UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Conceitos Estatísticos Básicos

Monte Carlo e Interferência Carga-Resistência

Felipe Campelo
http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo

Departamento de Engenharia Elétrica

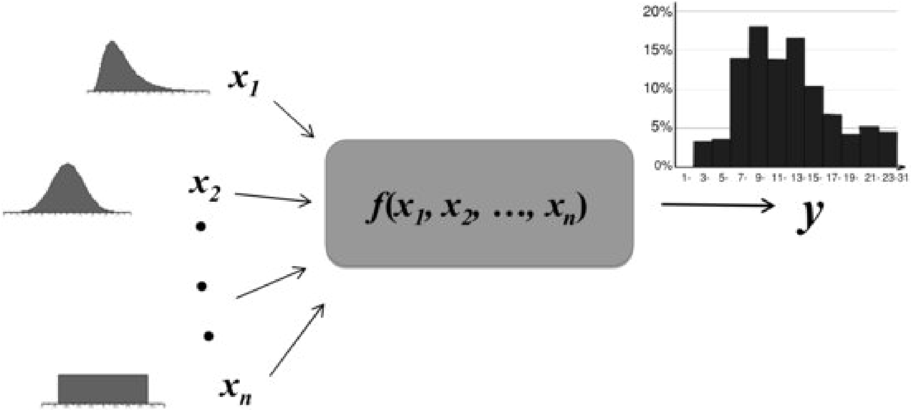
Belo Horizonte
Setembro de 2013

Métodos de simulação de Monte Carlo representam uma ferramenta extremamente útil para a modelagem do comportamento de sistemas sujeitos a incertezas em seus parâmetros de entrada;

- Sistemas elétricos sujeitos a perturbações na geração e carga;
- Estruturas sujeitas a variações em suas condições ambientais;
- Sistemas aeronáuticos sujeitos a turbulências atmosféricas;
- Carteiras de investimento sujeitas a variações de mercado.

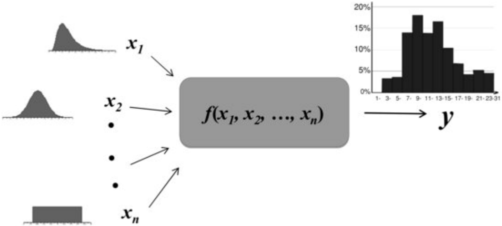
A ideia central é a utilização de procedimentos de amostrage intensiva de variáveis aleatórias e observação do comportamento do sistema sujeito a estas entradas;

Avaliação iterativa de modelos determinísticos sujeitos a entradas aleatórias.



Para que a simulação produza saídas relevantes ao sistema em questão, a distribuição de probabilidade das entradas deve representar da forma mais fiel possível o que se conhece sobre a distribuição real das variáveis de entrada.

Os dados gerados a partir destas simulações podem ser representados por meio de um histograma, utilizados para o ajuste de um modelo estatístico, ou outras formas de representação adequadas para as análises de interesse.



Dentre as distribuições comumente utilizadas para a representação das entradas, temos:

- Normal

  > *rnorm*(n, μ, σ)
- Lognormal

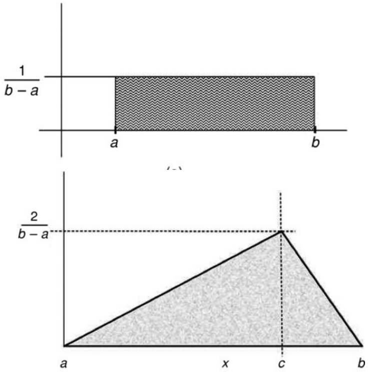
  > *rlnorm*(n, μ, σ)
- Uniforme

  > *runif*(n, x_{min}, x_{max})
- Triangular

  > *rtriangle*$(n, x_{min}, x_{max}, x_{mode})$
- Weibull

  > *rweibull*(n, β, σ)
- Extreme Value (max/min)

  > *rgev*(n, μ, σ, ξ)



(b)

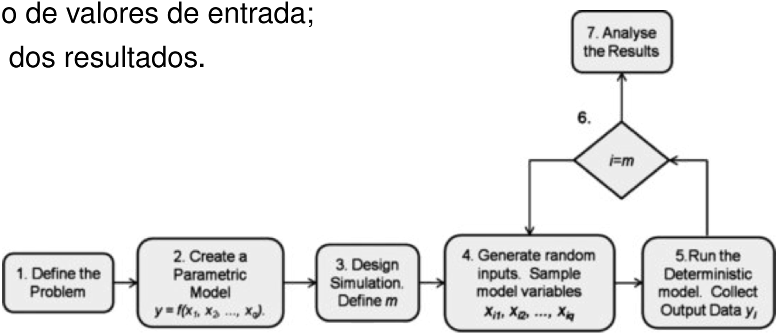
A determinação do número de observações necessárias é uma tarefa não-trivial, e depende de uma série de fatores:

- Complexidade do modelo;
- Variância das entradas;
- Nível de acurácia desejado;

A estimação de valores médios tende a ter uma acurácia maior (para um mesmo tamanho amostral) que a estimação dos comportamentos extremos.

Estrutura básica de uma simulação de Monte Carlo:

- Definição do problema e objetivos do estudo;
- Definição do modelo paramétrico do sistema;
- Determinação das distribuições das entradas e do número de observações necessárias;
- Registro do comportamento do modelo para cada conjunto aleatório de valores de entrada;
- Análise dos resultados.



Uma causa usual de falhas é representada por situações onde a carga sobre um sistema excede a resistência do mesmo:

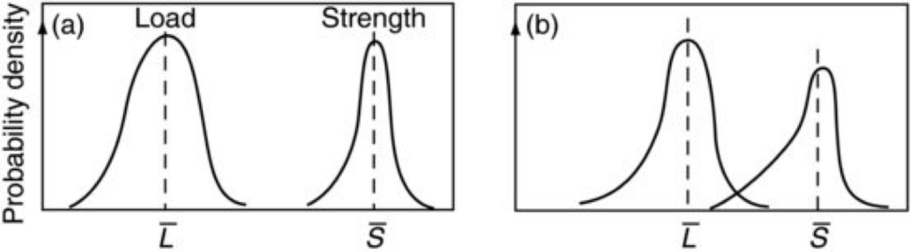
- Uma engrenagem que falha quando cargas excedem sua força construtiva, gerando rachaduras, sobreaquecimento, ou travamento;
- Componentes semicondutores que falham quando sobretensões geram aquecimento além da capacidade dissipativa do mesmo;
- Uma válcula hidráulica que falha quando sujeita a pressões superiores àquelas que consegue suportar;
- Conexões soldadas que falham devido a ciclos térmicos excessivos causados por aquecimento de componentes ou sobrecorrentes.

Uma visão simplista do projeto destes dispositivos poderia ser formulada como "*projetar sistemas de forma que a resistência sempre exceda a carga*." - o projetista considera os valores extremos esperados para um dado sistema e garante um fator de segurança adequado.

Outras salvaguardas de segurança - como sistemas redundantes ou formas de falha "elegante" - podem ser inseridos no projeto, e são geralmente eficazes.

Entretanto, mesmo nesses casos algumas falhas ainda são observadas - necessidade de ferramentas formais.

A questão a ser considerada é que, para a maioria dos sistemas, a carga e a resistência não são grandezas pontuais, mas possuem uma distribuição estatística de probabilidades sobre um dado conjunto de valores possíveis.



Grandezas de interesse

Safety margin e loading roughness

Grandezas de interesse das distribuições de carga e de resistência:

- Médias, $\bar{L}$ e $\bar{S}$;
- Desvios padrão, σ_L e σ_S

Margem de segurança (*Safety Margin*) e variabilidade de carga (*Loading Roughness*):

$$SM = \frac{\bar{S} - \bar{L}}{\sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_S^2}} \qquad LR = \frac{\sigma_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_S^2}}$$

Quantificam a separação relativa das médias de carga e resistência e variabilidade relativa das cargas.

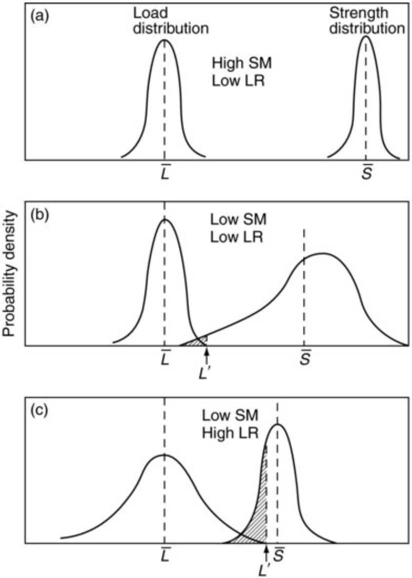
Permitem a análise da interferência entre as distribuições e a inferência de probabilidades de falha.

Algumas situações possíveis:

(a) Situação ideal, sistemas com grande confiabilidade.

(b) Situação com alta variabilidade de resistências - os (relativamente poucos) itens na cauda inferior da distribuição de resistências estarão sujeitos a falhas.

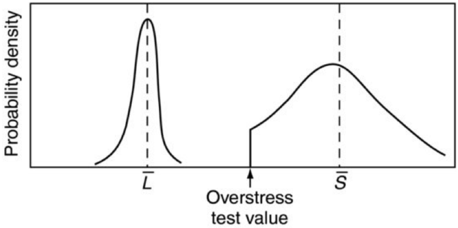
(c) Situação com alta variabilidade de cargas - cargas extremas podem causar falhas em uma grande fração dos sistemas;



O segundo caso (baixo SM, baixo LR) pode ser usualmente tratado através de testes preliminares:

- Inspeções individuais (técnicas / visuais);
- Testes de sobrecarga

Lembrando que testes de sobrecarga podem enfraquecer componentes e causar um aumento de faltas futuras - o conhecimento técnico sempre deve informar estes testes.



A confiabilidade de uma peça ou sistema, para uma aplicação discreta de carga, corresponde à probabilidade de que a resistência exceda a carga,

$$
\begin{aligned}
R = P(S > L) &= \int_0^{\infty} f_S(S) \left[\int_0^{s} f_L(L) dL \right] dS \\
&= \int_0^{\infty} f_L(L) \left[\int_L^{\infty} f_S(S) dS \right] dL
\end{aligned}
$$

ou, definindo $y = S - L$:

$$R = P(y > 0) = \iint_0^{\infty} f_S(y + L) f_L(L) dL dS$$

Em casos particulares (p.ex., distribuições normais), a expressão de confiabilidade dada anteriormente pode possuir uma forma fechada. Entretanto, para o caso geral não há uma forma que permita a avaliação analítica.

Nestes casos, análise de Monte Carlo pode ser útil para a derivação de estatísticas de confiabilidade ou probabilidades de falha.

Efeito de SM e LR na confiabilidade
Aplicações múltiplas de carga

Para múltiplas aplicações de carga,

$$R = \int_0^\infty f_S(S) \left[\int_0^s f_L(L) dL \right]^n dS$$

onde n é o número de aplicações de carga.

A confiabilidade se torna uma função também da variabilidade da carga, ao invés de simplesmente da margem de segurança. Cargas mais variáveis levarão a sistemas mais sujeitos a falhas no longo prazo.

Efeito de SM e LR na confiabilidade

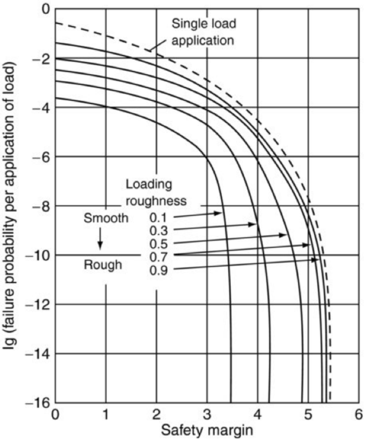
Aplicações múltiplas de carga

No caso de carga e resistência normais, temos a situação ilustrada abaixo. A linha tracejada representa o caso para uma aplicação única de carga, enquanto que as demais são curvas para valores elevados de n e diferentes LR.

Assumindo independência,
$R = (1 - p)^n$

Para valores baixos de p,
$R \approx 1 - np$

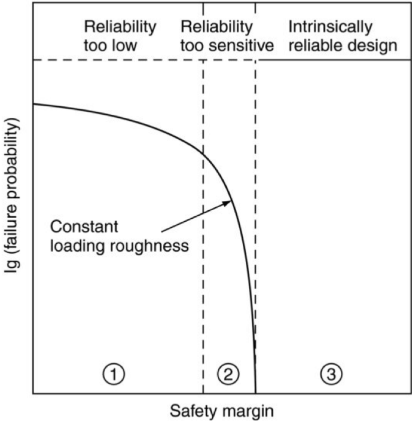
A confiabilidade para múltiplas aplicações de carga pode ser derivada a partir do valor de p obtido na figura ao lado.



Efeito de SM e LR na confiabilidade

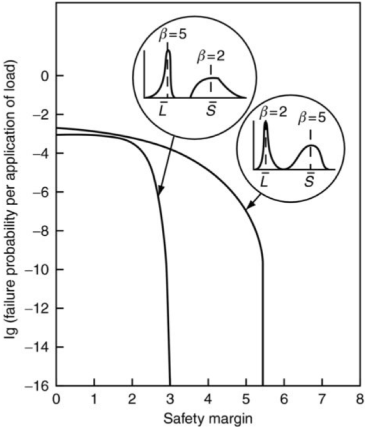
Aplicações múltiplas de carga

Uma vez que a margem de segurança exceda valores entre 3 e 5 (dependendo da variabilidade da carga) a probabilidade de falha se torna infinitesimal. Sistemas com estas características são chamados de *intrinsicamente confiáveis*.

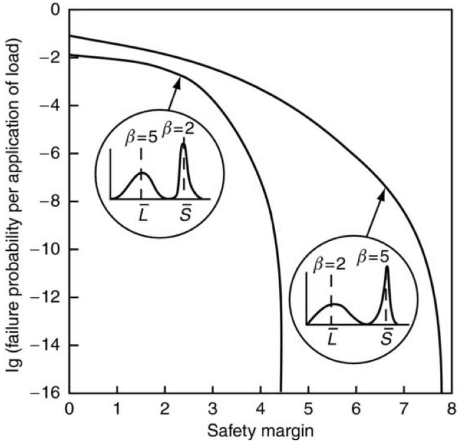


Curvas similares podem ser obtidas para outras distribuições de carga e resistência. Por exemplo, para carga e resistência distribuídas de acordo com uma distribuição de Weibull (que, lembrando, faz parte da família de distribuições de valores extremos) com $LR = 0.3$, teríamos a situação abaixo.

Para distribuições assimétricas que levem a interferências consideráveis, é usualmente necessária uma grande margem de segurança para se obter sistemas intrinsicamente confiáveis.



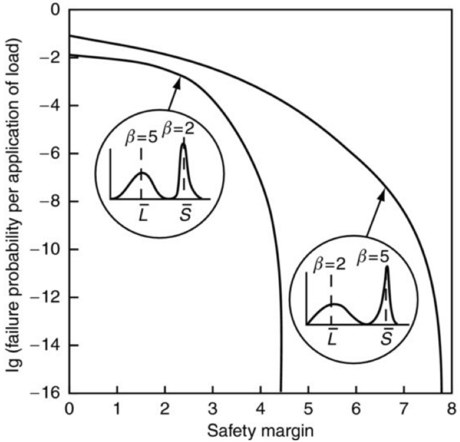
Se a variabilidade de carga for alta (no caso abaixo, $LR = 0.9$), margens de segurança ainda mais extremas passam a ser necessárias.



Efeito de SM e LR na confiabilidade

Aplicações múltiplas de carga

Se a variabilidade de carga for alta (no caso abaixo, $LR = 0.9$), margens de segurança ainda mais extremas passam a ser necessárias.



Uma barra de conexão deve suportar uma dada carga que, após ensaios, foi determinada como tendo um comportamento lognormal com parâmetros $\mu = 9.2,\ \sigma = 1.1$. Testes no material a ser utilizado na barra mostram que a distribuição de resistência é também lognormal, com $\mu = 11.8,\ \sigma = 1.3$. Testes individuais em cada barra são infactíveis por considerações técnicas e econômicas. Calcule a confiabilidade esperada destes componentes utilizando análise de Monte Carlo.

Suponha um cabo elétrico projetado para uma tensão nominal de 13.5kV, cujo isolamento seja realizado a partir de uma camada de material isolante cuja capacidade de isolamento é distribuída de acordo com uma distribuição normal:

$$\mathcal{N}(\mu = 14, \sigma = 0.4) kV$$

trucanda de forma a não possuir valores inferiores a 13.5kV. Além disso, suponha que este cabo será utilizado em um sistema cuja tensão é distribuída por:

$$Load = 13 + Weibull(\beta = 2, \sigma = 0.3)$$

Utilizando a análise de Monte Carlo, determine a probabilidade de falha deste sistema e o valor da função de confiabilidade deste sistema para uma aplicação única de carga.

Exercícios para estudo:

1. Descreva a natureza da carga e da resistência para quatro situações diferentes de engenharia. Comente sobre as distribuições prováveis de carga e resistência, e discuta formas que poderiam ser utilizadas para minimizar as probabilidades de falha.
2. Descreva duas situações em sistemas elétricos e duas em sistemas mecânicos para os quais valores extremos de carga e de força são truncados, e comente sobre a natureza dos processos que geral esta truncagem.
3.

Bibliografia

Referências utilizadas

1. P.D.T. O'Connor, *Practical Reliability Engineering*, 5th ed., Wiley, 2011 - Caps. 4-5;