Modulo 08
Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Objetivos:

- Expandir os resultados obtidos para FT
- Analisar sinais contínuos que não são absolutamente integráveis
- Função de transferência - Transformada de Laplace da resposta ao impulso de um sistema

Determinação da Transf. de Laplace

Seja

- $s = \sigma + j\omega$
- e^{st} uma exponencial complexa

Podemos escrever e^{st} como:

$$\begin{aligned} e^{st} &= e^{\sigma t} e^{j\omega t} \\ &= e^{\sigma t}(\cos(\omega t) + j\mathrm{sen}(\omega t)) \end{aligned}$$

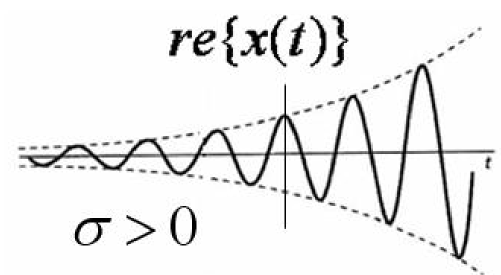
Exponenciais complexas e o plano s

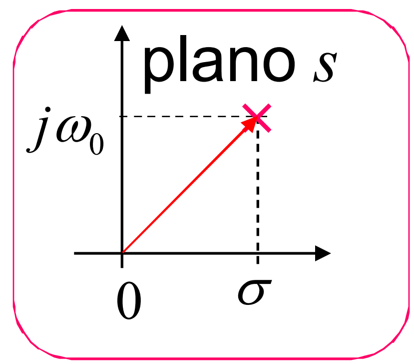
$$x(t) = Ae^{\sigma t} \cdot e^{j\omega_0 t} = Ae^{\underbrace{(\sigma + j\omega_0)}_{\boxed{s}} t} = Ae^{st}$$

amortecimento

Freqüência complexa

crescimento exponencial





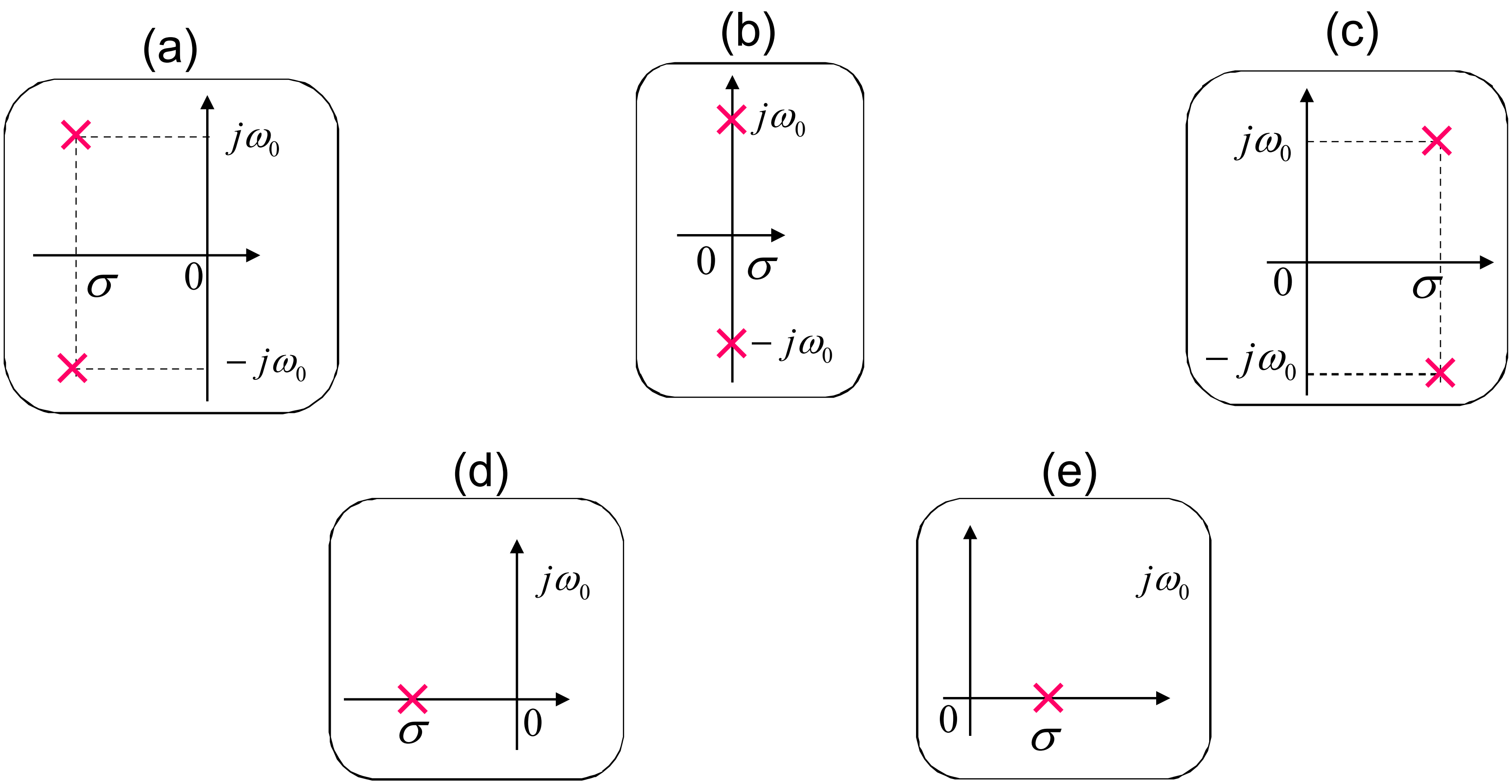
$\sigma > 0$

(amplitude crescente)

Fator de escala "A" não representado no plano s

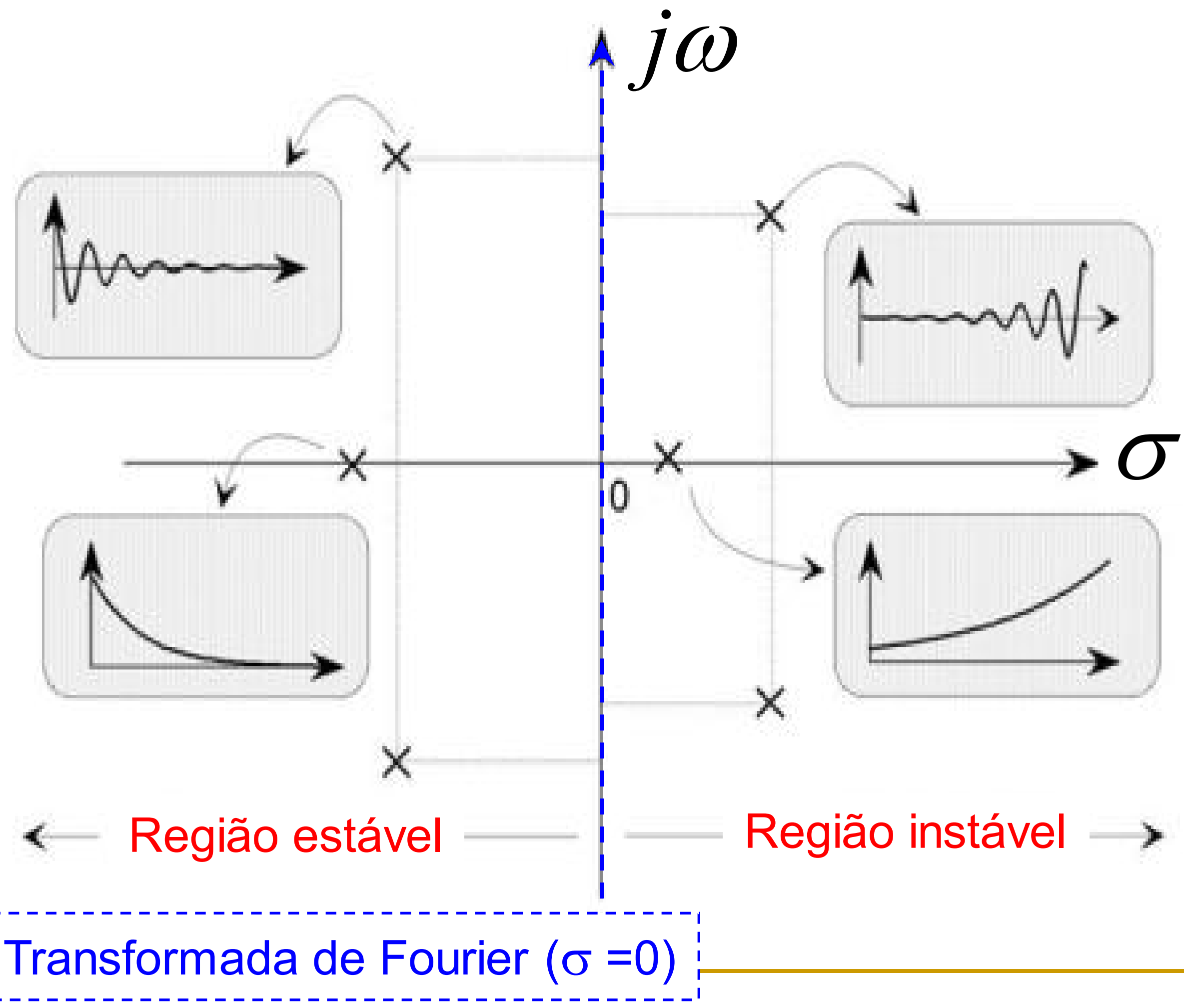
Freqüências complexas e o plano *s*

$$x(t) = e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}\left[e^{(\sigma + j\omega_0)t} + e^{(\sigma - j\omega_0)t}\right]$$

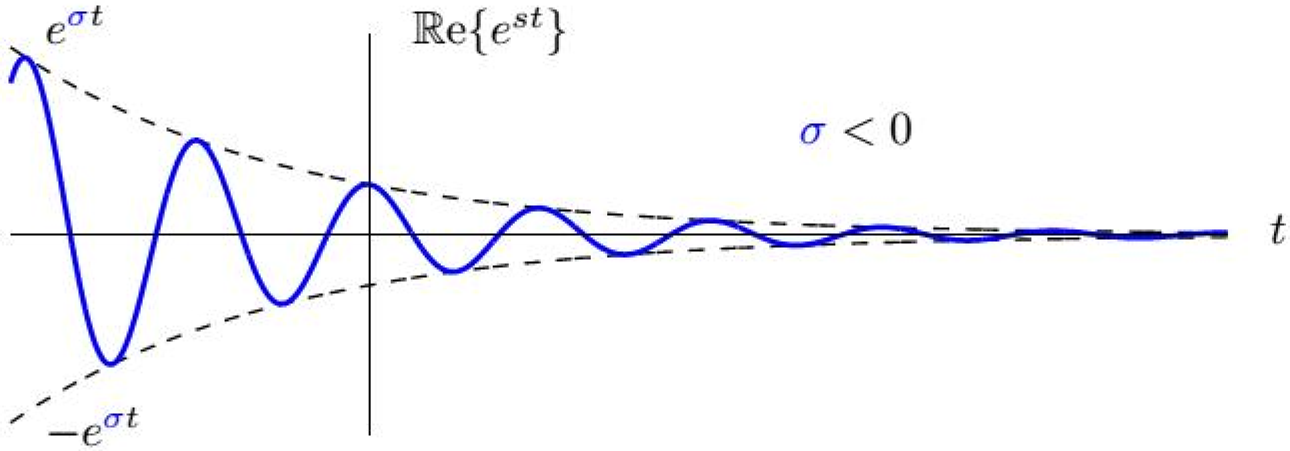


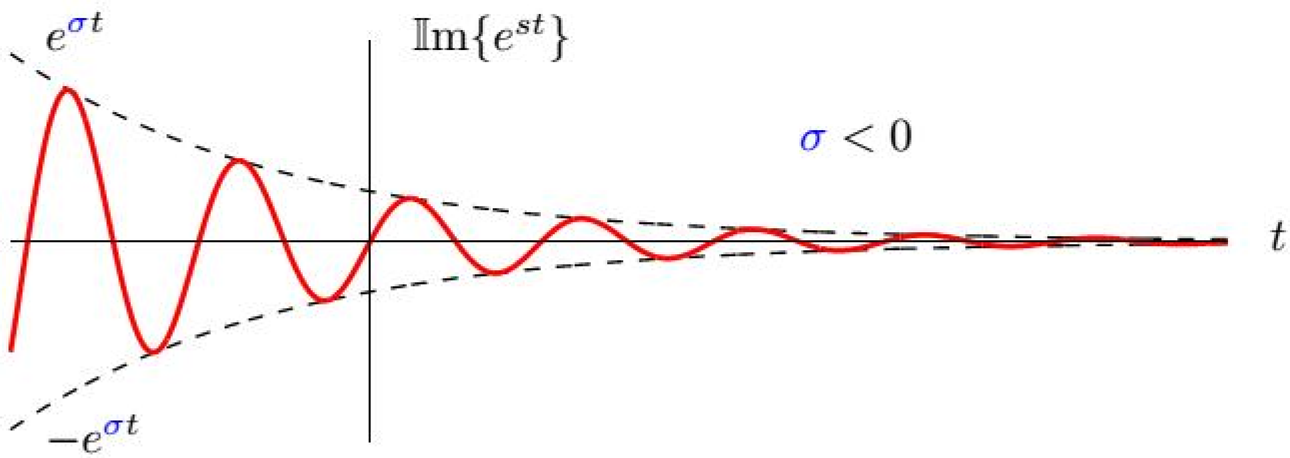
Esboce as formas de onda de $x(t)$ para cada caso

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$



Determinação da Transf. de Laplace





Determinação da Transf. de Laplace

A FT de um sinal $x(t)$ é:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

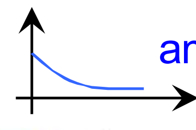
desde que $x(t)$ satisfaça a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

- Muitos sinais não atendem esta condição

Determinação da Transf. de Laplace $\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}$

"Forçando" que $x(t)$ seja absolutamente integrável: $x(t)e^{-\sigma t}$, sendo $\sigma \gg 0$



"fator de amortecimento"

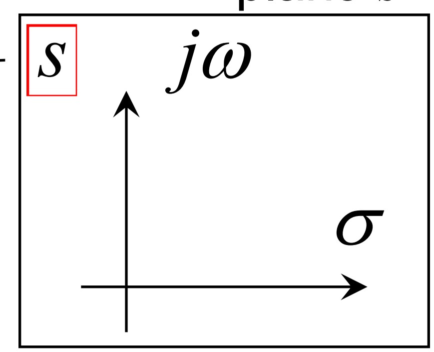
Aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt = X(\sigma + j\omega).$$

como $s = \sigma + j\omega$. Então,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

plano s



► LT = FT se $\sigma = 0$, i.e. $s = j\omega$:

$$X(s)|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt = X(j\omega).$$

Transformada (bilateral) de Laplace ($-\infty \leq t \leq \infty$)

9.3 Transformada inversa de Laplace

Considerando

$$X(\sigma + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

Segue que

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}\,d\omega$$

Com

$$s = \sigma + j\omega$$
$$ds = j \cdot d\omega$$
$$(\sigma = fixo)$$

Integral de contorno ao longo de reta paralela ao eixo jω

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds\,.}$$

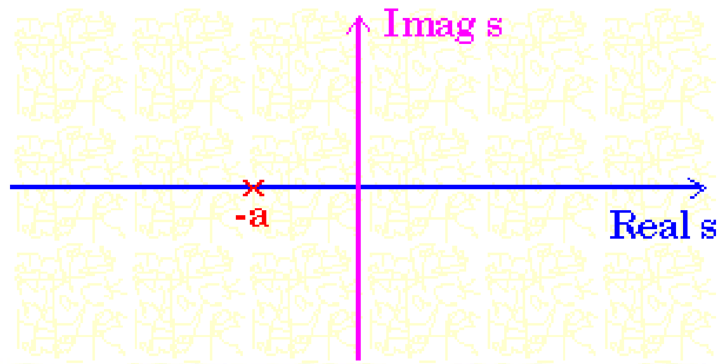
LT e FT

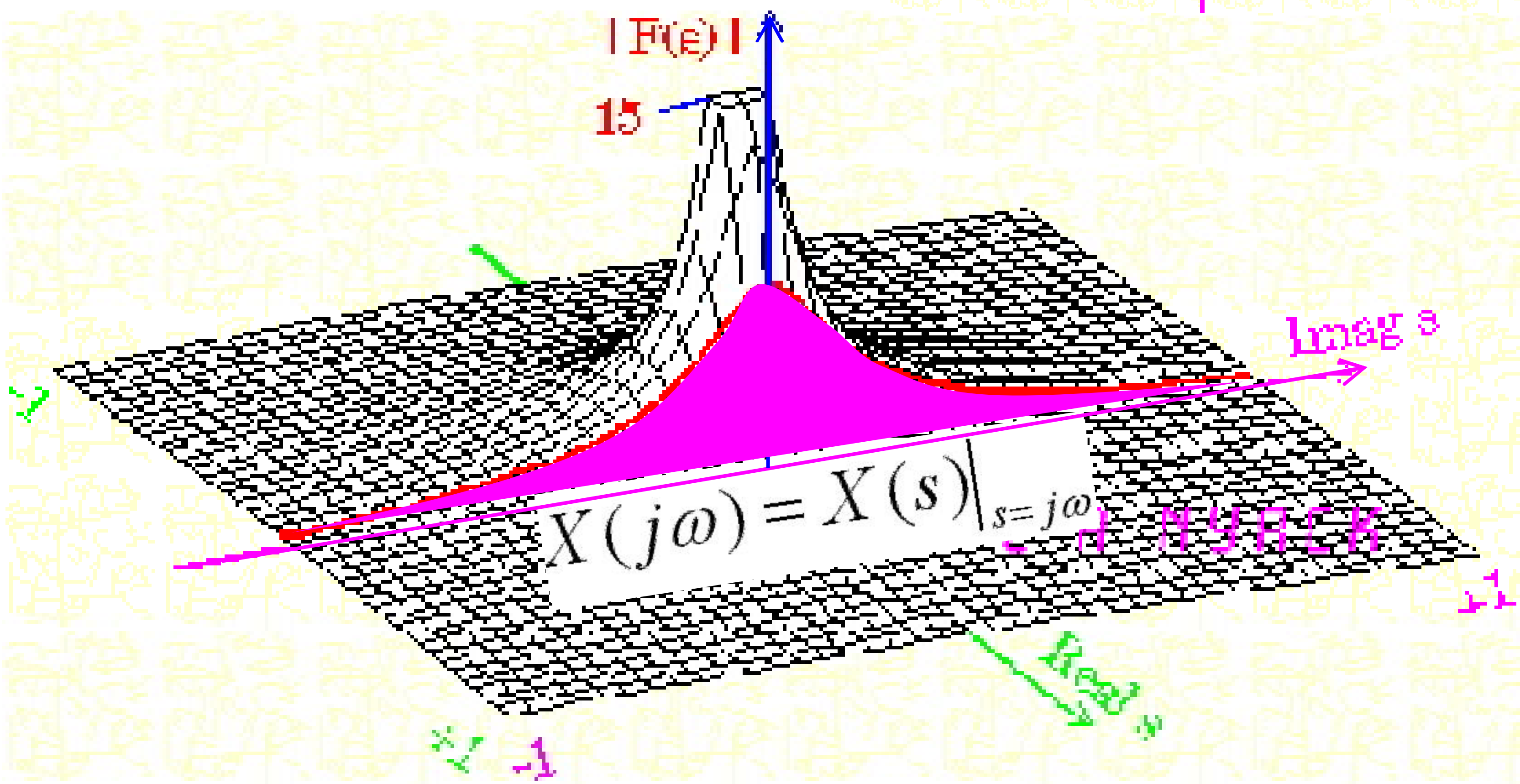
- A Transformada de Fourier transforma um sinal $x(t)$ em $1-D$ em um espectro de frequência $X(j\omega)$ em $1-D$
- A Transformada de Laplace transforma um sinal $x(t)$ em $1-D$ em uma nova função da variável s, $X(s)$ em $2-D$. Um plano complexo chamado de plano-s:
  - os valores de σ são apresentados no eixo horizontal e os valores de $j\omega$ apresentados no eixo vertical.

Transformada de Laplace: Interpretação gráfica

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

Pólo?

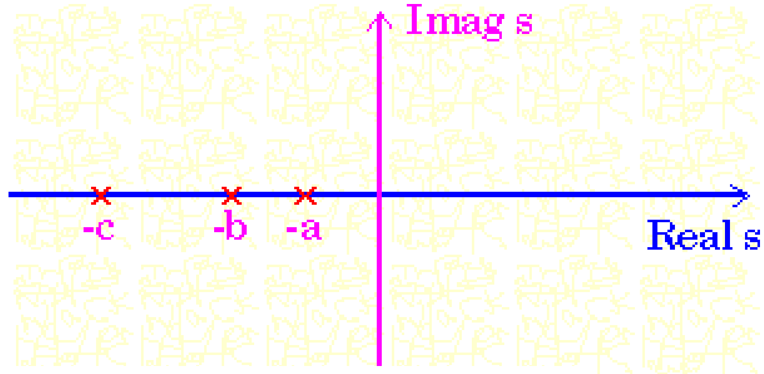


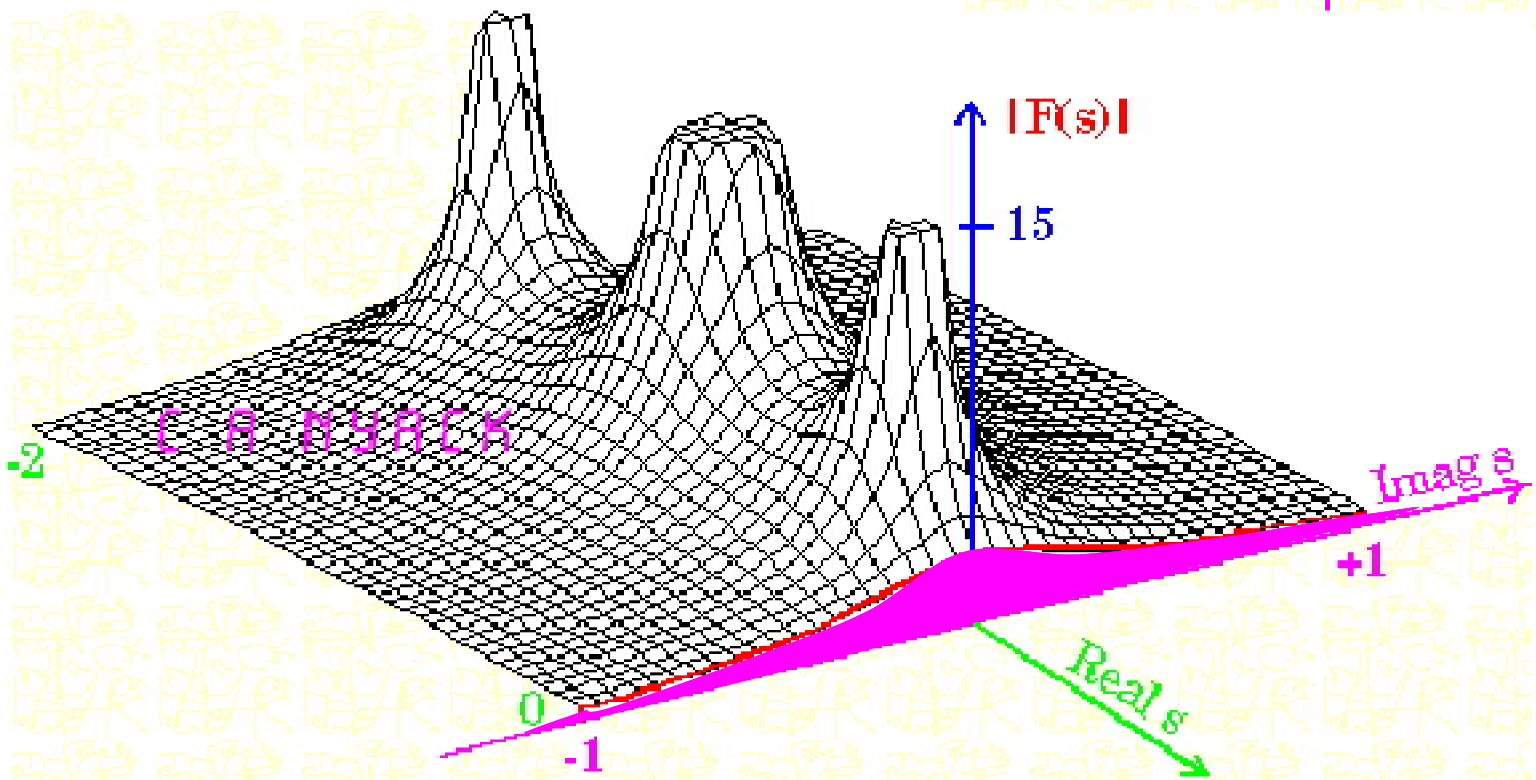


http://cnyack.homestead.com/files/alaplace/lt2rpm.htm

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Pólos?

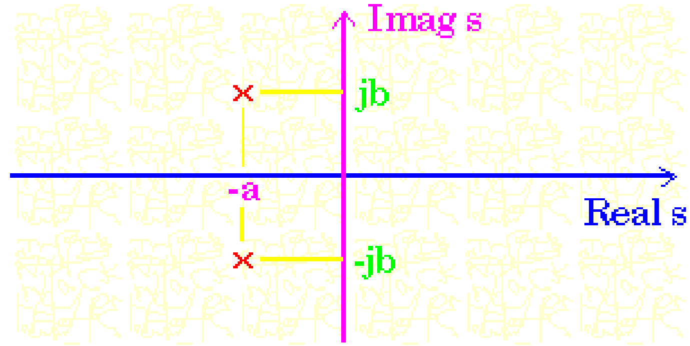


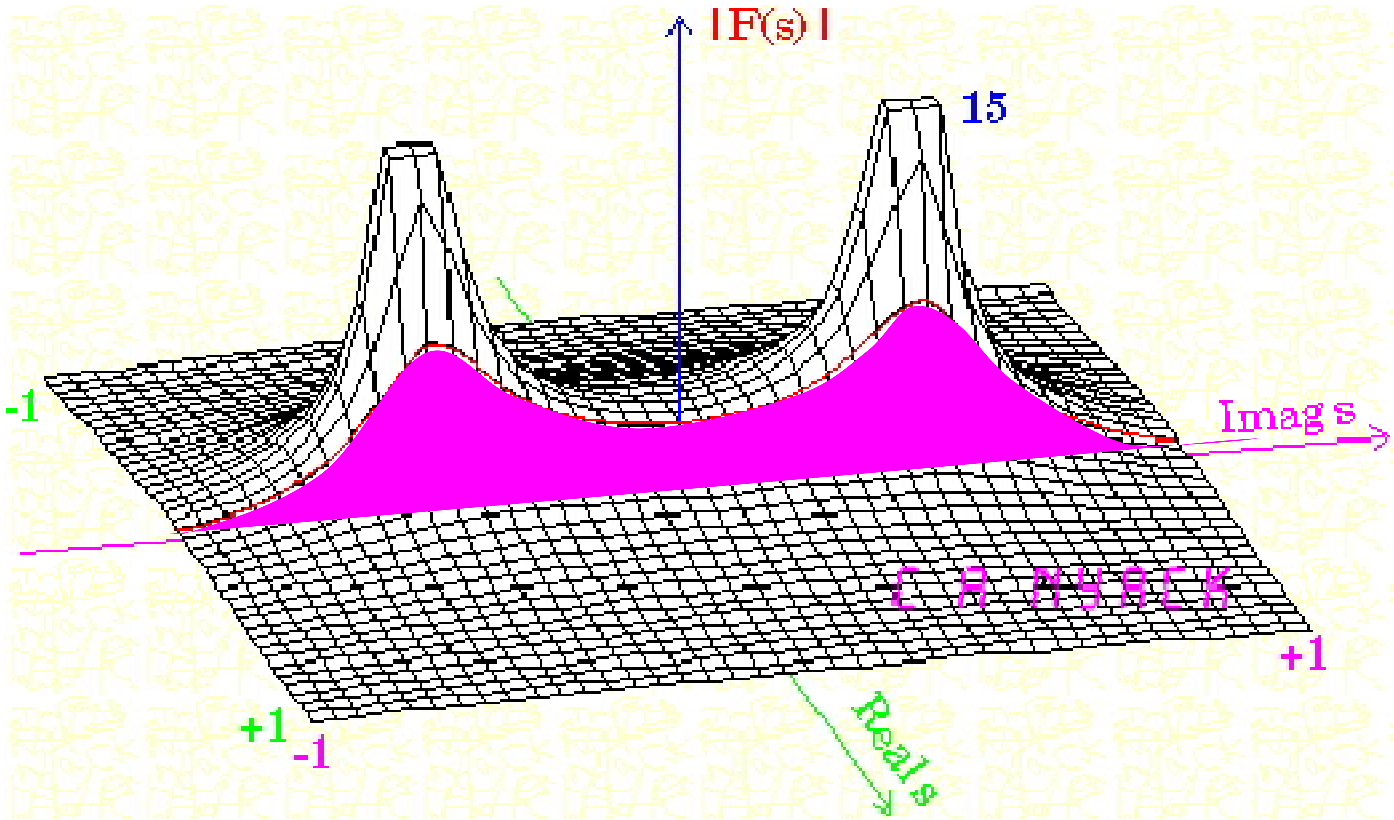


http://cnyack.homestead.com/files/alaplace/laptr3.htm

$$F(s) = \frac{1}{(s + a + jb)(s + a - jb)}$$

Pólos?

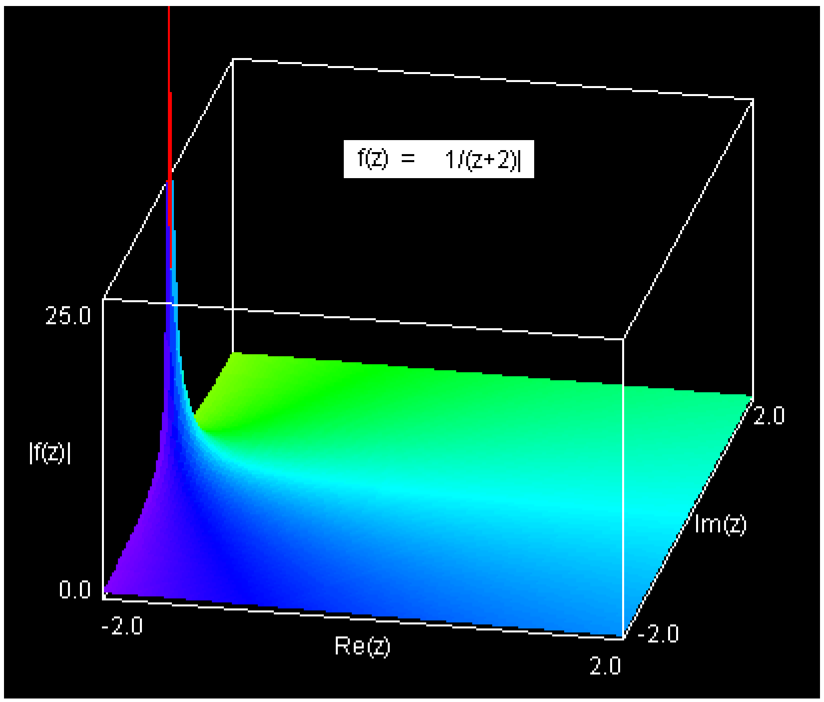


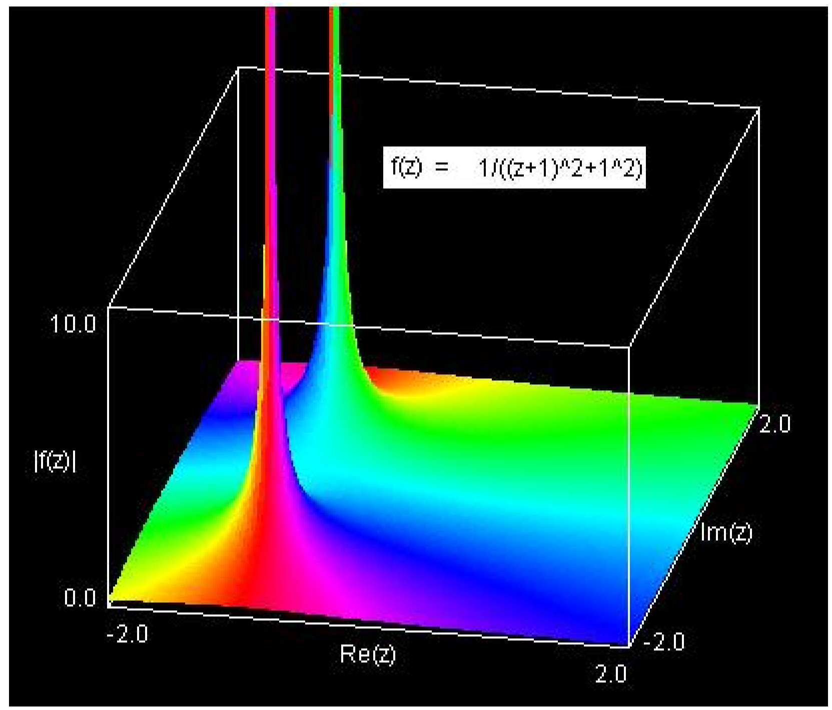


http://cnyack.homestead.com/files/alaplace/laptr2.htm

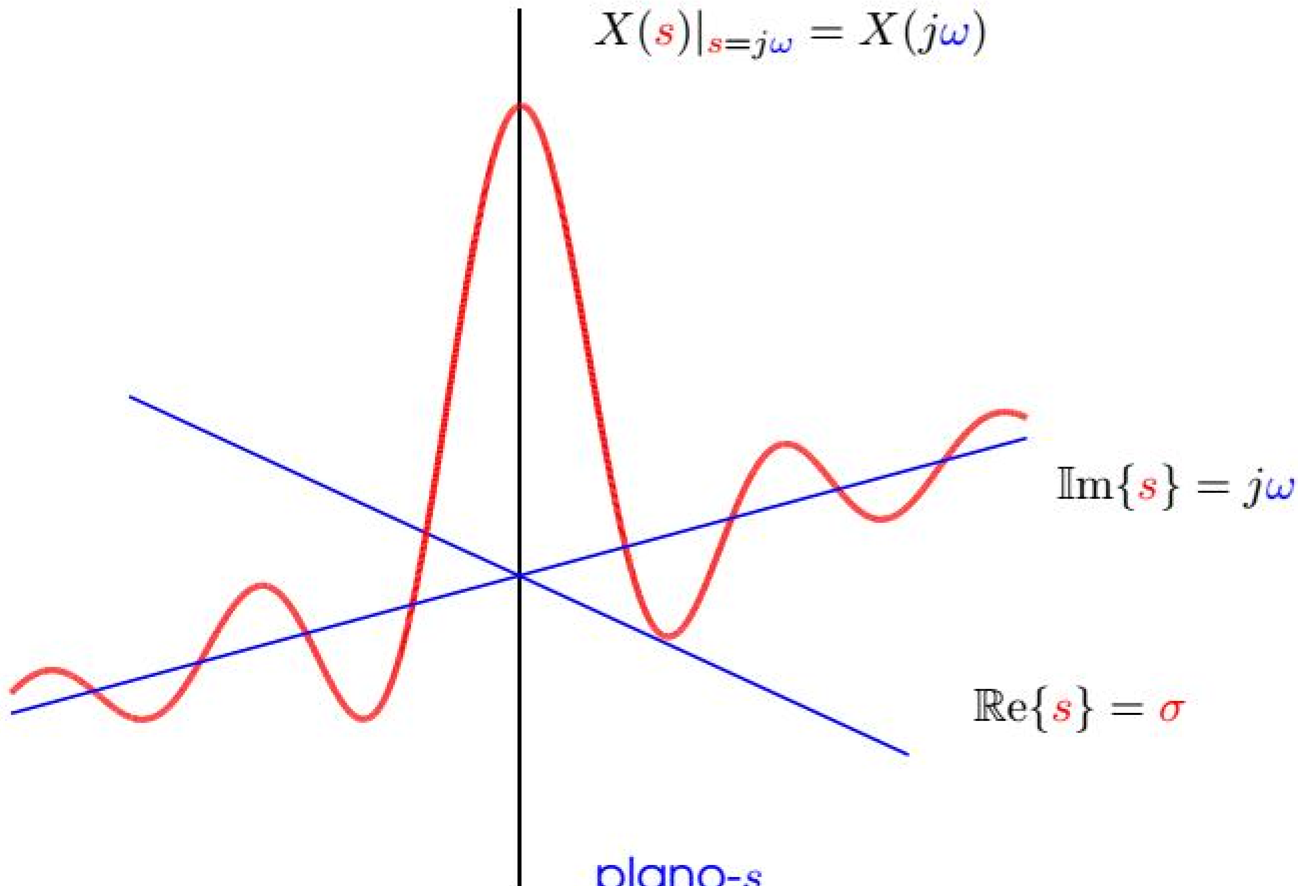
Applet para traçar gráficos

- http://www.math.ksu.edu/~bennett/jomacg/
- Variável “s” é chamada de “z” no site





Plano s - (e Fourier)



Região de Convergência

- Lembrando o desenvolvimento anterior:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t)e^{-\sigma t}}_{\text{nova função}} \; e^{-j\omega t} dt$$

- Para que a integral exista é preciso que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

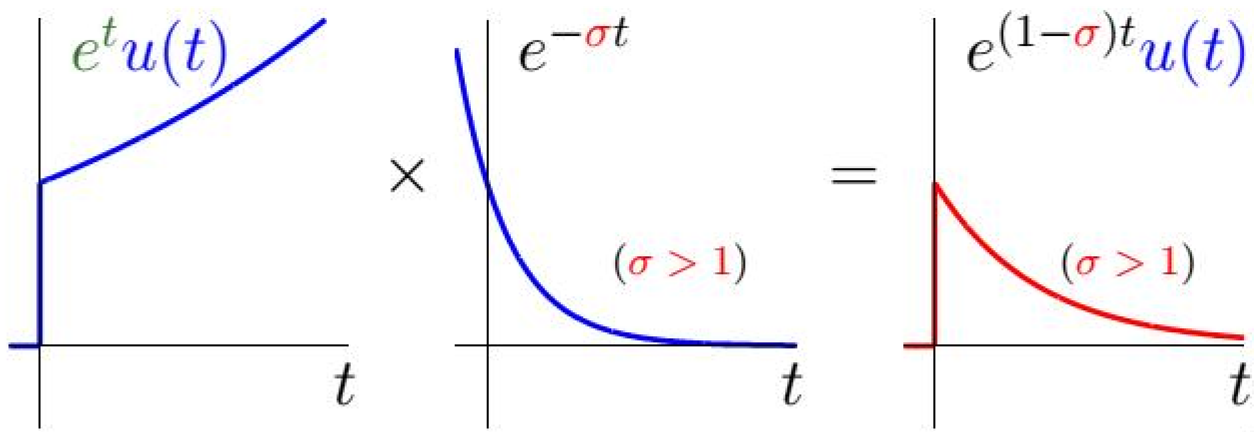
- O conjunto de valores de σ para os quais a integral converge é chamado Região de Convergência (RDC)

Exemplo: Região de Convergência

- $x(t) = e^t u(t)$ não possui FT, mas, devido ao termo $e^{-\sigma t}$, podemos calcular a LT

$$x(t)e^{-\sigma t} = e^t u(t) e^{-\sigma t} = e^{(1-\sigma)t} u(t)$$

Se $\sigma > 1$, o sinal é absolutamente integrável.



Exemplo

Determine a LT do sinal

$$x(t) = e^{at}u(t)$$

sendo $a > 0$

Solução

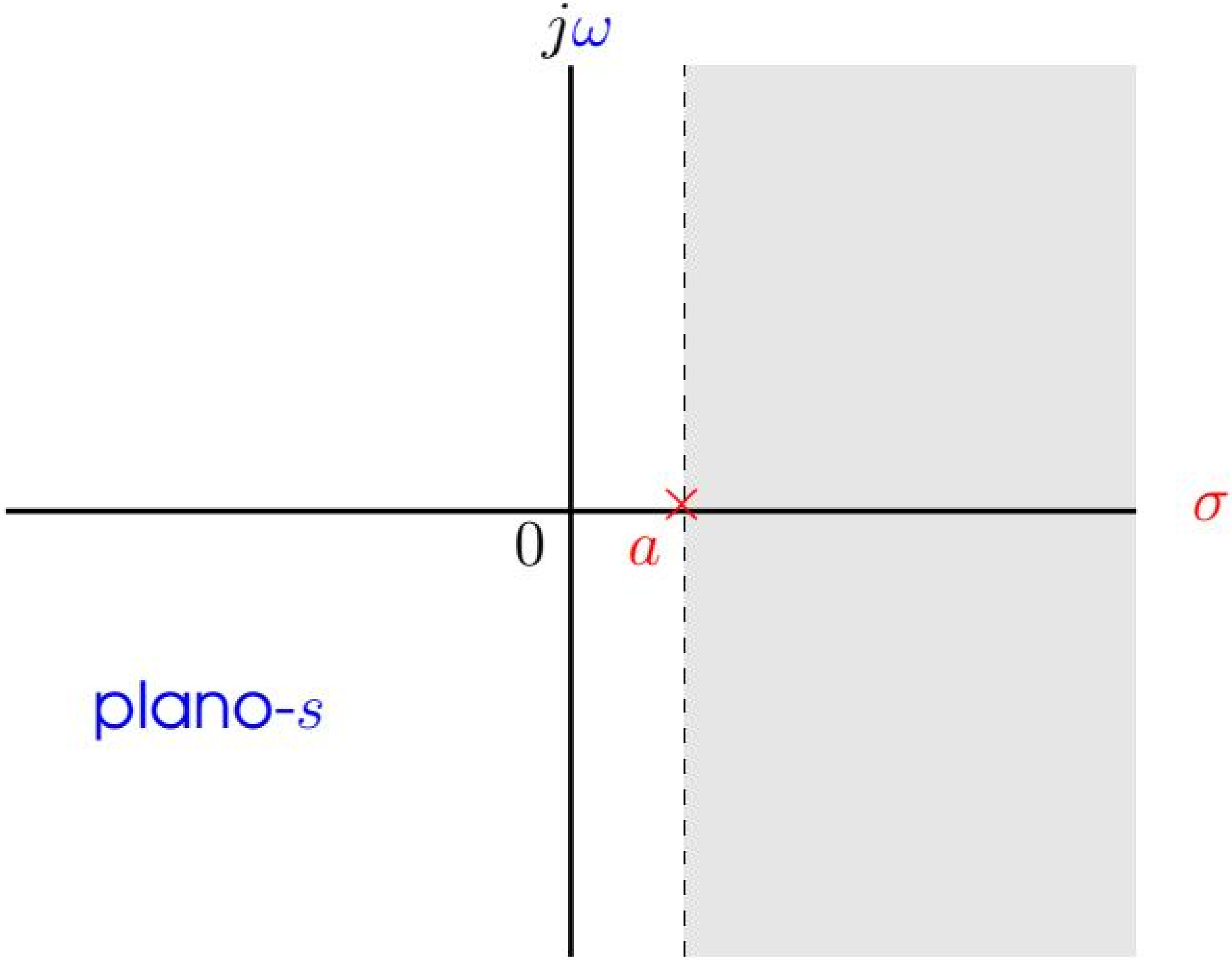
Usando a definição, temos:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}dt \\ &= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty}, \text{ fazendo } s = \sigma + j\omega \\ &= -\frac{1}{\sigma + j\omega - a}e^{-(\sigma-a)t}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Logo, para $\sigma > a$:

$$X(s) = -\frac{1}{\sigma + j\omega - a}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

RDC para $x(t) = e^{at}u(t)$, com $a > 0$



Exercício

Determine a LT do sinal

$$x(t) = -e^{at}u(-t)$$

sendo $a > 0$

Solução

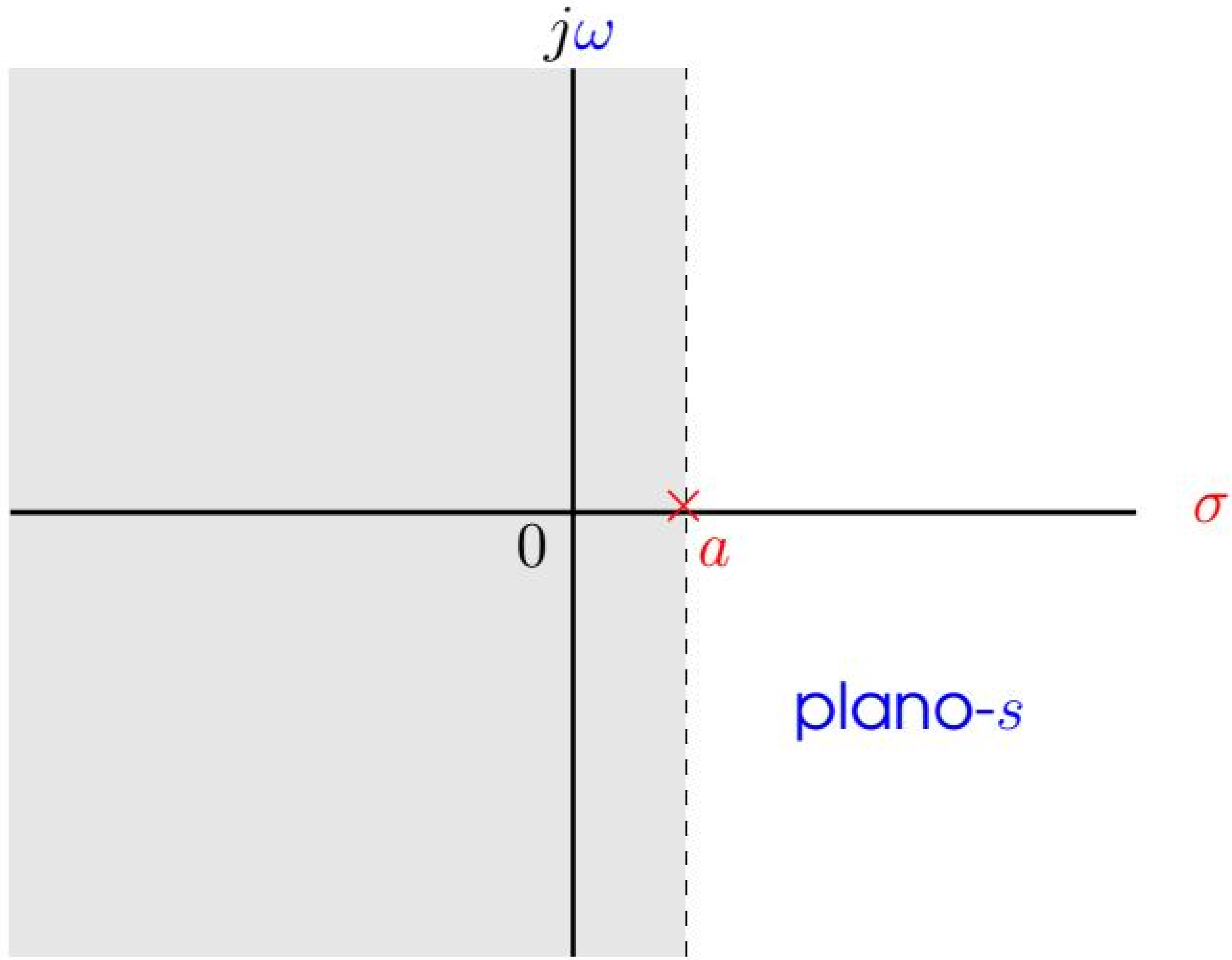
Usando a definição, temos:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}dt \\
&= \frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0}, \text{ fazendo } s = \sigma + j\omega \\
&= \frac{1}{\sigma + j\omega - a}e^{-(\sigma-a)t}e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{0}
\end{aligned}$$

Logo, para $\sigma < a$:

$$X(s) = \frac{1}{\sigma + j\omega - a}(1 - 0) = \frac{1}{s-a}$$

RDC para $x(t) = -e^{at}u(-t)$, com $a > 0$



Exercício

Determinar a TL do sinal $x(t) = u(t-5)$.

Usando a definição, temos:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-5)e^{-st}dt = \int_{5}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{5}^{\infty} \end{aligned}$$

Para que a integral convirja, é necessário que $\mathrm{Re}(s) > 0$ ou $\sigma > 0$. Logo:

$$X(s) = \frac{1}{s}e^{-5s}$$

Solução

- Encontre a transformada de Laplace do impulso unitário.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Exercício

Determinar a TL do sinal $x(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$.

Usando a definição, temos:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{j\omega_0 t}e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s - j\omega_0}e^{-(s-j\omega_0)t}\Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Para que a integral convirja, é necessário que $\mathrm{Re}(s) > 0$ ou $\sigma > 0$. Logo:

$$X(s) = \frac{1}{s - j\omega_0}$$

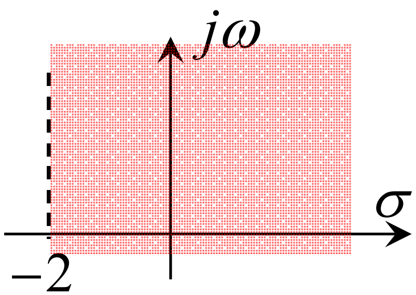
Ex. 9.3 $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$

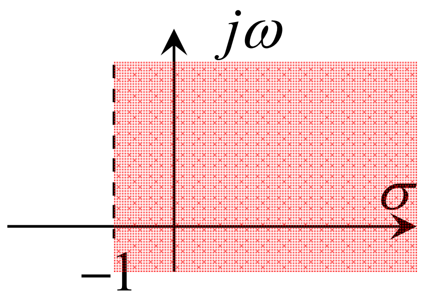
$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

$\mathcal{R}e\{s\} > -2$ $\mathcal{R}e\{s\} > -1$

$$e^{-at} \cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a} < Re(s) > -a$$





Somando as frações parciais e sobrepondo as RDCs

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \boxed{\mathcal{R}e\{s\} > -1}$$

Ex. 9.4 $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$

$$e^{-at}\cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a} < Re(s) > -a$$

$$x(t) = \left[\underbrace{e^{-2t}} + \frac{1}{2}e^{\underbrace{-(1-3j)t}} + \frac{1}{2}e^{\underbrace{-(1+3j)t}}\right]u(t)$$

$\mathcal{L}$

$$\frac{1}{s+2} \qquad \frac{1}{s+(1-3j)} \qquad \frac{1}{s+(1+3j)}$$

$$\mathcal{R}e\{s\} > -2 \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1 \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1$$

$$Re(s+1-3j) > 0$$

$$\sigma + 1 > 0 \rightarrow \sigma > -1$$

Somando as frações parciais e sobrepondo as RDCs

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s+2)} \qquad \boxed{\mathcal{R}e\{s\} > -1}$$

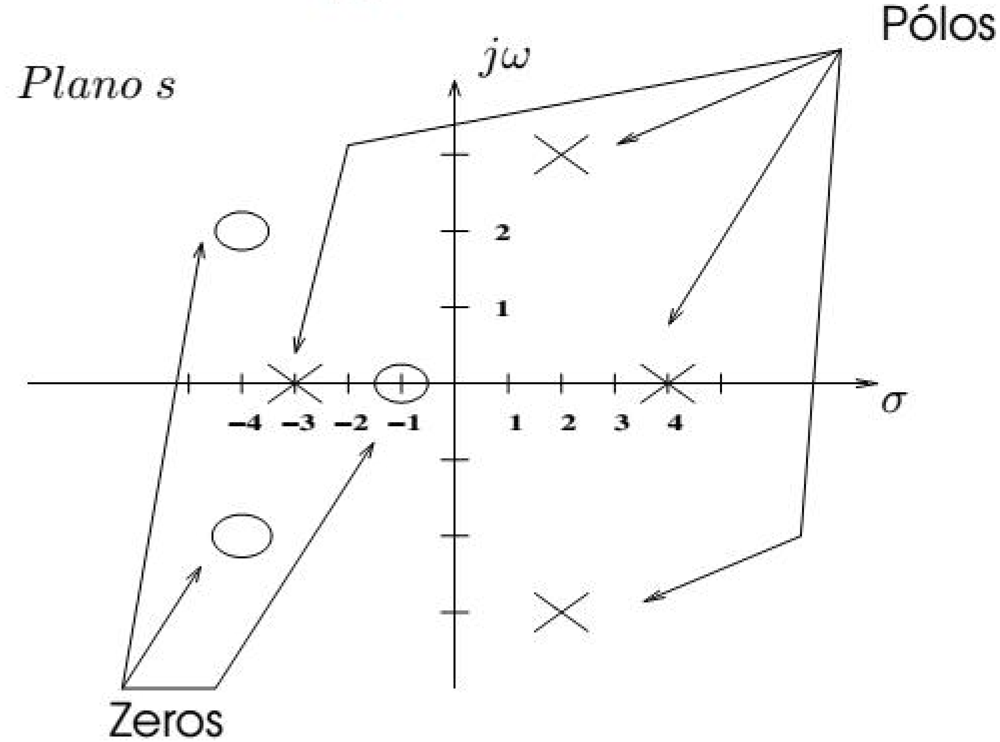
Par de transformadas	Sinal	Transformada	RDC
1	$\delta(t)$	1	Todo s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	Todo s
11	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
12	$[\text{sen}\, \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\text{sen}\, \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$

Alguns pares de Transformadas de Laplace (ver pág. 414

Plano s: Zeros e Pólos

$$X(s) = \frac{(s+1)((s+4)^2+4)}{(s+3)(s-4)((s-2)^2+9)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Zeros ($\circ$): raízes de $N(s) = 0$
- Pólos ($\times$): raízes de $D(s) = 0$

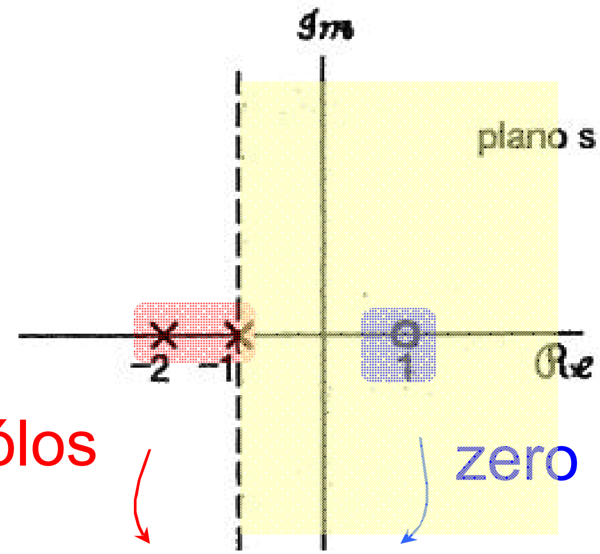


Ex 9.3 (com pólos e zeros)

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t).$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \Re e\{s\} > -1$$



Pólos

zero

raízes dos polinômios

Pólos

$$\left.\begin{aligned} s_1 + s_2 &= -3 \\ s_1 \cdot s_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= -2 \end{aligned}$$

zero em s $\rightarrow \infty$

$$se\ s \rightarrow \infty, \quad X(s) \rightarrow 0$$

(não indicado no plano s)

Ex 9.4 (com pólos e zeros)

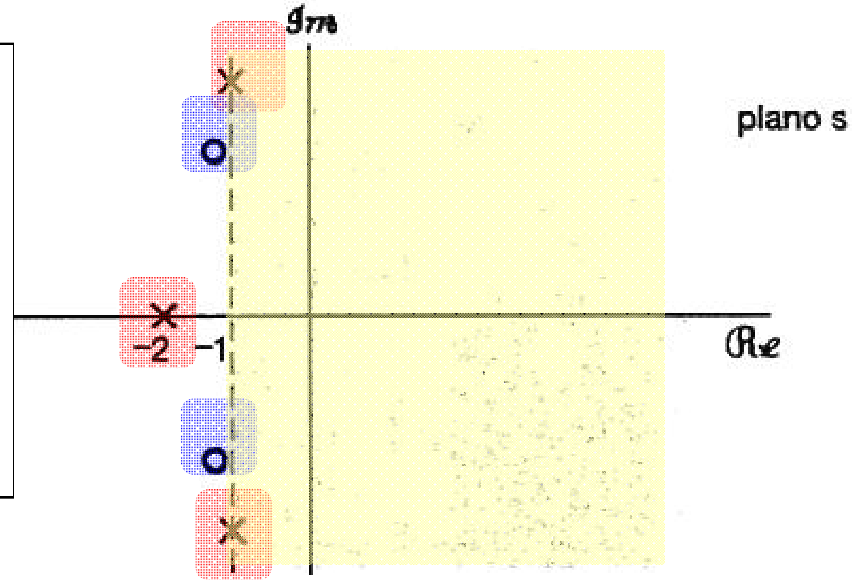
$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$$

$$\Updownarrow \mathcal{L}$$

$$\frac{2s^2 + 5s + 12}{\left(s^2 + 2s + 10\right)(s+2)} \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 + s_2 &= -2 \\ s_1 \cdot s_2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_{1,2} = 1 \pm j3$$

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-71}}{4} \approx -1{,}25 \pm j2{,}11$$



zero em s $\rightarrow\infty$

Por quê?

Pólos e zeros múltiplos, em s = 0 e em s → ∞

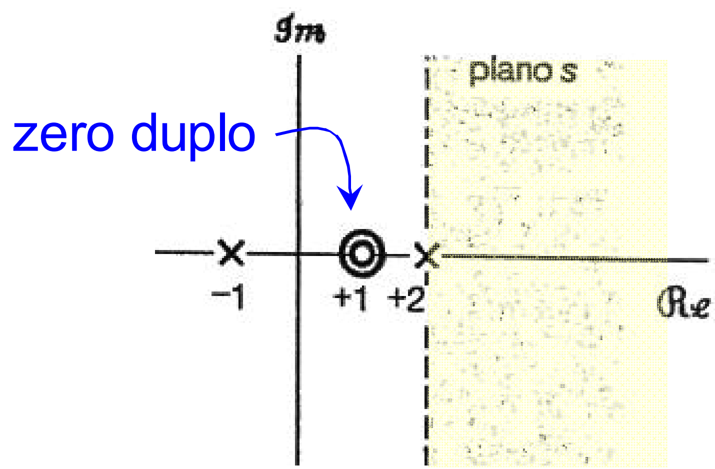
Ex 9.5 $$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a} < Re(s) > -a$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re e\{s\} > 2$$

Tem pólo ou zero quando s →∞?



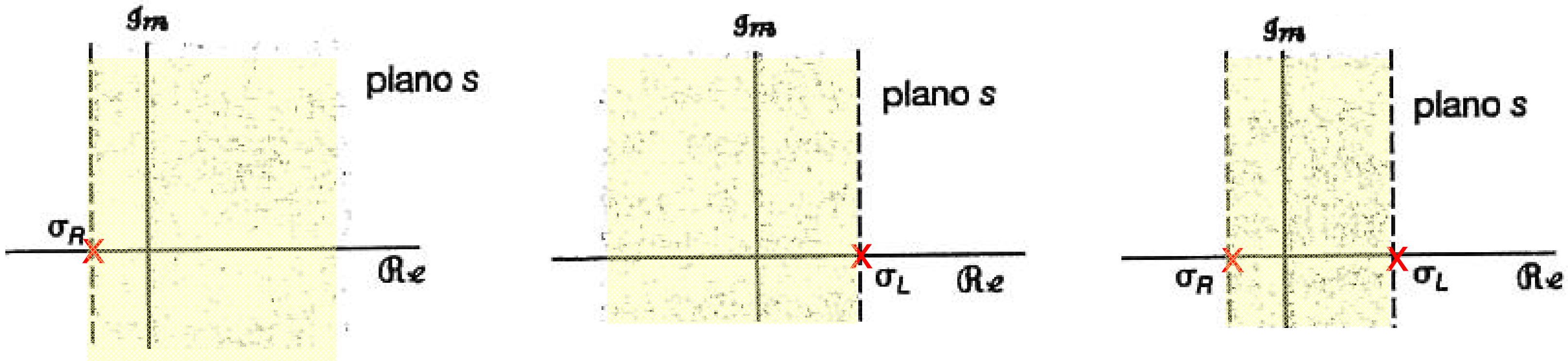
RDC não inclui o eixo jω ∴ não existe $\mathcal{F}\{x(t)\}$

9.2 Propriedades da Região de convergência (RDC)

Propriedade 1: A RDC de $X(s)$ consiste de faixas paralelas ao eixo $j\omega$ no plano s.

Propriedade 2: Para transformadas de Laplace racionais, a RDC não contém quaisquer polos.

Ex:



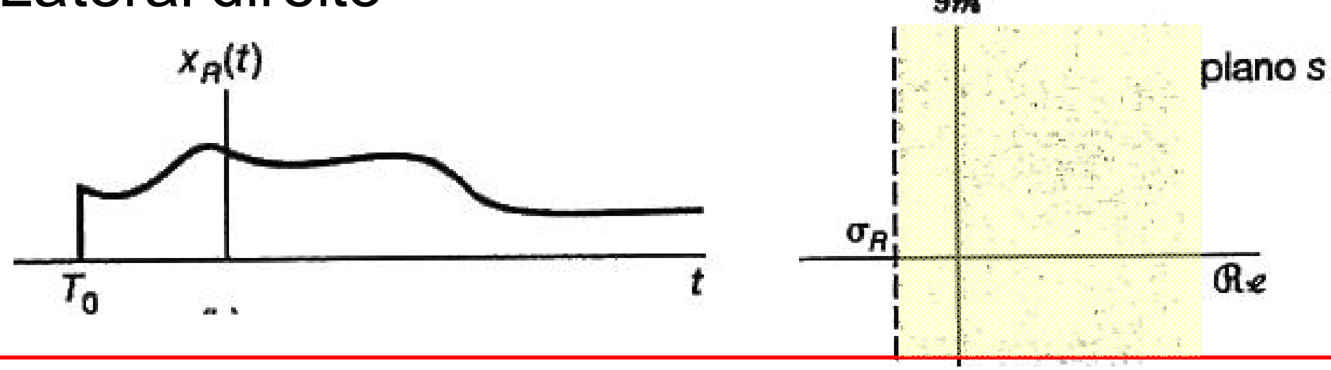
Propriedade 3: Se $x(t)$ tem duração finita e é absolutamente integrável, então a RDC é todo o plano s.

demonstração
pág. 396

Propriedade 4: Se $x(t)$ for lateral direito e se a reta $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$ está na RDC, então todos os valores de s para os quais $\mathcal{Re}\{s\} > \sigma_0$ também estarão na RDC.

demonstração
pág. 397

Lateral direito



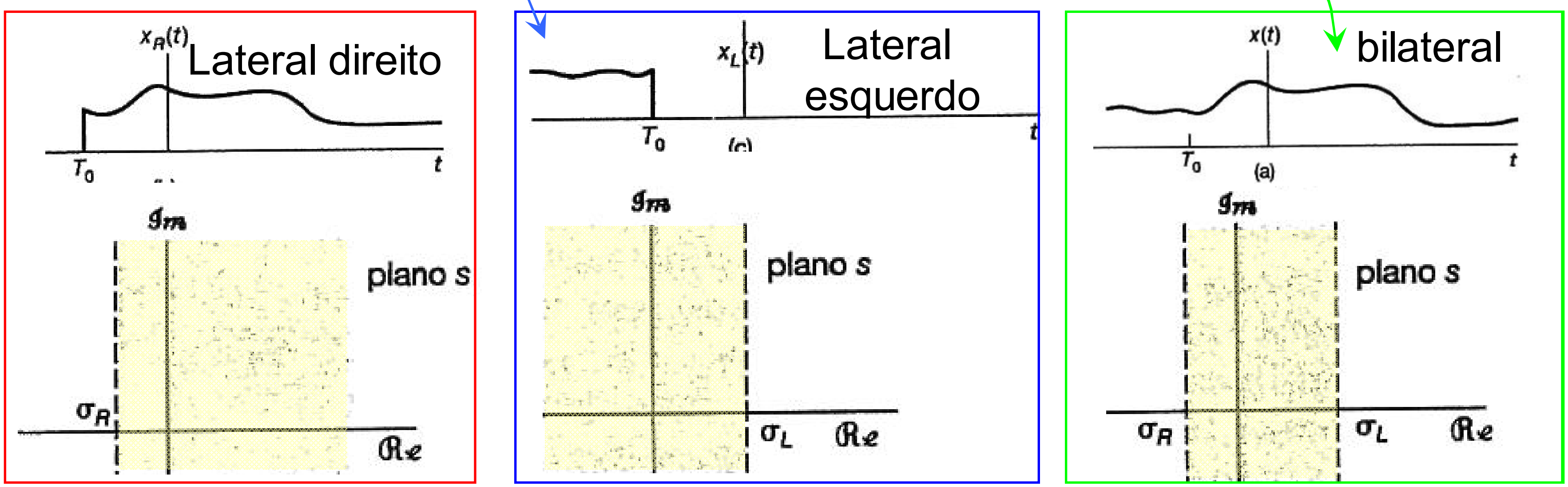
Propriedades da região de convergência (RDC)

Propriedade 5: Se $x(t)$ for lateral esquerdo e se a reta $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$ estiver na RDC, então todos os valores de s para os quais $\mathcal{Re}\{s\} < \sigma_0$ também estarão na RDC.

demonstração
pág. 397-398

Propriedade 6: Se $x(t)$ for bilateral e se a reta $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$ estiver na RDC, então a RDC consistirá em uma faixa no plano s que inclui a reta $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$.

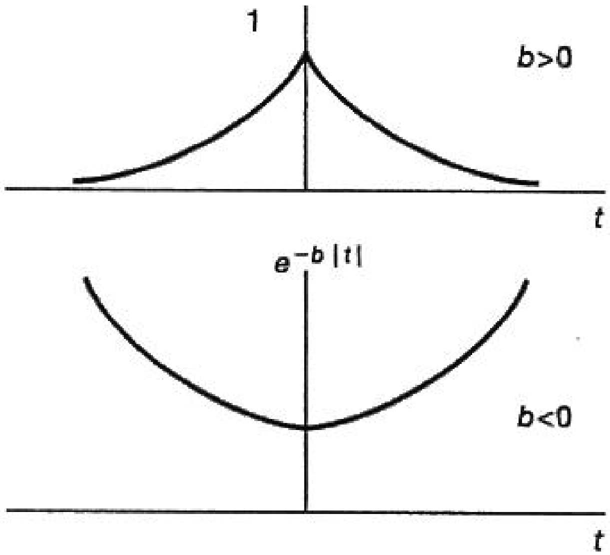
demonstração
pág. 397-398



Propriedades da região de convergência (RDC)

Ex. 9.7

$$x(t) = -e^{-b|t|}$$



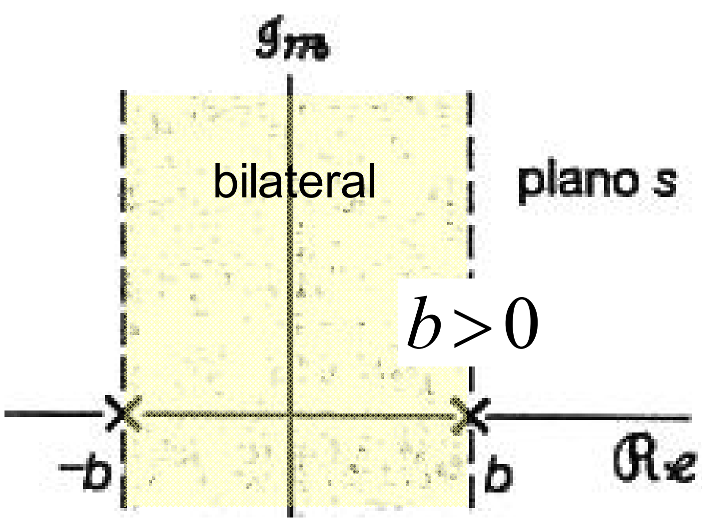
$$x(t) = \underbrace{e^{+bt}\cdot u(-t)}_{\text{Lat. esquerdo}} + \underbrace{e^{-bt}\cdot u(t)}_{\text{Lat. direito}}$$

$\mathcal{L}$

$$\frac{-1}{s-b} \qquad\qquad \frac{1}{s+b}$$

$\mathcal{Re}\{s\} < +b$ (ver Ex. 9.2)

$\mathcal{Re}\{s\} > -b$ (ver Ex. 9.1)



$$e^{-b|t|} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{-2b}{s^2-b^2}$$

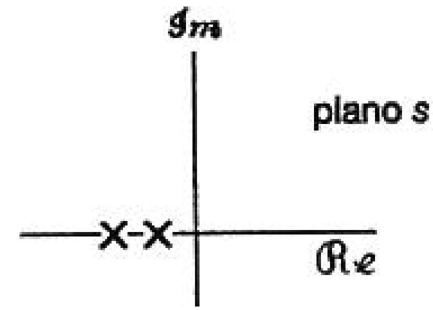
$$-b < \mathcal{Re}\{s\} < +b$$

O que ocorre se b < 0?

Propriedade 7: Se a transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ for racional, então sua RDC é limitada por polos ou se estende até o infinito. Além disso, nenhum polo de $X(s)$ está contido na RDC.

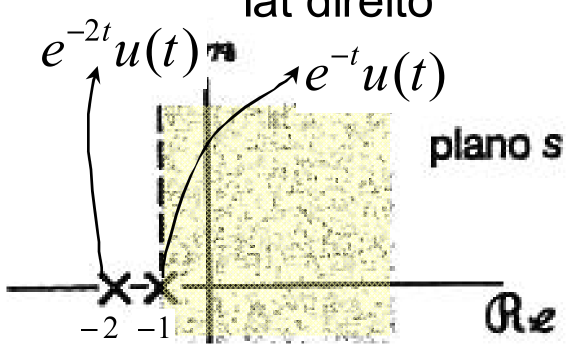
Ex. 9.8

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

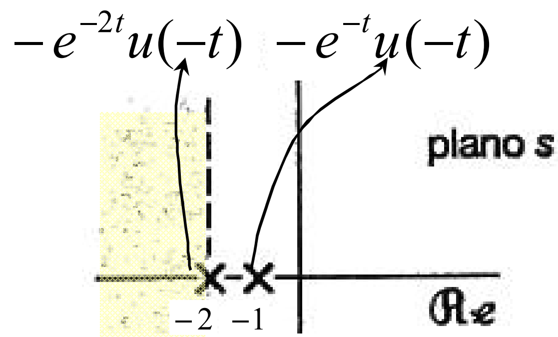


Possibilidades:

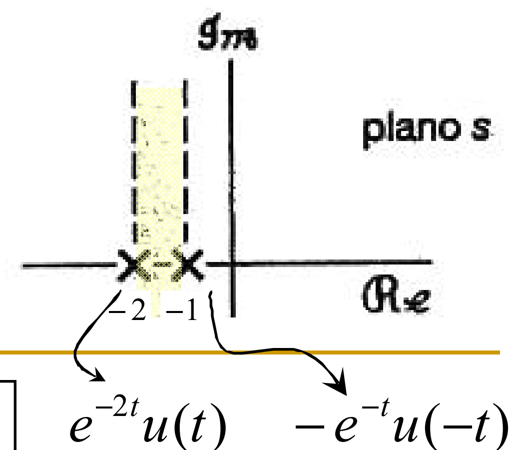
lat direito



lat esquerdo



bilateral



X(s) é igual, mas ≠ RDCs → diferentes sinais x(t)

9.3 Transformada inversa de Laplace

Considerando

$$X(\sigma + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

Segue que

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}\, d\omega$$

Com

$$s = \sigma + j\omega$$
$$ds = j \cdot d\omega$$
$$(\sigma = fixo)$$

Integral de contorno ao longo de reta paralela ao eixo jω

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\, ds\, .}$$

$x(t)$ pode ser recuperado com qualquer σ (fixo) dentro da RDC !

Transformada inversa de Laplace

- Cálculo direto pode ser elaborado e não é usado no curso

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds\,.}$$

- Se $X(s)$ é racional → expandir em soma de termos de 1ª. ordem (frações parciais)

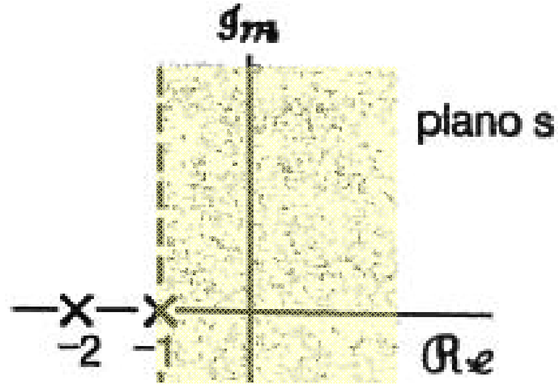
$$X(s) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i} \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} (\pm) A_i e^{-a_i t} u(\pm t)$$

$\boxed{Re\{s\} > +a_i}$ $\boxed{Re\{s\} < -a_i}$

causal anticausal

Ex 9.9

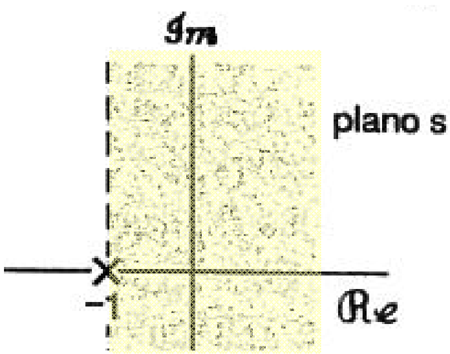
$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{R}e\{s\}>-1$$

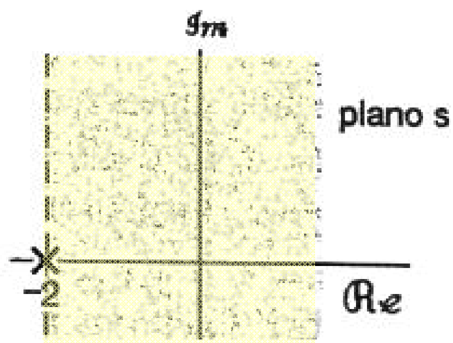


$$=\frac{\cancel{A}^{\;1}}{s+1}+\frac{\cancel{B}^{\;-1}}{s+2}$$

$$\boxed{A=\left[(s+1)X(s)\right]\Big|_{s=-1}=1}$$

$$\boxed{B=\left[(s+2)X(s)\right]\Big|_{s=-2}=-1}$$





$$x(t)=e^{-t}u(t)\;-\;e^{-2t}u(t)$$

Ver Ex. 9.10 e 9.11: mesmo X(s) com RDCs diferentes

9.5 Propriedades da Transformada de Laplace

- Semelhantes às da Transformada de Fourier de tempo contínuo
- Regiões de convergência (RDC) devem ser analisadas
- Pode haver cancelamentos de pólos e zeros em transformações de sinais
- Pode haver interseções vazias de RDCs

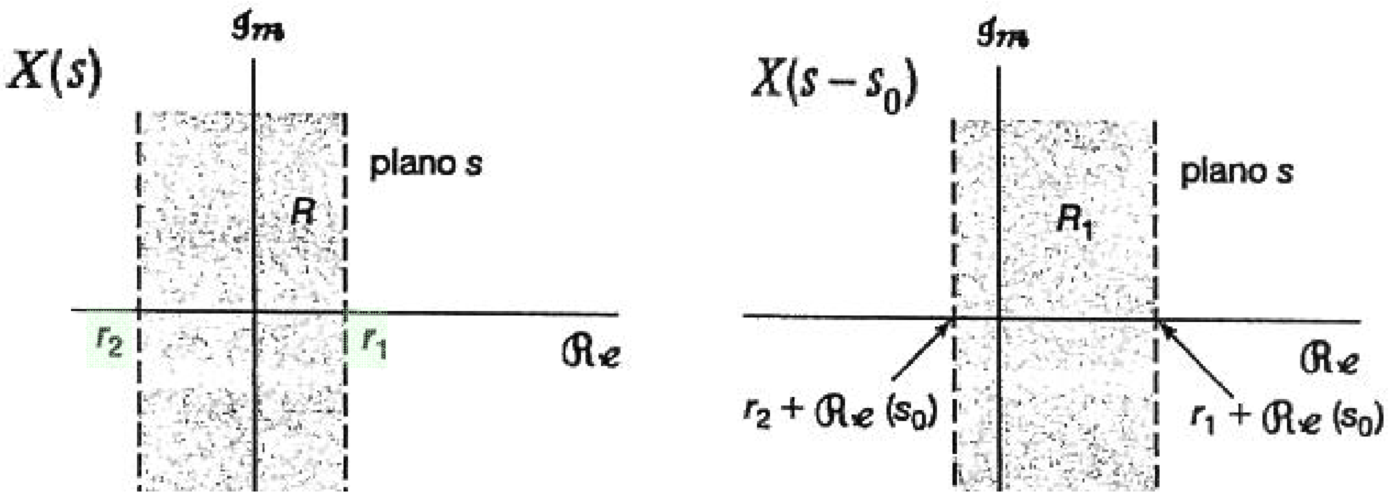
Seção	Propriedade	Sinal	Transformada de Laplace	RDC
		$x(t)$	$X(s)$	R
		$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
		$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	Linearidade	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Deslocamento no tempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Deslocamento no domínio s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versão deslocada de R (ou seja, s está na RDC se $s - s_0$ estiver em R)
9.5.4	Mudança de escala no tempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	RDC com mudança de escala (ou seja, s está na RDC se s/a estiver em R)
9.5.5	Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolução	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
9.5.7	Diferenciação no domínio do tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Pelo menos R
9.5.8	Diferenciação no domínio s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integração no domínio do tempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Pelo menos $R \cap \{\mathcal{Re}\{s\} > 0\}$

Propriedades das Transformadas (ver pág. 413)

Deslocamento em s

Se $\quad x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} X(s), \ \text{com RDC } = R$

Então $\quad \boxed{e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} X(s - s_0), \ \text{com RDC } = \mathrm{R} + \mathcal{Re}\{s_0\}.}$



$$Se \quad X(s) \ tem \ \ pólo \ em \ s = a$$
$$então \quad X(s - s_0) \ tem \ \ pólo \ em \ s - s_0 = a \rightarrow s = a + s_0$$

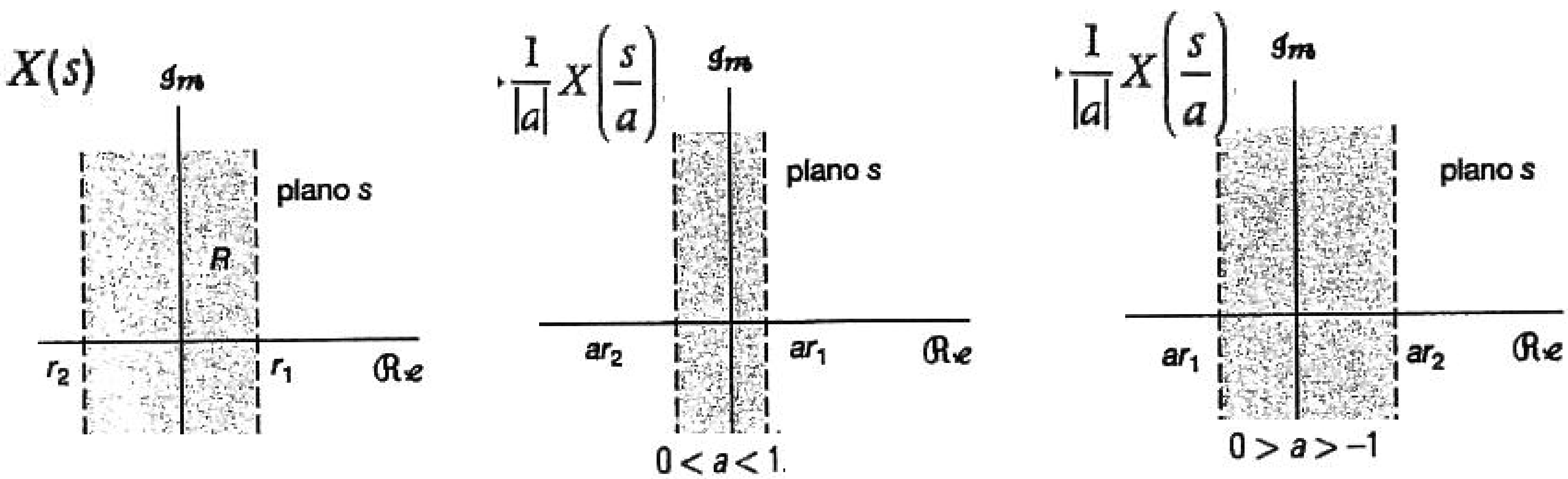
Desloc. no tempo: RDC não altera

$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} e^{-st_0} X(s), \ \text{com RDC } = R.$

Mudança de escala de tempo

Se $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, com RDC $= R$

Então $\boxed{x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{com RDC } R_1 = aR.}$



Convolução no tempo

Se

$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$, com RDC $= R_1$ e $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$, com RDC $= R_2$

Então

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s), \text{ com RDC contendo } R_1 \cap R_2.}$$

(pode ser maior que $R_1 \cap R_2$)

Exemplo

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1,$$

$X_1(s)X_2(s) = 1$

RDC é o plano s inteiro

Diferenciação em s

Se $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, com RDC $= R$

Então

$$\boxed{-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{com RDC } = R.}$$

Ex. 9.14

Se $e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \ \mathcal{R}e\{s\} > -a,$

Então $te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \ \mathcal{R}e\{s\} > -a.$

Em geral (Ex. 9.14)

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d^n}{ds^n}X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -a$$

Diferenciação no tempo

Se $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, com RDC $= R$

Então

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s), \quad \text{com RDC contendo } R.}$$

Exemplo

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{(s+a)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s) = \frac{1}{(s+a)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -a$$

Integração no tempo

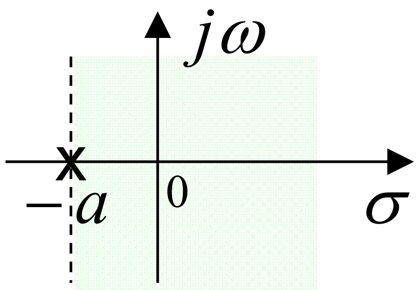
Se $x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} X(s)$, com RDC $= R$

Então $\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} \frac{1}{s} X(s), \text{ com RDC contendo } R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}.}$

Exemplo

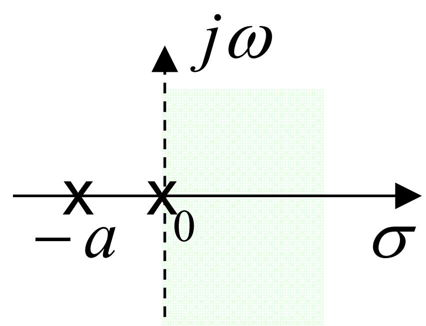
$$x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\cdot dt \overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{S} X(s)$$



$$x(t) = ?$$

$$X(s) = ?$$



Teorema do valor final

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)}$$

$x(t)$ = 0, t < 0 e limite finito com $t \to 0$

Prova $\quad \dfrac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s)$

$$\therefore \int_{0-}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\cdot e^{-st}dt = sX(s)$$

$$\underbrace{\lim_{s\to 0}\int_{0-}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\cdot \cancel{e^{-st}}^{\,1}dt} = \lim_{s\to 0}\left[sX(s)\right]$$

$$\int_{0-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}dt = x(\infty) - \underbrace{\cancel{x(0)}}_{0} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot X(s)\right] \longrightarrow \boxed{x(\infty) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot X(s)\right]}$$

Teorema do valor inicial

$$\boxed{x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)}$$

$x(t)$ = 0, t < 0 e sem impulsos/singularidades em $t = 0$

Prova $\quad \dfrac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s)$

$$x(0^+) + \int_{0+}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\cdot e^{-st}dt = sX(s)$$

sem descontinuidades em t = 0

$x(0^+)$

$t \to 0$ pela direita

(valores positivos de t)

$$x(0^+) + \underbrace{\lim_{s\to\infty}\int_{0+}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\cdot e^{-st}dt}_{=0} = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\boxed{x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)}$$

9.7 – Análise e caracterização de SLITs

$$\begin{array}{lcl} & h(t) & \\ X(s) \longrightarrow & \boxed{H(s)} & \longrightarrow Y(s) = H(s)\cdot X(s) \\ x(t) & & y(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

Função de Transferência ou Função de Sistema

Causalidade e $H(s)$ no plano s:

$h(t) = 0 \quad se \quad t < 0 \quad \therefore$ RDC é um semiplano direito

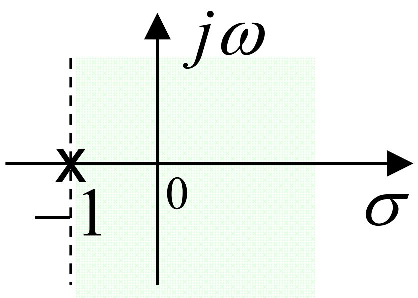
Se $H(s)$ é racional, uma RDC à direita é seguramente de um sistema causal

Ex. 9.17

$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$ (causal)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \boxed{\Re e\{s\} > -1}$$

(racional)



(semiplano direito)

Ex. 9.18

$$h(t) = e^{-|t|}$$

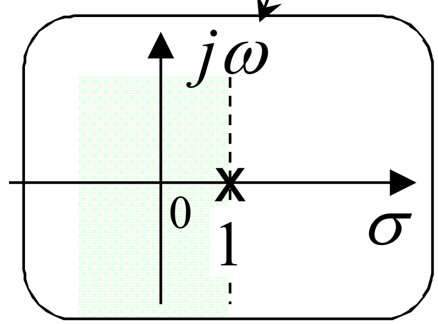
(não causal)

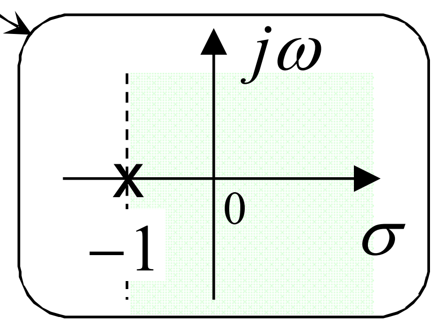
$$\updownarrow \mathcal{L}$$

(racional)

$$H(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \qquad \boxed{-1 < \Re e\{s\} < +1}$$

Não é semiplano direito





Ex. 9.7

$$x(t) = -e^{-b|t|}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{+bt} \cdot u(-t)}_{\text{Lat. esquerdo}} + \underbrace{e^{-bt} \cdot u(t)}_{\text{Lat. direito}}$$

$\mathcal{L}$

$$\frac{-1}{s-b} \qquad \frac{1}{s+b}$$

$\Re e\{s\} < +b$ (ver Ex. 9.2)

$\Re e\{s\} > -b$, (ver Ex. 9.1)

Causalidade e RDC

Ex. 9.19

Qual significado de e^s ?

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1$$

(não é racional) RDC: semiplano direito

$h(t)$ é causal?

$h(t)$ = ?

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1.$$

$$\underbrace{e^{-(t+1)}u(t+1)}_{\text{(não causal)}} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^s}{s+1} \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1$$

Note:

RDC à direita só é seguramente de um sistema causal se $H(s)$ for racional

Causalidade e RDC

Estabilidade e a transformada de Fourier

A RDC de um sistema estável inclui o eixo $j\omega$

Justificativa

SLIT estável: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

$\therefore$ se $h(t)$ satisfaz as <u>outras duas</u> condições de Dirichlet, existe $H(j\omega)$

Pág. 182

2. $x(t)$ tenha um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito.

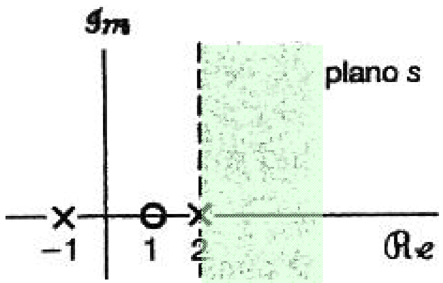
3. $x(t)$ tenha um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito. Além do mais, cada uma dessas descontinuidades precisa ser finita.

Ex. 9.20

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{\cancelto{2/3}{A}}{s+1}+\frac{\cancelto{1/3}{B}}{s-2}$$

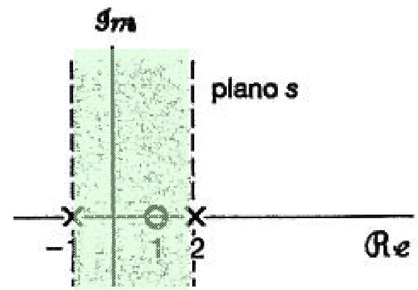
RDC = ?

RDC: Possibilidades:



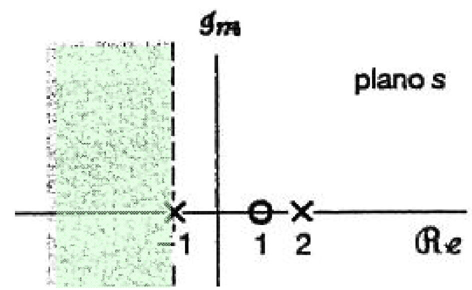
Causal, instável

$$h(t)=\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$$



Não causal
(bilateral)
estável

$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



Anticausal,
instável

$$h(t)=-\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

SLIT causal e estável, $H(s)$ racional: todos os pólos no semiplano esquerdo

Eq. diferenciais c/ coeficientes constantes

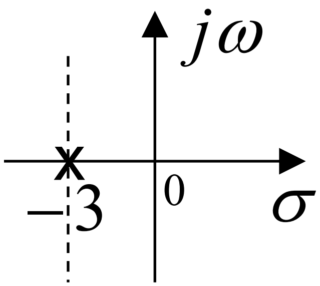
Ex. 9.23

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

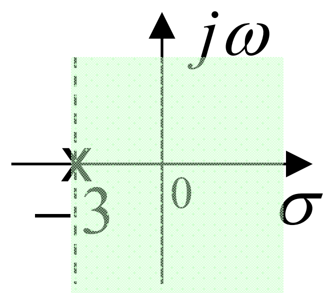


RDC = ?

Apenas a equação diferencial não especifica completamente o sistema (Seção 2.4)

Assumindo causalidade

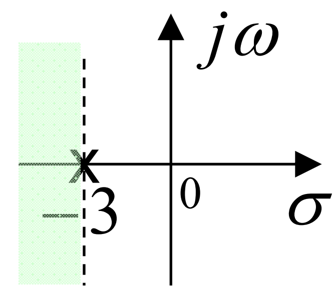
$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$



(estável)

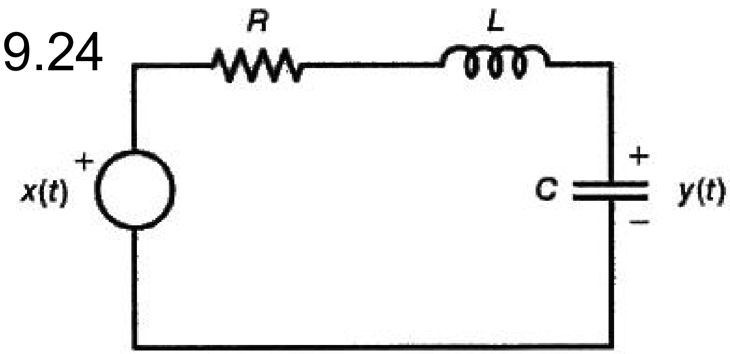
Assumindo anticausalidade

$$h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$



(instável: sem eixo $j\omega$)

Ex. 9.24



$$RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

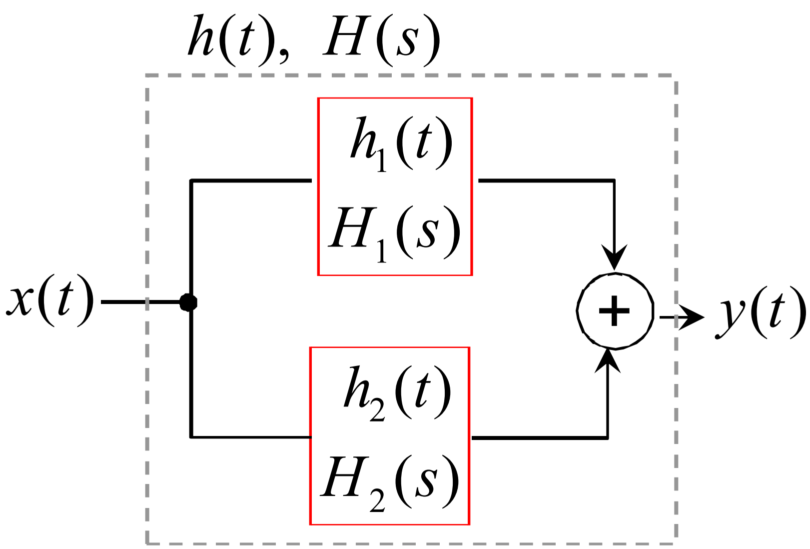
Verifique que, se $R, L, C > 0$

A parte real dos pólos é negativa

$\therefore$ O sistema é estável

9.8 Diagramas de blocos – Interconexão de SLITs

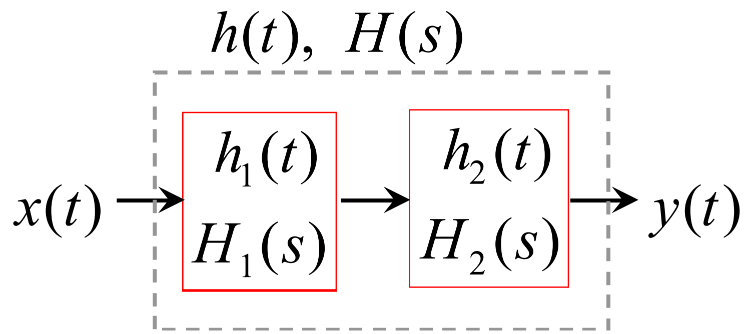
Linearidade



$$\boxed{h(t)} = h_1(t) + h_2(t)$$

$$\boxed{H(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

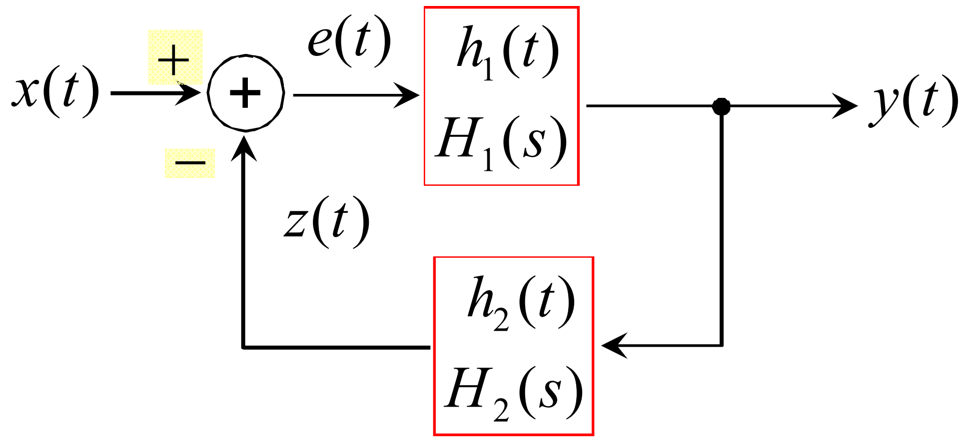
Convolução no tempo



$$\boxed{h(t)} = h_1(t) * h_2(t)$$

$$\boxed{H(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

Sistemas com realimentação



$$Y(s) = H_1(s) \cdot E(s)$$

$$Y(s) = H_1(s) \cdot [X(s) - Z(s)]$$

$$Y(s) = H_1(s) \cdot [X(s) - H_2(s) \cdot Y(s)]$$

$$Y(s)[1 + H_2(s) \cdot H_2(s)] = H_1(s) \cdot X(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}}$$

Expressão fundamental. “Pendure na parede do quarto”

Ex. 9.28

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s+3}}$$ causal

Com Eq. diferencial

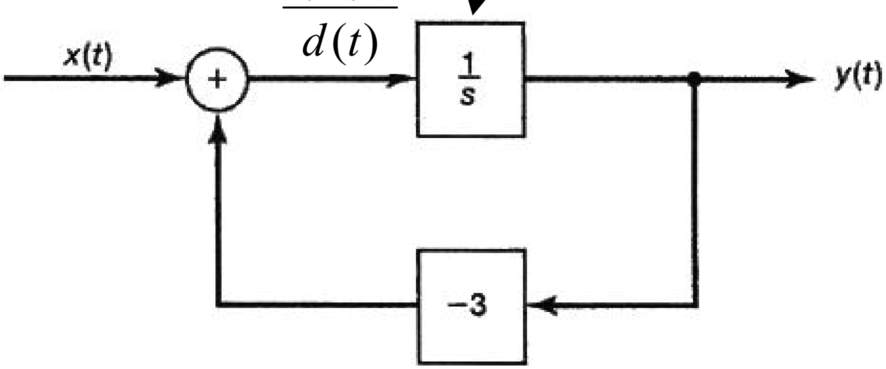
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow sY(s) + 3Y(s) = X(s)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -3y(t) + x(t)$$

integrador



Com realimentação

$$H(s) = \frac{1/s}{1 + 3 \cdot 1/s}$$

$$\equiv \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

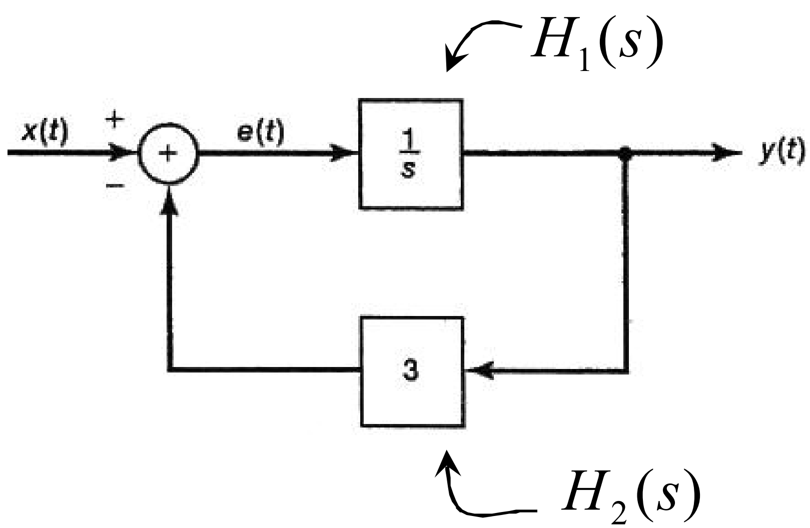


Diagrama em blocos na “forma direta”

Ex. 9.30

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

causal

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \quad \rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}=-3\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)+x(t)$$

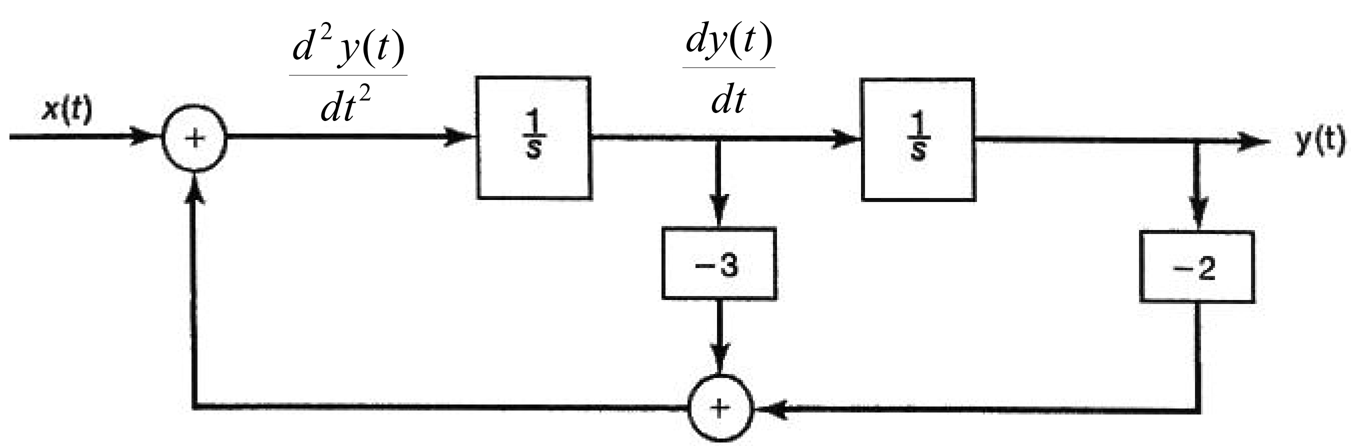


Diagrama em blocos na “forma direta”

Ex. 9.30 (continuação)

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right),$$

causal

$$= \left(\frac{1/s}{1 + 1 \cdot 1/s}\right)\left(\frac{1/s}{1 + 2 \cdot 1/s}\right)$$

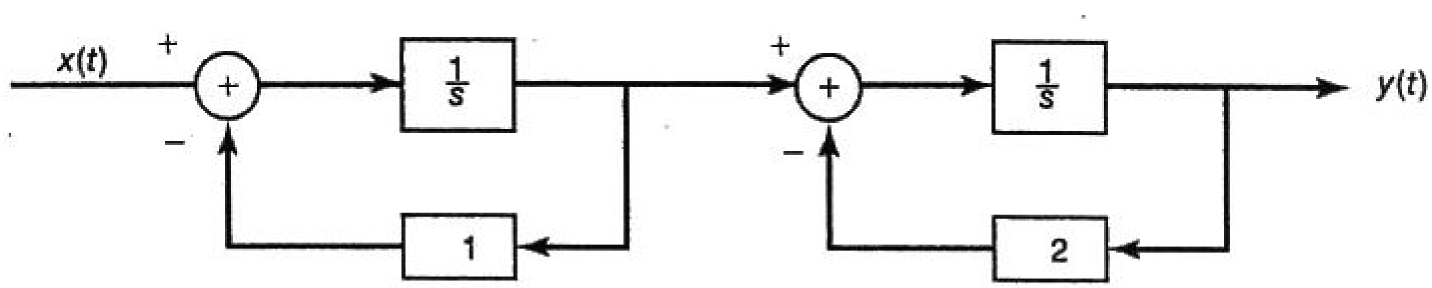


Diagrama em blocos na “forma em cascata”

Ex. 9.30 (continuação)

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{\cancel{A}\,^{1}}{s+1}+\frac{\cancel{B}\,^{-1}}{s+2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

causal

$$=\left(\frac{1/s}{1+1\cdot 1/s}\right)-\left(\frac{1/s}{1+2\cdot 1/s}\right)$$

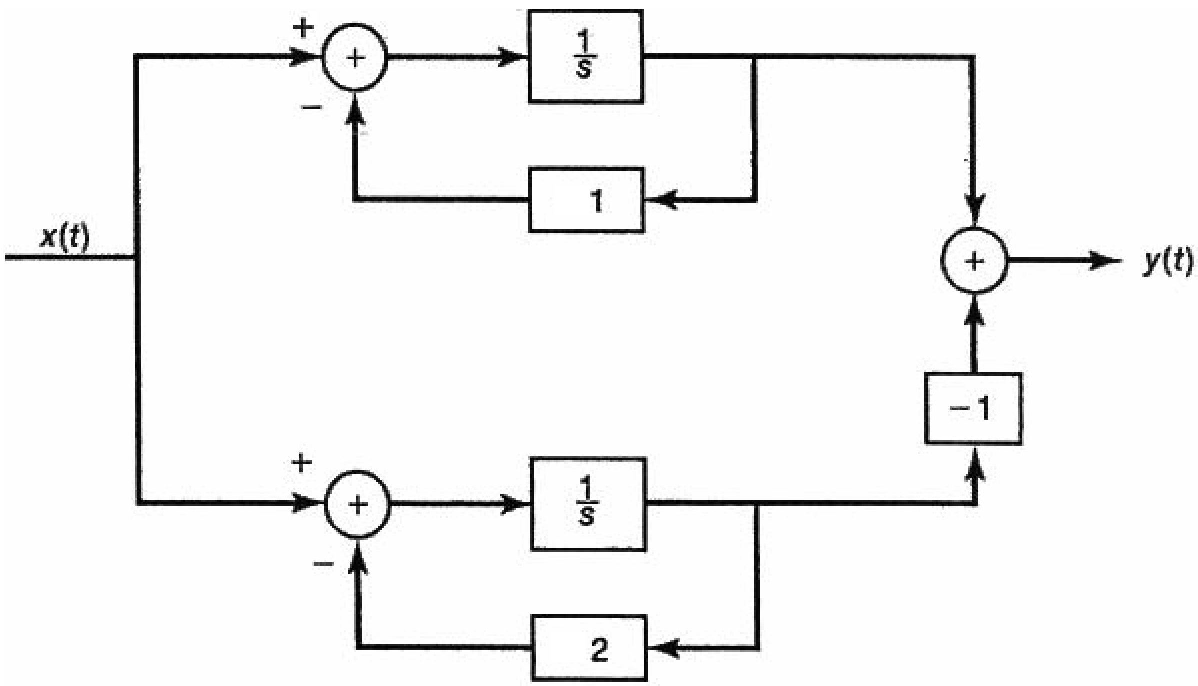


Diagrama em blocos na “forma paralela”

9.9 Transformada de Laplace unilateral

- Particularmente útil para SLITs causais especificados por equações diferencias c/ coeficientes constantes e com condições iniciais não nulas.

$$\boxed{\mathcal{UL}}\{x(t)\} = \int_{\boxed{0-}}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Permite descontinuidades em $t = 0$

- Sinais diferentes para $t < 0$ mas iguais para $t \geq 0$ têm transformadas unilaterais idênticas

  (mas as transformadas bilaterais são diferentes)

- Causalidade → RDC da transformada unilateral é sempre um semiplano direito

Propriedades de $\mathcal{UL}$ (p. 428) semelhantes às da transformada bilateral $\mathcal{L}$

RDC é um semiplano direito

Propriedade	Sinal	Transformada de Laplace unilateral
	$x(t)$	$\mathcal{X}(s)$
	$x_1(t)$	$\mathcal{X}_1(s)$
	$x_2(t)$	$\mathcal{X}_2(s)$
Linearidade	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Deslocamento no domínio s	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Mudança de escala no tempo	$x(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugação	$x^*(t)$	$x^*(s)$
Convolução (supondo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam identicamente zero para $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$
Diferenciação no domínio do tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$ Atenção!
Diferenciação no domínio s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
Integração no domínio do tempo	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

Teoremas dos valores inicial e final

Se $x(t)$ não contém impulsos ou singularidades de ordem mais elevada em $t = 0$, então

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{X}(s)$$

Exemplos

$$\boxed{x(t) = cos(\omega_0 t)\cdot u(t)} = \tfrac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\cdot u(t)$$

$$\mathcal{X}(s) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0} \quad \rightarrow \boxed{\mathcal{X}(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}}$$

De forma similar,

$$\boxed{sen(\omega_0 t)\cdot u(t) \quad \overset{u\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}$$

$$x(t) = e^{-at}\cdot cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$$

$$\mathcal{X}(s) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{s-(a-j\omega_0)} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{s-(a+j\omega_0)}$$

Exemplos

$$\boxed{x(t) = e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) u(t)}$$

$$e^{-at} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{UL}} \mathcal{X}_1(s+a)$$

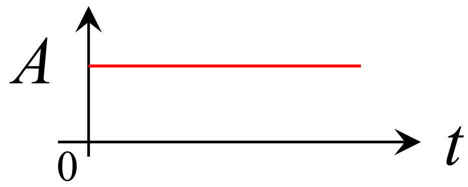
$$\boxed{\mathcal{X}(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}}$$

De forma similar,

$$\boxed{e^{-at} \cdot sen(\omega_0 t) \cdot u(t) \quad \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}}$$

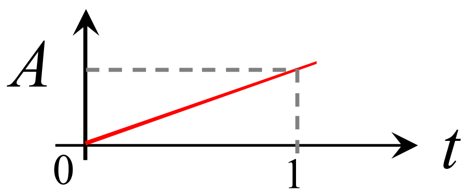
Exemplos

$$\boxed{x(t) = A \cdot u(t)}$$



$$\mathcal{X}(s) = \int_{0-}^{\infty} A \cdot e^{-st} \cdot dt = \left. \frac{-Ae^{-st}}{s} \right|_{t=0^-}^{\infty} \rightarrow \boxed{\mathcal{X}(s) = \frac{A}{s}} \qquad RDC = ?$$

$$\boxed{x(t) = At \cdot u(t)}$$



$$tx(t) \xleftrightarrow{u\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{A}{s} \rightarrow \boxed{\mathcal{X}(s) = \frac{A}{s^2}}$$

Eq. diferenciais e a transformada $\mathcal{UL}$

- Na UL posso introduzir facilmente as condições inicias (não preciso supor repouso inicial)

SLIT causal: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{d(t)} \stackrel{\text{UL}}{\longleftrightarrow} sY(s)-y(0^-)$$

Condições iniciais: $y(0^-)=\beta,\quad y'(0^-)=\gamma.$

$$d^2y(t)/dt^2$$
$$\updownarrow \mathcal{UL}$$
$$s[s\mathcal{Y}(s)-y(0^-)]-\dot{y}(0^-)$$
$$=s^2\mathcal{Y}(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)$$
$$=s^2\mathcal{Y}(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)$$

Seja $x(t)=\alpha u(t)$

$$s^2\mathcal{Y}(s)-\beta s-\gamma+3s\mathcal{Y}(s)-3\beta+2\mathcal{Y}(s)=\frac{\alpha}{s}$$

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}+\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

Entrada nula e estado (inicial) nulo

$$\mathcal{Y}(s)=\underbrace{\frac{\cancelto{0}{\beta}(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\cancelto{0}{\gamma}}{(s+1)(s+2)}}_{\text{Repouso inicial}}+\boxed{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}$$

Repouso inicial

$\beta = \gamma = 0$

⇩

resposta ao estado (inicial) nulo;

→ resposta forçada/solução particular

$$\mathcal{Y}(s)=\boxed{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}+\underbrace{\frac{\cancelto{0}{\alpha}}{s(s+1)(s+2)}}$$

⇩

resposta à entrada nula

→ resposta natural/solução homogênea

Entrada nula

$x(t) = \alpha u(t) = 0$

Exercícios recomendados

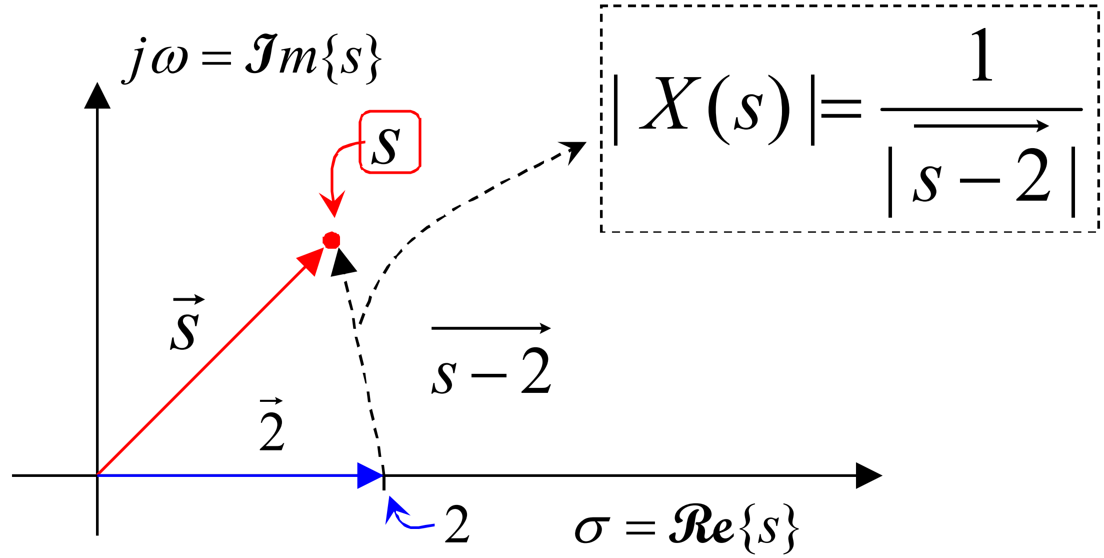
9.3, 9.5 9.10, 9.11, 9.17, 9.18, 9.20

9.21, 9.22, 9.25, 9.29, 9.31, 9.35, 9.36, 9.37, 9.40, 9.49

9.4 Cálculo geométrico da transformada de Fourier a partir do diagrama de pólos e zeros

Análise de vetores no plano S

$$Seja\ \ X(s) = \frac{1}{\boxed{s} - \boxed{2}}$$



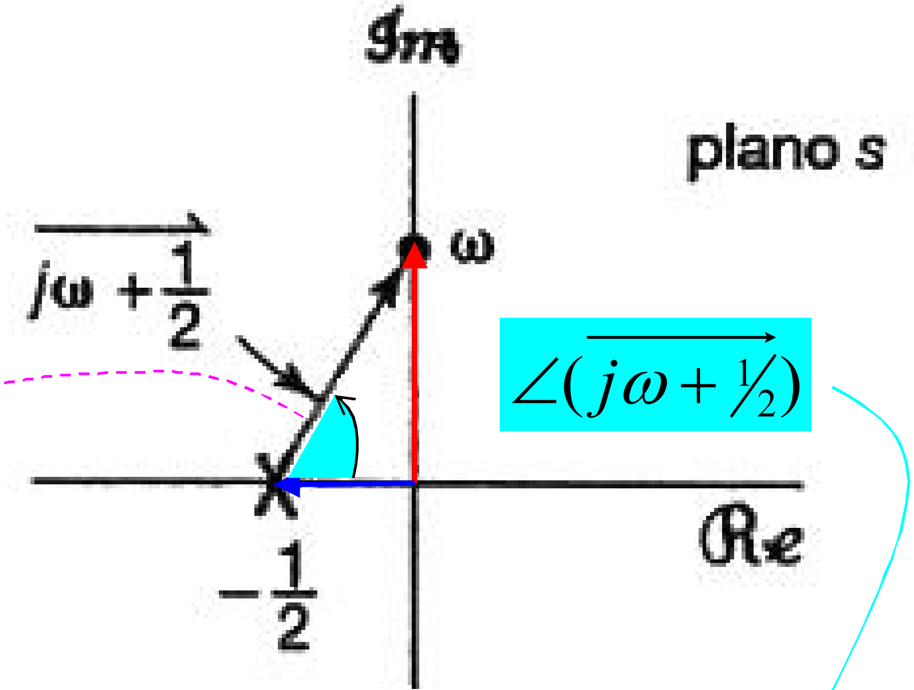
Sistema de 1ª. ordem

$$X(s)=\frac{1}{\boxed{s+\frac{1}{2}}},\qquad \Re e\{s\}>-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{s-\left(-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{\boxed{j\omega}+\boxed{1/2}}$$



$$\boxed{\left|X(j\omega)\right|^2=\frac{1}{\omega^2+(1/2)^2}}$$

$$\boxed{\angle X(j\omega)=\left[tg^{-1}\left(\frac{\omega}{1/2}\right)\right]^{-1}=-tg^{-1}(2\omega)}$$

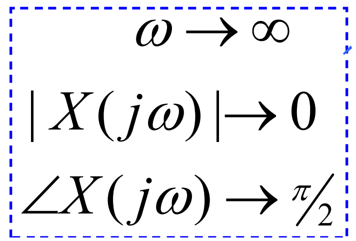
Transformada de Fourier ($s=j\omega$) a partir de pólos e zeros

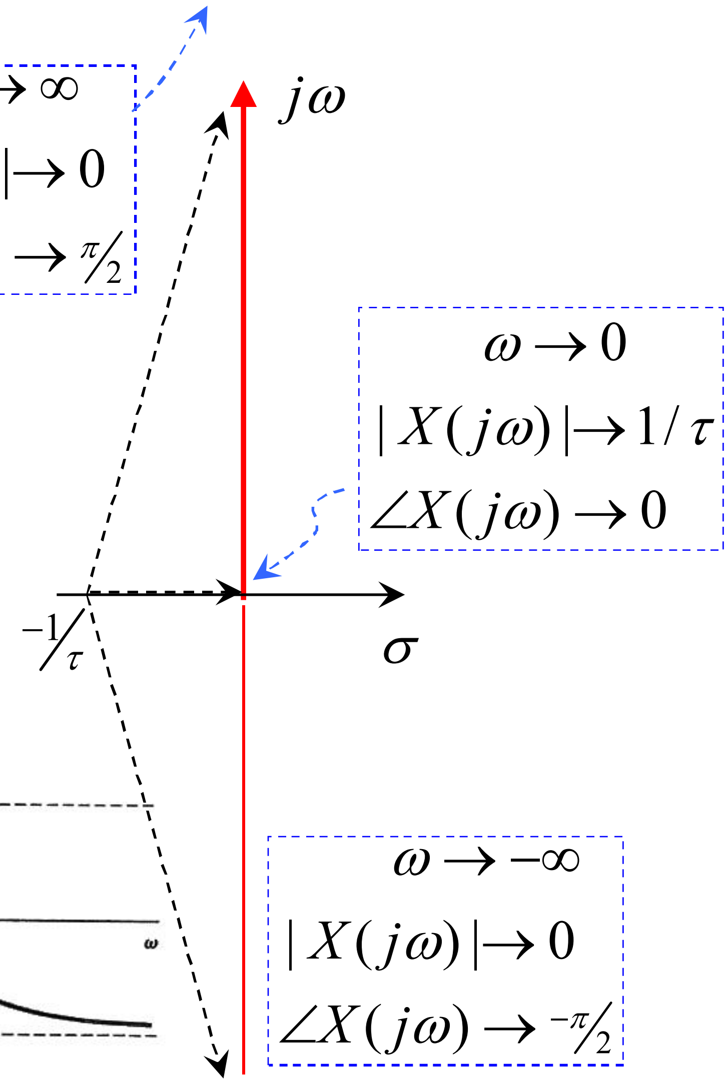
Sistema de 1ª. Ordem (generalização)

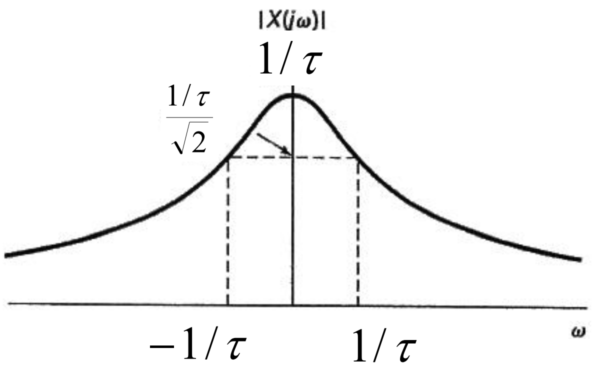
$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

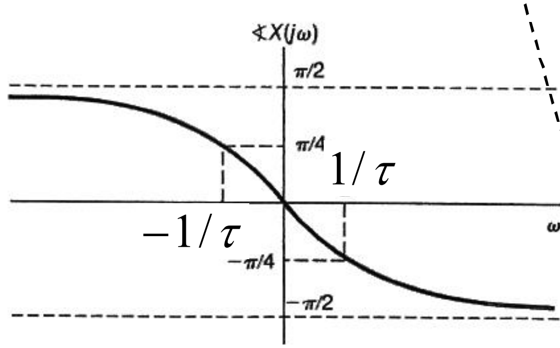
$$H(s) = \frac{1}{s\tau + 1} \qquad \Re e\{s\} > -\frac{1}{\tau}$$

$$X(j\omega) = \frac{1/\tau}{(j\omega) - {-1/\tau}}$$

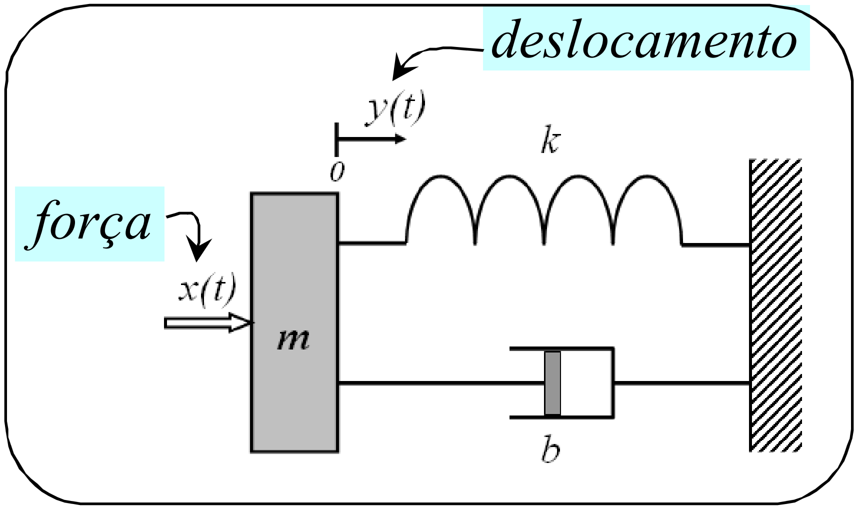








Sistemas de 2ª. ordem: função de transferência



$$\boxed{x(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ky(t) + b\frac{dy(t)}{dt}}$$

$$\therefore X(s) = ms^2Y(s) + kY(s) + bsY(s)$$

$$\rightarrow X(s) = Y(s)[ms^2 + bs + k]$$

$$\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{1/m}{s^2 + (b/m)s + (k/m)}$$

Definindo: $\boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}}$ $\boxed{\varsigma = \dfrac{b}{2\sqrt{k \cdot m}}}$

$$k \cdot H(s) = \frac{k/m}{s^2 + (b/m)s + (k/m)}$$

Trabalhando...

$$\boxed{k \cdot H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n)s + \omega_n^2}}$$

constante

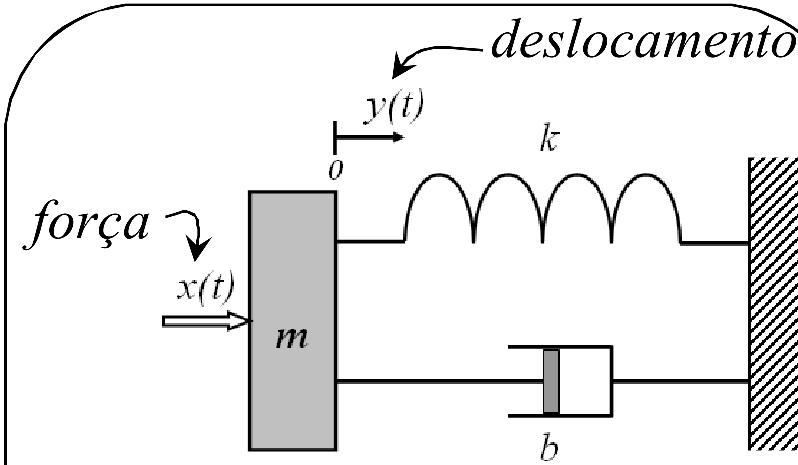
Forma usual

Sistemas de 2ª. ordem

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\equiv \frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}$$

$$\boxed{c_{1,2} = \varsigma \cdot \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\varsigma^2 - 1}}$$



$$\boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}}$$

Freqüência natural não amortecida

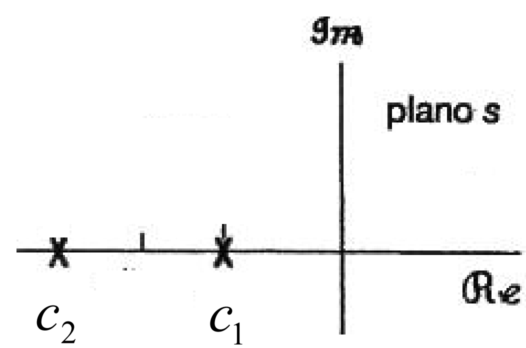
$$\boxed{\varsigma = \frac{b}{2\sqrt{k \cdot m}}}$$

Coeficiente de amortecimento

- Para $\zeta > 1$, c_1 e c_2 são reais

$\downarrow$

$H(s)$ = produto de
2 termos de 1ª. ordem



Transformada de Fourier a parte de pólos e zeros

$$H(s) = \boxed{\frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}} \text{ (cap. 6) } = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

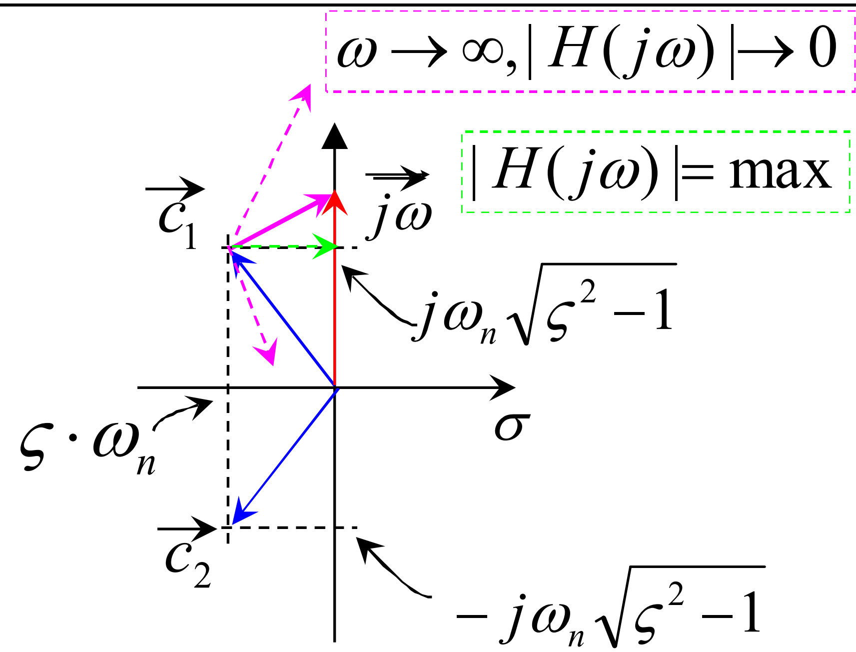
$$\boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}} \quad \boxed{\varsigma = \frac{b}{2\sqrt{k \cdot m}}}$$

- Para: $\underbrace{0 < \varsigma < 1}_{\text{Amortecimento subcrítico}} \rightarrow c_{1,2} = \underbrace{\varsigma \cdot \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{|\varsigma^2 - 1|}}_{\text{Raízes = complexas e conjugadas}}$

- Interpretação gráfica

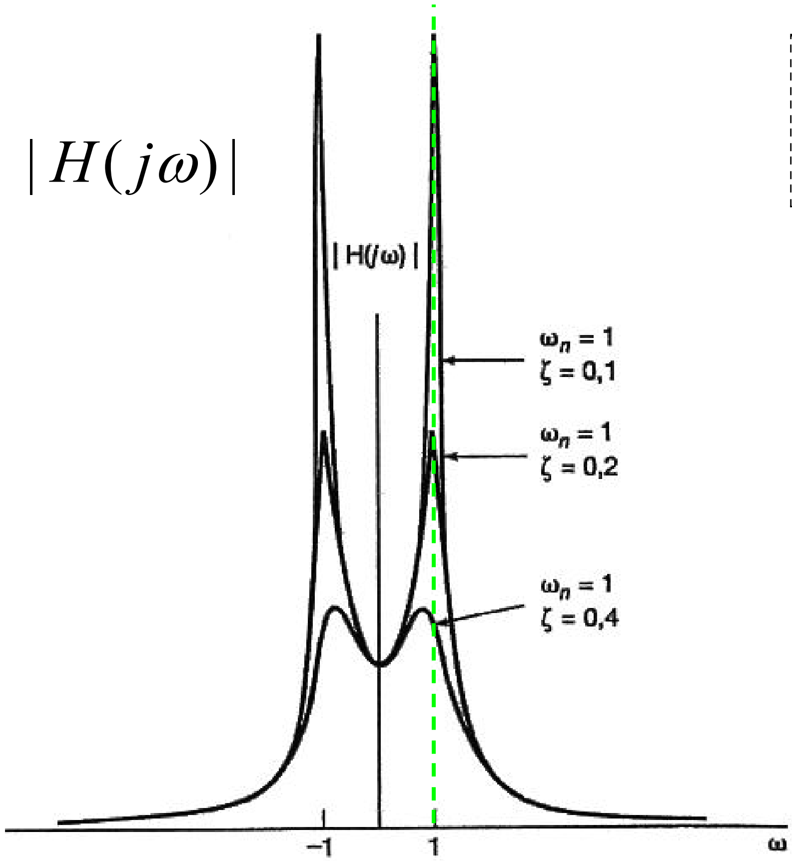
Em frações parciais:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{A}{j\omega - c_1} + \frac{B}{j\omega - c_2}}$$



Sistemas de 2ª. ordem com pólos complexos conjugados

$$|H(j\omega)|$$

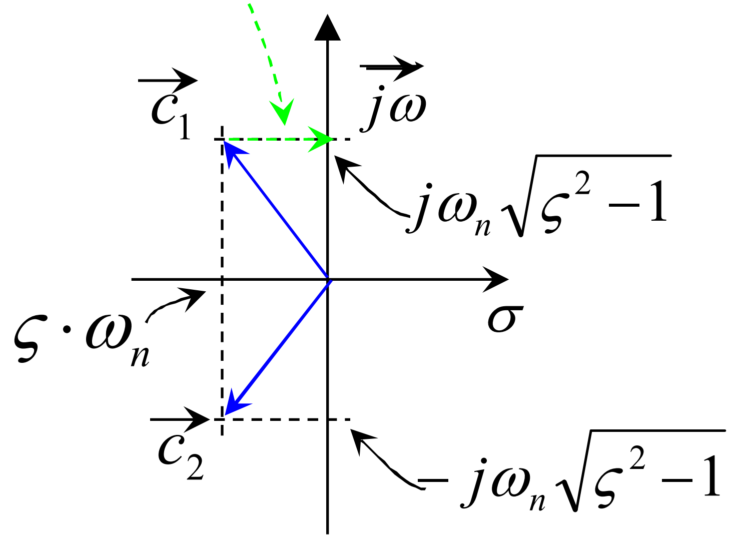


$$-\omega_n \qquad \omega_n$$

$$|H(j\omega)|_{máx} \rightarrow \omega_n$$
$$se \ \ \varsigma \rightarrow 0$$

$$H(j\omega) = \frac{A}{(j\omega) - c_1} + \frac{B}{(j\omega) - c_2}$$

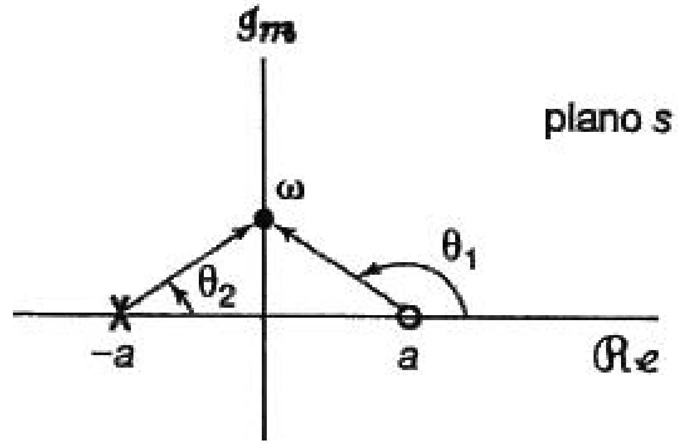
$$\frac{1}{|H(j\omega)|} = máx$$



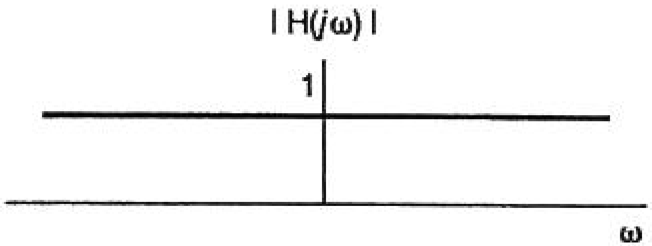
Transformada de Fourier a partir de pólos e zeros no plano s

Passa-tudo (≠ Ex. 4.35)

$$H(s) = k\frac{s-a}{s+a},\ \ RDC\ (causal) = ?$$

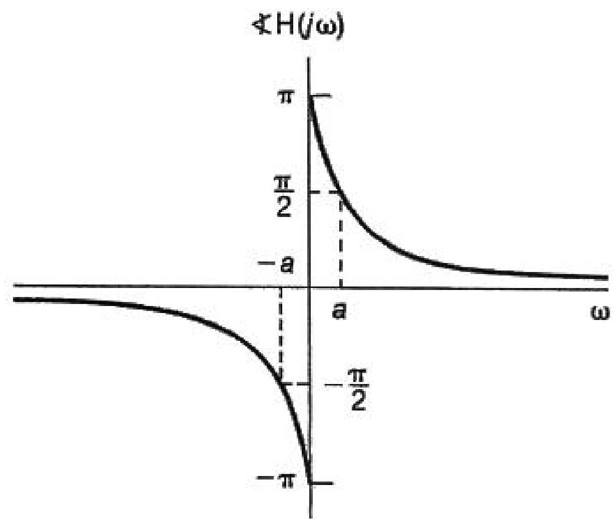


$$H(j\omega) = k\frac{j\omega - a}{j\omega + a} = 1$$



$$\angle H(j\omega) = \theta_1 - \theta_2 \ = (\pi - \theta_2) - \theta_2 = \pi - 2\theta_2$$

$$\theta_2 = tg^{-1}(\omega / a)$$



Transformada de Fourier ($s=j\omega$) a partir de pólos e zeros