

Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Confiabilidade de Sistemas

Predição da Confiabilidade

Introdução

Importância da predição da confiabilidade de um sistema:

- ❖ Estimar
 - ❖ custos de suporte.
 - ❖ requisitos de reposição.
 - ❖ custos de garantia, etc.

Dificuldades:

- ❖ Sistema geralmente novo.
- ❖ Muitas vezes o comportamento do sistema é desconhecido.
- ❖ O ciclo de vida pode inicialmente não estar determinado.

- ❖ Sistema de referência (sistema previamente existente):
 - ❖ Pode ser usado como ponto inicial para predição da confiabilidade do novo sistema.
 - ❖ Mudanças significativas podem afetar substancialmente a confiabilidade:
 - ❖ Mudanças de software, instalação de subsistemas, automatização / monitoramento da planta, etc.
 - ❖ **Pode trazer ganhos e riscos.**

Aspectos gerenciais podem afetar a confiabilidade:

- ❖ Total de recursos aplicados na garantia da qualidade.
- ❖ Estratégias de teste e restrições.
- ❖ Tempo de desenvolvimento do sistema / produto.

Processo de Predição

Situação ideal:

- ❖ De cima para baixo.
 - ❖ Se inicia no sistema como um todo.
 - ❖ Depois parte para níveis mais detalhados.
 - ❖ A predição inicial a nível de componente pode ser necessária mas ela amplia a incerteza global do sistema.
- ❖ Muitas falhas do sistema não são decorrentes de falhas individuais.
- ❖ Nem todas as partes de falhas individuais causam falhas no sistema.

Abordagem usual:

- ❖ Método da contagem de partes:
 - ❖ De baixo para cima.
 - ❖ Estima-se a contribuição de cada parte para a confiabilidade.
 - ❖ Essa contribuição é "trazida" para o nível do produto / sistema.

- ❖ **Método da contagem de partes:**
 - ❖ Podem ser utilizadas bases que descrevem a confiabilidade das partes.
 - ❖ Altamente dependente de dados confiáveis para o projeto.
 - ❖ Diversos fatores podem afetar a confiabilidade das bases:
 - ❖ Conhecimento técnico e motivação dos responsáveis pelos testes.
 - ❖ Quantidade de testes realizada.
 - ❖ Ações tomadas pós falhas ocorridas durante os testes.
 - ❖ Momento em que os testes foram feitos.

Limitações da Predição de Confiabilidade

- ❖ Predições são válidas dentro de um determinado domínio:
 - ❖ Exemplo: Lei de Ohm
 - ❖ Não é válida para temperaturas próximas ao zero absoluto.

- ❖ Apesar de serem tratados de forma determinística, vários fenômenos físicos são estocásticos:
 - ❖ Exemplo: a pressão é função do movimento aleatório de várias moléculas e suas interações.
 - ❖ O teorema do limite central nos permite estimar um comportamento médio e obter uma medição de pressão.

- ❖ Em alguns contextos é importante considerar a característica estocástica do comportamento que está sendo estimado:
 - ❖ Exemplo: física nuclear.
 - ❖ Porém, em geral, as variações infinitesimais são ignoradas.
 - ❖ Em muitos casos elas não são mensuráveis.

- ❖ Um modelo matemático é geralmente considerado aceitável quando as estimativas obtidas com este modelo são acuradas para uma mesma condição de entrada.
- ❖ Se um modelo não gera estimativas aceitáveis para uma dada condição de entrada, isso significa que este modelo não é adequado e precisa ser refeito.

- ❖ A predição da confiabilidade parte da construção de modelos matemáticos:
 - ❖ Existem muitos fatores que podem causar falhas de partes do sistema (vários deles desconhecidos).
 - ❖ Modelos de confiabilidade estão geralmente cercados por um maior nível de incerteza.

- ❖ Exemplo:
 - ❖ Um atuador, produzido e utilizado corretamente, não deveria falhar em uso durante toda sua expectativa de vida.
 - ❖ **Mas ele pode falhar!**
 - ❖ Se ocorrem falhas na população desses componentes, as causas, modos de falha e distribuição do tempo até falha podem decorrer de um conjunto enorme de fatores.

- ❖ Um modelo matemático de predição da confiabilidade é limitado em vários aspectos:
 - ❖ Eventos / aspectos não previstos durante o projeto.
 - ❖ Geralmente é obtido por meio da análise de dados passados.
 - ❖ Falta de informações.
 - ❖ Problema de representatividade da amostra.
 - ❖ Variação no sistema ou nas condições de operação.
 - ❖ Uma relação baseada em observação estatística não pode ser utilizada para estabelecer causa-efeito.

- ❖ Em geral, deve-se assumir que os métodos de predição da confiabilidade são consideravelmente melhores que “simples chutes”, mas eles podem variar consideravelmente da confiabilidade real do sistema.

- ❖ A predição da confiabilidade deve ser usada como base para definir o objetivo a ser atingido após a conclusão do produto.
- ❖ É necessário compromisso em todos os níveis para que estes índices sejam atingidos.
- ❖ Busca do equilíbrio: objetivos *vs.* avaliação de risco.
 - ❖ Em geral é um processo iterativo.

Normas/Padrões de Predição da Confiabilidade

- ❖ Predição da confiabilidade com base em normas de instituições reconhecidas.
- ❖ Premissas geralmente consideradas:
 - ❖ Os dispositivos são seriais.
 - ❖ Taxa de falha constante (geralmente são utilizadas distribuições exponenciais).
 - ❖ As taxas de falhas individuais dos elementos não reparáveis são agregadas para estimar a confiabilidade do sistema como um todo (método da contagem de partes).

US MIL-HDBK-217 (1995)

- ❖ Uma das mais reconhecidas fontes sobre taxas de falhas em componentes eletrônicos.
- ❖ Baseada em princípios físicos/químicos e em taxas de falhas de componentes eletrônicos observadas por anos pelo Exército dos EUA.
- ❖ Utiliza dois métodos de predição da confiabilidade: contagem de partes e estresse de partes.

Contagem de Partes

Taxa de falha média do equipamento:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n N_i \pi_{Q_i} \lambda_{bi}$$

n é o número de categorias de partes;
 N_i é a quantidade da parte i ;
 π_{Q_I} é o fator de qualidade da parte i ;
 λ_{bi} é a taxa de falha base da parte i

Estresse de Partes

- ❖ Depende de alto detalhamento.
- ❖ Aplicado em fases finais do projeto.
- ❖ Leva em conta aspectos como o ambiente de montagem, estresse elétrico, fator de temperatura, ambiente de aplicação, etc.
- ❖ O método de cálculo varia conforme o tipo de circuito.

Exemplo: microcircuitos

$$\lambda_p = \pi_Q \pi_L [C_1 \pi_T + C_2 \pi_E]$$

π_Q , π_E , π_T e π_L fatores relacionados à qualidade, ambiente, temperatura e aprendizado.

C_1 é um fator de morte relacionado ao tipo de chip.

C_2 é um fator de complexidade baseado nas características de encapsulamento.

Principais críticas:

- ❖ Com base na experiência é possível observar que apenas uma parte das falhas ocorridas em dispositivos eletrônicos modernos é decorrente de falhas internas de componentes.
- ❖ A dependência da taxa de falha com a temperatura não é completamente discriminável pela experiência e a física básica.
- ❖ Algumas premissas consideradas são questionáveis.
 - ❖ Por exemplo, nem sempre a taxa de falha cresce significativamente com a complexidade.
 - ❖ Os modelos não levam em conta vários aspectos relevantes, como sobre-estresse em regime transitório, variação de temperatura, controle de construção, teste e manutenção, etc.

Telcordia SR-332

- ❖ Norma comercial para dispositivos eletrônicos.
- ❖ Originalmente chamado de Bellcore, foi desenvolvido pela AT&T Bell Labs.
- ❖ Adapta as equações do MIL-HDBK-217 para melhor representação de dispositivos de telecomunicação.

Usa três métodos de estimação:

- ❖ Método 1: estima as taxas de falha genéricas com base no padrão de predição da Bellcore.
- ❖ Método 2: permite agregar dados de laboratório aos dados obtidos no método 1.
- ❖ Método 3: permite agregar dados de campo aos dados obtidos no método I.

IEC 62380

- ❖ Adaptação do MIL-HDBK-217.
- ❖ O modelo de falha multiplicativo é substituído por um modelo aditivo e multiplicativo.
- ❖ Permite estabelecer um perfil de temperatura e diferentes fases.
- ❖ As fases são utilizadas para estimar o estresse dos componentes.

NSWC-06/LE10

- ❖ Destinada a componentes mecânicos.
- ❖ Estuda o efeito de temperatura, estresse, taxas de fluxo e vários outros parâmetros na taxa de falha dos componentes.
- ❖ Abrange várias categorias de equipamentos, como válvulas, tubulações, molas, solenóides, engrenagens, atuadores, bombas, filtros, freios, compressores, etc.
- ❖ As categorias são compostas de sub-componentes, que devem ser modelados pelo usuário.

Softwares para Predição da Confiabilidade

- ❖ Lambda Predict by ReliaSoft.
- ❖ CARE by BQR.
- ❖ ITEM ToolKit Reliability Workbench by Isograph.
- ❖ RAM COMMANDER by Reliass, etc.

Em geral, estes softwares trazem implementações computacionais das normas.

Outros Métodos para Predição da Confiabilidade

Métodos Baseados no Dados de Campo

- ❖ A predição da confiabilidade é feita com base nos dados do próprio fabricante.
- ❖ As taxas de falha podem ser estimadas com base no retorno de campo, substituição, chamadas de garantia ou qualquer outra fonte que permita identificar falhas.
- ❖ Tem como principal vantagem a especificidade.
- ❖ Não permite a comparação com outros dados para servir de *benchmark*.

Dados de Campo + Padrões de Previsão da Confiabilidade

- ❖ A principal crítica dos padrões estabelecidos em norma é sua generalidade.
 - ❖ As previsões não são específicas nem quanto à aplicação.
- ❖ Várias abordagens propõem a calibração das taxas de falhas individuais (λ) com base em dados observados em campo e chamados de garantia.

Abordagem Top-Down

- ❖ Indicada para as seguintes situações:
 - ❖ O novo sistema é similar a um sistema desenvolvido anteriormente.
 - ❖ O sistema não envolve grande risco tecnológico.
 - ❖ O sistema será produzido em larga escala, é complexo, ou será utilizado por um longo tempo.
- ❖ Nesse caso a predição da confiabilidade é feita de cima para baixo, sem a necessidade de se analisar cada componente individualmente.

Confiabilidade de Sistemas Não Reparáveis

Modelo Série



$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

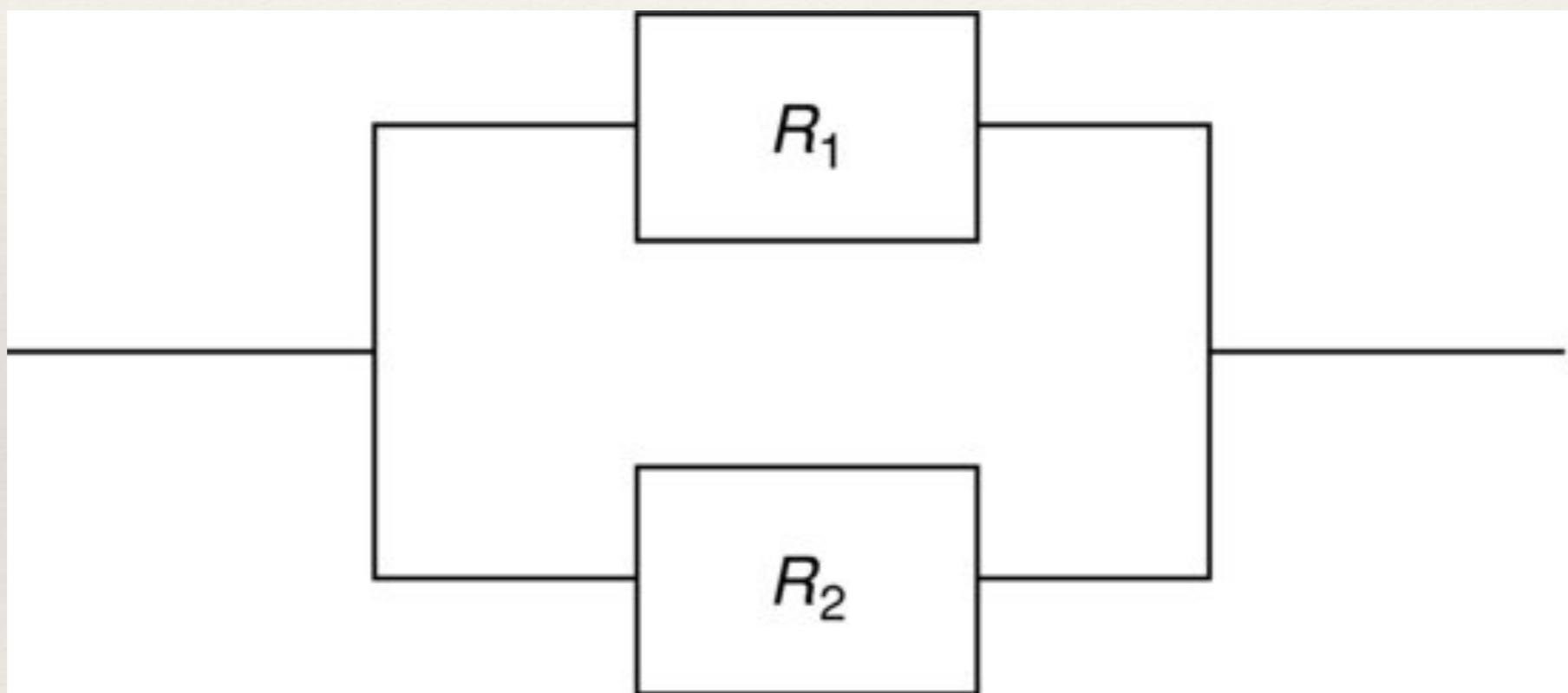
$$R_i=\exp(-\lambda_i t)$$

$$R=R_1\cdot R_2$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$R=\prod_{i=1}^n R_i=\exp(-\lambda t)$$

Redundância Ativa



$$(R_1+R_2)=R_1+R_2-R_1R_2=1-(1-R_1)(1-R_2)$$

$$R=\exp(-\lambda_1 t)+\exp(-\lambda_2 t)-\exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]$$

$$R = 1 - \prod_{i=1}^n(1-R_i)$$

Redundância m de n

- ❖ Ao menos \underline{m} das \underline{n} unidades idênticas devem estar funcionando.

$$R_{SYS} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$$

$$R_{SYS} = 1 - \frac{1}{(\lambda t + 1)^n} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} (\lambda t)^{n-i}$$

Redundância em Standby

- ❖ Uma ou mais unidades não operam constantemente, sendo usadas apenas quando as unidades primárias falham.

$$R_{SYS} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \exp(-\lambda t)$$

Exemplo

- ❖ Sejam $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ falha/10000h.
- ❖ Confiabilidade do sistema
 - ❖ Redundância ativa: 0,9909.
 - ❖ Redundância em *standby*: 0,9953.

Considerações Sobre Redundância

Deve-se tomar cuidado para evitar falhas que possam eliminar o efeito da redundância.

- ❖ Uma mesma falha pode eliminar o efeito da parte principal e da parte redundante simultaneamente.
- ❖ Super aquecimento de um chip.

Modelos consideravelmente mais complexos podem ser utilizados em aplicações que exijam alta confiabilidade:

- ❖ Em aviões geralmente é utilizada redundância ativa dupla ou tripla dos sistemas hidráulicos e de potência, além de uma redundância em *standby* que é ativada caso todos os outros sistemas falhem.
- ❖ Equipamentos de detecção e combate a incêndio consistem de dispositivos ativos em paralelo.

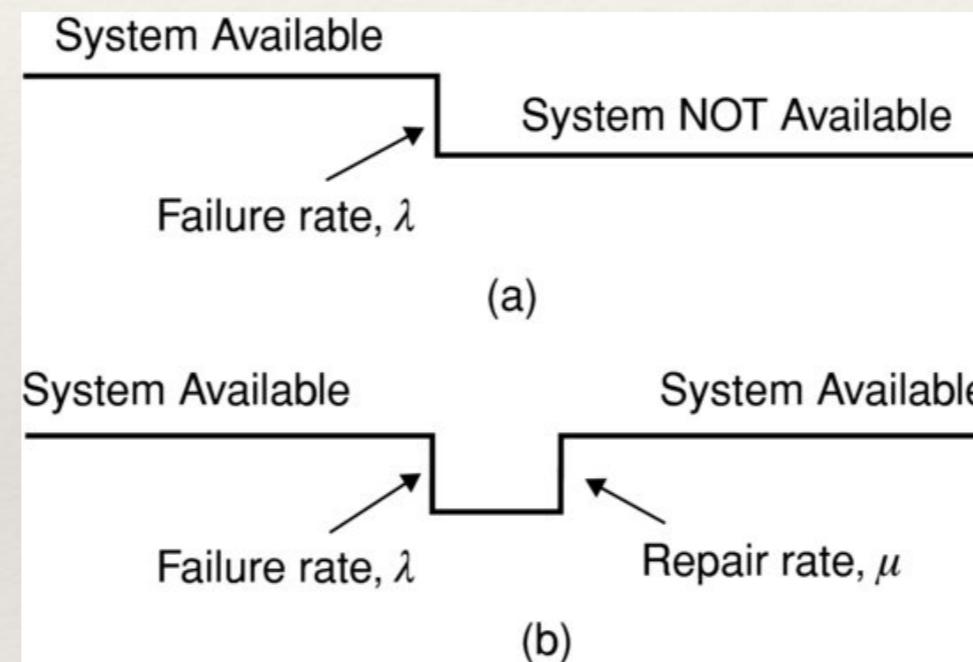
Exercício:

- ❖ $\lambda_1 = 0.00025$
- ❖ $\lambda_2 = 0.00025$
- ❖ $\lambda_3 = 0.00025$
- ❖ considere acoplamento perfeito.

❖ Para 1000 horas:

- ❖ Calcule a confiabilidade do sistema série.
- ❖ Calcule a confiabilidade do sistema com redundância ativa 1/3.
- ❖ Calcule a confiabilidade do sistema com redundância ativa 2/3.
- ❖ Calcule a confiabilidade do sistema com redundância *standby*.

Disponibilidade de Sistemas Reparáveis



Sistemas Reparáveis

- ❖ A matemática envolvida no tratamento de sistemas reparáveis é consideravelmente diferente.
 - ❖ As distribuições estatísticas comumente utilizadas para sistemas não reparáveis não são aplicáveis para sistemas reparáveis, uma vez que as unidades com falha não são retiradas da população.
 - ❖ O número de unidades reparadas pode exceder o número de unidades do sistema, o que resultaria uma CDF maior que 1.

- ❖ Os sistemas reparáveis são modeláveis por processos estocásticos:
 - ❖ Se após o reparo o sistema volta ao estado de “novo”, é utilizado um modelo ORP (*Ordinary Renewal Process*) para descrever a ocorrência de falhas.
 - ❖ Se após o reparo o sistema mantém as mesmas características de antes da falta, a ocorrência de falhas é descrita por um modelo NHPP (*Non Heterogenous Poison Process*).
 - ❖ Se após o reparo o sistema se torna melhor que antes da falha, mas pior que novo (situação usual), então ele é modelado por um modelo GRP (*Generalized Renewal Process*).

- ❖ A definição “clássica” de confiabilidade só se aplica a primeira falha de sistemas reparáveis.
- ❖ O conceito equivalente à Confiabilidade para sistemas reparáveis é a “Disponibilidade” (Availability).
- ❖ A disponibilidade é definida como a probabilidade de um item estar disponível quando necessário, ou a proporção do tempo que um recurso está disponível para uso.

❖ A disponibilidade do sistema é função de:

- λ : taxa de falha.
- μ : taxa de reparo.

- A disponibilidade em regime permanente é a proporção de tempo que o sistema está disponível para uso.

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Tempo Médio de Reparo:

$$\mu = \frac{1}{MTTR}$$

- ❖ Disponibilidade instantânea:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \exp[-(\lambda + \mu)t]$$

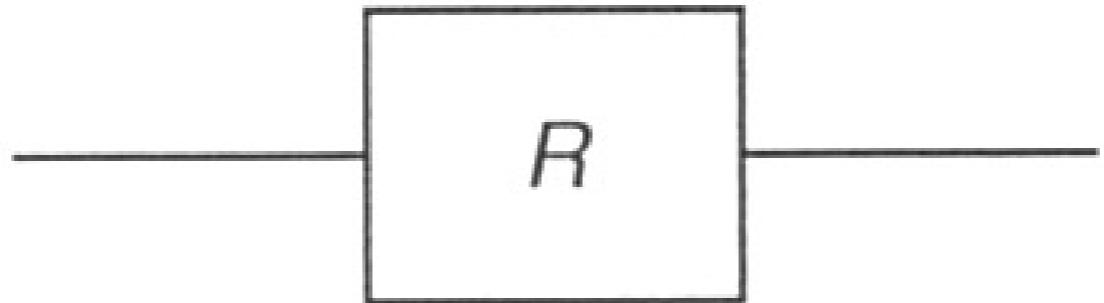
- ❖ Indisponibilidade em regime permanente:

$$U = 1 - A = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- ❖ Indisponibilidade instantânea:

$$U(t) = 1 - A(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \exp[-(\lambda + \mu)t]$$

Resumo

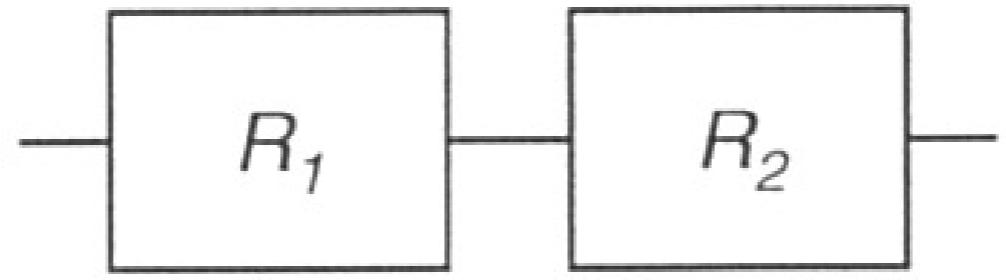


Confiabilidade:

$$\exp(-\lambda t)$$

Disponibilidade
(em regime
permanente):

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu}$$



Confiabilidade:

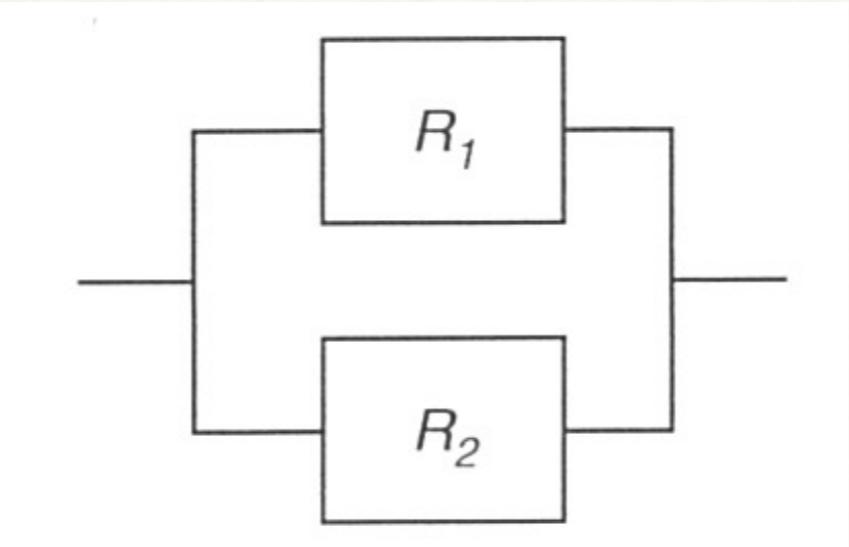
$$\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]$$

$$\prod_{i=1}^n R_i$$

Disponibilidade
(em regime
permanente):

$$\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$



Confiabilidade:

| | |
|--------|--|
| Active | $\exp(-\lambda_1 t) + \exp(-\lambda_2 t)$ $- \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]$ |
|--------|--|

| | |
|---------|---|
| Standby | $\frac{\lambda_2 \exp(-\lambda_1 t) - \lambda_1 \exp(-\lambda_2 t)^b}{\lambda_2 - \lambda_1}$ |
|---------|---|

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$\exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{ia}}{i!}$$

Disponibilidade
(em regime
permanente):

Active

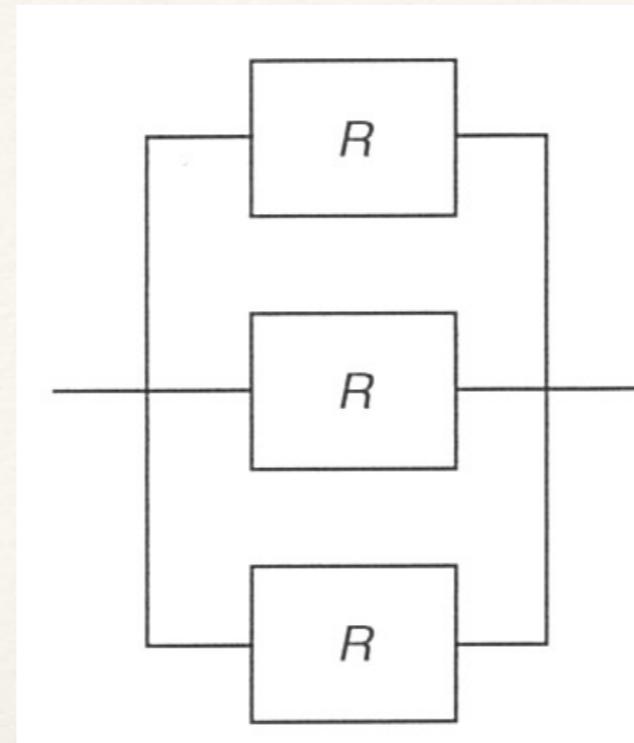
$$\frac{\mu^2 + 2\mu\lambda^a}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 2\lambda^2}$$

Standby

$$\frac{\mu^2 + \mu\lambda}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}$$

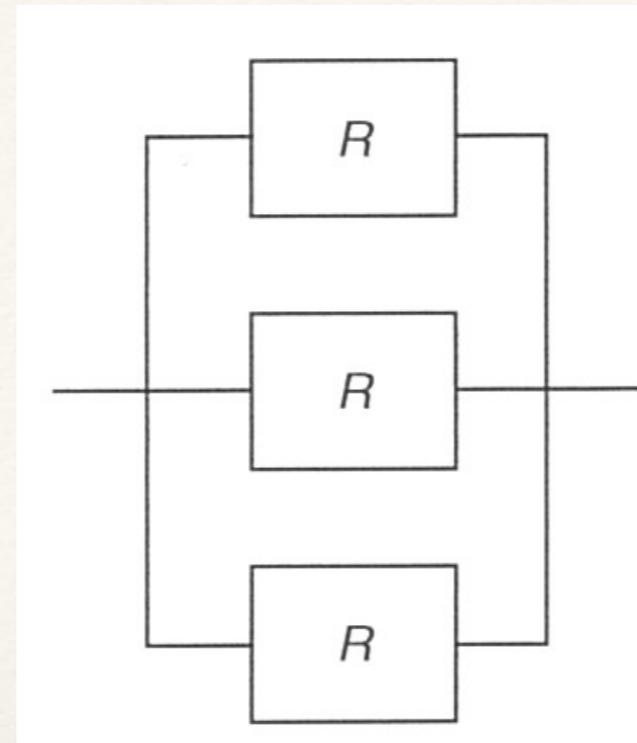
$$1 - \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i^a}{\lambda_i + \mu_i}$$

—



Confiabilidade:

| | | |
|----------------|---|--|
| Active 1/3 | $3 \exp(-\lambda t) - 3 \exp(-2\lambda t)$ + $\exp(-3\lambda t)$ | As above (active) |
| Active 2/3 | $3 \exp(-2\lambda t) - 2 \exp(-3\lambda t)$ | $1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$ |
| Standby 1/3 | $\exp(-\lambda t) + \lambda t \exp(-\lambda t)^d$ + $\frac{1}{2} \lambda^2 t^2 \exp(-\lambda t)$ | $\exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$ |



Disponibilidade (em regime permanente):

Active
1/3

$$\frac{\mu^3 + 3\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2}{\mu^3 + 3\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 6\lambda^3}$$

$$\frac{\mu^3 + 3\mu^2\lambda}{\mu^3 + 3\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 6\lambda^3}$$

$$\frac{\mu^3 + \mu^2\lambda + \mu\lambda^2}{\mu^3 + \mu^2\lambda + \mu\lambda^2 + \lambda^3}$$

Active
2/3

Standby
1/3

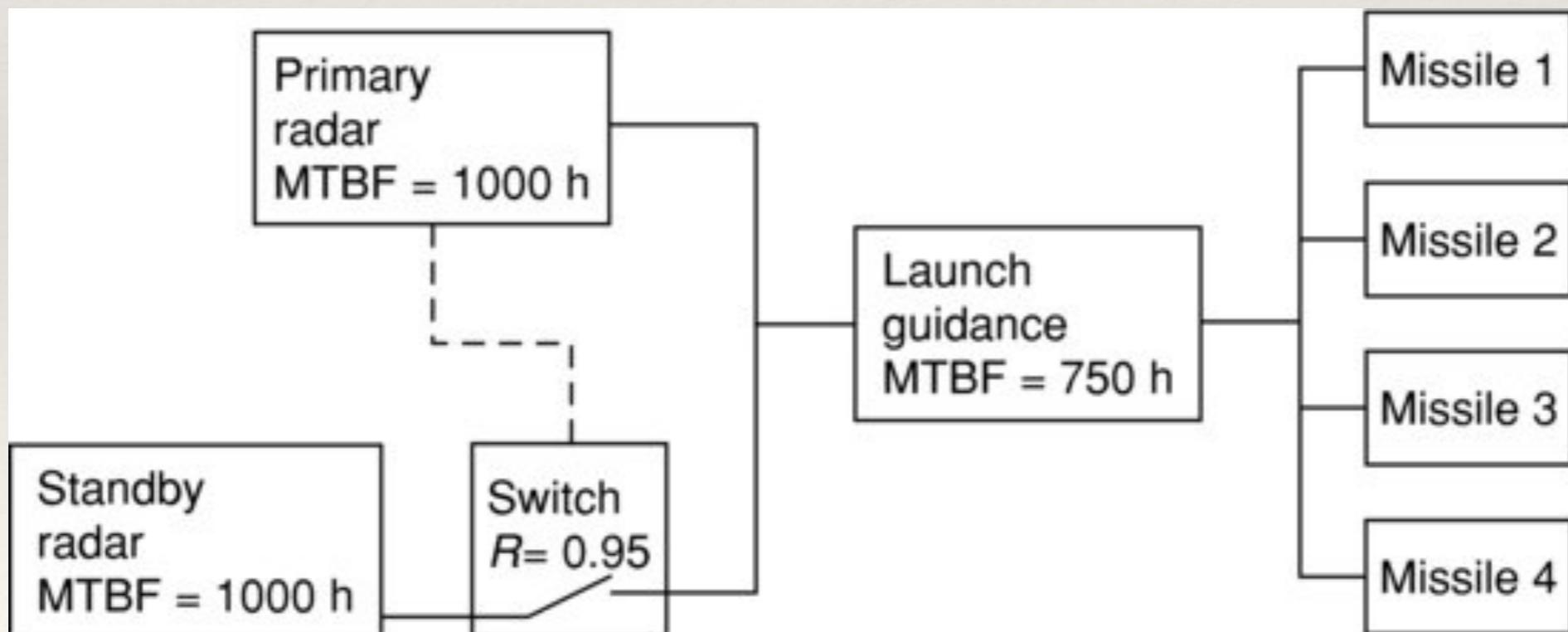
As above (active)

$$1 - \frac{1}{(\lambda + \mu)^n} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^i \lambda^{n-i}$$

—

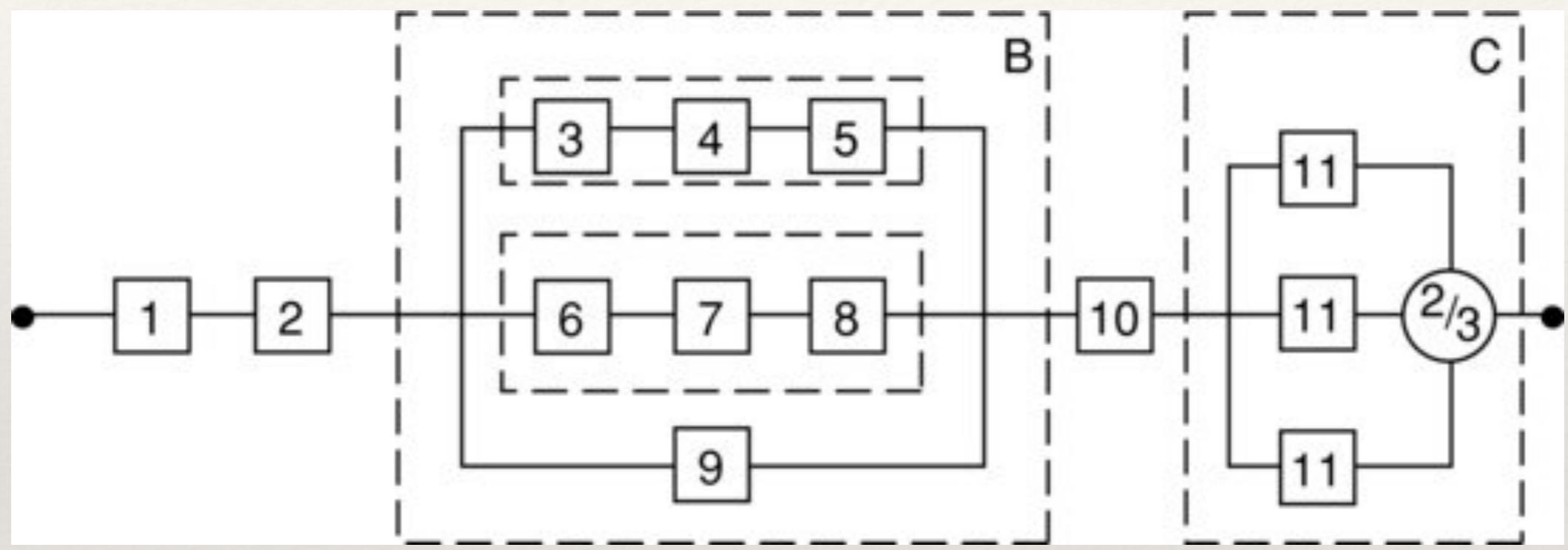
Exemplo:

- ❖ A confiabilidade de cada míssel é 0.90.
- ❖ O sistema é considerável confiável se ao menos 3 mísseis são lançados e guiados.
- ❖ Os mísseis são independentes.

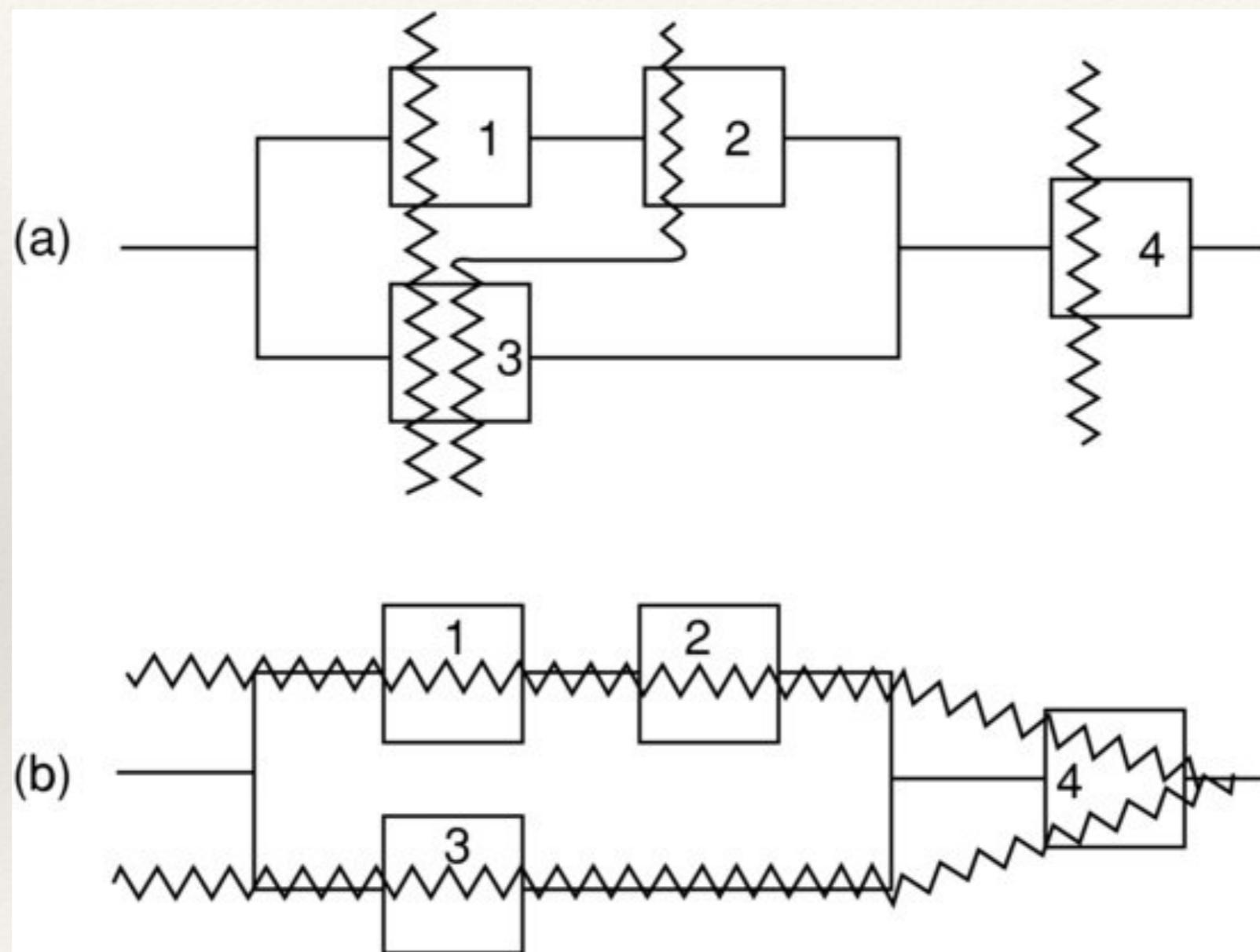


- ❖ Assuma:
 - ❖ Os sistemas de lançamento e direcionamento estão constantemente ativos.
 - ❖ O tempo de vôo do míssel é desprezível.
 - ❖ Todos os elementos são independentes.
- ❖ Calcule:
 - ❖ A confiabilidade do sistema em 24 horas.
 - ❖ A disponibilidade em regime permanente do sistema, se o tempo médio de reparo das unidade é 2 horas (ignore a chave neste caso).

Análise de Diagramas de Blocos (decomposição)



Cut Sets e Tie Sets

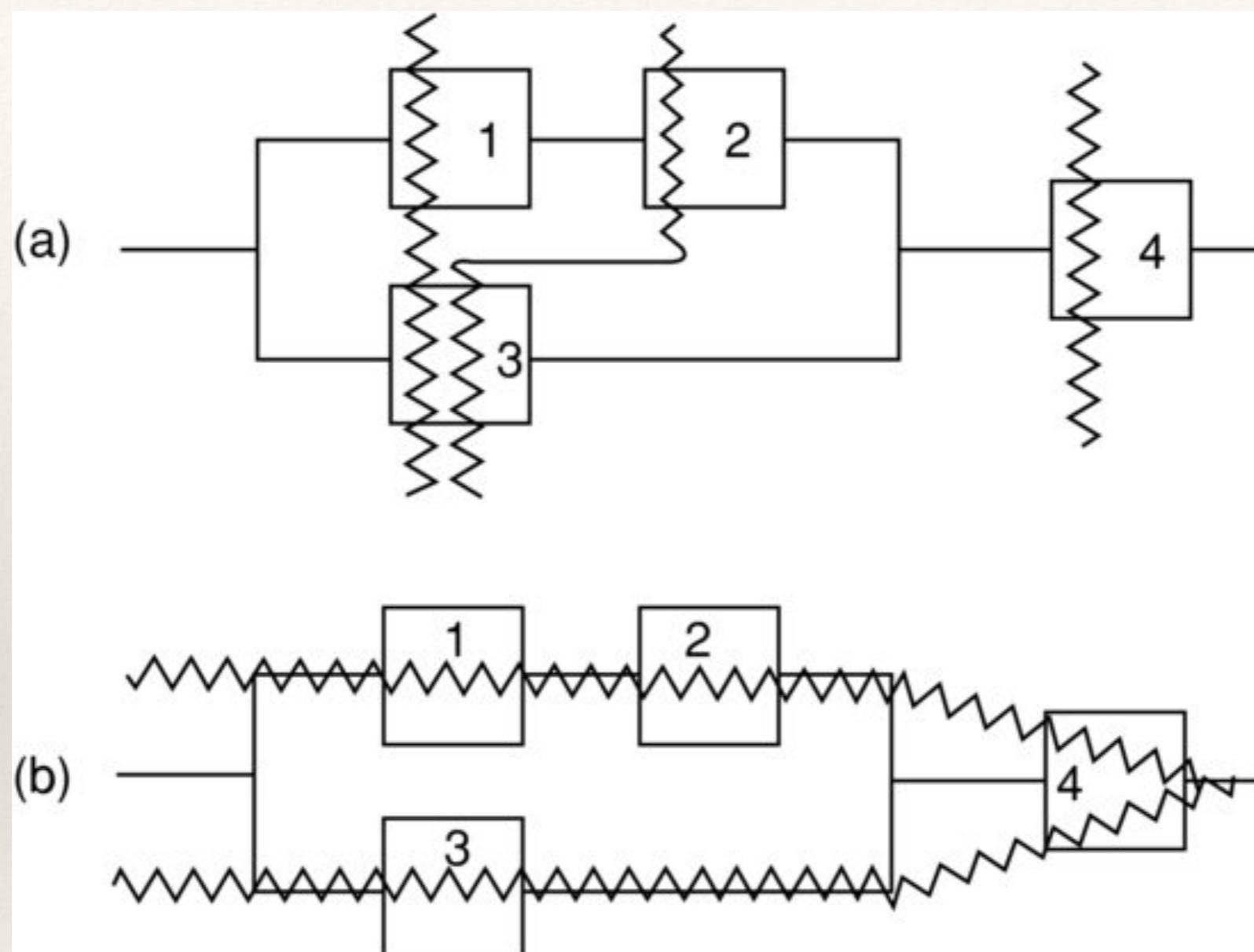


- ❖ Limites inferior e superior para a confiabilidade do sistema:

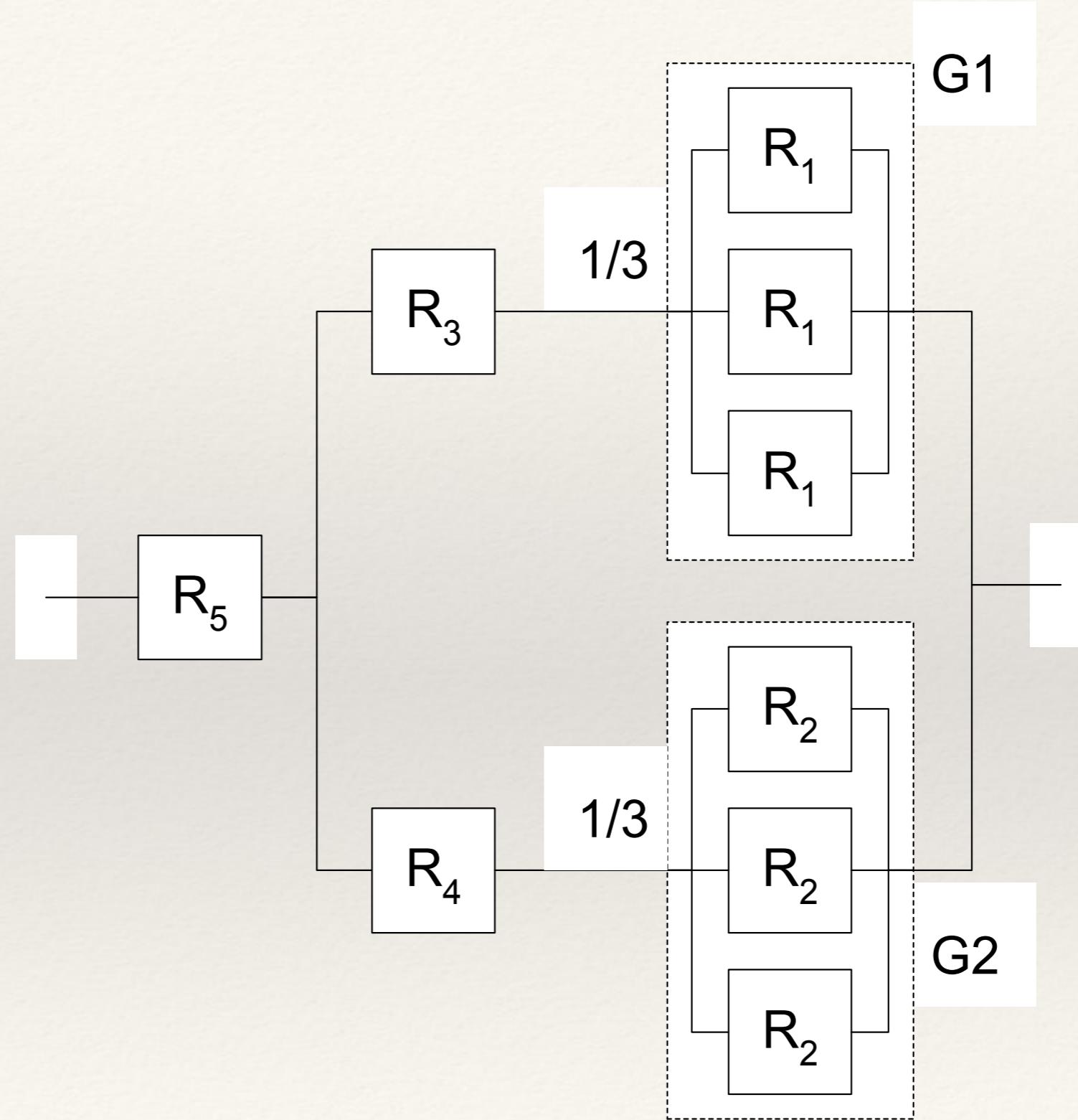
$$R_S > 1 - \sum_j^N \prod_i^{n_j} (1 - R_i)$$

$$R_S < \sum_j^T \prod_i^{n_j} R_i$$

N : conjunto de cut sets.
 T : conjunto de tie sets.



Exercício

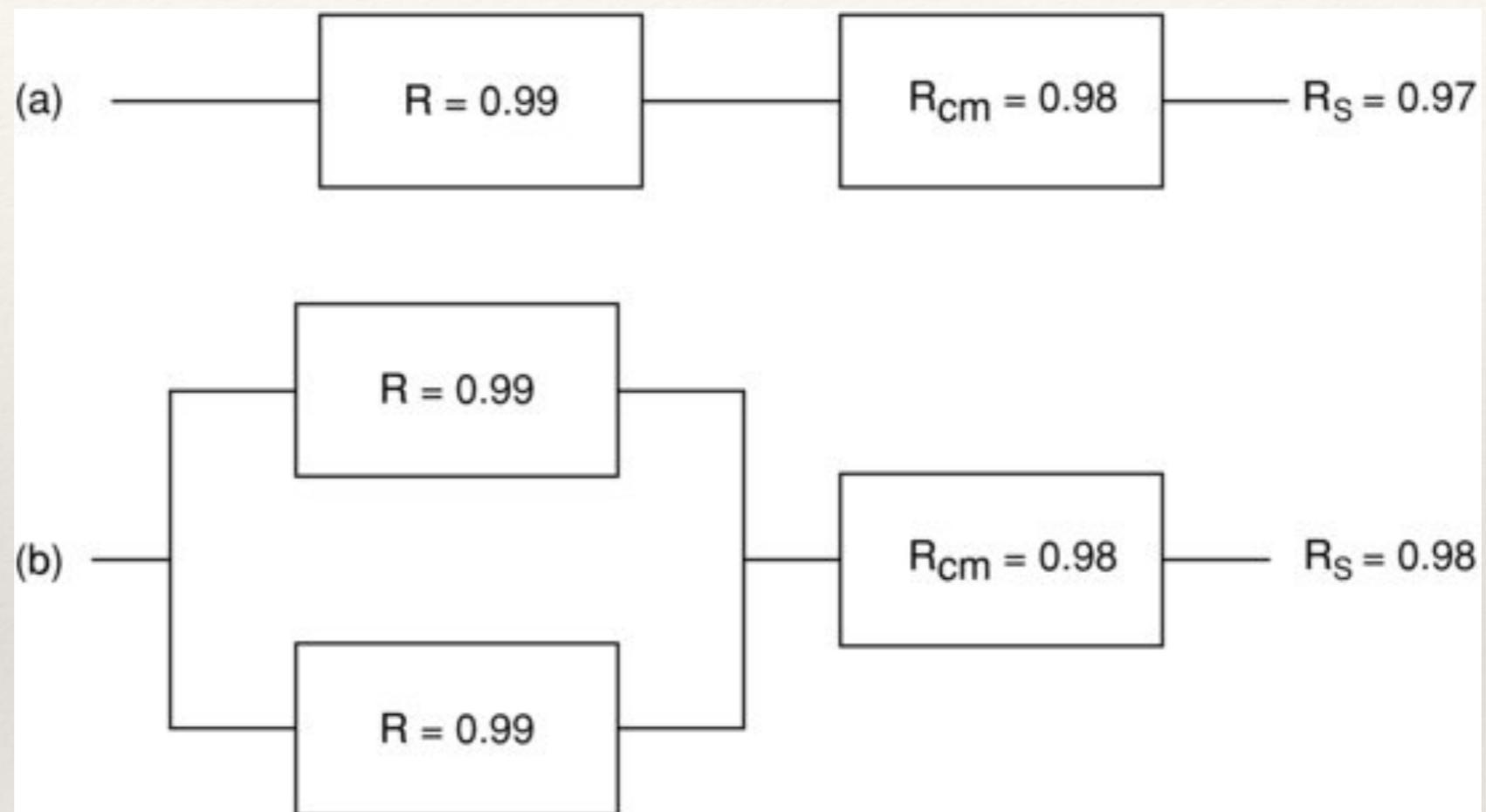


- ❖ Encontre a confiabilidade.
- ❖ Encontre um limitante superior para a confiabilidade.
- ❖ Encontre um limitante inferior para a confiabilidade.

Falha de Modo Comum

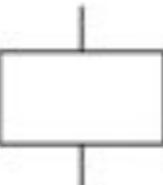
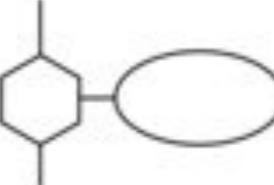
- ❖ A falha de modo comum pode levar a falha de todos os caminhos em uma configuração redundante.
- ❖ A identificação e avaliação de falhas de modo comum é essencial, uma vez que elas podem ter um impacto considerável na confiabilidade global do sistema.

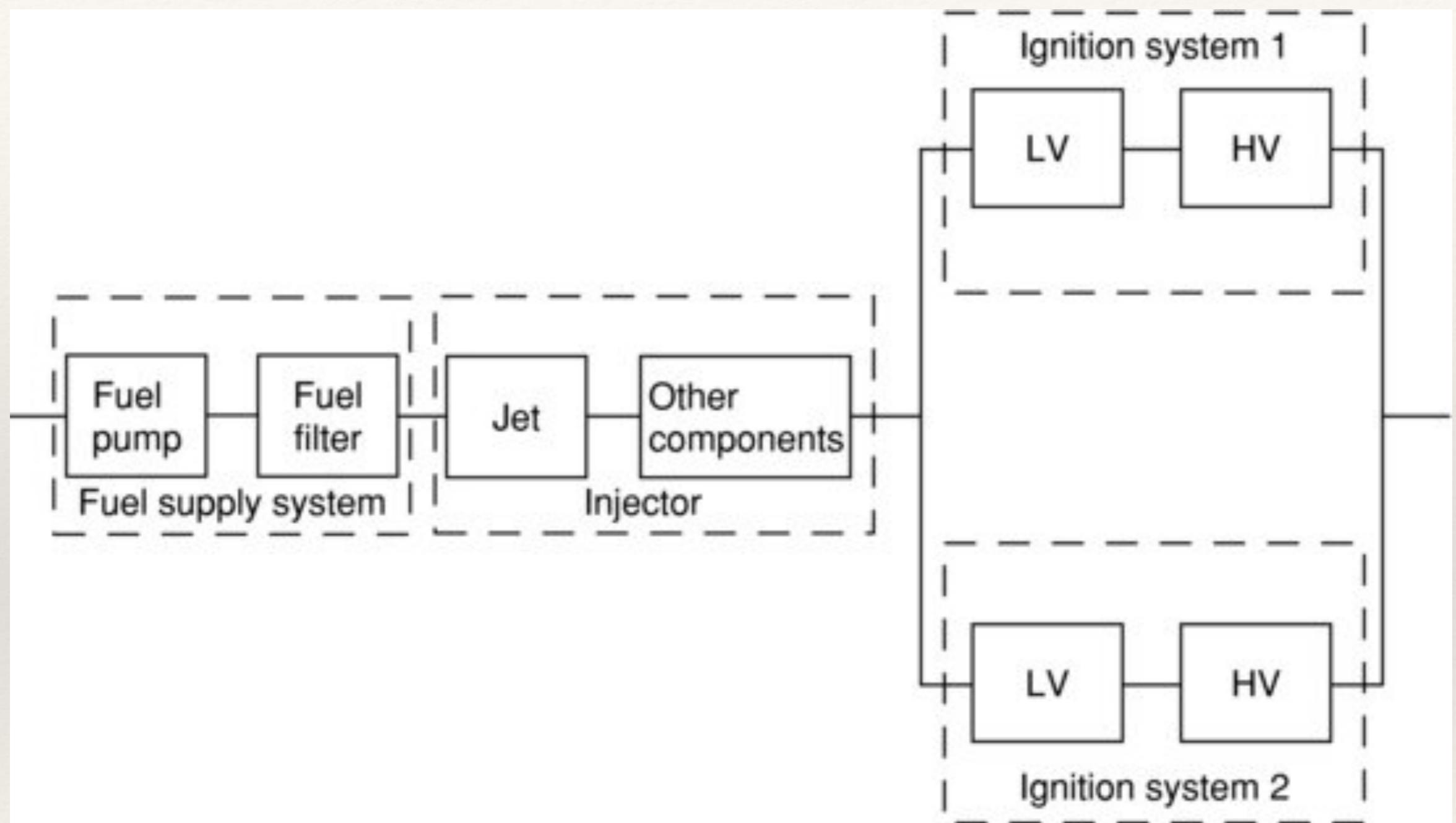
- ❖ Possíveis causas:
 - ❖ Sistemas de ativação de redundância *standby*.
 - ❖ Sensores de detecção de falha.
 - ❖ Sistemas de alimentação comuns.
 - ❖ Software comum nos caminhos do sistema.

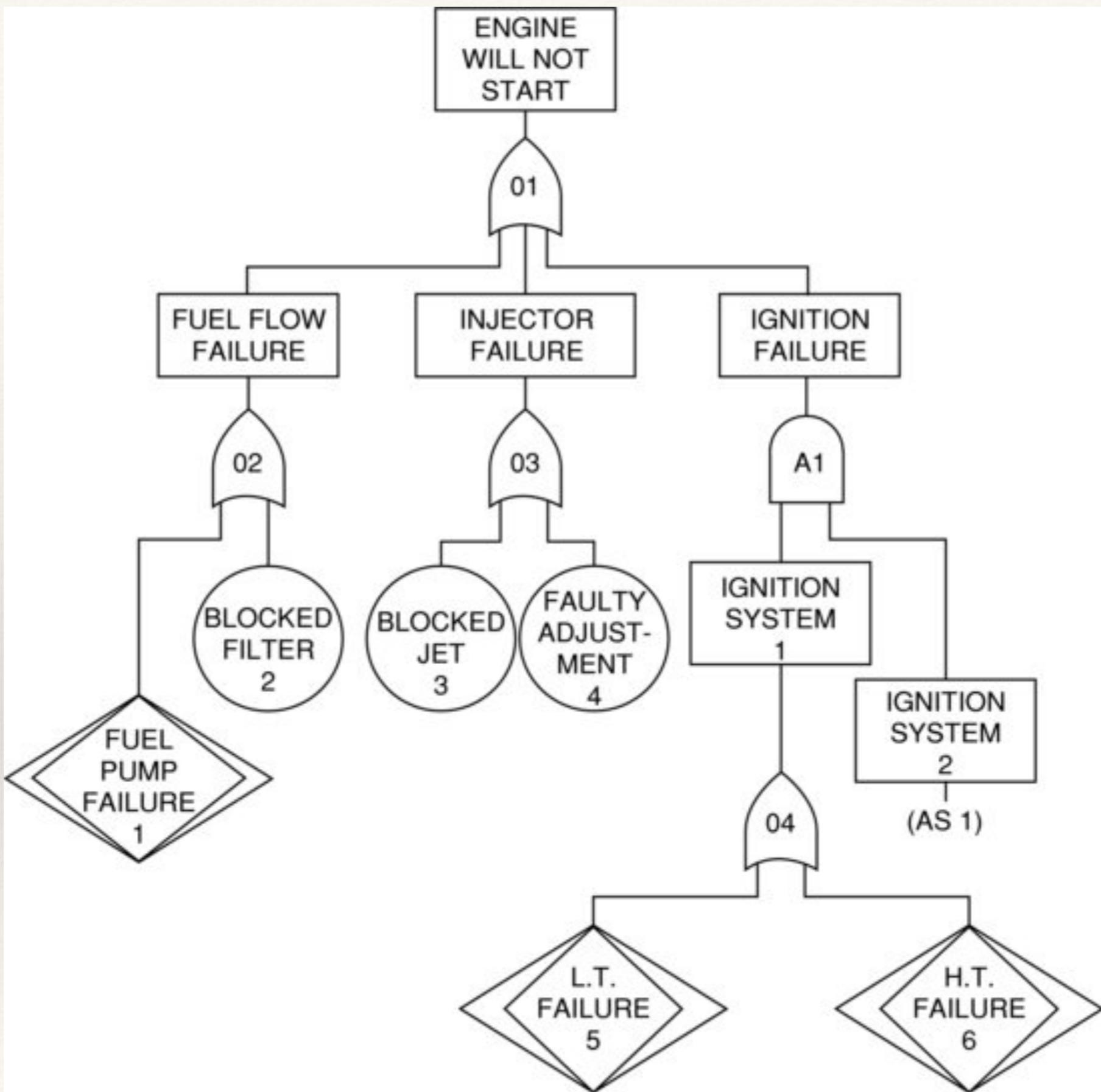


Árvore de Análise de Falhas (FTA)

- ❖ A Árvore de Análise de Falhas é uma técnica de projeto que começa pela consideração dos efeitos das falhas no sistema, considerados “top events”.
- ❖ A análise prossegue por meio da determinação de quais falhas em níveis inferiores podem levar aquele evento.
- ❖ Dependendo da complexidade do sistema, pode levar a árvores consideravelmente complexas.

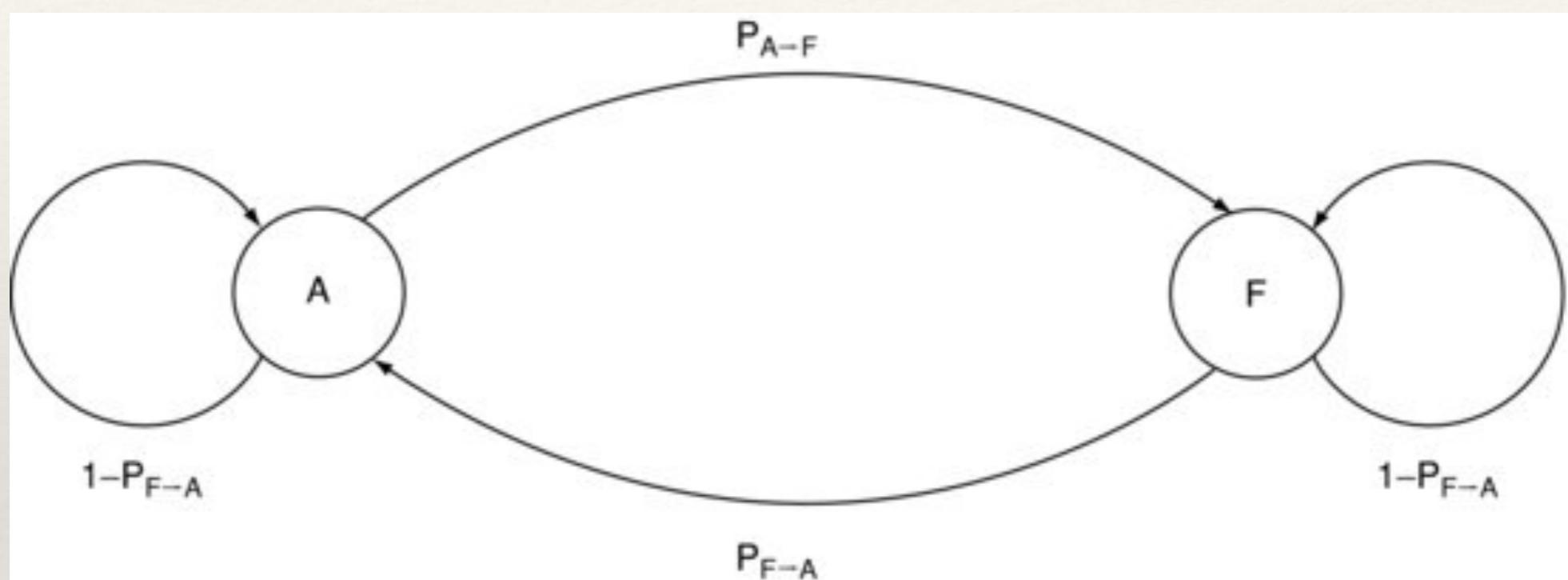
| | |
|---|---|
| <p>BASIC EVENT</p>  <p>A basic fault event that requires no further development. Is independent of other events.</p> | <p>SWITCH</p>  <p>Used to include or exclude parts of the fault tree, which may or may not apply to certain situations.</p> |
| <p>BASIC EVENT</p>  <p>Is dependent on lower events developed as a separate fault tree.</p> | <p>AND GATE</p>  <p>Failure (next higher event) will occur if all inputs fail (parallel redundancy).</p> |
| <p>BASIC EVENT</p>  <p>Is dependent upon lower events, but not developed downwards.</p> | <p>OR GATE</p>  <p>Failure (next higher event) will occur if any input fails (series reliability).</p> |
| <p>COMBINATION EVENT</p>  <p>An event that results from the combination of basic events through the input logic gates.</p> | <p>INHIBIT GATE</p>  <p>INHIBIT gates describe a causal relationship between one fault and another. The input event directly produces the output event if the indicated condition is satisfied.</p> |
| <p>TRANSFERRED EVENT</p>   <p>A line from the apex of the triangle indicates a transfer in; a line from the side denotes a transfer out.</p> | |





Análise em Espaço de Estados

- ❖ Cada sistema (ou parte) pode estar em dois estados:
 - ❖ com falha.
 - ❖ sem falha.
- ❖ É possível avaliar a probabilidade de estar um desses estágios no futuro com base em uma análise de espaço de estados.

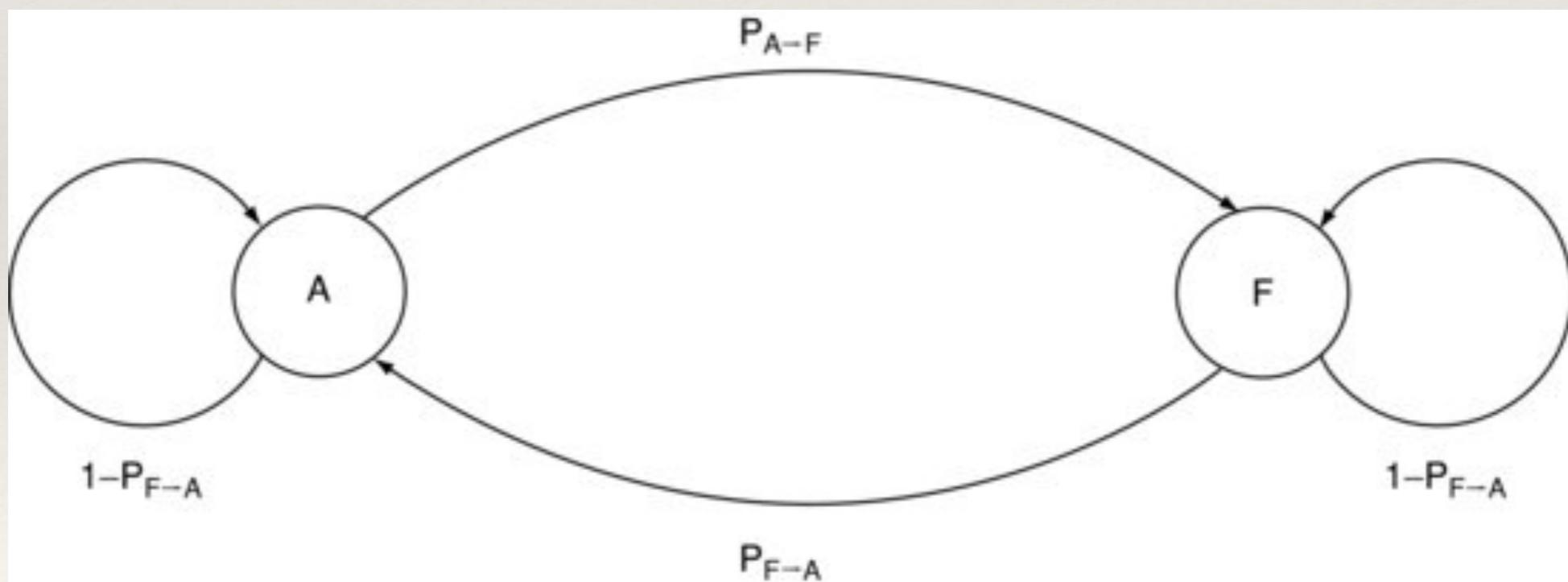


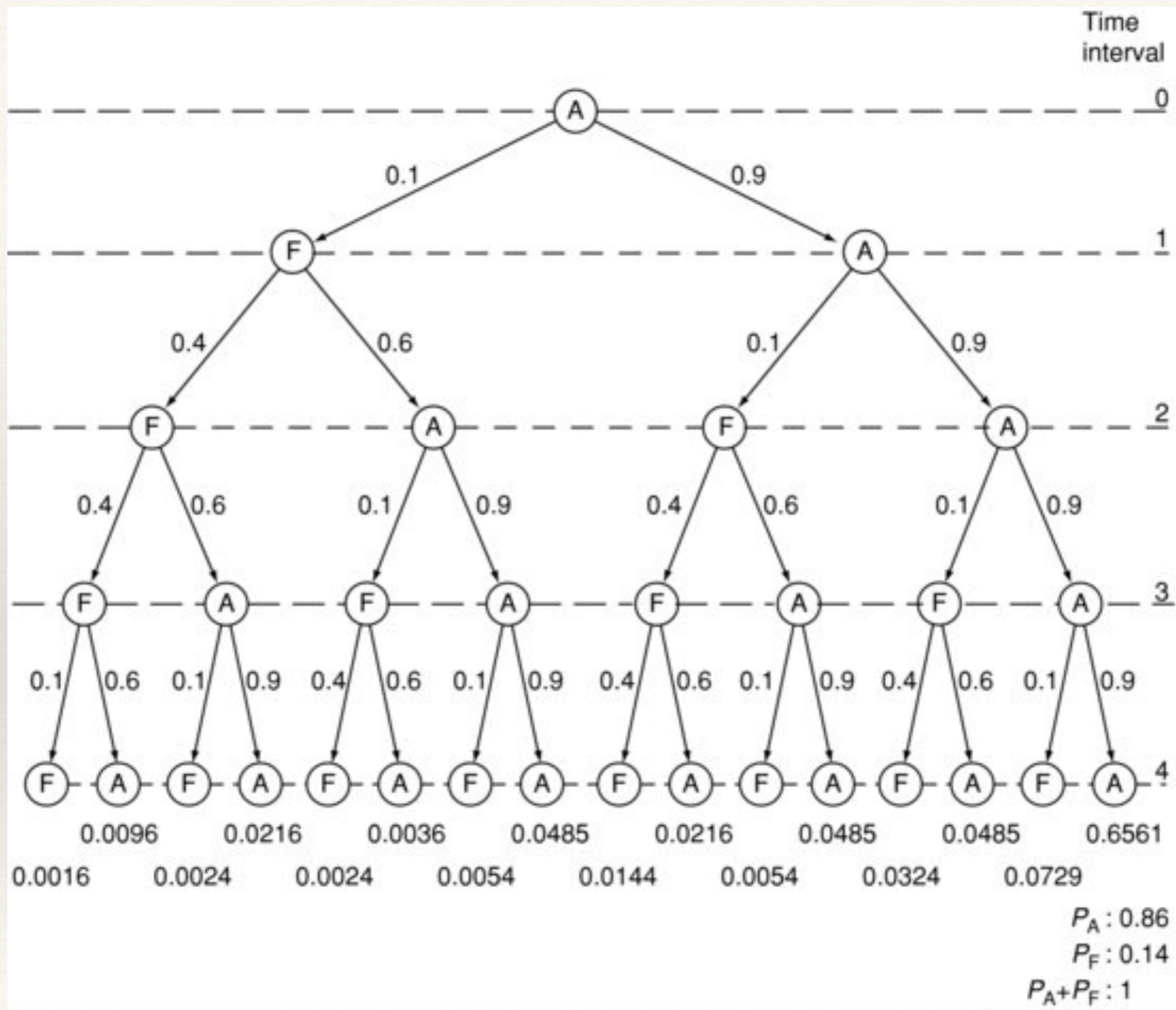
- ❖ Um dos métodos mais conhecidos para realizar análise em espaço de estados é a Análise de Markov.
 - ❖ Premissas:
 - ❖ As probabilidades de transição de estados permanecem constantes (taxa de falha constante).
 - ❖ Estados futuros independem de estados anteriores, exceto do imediatamente precedente (toda manutenção leva o sistema a um estado de “como novo”).



❖ Exemplo:

- ❖ Estado do sistema após quatro intervalos de tempo.
- ❖ $P(A \rightarrow F) = 0.1$
- ❖ $P(F \rightarrow A) = 0.6$





Análise de Markov por Matrizes

- ❖ Indicada para sistemas complexos, onde a montagem do diagrama de árvore é inviável.

$$P = \begin{bmatrix} P_{A \rightarrow A} & P_{A \rightarrow F} \\ P_{F \rightarrow A} & P_{F \rightarrow F} \end{bmatrix}$$

$P^n \rightarrow$ n-ésimo estágio

- ❖ No exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.8583 & 0.1417 \\ 0.8502 & 0.1498 \end{bmatrix}$$

- ❖ Dois componentes:

| Estado | Componente | |
|--------|------------|---|
| | I | 2 |
| I | A | A |
| 2 | A | F |
| 3 | F | A |
| 4 | F | F |

$$P = \begin{bmatrix} P_{1\rightarrow 1} & P_{1\rightarrow 2} & P_{1\rightarrow 3} & P_{1\rightarrow 4} \\ P_{2\rightarrow 1} & P_{2\rightarrow 2} & P_{2\rightarrow 3} & P_{2\rightarrow 4} \\ P_{3\rightarrow 1} & P_{3\rightarrow 2} & P_{3\rightarrow 3} & P_{3\rightarrow 4} \\ P_{4\rightarrow 1} & P_{4\rightarrow 2} & P_{4\rightarrow 3} & P_{4\rightarrow 4} \end{bmatrix}$$

- ❖ No exemplo:

$$P_{1 \rightarrow 1} = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

$$P_{1 \rightarrow 2} = 0.9 \times 0.1 = 0.09$$

$$P_{1 \rightarrow 3} = 0.1 \times 0.9 = 0.09$$

$$P_{1 \rightarrow 4} = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

⋮

$$P_{4 \rightarrow 4} = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$