Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Confiabilidade de Sistemas

Probabilidade e Estatística.

Introdução

- A estimativa/avaliação da confiabilidade depende de cálculos de probabilidade e estatística:
  - Todo o estudo de confiabilidade está cercado por incertezas.
    - Por exemplo, assuma que a taxa de falha média de uma lâmpada é de 1 para 10^7 horas. Não é possível afirmar que nenhuma unidade terá falhado após 100 horas de uso, mas é possível estimar uma probabilidade de isso ocorrer.

Variação

- A confiabilidade é fortemente influenciada pela variabilidade:
    - Parâmetros como resistência, propriedades do material, dimensão das partes, etc podem variar entre unidades.
- A variabilidade também existe nas condições de operação.
- A variabilidade é característica intrínseca da produção e operação de sistemas:
    - Deve-se criar meios de controlar e estimar essa variabilidade, além de se minimizar seus efeitos na confiabilidade do sistema.

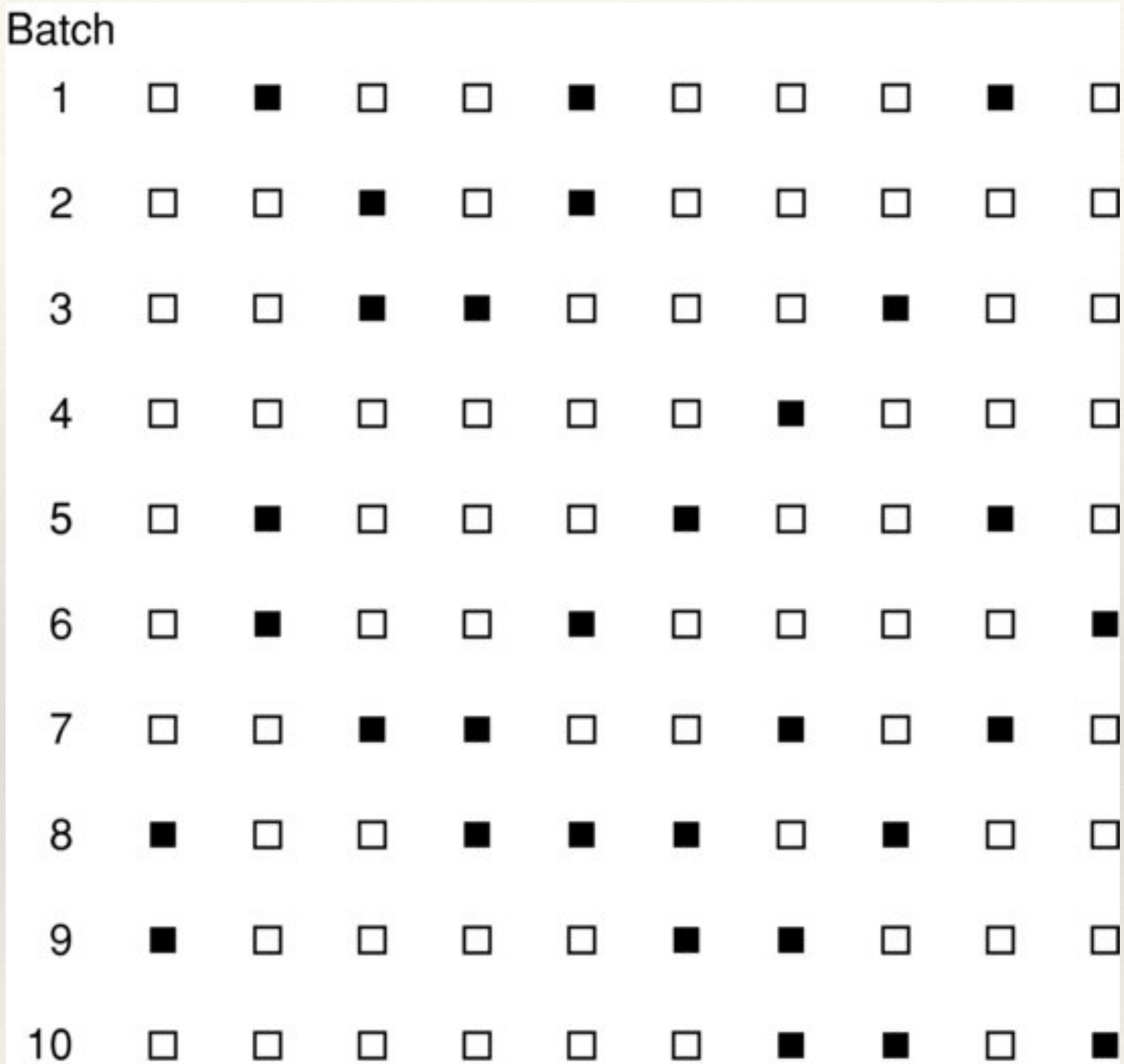
Conceitos de Probabilidade

- Todo evento possui uma probabilidade de ocorrência, que varia de 0 a 1.
  - Probabilidade 0 significa que o evento não irá ocorrer.
  - Probabilidade 1 significa que o evento irá ocorrer com certeza.

- Em alguns sistemas é possível se estimar a probabilidade de ocorrência de um dado evento com base em seus estados conhecidos:
    - Dado, moeda, roleta, etc.
- Para muitos outros sistemas, é necessário se estimar a probabilidade de ocorrência de um evento com base em observações obtidas por experiências passadas ou amostras.
    - Produtos e equipamentos.
        - Nestes casos só é possível se estimar efetivamente a probabilidade de ocorrência de um evento quando o número de amostras (testes) tende para infinito.

- Em um dado não-viciado, a probabilidade de se obter o número 2 em uma rolagem é 1/6.
- No teste de um produto, considerando a avaliação de 100 unidades, se 30 falharam, normalmente assume-se em um próximo teste que a probabilidade de se encontrar uma unidade defeituosa é de 0,30.
  - Deve-se tomar cuidado com esse tipo de "conclusão".

- Suponha que das 30 falhas, 7 ocorreram em um lote de 10 e foram tomadas medidas corretivas para evitar os problemas desse lote:
  - Neste caso é razoável assumir que a probabilidade de falha em um próximo teste será menor.
- Suponha que tenha havido algum desvio de produção nos lotes testados:
  - Neste caso a medida obtida deve estar distorcida da probabilidade real de falha.


Batch
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Regras de Probabilidade

- A probabilidade de ocorrência de um evento *A* é denotada por *P(A)*.
- A probabilidade de ocorrência conjunta de dois eventos *A* e *B* é denotada por *P(AB)*.
- A probabilidade de um evento *A* ou um evento *B* ocorrer é denotada por *P(A+B)*.
- A probabilidade condicional de *A* ocorrer dado que *B* ocorreu é denotada $P(A \mid B)$.
- A probabilidade do complemento (probabilidade de *A* não ocorrer) é denotada $P(\bar{A})=1-P(A)$.

- Se os eventos A e B são independentes:
  - $P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) = P(A)$.
  - $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A}) = P(B)$.
  - $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

- Se os eventos A e B são dependentes:
  - $P(AB) = P(A)\, P(B \mid A) = P(B)\, P(A \mid B).$

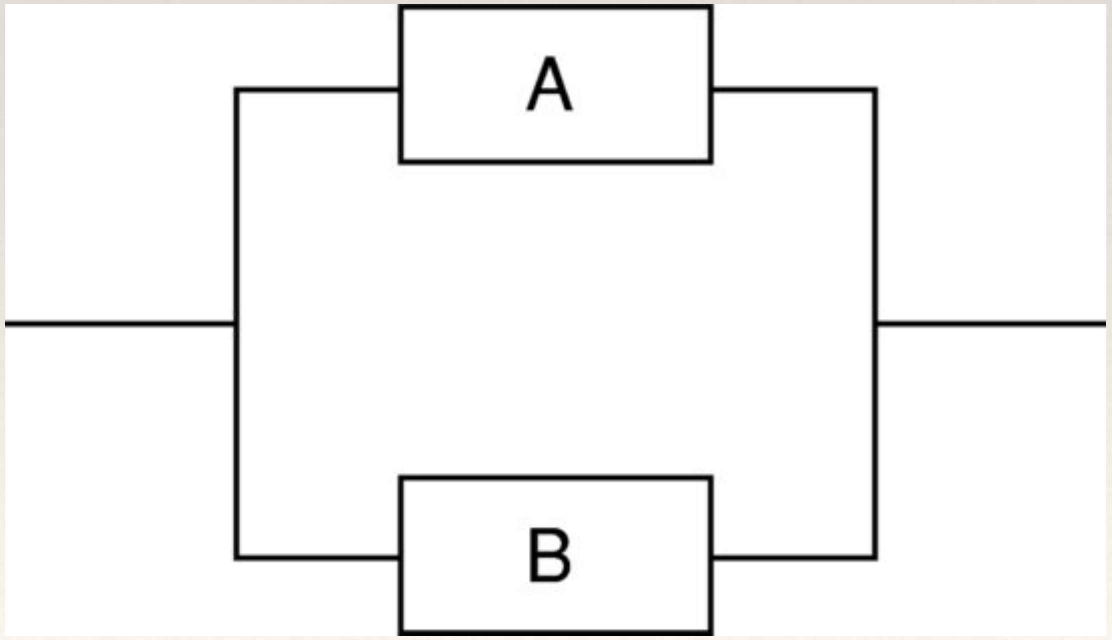
- A probabilidade de A ou B ocorrerem:
  - $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
  - Se os eventos A e B são independentes:
    - $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$.

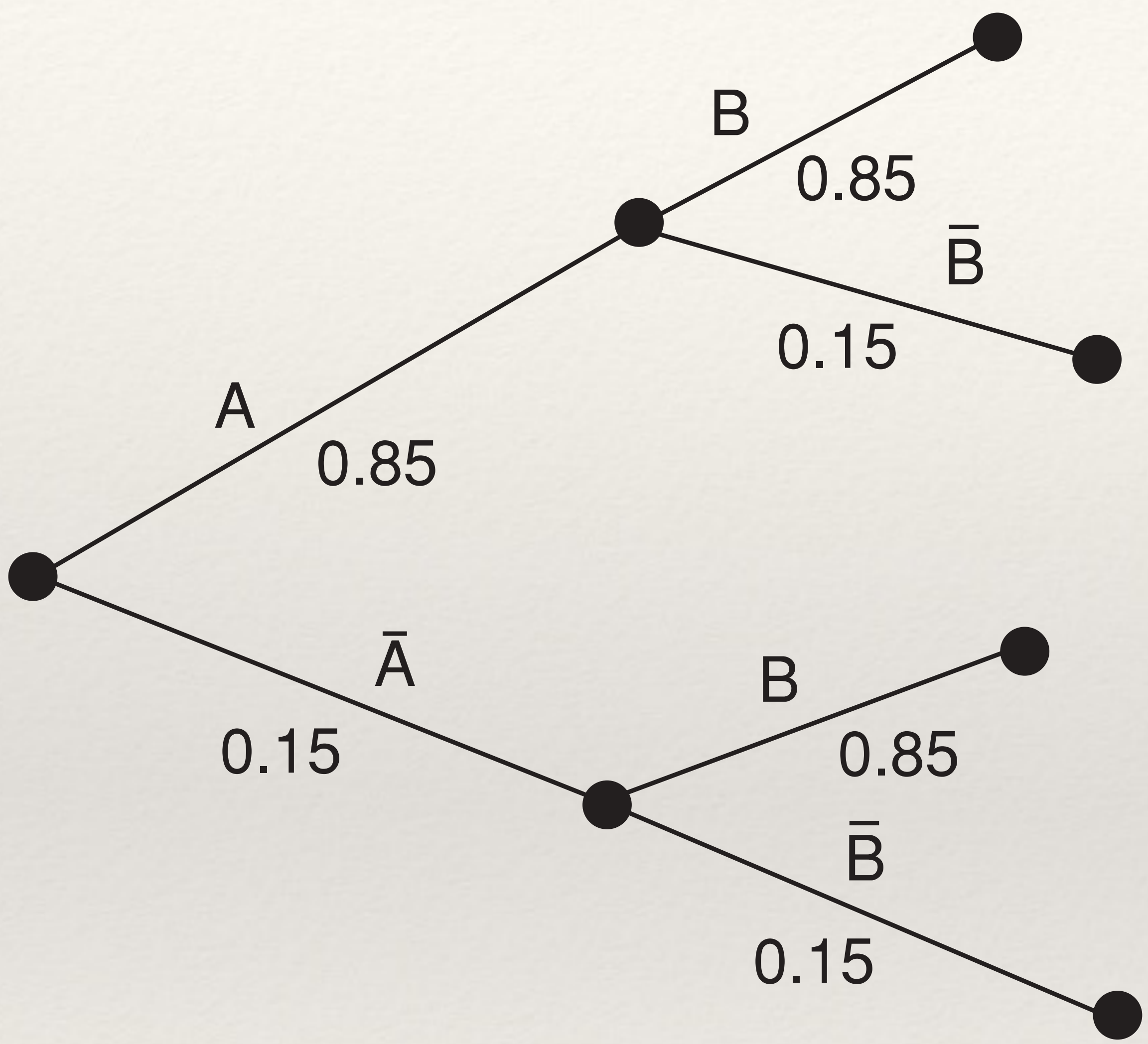
- Se os eventos A e B são mutuamente exclusivos, então A e B não podem ocorrer simultaneamente:
    - $P(AB) = 0$.
    - $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

- Teorema de Bayes:
  - $$P(A \mid B) = \frac{P(A)\, P(B \mid A)}{P(B)}.$$

Exercício 1

A probabilidade de acerto de um míssil é 0,85. Se dois mísseis forem lançados, qual a probabilidade de ao menos um míssil atingir o alvo?





$$P(\mathrm{AB}) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{B}) = 0.85\times 0.85 = 0.7225$$

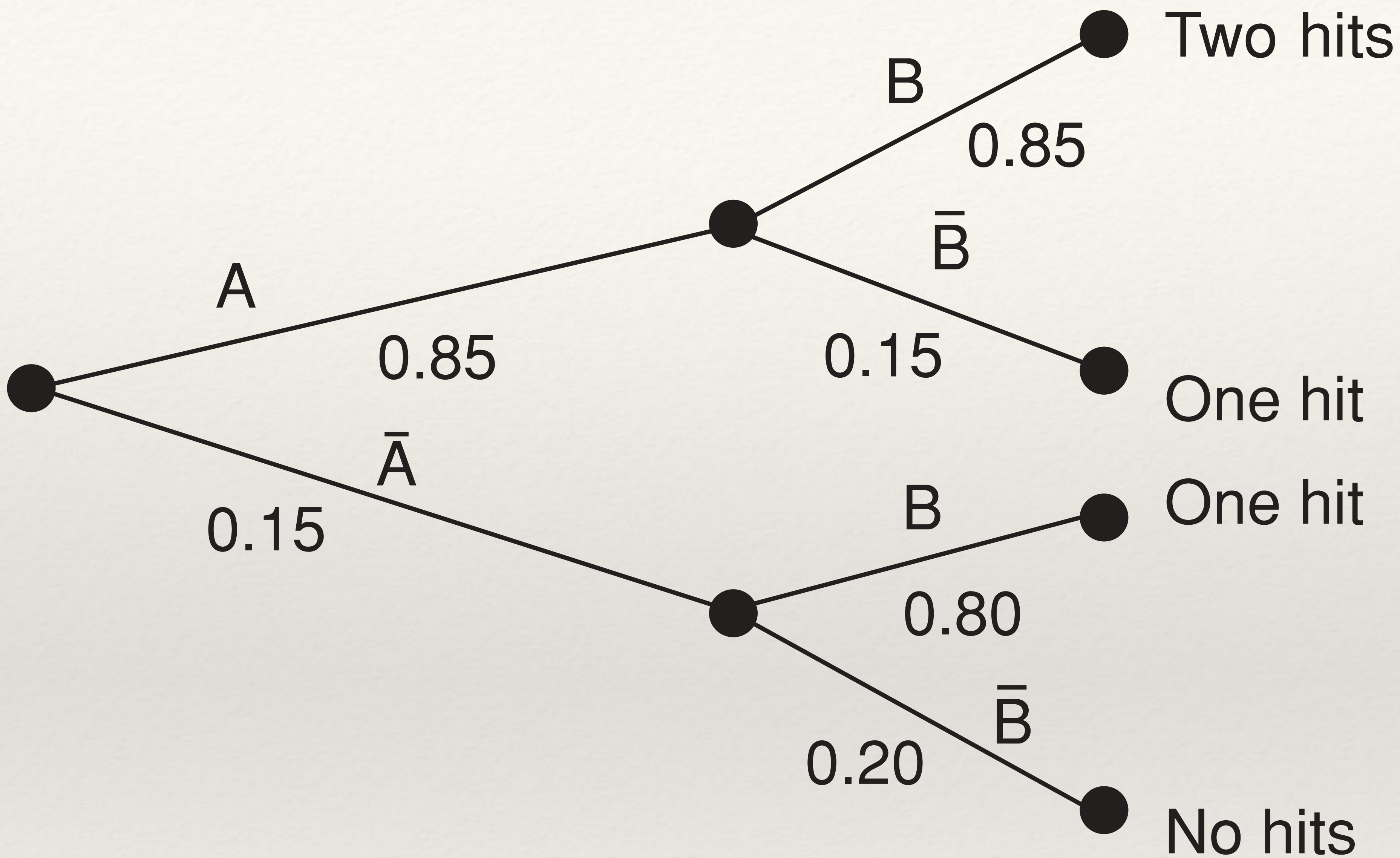
$$P(\mathrm{A\bar{B}}) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{\bar{B}}) = 0.85\times 0.15 = 0.1275$$

$$P(\mathrm{\bar{A}B}) = P(\mathrm{\bar{A}})P(\mathrm{B}) = 0.15\times 0.85 = 0.1275$$

$$P(\mathrm{\bar{A}\bar{B}}) = P(\mathrm{\bar{A}})P(\mathrm{\bar{B}}) = 0.15\times 0.15 = 0.0225$$

Exercício 2

- Considere agora que as probabilidades de acerto dos mísseis não são independentes:
  - Se o primeiro errar, então a probabilidade do segundo míssil errar é 0,20.
  - Caso o primeiro míssil acerte, a probabilidade de acerto do segundo permanece inalterada.
- Qual a probabilidade ao menos um míssil acertar?



Two hits
B
0.85
B̄
A
0.85
0.15
One hit
Ā
One hit
0.15
B
0.80
B̄
0.20
No hits

Estatística Básica, Inferência e Planejamento de Experimentos

Ferramentas Computacionais

- S-Plus e R.
- Matlab e Octave.
- Minitab.
- Prism.
- Excel e OpenOffice.
- etc...

CUIDADO COM O USO INADVERTIDO DE PACOTES COMPUTACIONAIS!!!

Erros Metodológicos Comuns

- Tendências pessoais (explícitas ou sutis).
- Conclusões prematuras.
- Confusão entre conceitos (hipótese x modelo).
- Busca por anomalias.
- Evidências anedóticas (anecdotal evidence).

Objetivos de Experimentos

- Determinar quais variáveis têm maior influência em um dado sistema ou processo.
- Determinar valores desejados para os parâmetros de um sistema com o objetivo de:
    - Obter valores desejados na saída.
    - Minimizar a variabilidade de saída.
    - Minimizar os efeitos de fatores externos.
- Caracterizar o comportamento do sistema ou processo sob estudo.

Planejamento do Experimento

- Planejamento do experimento:
  - Definir a questão técnica de interesse.
  - Selecionar os fatores e níveis.
  - Estimar o tamanho das amostras.
  - Determinar os protocolos de coleta de dados.

- Análise estatística de dados:
  - Definição do nível de confiança.
  - Definição e cálculo da estatística de teste.
  - Validação das premissas do modelo estatístico.
  - Cálculo do tamanho do efeitos.
  - Elaboração de conclusões e recomendações.

Métodos estatísticos não provam nada, mas eles permitem definir objetivamente margens plausíveis para certas afirmações.

Elaborando e Apresentando Conclusões

- Conclusões devem ser tomadas com base em evidências sólidas dos dados.
- Seja conservador: é comum exagerar na generalidade dos resultados.
- Relate os níveis de significância e as premissas sob as quais os resultados são válidos.
- Apresente justificativa para os resultados obtidos.
- Cuidado com busca por anomalias.

Medidas de Posição e Dispersão

Introdução

- As grandezas populacionais são grandezas pontuais (determinísticas) e se referem à toda a população de interesse.

$$\mu = E(y) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy \\ \\ \sum\limits_{all\ y} yp(y) \end{cases}$$

$$\sigma^2 = V(y) = E\left[(y-\mu)^2\right] = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2 f(y)\,dy \\ \\ \sum\limits_{all\ y} (y-\mu)^2 p(y) \end{cases}$$

- Em geral, o determinação exata das grandezas populacionais é impossível ou inviável.
- Nesses caso, a estimativa desses valores deve ser feita com base em amostras e um estimador amostral.
- Estimadores amostrais oferecem estimativas pontuais da grandeza de interesse (parâmetro real da distribuição).
- Como diferentes amostras levam a diferentes valores pontuais, então estes estimadores devem ser tratados como variáveis aleatórias.

- Exemplos de estimadores de posição:
  - Média amostral.
  - Mediana amostral.
  - Moda amostral.
- Exemplos de estimadores de dispersão:
  - Desvio padrão amostral.
  - Variância amostral.

- Propriedades desejáveis do estimador:
  - Estimador de máxima verossimilhança (maximum likelihood).
    - Não-polarizado.
    - Mínima variância.

Média e Variância Amostral

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

- Média e variância amostral são estimadores de máxima verossimilhança das grandezas populacionais correspondentes.
- Essas estimativas são calculadas com base em um número de fontes independentes de variação.
- As fontes independentes de variação disponíveis no cálculo de uma dada estatística são conhecidas como graus de liberdade.

Modelos de Distribuição

Introdução

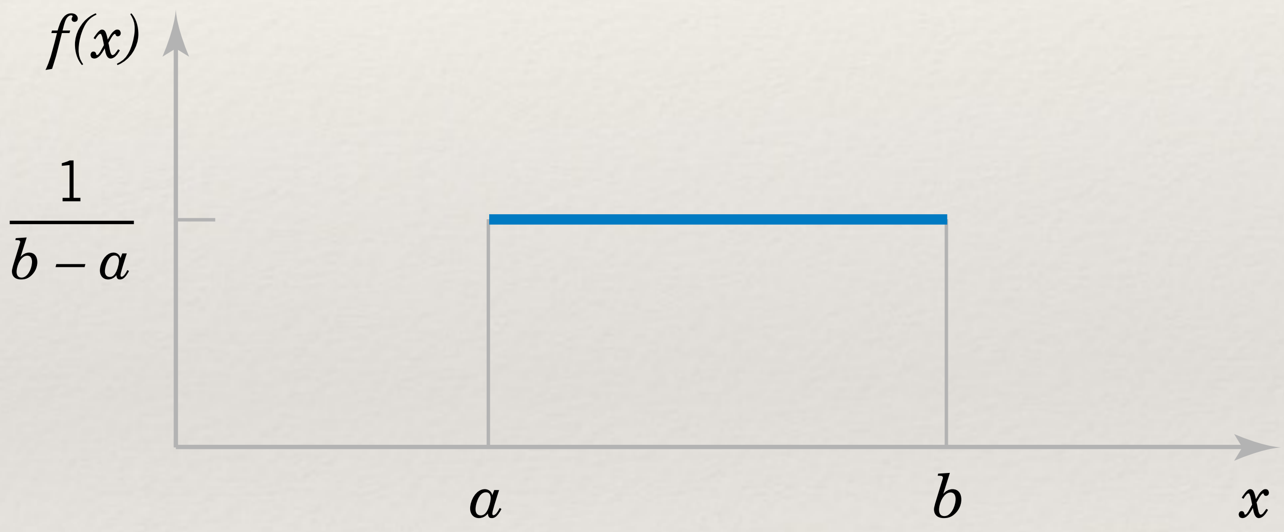
- O resultado de um experimento é, em geral, uma variável aleatória.
- Essa variável pode ser contínua ou discreta.
- Em alguns casos é possível ajustar um modelo de probabilidade (distribuição) que descreve a variável aleatória de forma satisfatória.
    - Estatística paramétrica X Estatística não-paramétrica.

Distribuição Uniforme

$$f(x) = 1/(b - a), \qquad a \le x \le b$$

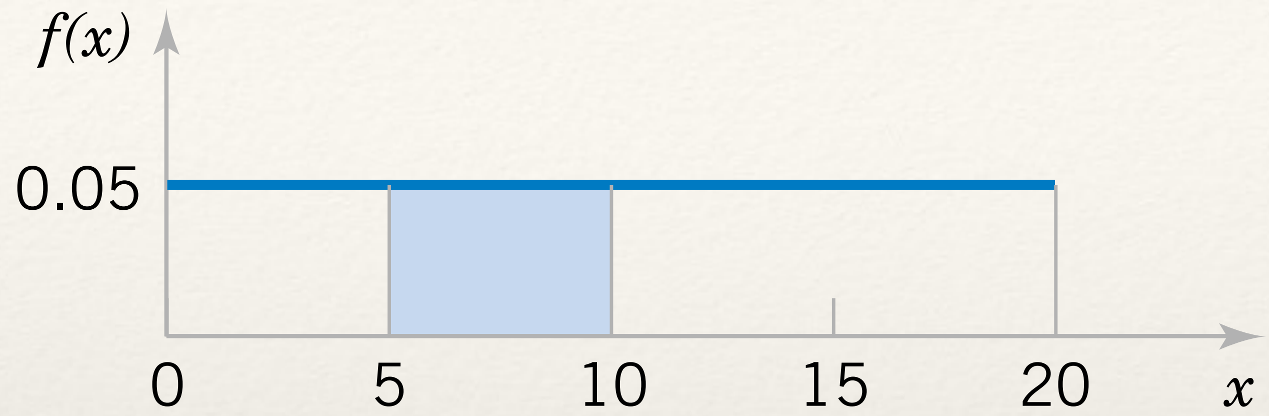
$$\mu = E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Exemplo

Suponha que a corrente em um condutor pode ser modelada por uma variável aleatória uniforme X, cujos limites são 0 e $20mA$. Qual a probabilidade de ser medida uma corrente entre 5 e $10mA$?



$$P(5 < X < 10) = \int_{5}^{10} f(x)\,dx$$

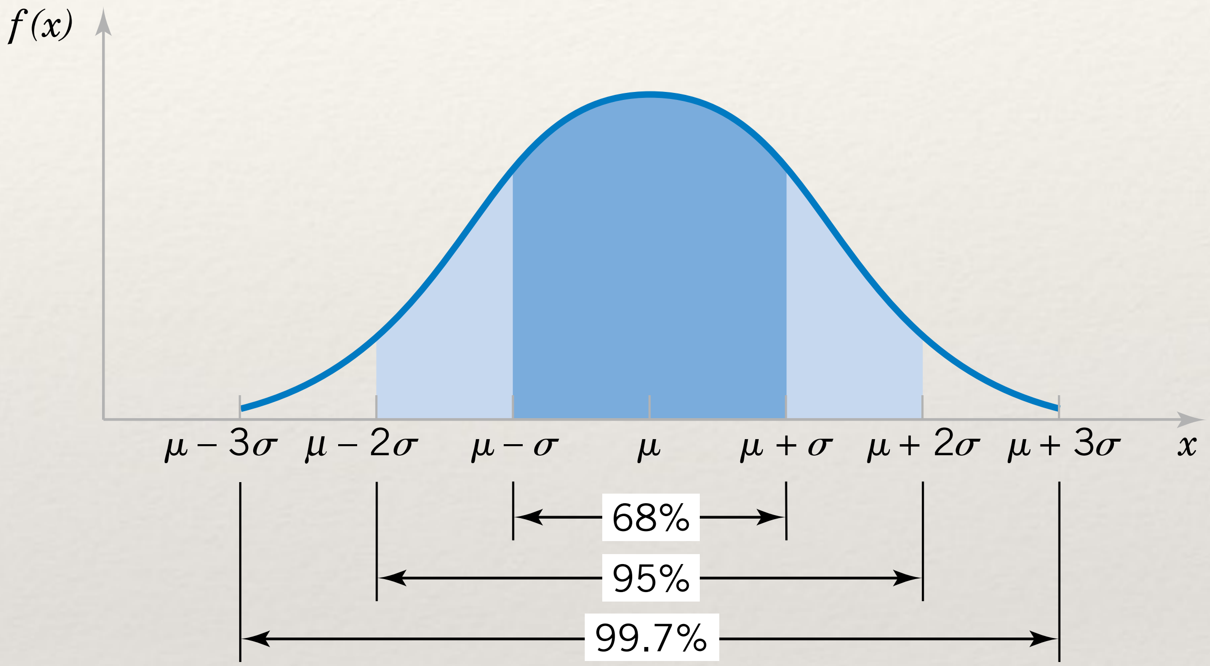
$$= 5(0.05) = 0.25$$

Distribuição Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$



$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Variável Normal Padrão

$$\mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$E(X) = \mu \text{ and } V(X) = \sigma^2,$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

① $P(Z>1,26)$

② $P(Z<-0.86)$

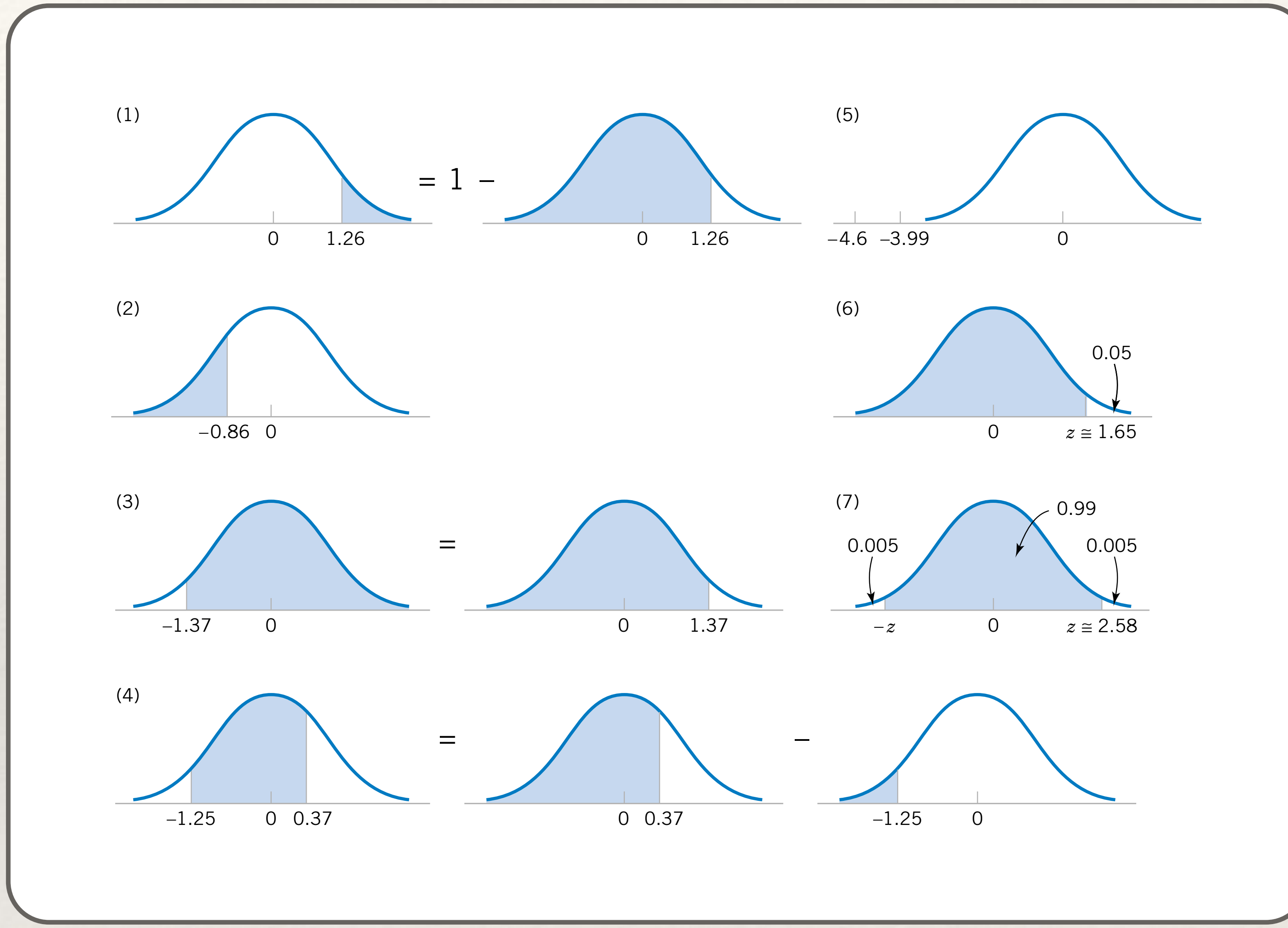
③ $P(Z<-1.37)$

④ $P(-1.25<Z<0.37)$

⑤ $P(Z<-4.6)$

⑥ $P(Z>z)=0,05$

⑦ $P(-z<Z<z)=0,99$



Teorema do Limite Central (TLC)

Sejam {X1, X2, X3, ..., Xn} n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com média μ e variância σ2>0, ambas finitas. A variável aleatória:

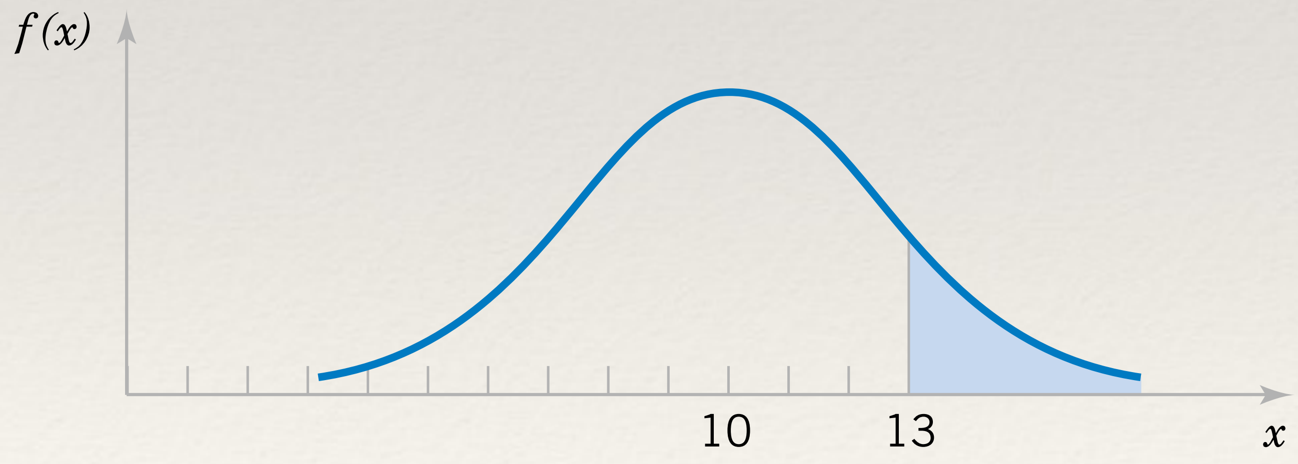
$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge para uma distribuição normal padrão.

- O TLC é é valido para amostras grandes e para qualquer soma de variáveis i.i.d..
  - Normalmente aceito quando $n>30$.
- Com isso, o estimador média amostral converge para uma distribuição normal de média μ e variância σ^2/n.
- Amostras menores são necessárias quando as distribuições de interesse são normais ou simétricas.

Exemplo

Suponha que a corrente em um condutor pode ser modelada por uma variável aleatória normal X, com média $10mA$ e variância $4mA^2$. Qual a probabilidade de ser medida uma corrente maior que $13mA$?



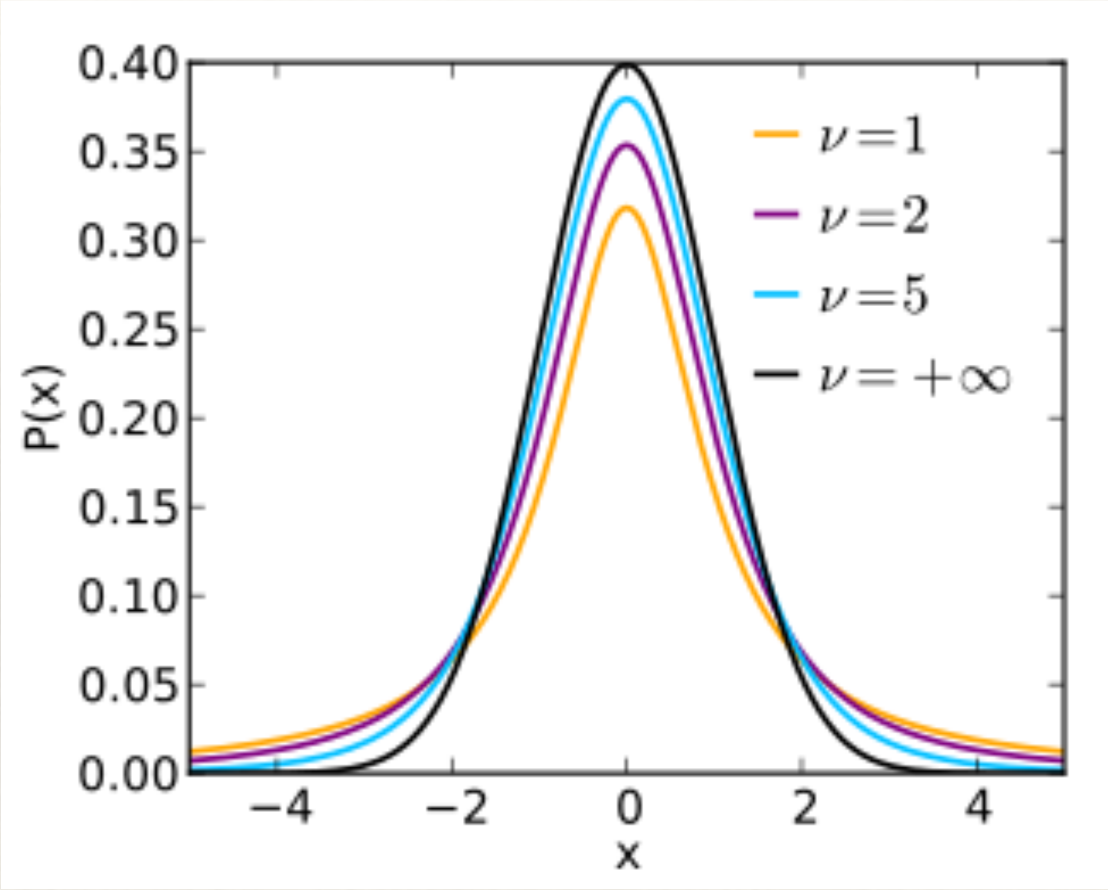
$$P(X > 13) = P\left(\frac{(X - 10)}{2} > \frac{(13 - 10)}{2}\right) = P(Z > 1.5) = 0.06681$$

$$P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$$

Distribuição T de Student

$$f(t,v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

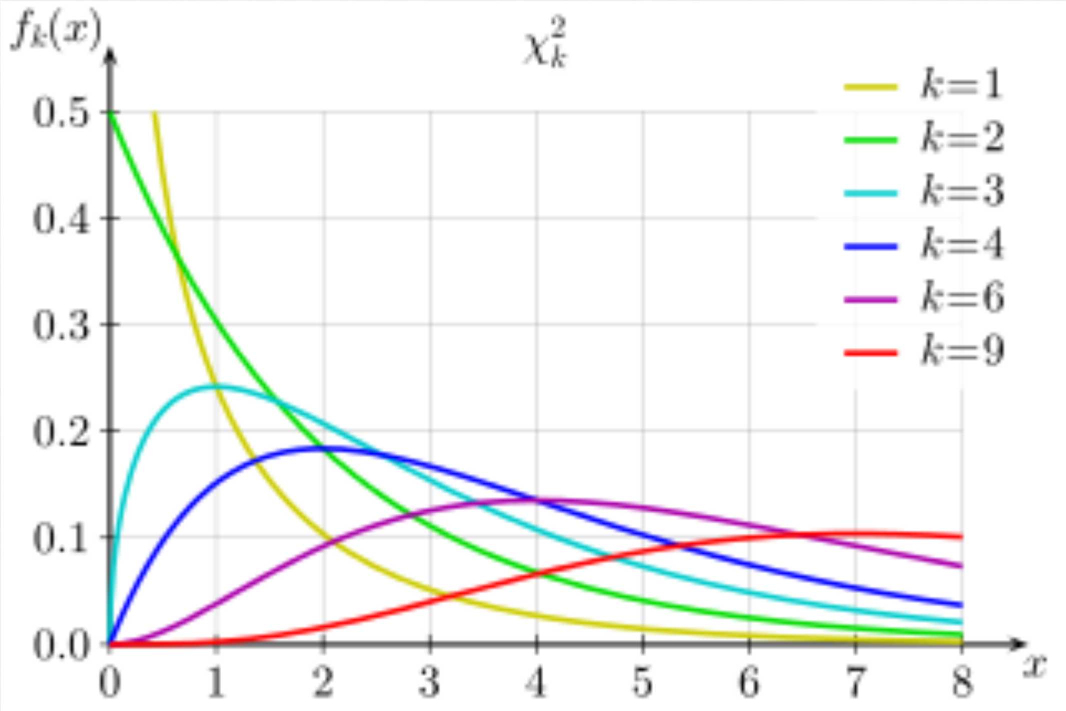
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$



- Tem comportamento similar à distribuição normal, mas é mais conservadora.
    - A distribuição T de Student se aproxima da normal com o aumento do número de graus de liberdade (v).
- Tem grande relevância em análises estatísticas:
    - Inferência estatística.
    - Derivação de intervalos de confiança.
    - Análise de regressões.
- Muito utilizada para inferir sobre populações normais quando a variância não é conhecida.

Distribuição Chi-Quadrado (χ2)

$$f(x,k) = \begin{cases} \dfrac{x^{(k/2-1)}\epsilon^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$



Sejam $Z_1, \ldots, Z_k$ variáveis normais e independentes. A soma dos seus quadrados:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

é distribuída de acordo com uma distribuição $\chi 2$ com k graus de liberdade.

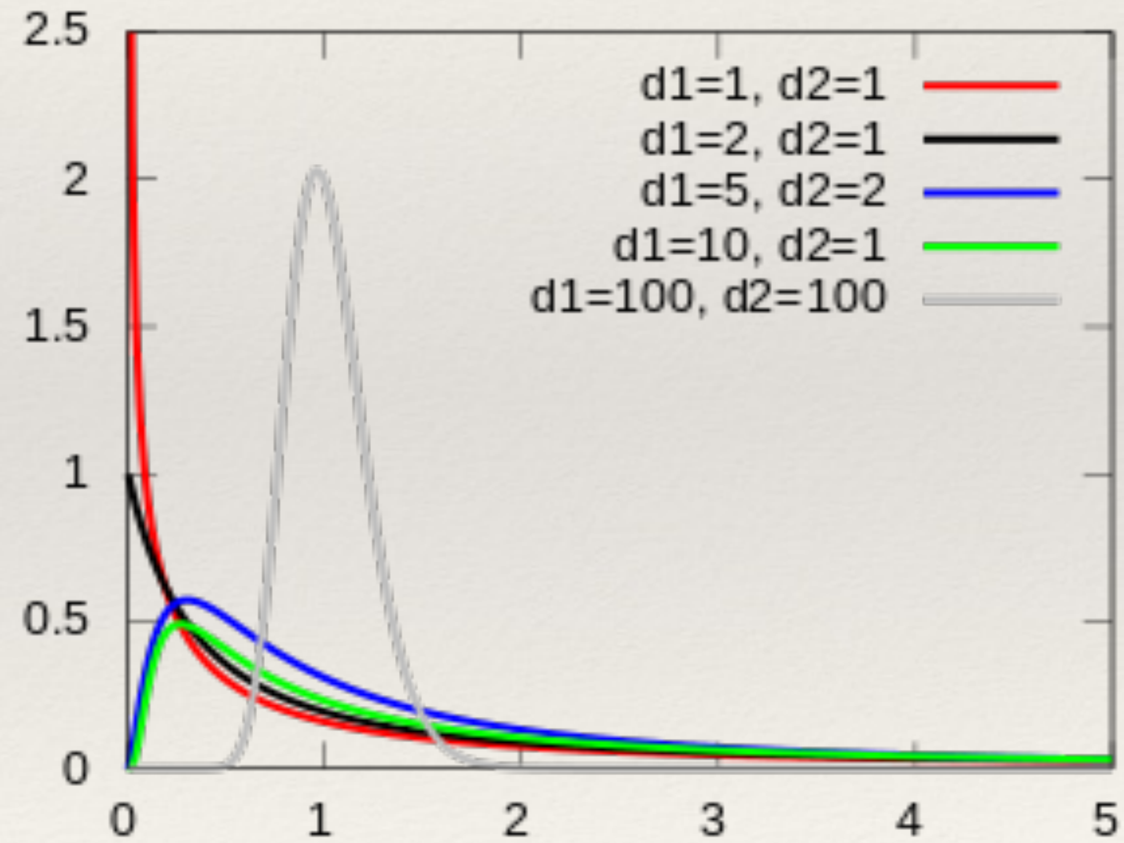
- O estimador variância amostral converge para uma distribuição $\chi 2$.

Distribuição F

- Sejam *U1* e *U2* variáveis aleatórias $\chi 2$ independentes:

$$X = \frac{U_1/d_1}{U_2/d_2} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$$

$$f(x, d_1, d_2) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{x B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$



Distribuição que descreve a diferença entre as variâncias de duas populações normais.

- Distribuição utilizada no ANOVA.

Testes de Hipóteses

Introdução

- Uma hipótese é uma explicação proposta para explicar um fenômeno observável.
- Hipóteses estatísticas são definidas como afirmações objetivas sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

A afirmação de uma hipótese estatística se refere à parâmetros da população e não da amostra.

- Na abordagem frequentista (mais comum) são definidas duas hipóteses: nula e alternativa.
- Hipótese nula:
  - Ausência de efeitos.
  - Hipótese conservadora.
- Hipótese alternativa:
  - Presença de algum efeito.
  - Existência de algo "novo".

- Os testes de hipóteses envolvem:
  - Obter a amostra.
  - Calcular a estatística de teste.
  - Tomar uma decisão com base no valor computado.

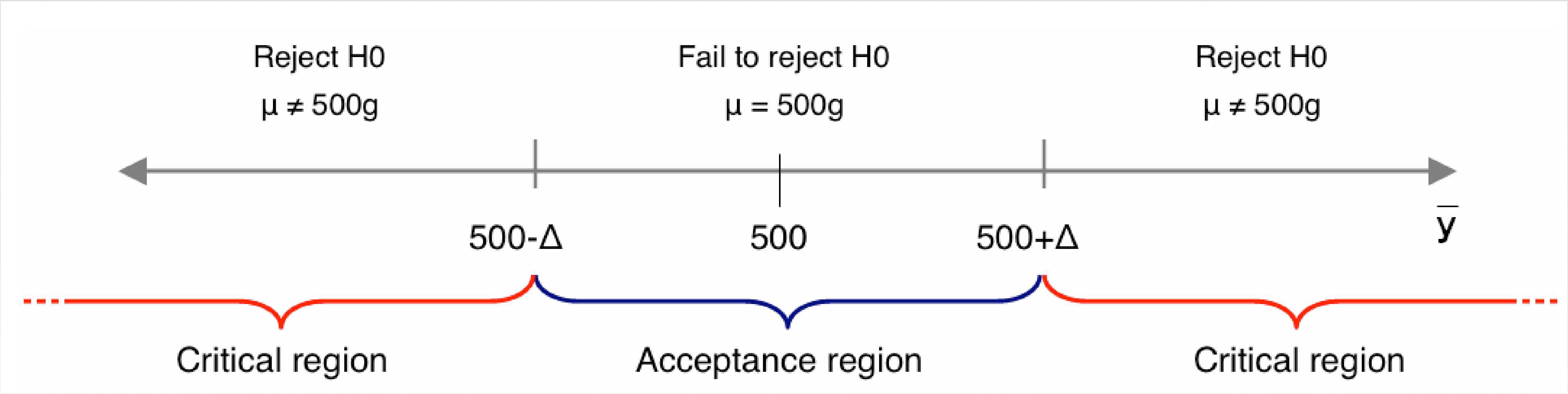
Exemplo

- Suponha que um grande cliente de ervilhas verdes deseja determinar se as embalagens de 500g de um de seus fornecedores realmente contém o peso nominal declarado.

- Hipóteses:
  - Nula: o peso médio das embalagens é 500g.
  - Alternativa: o peso médio das embalagens difere de 500g.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 500g \\ H_1 : \mu \neq 500g \end{cases}$$

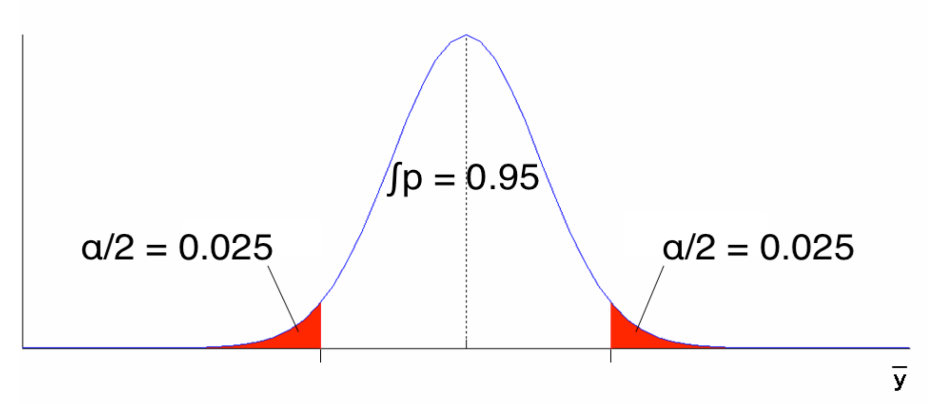
- Utiliza-se a média amostral como estimador para a média populacional:
  - A média populacional próxima de 500g corrobora com a hipótese nula.
  - A média populacional distinta de 500g refuta a hipótese nula.



Erro Tipo I

- Erro tipo I (falso positivo): rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira.
- O Erro de Tipo I é geralmente chamada de nível de significância.

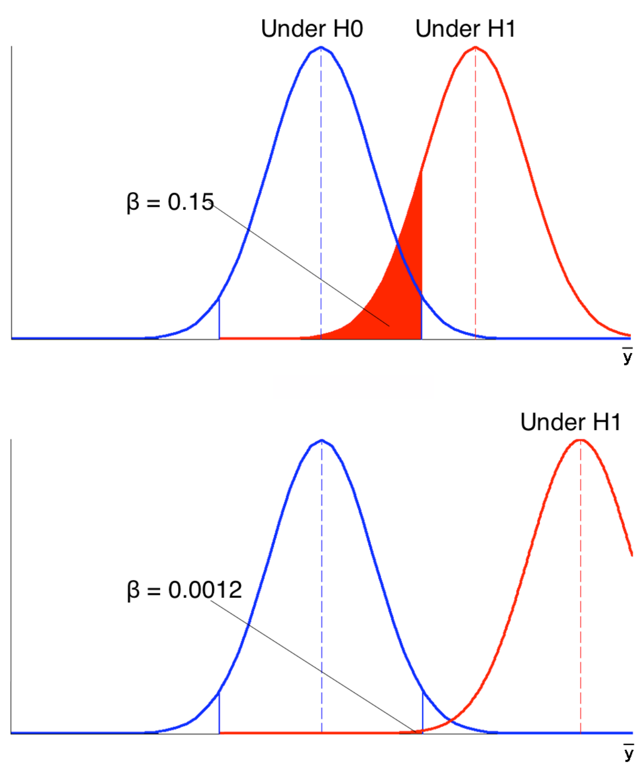
$$\alpha = P(\text{type I error}) = P(\text{reject } H_0 | H_0 \text{ is true})$$



Erro Tipo II

- Erro tipo II (falso negativo): falhar em rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa.

$$\beta = P(\text{type II error}) = P(\text{not reject } H_0 | H_0 \text{ is false})$$



Outras grandezas relacionadas:

- Nível de confiança do teste: (1-α).
- Potência do teste: (1-β).

Considerações adicionais:

- Erro Tipo I (α): depende apenas da distribuição da hipótese nula (fácil controle).
- Erro Tipo II (β): depende do valor real do parâmetro (mais difícil de especificar e controlar).

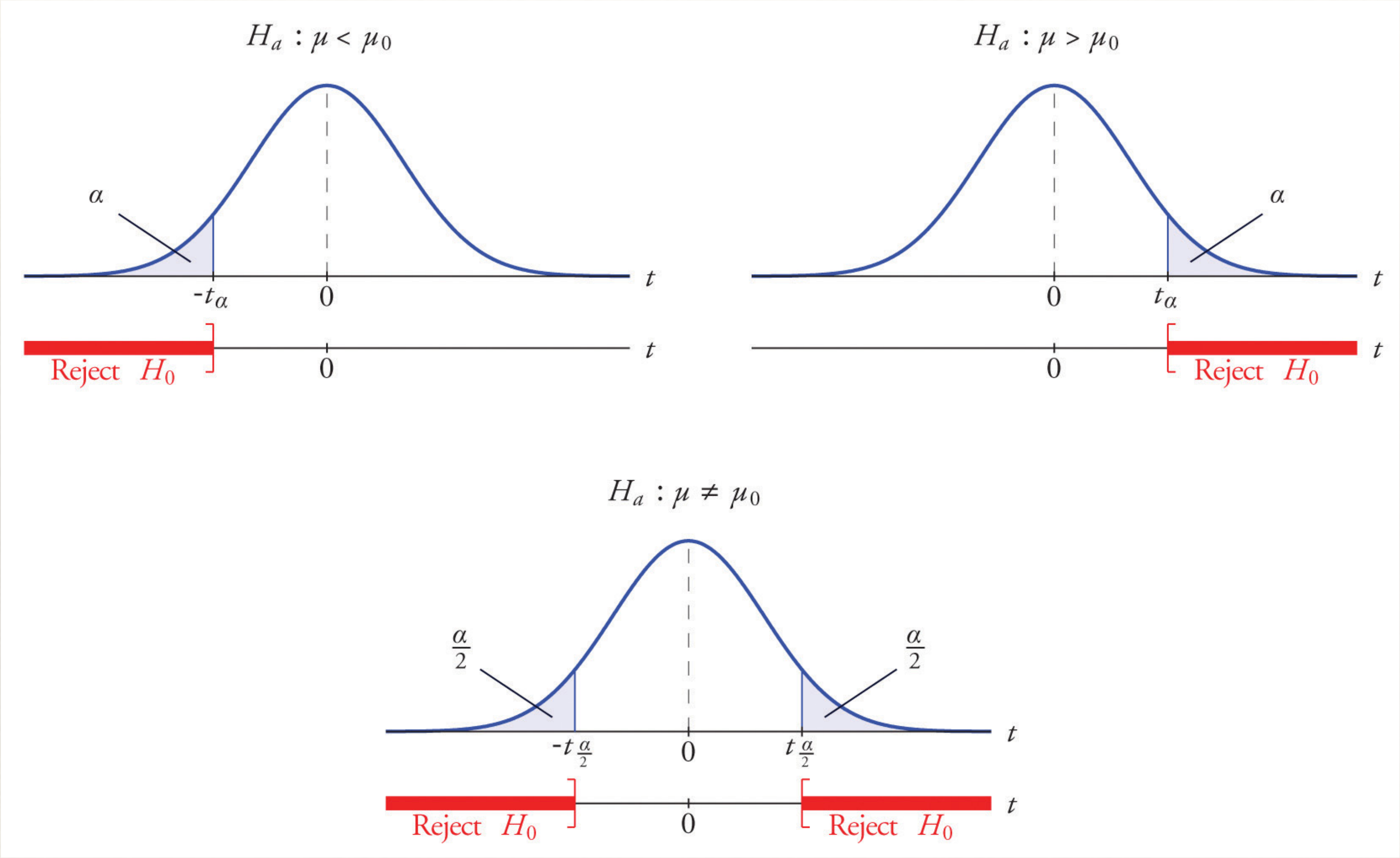
Com isso:

- Rejeitar a hipótese nula: conclusão forte.
- Falhar em rejeitar a hipótese nula: conclusão fraca.

Procedimento Geral

- Identificar o parâmetro de interesse.
- Definir H0.
- Definir H1 (unilateral ou bilateral).
- Determinar α,β.
- Definir o mínimo tamanho de efeito relevante δ.
- Calcular o tamanho da amostra.
- Determinar a estatística de teste.
- Determinar a região crítica.
- Computar a estatística de teste.
- Decidir pela rejeição (ou não) de H0.

Interpretação do Teste de Hipóteses



Teste T - Uma Amostra

Teste unilateral/bilateral utilizado para testar a igualdade da média de uma variável aleatória que segue distribuição normal e um valor especificado.

Null hypothesis: $H_0\colon \mu = \mu_0$

Test statistic: $T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Alternative hypothesis	Rejection criteria
$H_1\colon \mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
$H_1\colon \mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
$H_1\colon \mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

Teste T - Duas Amostras

Teste unilateral/bilateral utilizado para testar a igualdade entre as médias de duas variáveis aleatórias independentes, que seguem distribuição normal e têm variâncias iguais.

Null hypothesis: $H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Test statistic: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

Alternative Hypothesis	Rejection Criterion
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$
$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Teste T de Welch

Teste unilateral/bilateral utilizado para testar a igualdade entre as média de duas variáveis aleatórias independentes, que seguem distribuição normal.

- Não depende de igualdade das variâncias.
- A diferença entre as variâncias é compensada pela redução do número de graus de liberdade.

$$T_0^* = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Teste F - Duas Amostras

Teste unilateral/bilateral utilizado para testar a igualdade entre as variâncias de duas variáveis aleatórias independentes, que seguem distribuição normal.

Null hypothesis: $H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test statistic: $F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

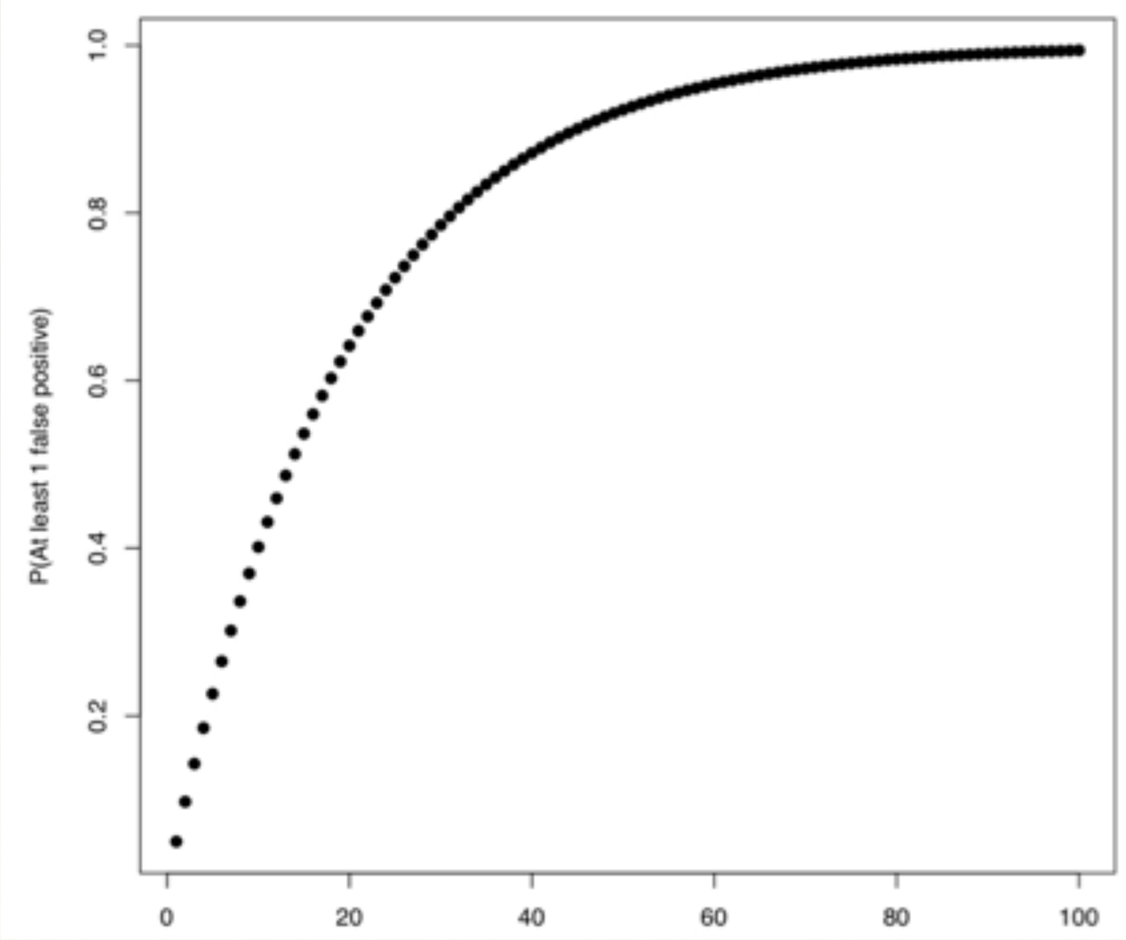
Alternative Hypotheses	**Rejection Criterion**
$H_1\colon \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ or $f_0 < f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$
$H_1\colon \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$
$H_1\colon \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f_0 < f_{1-\alpha,\, n_1-1,n_2-1}$

Outros Testes para Igualdade de Variâncias

- Teste de Chi-quadrado.
- Teste de Homogeneidade das variâncias.
- Teste de Levene.
- Teste de Bartlett.
- Etc…

Testando Múltiplas Amostras

- Testes em pares:
  - A significância de cada teste deve ser corrigida.
  - O uso da significância especificada em cada teste leva a uma probabilidade de Erro Tipo I muito superior à especificada.



Exemplos de métodos de correção de significância:

- Correção de Bonferroni.
- Correção de Holm-Bonferroni.
- Limite de Boole-Bonferroni.
- Correção de Sidak.
- Correção de Benjamini Hochberg (FDR).
- Teste de Tukey.
- Teste de Fischer (LSD).
- Etc…

One Way ANOVA

Introdução

Teste unilateral utilizado para testar a igualdade entre as médias de duas ou mais variáveis aleatórias independentes, que seguem distribuição normal e têm variâncias iguais.

- Usa a distribuição F.
- Muito utilizado em planejamento de experimentos de um fator.

Exemplo Motivador

Um fabricante de sacos de papel está interessado em aumentar a resistência de seus produtos. Os engenheiros da empresa acreditam que a resistência é função da concentração de madeira rígida na fabricação do papel, e consideram viáveis concentrações entre 5% e 20%. Com isso, eles decidiram realizar um experimento avaliando concentrações de 5%, 10%, 15% e 20%, com 6 amostras por concentração. Alguma dessas concentrações se destaca com respeito a resistência?

Hardwood	Observations							
Concentration (%)	1	2	3	4	5	6	Totals	Averages
5	7	8	15	11	9	10	60	10.00
10	12	17	13	18	19	15	94	15.67
15	14	18	19	17	16	18	102	17.00
20	19	25	22	23	18	20	127	21.17
							383	15.96

Análise de Variâncias

- Sejam a tratamentos (níveis de observação do fator de interesse) e n amostras por tratamento:

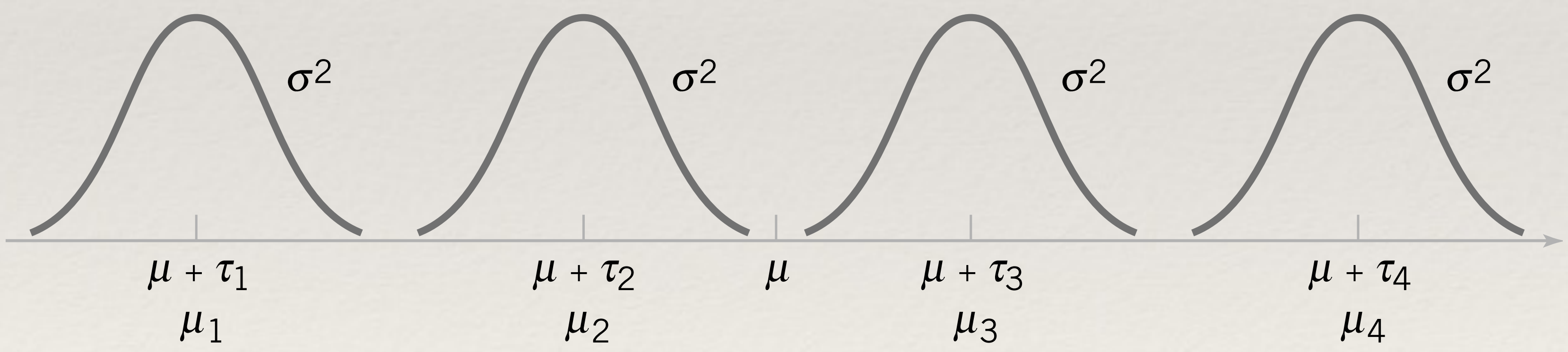
Treatment	Observations				Totals	Averages
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\vdots\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an}	$y_{a\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
					$y_{\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

- As observações podem ser representadas por meio de um modelo estatístico linear:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

  - Y_{ij} é uma variável aleatória que representa a (ij)-ésima observação.
  - μ é a média geral das observações.
  - τ_i é a média do i-ésimo tratamento (efeito do tratamento).
  - ϵ_{ij} é a componente de erro aleatório.

- Nesse modelo, cada tratamento define uma população de média $\mu_i = \mu + \tau_i$.
- Assumindo que os erros (resíduos) ϵ têm distribuição normal de média 0 e variância σ^2, cada população (tratamento) é uma população normal de média μ_i e variância σ^2.



- Em geral, os efeitos dos tratamentos são modelados como desvios da média geral μ:

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

- Definindo os totais por tratamento, total geral e suas respectivas médias:

$$y_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{i\cdot} = y_{i\cdot}/n \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$y_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{\cdot\cdot} = y_{\cdot\cdot}/N$$

onde $N = an$.

- O objeto de interesse nesse caso é testar a igualdade entre os tratamentos:

$$H_0\colon \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$H_1\colon \tau_i \neq 0 \quad \text{for at least one } i$$

- Logo, se a hipótese nula é verdadeira, então cada observação é constituída pela soma da média geral (μ) e a respectiva componente de erro (ϵ_{ij}).
- Isso equivale dizer que todas as observações foram obtidas de uma distribuição normal de média μ e variância σ^2.
  - Sob a hipótese nula, os fatores não têm efeito na resposta.

- O ANOVA particiona a variabilidade dos dados em duas partes.
- O teste de hipóteses proposto é feito com base em duas estimativas independentes da variância populacional.
- A variabilidade total é descrita pela soma total dos quadrados:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}..)^2$$

A soma total dos quadrados é particionada como:

$$SS_T = SS_{\text{Treatments}} + SS_E$$

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

Valor esperado das somas dos quadrados:

$$E(SS_{\text{Treatments}}) = (a-1)\sigma^2 + n \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2$$

$$E(SS_E) = a(n-1)\sigma^2$$

Os graus de liberdade também são particionados:

- Como existem *an* amostras, *SST* possui *an-1* graus de liberdade.
- Como existem *a* tratamentos, *SSTreatments* possui *a-1* graus de liberdade.

$$an - 1 = \overbrace{\boxed{a - 1}}^{SS_{Treatments}} + \underbrace{\boxed{a(n - 1)}}_{SS_E}$$

- A razão:

$$MS_{\text{Treatments}} = SS_{\text{Treatments}}/(a - 1)$$

é chamada quadrado médio dos tratamentos.

- Se a hipótese nula é verdadeira, então MSTreatments é um estimador não polarizado de σ^2, uma vez que os efeitos dos tratamentos são nulos.
- Por outro lado, se a hipótese nula é falsa, então MSTreatments estima σ^2 acrescida de um termo positivo que representa a diferença entre as médias dos tratamentos.

- Já a razão:

$$MS_E = SS_E/[a(n-1)]$$

é um estimador não polarizado de σ^2 independentemente da validade da hipótese nula.

- É possível demonstrar que *MSTreatments* e *MSE* são independentes.
- Com isso, se a hipótese nula é verdadeira, então a razão

$$F_0 = \frac{SS_{\text{Treatments}}/(a-1)}{SS_E/[a(n-1)]} = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$$

segue uma distribuição F com *a-1* e *a(n-1)* graus de liberdade, para o numerador e denominador respectivamente).

- Analisando a estatística de teste, é possível notar que:
- Se a hipótese nula é verdadeira, então *MSTreatments* também é um estimador não polarizado de σ^2.
- Por outro lado, se a hipótese nula é falsa, o *MSTreatments* cresce e, consequentemente a razão também cresce.
- Logo, a hipótese nula é rejeitada se a estatística é grande.
  - Teste de unilateral, do tipo >.

- H0 é rejeitada se: $f_0 > f_{\alpha, a-1, a(n-1)}$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Treatments}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\cdot}^2}{n} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{N}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$$

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Treatments	$SS_{\text{Treatments}}$	$a - 1$	$MS_{\text{Treatments}}$	$\frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Error	SS_E	$a(n - 1)$	MS_E	
Total	SS_T	$an - 1$		

Premissas

- Os resíduos (erros) seguem distribuição normal.
- A amostras são independentes.
- As variâncias das populações são iguais.
- As amostras de cada grupo (tratamento) são i.i.d..

Intervalos de Confiança

Tratamentos:

$$\bar{y}_{i\cdot} - t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{MS_E}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{y}_{i\cdot} + t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

Diferenças:

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} - t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{2MS_E}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} + t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}$$

No Exemplo Motivador

$$
\begin{aligned}
SS_T &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \\
&= (7)^2 + (8)^2 + \cdots + (20)^2 - \frac{(383)^2}{24} = 512.96 \\
SS_{\text{Treatments}} &= \sum_{i=1}^{4} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} \\
&= \frac{(60)^2 + (94)^2 + (102)^2 + (127)^2}{6} - \frac{(383)^2}{24} = 382.79 \\
SS_E &= SS_T - SS_{\text{Treatments}} \\
&= 512.96 - 382.79 = 130.17
\end{aligned}
$$

$$P = P(F_{3,20} > 19.60) \simeq 3.59 \times 10^{-6}$$

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	f_0	P-value
Hardwood concentration	382.79	3	127.60	19.60	3.59 E-6
Error	130.17	20	6.51		
Total	512.96	23			

Comparações Múltiplas Pós ANOVA

- A rejeição da hipótese nula do ANOVA indica que ao menos um tratamento tem média significativamente diferente dos outros.
- Logo, se faz necessário identificar quais diferenças são realmente significativas.
- Deve ser utilizado um método de Comparações Múltiplas para tal finalidade.

Método LSD de Fischer

- São comparados todos os pares de médias, sob a hipótese nula H0 : $\mu_i = \mu_j$, usando a estatística de teste T.

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\sqrt{\dfrac{2MS_E}{n}}}$$

$$|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > \text{LSD}$$

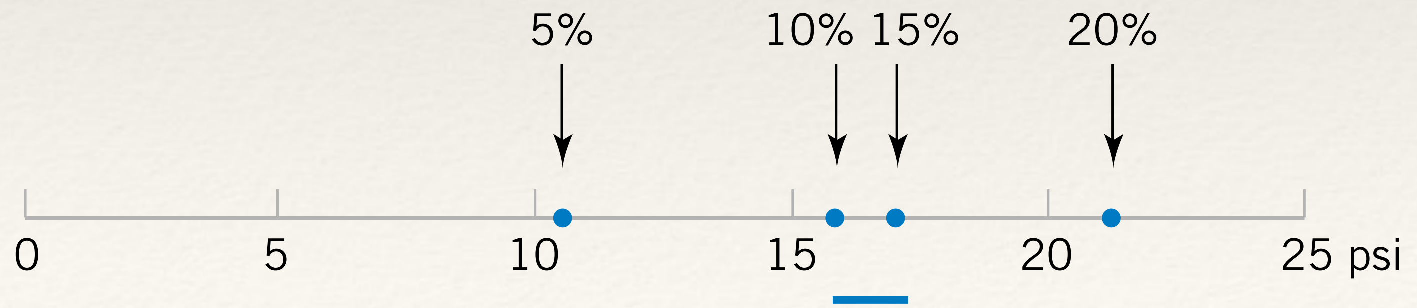
$$\text{LSD} = t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}$$

No Exemplo Motivador

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1\cdot} &= 10.00 \text{ psi}\\ \bar{y}_{2\cdot} &= 15.67 \text{ psi}\\ \bar{y}_{3\cdot} &= 17.00 \text{ psi}\\ \bar{y}_{4\cdot} &= 21.17 \text{ psi}\end{aligned}$$

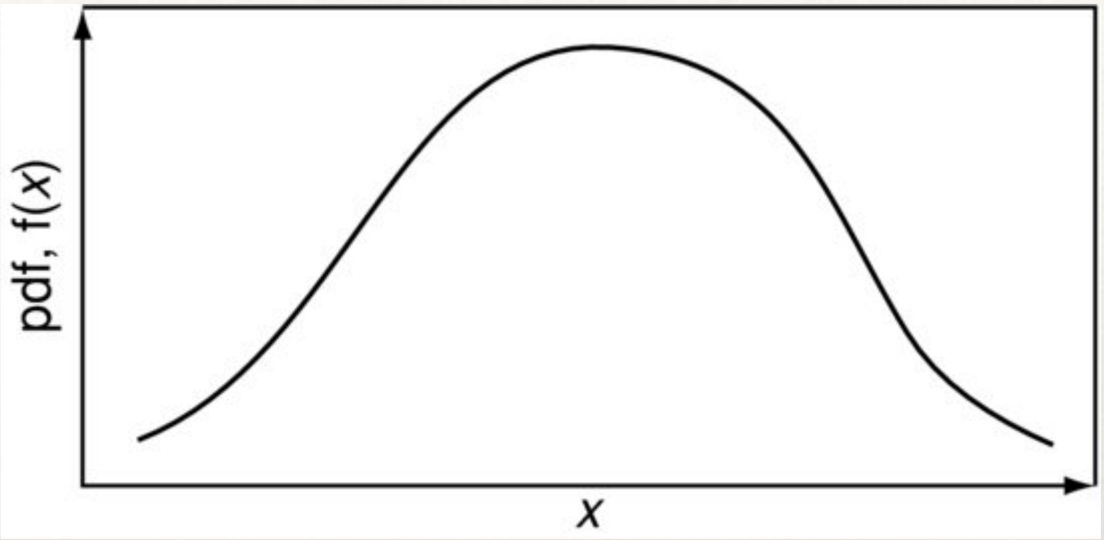
$$\text{LSD} = t_{0.025,20}\sqrt{2MS_E/n} = 2.086\sqrt{2(6.51)/6} = 3.07.$$

$$\begin{aligned}4 \text{ vs. } 1 &= 21.17 - 10.00 = 11.17 > 3.07\\ 4 \text{ vs. } 2 &= 21.17 - 15.67 = 5.50 > 3.07\\ 4 \text{ vs. } 3 &= 21.17 - 17.00 = 4.17 > 3.07\\ 3 \text{ vs. } 1 &= 17.00 - 10.00 = 7.00 > 3.07\\ 3 \text{ vs. } 2 &= 17.00 - 15.67 = 1.33 < 3.07\\ 2 \text{ vs. } 1 &= 15.67 - 10.00 = 5.67 > 3.07\end{aligned}$$



Estatística em Confiabilidade de Sistemas

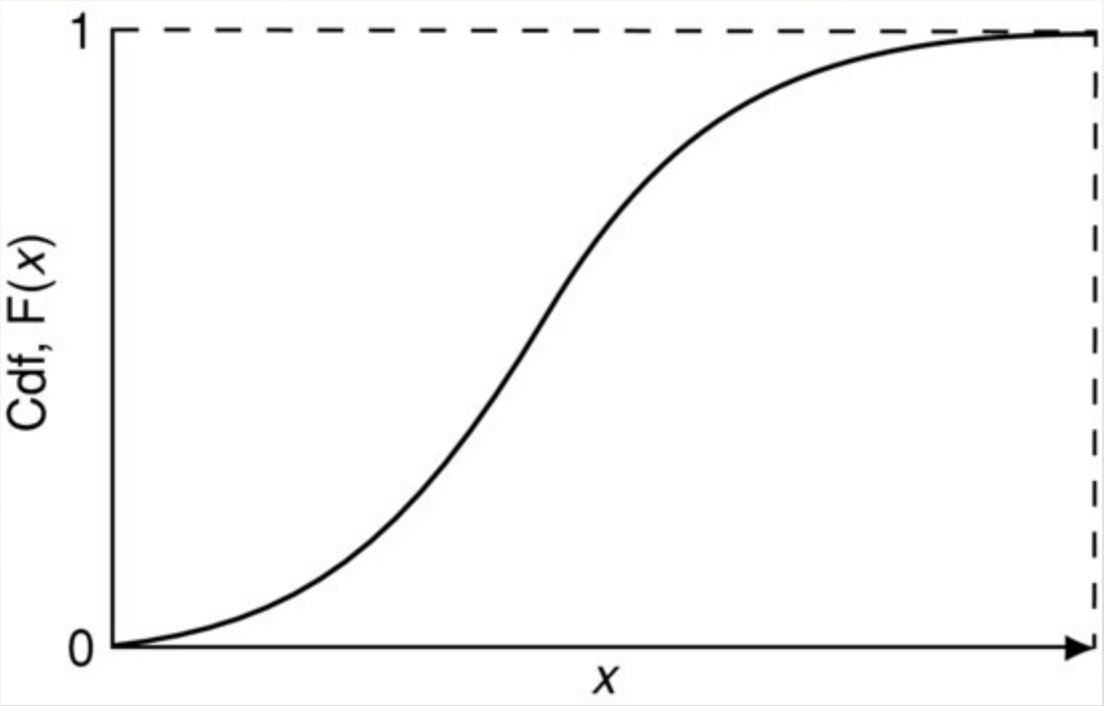
Função de Distribuição de Probabilidade (PDF)



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Função de Distribuição de Probabilidade Cumulativa (CDF)



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Função Confiabilidade

- Probabilidade de um item estar vivo após um dado intervalo (tempo, ciclos, distância, etc).
- Probabilidade de não existir falha entre 0 e x.

$$R(x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Função Risco

- Probabilidade condicional de um item não ter falhado até um instante x+D, dado que ele não falhou até x.

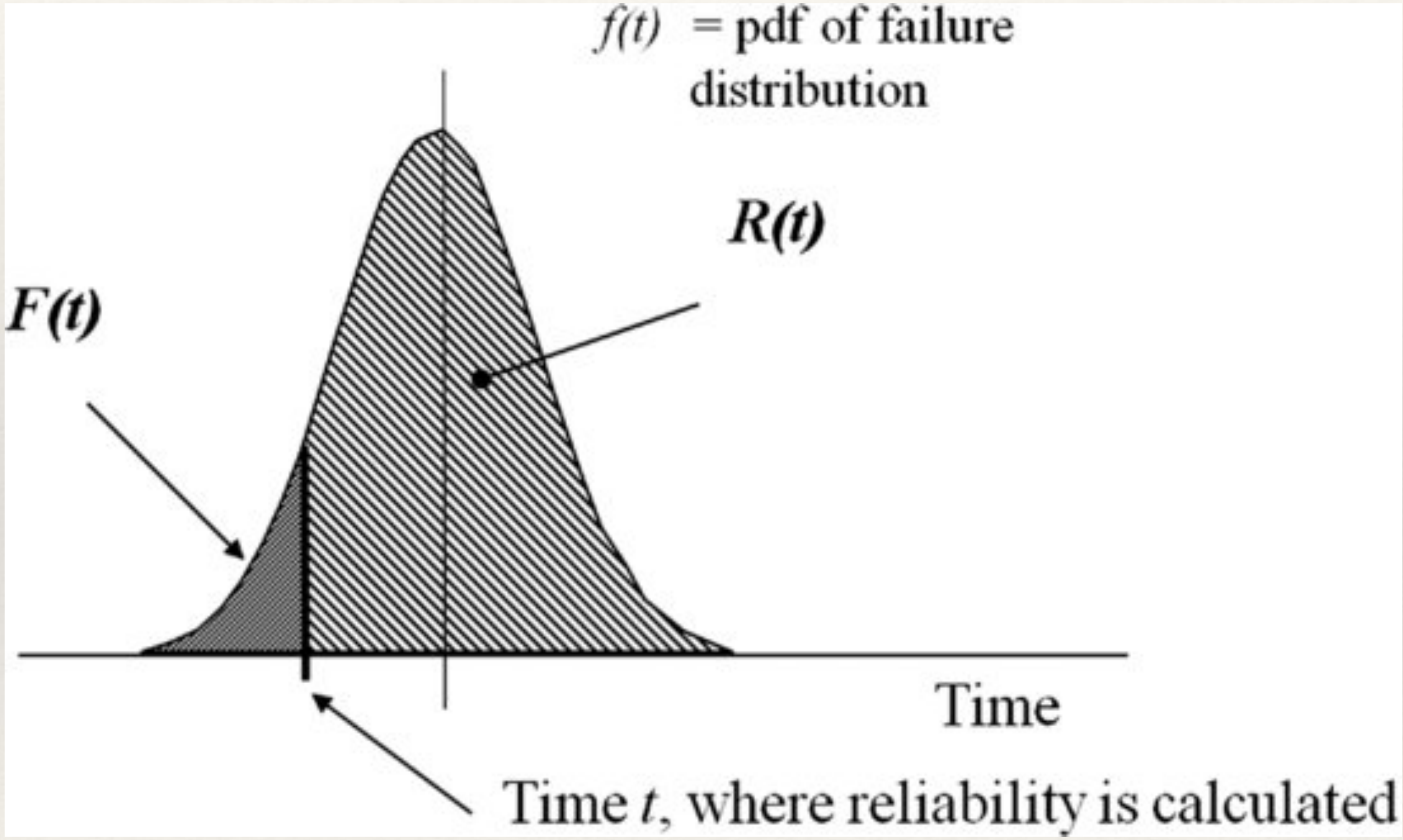
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Função Risco Cumulativa:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(x)dx = \int_{\infty}^{x} \frac{f(x)}{1 - F(x)}dx$$

Estimando a confiabilidade:



Distribuições Importantes em Confiabilidade

Distribuição Lognormal

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Distribuição Exponencial

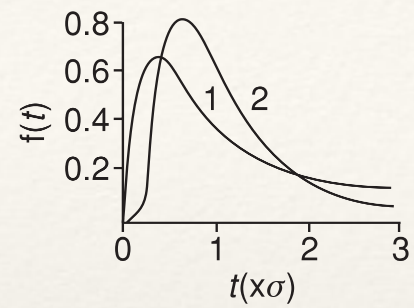
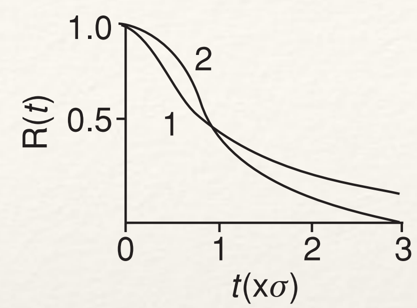
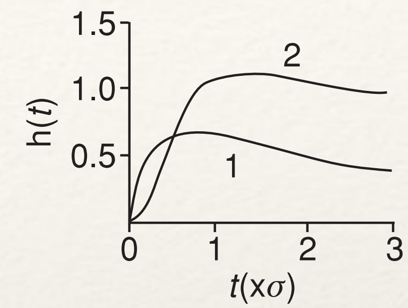
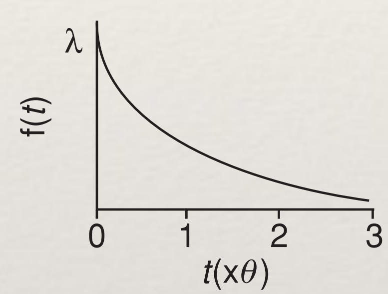
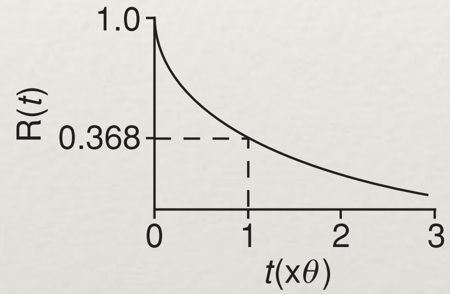
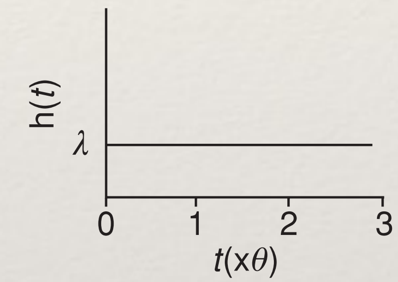
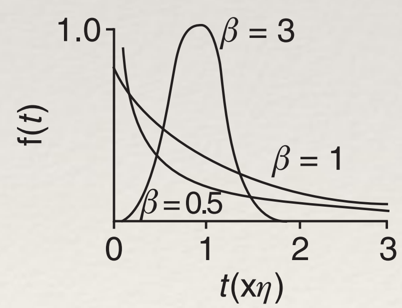
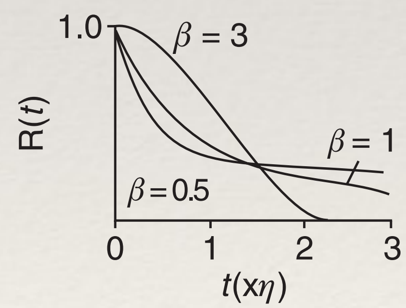
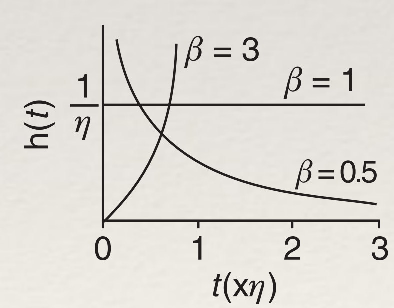
$$f(x) = \begin{cases} a\exp(-ax) & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - \exp(-ax)$$

Distribuição Weibull

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

Type of distribution	Parameters	Probability density function, f(t)	Reliability function, R(t) = I – F(t)	Hazard function (instantaneous failure rate). $h(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$
Lognormal	Mean, μ Standard deviation, σ	 $f(t) = \dfrac{1}{\sigma t(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\dfrac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	 $R(t) = \int_t^\infty f(t)\,dt$	 $h(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ (general expression)
Exponential	Failure rate, λ MTBF (=SD), θ $\theta = \lambda^{-1}$	 $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$	 $R(t) = \exp(-\lambda t)$	 $h(t) = \lambda = \theta^{-1}$
Weibull	Shape, β Scale (characteristic life), η Location (minimum life), γ Curves shown for $\gamma = 0$	 $f(t) = \dfrac{\beta}{\eta^\beta}(t-\gamma)^{\beta-1}\exp\left[\left(\dfrac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$	 $R(t) = \exp\left[-\left(\dfrac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$	 $h(t) = \dfrac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\eta^\beta}$

Exemplo

O tempo até falha (em horas) de um componente mecânico é adequadamente modelado por uma variável aleatória X, que segue distribuição de Weibull com parâmetros β=1/2 e δ=5000h.

- Determine o tempo médio até falha.
- Qual a probabilidade do componente resistir por ao menos 6000h?

$$E(X) = 5000\Gamma[1 + (1/0.5)] = 5000\Gamma[3] = 5000 \times 2! = 10{,}000 \text{ hours}$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

$$P(x > 6000) = 1 - F(6000) = \exp -\left[\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1/2}\right] = e^{-1.095} = 0.334$$

Distribuição Binomial

- A distribuição binomial descreve situações em que existem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou falha) e a probabilidade de sucesso permanece inalterada em todas as tentativas/testes.

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

$$F(r) = \sum_{x=0}^{r} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

Exemplo:

- Um lote é considerado aprovado se, em uma amostra de 20 produtos, no máximo 4 apresentam defeito. A probabilidade de falha de um produto é estimada em 10%. Calcule a probabilidade de um lote ser aprovado.

Variação em Engenharia

- **Determinística ou casual:** causada pela relação entre os parâmetros e tem efeito conhecido. Tem formula conhecida, não sendo necessário utilizar ferramentas estatísticas.
- **Funcional:** causada pela relação entra a variação e procedimentos operacionais, humanos, erros, calibração, etc. Não tem formula fechada e muitas vezes é difícil relacionar causa e efeito.
- **Aleatória:** efeitos inerentes da variabilidade dos processos de condições de operação. Geralmente são consideradas como todas as variações não explicadas pelas causas determinísticas e funcionais. Dependem de procedimentos estatísticos para análise.

Terminologia

Terminologia

- **Vida média de um produto** (*mean life*): tempo médio até falha de produtos idênticos operando sob condições idênticas.
    - **Tempo médio até falha** (*mean time to failure* - MTTF): produtos/sistemas não reparáveis.
    - **Tempo médio entre falhas** (*mean time between failures* - MTBF): produtos/sistemas reparáveis.

$$MTTF = \hat{\theta} = \frac{\sum t_i}{n}$$

t_i tempo até falha do item i.

Exemplo: 10 itens

$$MTTF = \frac{132 + 148 + 148 + 150 + 157 + 158 + 159 + 163 + 163 + 168}{10} = 153,8h$$

$$MTBF = \theta \approx \hat{\theta} = \frac{n \cdot m}{r}$$

n número de ítens.
m número de horas de teste.
r número de falhas.

Exemplo: Considere 100 itens reparáveis testados por 1000 horas cada, onde cada vez que um item falha ele é prontamente reparado e retorna ao teste. Suponha a ocorrência de 25 falhas durante o teste.

$$MTBF = \frac{100.000}{25} = 4.000h$$

- **Tempo médio para reparo** (*mean time to repair* - MTTR): tempo médio necessário para retornar o produto para condição operacional (produtos/sistemas reparáveis).
- **Taxa de falha** (*failure rate*): grandeza recíproca da vida média.
- **Disponibilidade**: probabilidade de um produto estar devidamente operacional quando necessário.

$$\lambda = \frac{1}{MTTF}$$

Sistemas não reparáveis

$$\lambda = \frac{1}{MTBF}$$

Sistemas reparáveis

$$A = \frac{UpTime}{UpTime + DownTime}$$

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

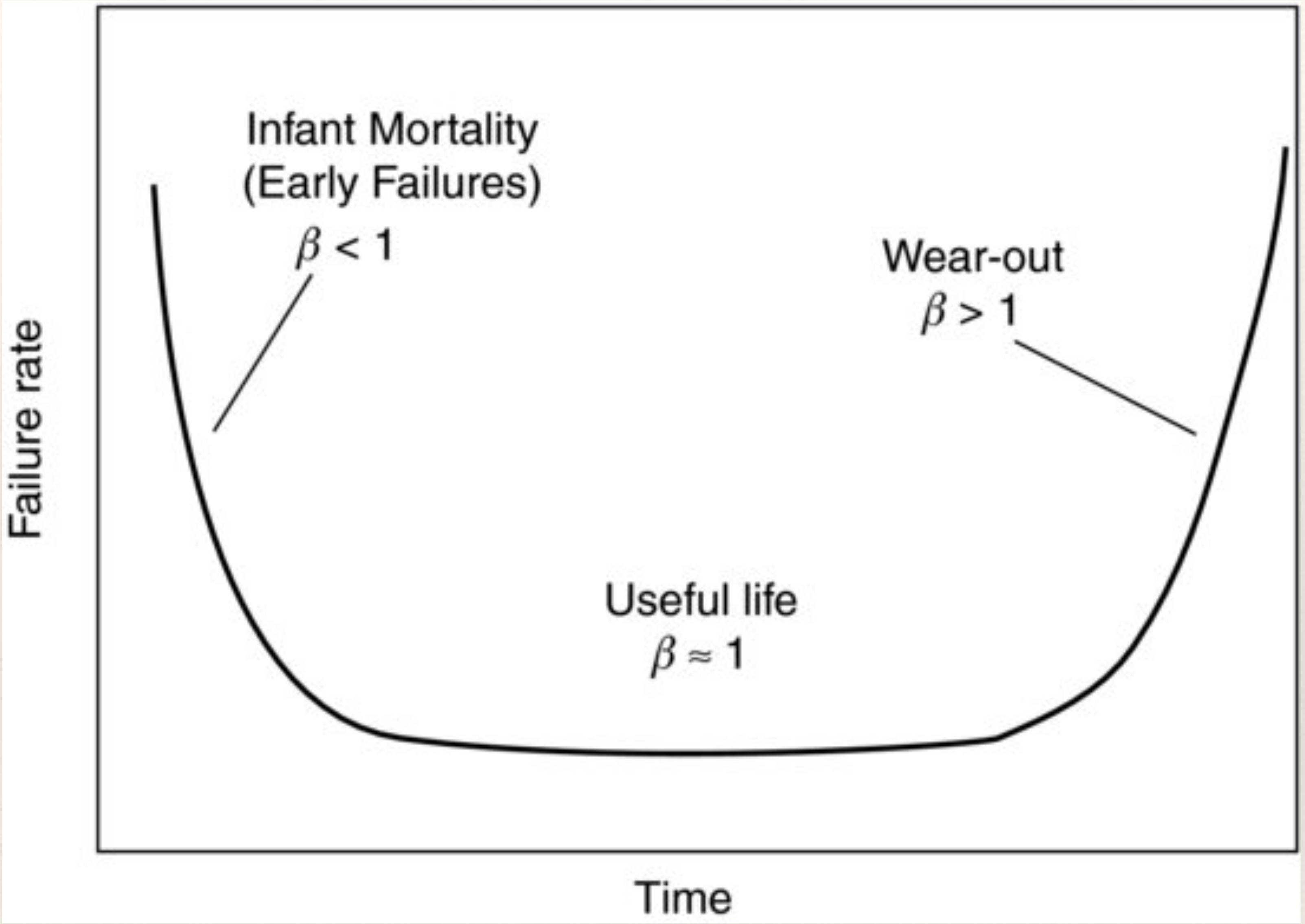
Sistemas reparáveis sem manutenção preventiva

Estimativa de Ciclo de Vida

- O ciclo de vida de um produto pode ser dividido em três estágios:
  - **Estágio 1 - taxa de falha decrescente:** as falhas ocorridas em estágios iniciais de operação geralmente estão muito mais associadas com o processo de produção que com o projeto. Geralmente chamado de estágio de falhas prematuras ou estágio de mortalidade infantil.

- **Estágio 2 - taxa de falha constante:** durante este estágio a taxa de falhas é aproximadamente constante. As falhas ocorridas nesse estágio geralmente se devem a causas aleatórias e não podem ser associadas ao processo de produção.

- **Estágio 3 - taxa de falha crescente:** caracterizado por uma taxa de falha crescente ao longo do tempo. Essas falhas são geralmente causadas por fadigas dos componentes e produtos.


Infant Mortality
(Early Failures)
β < 1
Wear-out
β > 1
Failure rate
Useful life
β ≈ 1
Time

Exercício 3

(Cap. 2, Ex. 2) For a device with a failure probability of 0.02 when subjected to a specific test environment, use the binomial distribution to calculate the probabilities that a test sample of 25 devices will contain (a) no failures; (b) one failure; (c) more than one failure.

Exercício 4

(Cap. 2, Ex. 7) A railway train is fitted with three engine/transmission units that can be assumed to exhibit a constant hazard with a mean life of 200 h. In a 15 h working day, calculate the probability of a train having: (a) no failed engine/transmission units, (b) not more than one failed unit, (c) not more than two failed units.

Material de Referência

- F. Campelo (2014). Lecture notes on Design and Analysis of Experiments.
  - Disponível em: http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo/LNDoE/
  - Version 2.1; Creative Commons BY-NC-SA 4.0.
- D. C. Montgomey & G. C. Runger (2010). Applied Probability and Statistics for Engineers. Wiley, 5th Ed..
- R. E. Walpole (2011). Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Pearson, 9th Ed..
- W. J. Conover (1980). Practical Nonparametric Statistics. Wiley Series in Prabability and Statistics, 2nd Ed.
- D. J. Sheskin (2011). Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures. Chapman and Hall, 5th Ed..