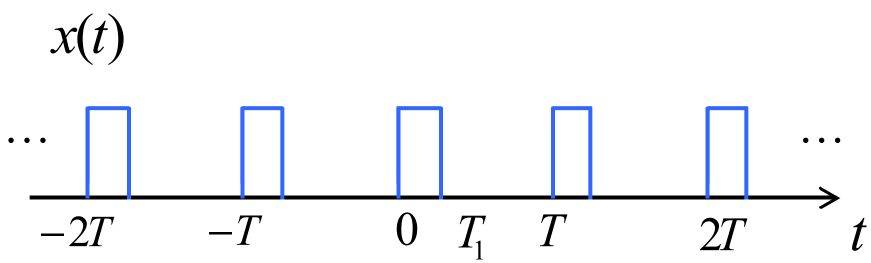
Modulo 05
Transformada de Fourier de tempo discreto

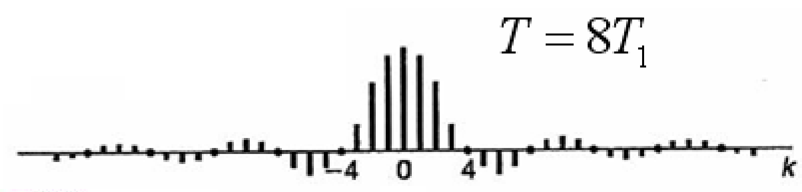
Cap. 3: Série de Fourier

Sinal periódico — **Série de Fourier**

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j(k\omega_0)t}} \quad \overset{S\mathcal{F},\,\omega_0}{\longleftrightarrow} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-j(k\omega_0)t}\,dt}$$

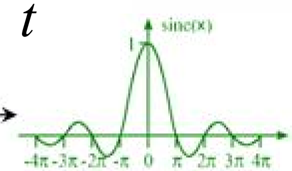
$$\boxed{a_k = A_k e^{j\theta_k} = B_k + jC_k}$$





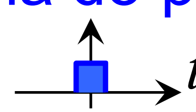
envoltória

$\Updownarrow \mathcal{F}$



$$a_k = 2\frac{T_1}{T}\,\frac{sen(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}{(k\cdot\omega_0\cdot T_1)}$$

Forma do pulso



3.6 Série de Fourier para sinais periódicos de tempo discreto - Sumário

- $x[n]$ com período N
  - A série de Fourier (tempo discreto) é finita!
    - não há problema de convergência;
    - fenômeno de Gibs não ocorre;
  - Os coeficientes (espectrais) repetem-se periodicamente

Soma em um período

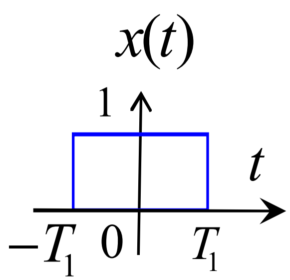
$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

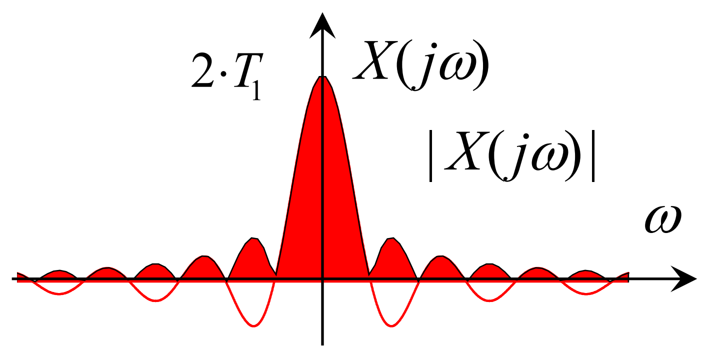
Facilmente implementada computacionalmente!

Cap. 4 Transformada de Fourier: $x(t)$ aperiódico

Transformada inversa (síntese)		Transformada de Fourier (análise)
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(j\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$

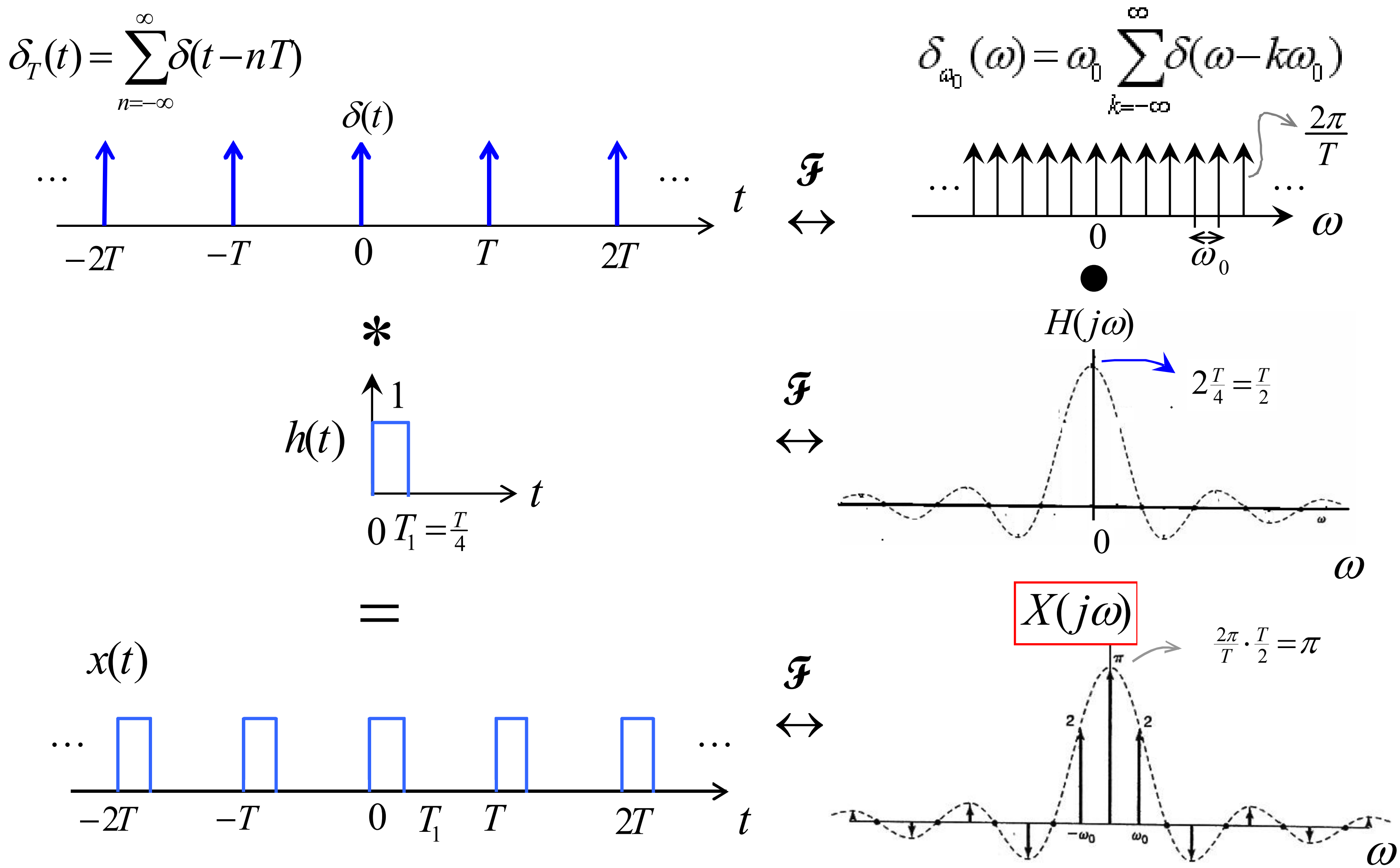


$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$



Sinais aperiódicos: $X(j\omega)$ = densidade espectral

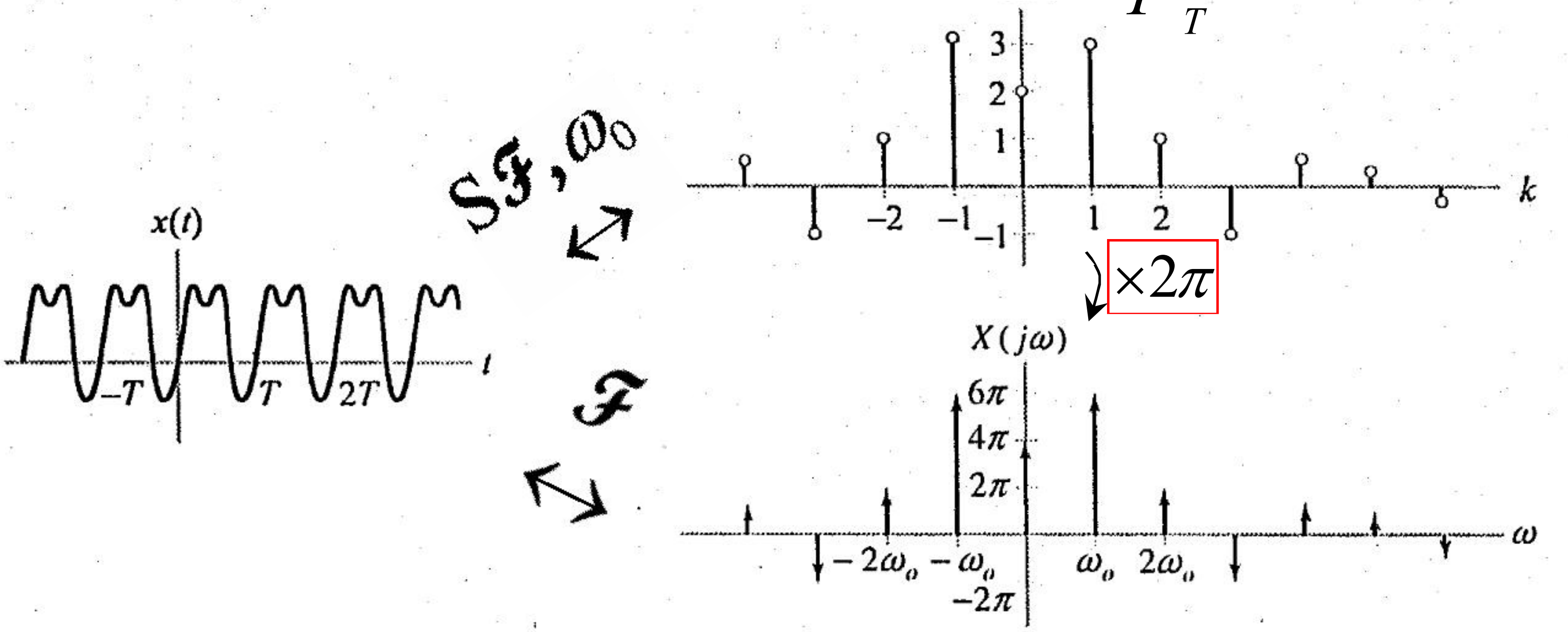
Cap. 4 Transformada de Fourier: $x(t)$ periódico



Sinais periódicos: $X(j\omega)$ = espectro de linhas = $2\pi\, a_k$

Série e transformada de Fourier de um sinal periódico

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-j(k\omega_0)t}\,dt$$



Transformada de Fourier em tempo discreto

- Desenvolvimento a partir da transformada de Fourier em tempo contínuo (≠ seção 5.1)
- Amostragem de sinais de tempo contínuo:

contínuo $x(t) \longrightarrow x[n]$ discreto

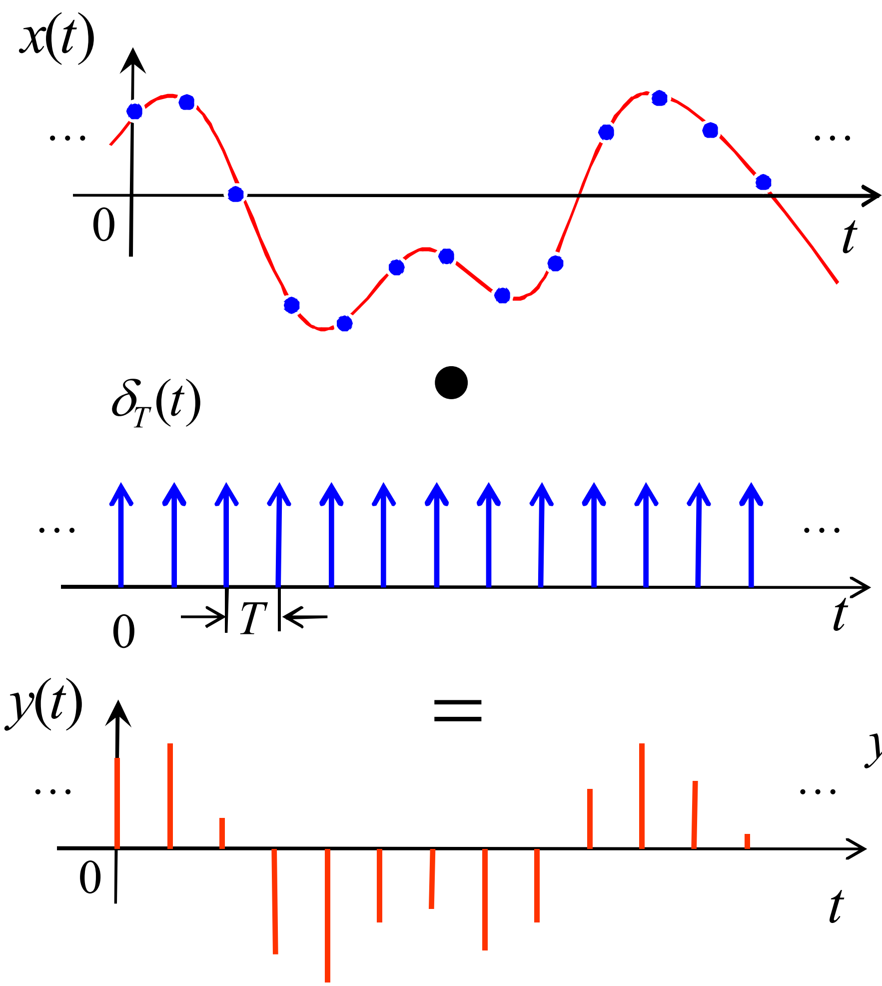
$$T = \frac{1}{F_s}$$

T = Taxa de amostragem

☞ não é período de de $x(t)$

$$x[n] = x(t)\big|_{t=n\cdot T}$$

Amostrar: multiplicar por um trem de impulsos



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

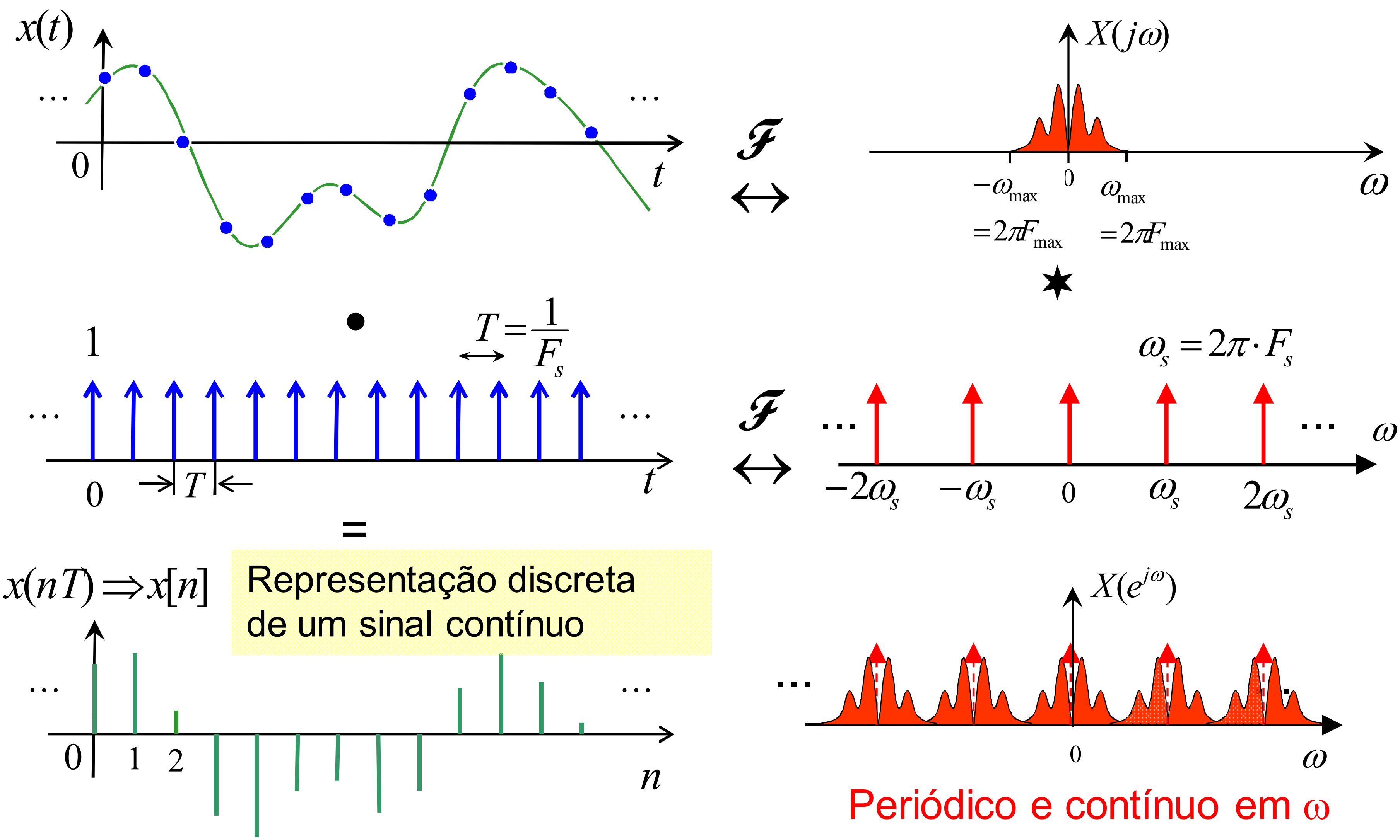
$$y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

Representação em tempo contínuo
do sinal discreto x[n]=x(nT)

Amostragem por trem de impulsos



$X(e^{j\omega})$: Réplicas do espectro original deslocadas em freqüência e superpostas

Transformada de Fourier de $x[n]$

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)\quad\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\quad Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)\right]\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot e^{-j\omega t}dt\right]$$

Comutando somatório e integral

$$Y(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot e^{-j\omega nT}dt\right]$$

Amostragem dos impulsos

$$Y(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot e^{-j\omega nT}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\cdot dt\right]\quad \boxed{=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot e^{-j\omega nT}}$$

continua...

Transformada (direta) de Fourier de $x[n]$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-nT) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad Y(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot e^{-j\omega nT}$$

(notação convencional)

definindo
x[n]=x(nT)=y(nT)
e considerando
T= 1

TF da representação
em tempo continuo
de um sinal discreto
considerando amostras
com espaçamento unitário

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n}}$$

Contínuo em ω discreto no tempo

Periódico em ω *com período* 2π!!!

Transformadas de Fourier

Tempo contínuo | espectro contínuo

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Tempo discreto | espectro contínuo

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

Convergência da TFTD

Condições de convergência

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ Absoluta integrabilidade

ou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$ Energia finita

Ex. 5.1 (exponencial decrescente: |a|<1)

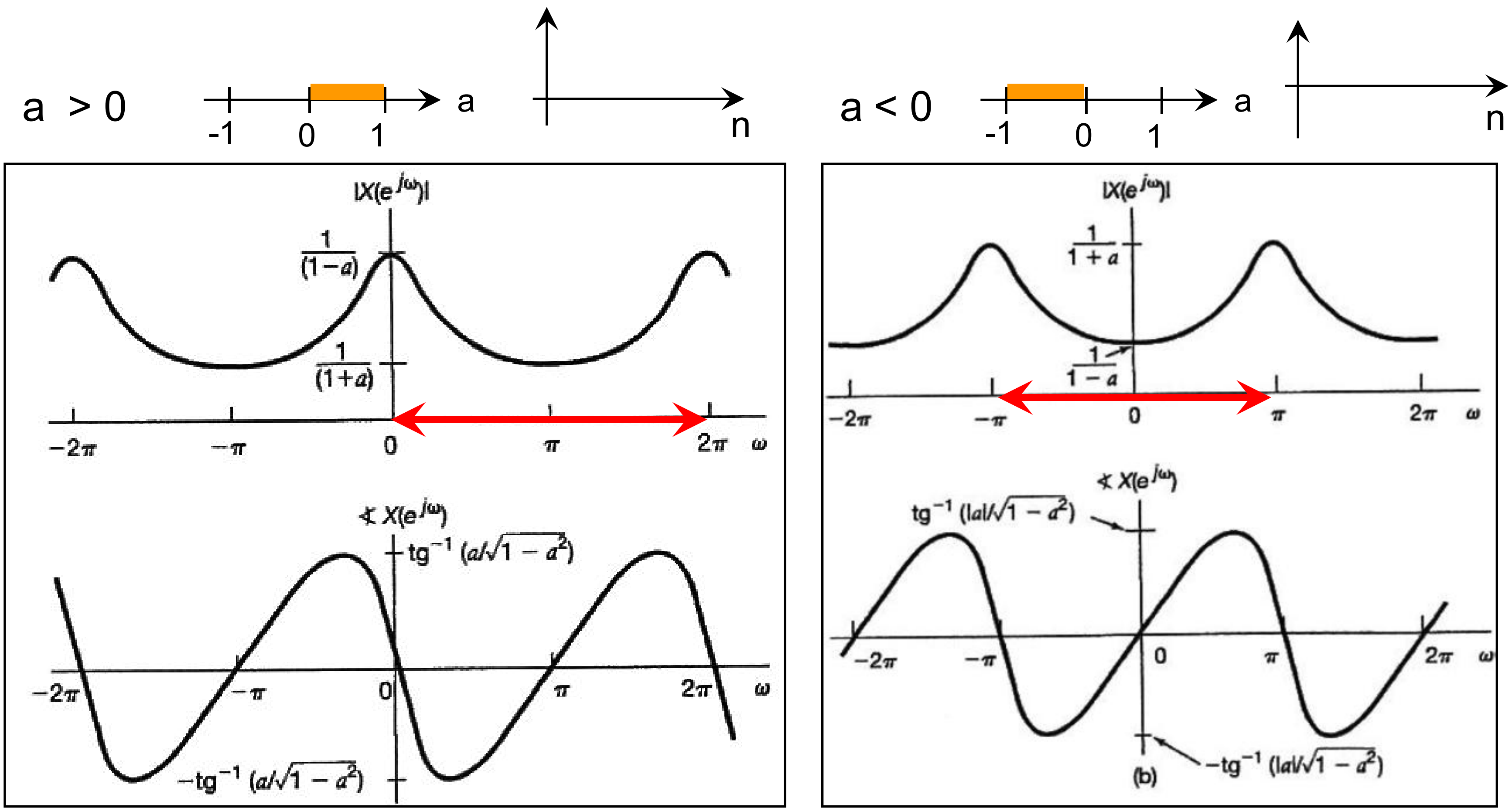
$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a[cos(\omega) - jsen(\omega)]} = \frac{1}{[1 - acos(\omega)] - jasen(\omega)}$$

$$\boxed{|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{[1 - acos(\omega)]^2 + [asen(\omega)]^2}} \qquad \boxed{\angle X(e^{j\omega}) = -tg^{-1}\left(\frac{asen(\omega)}{1 - acos(\omega)}\right)}$$

Ex. 5.1 $x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

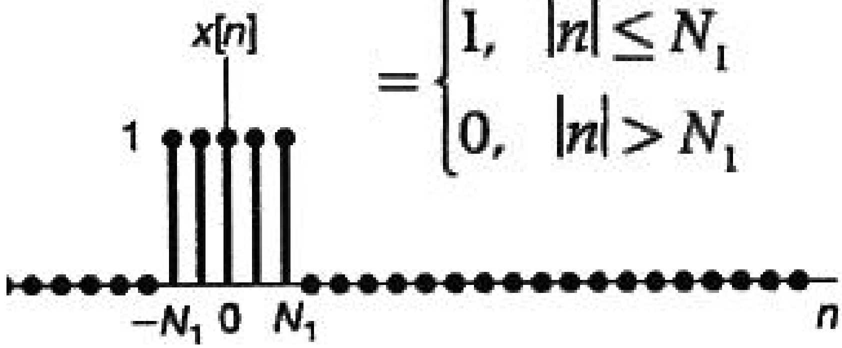


Filtro passa-baixas

Filtro passa-altas

Espectro contínuo e periódico em ω; período = 2π

Ex. 5.3



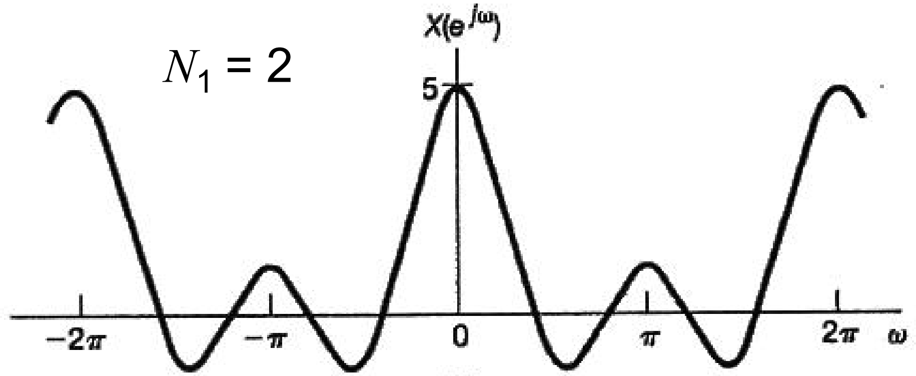
$$= \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{e^{-j\omega N_1} - e^{-j\omega(N_1+1)}}{1 - e^{j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{+j\omega N_1} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\omega N_1}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$\updownarrow \mathcal{F}$



$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{\operatorname{sen} \omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}}$$

É contínuo e periódico em ω

Não é um *sinc*()

Exercício: Impulso

Determine a DTFT do sinal:

$$x[n] = \delta[n]$$

- Transformada de Fourier de tempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Exercício: Impulso

- Solução

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega 0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Exercício: Pulso na Frequência

Determine o sinal $x[n]$ (domínio do tempo) a partir do espectro de frequência:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}, |W| < \pi$$

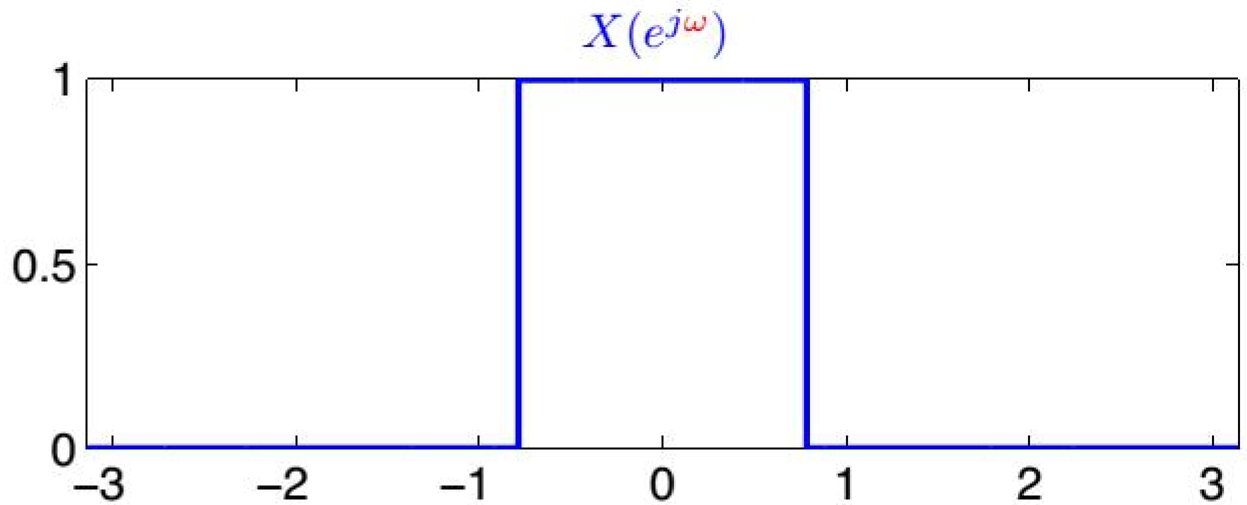
- Transformada Inversa de Fourier

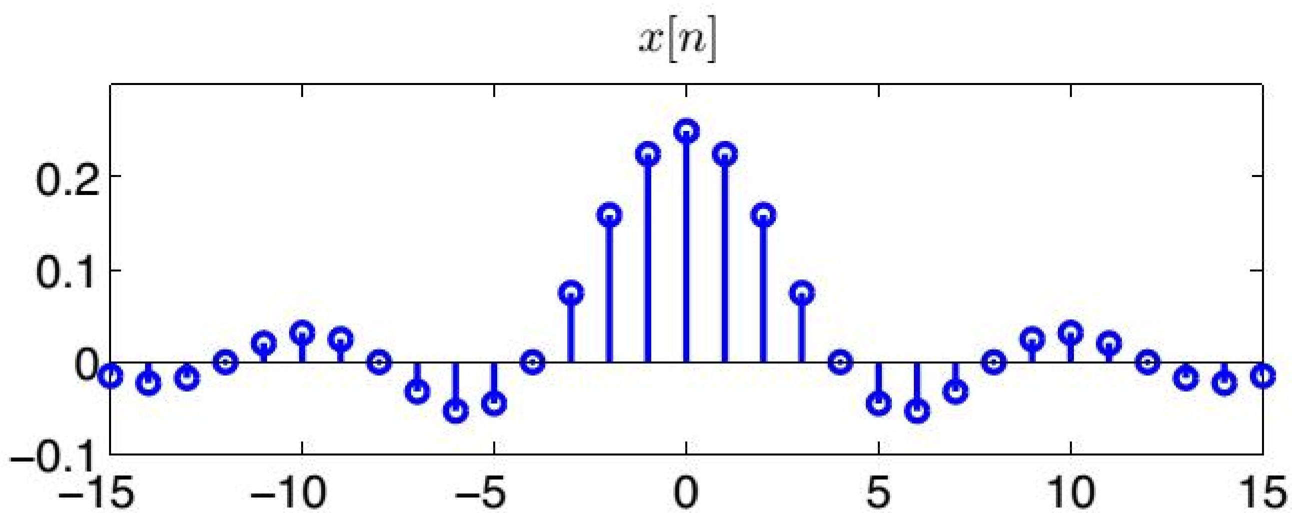
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Exercício: Pulso na Frequência

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi n j}e^{j\omega n}\Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}(Wn) \\
&= \frac{W}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(Wn)}{Wn} \\
x[0] &= \frac{W}{\pi}
\end{aligned}
$$

Exercício: Pulso na Frequência





Exercício: Trem de Impulsos na Frequência

- Determine a IDTFT de:

k fixado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

- Transformada Inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Exercício: Trem de Impulsos na Frequência

- Solução

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)e^{j\omega n}d\omega \\
&= e^{j(k\omega_0+2\pi\ell)n} \\
&= e^{jk\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

TFTD para sinais periódicos

Se $$x[n] = e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

então, se x[n] for periódico (i.e. existe a SF)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

A TFTD é não nula somente nos harmônicos

Exercício: DTFT para Sinais Periódicos

- Determine a DTFT do sinal

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

- Para sinais periódicos:

$$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

Exercício: DTFT para Sinais Periódicos

$$x[n] = \cos(\omega_0 n), \quad \omega_0 = 2\pi/5$$

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} \begin{cases} a_{-1} &= & \frac{1}{2} \\ a_1 &= & \frac{1}{2} \\ a_k &= & 0, \forall |k| \neq 1 \end{cases}$$

Logo,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega + 1\omega_0 - 2\pi\ell) + \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega - 1\omega_0 - 2\pi\ell)$$

Exercício: DTFT para Sinais Periódicos

Determine a DTFT do trem de impulsos

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[n - iN]$$

- Para sinais periódicos:

$$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

Solução: DTFT para Sinais Periódicos

- Sabemos que a DTFS do trem de impulsos

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[n - iN] \text{ é: } a_k = \frac{1}{N}, \quad \forall k$$

- Portanto, a DTFT é:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{N} \delta[\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell]$$

Com $\omega_0 = 2\pi/N$

Algumas propriedades da TFTD

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega})$$

- Diferenças e semelhanças com tempo contínuo

Periodicidade na freqüência

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

Deslocamentos

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Parserval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Diferença/acumulação no tempo

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} (1-e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \underbrace{\pi X(e^{j0})}_{\text{valor médio}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)}_{\text{periodicidade}}$$

$$n x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

derivada na freqüência

Escalonamento: Propriedade DTFT

- Escalonamento caso Discreto
  - Considere o sinal $z[n] = x[an]$
  - Se $|a| > 1$ podendo ser inteiro informação de $x[n]$ é perdida pois n só pode assumir valores inteiros.
  - Se $|a| < 1$ poderá não perder informação, pois n em $z[n]$ poderá assumir valores inteiros.

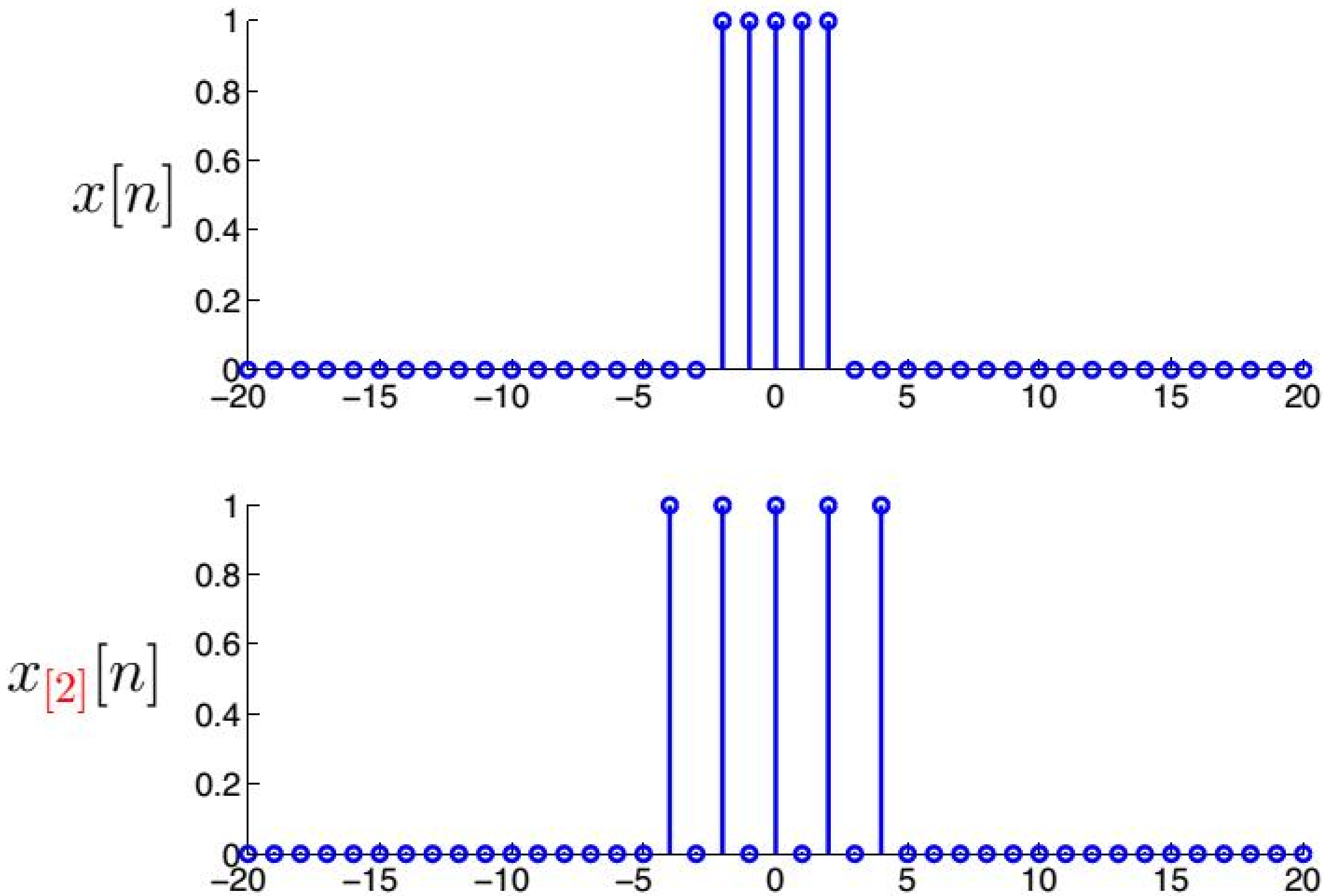
Escalonamento: *Propriedade DTFT*

- Defina o sinal:

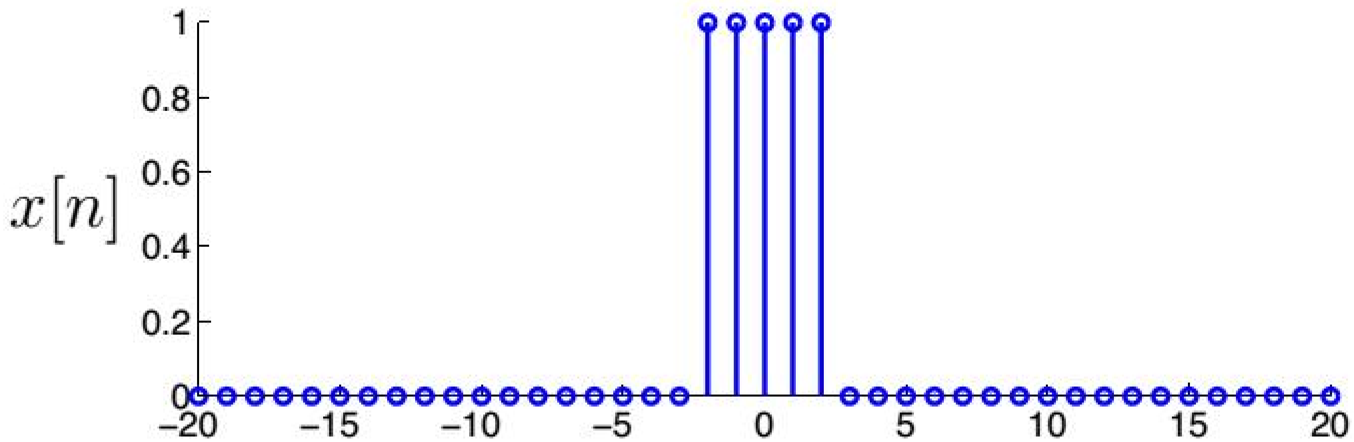
$$x_{[k]}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } k \end{cases}$$

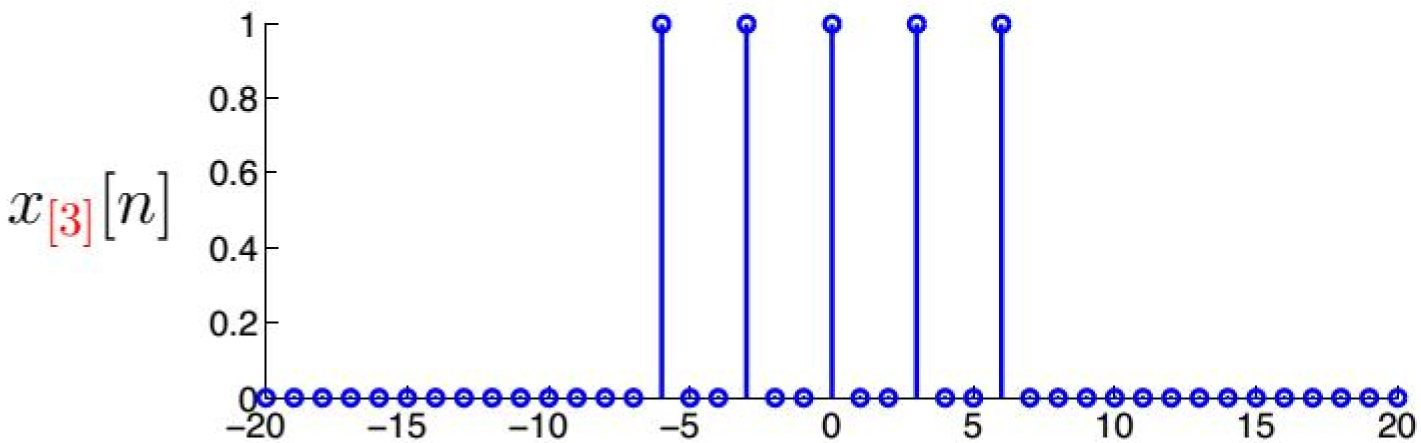
- Sendo k positivo e inteiro

Propriedades da FT

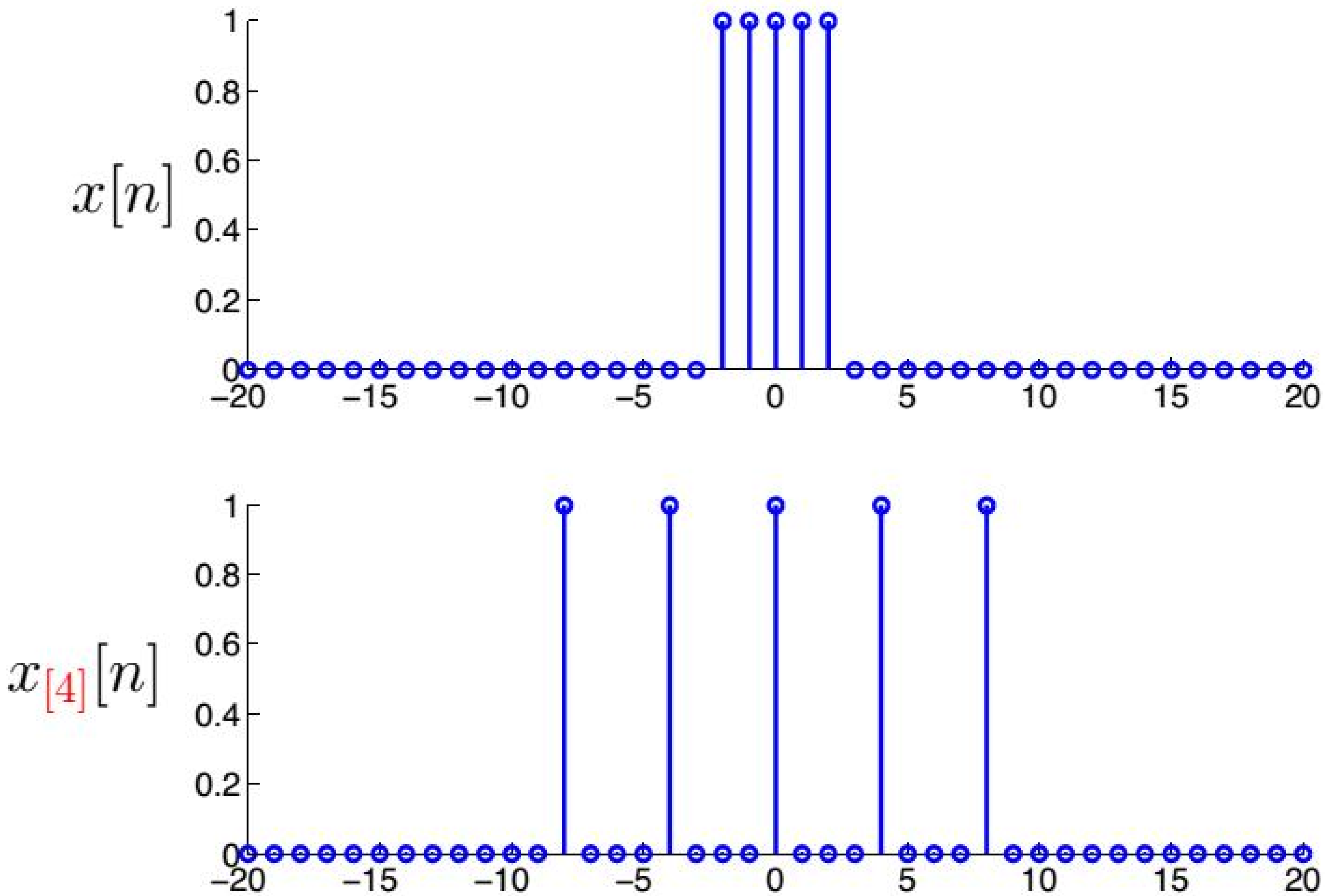


Propriedades da FT





Propriedades da FT



Propriedades da FT

A DTFT de $x_{[k]}[n]$ é dada por

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[k]}[n]e^{-j\omega n}$$

- $x_{[k]}[n] \neq 0$ se $r = n/k$, (r inteiro), logo $n = rk$

$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{[k]}[rk]e^{-j\omega rk}, \quad x_{[k]}[rk] = x[r] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$

Escalonamento: *Propriedade DTFT*

- Portanto, temos o resultado:
  - Seja k positivo e inteiro
  - Defina o sinal:

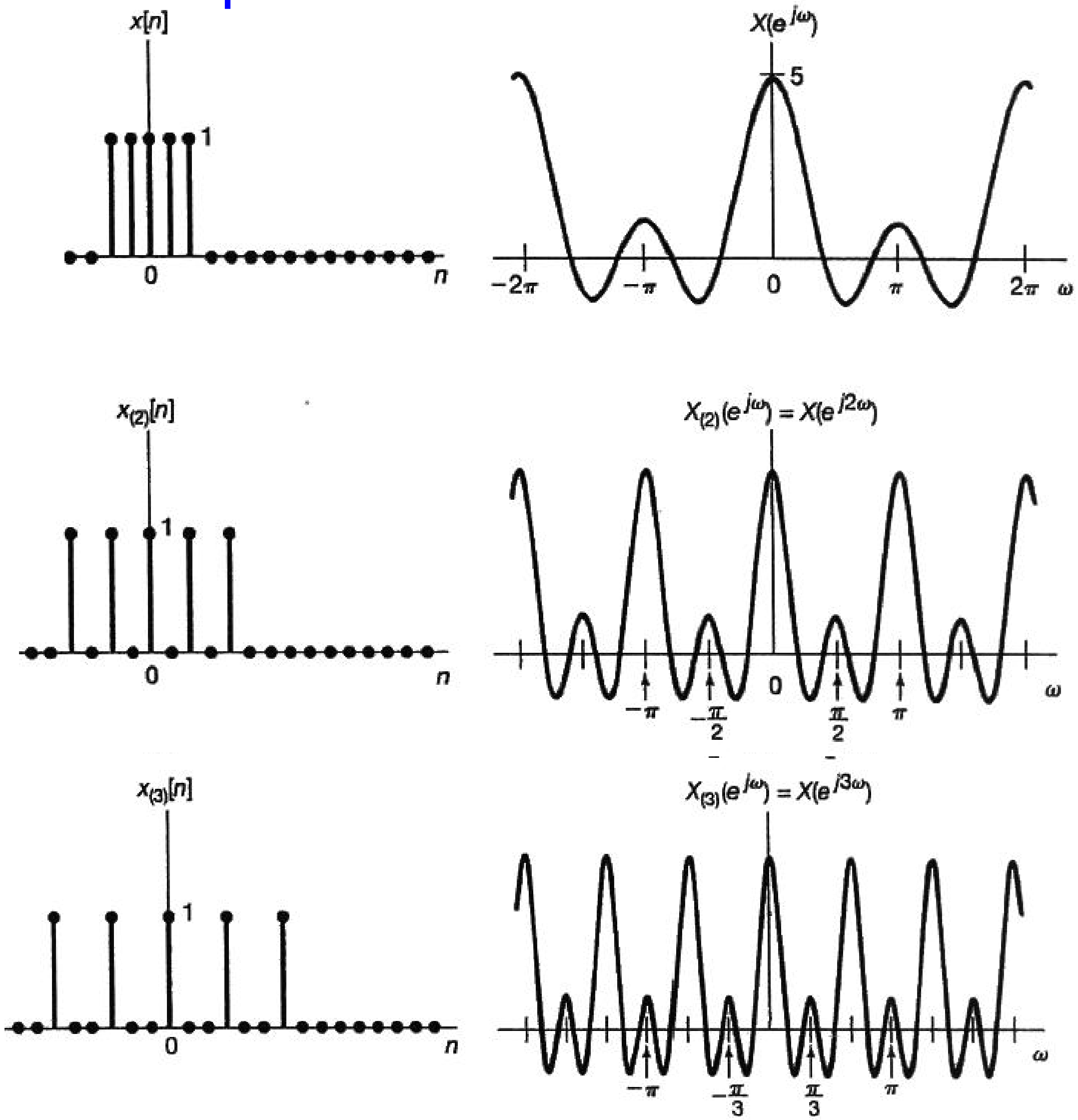
$$x_{[k]}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } k \end{cases}$$

- Então:

$$x_{[k]}[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$$

Ex. 5.9

tempo freqüência



$$x_{(2)}[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \ par \\ 0, & n \ ímpar \end{cases}$$

$$x_{(3)}[n] = \begin{cases} x[n/3], & n \ par \\ 0, & n \ ímpar \end{cases}$$

expansão no tempo ⇔ compressão do espectro

Convolução $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ multiplicação

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

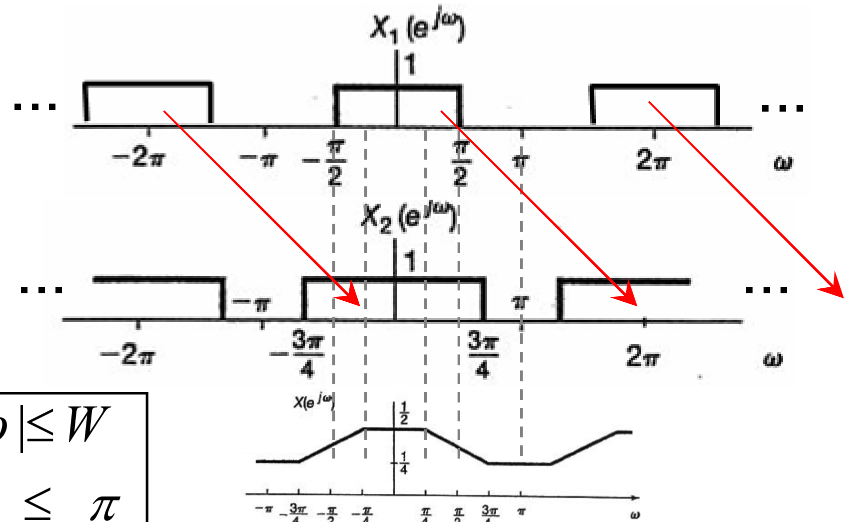
adiar Ex. 5.13 - 5.14

multiplicação $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ convolução periódica

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boxed{2\pi}} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{-j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$x_1[n] = \frac{\text{sen}(3\pi n/4)}{\pi n} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

$$x_2[n] = \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$



$$\frac{sen(Wn)}{\pi n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$0 < \omega < \pi$

Exemplo 5.15

Simetria para $\boxed{x[n] \text{ real}}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot cos(\omega n)}_{Re[X(e^{j\omega})]} \quad - \quad \underbrace{j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot sen(\omega n)}_{Im[X(e^{j\omega})]}$$

$$cos(\omega n) = cos(-\omega n)$$

$$Re[X(e^{j\omega})] = Re[X(e^{-j\omega})]$$

Parte real do espectro
é par

$$sen(-\omega n) = -sen(\omega n)$$

$$Im[X(e^{j\omega})] = -Im[X(e^{-j\omega})]$$

Parte imaginária do espectro
é ímpar

Propriedades valem para $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ (tempo contínuo)

Simetria para $\boxed{x[n] \text{ real}}$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}}$$

$\boxed{Re\,[X(e^{j\omega})] \text{ é par}}$

$\boxed{Im\,[X(e^{j\omega})] \text{ é ímpar}}$

$$\underbrace{|X(e^{j\omega})|}_{\text{par}} = \sqrt{\underbrace{Re[X(e^{j\omega})]^2}_{\text{par}} + \underbrace{Im[X(e^{j\omega})]^2}_{\text{ímpar}^2 = \text{par}}}$$

Módulo (magnitude) do espectro é par

$$\underbrace{\angle X(e^{j\omega})}_{\text{ímpar}} = tg^{-1} \frac{Re[X(e^{j\omega})]}{Im[X(e^{j\omega})]}$$

$$tg\,(x) = sen\,(x) / cos(x)$$

$$tg\,(-x) = sen\,(-x) / cos(-x)$$

$$tg(x) = -tg(x)$$

fase do espectro é ímpar

Propriedades valem para $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ (tempo contínuo)

Resumo propropriedades

Linearidade (Tabela Propriedades)

- $Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} Aa_k + Bb_k$
- $Ax[n] + By[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} Aa_k + Bb_k$
- $Ax(t) + By(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} AX(j\omega) + BY(j\omega)$
- $Ax[n] + By[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$

Resumo propropriedades

Deslocamento no tempo (Tabela Propriedades)

- $x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$
- $x[n - n_0] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$
- $x(t - t_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- $x[n - n_0] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

Resumo propropriedades

Deslocamento na frequência (Tabela Prop.)

- $e^{jM\omega_0 t}x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{k-M}$
- $e^{jM\omega_0 n}x[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_{k-M}$
- $e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0))$
- $e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Resumo propropriedades

Conjugação *(Tabela Propriedades)*

- $x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$
- $x^*[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$
- $x^*(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$
- $x^*[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X^*(e^{-j\omega})$

Resumo propropriedades

Reflexão no tempo (Tabela Propriedades)

- $x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$
- $x[-n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$
- $x(-t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$
- $x[-n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$

Resumo proppropriedades

Escalonamento (Tabela Propriedades)

- $x(\alpha t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k$, $\alpha > 0$ (período T/α)
- $x_{[m]}[n] \stackrel{DTFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{m} a_k$, $m > 0$, inteiro (período Nm)
- $x(at) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$
- $x_{[m]}[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{jm\omega})$

$$x_{[m]}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } m \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } m \end{cases}$$

Resumo propropriedades

Convolução periódica *(Tabela Propriedades)*

- $x(t) \circledast y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} T a_k b_k$
- $x[n] \circledast y[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} N a_k b_k$
- $x(t) * y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) Y(j\omega)$
- $x[n] * y[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$

Resumo propropriedades

Multiplicação/Modulação (Tabela Propriedades)

- $x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell b_{k-\ell} \qquad \rightarrow a_k * b_k$
- $x[n]y[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=<N>} a_\ell b_{k-\ell} \qquad \rightarrow a_k \circledast b_k$
- $x(t)y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
- $x[n]y[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$

Resumo propropriedades

Diferenciação/Diferença (Tabela Propriedades)

- $\frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 a_k$
- $x[n] - x[n-1] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega_0})a_k$
- $\frac{dx(t)}{dt} \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$
- $x[n] - x[n-1] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega})X(e^{j\omega})$

Resumo propropriedades

Integração/Soma (Tabela Propriedades)

- $\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{jk\omega_0}a_k$
- $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1-e^{-jk\omega_0})}a_k$
- $\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
- $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{(1-e^{-j\omega})} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

Resumo propropriedades

Sinais reais e pares *(Tabela Propriedades)*

- $x(t)$ real e par $\overset{FS}{\longleftrightarrow}$ a_k real e par
- $x[n]$ real e par $\overset{DTFS}{\longleftrightarrow}$ a_k real e par
- $x(t)$ real e par $\overset{FT}{\longleftrightarrow}$ $X(j\omega)$ real e par
- $x[n]$ real e par $\overset{DTFT}{\longleftrightarrow}$ $X(e^{j\omega})$ real e par

Resumo propropriedades

Sinais reais e ímpares *(Tabela Propriedades)*

Para $x(t)$ e $x[n]$ reais e ímpares

- $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ puramente imaginário e ímpar
- $x[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_k$ puramente imaginário e ímpar
- $x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar
- $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ puramente imaginário e ímpar

Resumo propropriedades

Relações de Parseval (Tabela Propriedades)

- $$\frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \qquad \longrightarrow FS$$
- $$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2 \qquad \longrightarrow DTFS$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \qquad \longrightarrow FT$$
- $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \qquad \longrightarrow DTFT$$

Resposta em frequência de sistemas caracterizados por equações a diferenças finitas

$x[n]$ $\longrightarrow$ $\boxed{SLIT}$ $\longrightarrow$ $y[n] = x[n] * h[n]$

$h[n]$

$X(e^{j\omega})$ $\qquad$ $H(e^{j\omega})$ $\qquad$ $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

Ex. 5.18

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

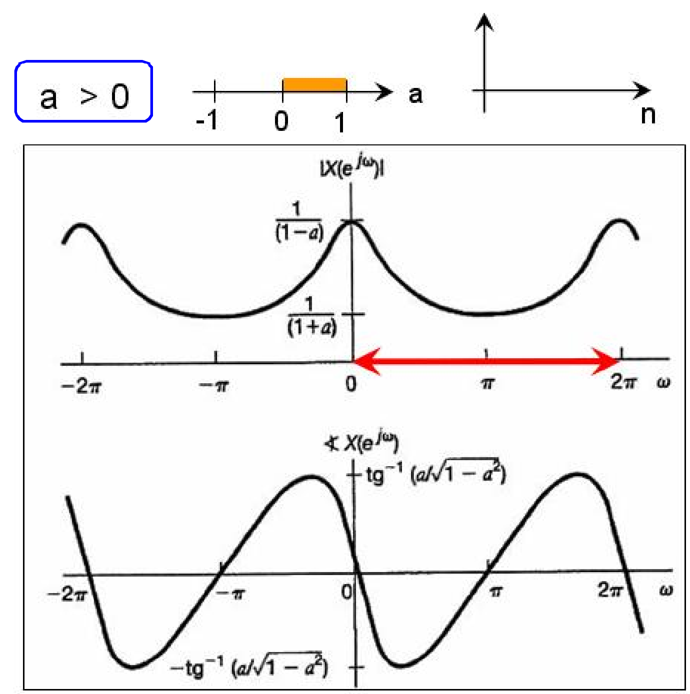
$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$Y(e^{j\omega}) - ae^{-j\omega} \cdot Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})[1 - ae^{j\omega}] = X(e^{-j\omega})$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

Ver Ex. 5.1



Filtro passa-baixas

Aplicação da propriedade do deslocamento no tempo discreto

Resposta em frequência. de sistemas caracterizados por eq. a diferenças finitas

$TFTD^{-1}$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$TFTD\left\{\sum_{k=0}^{M} a_k y[n-k]\right\} = TFTD\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{M} a_k TFTD\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{N} b_k TFTD\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{M} a_k Y(e^{j\omega})e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{N} b_k X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}$$

$$Y(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k}}$$

Exercícios recomendados

- 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.21 (uso das equações de análise e síntese e propriedades)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega, \tag{5.8}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{5.9}$$

- A abordagem usada nas aulas é apresentada, no livro, nos Ex. 5.53 e 5.54 (DFT). O Ex. 5.55 foi discutido, de forma simplificada, junto ao capítulo 4 (espectro de uma senoide truncada).