# Modulo 01 – Sinais e sistemas Exercícios

# 1.1.2 Energia total ($E_\infty$) e potência total ($P_\infty$)

- Definições sem rigor no significado físico

**contínuo**

$$\boxed{E_\infty} \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt}$$

$$\boxed{P_\infty} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$$

**discreto**

$$\boxed{E_\infty} \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2}$$

$$\boxed{P_\infty} \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

# Soma de progressões geométricas

Exercício 1.54

$$\boxed{\sum_{n=k}^{N-1}\alpha^n = \frac{\alpha^k - \alpha^N}{1-\alpha}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}}$$

**1.3** Determine os valores de $P_\infty$ e $E_\infty$ para cada um dos seguintes sinais:

**(a)** $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-2t} \cdot u(t)\right]^2 \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-4t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-4t}\, dt = \frac{1}{4}$$

**(b)** $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$ $\qquad |x_2(t)| = 1$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 \cdot dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x_2(t)|^2 \cdot dt$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1 \cdot dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, t\Big|_{-T}^{T} = 1$$

**(d)** $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$E_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

**(f)** $x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} 1}_{=2N+1} + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \cos\frac{n\pi}{2}}_{=0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

**1.55** Usando os resultados do Problema 1.54, calcule cada uma das somas a seguir e expresse sua resposta na forma cartesiana (retangular):

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}}$$

a) $$\sum_{n=0}^{9} e^{jn\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{9} \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n =$$

$$\frac{1-e^{j\frac{\pi}{2}\times 10}}{1-e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1-e^{j5\pi}}{1-j} = \frac{1-(-1)}{1-j}$$

$$= \frac{2}{1-j} = \frac{2(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{2(1+j)}{1-(-1)} =$$

$$= 1+j$$

b) $$\sum_{n=-2}^{7} e^{jn\frac{\pi}{2}} = \sum_{r=0}^{9} e^{j(r-2)\frac{\pi}{2}} =$$

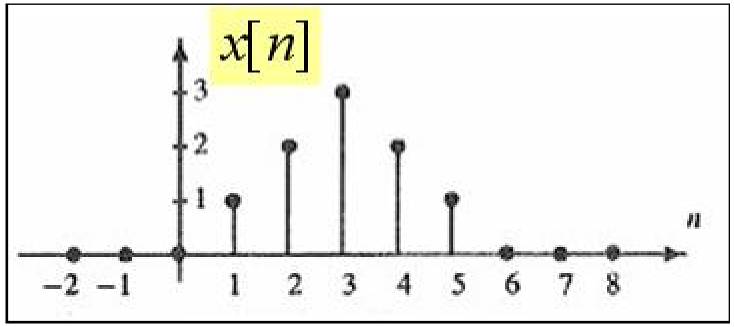
$(r=n+2)$

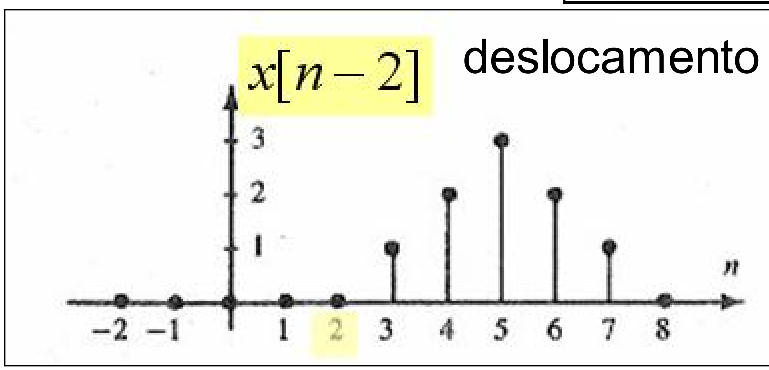
$$= \sum_{r=0}^{9} e^{jr\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

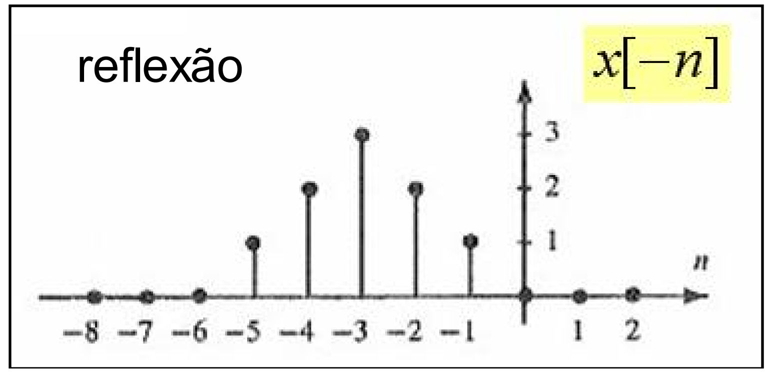
$$= \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1} \underbrace{\sum_{r=0}^{9} e^{jr\frac{\pi}{2}}}_{\text{"a"}} =$$

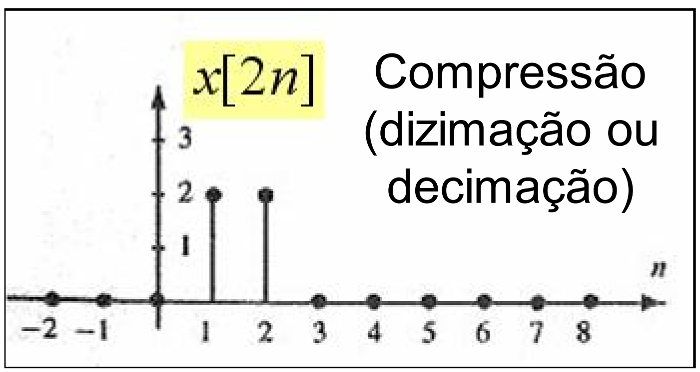
$$-(1+j)$$

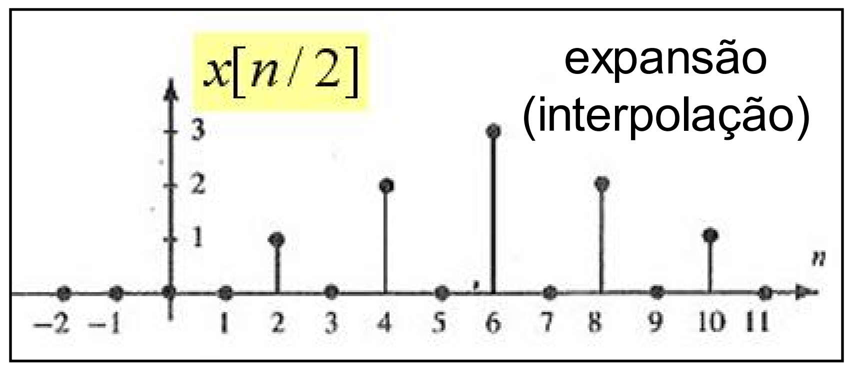
# Transformações da variável independente discreta



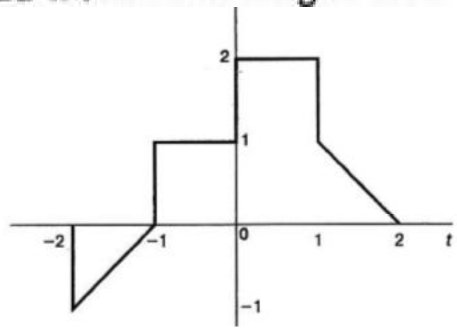



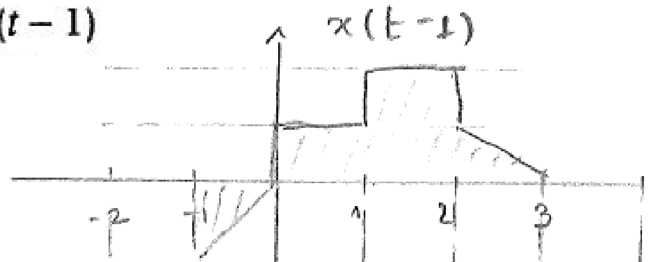



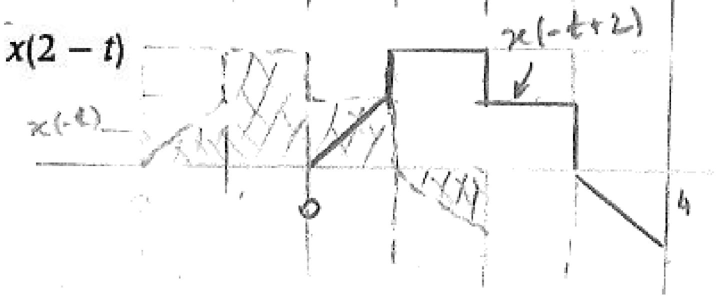
**1.21** Um sinal de tempo contínuo $x(t)$ é mostrado na Figura P1.21. Esboce e coloque a escala cuidadosamente para cada um dos seguintes sinais:



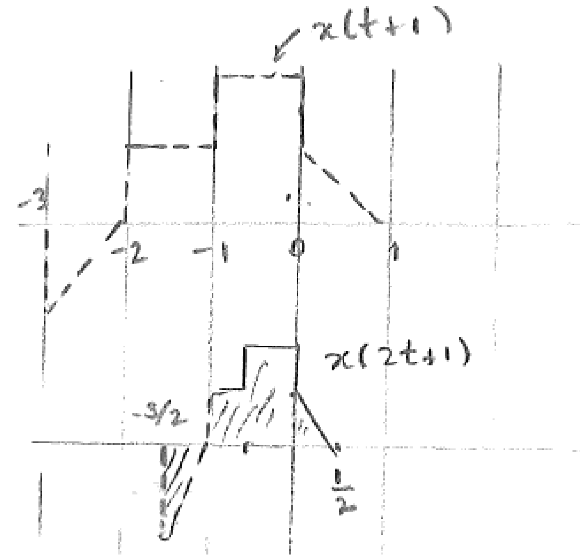
**(a)** $x(t-1)$



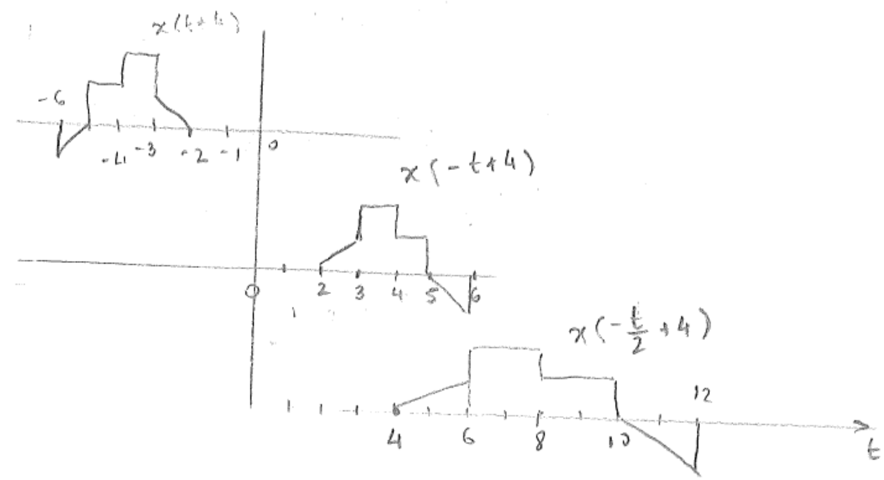

**(b)** $x(2-t)$




**(c)** $x(2t+1)$

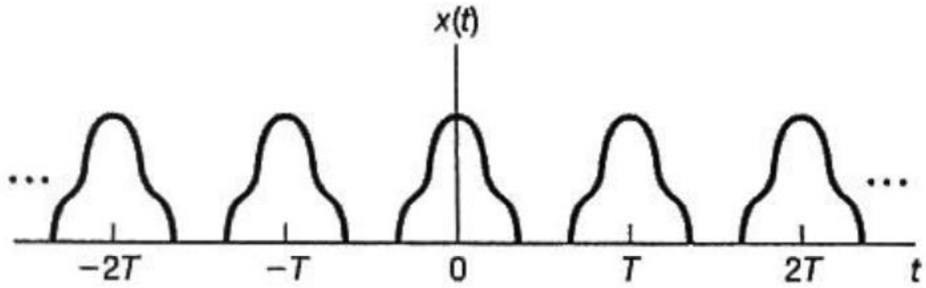



**(d)** $x(4-\frac{t}{2})$



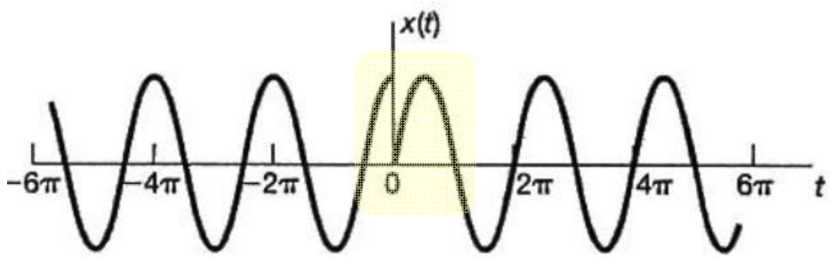
# 1.2.2 Sinais periódicos

- Periódico com período $T > 0$: $x(t) = x(t+T)$




$$x(t) = x(t+mT),$$
$$m \ inteiro$$

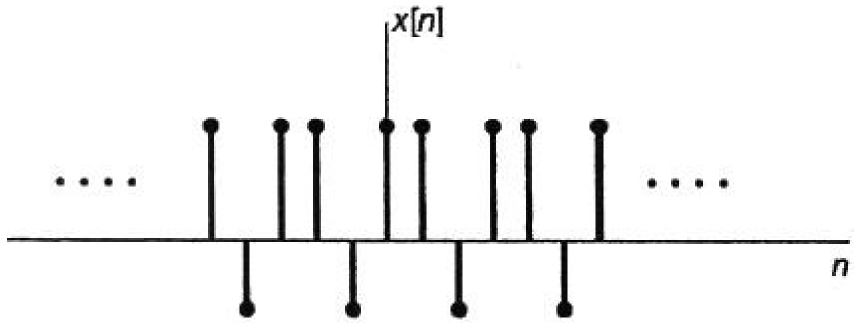
- Também é periódico com *2T, 3T, ...*
- Período fundamental: $T_0$ = *menor período que satisfaz*
- Sinal aperiódico: não satisfaz $x(t) = x(t+mT)$



# 1.2.2 Sinais periódicos

Tempo discreto

$$x[n] = x[n + mN], \quad m,\ N = inteiros$$




(período fundamental: $N_0 = 3$)

# 1.3.1 Sinais senoidais e exponenciais complexas periódicas

$\boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t}}$ complexa e periódica

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

$$se \;\; T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \;\; e^{j\omega_0 T} = e^{j2\pi} = 1$$

($T_0$ = período fundamental)

$$De\ forma\ similar,$$

$$se \;\; T = k \cdot T_0, \;\; e^{j\omega_0 \cdot kT_0} = e^{j2k\pi} = 1$$

(harmônicos: $k\omega_0$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$)

Funções harmonicamente relacionadas: $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 \cdot t}$

múltiplos inteiros de uma freqüência fundamental

# 3. Discreto: não é periódico para qualquer $\omega_0$

- Para $e^{j\omega_0 n}$ ser periódico com período N>0,

$$e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{j\omega_0 N}}}_{} \quad = 1?$$

$$e^{j\omega_0 N} = 1 \quad \boxed{se \;\; \omega_0 N = 2\pi \cdot m}$$

$$\boxed{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{m}{N}, \quad m \; e \; n = inteiros$$

Deve ser um número racional

Caso contrário, $e^{j\omega_0 n}$ será aperiódico

# 1) Discreto: Sinais não distintos para qualquer $\omega_0$

$$\underbrace{e^{j(\omega_0+2\pi)n}} = \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} e^{j\omega_0 n} = \underbrace{e^{j\omega_0 n}}.$$

Sinais iguais para $\omega_0 \pm 2\pi,\ \omega_0 \pm 4\pi,\ \ldots$

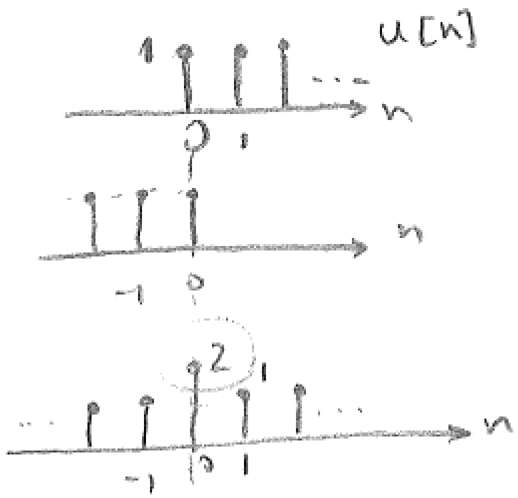
Sinais discretos: Considerar apenas o intervalo

$$\boxed{0 \le \omega_0 < 2\pi} \quad ou \quad \boxed{-\pi \le \omega_0 < \pi}$$

**1.6** Determine se cada um dos sinais a seguir é ou não periódico:

**(a)** $x_1(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$

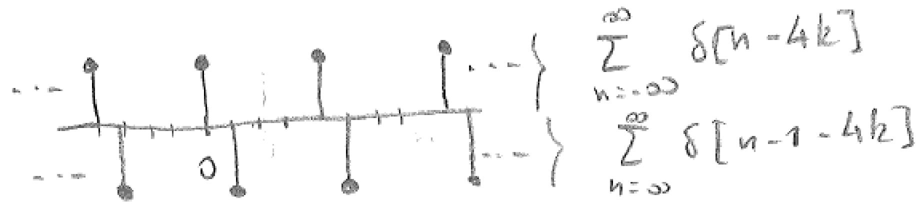
**(b)** $x_2[n] = u[n] + u[-n]$




$= 1[n] + 2\,\delta[n]$

ñ periódico

**(c)** $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]\}$




periódico $N = 4$

## 1.10 Determine o período fundamental do sinal

$x(t) = 2\cdot\cos(10t+1) - \operatorname{sen}(4t-1)$

$\left\{\begin{array}{l} w = 10 \\ T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \end{array}\right.$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{l} w = 4 \\ T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\}$ $MMC\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$

$MMC\left(\frac{1}{5}\times\pi, \frac{1}{2}\times\pi\right) = \pi$

**1.9** Determine se cada um dos sinais é ou não periódico. Se um sinal for periódico, especifique seu período fundamental.

**(a)** $x_1(t) = je^{j10t}$

$\therefore\ \omega = 10$ (periódica)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

**(b)** $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

$$= e^{-t} \cdot e^{-jt}$$

ñ periódico

**(c)** $x_3[n] = e^{j7\pi n}$ $= e^{j(6+1)\pi n} =$

$w_0 > \pi$

$$= \underbrace{e^{j6\pi n}}_{=1} \cdot e^{j\pi n} = e^{j\pi n}$$

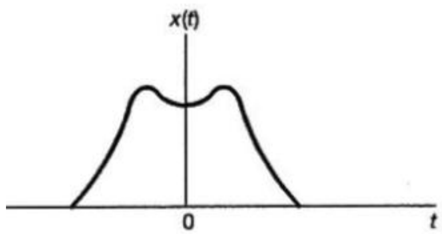
$$\frac{w_0}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = \frac{m}{N}$$

racional, m e n = inteiros

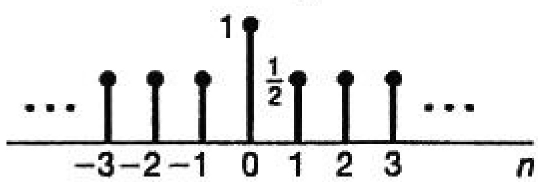
$\boxed{N = 2}$ periódico

# 1.2.3 Simetria de sinais

Simetria par

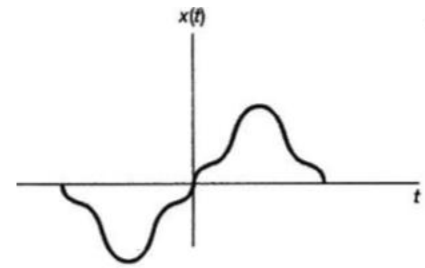



$$x(t) = x(-t)$$

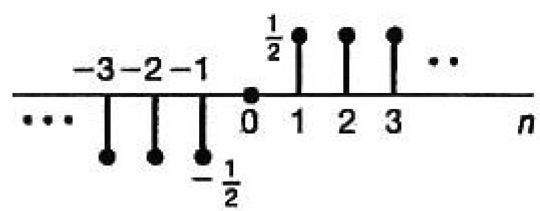



$$x[n] = x[-n]$$

Simetria ímpar




$$x(t) = -x(t)$$




$$x[-n] = -x[n]$$

# 1.2.3 Simetria de sinais

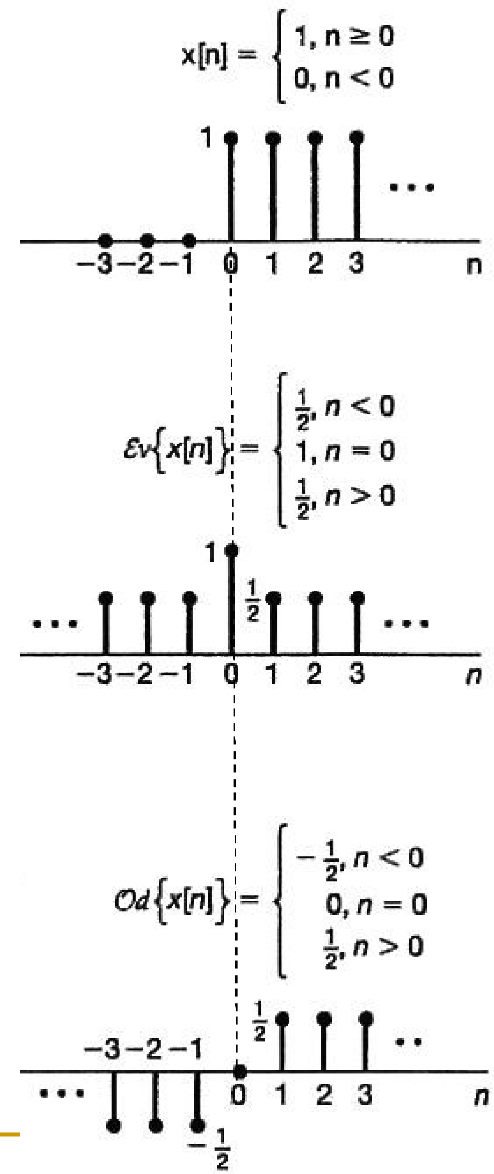
Decomposição
de um sinal qualquer

parte par (even) — parte ímpar (odd)

$$x(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} + \mathcal{O}d\{x(t)\}$$

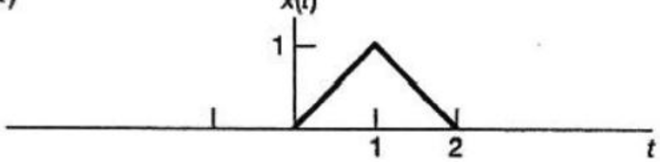
$$\tfrac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] + \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Ex. (tempo discreto)

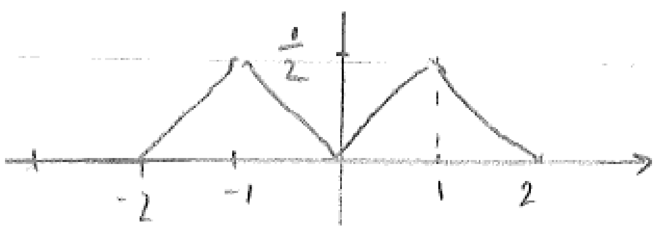


**1.23** Determine e esboce as partes par e ímpar dos sinais representados na Figura P1.23. Coloque cuidadosamente escala em seus esboços.

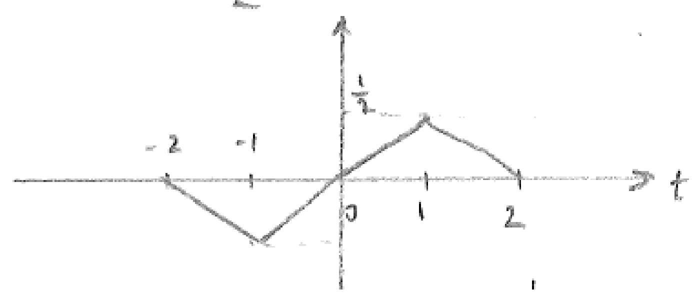
(a)



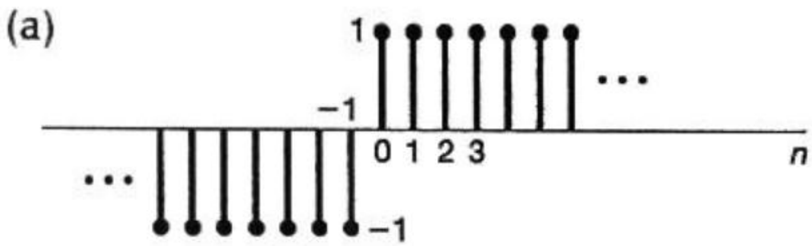

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

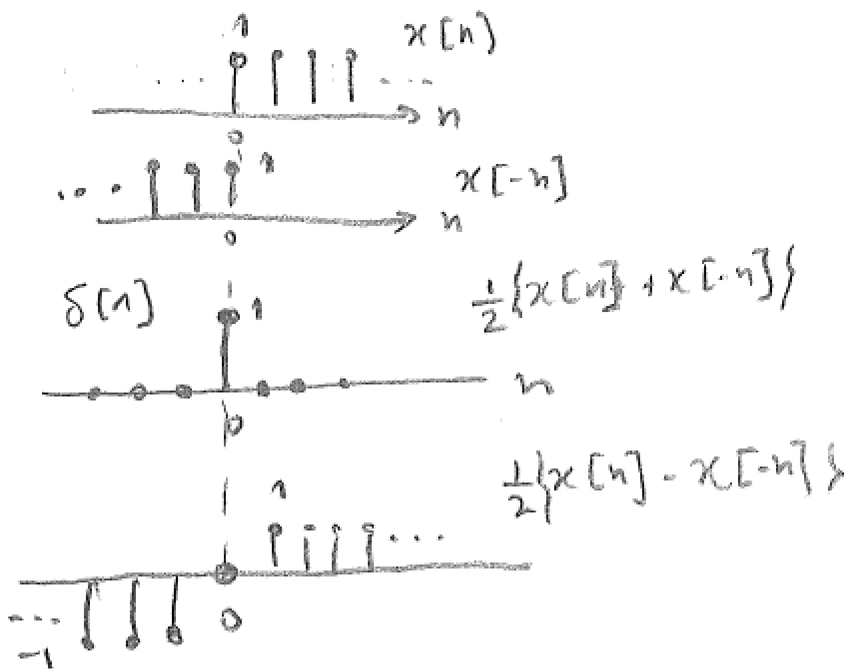



$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$



**1.24** Determine e esboce a parte par e a parte ímpar dos sinais representados na Figura P1.24. Coloque cuidadosamente escala em seus esboços.



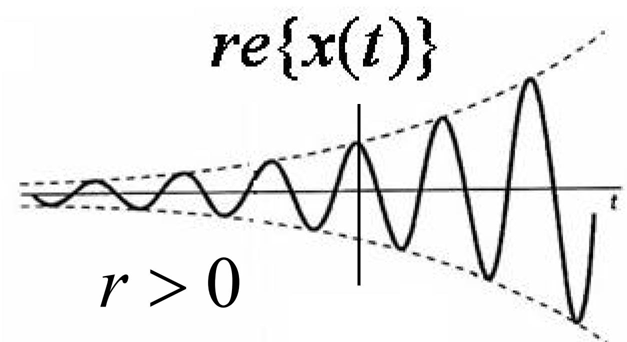



# Exponenciais complexas generalizadas

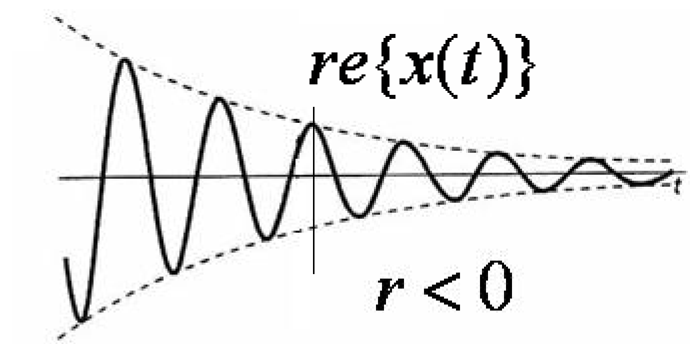
$$x(t) = Ae^{rt} \cdot e^{j\omega_0 t} = \underbrace{Ae^{(r+j\omega_0)t}}_{\substack{\text{fasor cuja amplitude} \\ \text{varia exponencialmente com o tempo}}}$$

$$x(t) = A\cos(r + j\omega_0) + jsen(r + j\omega_0)$$

crescimento exponencial




decaimento exponencial



# 1.3.2 Senoide e exponenciais de tempo discreto

- Notação geral usual:

$$x[n] = C\alpha^n$$

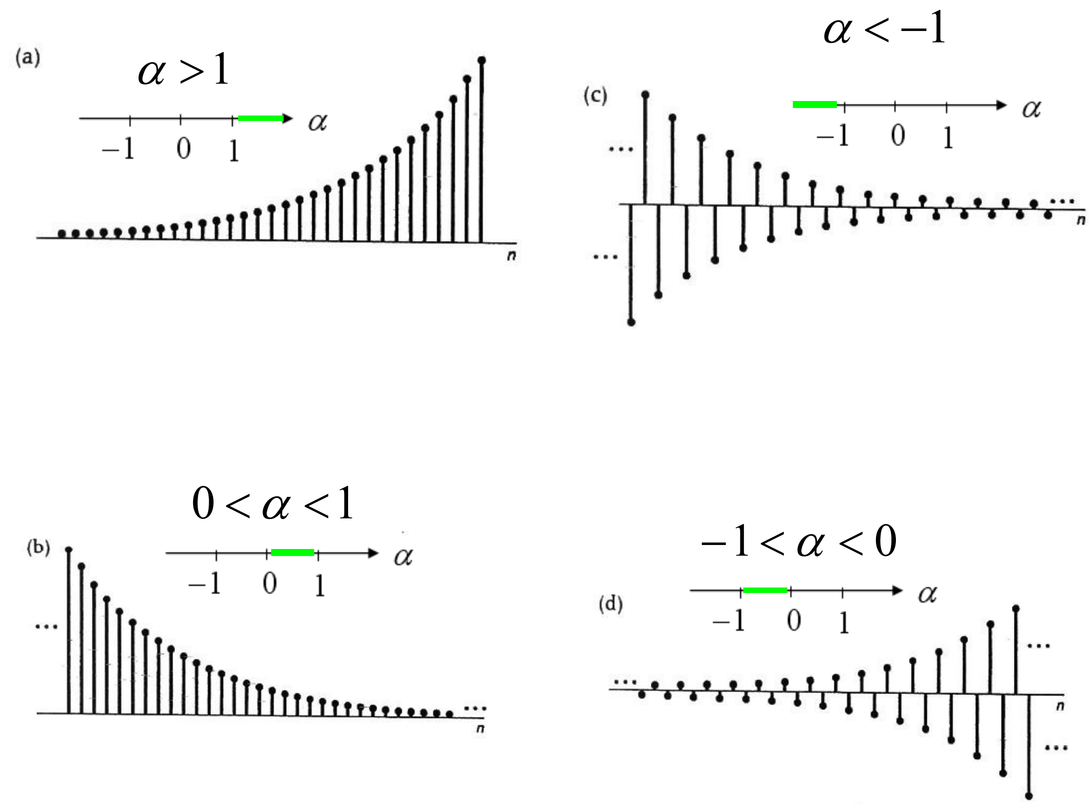
complexos

Forma alternativa

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

$$\alpha = e^{\beta}$$

- $C$ , $\alpha$ reais:



**1.8** Expresse a parte real dos sinais a seguir na forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$ sendo $A$, $a$, $\omega$ e $\phi$ números reais com $A > 0$ e $-\pi < \phi \leq \pi$:

**(a)** $x_1(t) = -2$

$$Re[x_1(t)] = \underset{\underset{2}{\downarrow}}{A}\, e^{-\underset{\underset{0}{\downarrow}}{a}t} \cdot \cos(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\omega} t + \underset{\underset{\pi}{\downarrow}}{\phi})$$

**(c)** $x_3(t) = e^{-t}\text{sen}(3t + \pi)$

$$= e^{-t} \cdot \cos\left(3t + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

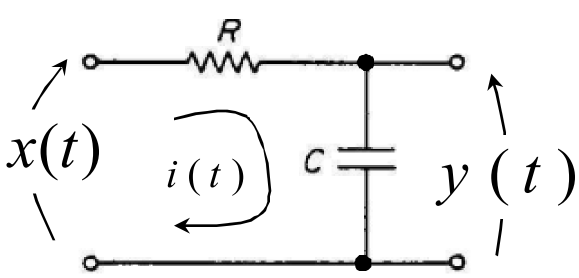
$$= \underset{\underset{A}{\downarrow}}{1} \cdot e^{-\underset{\underset{a}{\downarrow}}{1}t} \cos\left(\underset{\underset{\omega}{\downarrow}}{3}t + \underset{\underset{\phi}{\downarrow}}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

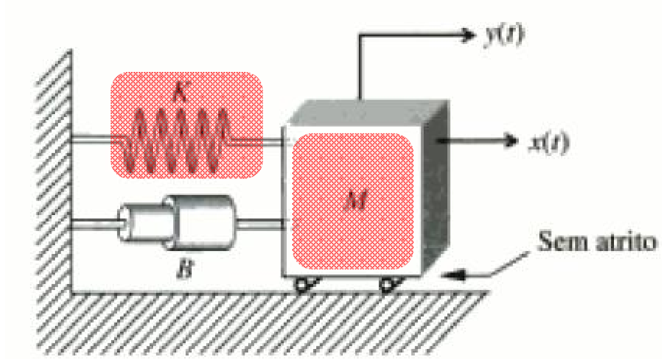
# 1.6. Propriedades básicas de sistemas

- Memória $\leftrightarrow$ mecanismos de armazenamento de energia ou informação
- Sistema sem memória (instantâneo): saída num dado instante depende apenas da entrada naquele instante

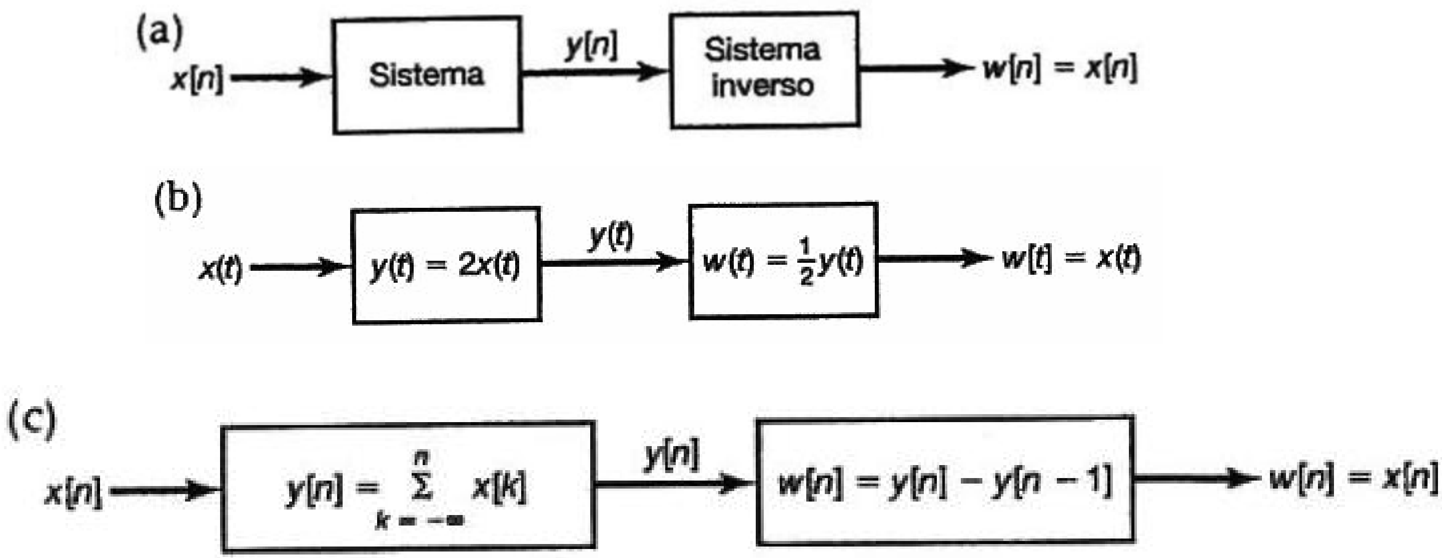
$$y(t) = Rx(t) \qquad\qquad y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

- Sistemas com memória em tempo contínuo (exemplos)



- Invertível: entradas distintas levam a saídas distintas

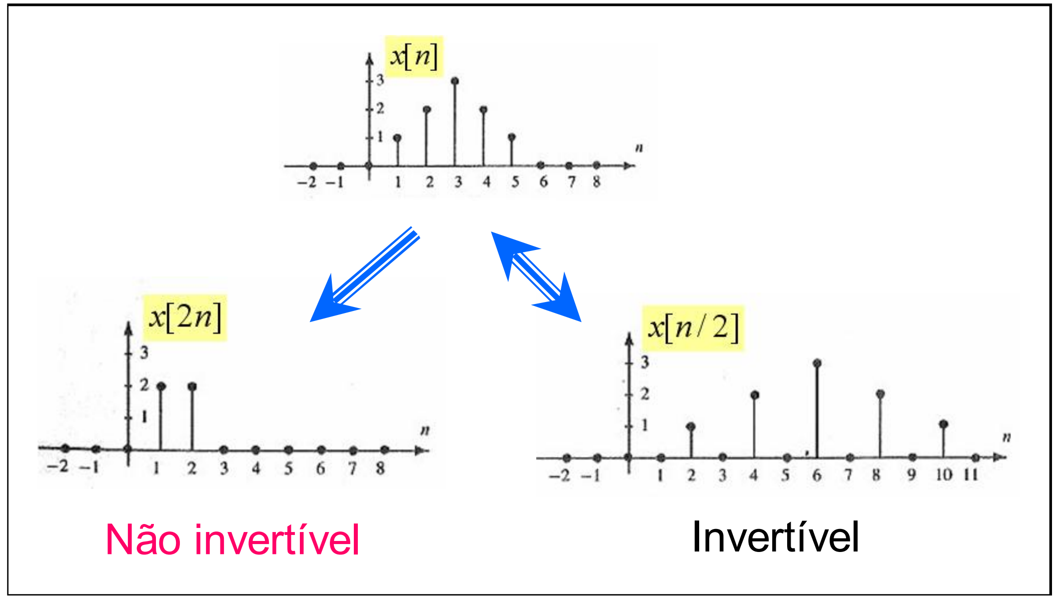


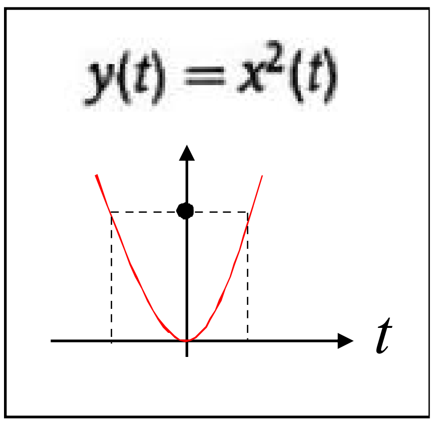
## Exemplos

Mesma saída para entradas diferentes

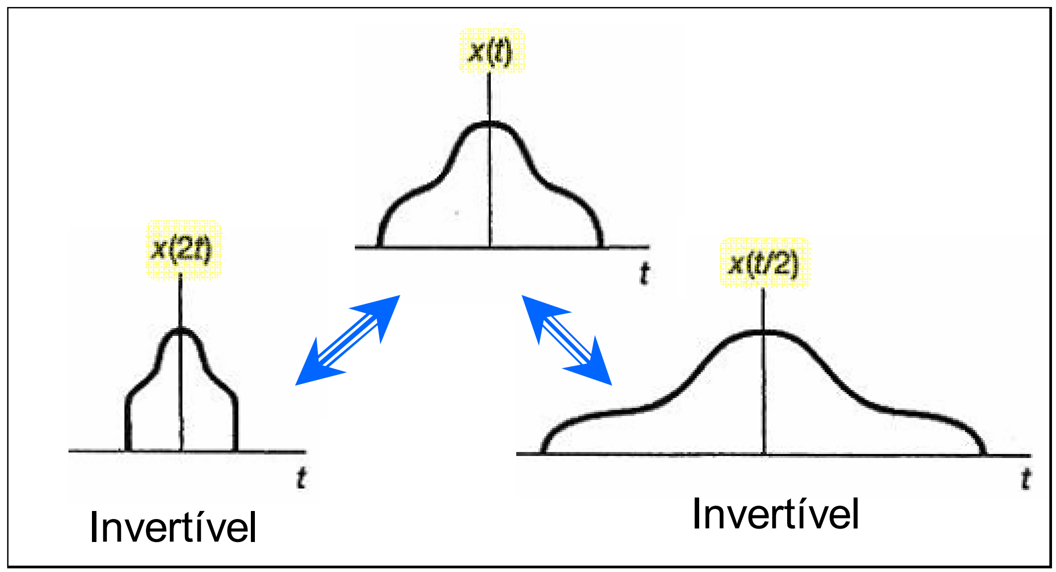
$$y(t) = 10$$

Não invertível




Não invertível



# Causalidade

- Sistema causal: saída, em qualquer instante, depende somente da entrada atual e/ou passadas
- Sistemas físicos (circuitos elétricos, sistemas mecânicos, etc.) são causais (não antecipativos)
- Sistema sem memória são causais
- Não causalidade: processamento *off-line* de sinais

futuro

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k].$$

passado

# Invariância no tempo

- Sistema invariante no tempo:
  - comportamento e características não variam ao longo do tempo
  - deslocamento de tempo na entrada → deslocamento idêntico na saída:

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y[n-n_0]$$

# 1.6.6 Linearidade: aditividade e homogeneidade

## Aditividade

se

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y_2(t) \end{cases}$$

então

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

## Homegeneidade

(mantém fator de escala)

$$a = no.complexo$$

se

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow y_1(t)$$

então

$$a \cdot x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow a \cdot y_1(t)$$

**Sistema Linear:**

aditividade e

homogeneidade

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{H}} \rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Propriedade da superposição

**1.19** Para cada uma das relações entrada-saída a seguir, determine se o sistema correspondente é linear, invariante no tempo ou ambos.

**(a)** $y(t) = t^2 x(t-1)$

$x_1(t) \xrightarrow{S} t^2 x_1(t-1) = y_1(t)$

$x_2(t) \xrightarrow{S} t^2 x_2(t-1) = y_2(t)$

linearidade?

$x_3 = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow t^2 [a x_1(t) + b x_2(t)] =$

$= a \underbrace{t^2 x_1(t)}_{y_1(t)} + b \underbrace{t^2 x_2(t)}_{y_2(t)} = y_3(t) \therefore$ $\boxed{\text{linear}}$

---

invariância?

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t^2 . x_1(t-1)$

deslocando a saída:

$y_1(t-t_0) = (t-t_0)^2 \; x_1(t-1-t_0)$

$\boxed{\text{não invariante}}$

deslocando a entrada

$x'(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y'(t) = t^2 \; x_1(t-t_0-1) \neq y_1$

**(b)** $y[n] = x^2[n-2]$

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1^2[n-2]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2^2[n-2]$

linearidade?

$x_3[n] = a\,x_1[n] + b\,x_2[n] \rightarrow y_3[n] = \{a\,x_1[n-2] + b\,x_2[n-2]\}^2$

$y_3[n] = a^2 x_1^2[n-2] + b^2 x^2[n-2] + a \cdot b \cdot x_1[n-2] + x_2[n-2]$

$\neq a\,y_1[n] + b\,y_2[n] \quad \therefore$ $\boxed{\text{não linear}}$

---

invariante?

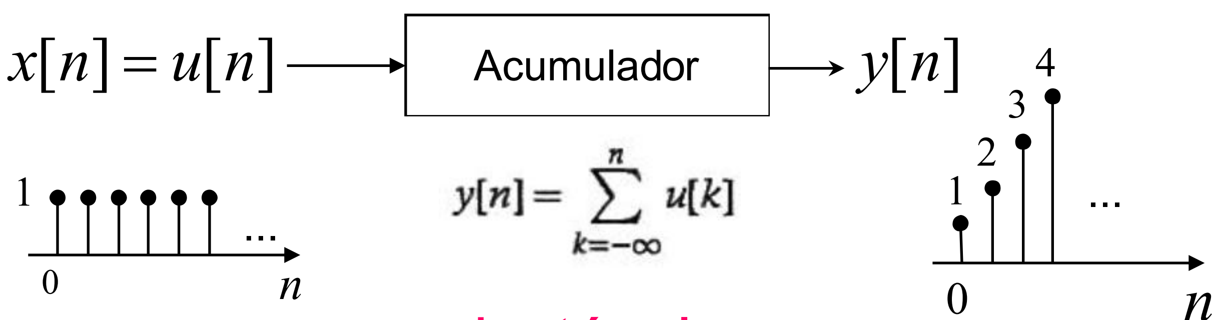
$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] \; ; \quad y_1[n-n_0] = x_1^2[n-2-n_0]$

$x_4[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_4[n] = x_4^2[n] = x_1^2[n-n_0-2] = y_1[n-n_0]$

$\therefore$ $\boxed{\text{invariante}}$

# Estabilidade

- Estabilidade: entradas limitadas → saídas limitadas
- Estabilidade → mecanismos de dissipação de energia
- Instabilidade → crescimentos ilimitados (reações em cadeia, populações sem predador, juros bancários, etc.) a partir de entradas limitadas




$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k]$$

instável

# Exemplos

$$S_1: y(t) = t\,x(t)$$

$t$ cresce ilimitadamente $\therefore$ instável

---

$$S_2: y(t) = e^{x(t)}$$

$y(t)$ Limitado para qualquer $x(t)$ limitado

$\therefore$ instável

**1.27** Neste capítulo, apresentamos diversas propriedades gerais dos sistemas. De modo particular, um sistema pode ou não ser:

**(1)** Sem memória
**(2)** Invariante no tempo
**(3)** Linear
**(4)** Causal
**(5)** Estável

Determine quais dessas propriedades são válidas e quais não são para cada um dos sistemas de tempo contínuo a seguir. Justifique suas respostas. Em cada exemplo, $y(t)$ representa a saída do sistema, e $x(t)$ é a entrada do sistema.

**(a)** $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

a) memória? → com memória

b) invariância? → não invariante

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(2-t)$

$y_1(t-t_0) = x_1(t-2-t_0) + x_1(2-t-t_0)$

$x_2(t-t_0) \to y_2(t) = x_2(t-t_0-2) + x_2(2-t+t_0) \neq y_1(t-t_0)$ ∴ não invariante

c) linearidade: $x_3(t) \to y_3(t) = x_3(t-2) + x_3(2-t)$

$x_4(t) = a x_1(t) + b x_3(t) \to y_4(t) = a x_1(t-2) + a x_1(2-t) + b y_1(t-2) + b y_1(2-t)$

$= a y_1(t) + b y_3(t)$ ∴ Linear

d) causalidade: seja $t<0$

∴ $y_1(t) = x(t-2) + x(\underbrace{2-t}_{>0})$ ∴ $\boxed{\text{não causal}}$

e) estável

## (b) $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$

$$y(t) = \underbrace{[\cos(3t)]}_{a(t)} \cdot x(t)$$

① sem memória

② não invariante : coeficiente $a(t) = \cos(3t)$ varia c/ tempo

③ linearidade: $x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = [\cos(3t)] \cdot x_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = [\cos(3t)] \cdot x_2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = a[\cos(3t)] x_1(t) + b[\cos(3t)] \cdot x_2(t)$

$= a y_1(t) + b y_2(t)$ ∴ $\boxed{\text{linear}}$

④ causal

⑤ estável $(\cos 3t = \text{finito})$

**1.28** Determine quais das propriedades listadas no Problema 1.27 são válidas e quais não são para cada um dos sistemas de tempo discreto a seguir. Justifique suas respostas. Em cada exemplo, $y(t)$ representa a saída do sistema e $x(t)$ é a entrada do sistema.

**(a)** $y[n] = x[-n]$

i) tem memória p/ $n<0$: ex $y[-2] = x[2]$

ii) invariância: $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[-n]$

não é invariante no tempo

$y_1[n-n_0] = x_1[-n-n_0]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = x_1[-(n-n_0)] = x_1[-n+n_0] \neq y_1[n-n_0]$

iii) é linear (trivial) iv) não é causal ($n<0$: $x[-2] \rightarrow y[n] = x[2]$

v) é estável

## (c) $y[n] = nx[n]$

① não tem memória; ② não é invariante (multiplica por "n"):

invariância: $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = n \cdot x_1[n]$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$y_1[n-n_0] = (n-n_0)\, x_1[n-n_0]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = n \cdot x_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0]$

③ é causal:

④ linearidade: $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = n\, x_1[n]$

(é linear) $x_2[n] \rightarrow y_2[n] = n \cdot x_2[n]$

$x_3[n] = a x_1[n] + b\, x_2[n] \rightarrow y_3[n] = n\, a x_1[n] + n\, b\, x_2[n] =$

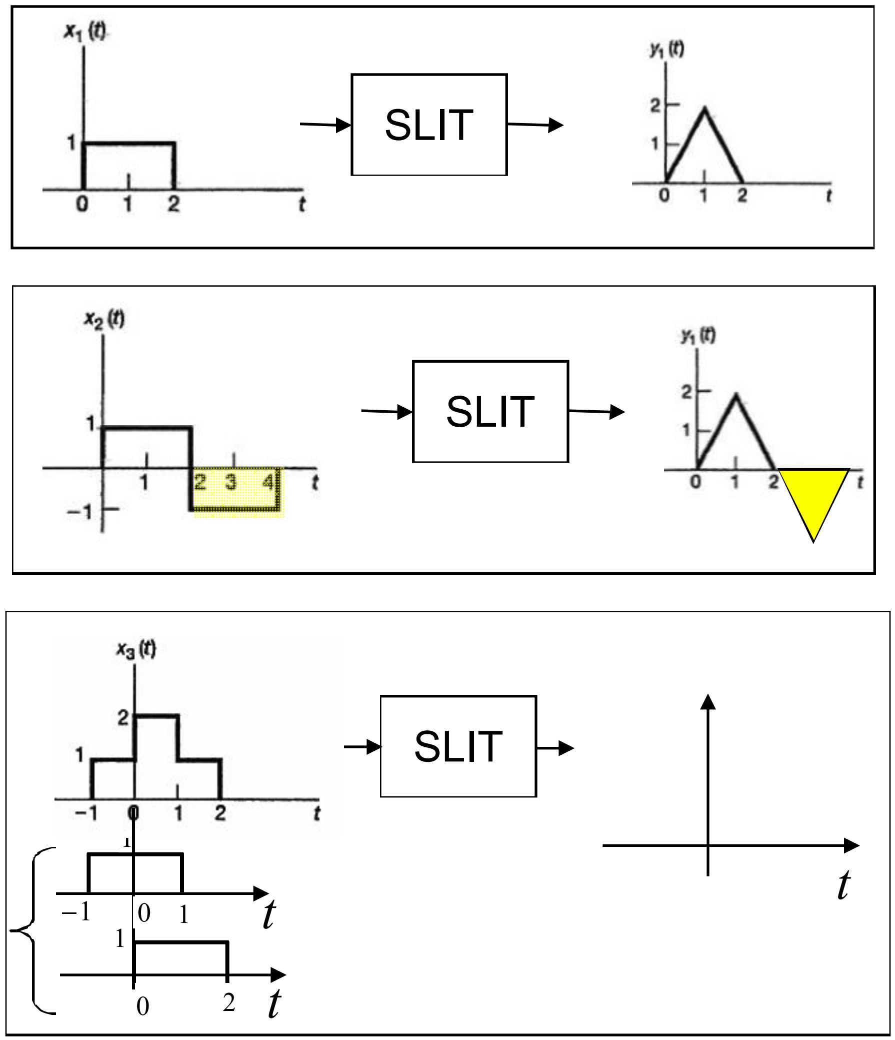
$= a x_1[n] + b \cdot x_2[n]$

⑤ Não é estável pois $y[n] \rightarrow \infty$ qdo $n \rightarrow \infty$

# Sistema linear invariante no tempo (SLIT)

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{SLIT}} \rightarrow y(t)$$

- Conhecendo-se a resposta de um SLIT a uma entrada *x(t)*, pode-se prever a resposta a outras entradas formadas por combinações lineares de *x(t)*




*Problema 1.31*