CARTAS DE CONTROLE DE SOMA CUMULATIVA

- Carta de Coma Cumulativa – CUSUM
- A CUSUM normalizada
- Recomendações para projeto de CUSUM
- CUSUM com resposta inicial rápida

Profa. Carmela Maria Polito Braga – DELT/EEUFMG

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

Sample, i	(a) x_i	(b) $x_i - 10$	(c) $C_i = (x_i - 10) + C_{i-1}$
1	9.45	−0.55	−0.55
2	7.99	−2.01	−2.56
3	9.29	−0.71	−3.27
4	11.66	1.66	−1.61
5	12.16	2.16	0.55
6	10.18	0.18	0.73
7	8.04	−1.96	−1.23
8	11.46	1.46	0.23
9	9.20	−0.80	−0.57
10	10.34	0.34	−0.23
11	9.03	−0.97	−1.20
12	11.47	1.47	0.27
13	10.51	0.51	0.78
14	9.40	−0.60	0.18
15	10.08	0.08	0.26
16	9.37	−0.63	−0.37
17	10.62	0.62	0.25
18	10.31	0.31	0.56
19	8.52	−1.48	−0.92
20	10.84	0.84	−0.08
21	10.90	0.90	0.82
22	9.33	−0.67	0.15
23	12.29	2.29	2.44
24	11.50	1.50	3.94
25	10.60	0.60	4.54
26	11.08	1.08	5.62
27	10.38	0.38	6.00
28	11.62	1.62	7.62
29	11.31	1.31	8.93
30	10.52	0.52	9.45

Tabela 8.1: Dados para o exemplo de CUSUM
$\mu=10$ e $\sigma=1$.

- A maior desvantagem das cartas de Shewhart é que elas somente usam as informações do processo contidas no último ponto representado (ignora a informação dada por uma sequência inteira de pontos).
    - Isto as torna relativamente insensíveis a pequenos deslocamentos do processo, de cerca de 1,5 σ ou menos.
- As duas alternativas para este caso são: a carta baseada em CUSUM e a baseada em EWMA.

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

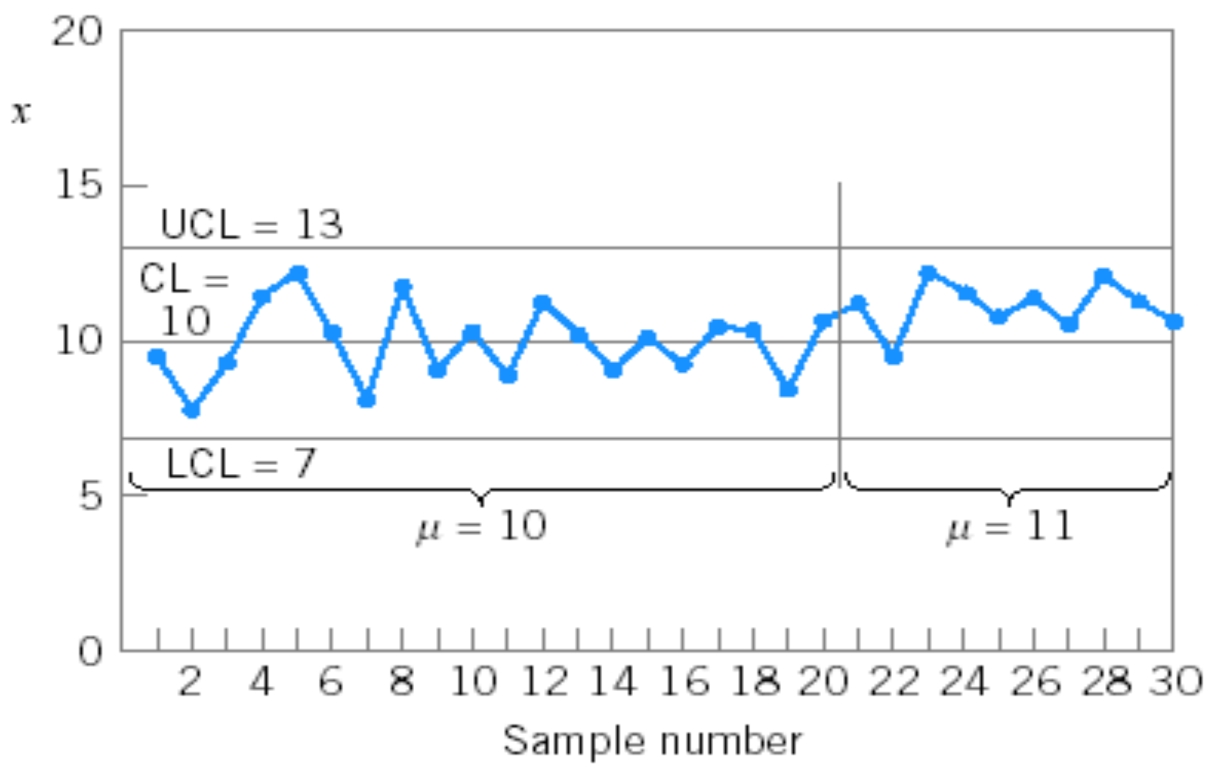


Figura 8.1: Carta de controle de Shewhart para os dados da tabela 8.1. LSC=13, Linha Central = 10, LIC=7.

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

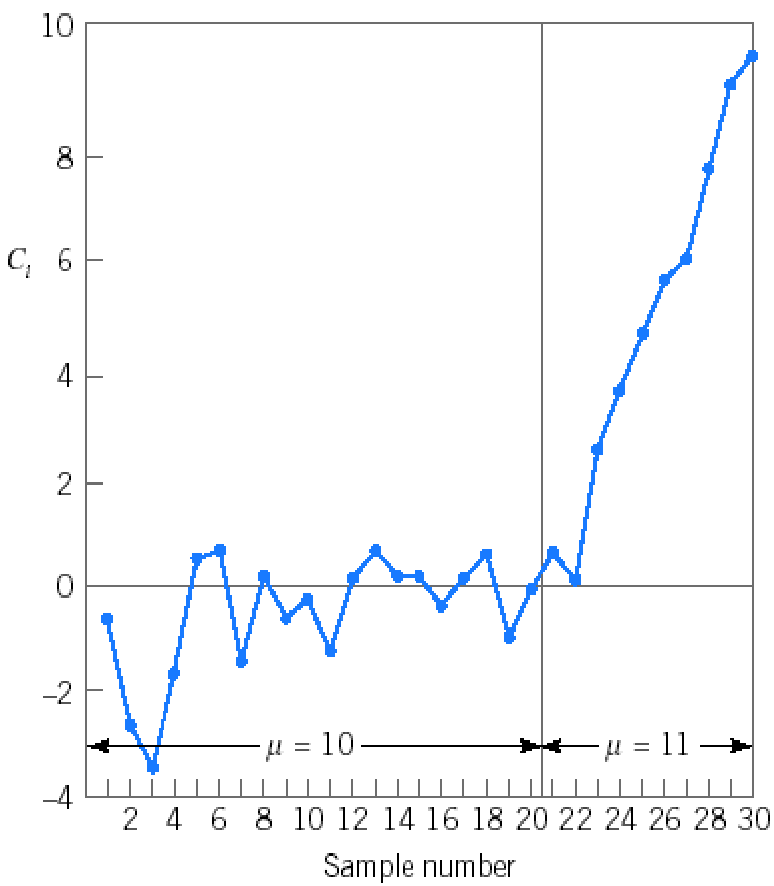
As cartas CUSUM incorporam diretamente todas as informações na seqüência dos valores amostrados por meio da representação das somas cumulativas dos desvios dos valores das amostras, em relação ao valor central (alvo | target).

Por exemplo, suponha que amostras de tamanho n>=1 são coletadas e $\overline{X}_j$ é a média da jth amostra. Assim, se μ_o é o valor alvo para a média do processo, a carta de controle para soma cumulativa é formada por meio da representação da quantidade:

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \left(\overline{x}_j - \mu_o \right)$$

em relação a amostra **i**. $\mathbf{C_i}$ é chamada de **soma cumulativa até inclusive a $\mathbf{i_{th}}$** amostra. Por combinarem informação de várias amostras, cartas para soma cumulativa são mais efetivas que Cartas de Shewhart para detectar pequenos deslocamentos do processo (e são particularmente efetivas com amostras de tamanho n=1).

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA



$$C_i = \sum_{j=1}^{i}\left(x_j - 10\right)$$
$$= \left(x_i - 10\right) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(x_j - 10\right)$$
$$= \left(x_i - 10\right) + C_{i-1}$$

Se o processo está em controle estatístico no valor alvo μo, a soma cumulativa definida pela equação anterior é um **"caminhar aleatório"** ou "*random walk*" com média zero. Entretanto, se a média se desloca em qualquer sentido, haverá uma representação clara da mesma com cusum. Valor inicial de Co=0.

Esta representação gráfica ainda não é uma carta de controle pois não possui limites de controle.

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

CUSUMS podem ser construídas para dados de observações individuais (+ frequente) ou de subgrupos racionais.

CUSUM tabular acumula desvios de **μo** acima do alvo com uma estatística, C^+ e acumula desvios de **μo** abaixo do alvo com outra estatística, C^-.

O CUSUM Tabular

$$C_i^+ = \max\left[0, x_i - (\mu_o + K) + C_{i-1}^+\right]$$

$$C_i^- = \max\left[0, (\mu_o - K) - x_i + C_{i-1}^-\right]$$

$$\text{onde os valores iniciais são } C_o^+ = C_o^- = 0$$

C^+ e C^- resetam para zero quando se tornam negativas (indicando que não há mais desvio neste sentido). Se forem > que H: fora de controle

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

O CUSUM Tabular

$$C_i^+ = \max\left[0, x_i - (\mu_o + K) + C_{i-1}^+\right]$$

$$C_i^- = \max\left[0, (\mu_o - K) - x_i + C_{i-1}^-\right]$$

onde os valores iniciais são $C_o^+ = C_o^- = 0$

$$\mu_1 = \mu_o + \delta\sigma \Rightarrow \delta\sigma = \mu_1 - \mu_o$$

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_o|}{2}$$

$$\mathrm{H} = h\sigma \;\; \mathrm{e} \;\; \mathrm{K} = \mathrm{k}\sigma$$

H: intervalo de decisão

H = 5σ

K é chamado **Valor de Referência,** e é frequentemente escolhido como “meio caminho” entre o **alvo**, *μo*, e o **valor de média fora de controle**, *μ1*, que deseja-se detectar rapidamente. O deslocamento da média é expresso em termos de unidades de desvio (δσ).

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

- Os cálculos para CUSUM tabular são demonstrados pelos dados da tabela 8-1. O valor alvo é **μo=10,** o tamanho da mostra (subgrupo) é **n=1**, o desvio padrão do processo é **σ=1** e suponha que a magnitude da mudança que estamos interessados em detectar **(δσ)** seja 1σ =1.(1)=1.
  - Assim, o valor da média do processo fora de controle é μ1=10+1=11. Será usado um CUSUM tabular com K=1/2=0.5 (porque a magnitude da mudança que deseja-se detectar é 1σ e σ=1) e H=5 (porque o valor recomendado do intervalo de decisão é H=5σ=5.(1).

$$C_i^+ = \max[0,\ \ x_i - 10.5 + C_0^+]$$

$$C_i^- = \max[0,\ \ 9.5 - x_i + C_0^-]$$

- Desde que k=0.5 e μo=10. O primeiro dado é x1=9.45, e como $C_o^+ = C_o^- = 0$:

$$C_i^+ = \max[0,\ \ 9.45 - 10.5 + 0] = 0$$

$$C_i^- = \max[0,\ \ 9.5 - 9.45_i + 0] = 0.05$$

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

		(a)			(b)		
Period i	x_i	$x_i - 10.5$	C_i^+	N^+	$9.5 - x_i$	C_i^-	N^-
1	9.45	−1.05	0	0	0.05	0.05	1
2	7.99	−2.51	0	0	1.51	1.56	2
3	9.29	−1.21	0	0	0.21	1.77	3
4	11.66	1.16	1.16	1	−2.16	0	0
5	12.16	1.66	2.82	2	−2.66	0	0
6	10.18	−0.32	2.50	3	−0.68	0	0
7	8.04	−2.46	0.04	4	1.46	1.46	1
8	11.46	0.96	1.00	5	−1.96	0	0
9	9.20	−1.3	0	0	0.30	0.30	1
10	10.34	−0.16	0	0	−0.84	0	0
11	9.03	−1.47	0	0	0.47	0.47	1
12	11.47	0.97	0.97	1	−1.97	0	0
13	10.51	0.01	0.98	2	−1.01	0	0
14	9.40	−1.10	0	0	0.10	0.10	1
15	10.08	−0.42	0	0	−0.58	0	0
16	9.37	−1.13	0	0	0.13	0.13	1
17	10.62	0.12	0.12	1	−1.12	0	0
18	10.31	−0.19	0	0	−0.81	0	0
19	8.52	−1.98	0	0	0.98	0.98	1
20	10.84	0.34	0.34	1	−1.34	0	0
21	10.90	0.40	0.74	2	−1.40	0	0
22	9.33	−1.17	0	0	0.17	0.17	1
23	12.29	1.79	1.79	1	−2.79	0	0
24	11.50	1.00	2.79	2	−2.00	0	0
25	10.60	0.10	2.89	3	−1.10	0	0
26	11.08	0.58	3.47	4	−1.58	0	0
27	10.38	−0.12	3.35	5	−0.88	0	0
28	11.62	1.12	4.47	6	−2.12	0	0
29	11.31	0.81	5.28	7	−1.81	0	0
30	10.52	0.02	5.30	8	−1.02	0	0

Tabela 8.2: A Soma Cumulativa (CUSUM) para o exemplo 8.1.

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

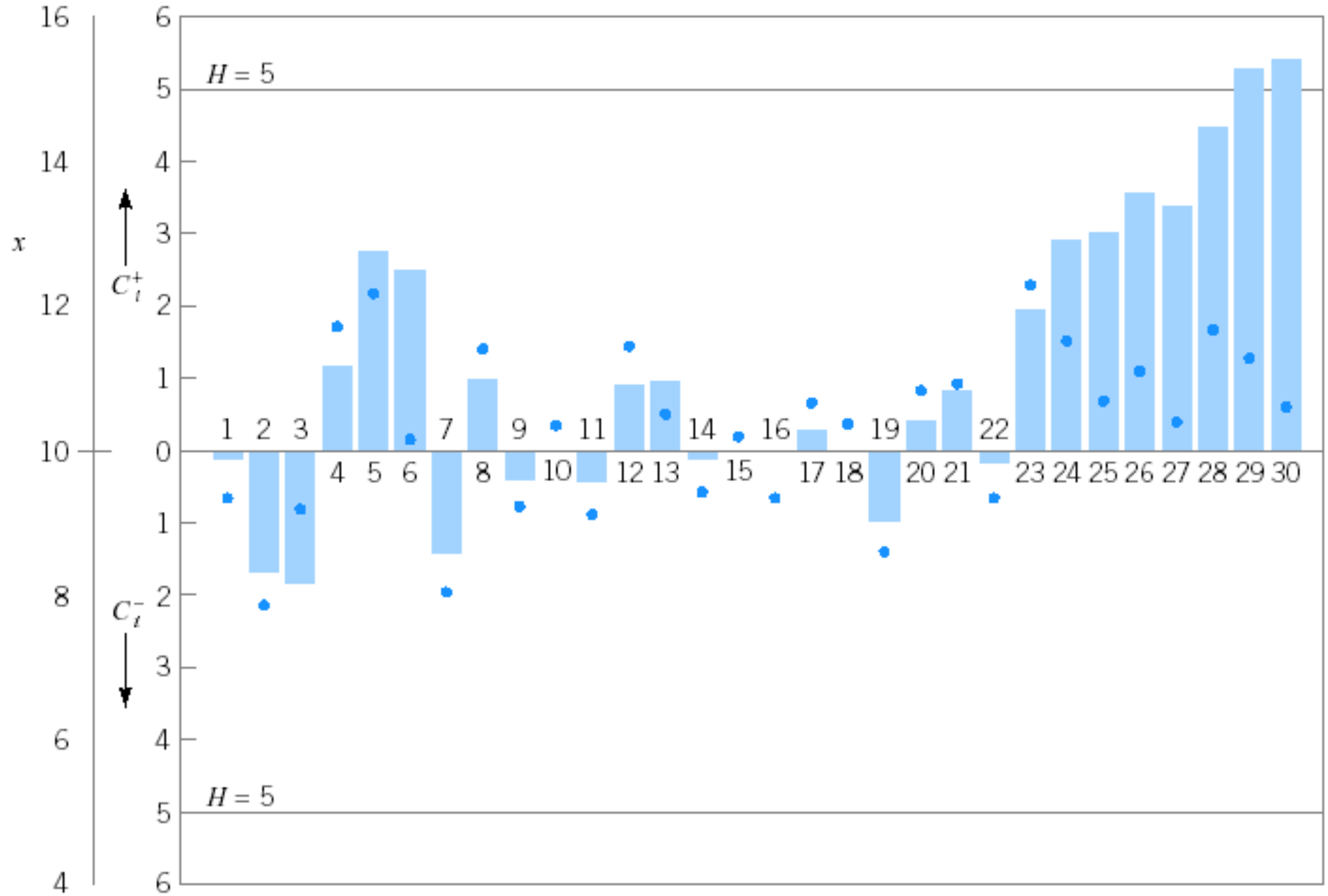
No período de amostragem 2, calcula-se:

$$C_2^+ = \max[0,\ x_2 - 10.5 + C_1^+]$$
$$= \max[0,\ x_2 - 10.5 + 0]$$
$$e$$
$$C_2^+ = \max[0,\ 9.5 - x_2 + C_1^-]$$
$$= \max[0,\ 9.5 - x_2 + 0.05]$$

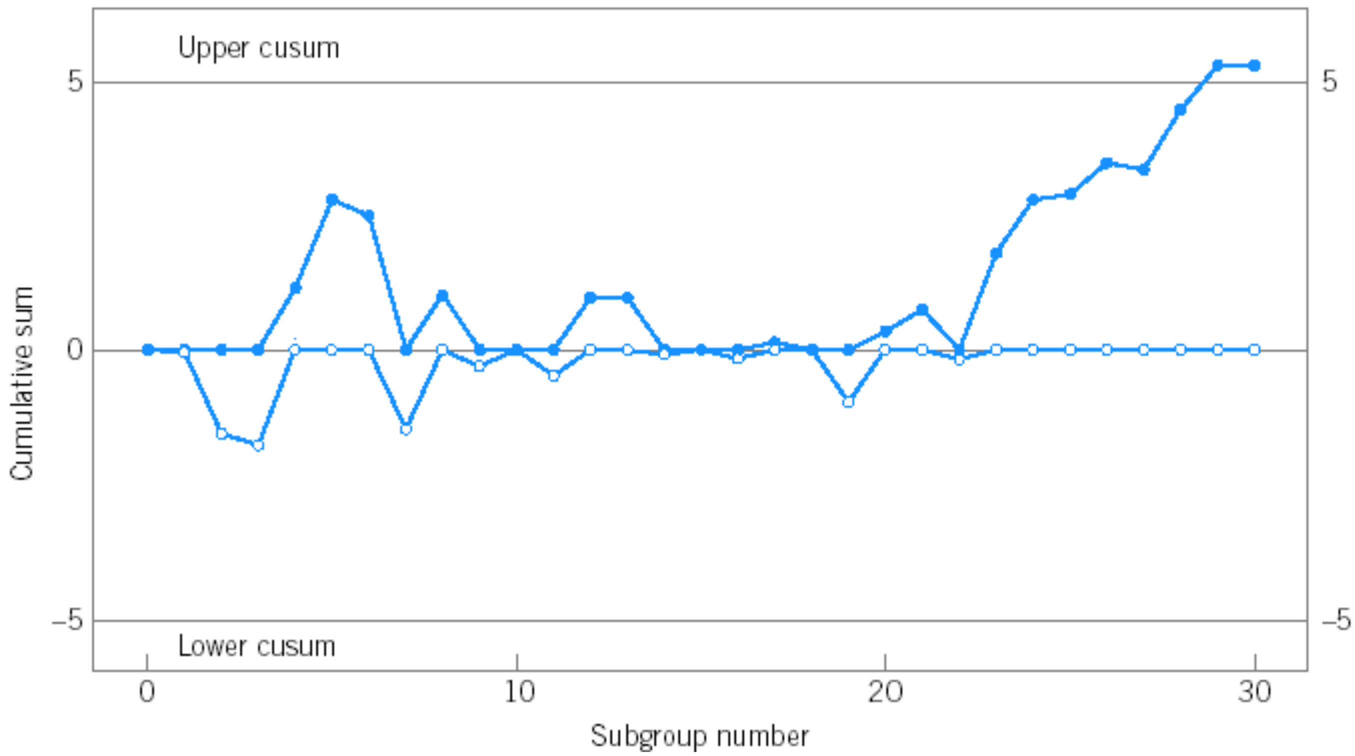
Desde que x_2 =7.99, calcula-se:

$$C_2^+ = \max[0,\ 7.99 - 10.5 + 0] = 0$$
$$e$$
$$C_2^- = \max[0,\ 9.5 - 7.99 + 0.05] = 1.56$$

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA



VERSÃO MINITAB DA CARTA DE CUSUM



$$C_i^- = \min\left(0, x_i - \mu_0 + k + C_{i-1}^-\right)$$

CARTA DE CONTROLE DE SOMA CUMULATIVA

Nas situações onde é desejável ajustar uma variável manipulada para trazer o processo de volta à média desejada – o alvo - ter uma estimativa da nova média do processo após o deslocamento é importante. Esta pode ser calculada da seguinte forma:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \dfrac{C_i^+}{N^+}, & se \;\; C_i^+ > H \\ \mu_0 - K - \dfrac{C_i^-}{N^-}, & se \;\; C_i^- > H \end{cases}$$

Para ilustrar o uso desta equação, considere a CUSUM no período 29, com C_{29}^+=5,28. A nova média do processo estimada é:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \mu_0 + K + \frac{C_{29}^+}{N^+} \\ &= 10.0 + 0.5 + \frac{5.28}{7} \\ &= 11.25 \end{aligned}$$

A CUSUM NORMALIZADA

Alguns usuários de CUSUM podem preferir normalizar a variável x_i antes de realizar os cálculos da soma cumulativa. Seja :

$$y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma}$$

o valor normalizado de x_i. Então as somas cumulativas (CUSUMS) normalizadas são definidas como sendo:

$$C_i^+ = \max[0,\ y_i - k + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0,\ -\mathrm{k} - y_i + C_{i-1}^-]$$

PLANEJANDO UMA CARTA CUSUM

1. Definir $H=h\sigma$ e $K= k\sigma$.

2. Considerar que σ é o desvio padrão da variável amostral usada na formação do CUSUM.

3. Usar $h=4$ ou $h=5$ e $k=0,5$ resultará, em geral, em um CUSUM com boas propriedades de comprimento médio (CMS) para uma mudança de aproximadamente 1σ na média do processo.

RECOMENDAÇÕES PARA PROJETO DE CUSUM

Desempenho da Cusum tabular com k=1/2 e h=4 ou h=5.

Shift in Mean (multiple of σ)	$h = 4$	$h = 5$
0	168	465
0.25	74.2	139
0.50	26.6	38.0
0.75	13.3	17.0
1.00	8.38	10.4
1.50	4.75	5.75
2.00	3.34	4.01
2.50	2.62	3.11
3.00	2.19	2.57
4.00	1.71	2.01

- Observar que uma mudança de 1σ é detectada em 8,38 amostras com h=4 e em 10,4 amostras com h=5.
- Para h=4,77 o cusum terá CMS_0 = 370 amostras, equivalente a uma carta de Shewhart com limites +/-3σ.

RECOMENDAÇÕES PARA PROJETO DE CUSUM

Valores de k e valores correspondentes de h que produzem CMS (ARL) = 370 para Cusum tabular de dois lados (Hawkins, 1993a).

k	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
h	8.01	4.77	3.34	2.52	1.99	1.61

Observar que para k=0,5, h=4,77, conforme comentado no slide anterior.

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

Para melhorar a performance da Cusum para grandes deslocamentos: usar o esquema combinado cusum-Shewhart (*apenas substituir o limite de controle H pelos limites de Shewhart a +/- 3,5 σ da linha central*).

Table 8-5 ARL Values for Some Modifications of the Basic Cusum with $k = \frac{1}{2}$ and $h = 5$ (If subgroups of size $n > 1$ are used, then $\sigma = \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$)

Shift in Mean (multiple of σ)	(a) Basic Cusum	(b) Cusum-Shewhart (Shewhart limits at 3.5σ)	(c) Cusum with FIR	(d) FIR Cusum-Shewhart (Shewhart limits at 3.5σ)
0	465	391	430	360
0.25	139	130.9	122	113.9
0.50	38.0	37.20	28.7	28.1
0.75	17.0	16.80	11.2	11.2
1.00	10.4	10.20	6.35	6.32
1.50	5.75	5.58	3.37	3.37
2.00	4.01	3.77	2.36	2.36
2.50	3.11	2.77	1.86	1.86
3.00	2.57	2.10	1.54	1.54
4.00	2.01	1.34	1.16	1.16

CARTA DE CONTROLE PARA SOMA CUMULATIVA

- Com cartas de Shewhart, o uso de médias de subgrupos racionais, com n>1, melhora substancialmente o desempenho das cartas de controle. Isso nem sempre acontece para Cusums que, frequentemente, trabalham melhor com n=1.
- Mas é possível utilizar Cusum, também, com médias de subgrupos racionais com n>1, bastando substituir x_i por $\overline{x_i}$ (média amostral ou do subgrupo) e substituir σ por $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$.
- Uma razão prática para usar n>1 com Cusum é a possibilidade de ajustar uma carta para variância amostral e usá-la para monitorar a variabilidade do processo (Hawkins and Olwell, 1998 e Chang and Gan, 1995).

CUSUM RESPOSTA INICIAL RÁPIDA (FIR)

- Ajuste o valor inicial de C+ e C- igual a *H*/2 (headstart típico de 50%).
- Processo com μ=100 e K=3 e H=12.

$$C_i^+ = \max\left[0, x_1 - 103 + C_0^+\right]$$
$$= \max[0, 102 - 103 + 6] = 5$$
$$C_i^- = \left[0, 97 - x_1 + C_0^-\right]$$
$$= \max[0, 97 - 102 + 6] = 1$$

Table 8-6 A Cusum with a Headstart, Process Mean Equal to 100

		(a)			(b)		
Period i	x_i	$x_i - 103$	C_i^+	N^+	$97 - x_i$	C_i^-	N^-
1	102	−1	5	1	−5	1	1
2	97	−6	0	0	0	1	2
3	104	1	1	1	−7	0	0
4	93	−6	0	0	4	4	1
5	100	−3	0	0	−3	1	2
6	105	2	2	1	−8	0	0
7	96	−7	0	0	1	1	1
8	98	−5	0	0	−1	0	0
9	105	2	2	1	−8	0	0
10	99	−4	0	0	−2	0	0

CUSUM RESPOSTA INICIAL RÁPIDA (FIR)

- Mesmo processo do slide anterior com média de operação deslocada para μ=107.

Table 8-7 A Cusum with a Headstart, Process Mean Equal to 105

		(a)			(b)		
Period i	x_i	$x_i - 103$	C_i^+	N^+	$97 - x_i$	C_i^-	N^-
1	107	4	10	1	−10	0	0
2	102	−1	9	2	−5	0	0
3	109	6	15	3	−12	0	0
4	98	−5	10	4	−1	0	0
5	105	2	12	5	−8	0	0
6	110	7	19	6	−13	0	0
7	101	−2	17	7	−4	0	0
8	103	0	17	8	−6	0	0
9	110	7	24	9	−13	0	0
10	104	1	25	10	−7	0	0

- H = 12 implica os sinais de cusum na amostra 3 (*que excede o limite de controle H=12*)
- Sem o headstart, isto pode não ser sinalizado antes da amostra 6.

CUSUM RESPOSTA INICIAL RÁPIDA (FIR)

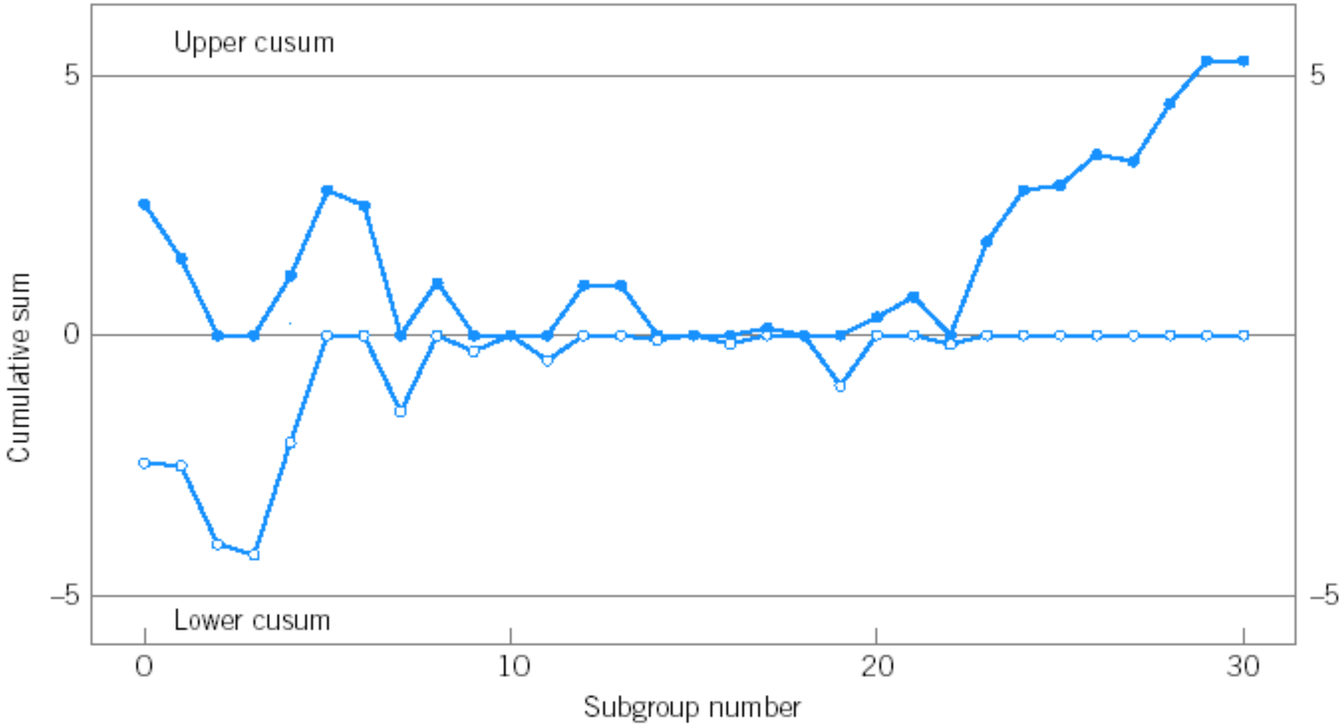


Figura 8.4: Uma Carta de Soma Cumulativa (CUSUM) ,feita em Minitab , ilustrando a resposta inicial rápida ou característica de Headstart.

OUTROS DETALHES EM CUSUMS

- Cusums são frequentemente usadas para determinar se um processo saiu de uma especificação alvo porque é fácil calcular o ajuste requirido.
- Cusums de um lado são muito usuais.
- Cusums podem ser usadas, também, para monitorar variabilidade.
- Cusums são disponíveis para outras estatísticas de amostra (ranges, desvio padrão, contadores, proporções).
- Subgrupos racionais e cusums.

BIBLIOGRAFIA

1. **Douglas C. Montgomery**: *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Edition.
2. **Manzic, C. L**.: "Statistical Process Control: Practical Guides for Measurement and Control", ISA, 1995.