Métodos Estatísticos Usuais em Aprimoramento de Qualidade

Aula 03
Revisão de Conceitos

Profa. Carmela Maria Polito Braga, DELT/UFMG

VARIÁVEL ALEATÓRIA: DEFINIÇÃO

É um número atribuído a todo resultado ζ de um experimento.

Este número pode ser o valor da face de um dado, a tensão de uma fonte de alimentação qualquer, o valor de um componente eletrônico aleatório, ou qualquer outro valor numérico que seja de interesse na execução do experimento.

Exemplo 1: Os seis resultados possíveis de um jogo de dado podem ser designados por uma função $\mathbf{x}(f_i)=10\,i$.

Assim $\mathbf{x}(f_1)=10, ..., \mathbf{x}(f_6)=60$, onde f_i= face gravada com o número i (1 a 6).

Exemplo 2: No mesmo experimento do exemplo 1 pode-se atribuir a cada resultado com número par o valor 1 e com número ímpar o valor 0.

Assim $\mathbf{x}(f_1)=\mathbf{x}(f_3)=\mathbf{x}(f_5)=0$ e $\mathbf{x}(f_2)=\mathbf{x}(f_4)=\mathbf{x}(f_6)=1$.

$P\{\mathbf{x}(f_n)=0\}=3/6 = ½$; $P\{\mathbf{x}(f_n)=1\}=3/6 = ½$;

VARIÁVEL ALEATÓRIA: DEFINIÇÃO

Em ambos os exemplos x é uma variável aleatória mas com interpretações diferentes, obviamente.

Uma vez constituída uma variável aleatória pode-se responder a questões do tipo:

• Qual é a probabilidade de que a variável aleatória x seja menor que um número x_1?

• Qual é a probabilidade de que a variável aleatória x esteja contida no intervalo [x1, x2]?

Ou seja, $\mathbf{P\{x1 \leq x \leq x2\}} = ?$

Como uma variável aleatória tem um valor numérico pode-se indagar sobre seu valor médio (esperado), valor mais freqüente (moda), etc.

PROCESSO ESTOCÁSTICO E ERGODICIDADE

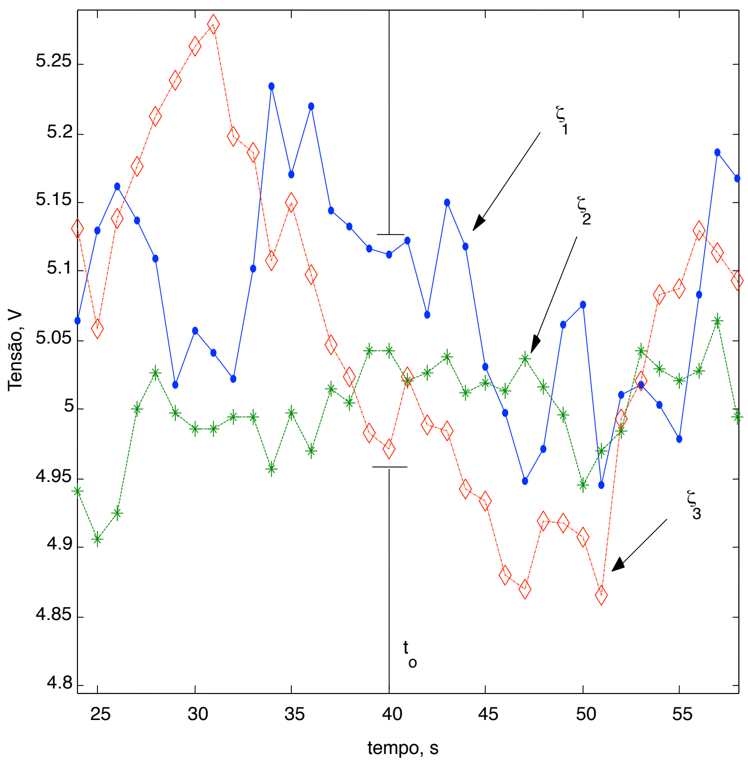


Fig.: Exemplo de um processo estocástico: três fontes de alimentação (ζ_1, ζ_2 e ζ_3) do mesmo modelo ajustadas para fornecerem 5 Vcc.

Processo Ergódico: E{x(t0, ζ)}=E{x(t, ζi)}
E{x(t0, ζ)2}=E{x(t, ζi)2}

• **Processo estocástico**: é uma regra de atribuição para todo resultado ζ de um experimento, uma função x(t, ζ). Desta forma um processo Estocástico é uma família de funções temporais que dependem do parâmetro ζ, ou simplesmente uma função de t e ζ.

Exemplo: Três fontes de alimentação do mesmo modelo são ajustadas para fornecer 5V de tensão contínua. A tensão medida nos terminais de saída de cada fonte são apresentadas na Fig.1. A tensão fornecida pelas fontes de alimentação constituem um processo estocástico, x(t, ζ), onde cada fonte é considerada um evento ζ, e a tensão da fonte varia com o tempo diferentemente para cada fonte.

•Se uma única fonte, ζ_i, é escolhida, $x(t, \zeta_i)$ é uma função do tempo;

•Se t é fixado em t_0, então , $x(t_0, \zeta)$ é uma variável aleatória;

•Se t e ζ são fixados, então $x(t_0, \zeta_i)$ é um número.

Ergodicidade é muito importante para o controle de qualidade! Facilita a validação dos produtos.

DESCRIÇÃO DA VARIAÇÃO
Métodos para Resumir e Apresentar Dados

- Diagrama de Ramo e Folha (Stem-and-Leaf Display)

Table 2-1 Days to Pay Employee Health Insurance Claims

Claim	Days	Claim	Days	Claim	Days	Claim	Days
1	48	11	35	21	37	31	16
2	41	12	34	22	43	32	22
3	35	13	36	23	17	33	33
4	36	14	42	24	26	34	30
5	37	15	43	25	28	35	24
6	26	16	36	26	27	36	23
7	36	17	56	27	45	37	22
8	46	18	32	28	33	38	30
9	35	19	46	29	22	39	31
10	47	20	30	30	27	40	17

Stem-and-Leaf Display: Days

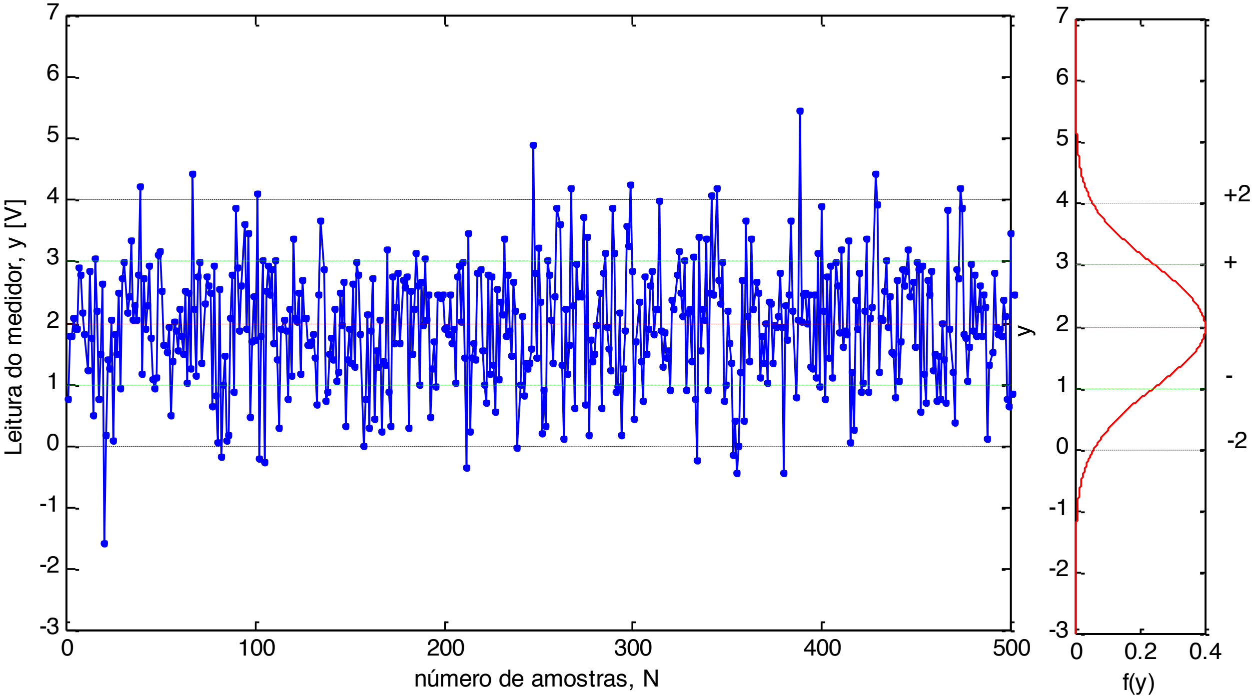
```
Stem-and-leaf of Days
N = 40
Leaf Unit = 1.0

    1 677
    2 22234
    2 66778
    3 00012334
    3 555666677
    4 02224
    4 56678
    5
  _ 5 6
```

Figure 2-1 Stem-and-left plot for the health insurance claim data.

Cada número é dividido em duas partes: um **Ramo**, formado por um ou mais dígitos iniciais; e uma **Folha**, formada pelos dígitos restantes.

GRÁFICO DE SÉRIE TEMPORAL
(CARTA DE FUNCIONAMENTO – RUN CHART)



Leituras de calibração de um termômetro eletrônico. Com a temperatura mantida constante em 20 °C a tensão de saída do termômetro eletrônico é em torno de 2V.

HISTOGRAMAS
ÚTIL PARA GRANDES CONJUNTOS DE DADOS

Table 2-2 Layer Thickness (Å) on Semiconductor Wafers

438	450	487	451	452	441	444	461	432	471
413	450	430	437	465	444	471	453	431	458
444	450	446	444	466	458	471	452	455	445
468	459	450	453	473	454	458	438	447	463
445	466	456	434	471	437	459	445	454	423
472	470	433	454	464	443	449	435	435	451
474	457	455	448	478	465	462	454	425	440
454	441	459	435	446	435	460	428	449	442
455	450	423	432	459	444	445	454	449	441
449	445	455	441	464	457	437	434	452	439

- Agrupa os valores das variáveis em celas ou classes (bins) e conta o número de observações pertinentes a cada um deles.
- A amplitude da barra representa a frequência (ou frequência relativa) de ocorrência de determinada medida plotada em relação aos valores das variáveis.
- Regra útil: usar entre 4 e 20 classes (de mesmo comprimento). Escolher este número como sendo, aproximadamente, a raiz quadrada do número de observações.

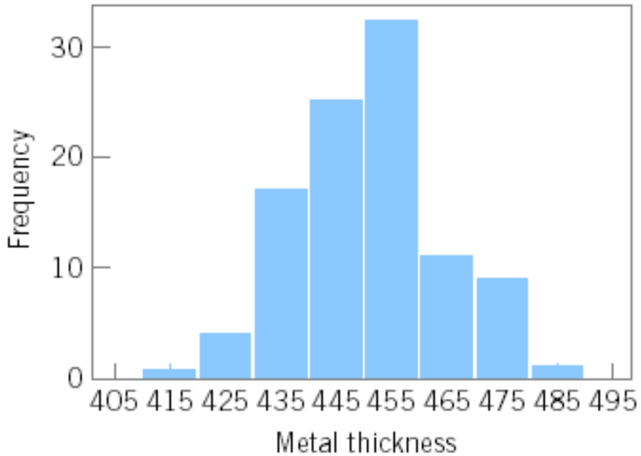


Figure 2-3 Minitab histogram for the metal layer thickness data in Table 2-2.

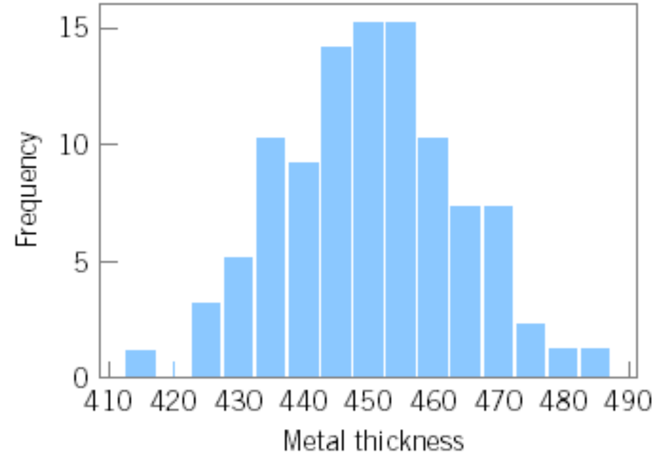


Figure 2-4 Minitab histogram with 15 bins for the metal layer thickness data.

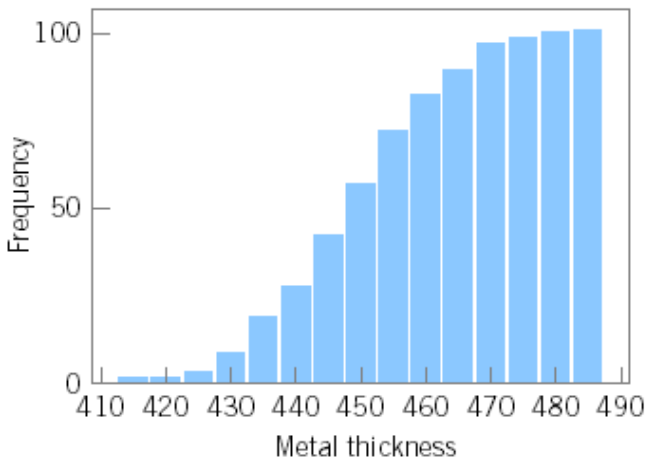


Figure 2-5 A cumulative frequency plot of the metal thickness data from Minitab.

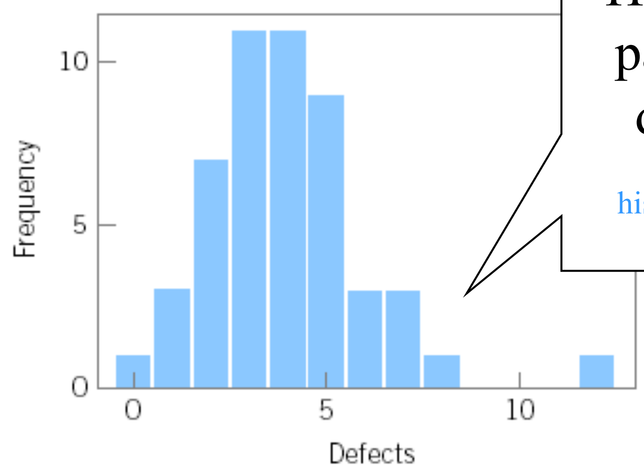


Figure 2-6 Histogram of the number of defects in painted automobile hoods (Table 2-3).

Histograma para dados discretos
(MatLab:
hist ou histc- Plot histograms)

RESUMO NUMÉRICO DE DADOS

Suponha que x_1, x_2, ...x_3 são as observações em uma amostra. A medida mais importante da tendência central na amostra é a **média da amostra:**

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots. x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Note que a média da amostra $\overline{X}$ é simplesmente a média aritmética de n observações.

A média da amostra para os dados de espessura do metal na tabela 2.2 é:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} = \frac{45001}{100} = 450{,}01 A^o$$

Observe a figura 2.4 e note que a média da amostra é o ponto em que o histograma se "equilibra". Portanto, a **média da amostra representa o centro de massa dos dados da amostra**.

RESUMO NUMÉRICO DE DADOS

A **variabilidade nos dados** amostrais é medida por meio da **Variância da amostra**:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

Note que a variância da amostra é simplesmente a soma do quadrado dos desvios padrão de cada observação, em relação à média amostral $\overline{X}$, dividida pelo tamanho da amostra menos 1.

Se não há variabilidade na amostra, cada observação xi= $\overline{X}$, e a variância amostral S^2 = 0. **Geralmente, quanto maior é a variância amostral S^2 , maior é a variabilidade nos dados amostrados.**

RESUMO NUMÉRICO DE DADOS

A *unidade da Variância amostral*, S^2, é o quadrado da unidade original dos dados. Isto é freqüentemente inconveniente e inábil para interpretação e, então, usualmente opta-se pelo uso da raiz quadrada de S^2, chamada de **desvio padrão amostral,** S, como uma medida da variabilidade. Assim pode-se escrever:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

A vantagem básica do desvio padrão amostral é que ele é expresso nas unidades originais das medições realizadas. Para o exemplo da massa de dados de espessura de metal, tem-se:

$$S^2 = 180{,}2928 {A^o}^2$$

$$e$$

$$S = 13{,}43 A$$

DIAGRAMAS DE CAIXA
(OR BOX PLOT OR BOX-AND-WHISKER PLOT)

Exibe, simultaneamente, tendência central ou posição, dispersão ou variabilidade, afastamento da simetria e identificação de pontos espúrios.

Diâmetros dos orifícios das Nervuras do bordo de ataque da asa de um avião

120.5	120.4	120.7
120.9	120.2	121.1
120.3	120.1	120.9
121.3	120.5	120.8

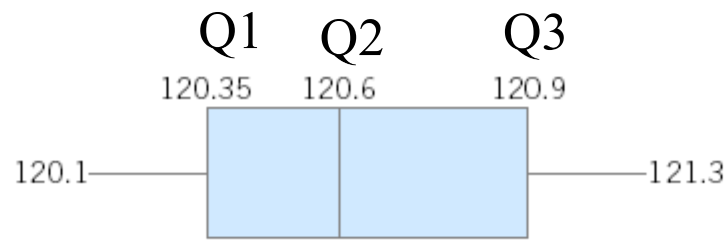


Figure 2-7 Box plot for the aircraft wing leading edge hole diameter data in Table 2-4.

Rank ordenado de observações :

1 120.1 (min)
2 120.2
3 120.3
4 120.4
5 120.5
6 120.5
7 120.7
8 120.8
9 120.9
10 120.9
11 121.1
12 121.3 (max)

1_o quartil = 0.25*12 + 0.5 = 3.5> 120.35

$$Q_2 = \tilde{x} = \frac{(120.5 + 120.7)}{2} = 120.6$$

(mediana = Qüinquagésimo percentil)

3_o quartil = 0.75*12 + 0.5 = 9.5> 120.9

COMPARAÇÃO ENTRE DIAGRAMAS DE CAIXA

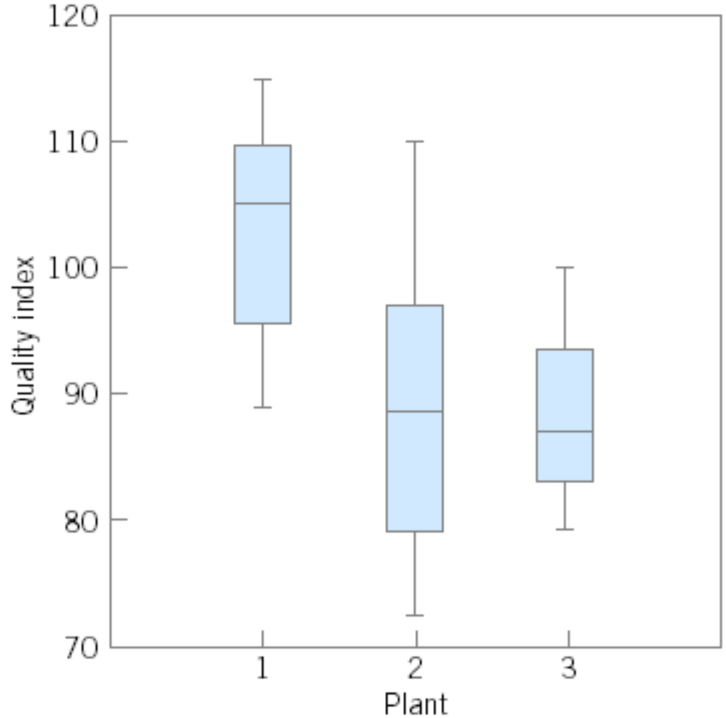


Figure 2-8 Comparative box plots of a quality index for products produced at three plants.

Inspeção visual: há muita variabilidade na planta 2 e é preciso melhorar o desempenho nas plantas 2 e 3.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

O histograma, o diagrama de caule e folha e o diagrama de caixa são usados para descrever dados de uma amostra. Uma **amostra** é uma coleção de medições selecionadas de uma fonte maior ou **população**.

Por exemplo, na tabela 2.2 aparecem medições de espessura de pastilhas em semicondutores de um certo processo. **A população, neste caso, é o conjunto de todas as pastilhas produzidas pelo processo**.

Usando métodos estatísticos podemos analisar apenas amostras dos dados de medição de diâmetros destas pastilhas e tirar conclusões sobre este processo de manufatura.

A **distribuição de probabilidade** de uma **variável aleatória** é um modelo matemático que representa o **valor** desta variável com a **probabilidade de ocorrência** deste valor na população.

- **Distribuições Contínuas:** para o caso de variáveis cuja medição é expressa em uma escala contínua. Ex.: A espessura das pastilhas de semicondutores .

- **Distribuições Discretas:** para o caso de variáveis que podem assumir apenas certos valores. Ex.: número de defeitos em placas de circuitos impressos.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Função de **massa de probabilidade**

Função distribuição de probabilidade

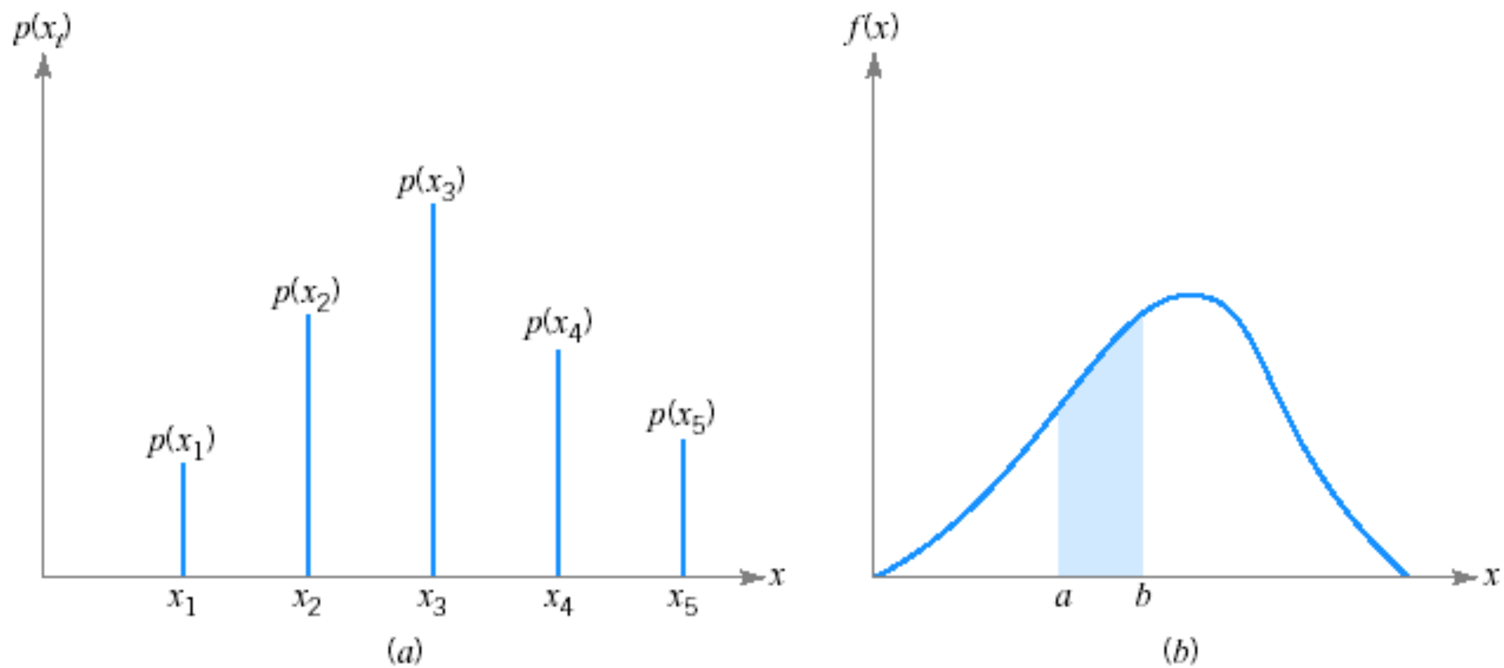


Figure 2-9 Probability distributions. (*a*) Discrete case. (*b*) Continuous case.

UMA DISTRIBUIÇÃO DISCRETA

Um processo de manufatura produz centenas de diodos por dia. Na média, 1% destes dispositivos encontram-se fora de conformidade com as especificações. A cada hora um inspetor seleciona uma amostra de 50 diodos e os classifica um a um como estando ou não em conformidade.

Seja **x** a **variável aleatória** que representa **o número de diodos não-conformes** na amostra. A distribuição de probabilidade de x é:

$$p(x) = \binom{50}{x}(0.01)^x(0.99)^{50-x}$$

$$onde: \ \mathrm{x} = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots 50$$

$$\mathrm{e} \ \binom{50}{x} = \frac{50!}{[\mathrm{x}!(50 - \mathrm{x})!]}$$

Distribuição Binomial

UMA DISTRIBUIÇÃO DISCRETA
Exemplo

Calculando a probabilidade de encontrar uma parte ou menos **não conforme** (diodos fora de especificação) na amostra (de 50 diodos):

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$= P(0) + P(1)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} \binom{50}{\mathrm{x}} (0.01)^{x} (0.99)^{50-x}$$

$$= \frac{50!}{0!50!}(0.01)^{0}(0.99)^{50} + \frac{50!}{1!49!}(0.01)^{1}(0.99)^{49}$$

$$= 0.6050 + 0.3056 = 0.9106$$

FUNÇÃO GAMA E COMBINAÇÃO

The gamma function can be defined as a definite integral for $\Re[z] > 0$ (Euler's integral form)

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 1 = (n-1)!,\end{aligned}$$

Matlab

```
>> gamma(5+1)
ans =
   120
```

Combination

The number of ways of picking *k unordered* outcomes from *n* possibilities. Also known as the binomial coefficient or choice number and read "*n* choose *k*,"

$${}_nC_k \equiv \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

where is a factorial. [vide site http://mathworld.wolfram.com]

GAMMA Gamma function.

Y = GAMMA(X) evaluates the gamma function for each element of X. X must be real. The gamma function is defined as: gamma(x) = integral from 0 to inf of t^(x-1) exp(-t) dt.

The gamma function interpolates the factorial function. For integer n, gamma(n+1) = n! (n factorial) = prod(1:n).

UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA

Considere x como sendo uma variável aleatória que representa o conteúdo real de um pacote de café. A distribuição de probabilidade de x é assumida como sendo:

$$f(x) = \frac{1}{1.5} \qquad\qquad 15.5 \leq \text{x} \leq 17.0$$

Trata-se de uma distribuição contínua desde que a faixa de x encontra-se no intervalo [15.5, 17.0], e é chamada de distribuição Uniforme (fig. 2-10).

A área sob a função f(x) corresponde à probabilidade e, assim, a probabilidade de um pacote de café conter menos que 16 oz é:

UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA
Exemplo

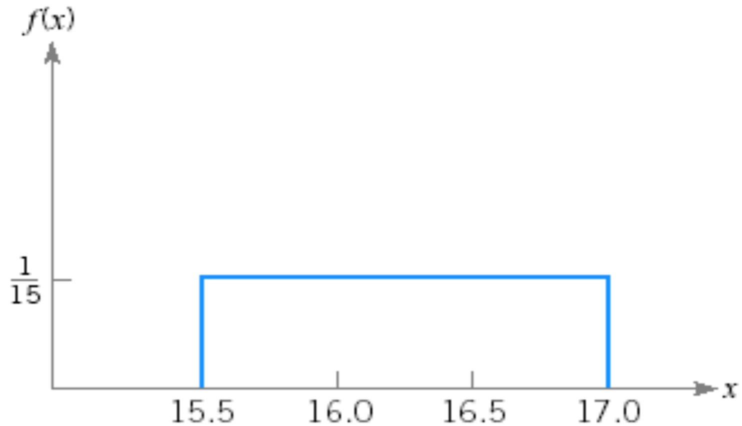


Figure 2-10 The uniform distribution for Example 2-6.

$$P\{x \leq 16.0\} = \int_{15.5}^{16} f(x)dx$$

$$= \int_{15.5}^{16} \frac{1}{1.5} dx$$

$$= \left.\frac{x}{1.5}\right|_{15.5}^{16} \frac{16.0 - 15.5}{1.5} = 0.3333$$

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

A **média μ,** ou **valor esperado,** de uma **distribuição de probabilidade** é a medida da **tendência central na distribuição**, ou sua localização. A média é definida como sendo:

$$\mu = E\{x\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & \text{X contínuo} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i) & \text{X discreto} \end{cases}$$

Para o caso de uma variável aleatória discreta com, exatamente, N valores igualmente prováveis (qual seja, $p(x_i)=1/N$), a equação anterior se reduz para:

$$\mu = E\{x\} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Esta expressão é bastante similar à de $\overline{X}$. Assim, **a média**, **μ**, é simplesmente o centro de massa da **distribuição de probabilidade** (enquanto $\overline{X}$ é o centro de massa de uma **amostra de dados**).

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Note pela figura abaixo, (Fig. 2-11a), que **Média** (mean) não é, necessariamente, a **Mediana** (median), (Fig. 2-11b), e em (Fig. 2-11c) não é necessariamente o valor mais provável (frequente) da variável (que é chamado de **modo**).

A média simplesmente determina a localização da distribuição (Fig. 2-12).

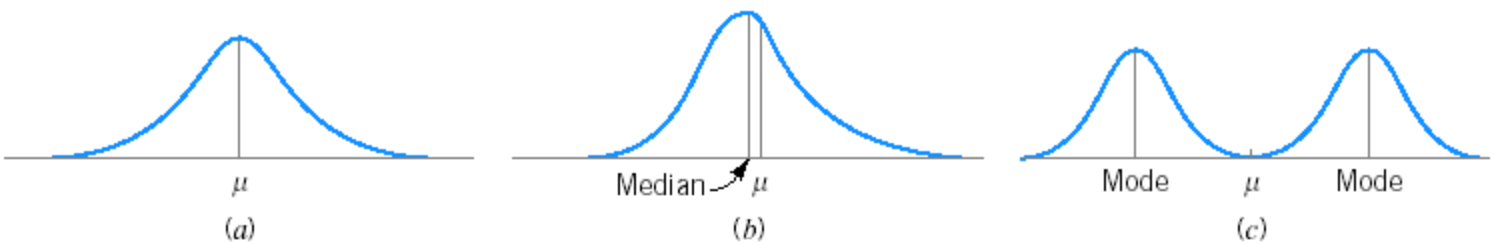


Figure 2-11 The mean of a distribution.

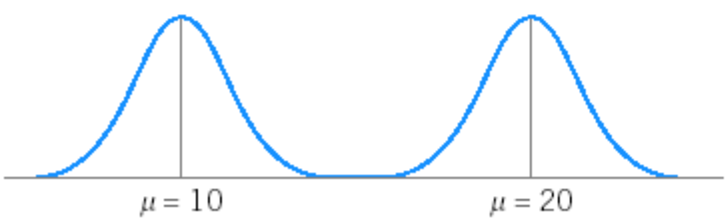


Figure 2-12 Two probability distributions with different means.

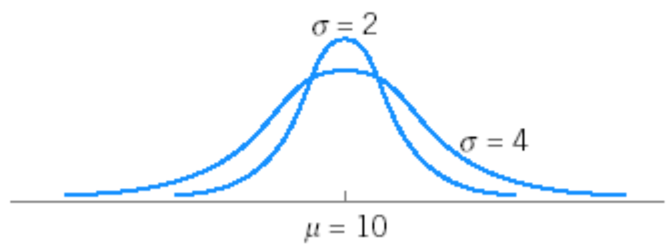


Figure 2-13 Two probability distributions with the same mean but different standard deviations.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

O espalhamento ou a variabilidade em uma distribuição é expressa pela **variância σ2.** A definição da **variância** é:

$$\sigma^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx & \text{X contínuo} \\ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu)^2 p(x_i) & \text{X discreto} \end{cases}$$

Quando a variável aleatória é discreta com N valores igualmente prováveis, a equação anterior torna-se:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

Observe-se que neste caso a **variância** é a distância média quadrática de cada elemento da população em relação à média. Note a similaridade desta equação com a da variância da amostra. S^2.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}}$$

O **desvio padrão** é a medida do **espalhamento** na população *expresso nas unidades originais*.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Da definição de média **μ,** ou **valor esperado,** tem-se que **variância σ2** é a média da variável aleatória RV= $(x-\mu)^2$

Assim:

$$\sigma^2 = E\left\{(x_i-\mu)^2\right\} = E\left\{x^2 - 2x\mu + \mu^2\right\}$$

$$= E\left\{x^2\right\} - 2\mu\, E\left\{x\right\} + \mu^2$$

$$= E\left\{x^2\right\} - 2E\left\{x\right\}E\left\{x\right\} + E^2\left\{x\right\}$$

$$\sigma^2 = E\left\{x^2\right\} - 2E^2\left\{x\right\} + E^2\left\{x\right\}$$

$$\sigma^2 = E\left\{x^2\right\} - E^2\left\{x\right\}$$

DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA (+) IMPORTANTE

A Distribuição Normal:

A distribuição normal é a mais importante tanto na teoria quanto nas aplicações de estatística. Se x é uma variável aleatória normal sua distribuição de probabilidade é definida como a seguir.

Definição

A **distribuição normal** é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

A média da distribuição normal é μ $(-\infty < \mu < \infty)$
E a variância é $\sigma^2 > 0$.

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

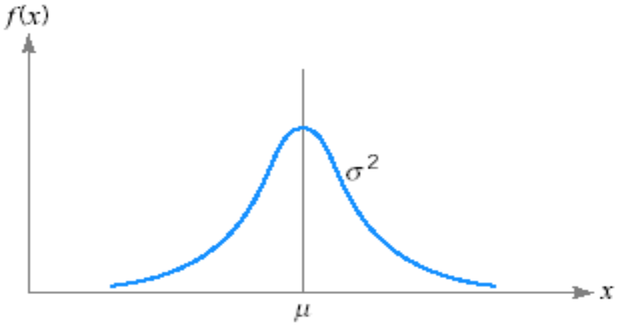


Figure 2-16 The normal distribution.

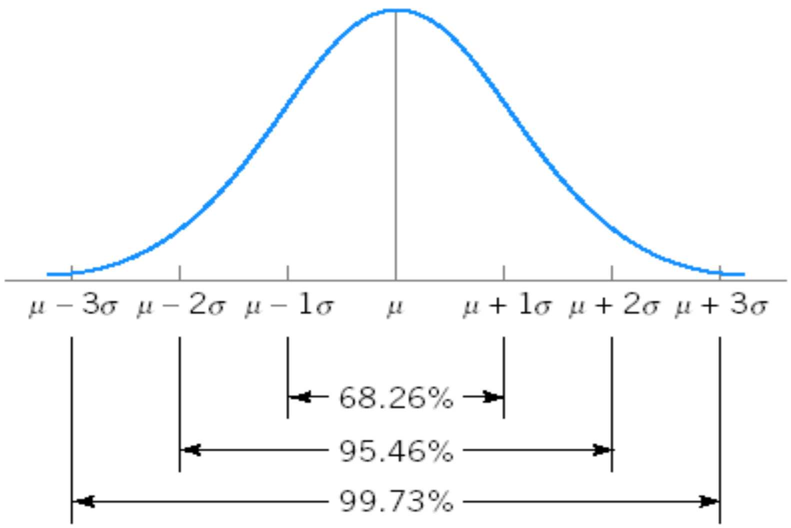
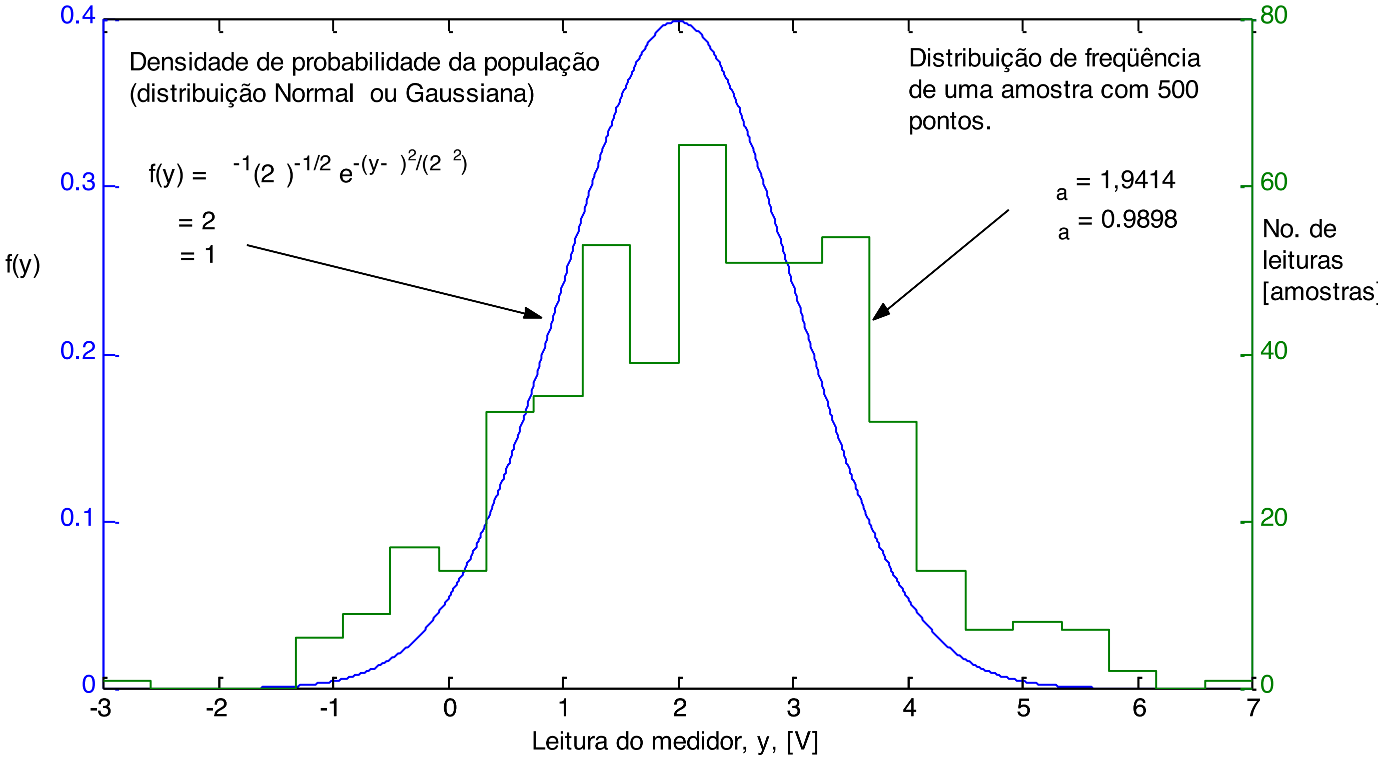


Figure 2-17 Areas under the normal distribution.

Devido a esta distribuição ser muito comum, freqüentemente utiliza-se a notação especial:

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL



Histograma das medidas de temperatura de um termômetro eletrônico.
(dados da carta de funcionamento da página 7)

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

Duas variáveis aleatórias são chamadas (estatisticamente) independentes se os eventos

$$\{x \in A\} \text{e } \{\mathrm{y} \in \mathrm{B}\}$$

são independentes, o que é o mesmo de:

$$P\{x \in A, \mathrm{y} \in \mathrm{B}\} = P\{x \in A\} \cdot \mathrm{P}\{\mathrm{y} \in \mathrm{B}\}$$

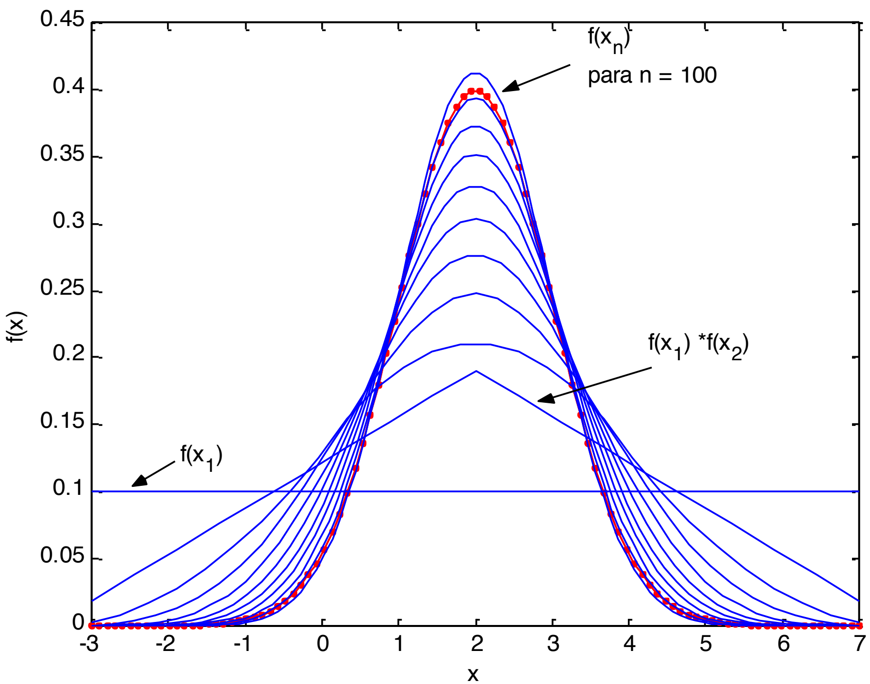
Aplicando o estabelecido acima para os eventos {**x**<=x} e {**y**<=y}, conclui-se que se x e y são independentes, então:

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

Cada leitura do termômetro eletrônico mostrada na página 7 é modelada como uma variável aleatória com uma função de densidade de **probabilidade (e.g. uniforme, normal, etc.)**.

O teorema do Limite Central afirma que para uma variável aleatória $\mathbf{X_n}$, que é composta da soma de um número grande (n>30) de variáveis aleatórias, $\mathbf{X_n = x_1+x_2+ \ldots, + x_n}$, a distribuição de probabilidade da variável composta $\mathbf{X_n}$ coincide com a curva Normal ou Gaussiana.



Função Característica de uma Variável Aleatória, RV, é a Transf. Fourier da F.D.P.

$$\Phi(\Omega) = E\left\{e^{j\Omega X^T}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(X) e^{j\Omega X^T} dx,$$

$$= E\left\{e^{j(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n)}\right\}.$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}.$$

Para RV's independentes com PDF, f(x), a PDF f(z) da soma destas,i.e. $z=x_1+ \ldots +x_n$, tem-se:

$$E\left\{e^{j(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n)}\right\} = E\left\{e^{j\omega_1 x_1}\right\} \cdots E\left\{e^{j\omega_n x_n}\right\}$$

$$f_z(z) = f_1(z) * \cdots * f_n(z)$$

CONVOLUÇÃO

Convolução é definida pela integral:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

que no domínio de Laplace é simplesmente uma multiplicação de polinômios em *s*:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Convolução é o mesmo que multiplicação polinomial (:-)!

CONVOLUÇÃO

➢ **Exemplo 1**: Multiplicar os seguintes polinômios:

$P_1(x) = 1 + x$ com $P_2(x) = 1 + 2x + x^2$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & + & 2x & + & x^2 & & \\
 & 1 & + & x & & & & \\
\hline
1 & + & 2x & + & x^2 & & & \\
 & & x & + & 2x^2 & + & x^3 & \\
\hline
1 & + & 3x & + & 3x^2 & + & x^3 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow P_3(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Em ***Matlab*** temos:

» P1=[1 1]; P2=[1 2 1]; p3 = conv(P1,P2);

» P3 = [1 3 3 1]

CONVOLUÇÃO

Uma forma interessante de se visualizar a integral de convolução é através da matriz de **Sylvester**

Exemplo 1: *ilustração esquemática da solução:*

Entrada			Sistema			Saída	
x^2	x^1	x^0	x^0	x^1	x^2	$y = U(x).G(x)$ $y = (1+x)\,(1+2x+x^2)$ $y = 1+3x+3x^2+x^3$	
[0	1	1]	[1	2	1]		
	0	1	1			1	x^0
		0	1	1		3	x^1
			0	1	1	3	x^2
$\underline{u} = [1\ \ 1]^T$ $\underline{g} = [1\ 2\ \ 1]^T$			0	0	1	1	x^3

S = matriz de Sylvester

$y = S\,\underline{g}$

$$[y]=[S][g]$$, ou seja:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

CONVOLUÇÃO

- Representação algébrica da matriz de Sylvester:

  Sejam os polinômios:

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2$$

e

$$u(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$$

$$[u_0 + u_1 x + u_2 x^2] \quad [g_0 + g_1 x + g_2 x^2] \quad = \quad y(x)$$

$$y(x) = \quad u_0 g_0 + (u_0 g_1 + u_1 g_0)x + (u_0 g_2 + u_1 g_1 + u_2 g_0)x^2 + (u_1 g_2 + u_2 g_1)x^3 + u_2 g_2 x^4$$

Graficamente pode-se escrever:

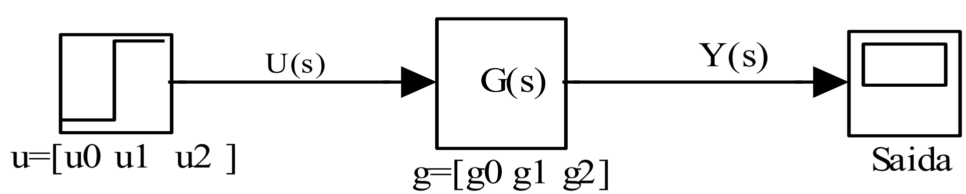
CONVOLUÇÃO

Entrada			Sistema			Saída	
x^2	x^1	x^0	x^0	x^1	x^2	$y = U(x)\,G(x)$ $y = (u_0+u_1x+u_2x^2)$ $\cdot\quad(g_0+g_1x+g_2x^2)$	
u_2	u_1	u_0	g_0	g_1	g_2		
⇨	u_2	u_1	u_0			$u_0\,g_0$	x^0
		u_2	u_1	u_0		$u_0\,g_1+u_1\,g_0$	x^1
			u_2	u_1	u_0	$u_0\,g_2+u_1\,g_1+u_2\,g_0$	x^2
				u_2	u_1	$u_1\,g_2+u_2\,g_1$	x^3
					u_2	$u_2\,g_2$	x^4

$\underline{u} = [u_0\ \ u_1\ \ u_2\ ]^T$
$\underline{g} = [g_0\ \ g_1\ \ g_2\ ]^T$

S = matriz de Sylvester

$y = S\,\underline{g}$



Matriz de Silvester: Transforma multiplicação polinomial em multiplicação matricial.
Permite visualizar o sistema

CONVOLUÇÃO

Exemplo 2: Identificar uma função de transferência amostrada por meio da resposta a um impulso. $g(t)$

Solução: como exemplo seja o impulso dado por $u(t) = \delta(t) = [1 \quad 0 \quad 0]$
e a função de transferência $g(t) = [1 \quad 0.5 \quad 0.3]$

ambos amostrados com o mesmo intervalo de tempo, dt. Note que um sinal amostrado pode ser representado algebricamente usando o operador ***z****, que transforma* . $y(t-1) = z^{-1} y(t)$

Assim, é fácil mostrar que a matriz de Sylvester é uma matriz identidade (qdo a entrada é um impulso) e portanto a resposta impulsiva é:

$y(t) = g(t) = [1 \quad 0.5 \quad 0.3]$

Entrada			Sistema			Saída	
z^{-2}	z^{-1}	1	1	z^{-1}	z^{-2}	$Y(z^{-1}) = U(z^{-1})\,G(z^{-1})$	
0	0	1	1	0.5	0.3	$Y(z^{-1}) = (1+0z^{-1}+0z^{-2})\cdot(1+0.5z^{-1}+0.3z^{-2})$	
⇨	0	0	1			1	z^{0}
		0	0	1		0.5	z^{-1}
			0	0	1	0.3	z^{-2}
				0	0	0	z^{-3}
					0	0	z^{-4}

Note que:
y z^{-1} = y(t -1)

S = matriz de Sylvester

y = S g

BIBLIOGRAFIA

- Douglas C. Montgomery, **Introduction to Statistical Quality Control**, 4th Edition
- A.R. Braga, **Notas de aula "Tutorial de Instrumentação Eletrônica",** COLTEC – Setor de Eletrônica - UFMG