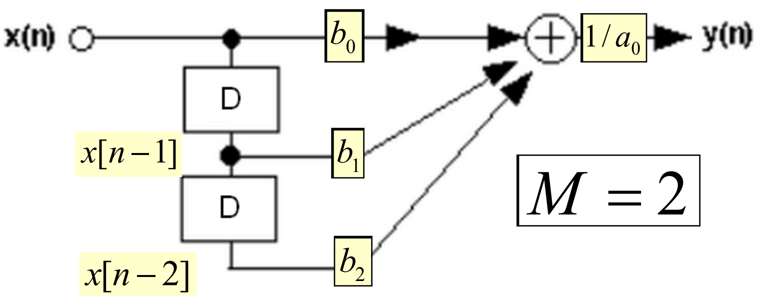
Memória de entradas e saídas

$$N = 0 : \qquad y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k]$$

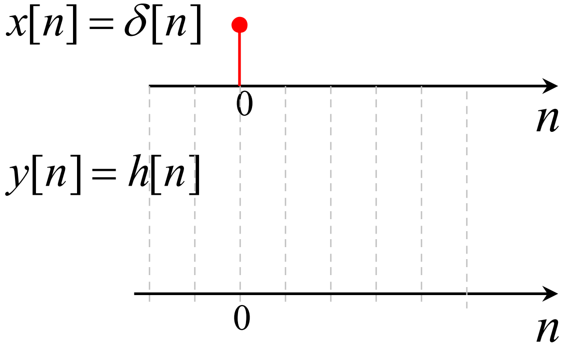
Memória somente de entradas

Resposta impulsiva finita (FIR) e infinita (IIR)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k]$$

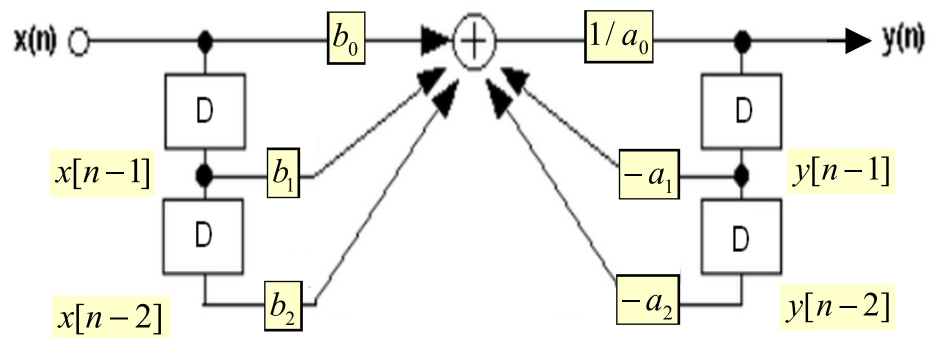


$M = 2$



$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$



$M = N = 2$

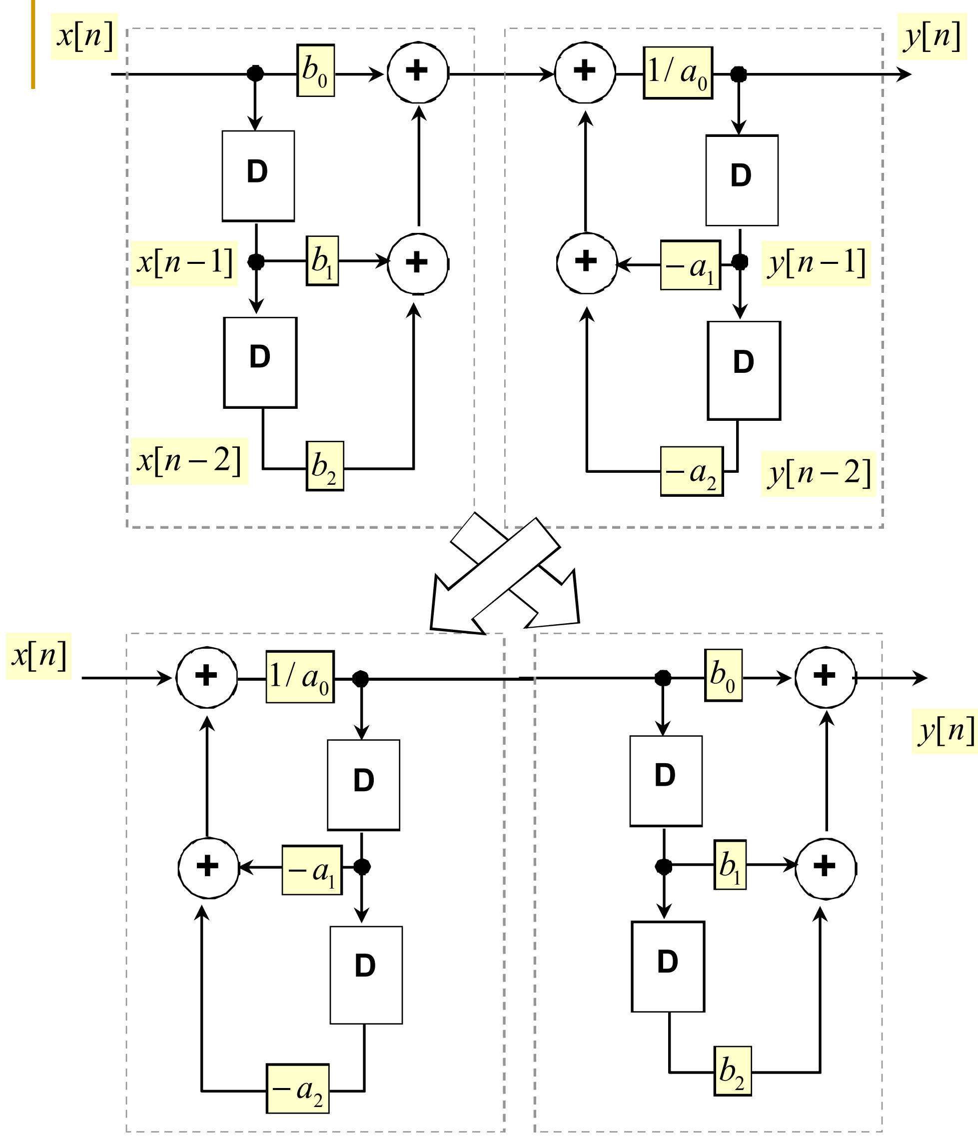
Saída ≠ 0 (e realimentada) após entrada ir a zero.

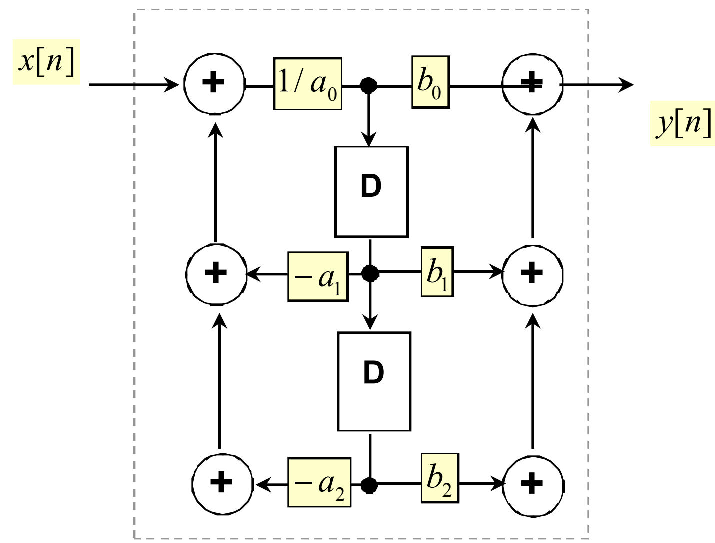
$h[n]$ = duração finita (FIR)

$h[n]$ = duração infinita (IIR)

Topologias de sistemas recursivos

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$





Solução de equações a diferenças finitas (Ex. 2.15)

Determinar a resposta impulsiva do sistema de 1ª. Ordem (com repouso inicial):

$$y[n]-\tfrac{1}{2}y[n-1]=x[n] \quad \rightarrow \boxed{y[n]=x[n]+\tfrac{1}{2}y[n-1]}$$

$$x[n]=K\delta[n] \longrightarrow y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=K,$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}K,$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{2}y[1]=\left(\frac{1}{2}\right)^2 K,$$

$$\vdots$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^n K.$$

$$\boxed{\therefore h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]}$$

De forma geral, se

$$y[n]-\alpha y[n-1]=x[n]$$

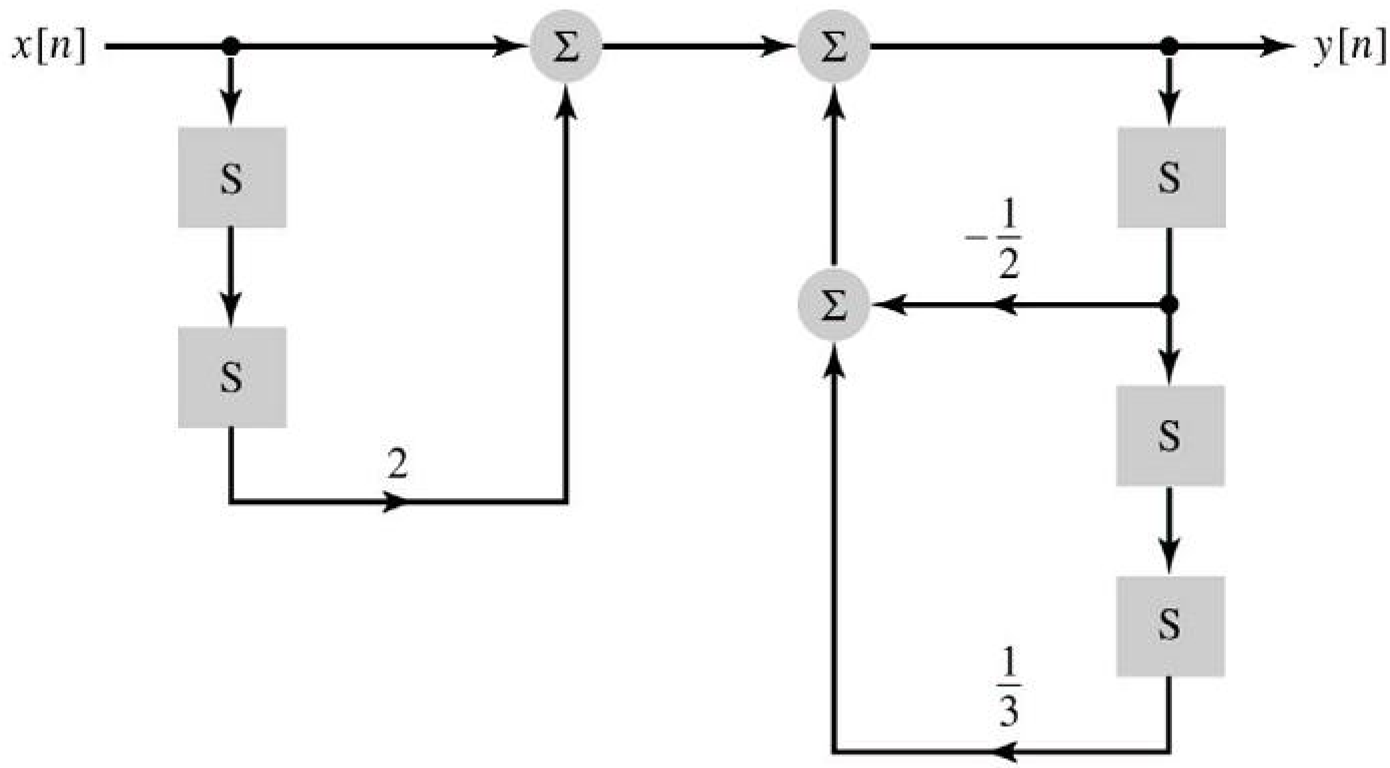
e α<1

$$\Rightarrow h[n]=\alpha^n \cdot u[n]$$

Uso da Transformada Z para resolver eq. a diferenças ...

Exercício

- Determine a equação diferença que gerou o diagrama.



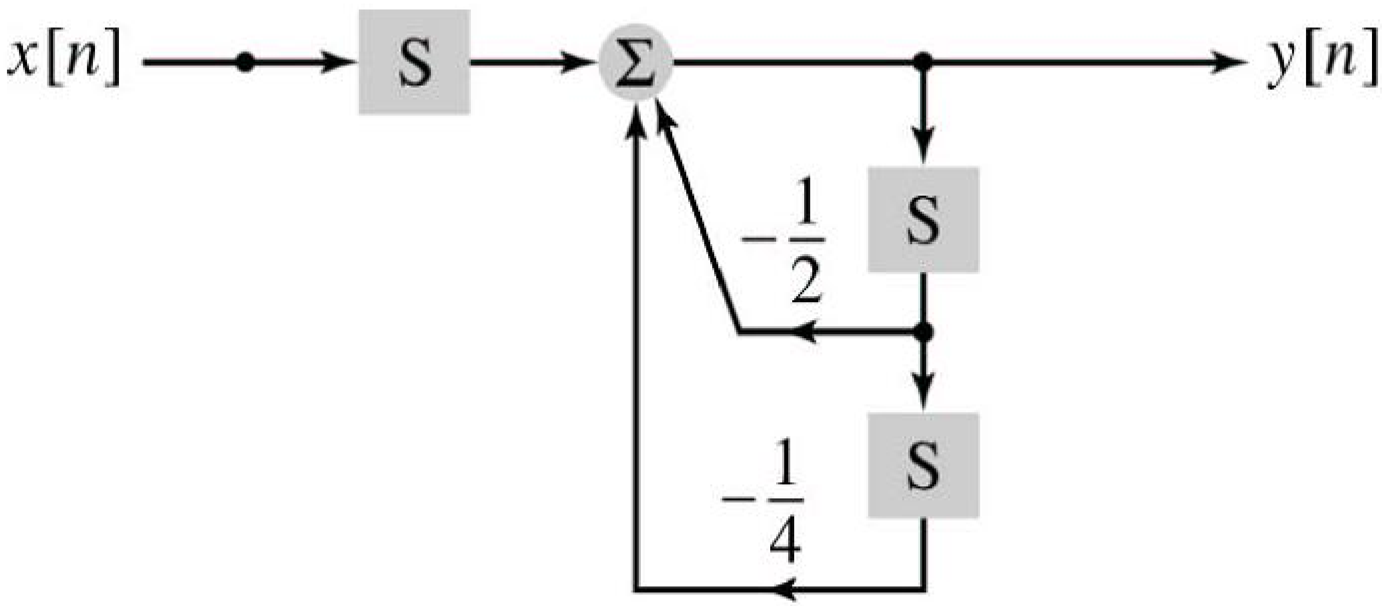
(a)

A solução é:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-3] = x[n] + 2x[n-2]$$

Exercício

- Determine a equação diferença que gerou o diagrama.



(b)

A solução é:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1]$$

2.19 Considere a cascata dos dois sistemas a seguir, S_1 e S_2, como representado na Figura P2.19:

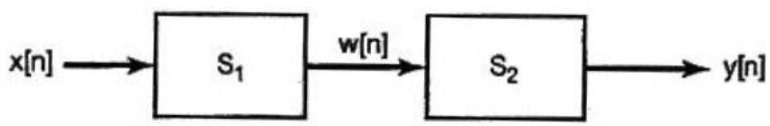


Figura P2.19

S_1: LIT causal,

$$w[n] = \frac{1}{2} w[n-1] + x[n];$$

S_2: LIT causal,

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n].$$

A equação de diferenças que relaciona $x[n]$ e $y[n]$ é:

$$y[n] = -\frac{1}{8} y[n-2] + \frac{3}{4} y[n-1] + x[n]. \quad (i)$$

(a) Determine α e β.

(b) Encontre a resposta ao impulso da conexão em cascata de S_1 e S_2.

$$a)\ y[n] = \alpha \cdot y[n-1] + \beta \underbrace{\left\{\tfrac{1}{2} w[n-1] + x[n]\right\}}_{=w[n]} \quad (ii)$$

$$De\ S_2:\ y[n-1] = \alpha \cdot y[n-2] + \beta \cdot w[n-1]$$

Isolando $w[n-1]$ *e substituindo em* (ii) *vem*:

$$y[n] = -\tfrac{\alpha}{2} y[n-2] + (\alpha + \tfrac{1}{2}) y[n-1] + \beta x[n]$$

Comparando com (i) *tem-se* $\alpha = \tfrac{1}{4}$ *e* $\beta = 1$

$$b)\ h_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot u[n], \quad h_2[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]$$

$$h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] u[-k] \cdot h_2[n-k] u[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{n} h_1[k] \cdot h_2[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-k} =$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \frac{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-(n+1)}}{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}} \rightarrow (\ldots) = h[n] = \left[2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right] \cdot u[n]$$

Exercícios recomendados

- 2.1; 2.3; 2.4; 2.6; 2.8; 2.10; 2.11; 2.14; 2.15; 2.18; 2.19;
- 2.21a,b,d; 2.22a,c; 2.23; 2.29; 2.31; 2.32a,b; 2.38; 2.39
- 2.61a, 2.62