

CARTAS DE CONTROLE PARA VARIÁVEIS

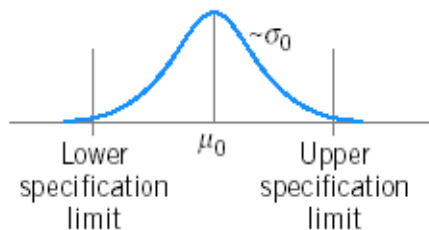
- Cartas de Controle \bar{X} e R
- Estimativa da Capacidade
- Cartas de Controle \bar{X} e S

INTRODUÇÃO

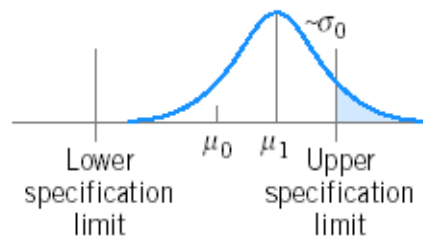
- É impossível inspecionar ou testar a qualidade em um produto; **ele deve ser feito de maneira correta da primeira vez.**
- Isto significa que o **processo de fabricação** deve ser **estável, controlado** e que todos os **indivíduos** envolvidos no processo (de operadores a engenheiros e gerentes) devem procurar, **continuamente, melhorar o desempenho** do processo e **reduzir a variabilidade** nos parâmetros chave.
- O **CEP** *on-line* é uma ferramenta indispensável para o alcance deste objetivo.

INTRODUÇÃO

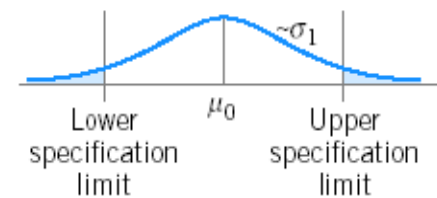
- Uma característica de qualidade que é medida em uma escala numérica é chamada de **Variável**. Ex.: Peso, volume, concentração.
- Para lidar com uma **característica de qualidade** que é uma **variável** é necessário monitorar seu **valor médio** e sua **variabilidade**.
- Isto é feito, usualmente, por meio de uma carta de controle de média, (Carta \bar{X}). Mas a variabilidade de um processo pode ser monitorada, também, por uma carta de controle para Desvio Padrão (S chart) ou por uma carta de controle para Faixa, ou Range (R chart).



(a)



(b)



(c)

CARTAS DE CONTROLE PARA \bar{X} - R

- Base estatística das cartas:
- Suponha que a característica de qualidade é normalmente distribuída, com média μ e desvio padrão σ conhecidos. Se x_1, x_2, \dots, x_n é uma amostra de tamanho n , então a média da amostra é:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- E sabe-se que \bar{X} é normalmente distribuída com média μ e desvio padrão $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Além disso, a probabilidade de que qualquer média amostral irá estar entre os limites seguintes é $1-\alpha$:

$$\mu + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad e \quad \mu - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

SUB-GRUPOS DE DADOS SENDO DESCONHECIDOS μ E Σ

- Deve-se estimar μ e σ de amostras preliminares ou subgrupos provenientes do processo, sob controle estatístico, baseado em +/- 20 a 25 amostras de 4, 5 ou 6 elementos (resultado da construção de subgrupos racionais).
- Seja $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_m$ a média de cada m amostras, então, a média geral, $\bar{\bar{X}}$, é a melhor estimativa da média, μ , do processo .

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

SUB-GRUPOS DE DADOS SENDO DESCONHECIDOS μ E σ

- Assim, $\bar{\bar{X}}$ pode ser a linha central numa carta de controle tipo \bar{X} .
- O range ou amplitude de uma amostra é dado por:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- Seja R_1, R_2, \dots, R_m os ranges, ou amplitudes, das m amostras. O Range Médio, ou Amplitude Média é:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

CARTAS DE CONTROLE PARA \bar{X} -R

Limites de Controle para Cartas Tipo \bar{X}

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

A constante A_2 é tabulada para vários tamanhos de amostra no apêndice do livro texto Tabela VI

Limites de Controle para Cartas Tipo \bar{R}

$$UCL = D_4 \bar{R}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{R}$$

$$LCL = D_3 \bar{R}$$

As constantes D_3 e D_4 são tabuladas para vários tamanhos de amostra no apêndice do livro texto Tabela VI

DEDUÇÃO DA CONSTANTE A2

No capítulo 3 a variável aleatória $W = R/\sigma$ é chamada de *amplitude relativa*. Os parâmetros da distribuição de W são funções do tamanho da amostra n . A média de W é d_2 ($\sigma = R/W$).

Dessa maneira, se \bar{R} é a amplitude média das m amostras preliminares, pode-se usar a equação seguinte para estimar σ :

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Usando $\bar{\bar{X}}$ como estimador de μ e $\frac{\bar{R}}{d_2}$ como estimador de σ , os parâmetros da carta \bar{X} são:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \quad \text{onde } A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$$

FASE I: APLICAÇÃO DE CARTAS TIPO \bar{X} - R

- As equações definidas como limites de controle para as cartas anteriores são **limites de controle tentativos**, determinados de *m* amostras iniciais.
 - Tipicamente 20-25 sub-grupos de tamanho *n* entre 3 e 5.
- Qualquer ponto fora de controle deve ser examinado para averiguar possíveis causas especiais
 - Se forem encontradas causas especiais, descartar pontos dos cálculos e revisar os limites de controle tentativos.
 - Continuar analisando até que todos os pontos sejam “plotados” em controle.
 - Adotar resultados dos limites de controle tentativos para uso.

FASE I: APLICAÇÃO DE CARTAS TIPO \bar{X} - R

- Se nenhuma causa atribuível for encontrada, existem duas opções:
 - Eliminar pontos como se causas especiais houvesse sido detectadas e revisar os limites.
 - Manter os pontos e considerar os limites apropriados para controle.
- Se existem muitos pontos fora de controle eles devem ser examinados para detectar padrões que possam identificar problemas no processo em análise.

EX.: ESPESSURA DE PASTILHAS

Sample Number	Wafers					\bar{x}_i	R_i
	1	2	3	4	5		
1	1.3235	1.4128	1.6744	1.4573	1.6914	1.5119	0.3679
2	1.4314	1.3592	1.6075	1.4666	1.6109	1.4951	0.2517
3	1.4284	1.4871	1.4932	1.4324	1.5674	1.4817	0.1390
4	1.5028	1.6352	1.3841	1.2831	1.5507	1.4712	0.3521
5	1.5604	1.2735	1.5265	1.4363	1.6441	1.4882	0.3706
6	1.5955	1.5451	1.3574	1.3281	1.4198	1.4492	0.2674
7	1.6274	1.5064	1.8366	1.4177	1.5144	1.5805	0.4189
8	1.4190	1.4303	1.6637	1.6067	1.5519	1.5343	0.2447
9	1.3884	1.7277	1.5355	1.5176	1.3688	1.5076	0.3589
10	1.4039	1.6697	1.5089	1.4627	1.5220	1.5134	0.2658
11	1.4158	1.7667	1.4278	1.5928	1.4181	1.5242	0.3509
12	1.5821	1.3355	1.5777	1.3908	1.7559	1.5284	0.4204
13	1.2856	1.4106	1.4447	1.6398	1.1928	1.3947	0.4470
14	1.4951	1.4036	1.5893	1.6458	1.4969	1.5261	0.2422
15	1.3589	1.2863	1.5996	1.2497	1.5471	1.4083	0.3499
16	1.5747	1.5301	1.5171	1.1839	1.8662	1.5344	0.6823
17	1.3680	1.7269	1.3957	1.5014	1.4449	1.4874	0.3589
18	1.4163	1.3864	1.3057	1.6210	1.5573	1.4573	0.3153
19	1.5796	1.4185	1.6541	1.5116	1.7247	1.5777	0.3062
20	1.7106	1.4412	1.2361	1.3820	1.7601	1.5060	0.5240
21	1.4371	1.5051	1.3485	1.5670	1.4880	1.4691	0.2185
22	1.4738	1.5936	1.6583	1.4973	1.4720	1.5390	0.1863
23	1.5917	1.4333	1.5551	1.5295	1.6866	1.5592	0.2533
24	1.6399	1.5243	1.5705	1.5563	1.5530	1.5688	0.1156
25	1.5797	1.3663	1.6240	1.3732	1.6887	1.5264	0.3224
						$\Sigma \bar{x}_i = 37.6400$	$\Sigma R_i = 8.1302$
						$\bar{\bar{x}} = 1.5056$	$\bar{R} = 0.32521$

EX.: ESPESSURA DE PASTILHAS

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{8.1302}{25} = 0.32521$$

$$\text{LCL} = \bar{R}D_3 = 0.32521(0) = 0$$

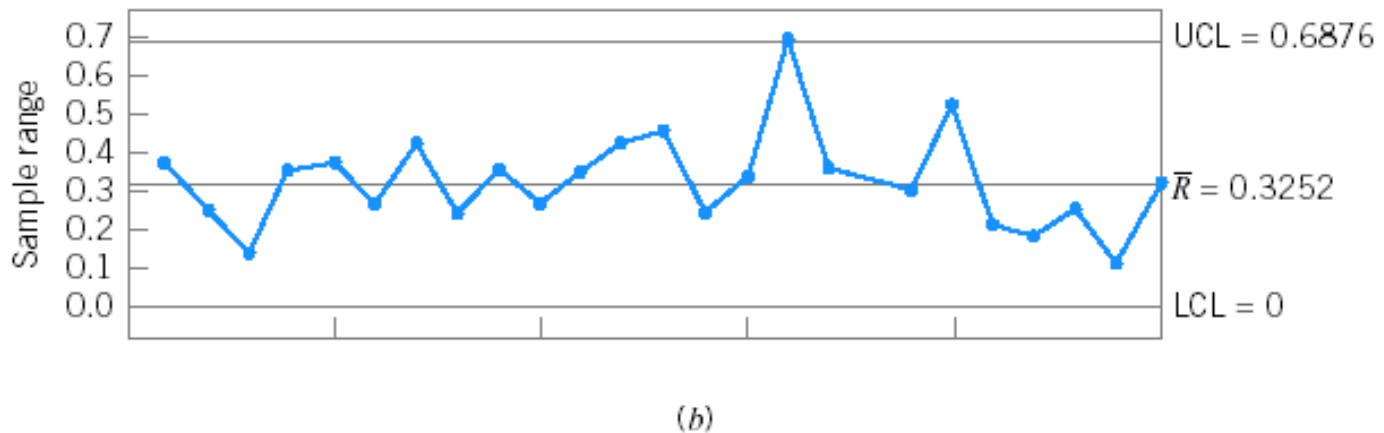
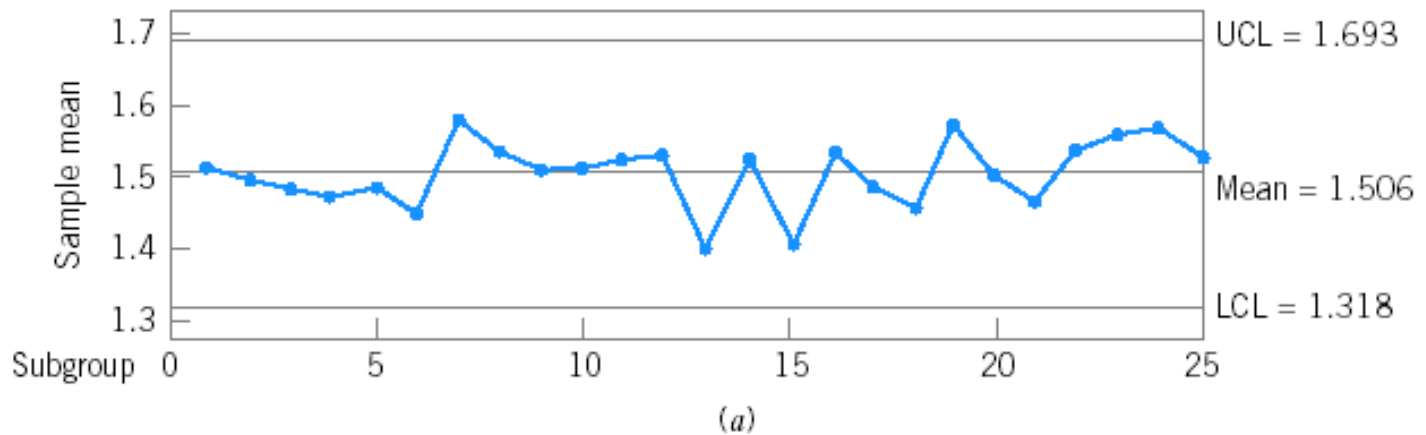
$$\text{UCL} = \bar{R}D_4 = 0.32521(2.114) = 0.68749$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{37.6400}{25} = 1.5056$$

$$\text{UCL} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} = 1.5056 + (0.577)(0.32521) = 1.69325$$

$$\text{LCL} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} = 1.5056 - (0.577)(0.32521) = 1.31795$$

EX.: ESPESSURA DE PASTILHAS



Ex. : Cartas de Controle de Média (\bar{X}) e de Range (R)

ESTIMANDO A CAPACIDADE DO PROCESSO (CAPABILITY)

- As cartas tipo \bar{X} e R provêm informações a respeito do desempenho ou Capacidade do processo de produzir em conformidade com as especificações.
- De uma carta \bar{X} , proveniente de 25 amostras, com 5 medidas de diâmetros de anéis de pistão, pode-se estimar o diâmetro médio como 74.001mm (valor central da carta de controle) e o range médio como 0,023. O desvio padrão pode ser estimado como sendo:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.023}{2.326} = 0.0099$$

ESTIMANDO A CAPACIDADE DO PROCESSO (CAPABILITY)

- Os limites de especificação destes anéis de pistão são: 74,000+/-0.05mm. Os dados de uma carta de controle podem ser usados para descrever a capacidade do processo de produzir anéis dentro desta especificação.
- Assumindo que este diâmetro é uma variável aleatória, normalmente distribuída, com média 74.001 e desvio padrão 0.0099, pode-se estimar a fração de anéis não conformes produzidos como :

$$p = P\{x < 73.950\} + P\{x > 74.050\}$$

$$p = \varphi\left(\frac{73.950 - 74.001}{0.0099}\right) + 1 - \varphi\left(\frac{74.050 - 74.001}{0.0099}\right)$$

$$p = \varphi(-5.15) + 1 - \varphi(4.04) - \text{tabela Appendix II (distribuição normal cumulativa)}$$

$$p \cong 0.00002$$

ESTIMANDO A CAPACIDADE DO PROCESSO (CAPABILITY)

- Isto significa que 0.002% (20 partes por milhão(ppm)) de anéis produzidos estarão fora de conformidade. (**p** aqui é a porcentagem produzida fora da banda de especificação ou banda conforme.)
- Outra maneira de expressar capacidade é em termos da Razão ou Índice da Capacidade do Processo, C_p , (RCP ou Process Capability Ratio - PCR), que para uma característica de qualidade com especificação de limites superior e inferior é:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

ESTIMANDO A CAPACIDADE DO PROCESSO (CAPABILITY)

- Deve-se notar que a "*largura*" de 6σ do processo é a definição básica de capacidade do mesmo.
- Desde que σ é normalmente desconhecido nós devemos substituí-lo por sua estimativa:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.023}{2.326} = 0.0099$$

- Resultando numa estimativa \hat{c}_p de c_p . Para o caso do processo dos anéis de pistão:

- A quantidade \hat{p} é a porcentagem da banda de especificação que o processo usa.

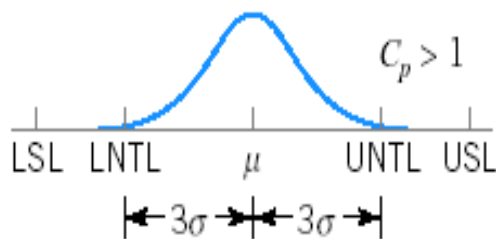
$$\hat{C}_p = \frac{74.05 - 73.95}{6(0.0099)} = \frac{0.10}{0.0594} = 1.68$$

- No caso dos anéis de pistão, o processo usa até cerca de 60% da banda de especificação.

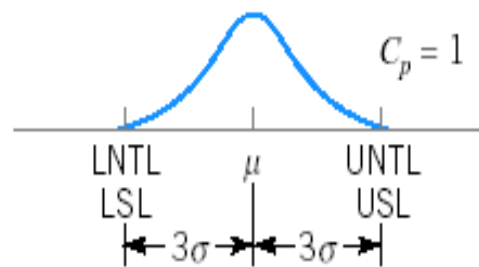
$$\hat{p} = \frac{1}{\hat{C}_p} \cdot 100\% = \frac{1}{1.68} \cdot 100\%$$

$$\hat{p} = 59.5\%$$

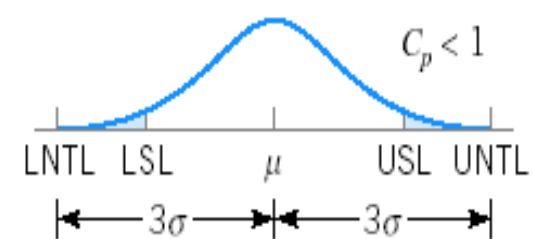
ESTIMANDO A CAPACIDADE DO PROCESSO (CAPABILITY)



(a)



(b)



(c)

Com C_p maior que 1, como no exemplo anterior, os limites de tolerância naturais, mais ou menos 3σ , estão dentro dos limites superior e inferior de especificação.

REVISÃO DOS LIMITES DE CONTROLE E DA LINHA CENTRAL

- Uso efetivo de cartas de controle requer revisão periódica e revisão de limites de controle e da linha central.
- Algumas vezes o usuário substitui a linha central na carta com o valor alvo (target value – valor desejado).
- Quando a carta R está fora de controle, pontos que estão fora de controle são, frequentemente, eliminados para recomputar um valor revisado de \bar{R} , que é usado para determinar novos limites e a linha central na carta R , além de novos limites na carta \bar{X} .

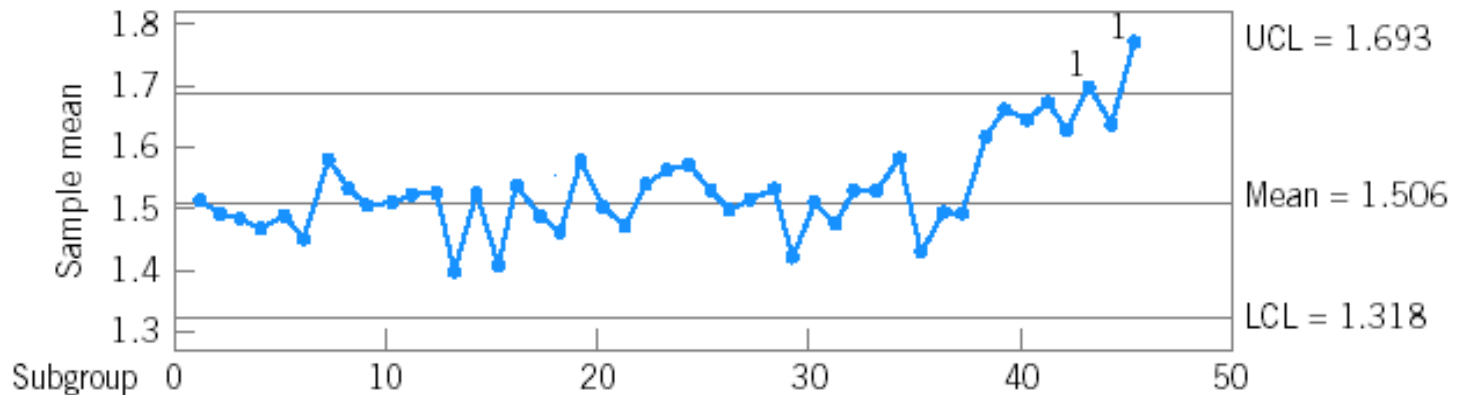
FASE II – OPERAÇÃO DE CARTAS

- Uso de cartas de controle para monitoração da produção futura, uma vez que o conjunto de limites de controle é estabelecido, é chamado *Fase II* da utilização das cartas de controle.
- Uma carta sequencial de observações individuais em cada amostra, chamada de **carta de tolerância** ou **diagrama em fila**, pode ser útil na análise de cartas de controle. Estas têm potencial para revelar algum padrão nos dados ou podem indicar um dado valor particular de média ou range que foi produzido por uma ou duas observações na amostra. Quando o tamanho da amostra é maior que 6 ou 7, o diagrama de caixa (box plot) passa a ser uma alternativa ao **diagrama em fila**.

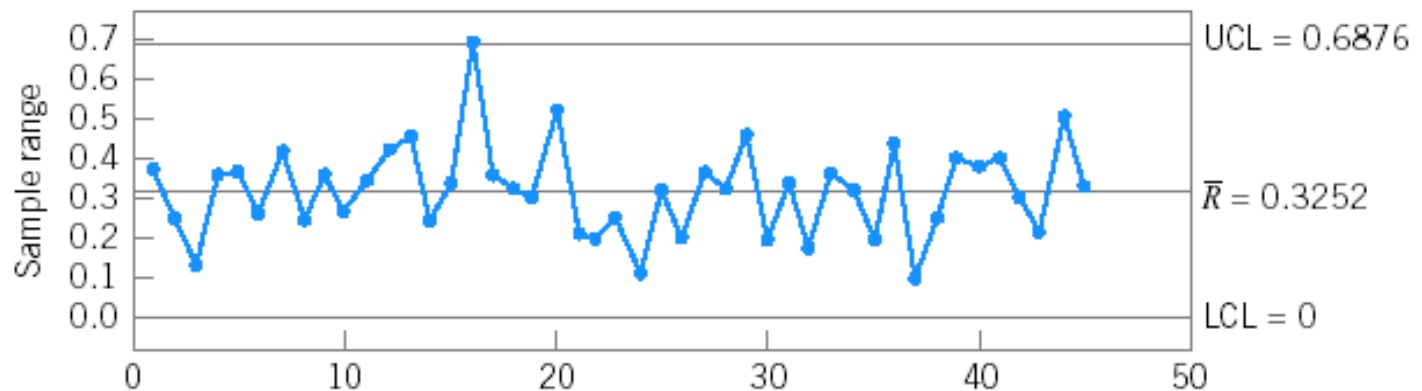
EX. ANTERIOR: FASE II - NOVAS 20 AMOSTRAS

Sample Number	Wafers					\bar{x}_i	R_i
	1	2	3	4	5		
26	1.4483	1.5458	1.4538	1.4303	1.6206	1.4998	0.1903
27	1.5435	1.6899	1.5830	1.3358	1.4187	1.5142	0.3541
28	1.5175	1.3446	1.4723	1.6657	1.6661	1.5332	0.3215
29	1.5454	1.0931	1.4072	1.5039	1.5264	1.4152	0.4523
30	1.4418	1.5059	1.5124	1.4620	1.6263	1.5097	0.1845
31	1.4301	1.2725	1.5945	1.5397	1.5252	1.4724	0.3220
32	1.4981	1.4506	1.6174	1.5837	1.4962	1.5292	0.1668
33	1.3009	1.5060	1.6231	1.5831	1.6454	1.5317	0.3445
34	1.4132	1.4603	1.5808	1.7111	1.7313	1.5793	0.3181
35	1.3817	1.3135	1.4953	1.4894	1.4596	1.4279	0.1818
36	1.5765	1.7014	1.4026	1.2773	1.4541	1.4824	0.4241
37	1.4936	1.4373	1.5139	1.4808	1.5293	1.4910	0.0920
38	1.5729	1.6738	1.5048	1.5651	1.7473	1.6128	0.2425
39	1.8089	1.5513	1.8250	1.4389	1.6558	1.6560	0.3861
40	1.6236	1.5393	1.6738	1.8698	1.5036	1.6420	0.3662
41	1.4120	1.7931	1.7345	1.6391	1.7791	1.6716	0.3811
42	1.7372	1.5663	1.4910	1.7809	1.5504	1.6252	0.2899
43	1.5971	1.7394	1.6832	1.6677	1.7974	1.6970	0.2003
44	1.4295	1.6536	1.9134	1.7272	1.4370	1.6321	0.4839
45	1.6217	1.8220	1.7915	1.6744	1.9404	1.7700	0.3187

EX. ANTERIOR: FASE II - NOVAS 20 AMOSTRAS



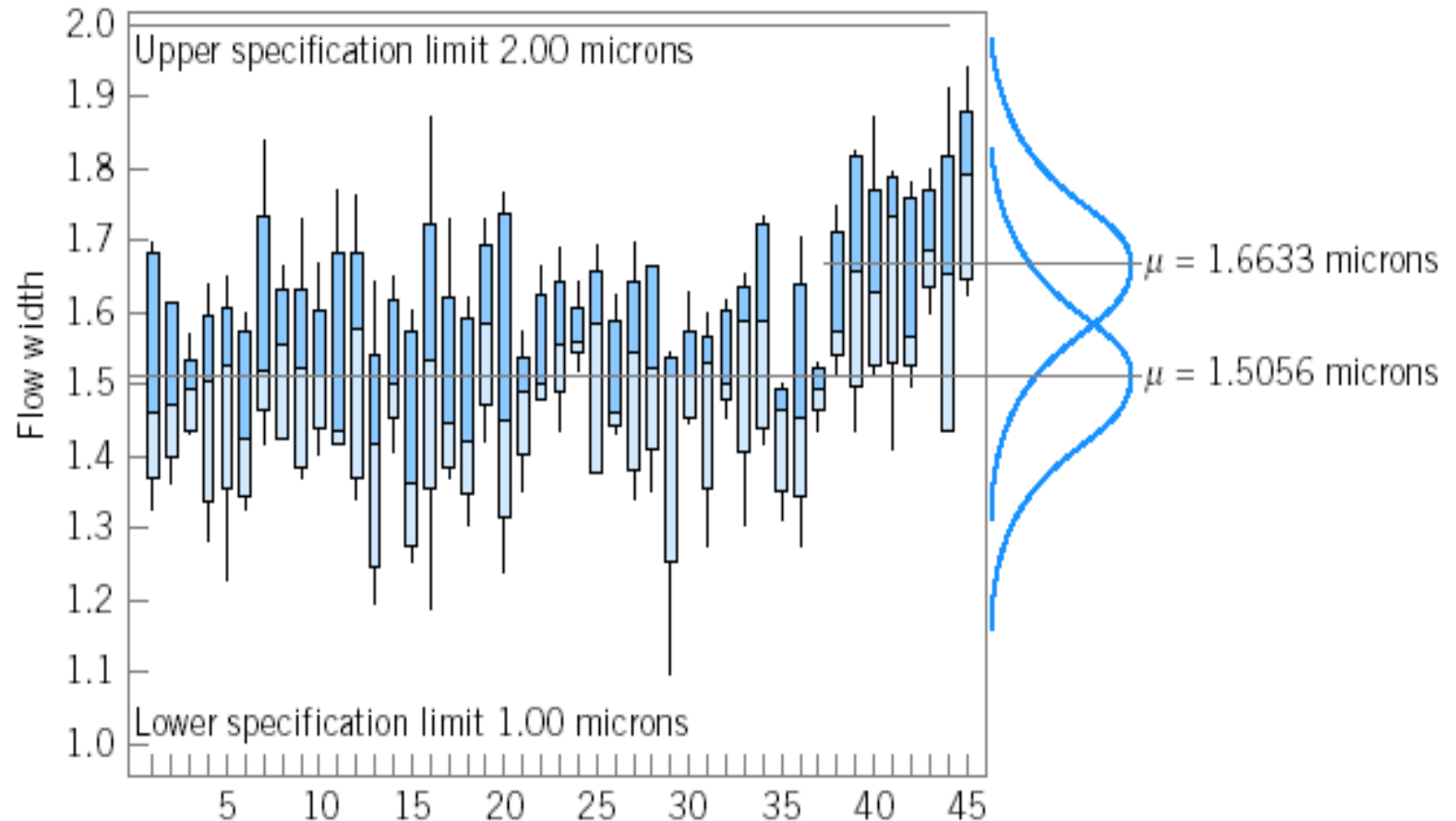
(a)



(b)

Continuação Cartas Ex. anterior com novas 20 amostras

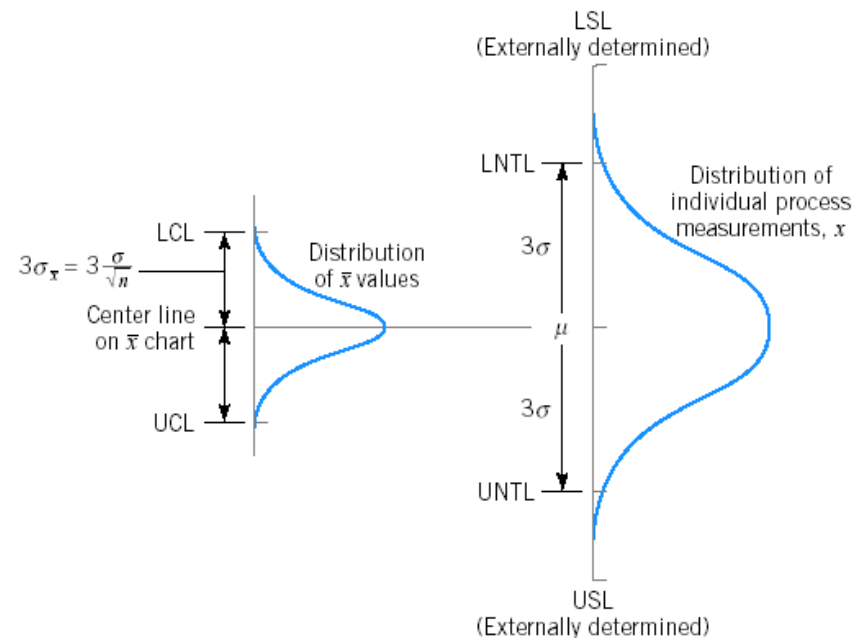
EX. ANTERIOR: FASE II - NOVAS 20 AMOSTRAS



Carta de Controle com Box Plot para o Ex. 5.1

LIMITES DE CONTROLE X LIMITES ESPECIFICADOS

- Limites de **Controle** são derivados da variabilidade natural do processo, ou dos limites **naturais de tolerância** do mesmo, medida pelo desvio padrão do processo.
- **A especificação de limites** é determinada, externamente, por exemplo, por clientes ou projetistas.
- Não existe relação matemática ou estatística entre os **limites de controle** e os **limites de especificação** do processo.



SUB-GRUPOS RACIONAIS

- Cartas \bar{X} monitoram **a variabilidade entre as amostras**.
- *Cartas R* medem **a variabilidade dentro da amostra** (ou variabilidade instantânea do processo).
- Desvio padrão estimado, σ , usado para construir os limites de controle é calculado a partir da variabilidade de **dentro da amostra** ($\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$).
- Não é correto estimar σ usando:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}{mn - 1}}$$

porque as *médias amostrais diferem entre si*, fazendo S muito grande.

DIRETRIZES PARA PROJETO DE CARTAS DE CONTROLE

- Projeto de cartas de controle requer especificação de **tamanho de amostra, “largura” dos limites de controle, e frequência de amostragem:**
 - Solução exata requer informação detalhada em características estatísticas tão bem quanto em fatores econômicos.
 - O problema da escolha de tamanho de amostra e frequência de amostragem é o de **alocação de esforços nos procedimentos de amostragem.**

DIRETRIZES PARA PROJETO DE CARTAS DE CONTROLE

- Para cartas \bar{X} , escolha um tamanho de amostra menor possível ($n = 4$ a 6) mantendo-se consistência com a magnitude do deslocamento de processo que se deseja detectar. Amostras deste tamanho são adequadas para detectar deslocamentos moderados a grandes (da ordem de 2σ ou mais).
- Para **pequenos deslocamentos**, *amostras maiores* são necessárias ($n > 10$ ou 12), embora neste caso, as cartas CUSUM e MMEP sejam mais adequadas.
- Do ponto de vista do custo associado a produção de itens defeituosos usar amostras menores e mais frequentes é melhor. Se o intervalo entre amostras for muito grande itens defeituosos poderão não ser detectados.
- Para pequenas amostras, cartas R são relativamente insensíveis a mudanças no desvio padrão do processo. Para amostras maiores ($n > 10$ ou 12), cartas S ou S^2 são escolhas melhores.

CARTAS DE CONTROLE BASEADAS NOS VALORES DE REFERÊNCIA

C
A
R
T
A
 \bar{X}

$$LCS = \mu + \sigma \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$Linhacentral = \mu$$

$$LCI = \mu - \sigma \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$LCS = \mu + A\sigma$$

$$Linhacentral = \mu$$

$$LCI = \mu - A\sigma$$

C
A
R
T
A
R

$$\sigma = R/d_2$$

Desvio padrão de R é $\sigma_R = d_3\sigma$

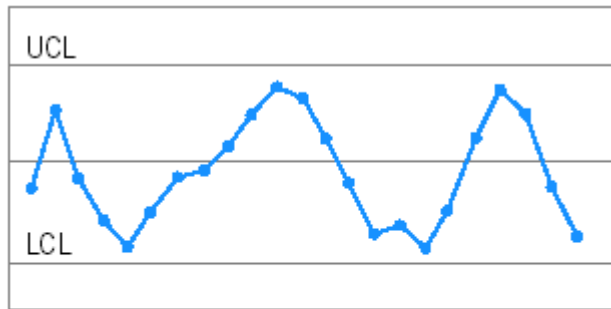
onde d_3 é o desvio padrão da distribuição da amplitude relativa

$$LCS = d_2\sigma + 3d_3\sigma = D_2\sigma$$

$$Linhacentral = d_2\sigma$$

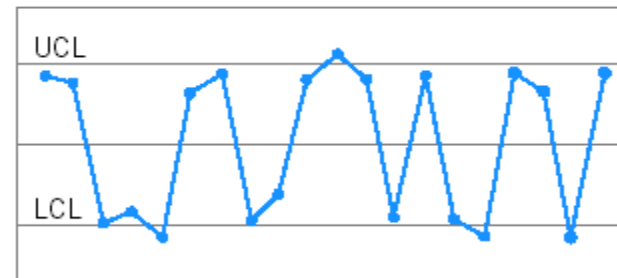
$$LCI = d_2\sigma - 3d_3\sigma = D_1\sigma$$

INTERPRETAÇÃO DE CARTAS TIPO \bar{X} - R



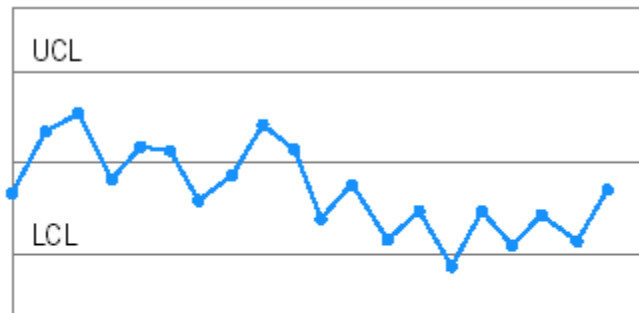
Sample number

Padrão cíclico



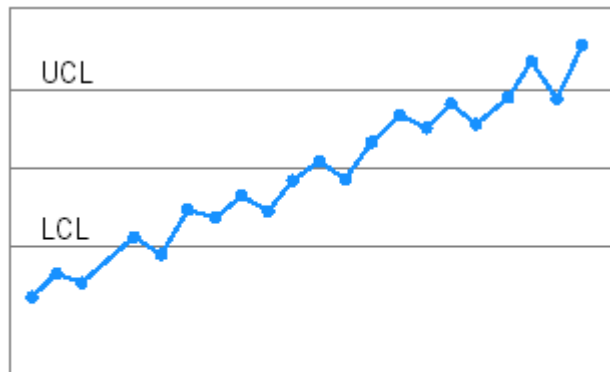
Sample number

Padrão mixto



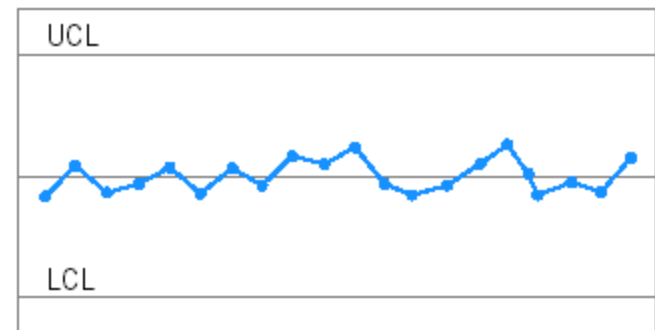
Sample number

Deslocamento de nível



Sample number

Tendência no nível



Sample number

Padrão estratificado

CARTAS DE CONTROLE PARA \bar{X} - S

Embora cartas \bar{X} e R sejam amplamente utilizadas é, ocasionalmente, desejável estimar, diretamente, o desvio padrão do processo ao invés de fazê-lo indiretamente por meio do uso do range R. Isto leva ao uso das cartas de controle para \bar{X} e S, onde S é o desvio padrão amostral. Geralmente, cartas \bar{X} e S são preferidas em relação aos seus semelhantes \bar{X} e R quando:

1. O tamanho da amostra **n** é grande, digamos **n > 10 ou 12** (lembrar que o método da amplitude para estimar **σ** perde eficiência estatística para tamanhos de amostra moderados ou grandes).
2. O tamanho da amostra **n** é variável.

CARTAS DE CONTROLE PARA $\bar{X} - S$

Estimativa de $S = E(S) = c_4 \cdot \sigma$

Desvio padrão de $S = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$

$$LSC = c_4 \sigma + 3 \sigma \sqrt{1 - c_4^2} = B_6 \sigma$$

$$LIC = c_4 \sigma - 3 \sigma \sqrt{1 - c_4^2} = B_5 \sigma$$

onde: $B_5 = c_4 - 3 \sqrt{1 - c_4^2}$

C_4 depende de n $B_6 = c_4 + 3 \sqrt{1 - c_4^2}$

CARTAS DE CONTROLE PARA $\bar{X} - S$

Se nenhum valor de referência é dado para σ , então, é preciso estimá-lo a partir de dados passados.

Suponha que **m** amostras preliminares estejam disponíveis, cada uma de tamanho **n**, e seja S_i o desvio padrão da *i*ª amostra.

A média dos **m** desvios padrão é: $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Estimador não-polarizado para σ^2

CARTAS DE CONTROLE PARA $\bar{X} - S$

A estatística $\frac{\bar{S}}{c_4}$ é um estimador não-viesado (não-polarizado) de σ . Então, os parâmetros para a carta de controle S são:

$$LSC = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_4 \bar{S}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{S}$$

$$LIC = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \bar{S}$$

Onde:

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$
$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

Notar que :

$$B_4 = \frac{B_6}{c_4} \text{ e } B_3 = \frac{B_5}{c_4}$$

CARTAS DE CONTROLE PARA \bar{X} - S

Quando $\frac{\bar{S}}{c_4}$ é usado para estimar σ , podem-se definir os limites de controle para a carta \bar{X} correspondente como:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

Definindo a constante $A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$ os parâmetros da carta \bar{X} se tornam:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$$

$$\text{Linha Central} = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$$

EX.1 : DIÂMETRO INTERNO DE ANÉIS DE PISTÃO PARA MOTOR AUTOMOTIVO

Sample Number	Observations					\bar{x}_i	S_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	74.010	0.0148
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004	74.001	0.0075
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	74.008	0.0147
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	74.003	0.0091
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	74.003	0.0122
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993	73.996	0.0087
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005	74.000	0.0055
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	73.997	0.0123
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	74.004	0.0055
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	73.998	0.0063
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	73.994	0.0029
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	74.001	0.0042
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012	73.998	0.0105
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	73.990	0.0153
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007	74.006	0.0073
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	73.997	0.0078
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007	74.001	0.0106
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	74.007	0.0070
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	73.998	0.0085
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003	74.009	0.0080
21	73.982	74.001	74.015	74.005	73.996	74.000	0.0122
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	74.002	0.0074
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	74.002	0.0119
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	74.005	0.0087
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	73.998	0.0162
						$\Sigma = 1850.028$	0.2351
						$\bar{x} = 74.001$	$\bar{s} = 0.0094$

EX.1 : DIÂMETRO INTERNO DE ANÉIS DE PISTÃO PARA MOTOR AUTOMOTIVO

Este exemplo ilustra a construção das cartas \bar{X} e \bar{S} usando os dados de medição de diâmetros internos de anéis de pistão da tabela anterior (EX1):

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = \frac{1}{25} (1850.028) = 74.001$$

e

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} s_i = \frac{1}{25} (0.2351) = 0.0094$$

Consequentemente, os parâmetros da carta \bar{X} são:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{\bar{S}} = 74.001 + (1.427)(0.0094) = 74.014$$

$$LC = \bar{\bar{X}} = 74.001$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{\bar{S}} = 74.001 - (1.427)(0.0094) = 73.988$$

e para carta \bar{S} :

$$LCS = B_4 \bar{\bar{S}} = (2.089)(0.0094) = 0.0196$$

$$LC = \bar{\bar{S}} = 0.0094$$

$$LCI = B_3 \bar{\bar{S}} = (0)(0.0094) = 0$$

EX.1 : DIÂMETRO INTERNO DE ANÉIS DE PISTÃO PARA MOTOR AUTOMOTIVO

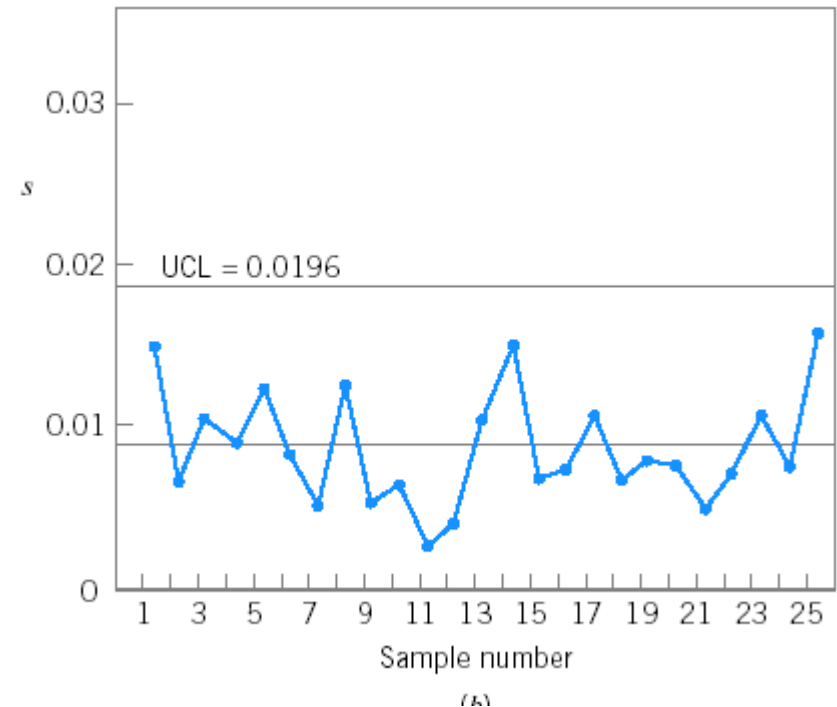
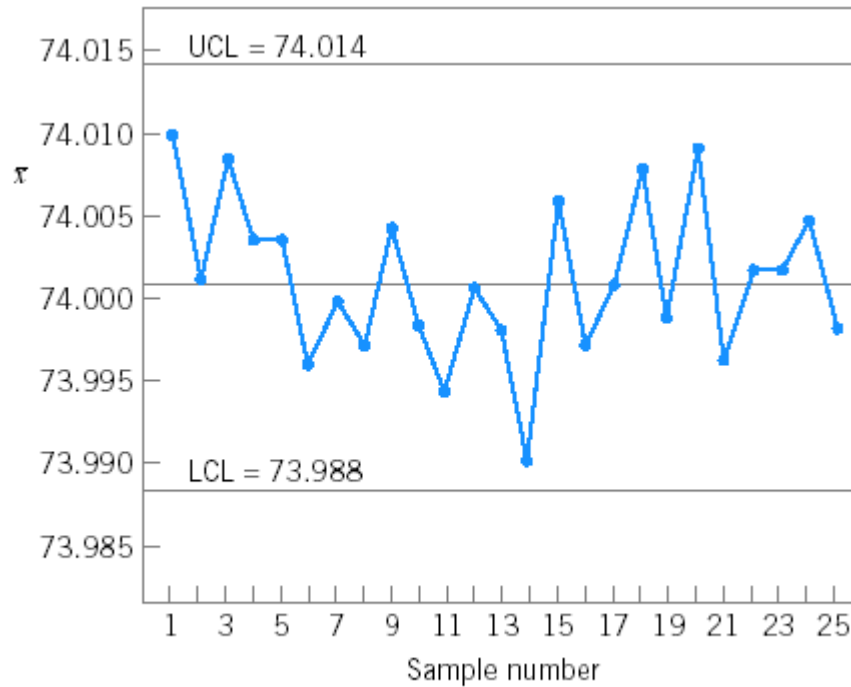


Figura EX. 1: Cartas de Controle de Média (\bar{X}), com limites de controle baseados em S, e de Desvio Padrão (S)

CARTAS DE CONTROLE PARA \bar{X} - S COM TAMANHO DE AMOSTRA VARIÁVEL

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

e

$$\bar{S} = \left[\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right]^{1/2}$$

EX.2: MEDIÇÕES DE DIÂMETRO INTERNO EM ANÉIS DE PISTÃO DE AUTOMÓVEIS

em [mm]

Sample Number	Observations					\bar{x}_i	s_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	74.010	0.0148
2	73.995	73.992	74.001			73.996	0.0046
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	74.008	0.0147
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	74.003	0.0091
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	74.003	0.0122
6	74.009	73.994	73.997	73.985		73.996	0.0099
7	73.995	74.006	73.994	74.000		73.999	0.0055
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	73.997	0.0123
9	74.008	73.995	74.009	74.005		74.004	0.0064
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	73.998	0.0063
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	73.994	0.0029
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	74.001	0.0042
13	73.983	74.002	73.998			73.994	0.0100
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	73.990	0.0153
15	74.012	74.014	73.998			74.008	0.0087
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	73.997	0.0078
17	73.994	74.012	73.986	74.005		73.999	0.0115
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	74.007	0.0070
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	73.998	0.0085
20	74.000	74.010	74.013			74.008	0.0068
21	73.982	74.001	74.015	74.005	73.996	74.000	0.0122
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	74.002	0.0074
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	74.002	0.0119
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	74.005	0.0087
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	73.998	0.0162

EX.2: MEDIÇÕES DE DIÂMETRO INTERNO EM ANÉIS DE PISTÃO DE AUTOMÓVEIS

Considere os dados da tabela anterior, que correspondem a uma modificação de dados de anéis de pistão usados no exemplo 1. Observe que os tamanhos das amostras variam de 3 a 5. Deve ser usado o procedimento descrito anteriormente para projetar as cartas de controle \bar{X} e S. A média central ponderada e o desvio padrão médio ponderado são computados das equações a seguir:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{X}} &= \frac{\sum_{i=1}^{25} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{25} n_i} = \frac{5(74.010) + 3(73.996) + \dots + 5(73.998)}{5 + 3 + \dots + 5} \\ &= \frac{8362.075}{113} = 74.001mm\end{aligned}$$

EX.2: MEDIÇÕES DE DIÂMETRO INTERNO EM ANÉIS DE PISTÃO DE AUTOMÓVEIS

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{25} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{25} n_i - 25} \right] = \left[\frac{4(0.0148)^2 + 2(0.0046)^2 + \dots + 4(0.016)^2}{5 + 3 + \dots + 5 - 25} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{0.009324}{88} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.0103\end{aligned}$$

Assim, a linha central da carta de controle é $\bar{\bar{X}} = 74.001$, e a linha central da carta S é $\bar{S} = 0.0103$. Os limites de controle agora podem ser facilmente calculados. Para ilustrar considere o primeiro exemplo. Os limites de controle para a carta \bar{X} são:

$$LCS = 74.001 + (1.427)(0.0103) = 74.016$$

$$LC = 74.001$$

$$LCI = 74.001 - (1.427)(0.0103) = 73.986$$

EX.2: MEDIÇÕES DE DIÂMETRO INTERNO EM ANÉIS DE PISTÃO DE AUTOMÓVEIS

Os limites de controle para a carta S são:

$$LCS = (2.089)(0.0103) = 0.022$$

$$LC = 0.0098$$

$$LCI = 0(0.0103) = 0$$

Note que foram usados os valores de A3, B3 e B4 para $n_1=5$. Os limites para a segunda amostra poderiam usar os valores destas constantes para $n_2=3$. O cálculo dos limites de controle para as 25 amostras são sumarizados na tabela 5.5. As cartas de controle, para este caso de cálculo, são plotadas na figura 5.18.

EX.2: MEDIÇÕES DE DIÂMETRO INTERNO (MM) EM ANÉIS DE PISTÃO DE AUTOMÓVEIS

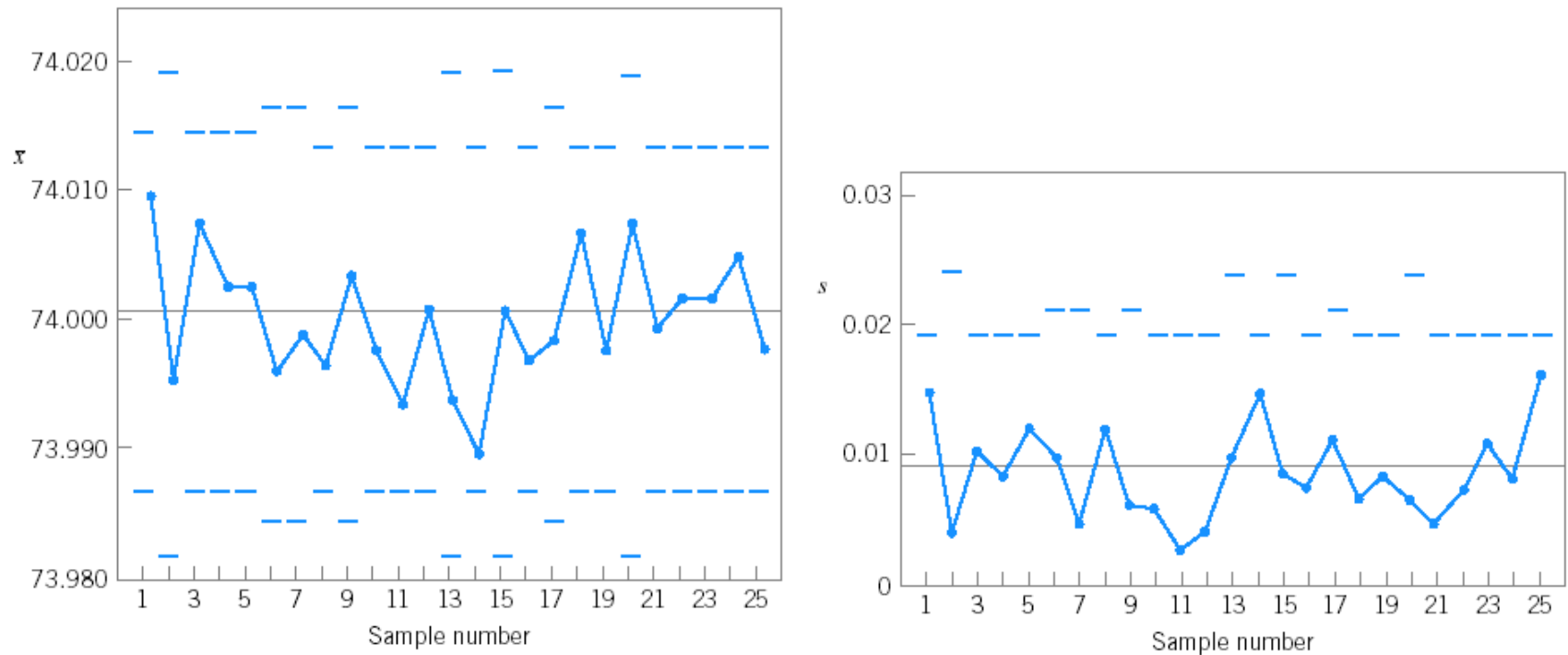


Figura EX2: Cartas de controle \bar{X} e S para dados de anéis de pistão com tamanho de amostra variável.

CARTAS DE CONTROLE DE SHEWHART PARA MEDIDAS INDIVIDUAIS

Existem muitas situações em que o tamanho da amostra utilizada para monitoramento do processo é $n=1$, ou seja, a amostra consiste de uma unidade individual. São exemplos destas situações:

1. Inspeção automática e tecnologia de medição é usada e, toda unidade manufaturada é analisada, não havendo base para escolha de subgrupos racionais.
2. A taxa de produção é muito pequena e é inconveniente permitir tamanhos de amostra maiores que 1 ($n>1$) antes de uma análise.
3. As medições diferem entre si muito mais devido as análises laboratoriais ou análises de erros, como em vários processos químicos.
4. Múltiplas medições são tomadas na mesma unidade de produto, tais como as de espessura de óxido em vários pontos de uma pastilha semicondutora.
5. Em muitas plantas de processamento contínuo, medições (on-line, sobretudo) irão diferenciar muito pouco entre uma amostra e outra, pois são variáveis dinâmicas e os processos desejavelmente regulados por sistemas de controle e automação.

CARTAS DE CONTROLE DE SHEWHART PARA MEDIDAS INDIVIDUAIS

Em muitas aplicações de cartas de controle individuais usa-se o range móvel de duas observações sucessivas como base de estimativa da variabilidade do processo. O **Range Móvel** é definido como:

$$RM_i = |x_i - x_{i-1}|$$

EX 3:

A viscosidade da principal camada de tinta de uma aeronave é uma característica de qualidade importante. O produto é produzido em bateladas, e devido ao fato de que cada batelada leva horas para ser produzida, a taxa de produção é muito lenta para permitir subgrupos racionais de tamanho maior que um. A viscosidade de 20 bateladas prévias é mostrada na tabela seguinte.

EX.3: VISCOSIDADE DA PRINCIPAL CAMADA DE TINTA DE UMA AERONAVE

Batch Number	Viscosity x	Moving Range MR
1	34.05	
2	34.40	0.35
3	33.59	0.81
4	35.96	2.37
5	34.70	1.26
6	33.51	1.19
7	33.79	0.28
8	34.04	0.25
9	34.52	0.48
10	33.75	0.77
11	33.27	0.48
12	33.71	0.44
13	34.03	0.32
14	34.58	0.55
15	34.02	0.56
16	33.97	0.05
17	34.05	0.08
18	34.04	0.01
19	33.73	0.31
20	34.05	0.32
	$\bar{x} = 34.088$	$\overline{MR} = 0.5726$

EX.3: VISCOSIDADE DA PRINCIPAL CAMADA DE TINTA DE UMA AERONAVE

Para projetar uma carta de controle com observações individuais, observe que a média amostral das 20 leituras de viscosidade é $\bar{x} = 34.088$ e que a média dos Ranges Móveis de duas observações é $\overline{RM} = 0.5726$. Para projetar uma carta de Range Móvel, usa-se $D_3=0$ e $D_4=3.267$ para $n = 2$. Assim, a carta de Range Móvel tem como linha central $\overline{RM} = 0.5726$, $LIC = 0$ e $LSC = D_4 \overline{RM} = (3.267)(0.5726) = 1.871$.

A Carta de Controle é mostrada na Figura Ex3.a. Observe que o ponto referente a amostra 4 está fora de controle.

Para a Carta de Controle com Medições Individuais os parâmetros são:

$$LCS = \bar{X} + 3 \frac{\overline{RM}}{d_2}$$

$$\text{Linha central} = \bar{X}$$

$$LCI = \bar{X} - 3 \frac{\overline{RM}}{d_2}$$

EX.3: VISCOSIDADE DA PRINCIPAL CAMADA DE TINTA DE UMA AERONAVE

Se um Range Móvel para $n = 2$ observações é usado, então $d_2 = 1.128$.
Para os dados na tabela da página 46 tem-se:

$$LCS = \bar{X} + 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} = 34.088 + 3 \frac{0.5726}{1.128} = 35.61$$

$$\text{Linha central} = \bar{X} = 34.088$$

$$LCI = \bar{X} - 3 \frac{\overline{RM}}{d_2} = 34.088 - 3 \frac{0.5726}{1.128} = 32.57$$

EX.3: VISCOSIDADE DA PRINCIPAL CAMADA DE TINTA DE UMA AERONAVE

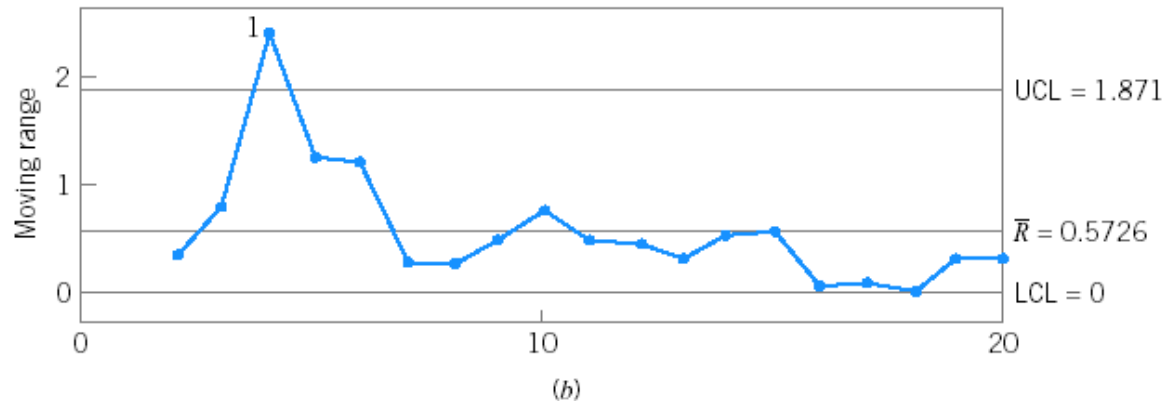
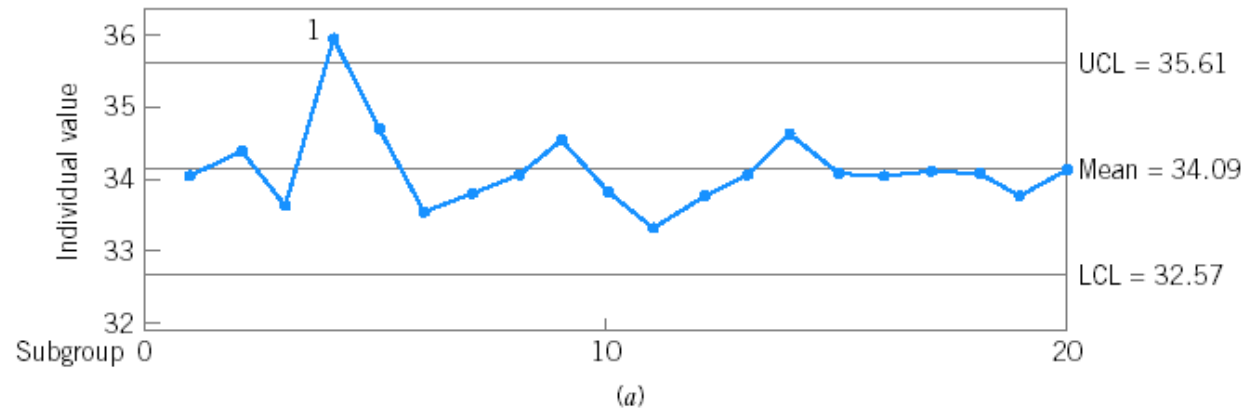


Figura EX3.a: Cartas de Controle para Range Móvel e para Observações Individuais de viscosidade.

FASE II: OPERAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLE

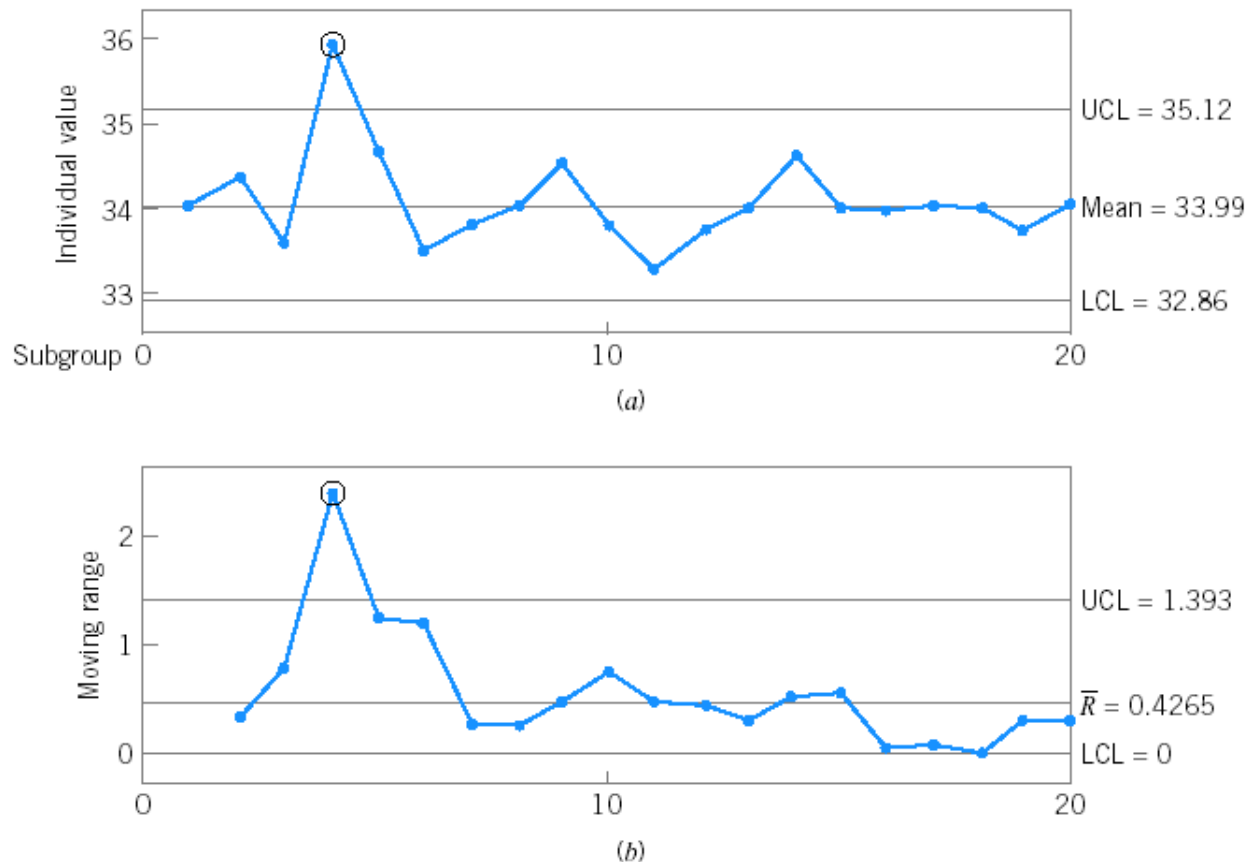


Figura Ex3.b: Cartas de Controle para Range Móvel e para Observações Individuais de viscosidade **Revisadas**.

FASE II: OPERAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLE

Tabela da pág. 46 com novos dados: Viscosidade para a principal camada de pintura de um aeronave, bateladas de 16 a 30. Range Móvel para a batelada 21 foi computado como a diferença entre as leituras das bateladas 21 e 20, que é:

$$RM_{21} = |x_{21} - x_{20}| = |(34.39 - 34.05)| = 0.34$$

Batch Number	Viscosity x	Moving Range MR
21 ^a	34.39	0.34
22	33.75	0.64
23	33.40	0.35
24	33.27	0.13
25	34.65	1.38
26	34.80	0.15
27	34.55	0.25
28	35.40	0.85
29	34.75	0.65
30	34.50	0.25
31	34.70	0.20
32	34.29	0.41
33	34.61	0.32
34	34.49	0.12
35	35.03	0.54

FASE II: OPERAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLE

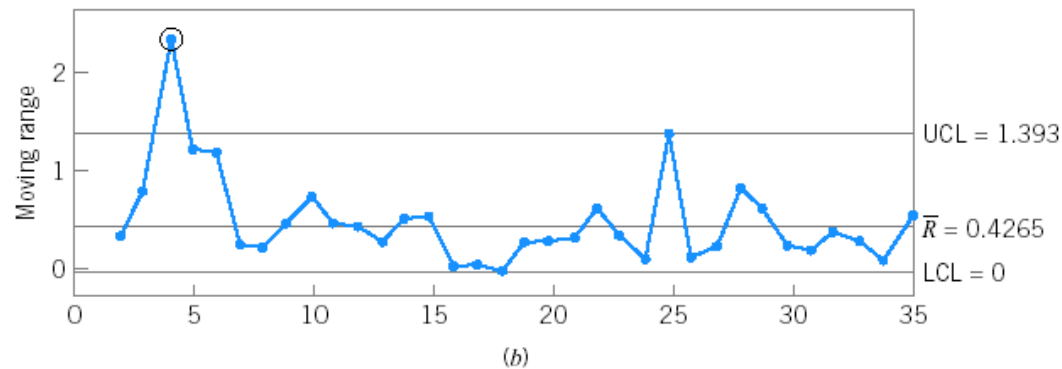
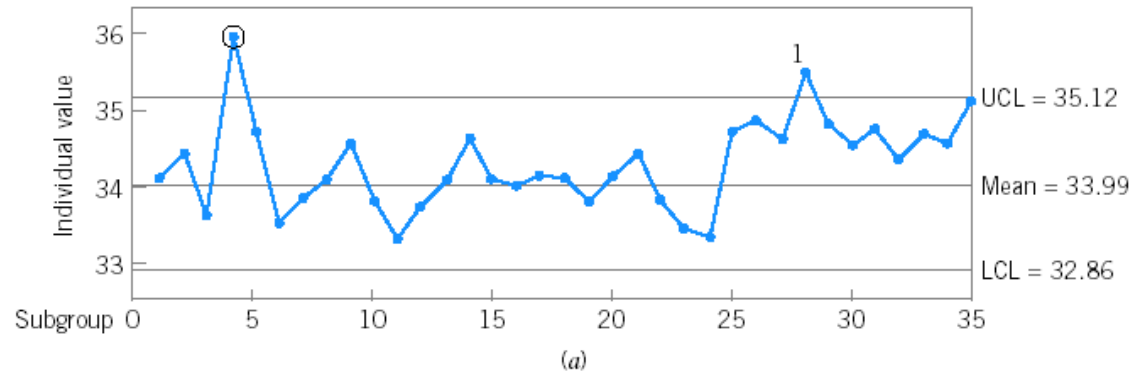


Figura EX3.c: Continuação das Cartas de Controle para Range Móvel e para Observações Individuais de viscosidade usando os dados adicionais da tabela da página 56.

BIBLIOGRAFIA

1. **Douglas C. Montgomery:** *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Edition.
2. **Manzic, C. L.:** "Statistical Process Control: Practical Guides for Measurement and Control", ISA, 1995.