Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Confiabilidade de Sistemas

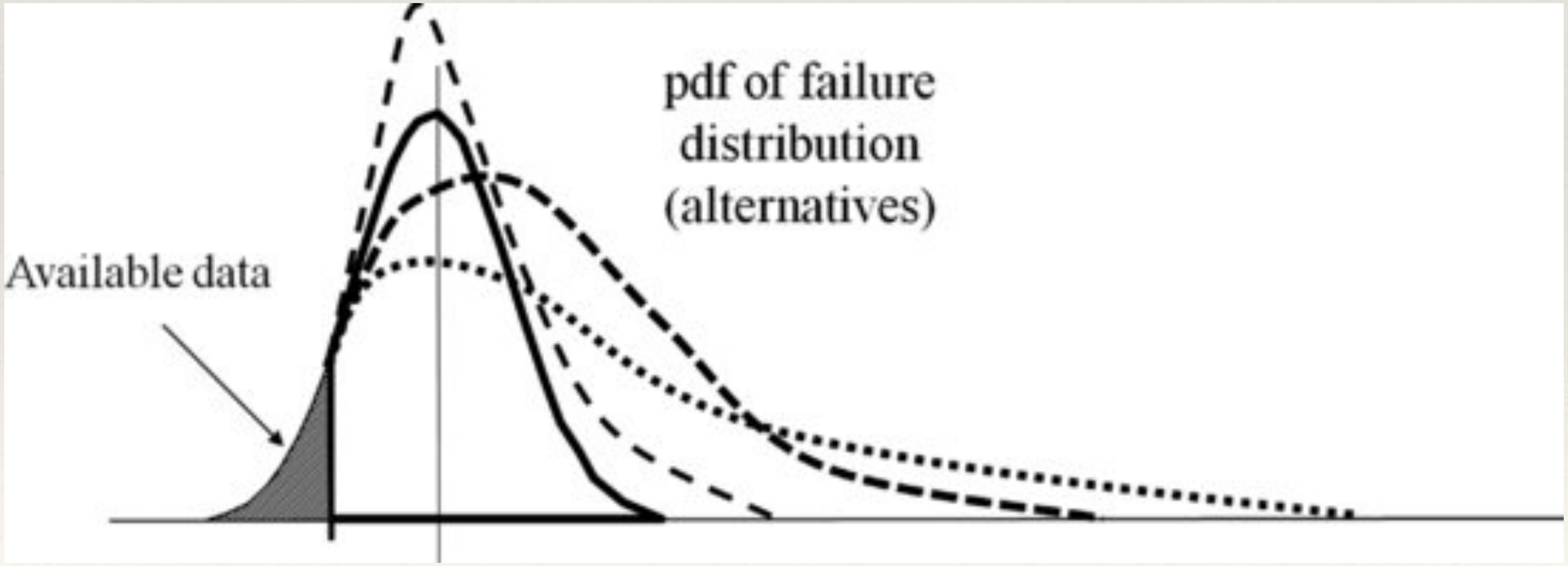
Análise de Sobrevivência

Introdução

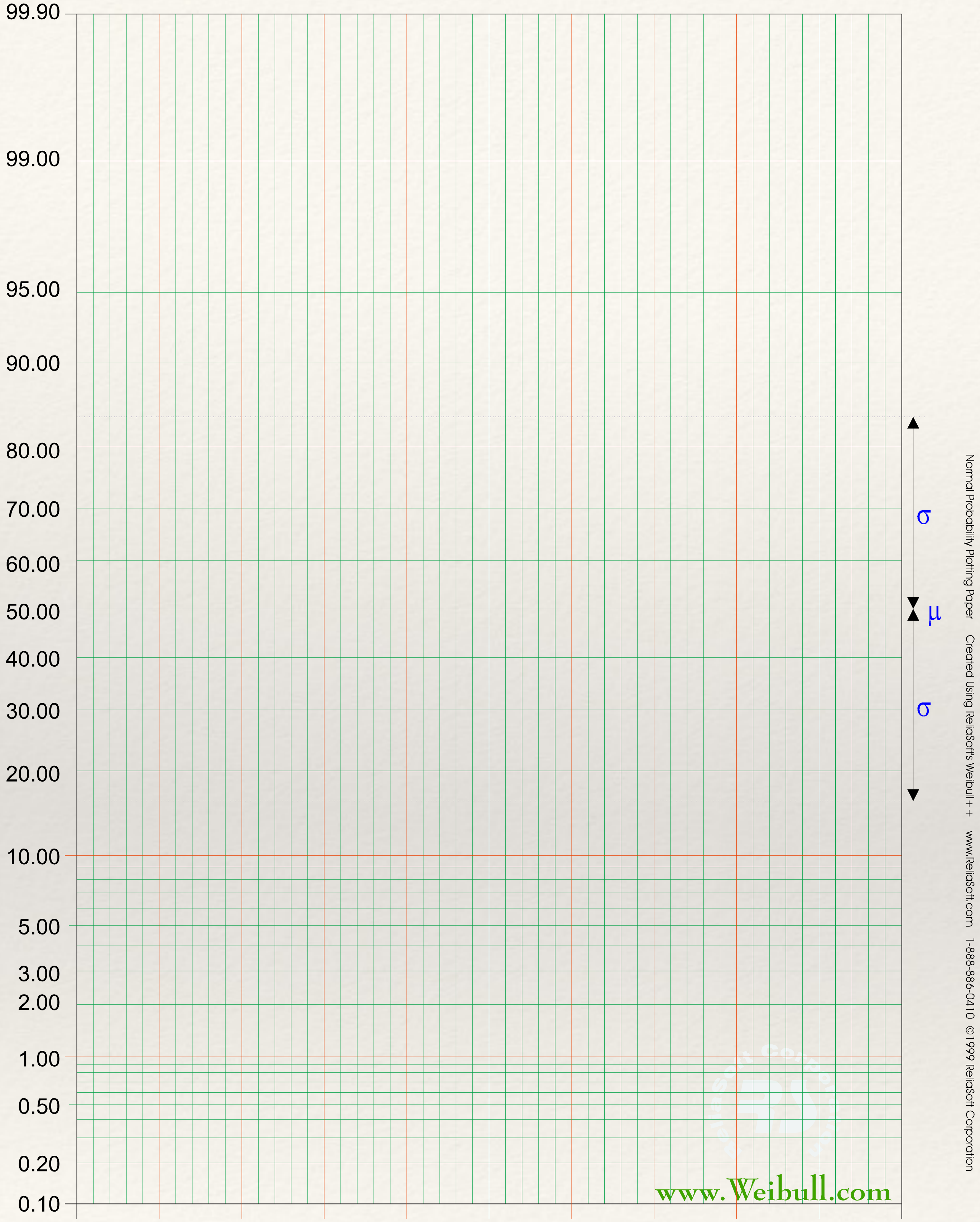
- Em Engenharia de Confiabilidade, muitas vezes se faz necessário determinar qual distribuição melhor se ajusta aos dados e quais os parâmetros dessa distribuição.

Análise Estatística de Dados de Sobrevivência

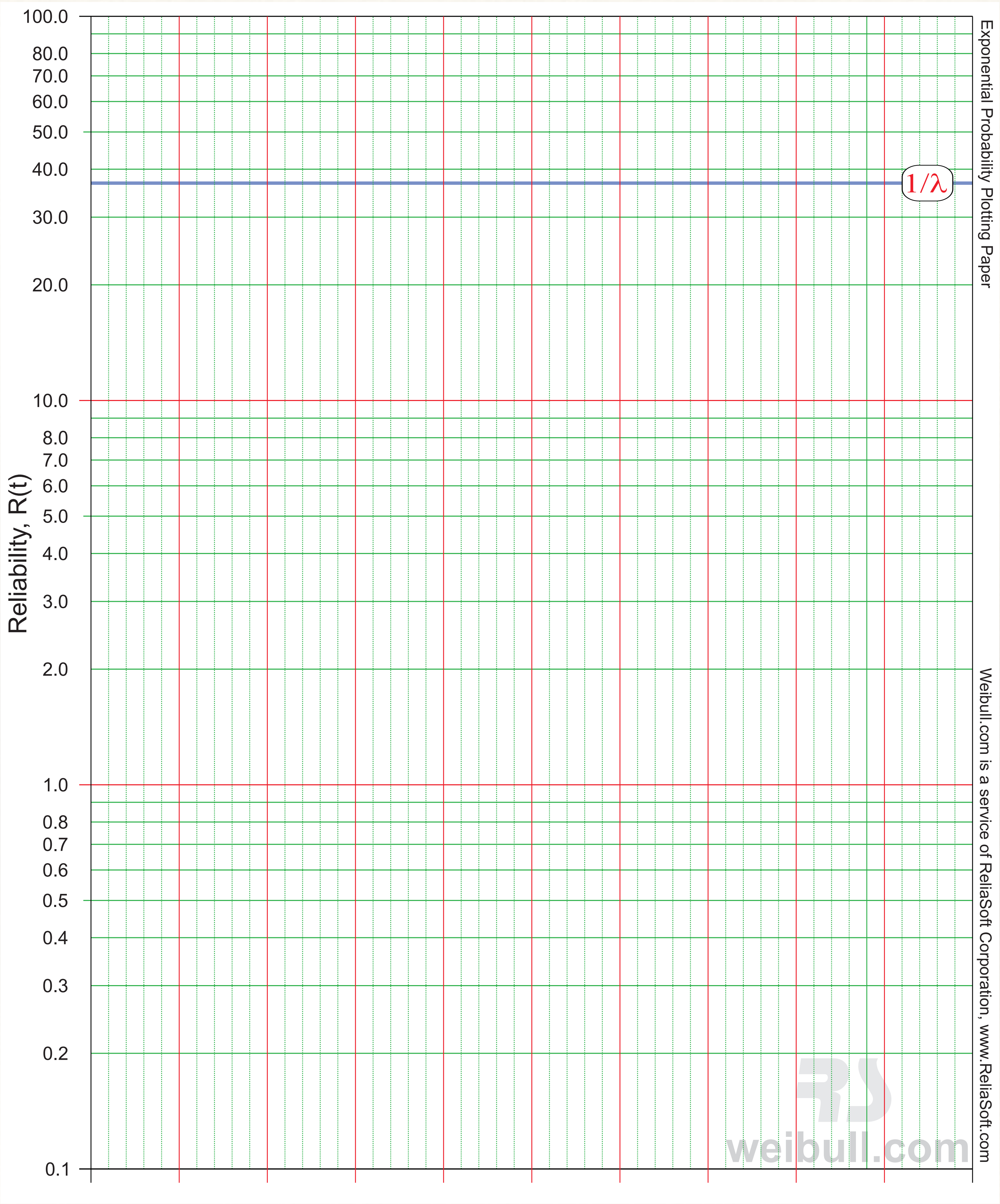
- Em geral, os dados disponíveis devem ser utilizados para reconstrução da função de distribuição de probabilidade de falhas.



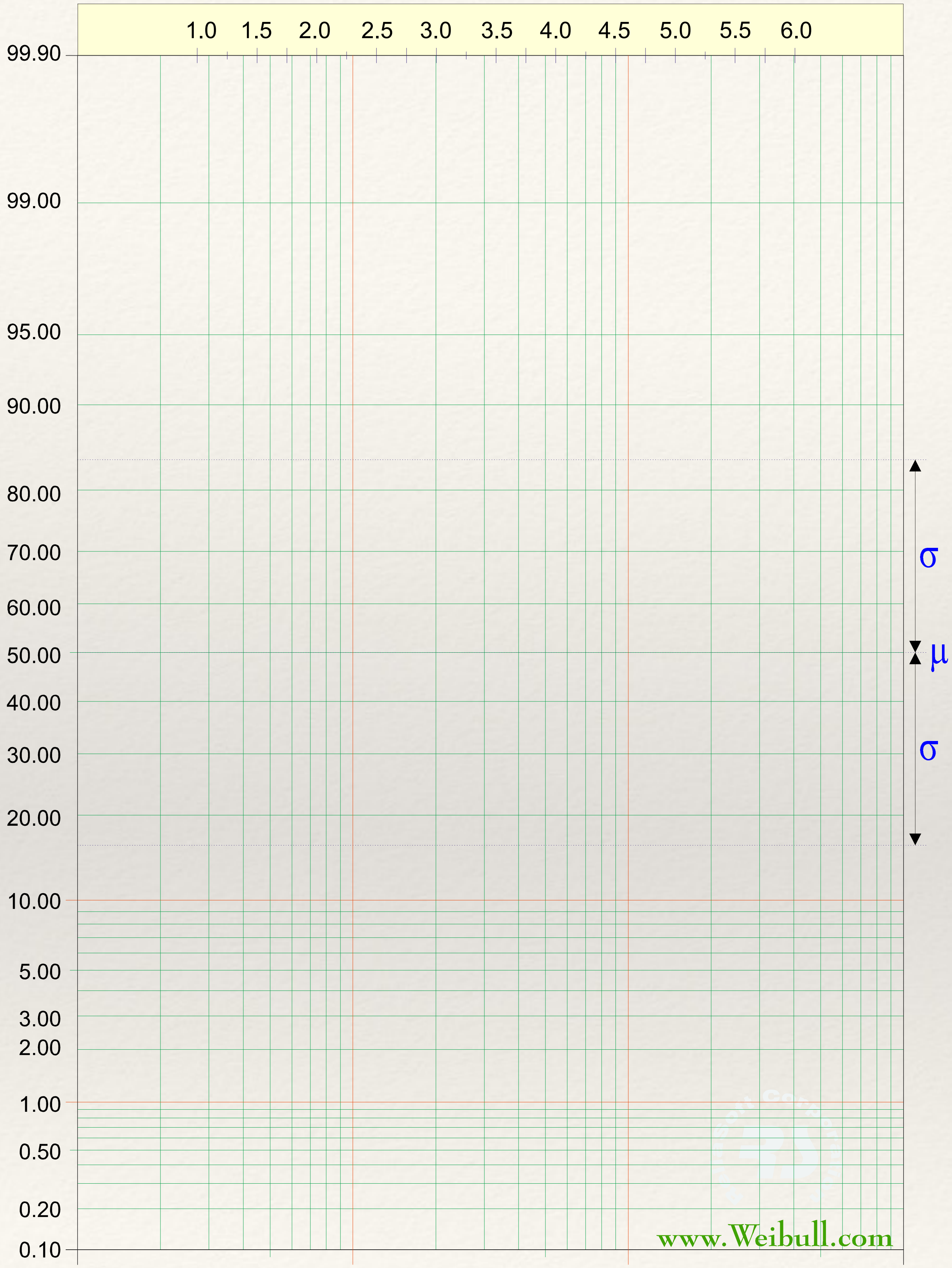
- Na prática, geralmente tenta-se reconstruir a CDF que melhor se ajusta aos dados.
- Uma das formas mais simples de se estimar a distribuição manualmente é o uso de folhas de probabilidade:
  - Plota-se os dados em folhas cujos eixos são modificados de forma a uma distribuição perfeita ser representada por uma reta.
  - Se os dados plotados se ajustam a uma reta, então pode-se inferir que eles são bem representados pela distribuição da folha utilizada.
- Existem folhas para cada tipo de distribuição.



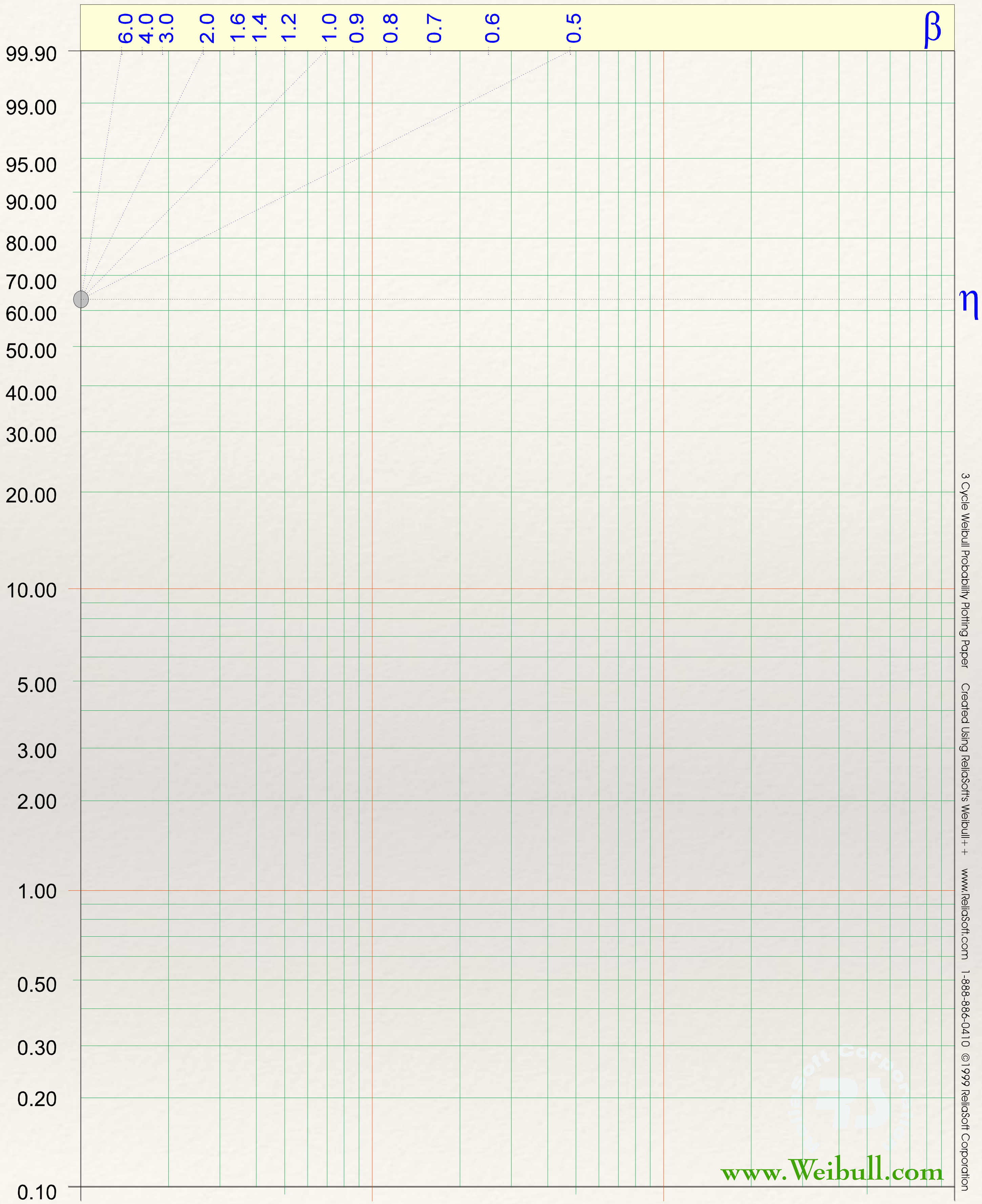
Distribuição Normal



Distribuição Exponencial



Distribuição Lognormal



Distribuição Weibull

- Atualmente, a construção dos gráficos de probabilidade e a estimação de parâmetros por ser feita por meio de pacotes computacionais:
  - R.
  - Matlab.
  - Octave.
  - Minitab.
  - Reliasoft Weibull++.
  - SuperSMITH Weibull.

- A distribuição de Weibull é a mais popular para análise de dados de sobrevivência. No entanto, outras distribuições também são muito utilizadas, como lognormal, distribuição de valores extremos e exponencial.
- A escolha da distribuição mais adequada pode ser baseada em um teste de ajuste (goodness-of-fit test), experiência passada ou no julgamento do engenheiro de confiabilidade.

- A análise de dados de sobrevivência de um determinado geralmente passa por três etapas:
  1. Obter dados de vida do produto.
  2. Selecionar uma distribuição de falha tendo em conta os dados obtidos.
  3. Gerar gráficos e resultados da estimativa de vida do produto, como confiabilidade, taxa de falha, tempo médio de vida, etc.

Classificação de Dados de Sobrevivência

- Em confiabilidade, a sobrevivência de um dado produto pode estar associada a diferentes variáveis, como tempo, distância percorrida, número de ligamentos/desligamentos, ciclos de operação, etc.
- A precisão e credibilidade de qualquer estimativa é fortemente dependente da qualidade, precisão e completude dos dados de entrada.

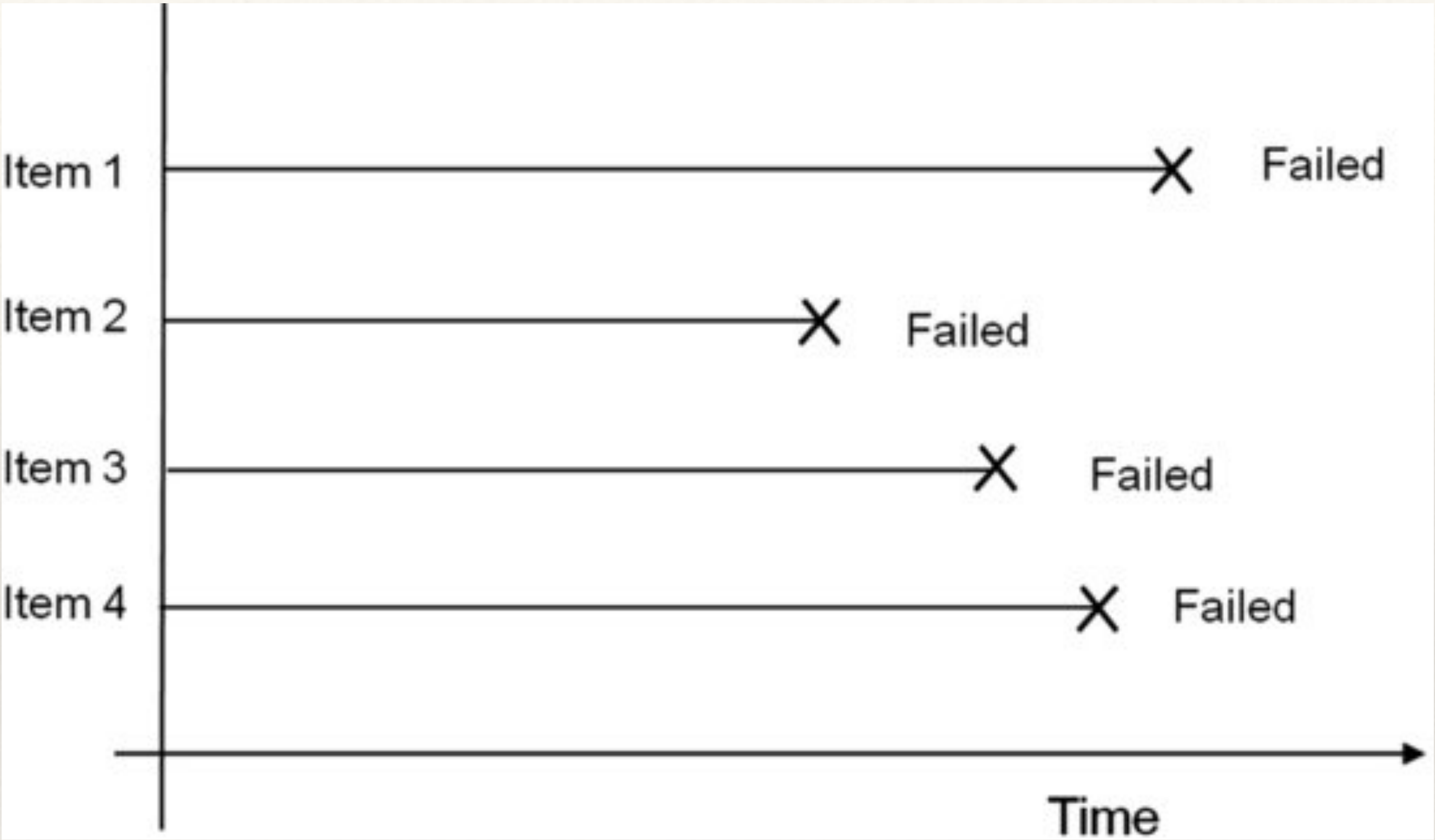
- A amostra deve representar de forma adequada a população de interesse:
    - Por exemplo, se é necessário estimar a vida média de seres humanos, deve-se obter uma amostra que tenha a mesma distribuição da população, como as mesmas proporções homem/mulher, fumante/não-fumante, sedentário/não-sedentário, etc.
- Todos os métodos de Análise Estatística de Dados de Sobrevivência consideram que a amostra de entrada é representativa.

Dados Completos e Censurados

1. Dados completos.
2. Dados censurados à direita.
3. Dados censurados em intervalo.
4. Dados censurados à esquerda.

Dados completos:

- Dados podem ser classificados como completos quando, para uma data amostra, todos as observações da variável de interesse são conhecidas de forma exata. No caso específico de confiabilidade, os dados são completos quando os tempos até falha de todos os produtos de uma amostra foram registrados.


Item 1
Failed
Item 2
Failed
Item 3
Failed
Item 4
Failed
Time

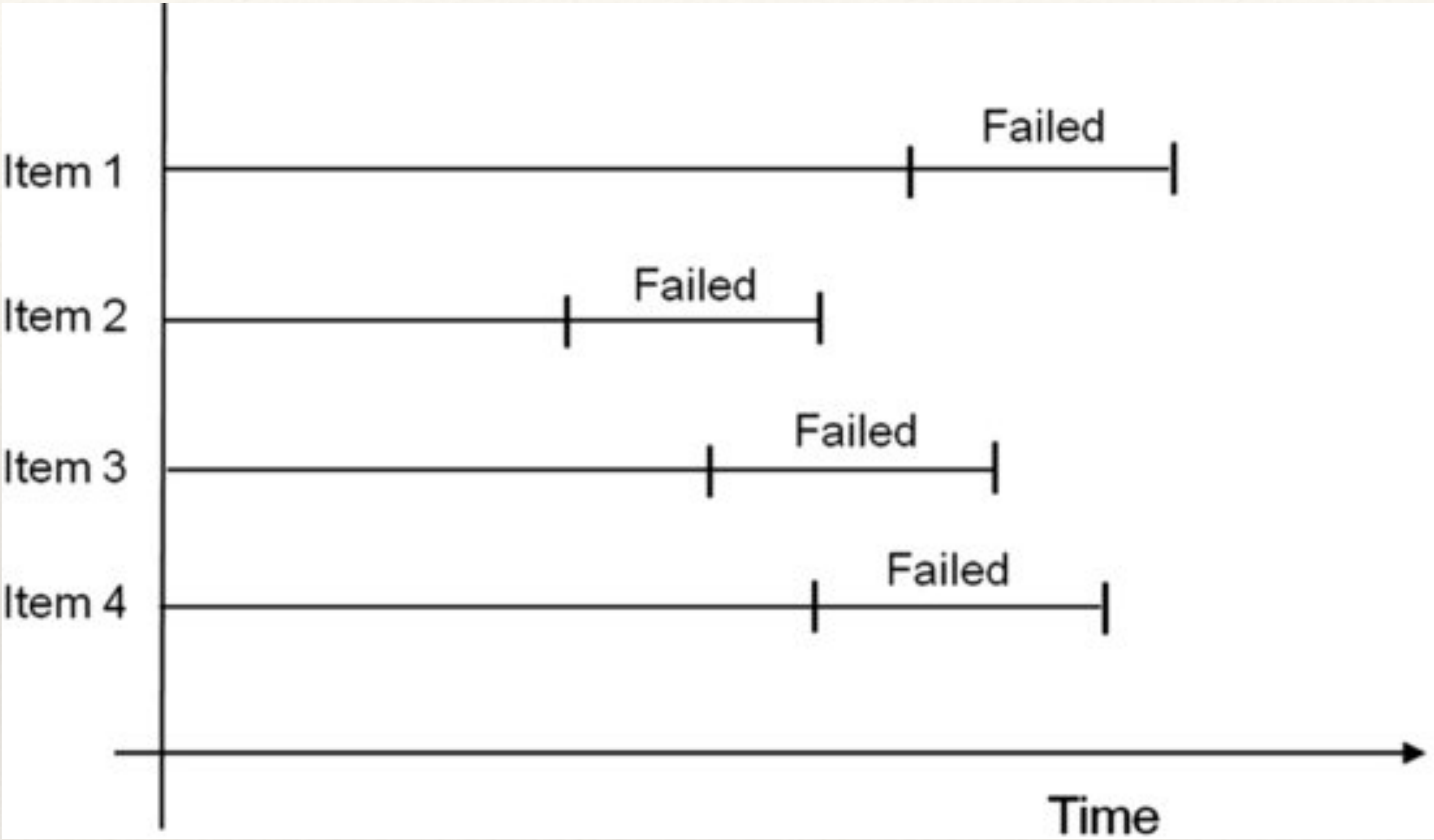
Dados censurados à direita:

- O tipo mais comum de dados censurados são os dados censurados à direita, ou dados suspensos. No caso de dados de sobrevivência, esse tipo de dado ocorre quando uma ou mais unidades ainda não falharam. O termo censurado à direita significa que o evento de interesse está a direita de um ponto de avaliado (a falha irá ocorrer após o tempo de teste).


Item 1
Running
Item 2
Failed
Item 3
Running
Item 4
Failed
Time

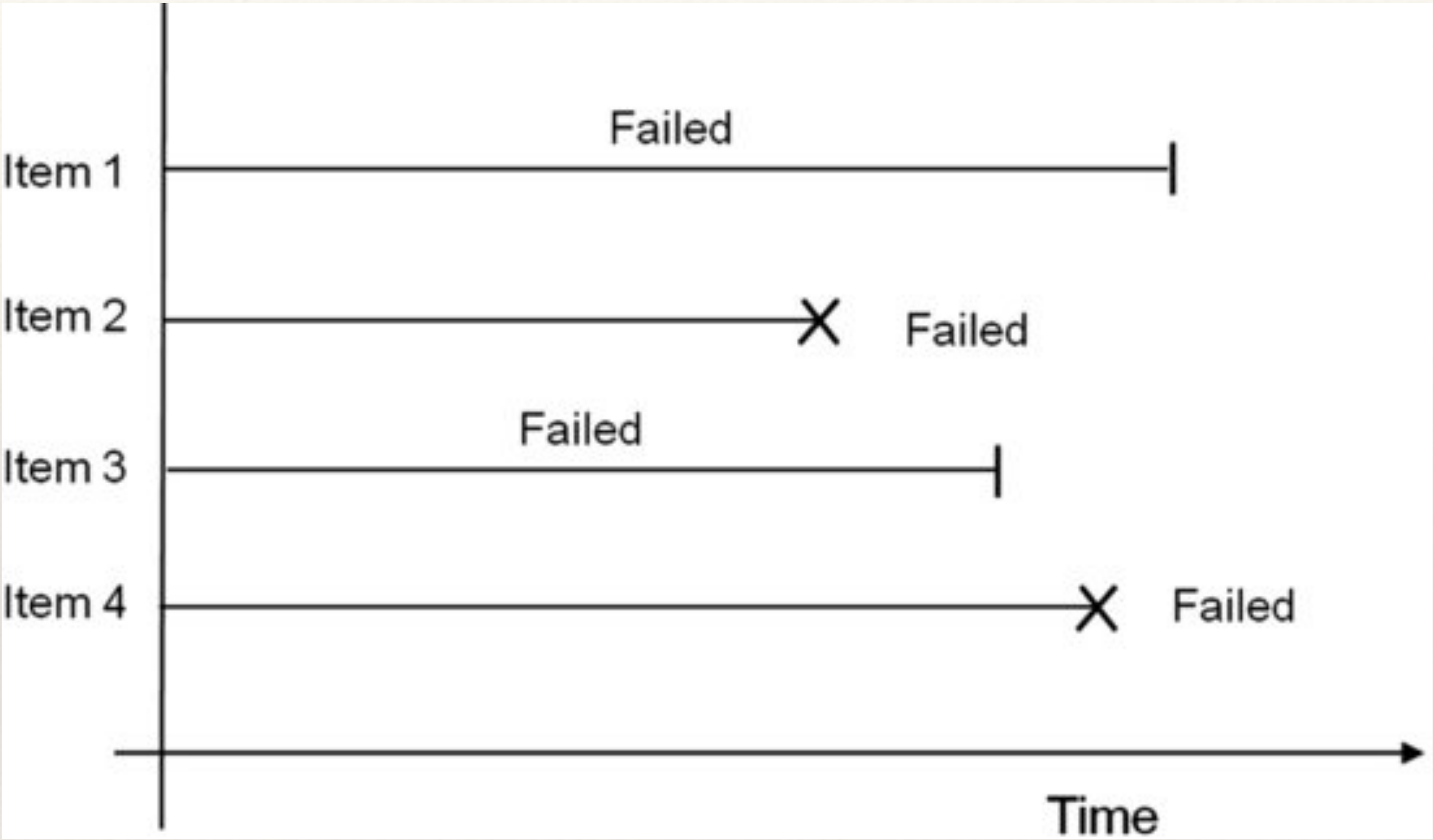
Dados censurados em intervalo:

- Dados em intervalo censurado refletem a incerteza com relação ao instante exato em que as unidades falharam dentro de um intervalo. Este tipo de situação ocorre com frequência em situações onde os objetos não são monitorados constantemente. Neste caso, sabe-se que a falha ocorreu entre um tempo *t1* e um tempo *t2*.


Item 1
Failed
Item 2
Failed
Item 3
Failed
Item 4
Failed
Time

Dadós censurados à esquerda:

- Nos dados censurados à esquerda sabe-se apenas que a falha ocorreu antes de um determinado tempo (ou a esquerda do ponto de análise). Este tipo de dado é equivalente ao dado censurado se for considerado que o intervalo de análise começa em t=0.



Failed
Item 1
Item 2
Failed
Failed
Item 3
Item 4
Failed
Time

- Dados completos podem ser mais facilmente tratados que dados censurados, visto que envolvem um menor nível de incerteza.
- Dados completos e dados censurados à direita geralmente podem ser avaliados utilizando métodos gráficos. Já dados censurados à esquerda e dados censurados em intervalo geralmente demandam abordagens mais sofisticadas (geralmente são tratados por *software*).

Ranking de Dados

- A estimativa das curvas de probabilidade é feita com base na relação entre variável de interesse e a probabilidade de falha acumulada. Devido à isso, se faz necessário ordenar os dados e calcular a probabilidade cumulativa de cada ponto.

Conceito de Ranking

- O ranking de dados fornece uma estimativa de qual porcentagem da população é representada por uma determinada amostra de teste.
- O ranking de dados constitui uma alternativa ao uso de histogramas, tendo em vista que, em engenharia, geralmente se lida com pequenas amostras.
- Por exemplo, se são testados cinco itens e ocorrem falhas em 100, 200, 300, 400 e 500 horas respectivamente, então o ranking do primeiro ponto é 20%, do segundo 40%, do terceiro 60%, do quarto 80% e do quinto 100%. Este estimador geralmente é chamado de *naive rank estimator*.
    - Este resultado implicaria que 20% da população dura menos que 100h e 100% da população deveria falhar até 500h, o que provavelmente não é realista.

Ranking Médio

- Ranking médio é um modelo utilizado para construir distribuições simétricas. O cálculo do ranking médio é feito utilizando *N+1* no denominador ao invés de *N*:

$$mean\ rank = \frac{i}{N+1}$$

Ranking Mediana

- O ranking mediana é o método mais utilizado para esboçar gráficos de probabilidade. Este método é particularmente útil se a distribuição dos dados não é normal. O ranking mediana pode ser definido como a porcentagem acumulada da população que é inferior a uma dada amostra, com 50% de confiança.
- O cálculo do ranking mediana pode ser feito de diversas formas.

Cálculo do Ranking mediana por meio da Distribuição Binomial:

- A CDF da Distribuição Binomial pode ser utilizada para calcular o ranking mediano.

$$P = \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} Z^k (1 - Z)^{N-k}$$

- Nesse caso, faz-se P = 0.50 e resolve-se a equação para Z:

$$0.50 = \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} Z^k (1 - Z)^{N-k}$$

Aproximação Algébrica do Ranking Mediana:

- O Ranking Mediana pode ser encontrado utilizando tabelas ou softwares específicos.

- Caso estes não estejam disponíveis, pode-se utilizar a seguinte aproximação algébrica, conhecida como Aproximação de Bernard:

$$\text{Median rank } r_j = \frac{j - 0.3}{N + 0.4}$$

	Observações Ordenadas (n=5)				
	1	2	3	4	5
naive rank	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000
ranking médio	0,1667	0,3333	0,5000	0,6667	0,8333
ranking mediana	0,1294	0,3147	0,5000	0,6853	0,8706
ranking mediana ap.	0,1296	0,3148	0,5000	0,6852	0,8704

Ranking de Dados Censurados

- O ranqueamento de dados censurados é mais complexo, tendo em vista a incerteza relacionada a estes dados.
- A análise de sobrevivência para dados censurados é mais simples para dados censurados à direita.
  - Neste caso, itens suspensos (sem falha observada) não são considerados como observações para o gráfico de probabilidade, mas sua existência afeta os ranks dos outros pontos. Portanto, se faz necessário atualizar os ranks dos pontos com falha observada para refletir a incerteza relacionada aos dados suspensos.

Ranking Ajustado

- Ordene os itens que falharam por ordem crescente de tempo de vida (t_i).
- Para cada item que falhou, determine o número de itens que falharam anteriormente à falha deste item e calcule a índice de ordem médio (i_{ti}):

$$i_{t_i} = i_{t_{i-1}} + N_{t_i}$$

$$N_{t_i} = \frac{(n+1) - i_{t_{i-1}}}{1 + (n - nfa)}$$

nfa: número observações anteriores à falha em t_i.

- Calcule o ranking mediana para cada item que falhou utilizando o método aproximado:

$$r_{t_i} = \frac{i_{t_i} - 0.3}{n + 0.4}$$

- Apesar de o Ranking Ajustado ser o mais usado para lidar com dados suspensos (censurados direita), ele apresenta sérias limitações.
  - Apenas a posição do item suspenso é levada em conta na análise, independente do tempo de suspensão.
  - Esta limitação se torna mais séria quando o número de falhas é pequeno e o número de suspensões é grande e distribuído de forma não uniforme entre as falhas.
- Esse tipo de abordagem justifica o uso de Estimadores de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimators - MLE) ao invés do Método de Mínimos Quadrados (Least Squares Method - LSM).
  - Métodos de Máxima Verossimilhança não utilizam o ranking ou as posições dos pontos no gráfico de probabilidades. Eles consideram unicamente o tempo até falha ou suspensão.

Exemplo

- Considere o mesmo exemplo dos 5 itens, porém considere que as unidades 2 e 4 não falharam e foram removidas do teste em 200 e 400 horas respectivamente.
- Calcule o ranking ajustado para esse novo conjunto de dados.

$$N_{100} = \frac{5+1-0}{1+(5-0)} = 1.0$$

$$i_{100} = i_0 + N_{100} = 0 + 1.0 = 1.0$$

$$r_{100} = \frac{1-0.3}{5+0.4} = 0.1296$$

$$N_{300} = \frac{5+1-1}{1+(5-2)} = 1.25$$

$$\begin{aligned} i_{300} &= i_{100} + N_{300} \\ &= 1.0 + 1.25 = 2.25 \end{aligned}$$

$$r_{300} = \frac{2.25-0.3}{5+0.4} = 0.3611$$

$$N_{500} = \frac{5+1-2.25}{1+(5-4)} = 1.875$$

$$\begin{aligned} i_{500} &= i_{300} + N_{500} \\ &= 2.25 + 1.875 = 4.125 \end{aligned}$$

$$r_{500} = \frac{4.125-0.3}{5+0.4} = 0.7083$$

Item #	Time (hours)	Fail or Suspend	N_{t_i}	i_{t_i}	r_{t_i}
1	100	Failure 1	1.0	1.0	12.96 %
2	200	Suspended	—	—	—
3	300	Failure 2	1.25	2.25	36.11 %
4	400	Suspended	—	—	—
5	500	Failure 3	1.875	4.125	70.83 %

Distribuição de Weibull

Weibull de Dois Parâmetros

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

where: $t =$ time.

$\beta =$ Weibull slope (the slope of the failure line on the Weibull chart), also referred as a *shape parameter*.

$\eta =$ Characteristic life, or the time by which 63.2 % of the product population will fail, also referred to as a *scale parameter*.

$$\frac{1}{1 - F(t)} = \exp\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \beta(\ln t) - (\beta \ln \eta)$$

$$Y = \beta X + C$$

$$X = \ln\ t$$

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)}$$

$$C = -\beta\ \ln \eta$$

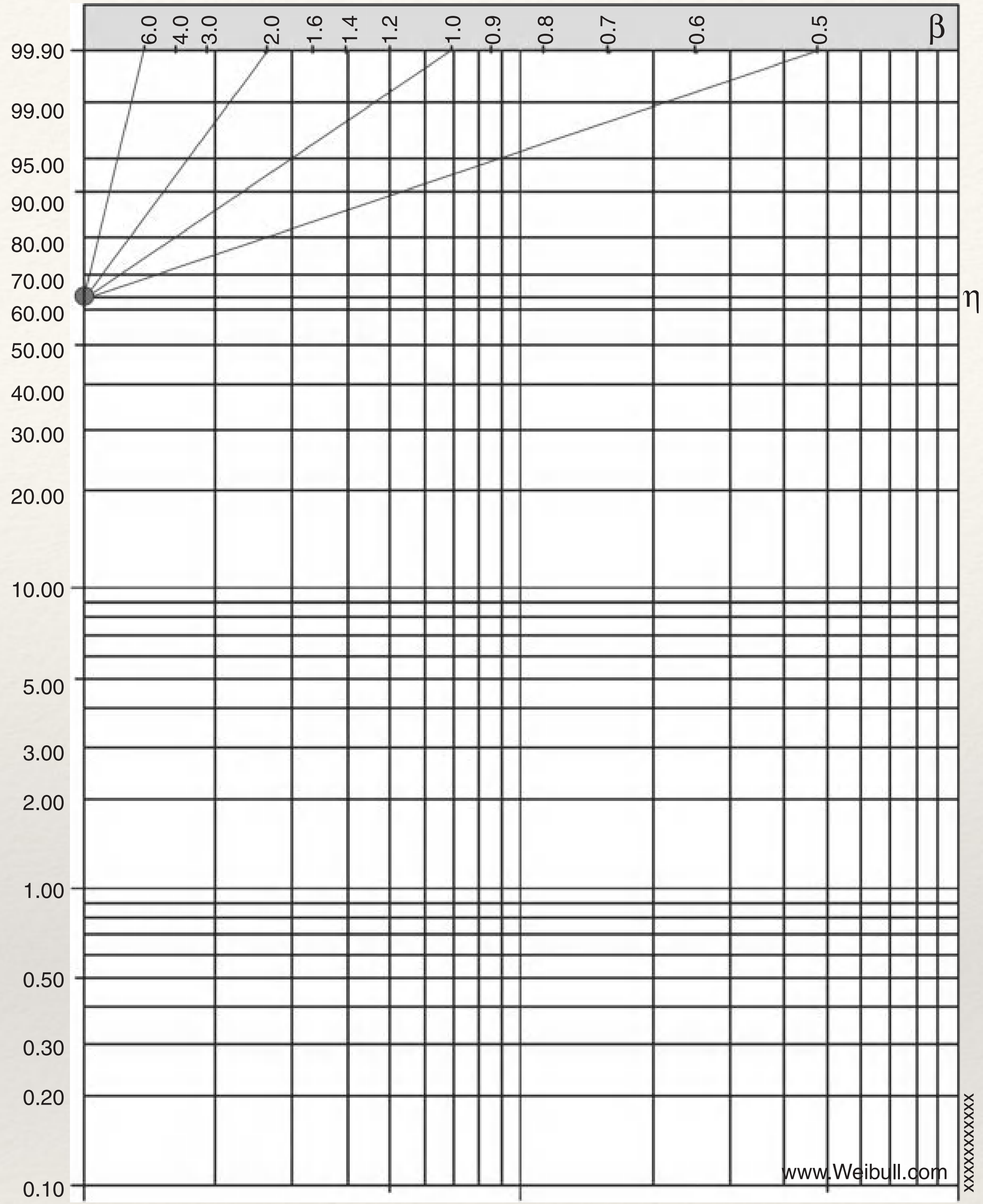


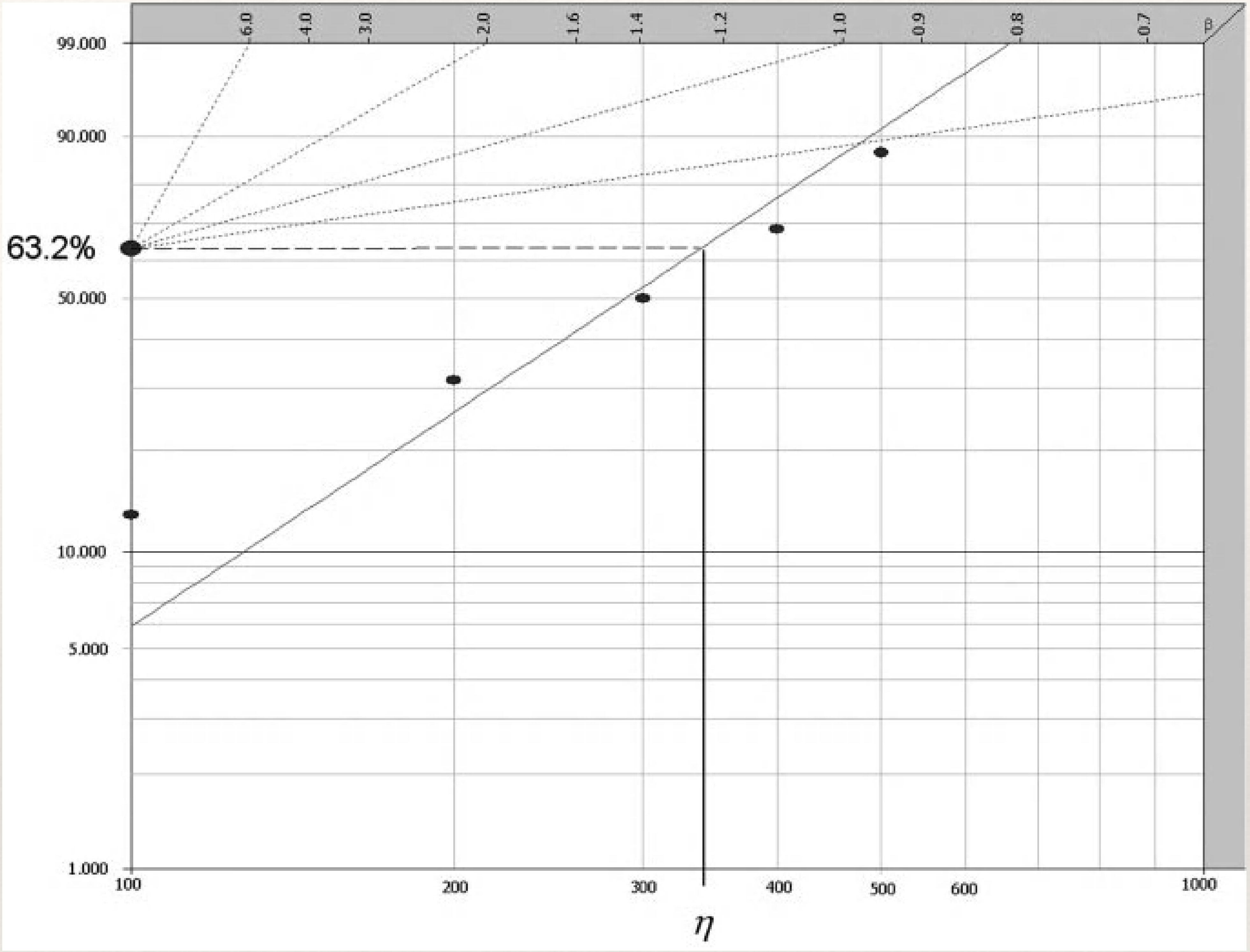
Figure 3.7 *Weibull probability paper. Abscissa - ln t, Ordinate -* $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$.

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\eta}{\eta}\right)^{\beta}\right] = 1 - \exp(-1) = 0.632 \;\; (63.2\%)$$

Regressão por Ranking (RR)

Exemplo

- Considere novamente o exemplo de cinco unidades que falharam em 100, 200, 300, 400 e 500 horas.
- Ranking mediana:
  - 100 horas: 12,94%.
  - 200 horas: 31,47%.
  - 300 horas: 50,00%.
  - 400 horas: 68,53%.
  - 500 horas: 87,06%.



$$\beta \approx 2.0$$
$$\eta \approx 320$$

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{320}\right)^{2.0}\right]$$

Weibull de Três Parâmetros

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

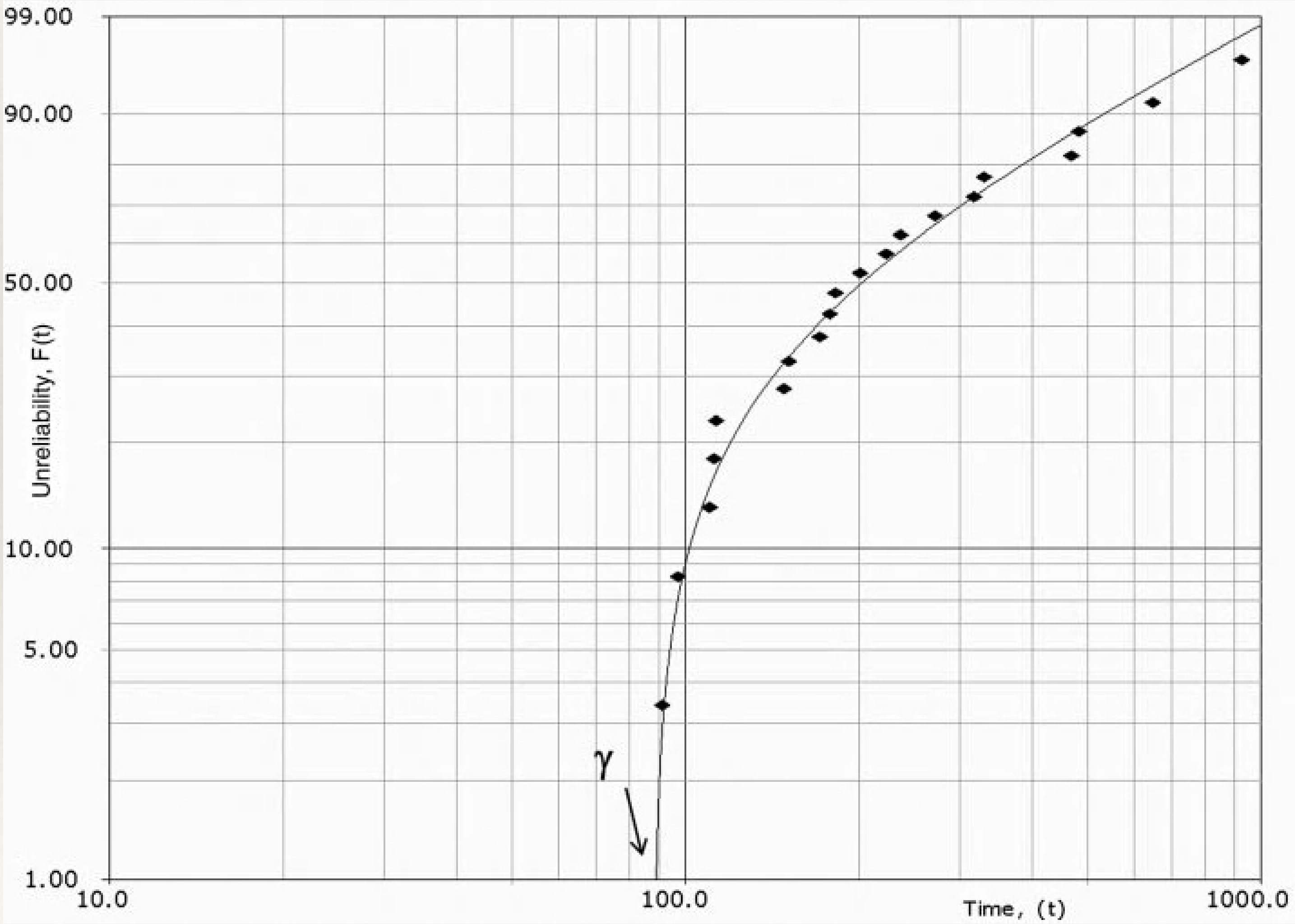
where: t = time.

β = Weibull slope (the slope of the failure line on the Weibull chart), also referred as a *shape parameter*.

η = Characteristic life, or the time by which 63.2 % of the product population will fail, also referred to as a *scale parameter*.

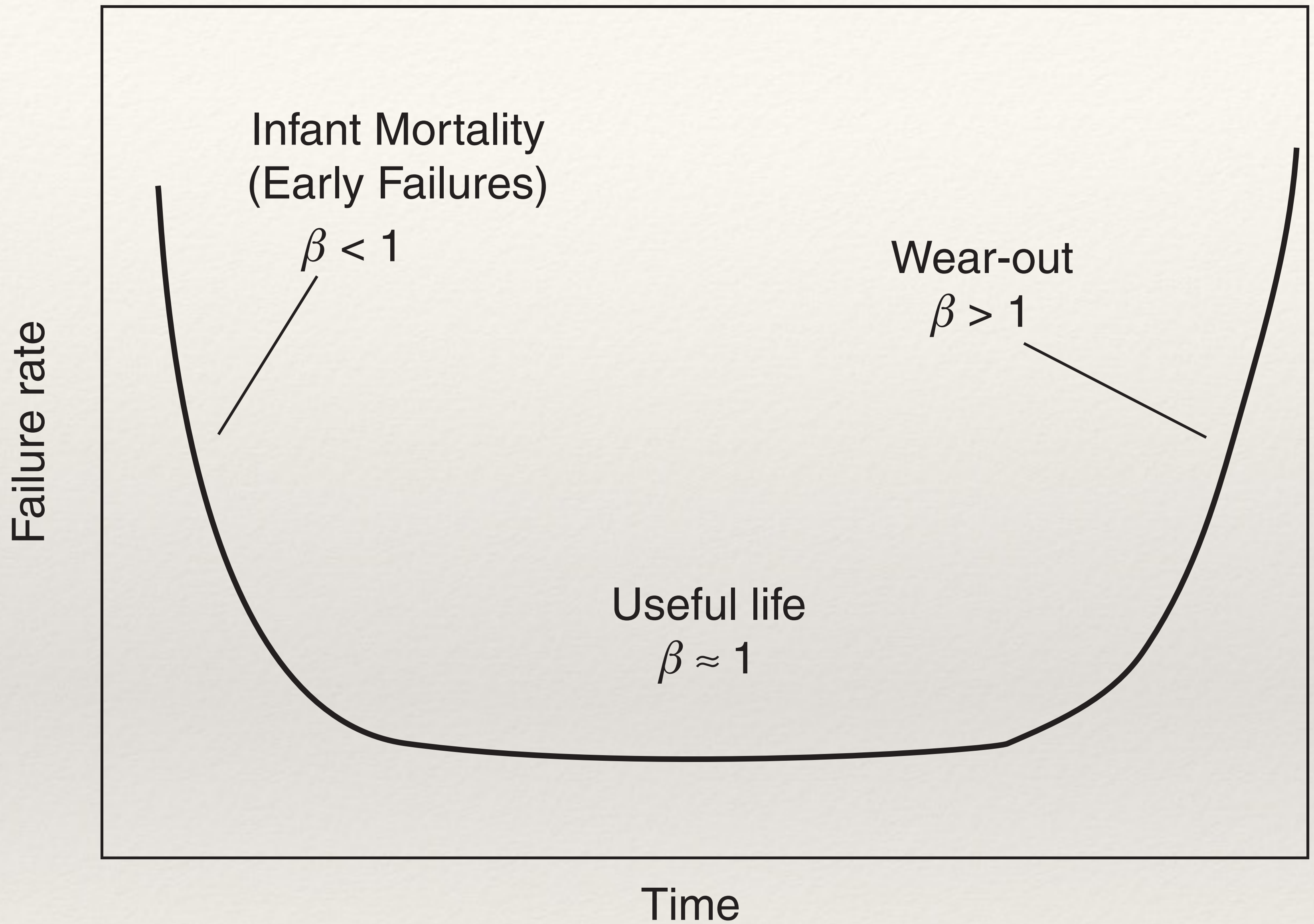
γ = expected minimum life, also referred as *location parameter*.

- Recomendada para situações em que é possível afirmar, com segurança, que o produto tem uma vida mínima garantida:
  - Situações com forte inspeção antes da comercialização.



Relação entre β e a Taxa de Falha

- O valor de β reflete a função risco ou a taxa de falha esperada da distribuição de Weibull.
- É possível inferir sobre a característica de falha da população (e a curva da banheira) com base no valor de β.


Infant Mortality
(Early Failures)
β < 1
Wear-out
β > 1
Failure rate
Useful life
β ≈ 1
Time

- $\beta < 1$ indica uma taxa de falha decrescente e é usualmente associado com falhas precoces (mortalidade infantil). Esse tipo de falha geralmente está relacionada a problemas de fabricação.
- $\beta \approx 1$ indica uma taxa de falha constante, geralmente associada ao período útil do produto. Falhas nessa etapa são geralmente decorrentes de problemas aleatórios ou modos de falha variados.
- $\beta > 1$ indica uma taxa de falha crescente, usualmente associada ao desgaste correspondente ao fim de vida do produto. Se esse parâmetro for observado no início do ciclo de vida do produto, isso indica sérios problemas de projeto ou falhas na análise.

- $\beta > 6$ indica um possível erro. Apesar de $\beta > 6$ não ser incomum, este valor de parâmetro indica um desgaste acelerado, possível em sistemas mecânicos, biológicos e químicos (desgaste de pneus, mortalidade humana, redução da viscosidade de óleos, etc) mas muito incomum em outros sistemas, como dispositivos eletrônicos por exemplo. Um grande volume de dados censurados pode levar a um alto valor de β, o que pode exigir um cuidado maior para avaliação do modelo obtido.
- $\beta > 10$ indica um provável erro. Esse valor de β é muito raro em problemas de engenharia, e indica uma taxa de desgaste extremamente alta. Esse tipo de resultado pode ser resultado de dados altamente censurados ou de situações de sobre-estresse.

B_X-Life

- Outro parâmetro utilizado para especificar a confiabilidade é a B_X-life, que é o tempo em que é esperado que certa porcentagem X da população falhe.

$$R(B_X) = (100 - X)\%$$

- Para a distribuição de Weibull:

$$R(B_X) = \exp\left[-\left(\frac{B_X}{\eta}\right)^{\beta}\right] = 1 - \frac{X}{100}$$

Métodos Computacionais para Análise de Dados de Sobrevivência

- A maior parte das técnicas de análise de sobrevivência podem ser atualmente realizadas com o auxílio do computador.
    - Por exemplo, o ajuste da reta que apresenta a melhor regressão para uma distribuição de Weibull pode ser feita de forma ótima se um algoritmo adequado for utilizado.

RR - Estimação por Mínimos Quadrados

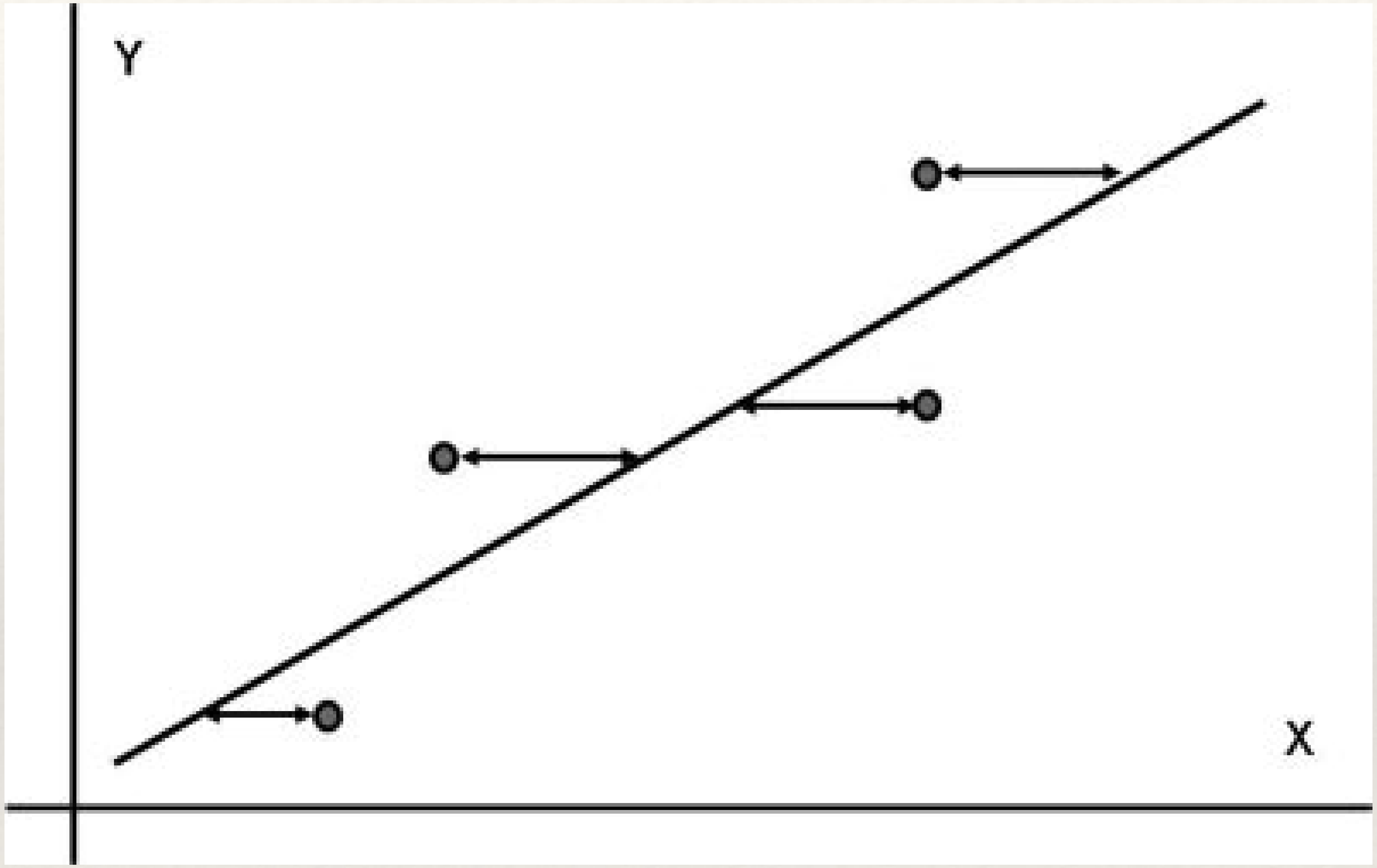
- Podem ser ajustadas várias retas que representam distribuições com diferentes parâmetros.
- A forma mais aceita para a juste dessa reta é escolher os parâmetros de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios verticais ou horizontais seja minimizada.
    - Princípio de Mínimos Quadrados (Least Squares).

- Considere os pares (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_N, y_N) obtidos e representados no gráfico. De acordo com o princípio de mínimos quadrados, a reta deve ser ajustada tal que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}+\hat{b}y_i-x_i)^2=\min_{a,b}\sum_{i=1}^{n}(a+by_i-x_i)^2$$

$$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}-\hat{b}\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\bar{x}-\hat{b}\bar{y}$$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i y_i-\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}}{\sum_{i=1}^{N}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right)^2}{N}}$$


Y
X

- A qualidade do ajuste obtido pelo método de mínimos quadrados pode ser feita com base no coeficiente de correlação:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- ρ = +1: ajuste perfeito com inclinação positiva.
- ρ = -1: ajuste perfeito com inclinação negativa.
- ρ = 0: distribuição aleatória dos pontos.

Estimação por MLE

- A Estimação por Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE) é utilizado por vários pacotes computacionais para ajuste de distribuições.
- A idéia por trás deste método é encontrar os parâmetros que maximizam a probabilidade (verossimilhança) dos dados amostrados se ajustarem àquela distribuição.
- Este métodos pode ser aplicado a vários tipos de distribuição (dada a função de verossimilhança) e é, em geral, mais robusto que o ajuste por rankings.

Seja x uma variável aleatória continua com PDF:

$$f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

Dadas N observações independentes (x_1, x_2, … , x_n) que, em confiabilidade, correspondem ao tempo até falha, a função de verossimilhança (para dados completos) é dada por:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_N \mid \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = L = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

E a função verossimilhança logarítmica:

$$\Lambda = \ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

- A Estimação de Máxima Verossimilhança de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ são obtidos por meio da maximização de L ou Λ.
- A maximização de Λ é consideravelmente mais simples que a de L, e pode ser obtida por meio da solução simultânea de k equações tal que:

$$\frac{\partial(\Lambda)}{\partial\theta_{\mathrm{j}}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

Exemplo: MLE para Distribuição Exponencial

$$L(\lambda \mid t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda t_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

$$\Lambda = \ln(L) = n \ \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

RR ou MLE?

- A Regressão por Ranking (RR) e a MLE frequentemente produzem parâmetros distintos para o mesmo conjunto de dados.
  - A RR é recomendada para conjuntos de dados pequenos (<30) de dados completos.
  - A MLE é recomendada quanto se possui muitos dados ou caso exista uma proporção razoável de dados censurados.

Limites de Confiança em Análise de Sobrevivência

- Uma vez que os resultados da Análise de Sobrevivência são estimados com base em tempos de vida observados (amostra) existe incerteza relacionada a limitação da amostra considerada.
- Intervalos de confiança são geralmente utilizados para representar esta incerteza.
- Quando se utiliza um intervalo de confiança bilateral, se busca por um intervalo fechado em que uma certa probabilidade da população deve estar.
- Quando se utilizada um intervalo de confiança unilateral, se busca um limite superior ou inferior para a maior parte dos resultados observado na população.

Intervalos de Confiança para Distribuição de Weibull

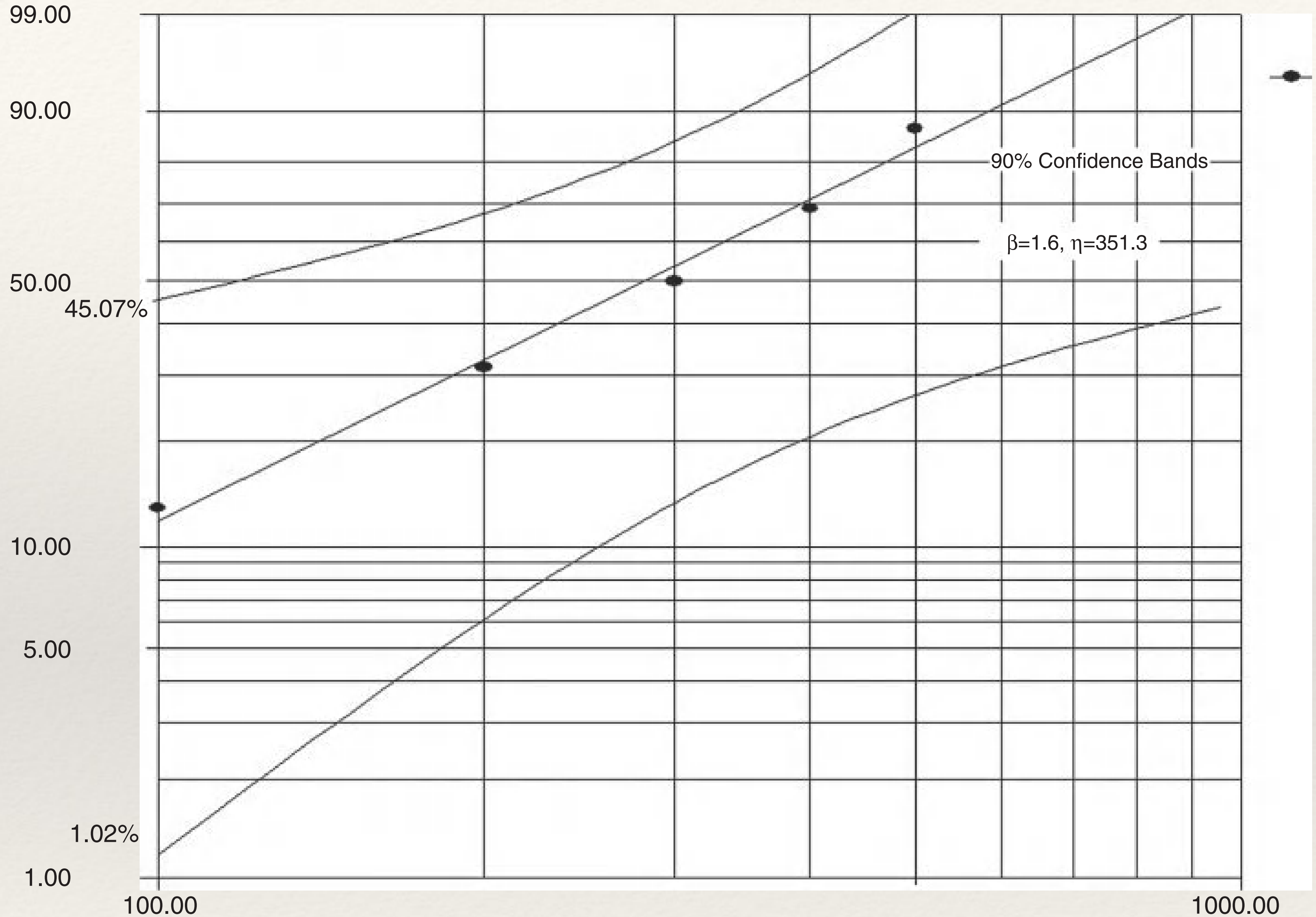
- A análise de Weibull pode ser feita para vários graus de confiança. Os cálculos realizados para determinar o ranking mediana foram feitos considerando o nível de confiança de 50%, mas estes podem ser refeitos para qualquer nível desejado.
  - Por exemplo, os níveis de 5% e 95% podem ser usados para calcular os limites de intervalo de confiança de 90%.

$$P = \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} Z^k (1 - Z)^{N-k}$$

Exemplo

- Considerando novamente o exemplo de 5 itens com falhas em 100h, 200h, 300h, 400h e 500h.

k	1	2	3	4	5
5 % rank, if n = 5	1.02 %	7.64 %	18.92 %	34.25 %	54.92 %
95 % rank, if n = 5	45.07 %	65.74 %	81.07 %	92.36 %	98.98 %


99.00
90.00
50.00
45.07%
10.00
5.00
1.02%
1.00
100.00
1000.00
90% Confidence Bands
β=1.6, η=351.3

- O tamanho da amostra afeta a amplitude do intervalo:
  - Mais amostras conduzem a intervalos mais estreitos.
- Exemplo:
  - N = 5 - 1a amostra:
    - 5%: 1.02% - 95%: 45.07%.
  - N = 10 - 2a amostra:
    - 5%: 3.68% - 95%: 39.20%.

Limites de Confiança para os Parâmetros

- É importante encontrar o intervalo de confiança dos parâmetros da distribuição, uma vez que decisões podem ser tomadas com base nesses valores.
    - Por exemplo, o valor de β em uma distribuição de Weibull indica a região da curva da banheira em que o item se encontra.
- Os métodos computacionais geralmente estimam estes intervalos juntamente com a tendência central do parâmetro.

Limites por Matriz de Fisher

$$\text{Lower bound} = \hat{\theta} - Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})}$$

$$\text{Upper bound} = \hat{\theta} + Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})}$$

where: $\hat{\theta}$ is the estimate of mean value of the parameter θ.
$Var(\hat{\theta})$ is the variance of the parameter.
$\alpha = 1 - C$, where C is the confidence level.
$z_{\alpha/2}$ is the standard normal statistic. Excel function = -NORMSINV(α/2) or see Appendix 1.

No caso de parâmetros que não podem assumir valores negativos, utiliza-se a distribuição lognormal:

$$\text{Lower bound} = \hat{\theta} \cdot \exp\left[-(z_{\alpha/2}/\hat{\theta}) \cdot \sqrt{Var(\hat{\theta})}\right]$$

$$\text{Upper bound} = \hat{\theta} \cdot \exp\left[(z_{\alpha/2}/\hat{\theta}) \cdot \sqrt{Var(\hat{\theta})}\right]$$

Limites por Taxa de Verossimilhança

- Os limites obtidos por Matriz de Fisher não são suficientemente conservadores para pequenas amostras.
- Os limites obtidos por Taxa de Verossimilhança são mais conservadores e, consequentemente, mais adequados para pequenas amostras.

$$-2 \cdot \ln\left(\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})}\right) \geq \chi^2_{\alpha;k}$$

where: $L(\theta)$ is the likelihood function for the unknown parameter θ.

$L(\hat{\theta})$ is the likelihood function calculated at the estimated parameter value $\hat{\theta}$.

$\alpha = 1 - C$, where C is the confidence level.

$\chi^2_{(\alpha,k)}$ is the Chi-Squared statistic with k degrees of freedom

Limites por Simulações de Monte Carlo

- Simulações de Monte Carlo podem ser utilizadas para calcular limites razoáveis para os parâmetros da distribuição de interesse.
- Essa técnica será vista no decorrer desse curso.

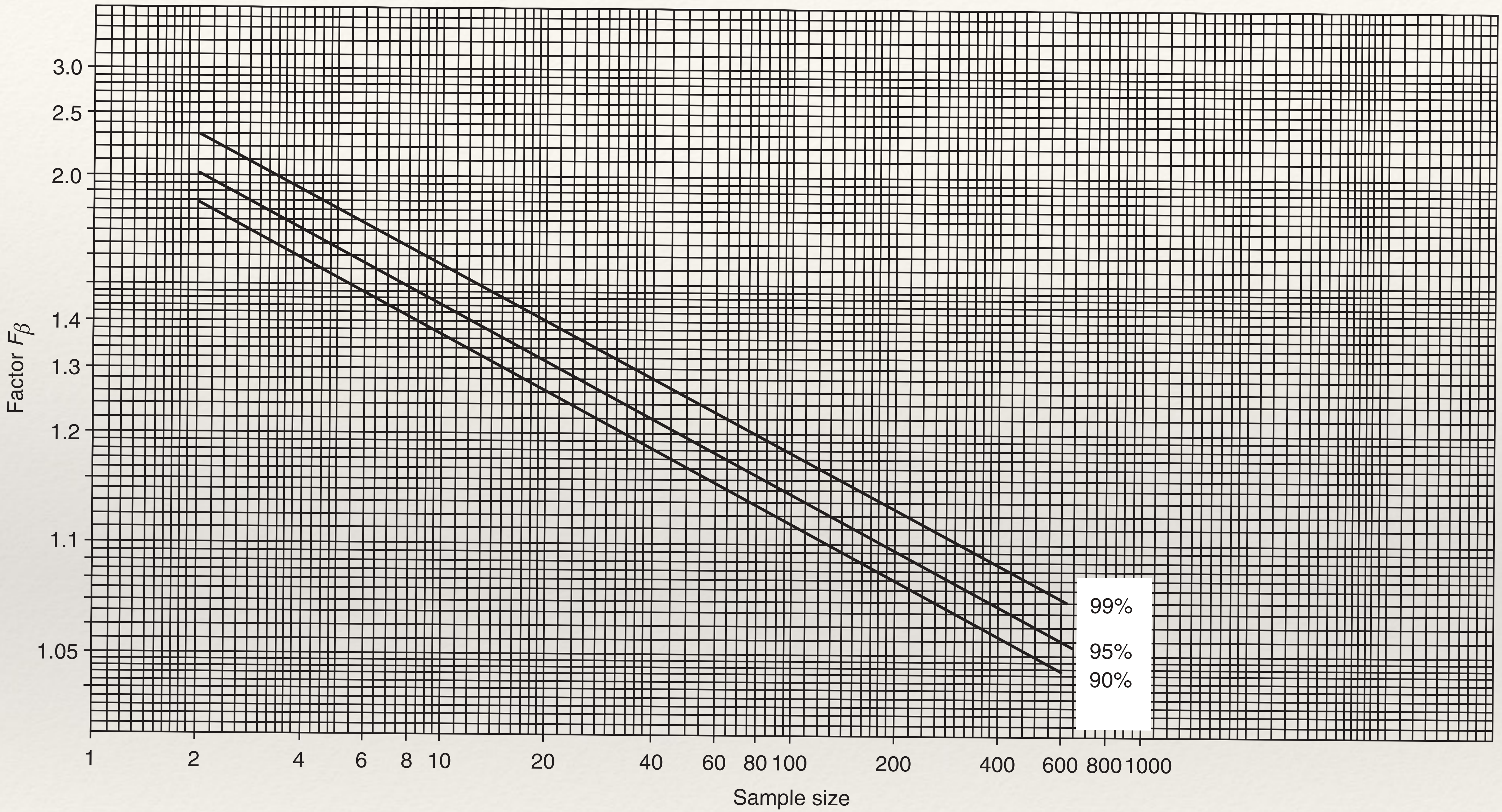
Exemplo

Cálculo dos limites para o parâmetro β da distribuição de Weibull:

- Pela aproximação de Fisher:

$$\beta_{\text{Upper}} = \hat{\beta} F_{\beta}$$

$$\beta_{\text{Lower}} = \hat{\beta} \frac{1}{F_{\beta}}$$


Factor F_β
3.0
2.5
2.0
1.4
1.3
1.2
1.1
1.05
99%
95%
90%
1
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
200
400
600
800
1000
Sample size