

Eletromagnetismo Computacional

Problemas eletromagnéticos

Ricardo Adriano

rui@cpdee.ufmg.br

22 de outubro de 2014

- 1 A Eletrostática e o Método de Elementos Finitos
- 2 A Magnetostática e o Método de Elementos Finitos
- 3 A Quase-estática e o Método de Elementos Finitos
- 4 O Eletromagnetismo e o Método de Diferenças Finitas

Sumário

- 1 A Eletrostática e o Método de Elementos Finitos
- 2 A Magnetostática e o Método de Elementos Finitos
- 3 A Quase-estática e o Método de Elementos Finitos
- 4 O Eletromagnetismo e o Método de Diferenças Finitas

Equações da Eletrostática

Condições da eletrostática

- Todas as grandezas eletromagnéticas são constantes no tempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Não existem correntes elétricas ($\mathbf{J} = 0$)

Aplicando essas restrições às equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Observa-se que na Eletrostática não há fontes de campo magnético e que o campo elétrico é conservativo e gerado pelas distribuições de carga

Equações da Eletrostática

Equações fundamentais da Eletrostática

As equações fundamentais para a solução de problemas em eletrostática são:

As equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

As condições de interface

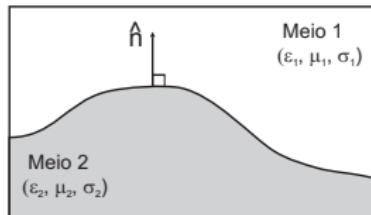
$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{Para um meio linear}$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{sup}$$

Equação constitutiva

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}$$

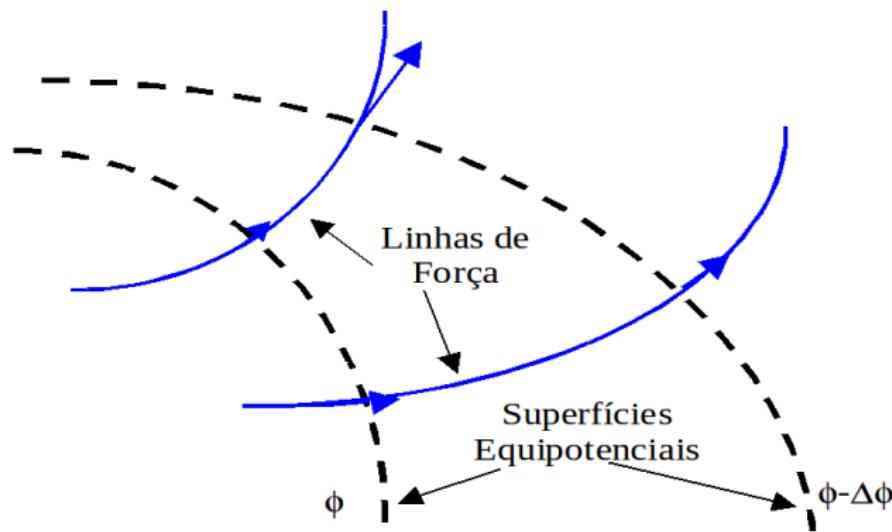
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$



Equações da Eletrostática

O potencial escalar elétrico

Devido à natureza conservativa do campo elétrico, podemos escrever \mathbf{E} como o gradiente de um campo escalar: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Como visto anteriormente, o \mathbf{E} será normal às superfícies equipotenciais de ϕ



Equações da Eletrostática

Equação de Poisson

Usando a relação constitutiva do meio e a lei de Gauss aplicada sobre o potencial elétrico

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= \rho \\ \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) &= -\rho \\ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) &= -\rho/\epsilon_0\end{aligned}$$

sendo a última a equação de Poisson para a eletrostática

Equação de Laplace

Na ausência de cargas, a equação de Poisson se reduz a

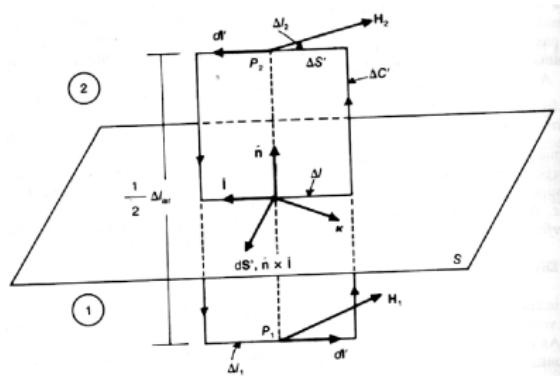
$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) = 0$$

O potencial escalar elétrico

Condições de interface para o potencial escalar elétrico

Continuidade da componente tangencial do campo elétrico

A integral de linha sobre o contorno da figura ao lado resulta em



$$\hat{i} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\hat{i} \cdot (\nabla \phi_2 - \nabla \phi_1) = 0$$

$$\hat{i} \cdot \nabla \phi_2 - \hat{i} \cdot \nabla \phi_1 = 0$$

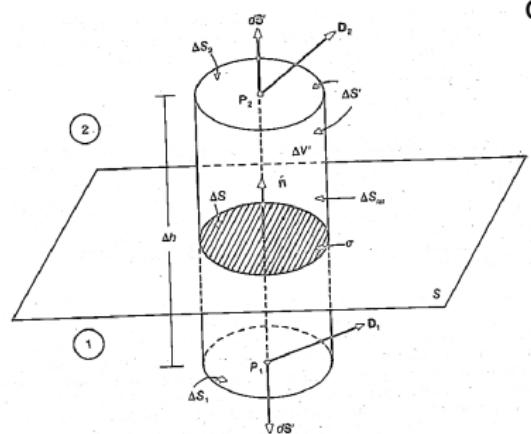
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial l} - \frac{\partial \phi_1}{\partial l} = 0$$

O potencial escalar elétrico

Condições de interface para o potencial escalar elétrico

Continuidade da componente normal do campo elétrico

A integral de superfície sobre a área da figura ao lado resulta em



$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{sup}$$

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\epsilon_2 \nabla \phi_2 - \epsilon_1 \nabla \phi_1) &= -\rho_{sup} \\ \hat{n} \cdot \epsilon_2 \nabla \phi_2 - \hat{n} \cdot \epsilon_1 \nabla \phi_1 &= -\rho_{sup}\end{aligned}$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\rho_{sup}$$

O potencial escalar elétrico

Continuidade do potencial elétrico sobre a interface

A natureza conservativa do campo elétrico nos diz que sobre qualquer caminho entre os pontos a e b do domínio

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_b - \phi_a$$

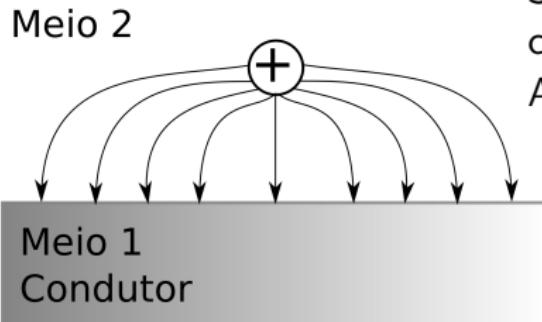
Escolhendo caminho fechado que se inicia e termina em um ponto da interface

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \phi_1 - \phi_2$$
$$\phi_1 = \phi_2$$

A interface com um material condutor

Condições em termo dos campos \mathbf{E} e \mathbf{D}

Assumindo um material condutor elétrico perfeito (PEC) com características $\sigma = \infty$, $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$



Se $\mathbf{J} = 0$, Então $\mathbf{E} = 0$ e
consequentemente $\mathbf{D} = 0$
Aplicando as condições de interface:

$$\hat{n} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = \rho_{sup}$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{E}_2 = \rho_{sup} / \epsilon_2$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \rightarrow \hat{n} \times \mathbf{E}_2 = 0$$

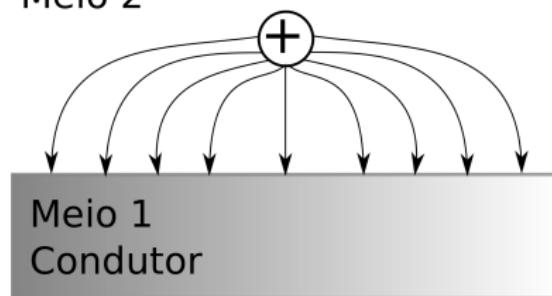
A interface com um material condutor

Condições de interface para o potencial elétrico

Se o campo elétrico é perpendicular à superfície do condutor ($\nabla\phi$ normal à superfície) o potencial elétrico deverá ser constante em toda a superfície.

Ou seja

Meio 2



$$\phi_2 = \phi_1 = \text{constante}$$

Adicionalmente

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\rho_{sup}}{\epsilon_2}$$

Você reconhece essas equações?
Qual o significado de $\partial\phi/\partial n = 0$?

Solução utilizando o FEM

Forma Forte

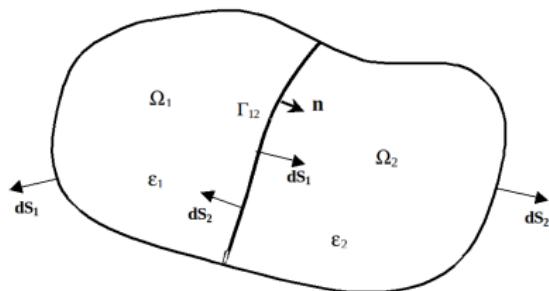
Dado um domínio composto por dois meios lineares com características $(\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1 = 0)$ e $(\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2 = 0)$ conforme mostrado na figura, A forma forte desse problema será dada por:

Dados $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $q : \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$. Encontre $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) = -\rho/\epsilon_0; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\phi = q; \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q$$

$$-\epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial n} = h; \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h$$



na fronteira entre dois meios

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\rho_{sup}; \quad \phi_2 = \phi_1$$

Solução utilizando o FEM

Forma Fraca

Primeiramente, definiremos os espaços de funções de teste e de peso

$$\mathcal{L} = \{\phi | \phi \in H^1(\Omega), \phi(\mathbf{x}) = q, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q\}$$

$$\mathcal{V} = \{w | w \in H^1(\Omega), w(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q\}$$

Método dos resíduos ponderados

O resíduo é obtido a partir da equação da forma forte

$$\int_{\Omega} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) + \rho / \epsilon_0 \} d\Omega = 0; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

$$\int_{\Omega} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) \} d\Omega = - \int_{\Omega} w \{ \rho / \epsilon_0 \} d\Omega; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Forma Fraca

$$\int_{\Omega} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) \} d\Omega = - \int_{\Omega} w \{ \rho / \epsilon_0 \} d\Omega; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Integração por partes

Lembrando que:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{v}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{v} + f \nabla \cdot (\mathbf{v})$$

$$f \nabla \cdot (\mathbf{v}) = \nabla \cdot (f \mathbf{v}) - (\nabla f) \cdot \mathbf{v}$$

podemos escrever:

$$w \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) = \nabla \cdot (w \epsilon_r \nabla \phi) - (\nabla w) \cdot \epsilon_r \nabla \phi$$

logo:

$$\int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (w \epsilon_r \nabla \phi) - \nabla w \cdot \epsilon_r \nabla \phi \} d\Omega = - \int_{\Omega} w \cdot \{ \rho / \epsilon_0 \} d\Omega; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Forma Fraca

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (w \epsilon_r \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (w \epsilon_r \nabla \phi) \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} w \epsilon_r (\nabla \phi \cdot \hat{n}) d\Gamma$$

Mas $\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_h$ e $w(\mathbf{x}) = 0; \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q$. Adicionalmente, $\nabla \phi \cdot \hat{n}$ pode ser reescrito como $\partial \phi / \partial n$, logo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (w \epsilon_r \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Gamma_h} w \underbrace{\epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial n}}_{-h} d\Gamma_h$$

Substituindo na eq. da forma:

$$\int_{\Omega} \nabla w \epsilon_r \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} w \{\rho / \epsilon_0\} d\Omega - \int_{\Gamma_h} wh d\Gamma_h; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Solução utilizando o FEM

Forma Fraca

Finalmente, a forma fraca pode ser escrita como: Dados, ρ , h e q , encontre $\phi \in \mathcal{L}$ tal que:

$$a(w, \phi) = (w, \rho/\epsilon_0) - (w, h)_{\Gamma_h}; \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

onde

$$\begin{aligned} a(w, \phi) &= \int_{\Omega} \nabla w \epsilon_r \nabla \phi d\Omega \\ (w, \rho/\epsilon_0) &= \int_{\Omega} w \{\rho/\epsilon_0\} d\Omega \\ (w, h)_{\Gamma_h} &= \int_{\Gamma_h} wh d\Gamma_h \end{aligned}$$

Solução utilizando o FEM

Interface entre os meios

Repare que a condição de interface entre os meios não foi utilizada para a obtenção da forma fraca. Para analisarmos o efeito da equação

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial l} = -\rho_{sup}$$

Podemos subdividir o domínio em Ω_1 e Ω_2 e aplicarmos o método do resíduo ponderado em cada região separadamente:

$$\int_{\Omega} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) \} d\Omega = \int_{\Omega_1} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_{r1} \nabla \phi) \} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_{r2} \nabla \phi) \} d\Omega_2$$

Interface entre os meios

onde

$$\int_{\Omega_1} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_{r_1} \nabla \phi) \} d\Omega_1 = - \int_{\Omega_1} \nabla w \epsilon_{r_1} \nabla \phi d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} w \epsilon_{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial n_1} d\Gamma_1$$
$$\int_{\Omega_2} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_{r_2} \nabla \phi) \} d\Omega_2 = - \int_{\Omega_2} \nabla w \epsilon_{r_2} \nabla \phi d\Omega_2 + \int_{\Gamma_2} w \epsilon_{r_2} \frac{\partial \phi}{\partial n_2} d\Gamma_2$$

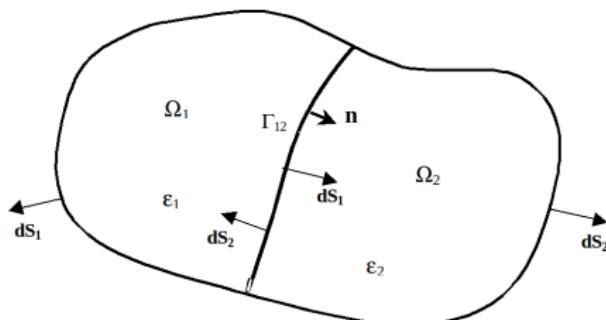
e as fronteiras são dadas por $\Gamma_1 = \Gamma_{h_1} \cup \Gamma_{q_1} \cup \Gamma_{12}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_{h_2} \cup \Gamma_{q_2} \cup \Gamma_{12}$ com $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$. Reagrupando:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \{ \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) \} d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla w \epsilon_r \nabla \phi d\Omega - \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma_h \\ &\quad + \int_{\Gamma_{12}} w \underbrace{\left\{ \epsilon_{r_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \epsilon_{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}}_{-\rho_{sup}/\epsilon_0} d\Gamma_{12} \end{aligned}$$

Interface entre os meios

Conclusões

- Se $\rho_{sup} = 0$ (Caso mais comum entre dielétricos uma vez que dielétricos não possuem cargas livres), a condição de interface é satisfeita de forma natural.
- Se $\rho_{sup} \neq 0$, a integral em Γ_{12} deve ser incorporada à forma fraca.



Solução utilizando o FEM

Método de Galerkin

Definindo os espaços de dimensão finita $\mathcal{L} = \mathcal{L}^h$ e $\mathcal{V} = \mathcal{V}^h$ onde $\phi^h = v^h + q^h$ com $q^h = q \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q$

$$a(w^h, v^h) = -a(w^h, q^h) + (w^h, \rho/\epsilon_0) - (w^h, h)_{\Gamma_h}; \quad \forall w \in \mathcal{V}^h$$

Sistema Matricial

O sistema matricial é obtido a partir das funções N_A oriundas da discretização do domínio. Seja n o número de nós no domínio e n_q os nós sobre Γ_q

$$\sum_{B \in (n-n_q)} a(N_A, N_B) d_B = - \sum_{C \in (n_q)} a(N_A, N_C) q_C + (N_A, \rho/\epsilon_0) - (N_A, h)_{\Gamma_h}$$

O Programa FEMM

Soluções para problemas bidimensionais

Problemas que apresentam simetria planar ou problemas axissimétricos.

Etapas para a solução de problemas usando o FEMM

- Definir a geometria;
- Definir as propriedades dos materiais;
- Definir as condições de contorno (default = condições de contorno de Neumann);
- Gerar a malha de Elementos finitos;
- Resolver o problema;
- Explorar os resultados

O Programa FEMM

Significado físico das condições de contorno

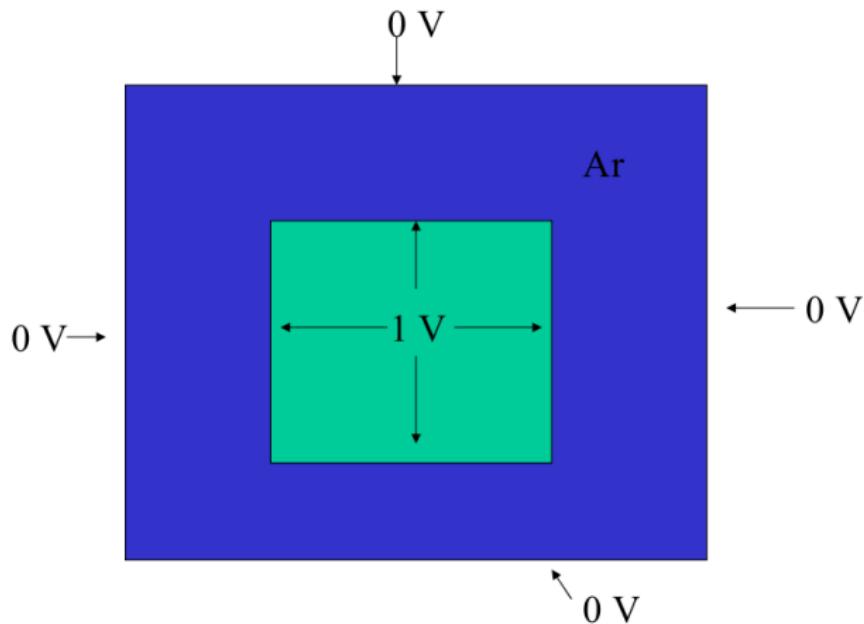
Para o problema eletrostático,

- Dirichlet $\phi = V$, é conhecido na fronteira
 - ▶ Para o condutor $V = V_0$ e \mathbf{E} é perpendicular à fronteira
 - ▶ Condição homogênea $V = 0$ (referência ou terra)
- Neumann $\partial\phi/\partial n = h$
 - ▶ Para o condutor $h = \rho_{sup}/\epsilon_2$
 - ▶ Condição homogênea $h = 0$ (condição de simetria)
- Demais condições, consulte o item 2.4.2 do manual do FEMM.
- No FEMM, se nenhuma condição de contorno é explicitada, a condição de Neumann homogênea é imposta.

O Programa FEMM

Exemplo

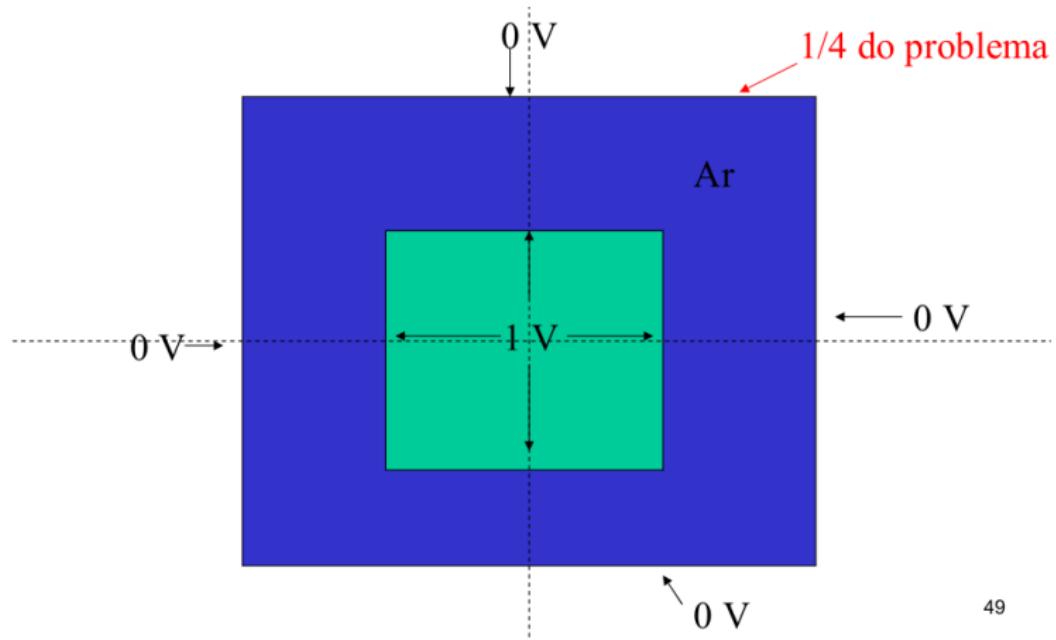
O capacitor quadrado



Exemplo

O capacitor quadrado

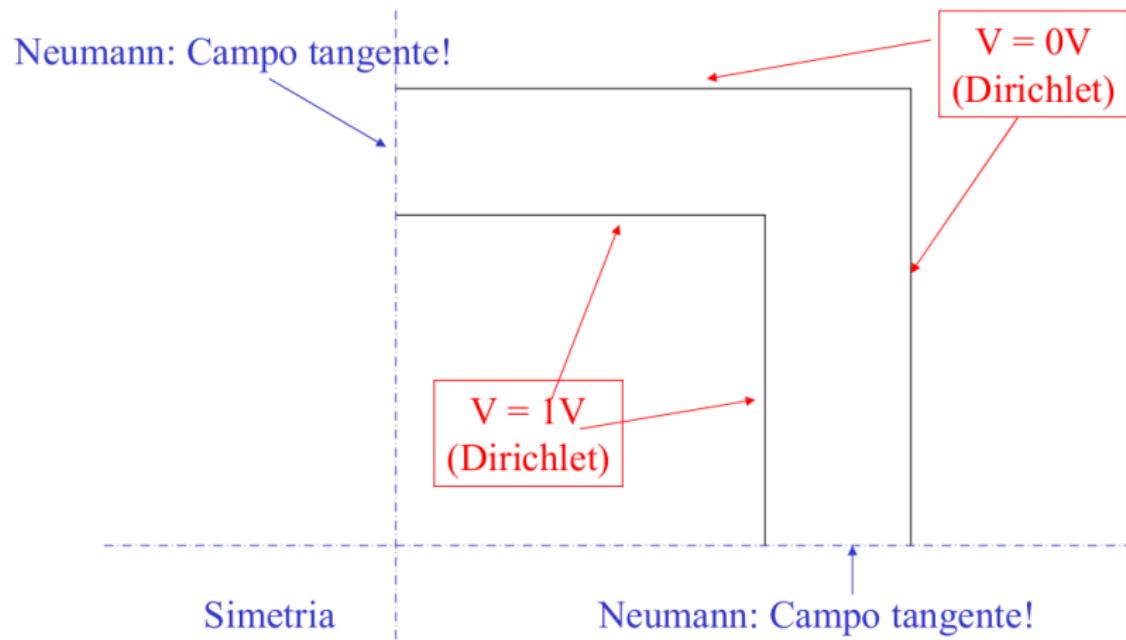
Aplicando considerações de simetria



Exemplo

O capacitor quadrado

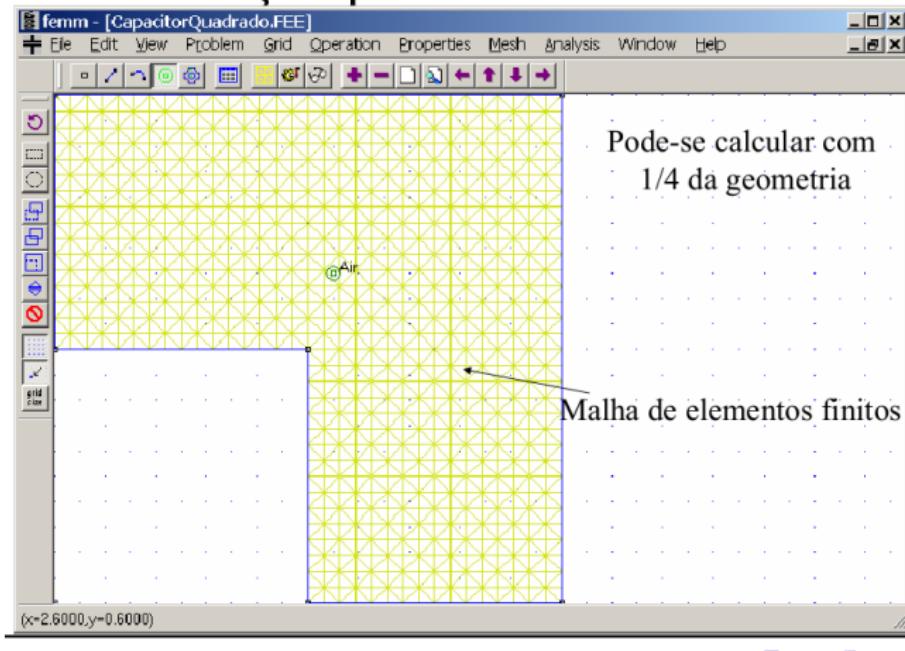
O problema a ser simulado



Exemplo

O capacitor quadrado

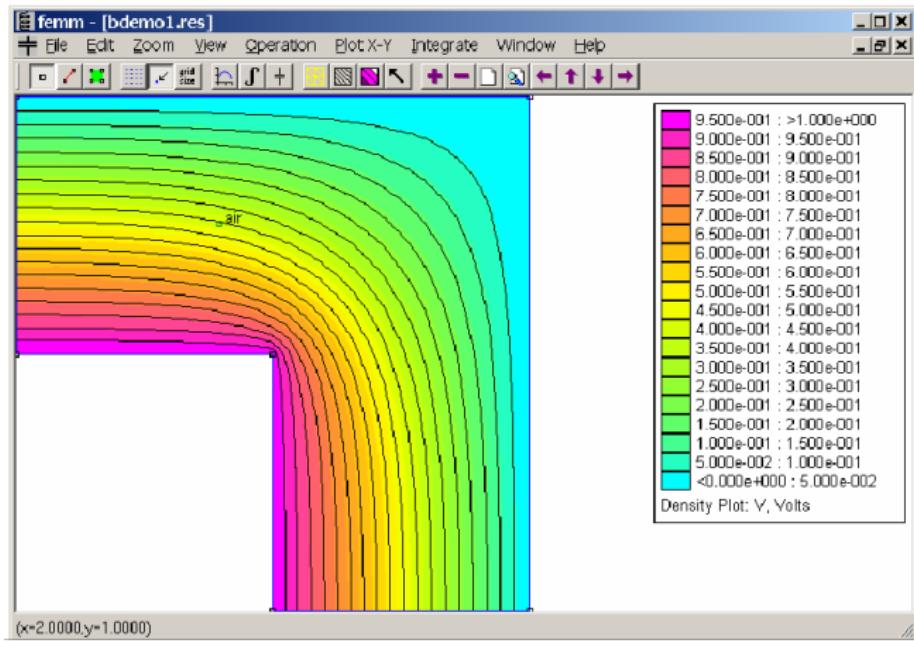
Discretizando a geometria como o FEMM, repare que os condutores não são discretizados.



Exemplo

O capacitor quadrado

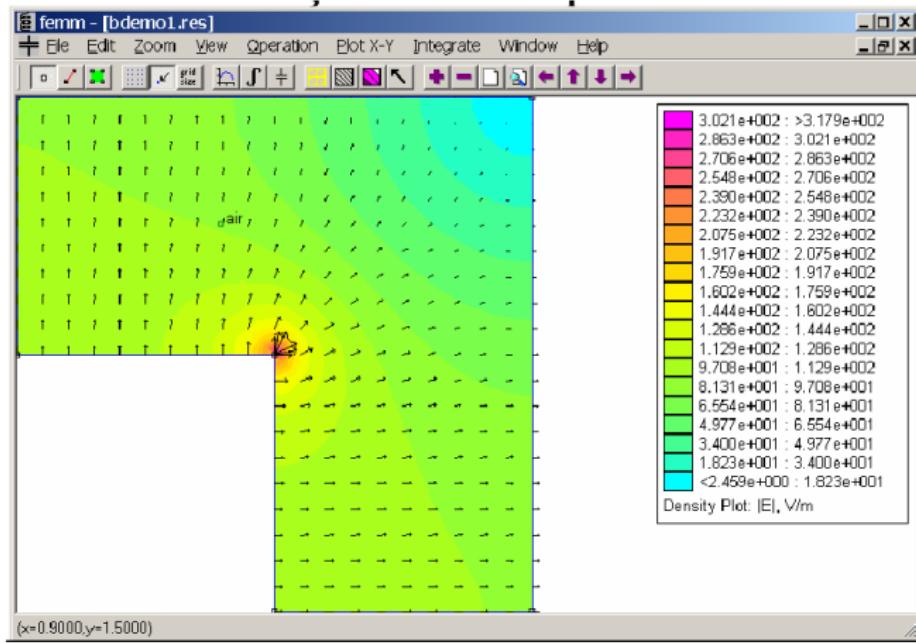
O potencial (V)



Exemplo

O capacitor quadrado

O campo elétrico (V/m)



Trabalho computacional 1

Recomendados

- ① Instale o FEMM e siga o tutorial Documentation⇒Electrostatics Tutorial
- ② Leia o capítulo 1 do FEMM Reference Manual juntamente com as seções 2.4 e 2.5

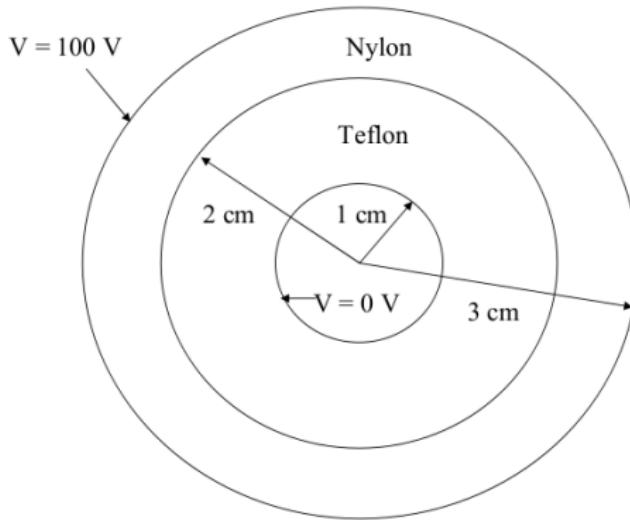
Para entregar

- 1 Simule o cabo coaxial da figura a seguir considerando $\epsilon_{r_{teflon}} = 2.1$ e $\epsilon_{r_{nylon}} = 3.8$. Considere a simetria do problema e utilize no mínimo duas malhas diferentes com densidades diferentes. Plote o potencial e o campo elétrico e comente os resultados.
- 2 Encontre o potencial e o campo elétrico elétrico entre as placas assumindo que $\epsilon_{r_{Germanio}} = 16$. Mostre que as condições de interface são obedecidas.

Trabalho computacional 1

Para entregar

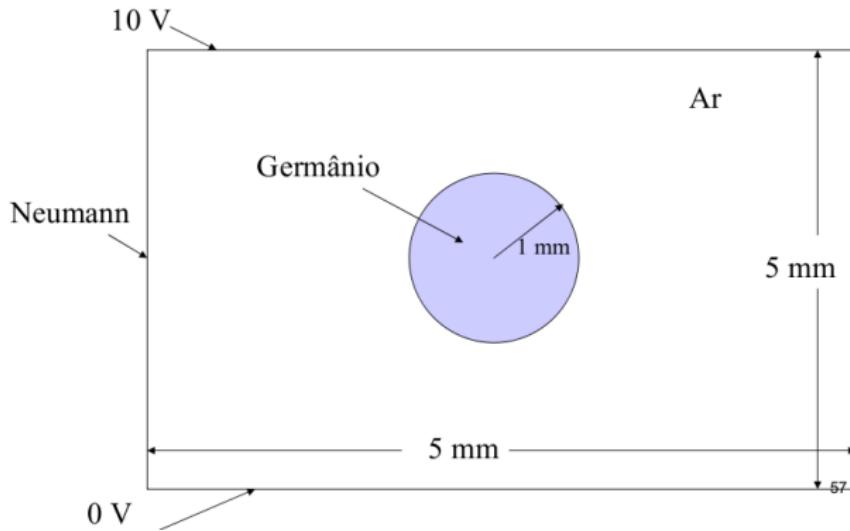
Geometria do problema 1



Trabalho computacional 1

Para entregar

Geometria do problema 2



Trabalho computacional 1

Para entregar

3 Considere que toda a região entre as placas do problema anterior seja preenchida com germânio. Simule novamente o problema nas seguintes condições:

- ① Desconsidere o espraiamento nas bordas.
- ② Considere que o capacitor está no ar e modifique a geometria para considerar o efeito do espraiamento. Utilize a condição de Dirichlet homogênea em uma superfície afastada do capacitor.
- ③ Repita o problema utilizando a condição de Neumann homogênea no ar ao redor do capacitor.

Como garantir que os resultados são confiáveis? Por fim, calcule a energia armazenada no capacitor e a sua capacidade para os dois casos (considerando e desconsiderando o espraiamento). Discuta os resultados.

Sumário

- 1 A Eletrostática e o Método de Elementos Finitos
- 2 A Magnetostática e o Método de Elementos Finitos
- 3 A Quase-estática e o Método de Elementos Finitos
- 4 O Eletromagnetismo e o Método de Diferenças Finitas

Magnetostática

O potencial vetor magnético \mathbf{A}

Em problemas que a densidade de corrente não é nula, definimos um potencial vetor \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Essa relação é coerente com a equação de gauss para o campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pois o $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ é nulo.

Podemos então aplicar essa relação na lei de Ampère da magnetostática

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

O potencial vetor magnético \mathbf{A}

Unicidade do potencial vetor

Na eletrostática, o potencial escalar elétrico é definido a menos de uma constante. Na magnetostática, nenhuma imposição é feita sobre o $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \nabla \phi$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2 &= \nabla \times (\mathbf{A}_1 + \nabla \phi) \\ &= \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1\end{aligned}$$

Calibre de Coulomb

A escolha do $\nabla \cdot \mathbf{A}$ se dará de acordo com o problema. Uma solução simples para vários casos será definir $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Magnetostática

Forma Forte

Equações da magnetostática

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}; \text{ em } \Omega$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ em } \Omega$$

Condições de interface

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0; \text{ em } \Gamma_{12}$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k}; \text{ em } \Gamma_{12}$$

Magnetostática

Forma Forte

Na ausência de correntes, podemos escrever \mathbf{H} em função do potencial escalar magnético (Força Magnetomotriz) que é dado em Ampère espira

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot \mu \nabla \Psi = 0$$

Condições de interface

Como a Fmm é conservativa: $\Psi_2 = \Psi_1$ em Γ_{12} . Adicionalmente, a continuidade da componente tangencial de \mathbf{B} pode ser expressa como:

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n}$$

Magnetostática

Forma Forte na ausência de correntes

Dado μ , encontre $\Psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla \cdot \mu \nabla \Psi = 0; \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Psi = \Psi_q; \quad \forall x \in \Gamma_q$$

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial n} = B_n \quad \forall x \in \Gamma_h$$

$$\mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = 0 \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

Repare que as equações acima são duais às equações do problema eletrostático

Magnetostática

Forma Forte na presença de correntes

Dado μ, \mathbf{J} , encontre $A : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}; \quad \forall x \in \Omega$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_q; \quad \forall x \in \Gamma_q$$

$$\hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}_t; \quad \forall x \in \Gamma_h$$

$$\hat{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{k}; \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

Como \mathbf{A} é um vetor, três graus de liberdade serão associados a cada nó. Poderíamos trabalhar também com funções de forma vetoriais (elementos de aresta) mas que não serão apresentadas nesse curso.

Forma Forte na presença de correntes

Problemas bidimensionais com simetria planar

Assumiremos que o problema é simétrico em relação à z , ou seja,

$\mathbf{J} = J(x, y)\hat{z}$ e $\mathbf{A} = A(x, y)\hat{z}$. Aplicando essas relações na forma fraca anterior obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = J_z; \quad \forall x \in \Omega$$

$$A_z = A_q; \quad \forall x \in \Gamma_q$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} = -H_t; \quad \forall x \in \Gamma_h$$

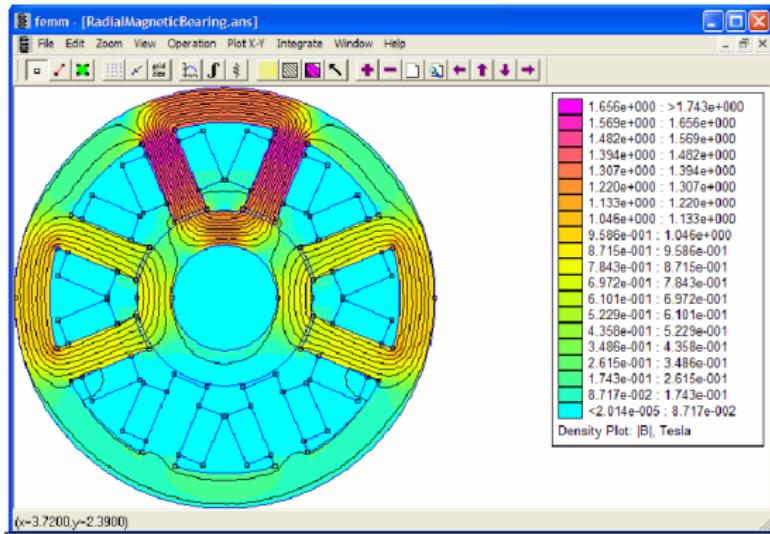
$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_z}{\partial n} + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_z}{\partial n} = k_z; \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

Onde a primeira equação é o equivalente 2D de $\nabla \cdot 1/\mu \nabla A_z$ e o termo $\partial A_z / \partial n$ está associado agora à componente tangencial do campo.

Magnetostática

Interpretação física

Linhas equipotenciais de \mathbf{A} no interior de uma máquina elétrica (tubos de fluxo magnético).



Interpretação física

Dirichlet

- $\mathbf{A} = \text{constante} \rightarrow \text{tubo de fluxo}$
- $\hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} \text{ tangencial a } \Gamma_q$

Neumann

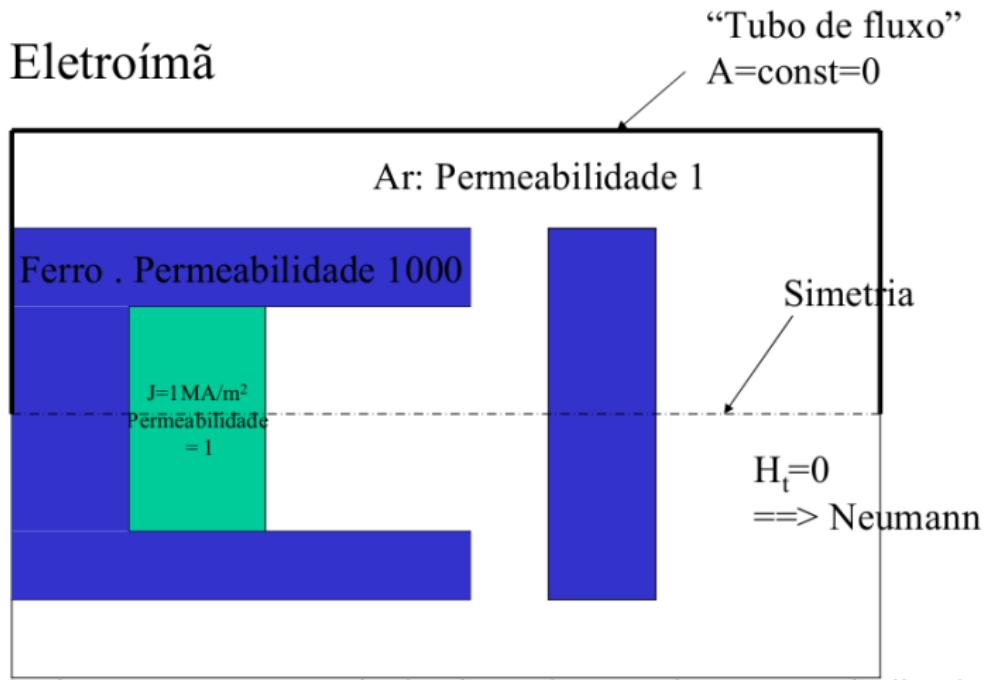
- $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} = \text{constante}, \text{ Geralmente } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} = 0 \rightarrow \mathbf{H} \text{ é perpendicular à } \Gamma_h$
- No FEMM, se nenhuma condição é explicitada, a condição de Neumann homogênea é imposta.

Magnetostática

Exemplos

Modelagem de um eletroímã

- 1 - Eletroímã

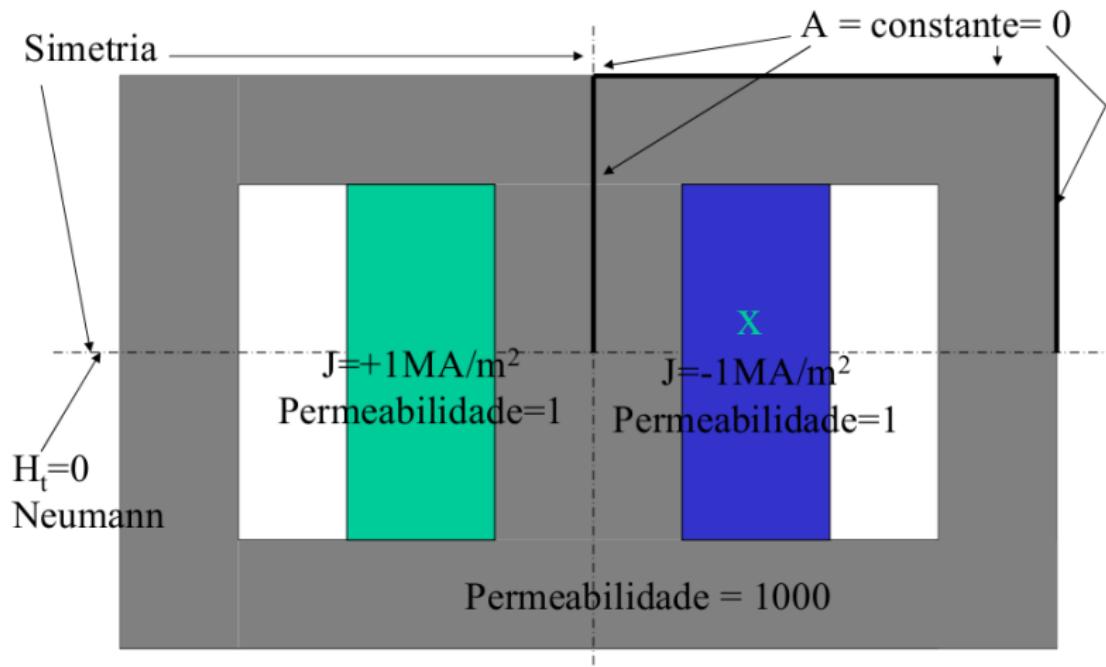


==> Calcular somente a metade de cima c/ as cond. contorno indicadas

Magnetostática

Exemplos

Fluxo gerado pelo enrolamento de um transformador



==> 1/4 do problema pode ser simulado no FEMM.

Forma Forte Generalizada

Problemas estáticos bidimensionais

Dados k e f , encontre $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f; \quad \forall x \in \Omega$$

$$u = q; \quad \forall x \in \Gamma_q$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = -h; \quad \forall x \in \Gamma_h$$

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

Onde os termos u , f e k são definidos de acordo com o problema e a última equação assume que as densidades superficiais na fronteira Γ_{12} são nulas.

Forma Forte Generalizada

Problemas estáticos bidimensionais

Significado de u , k e f para os problemas estáticos

| | Potencial escalar elétrico | Potencial escal. magnético | Potencial vetor magnético |
|-----|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| k | ε | μ | $1/\mu = \nu$ |
| u | V | ψ | A |
| f | $-\rho$ | 0 | $-J$ |
| g | V_g | Ψ_g | A_g |
| h | D_n | B_n | $-H_t$ |

Condições de contorno:

| | Potencial escalar elétrico | Potencial escal. magnético | Potencial vetor magnético |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $g = \text{const}$ | $E \text{ perp. } \Gamma_g$ | $H \text{ perp. } \Gamma_g$ | $B \text{ paral. } \Gamma_g$ |
| $h=0$ | $D \text{ paral. } \Gamma_h$ | $B \text{ paral. } \Gamma_h$ | $H \text{ perp. } \Gamma_h$ |

Trabalho computacional 2

Recomendados

- ➊ Siga o tutorial sobre magnetostática do FEMM. Repare que uma nova condição é utilizada na fronteira exterior do problema. Essa condição é denominada condição absorvente.

Para entregar

- 1 Considere o cabo coaxial constituído de dois meios do problema eletrostático. Assuma que ele foi conectado a uma fonte de corrente contínua de 1A. Resolva o problema assumindo $\mu_r = 1$ para o material mais interno e $\mu_r = 2$ para o material mais externo. Encontre os campos **B** e **H** no interior e no exterior do cabo. Encontre também a indutância por unidade de comprimento do cabo. Compare os resultados com o resultado analítico.
- 3 Assuma que, por um erro de fabricação, o condutor interno tenha sido deslocado 0.5 cm do centro do cabo. Analise o efeito desse deslocamento nos campos e na indutância.

Trabalho computacional 2

Para entregar

- 4 Leia o documento altoparlante.pdf na página do professor Felipe Campelo (<http://www.cpdee.ufmg.br/fcampelo/files/loudspeaker/>) e o apêndice A.1 do manual do FEMM (Como inserir imãs permanentes no FEMM). Baseado no material acima e no cap. 4 do livro do Assupção faça: a) Encontre os campos no entreferro do alto falante analiticamente utilizando para isso os valores dos parâmetros fixos, b) Descreva como você modelaria esse problema no FEMM, apontando quais condições de contorno devem ser impostas e c) Resolva o problema no FEMM e compare com o resultado analítico.

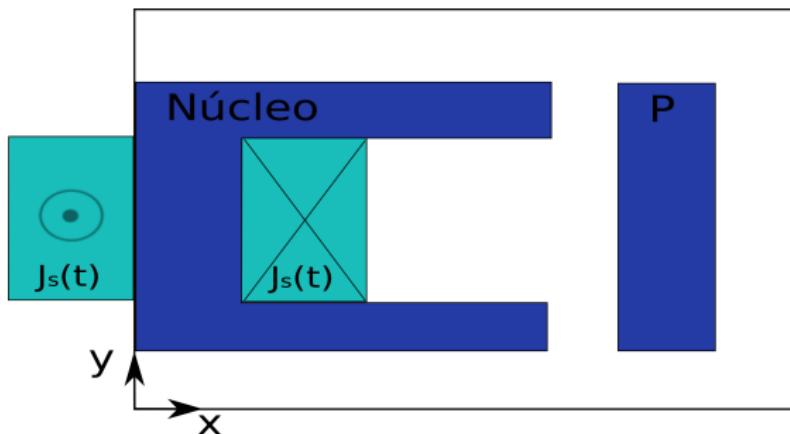
Sumário

- 1 A Eletrostática e o Método de Elementos Finitos
- 2 A Magnetostática e o Método de Elementos Finitos
- 3 A Quase-estática e o Método de Elementos Finitos
- 4 O Eletromagnetismo e o Método de Diferenças Finitas

Problemas variantes no tempo

Assumindo que a densidade de corrente nas bobinas é conhecida

O problema é composto por uma bobina cuja corrente é conhecida, um núcleo laminado com condutividade desprezível ($\sigma = 0$) e de μ elevado, uma barra condutora P com características μ e σ e o ar envolvendo os materiais.



Corrente aplicada e corrente induzida

Densidade de corrente aplicada ($\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$)

Essa corrente é conhecida e será a fonte de excitação do problema eletromagnético a ser resolvido pelo FEM. Devido à simetria planar, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = J_s(x, y, t)\hat{z}$.

Densidade de corrente induzida

Devido à variação temporal do fluxo magnético na barra P , haverá um campo elétrico induzido na barra. Como ela tem uma condutividade não nula, haverá também uma densidade de corrente induzida $\mathbf{J}_e = \sigma\mathbf{E}$. Pela lei de Faraday é possível ver que a densidade de corrente induzida também estará na direção \hat{z} .

Corrente total

A corrente total é a combinação das correntes induzida e aplicada.

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e$$

Equações da quase estática

O potencial vetor magnético

Escrevendo as equações de Maxwell para os campos \mathbf{B} e \mathbf{H}

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_t$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_t$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e$$

Equações da quase estática

O potencial escalar elétrico

Escrevendo a lei de Faraday para o campo \mathbf{E}

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

Nesse caso temos $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ e não podemos escrever $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

Entretanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\ 0 &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Equações da quase estática

O potencial escalar elétrico

Repare que o termo entre parênteses na eq. anterior é conservativo. Logo:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \phi$$

ou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

Ou seja, \mathbf{E} é a combinação da variação de \mathbf{B} ($\partial \mathbf{A} / \partial t$) e de um potencial escalar elétrico. Para o problema em questão, \mathbf{E} é gerado apenas pela variação de \mathbf{B} .

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Equações da quase estática

Forma forte

Substituindo a última equação na lei de Ampère escrita em função do potencial vetor magnético, encontramos a equação da forma forte válida em todo o domínio.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s = 0$$

Como \mathbf{J}_s e \mathbf{J}_e têm apenas componentes na direção \hat{z} , \mathbf{A} também terá apenas a componente na direção \hat{z} . Ou seja, $\mathbf{A} = A(x, y, t)\hat{z}$. Assim, o problema vetorial pode ser modelado como um problema escalar cuja função a ser obtida é a componente z do potencial vetor magnético.

Forma forte

Equação escalar bidimensional

Escrevendo a equação da forma forte em coordenadas cartesianas:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla A} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_s = 0$$

Comparando com a magnetostática, observamos a adição do termo $-\sigma \partial A / \partial t$. onde a derivada temporal pode se aproximar por:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A^i - A^{i-1}}{\Delta t}$$

Essa aproximação possibilita a solução do problema variante no tempo de forma iterativa.

Condições de contorno

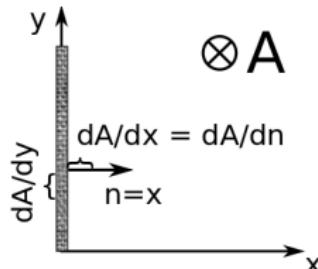
Qual o significado físico das condições de Neumann e Dirichlet?

Repare que apesar de variar no tempo, a definição de A (e de suas derivadas espaciais) é a mesma da magnetostática.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, t) = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A}{\partial x} \hat{y}$$

Dirichet: (A constante sobre y)

\mathbf{B} é tangencial à superfície

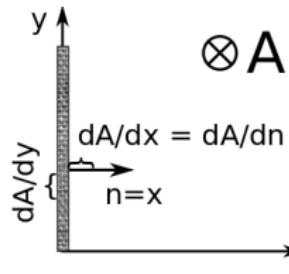


$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial A}{\partial x} \hat{y}$$

Condições de contorno

Neumann: ($\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n}$ é conhecido sobre y)



$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \hat{x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \hat{y}$$

A componente tangencial de \mathbf{H} é conhecida.

Neumann homogêneo: (condição natural)

A componente tangencial de \mathbf{H} é nula, logo \mathbf{H} é perpendicular à fronteira

Problema variante no tempo

Forma Forte

Dado $\mu, \sigma, \mathbf{J}_s$, encontre $A : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \mathbf{J}_s = 0; \quad \forall x \in \Omega$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_q; \quad \forall x \in \Gamma_q$$

$$\hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}_t; \quad \forall x \in \Gamma_h$$

$$\hat{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{k}; \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

$$\mathbf{A}(x, y, t_0) = \mathbf{A}_0$$

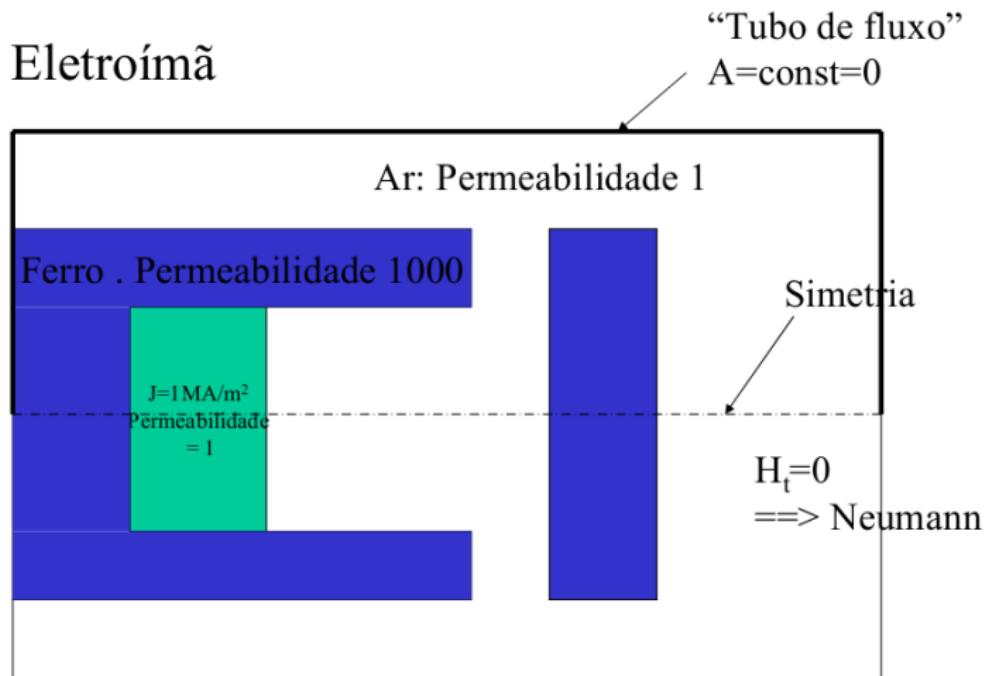
Lembrando que para problemas 2D, \mathbf{A} é um escalar. Adicionalmente, como o problema depende de t , devemos impor uma condição inicial.

Aplicando as condições de contorno

Eletroímã

Repare que as condições são as mesmas aplicadas à magnetostática

- 1 - Eletroímã



==> Calcular somente a metade de cima c/ as cond. contorno indicadas

Solução de problemas harmônicos

A fonte de excitação do problema será senoidal

Assumindo que J_s no problema anterior seja da forma $J_s(t) = J_s \cos(\omega t)$, podemos escrever a densidade de corrente na forma fasorial:

$$J_s(t) = \operatorname{Re}\{J_s e^{j\omega t}\}$$

Se o problema for linear, μ não variar em função da intensidade do campo \mathbf{H} , podemos assumir que o potencial vetor gerado pela corrente aplicada também será uma função harmônica.

$$\mathbf{A}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{A} e^{j\omega t}\}$$

Onde \mathbf{A} , é agora um fasor.

Solução de problemas harmônicos

Forma forte bidimensional

Substituindo os fasores acima na equação da forma forte bidimensional obteremos:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A e^{j\omega t} \right) - \sigma \frac{\partial A e^{j\omega t}}{\partial t} - J_s e^{j\omega t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A e^{j\omega t} \right) - j\omega \sigma A e^{j\omega t} - J_s e^{j\omega t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) - j\omega \sigma A - J_s = 0$$

Onde o sistema matricial resultante do FEM será complexo e não dependerá do tempo.

Solução de problemas harmônicos

Vantagens da formulação harmônica

- O efeito peculiar pode ser visto graficamente
- A formulação não depende do tempo
- O Cálculo da impedância equivalente do dispositivo pode ser obtido facilmente

Desvantagens da formulação harmônica

- Válida apenas se o meio é linear (ou pode ser aproximado por um)
- O problema deve ser resolvido para cada frequência de interesse

Cálculo da impedância equivalente

Força eletromotriz induzida nos terminais da bobina

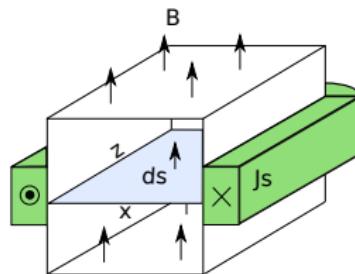
A tensão que aparece nos terminais da bobina é dada pela relação

$$U = (R + j\omega L)I$$

Essa tensão é fruto da variação temporal do fluxo magnético que atravessa as bobinas

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$U = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

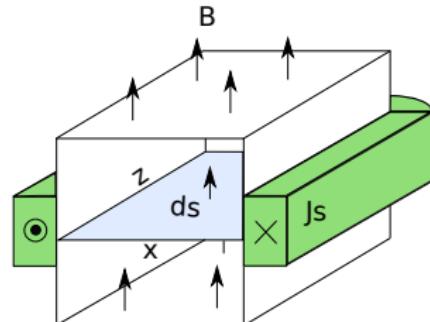


Cálculo da impedância equivalente

Força eletromotriz induzida nos terminais da bobina

Desenvolvendo a expressão da força eletromotriz induzida lembrando que o problema é bidimensional e não varia com z

$$\begin{aligned} U &= -j\omega \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot dx dz \hat{y} \\ &= -j\omega z \int_x \left(\frac{\partial A}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A}{\partial x} \hat{y} \right) \cdot dx \hat{y} \\ &= j\omega z \int_x \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) dx \hat{y} \\ &= j\omega z A|_{x_1}^{x_2} = j\omega z \Delta A \end{aligned}$$



onde ΔA é a variação de A dentro do núcleo magnético

Cálculo da impedância equivalente

Impedância equivalente

A impedância equivalente é obtida igualando-se as equações para a tensão induzida

$$\begin{aligned}(R + j\omega L)I &= -j\omega z \Delta A \\ L - \frac{jR}{\omega} &= \frac{\Delta A}{I}\end{aligned}$$

Por fim, a corrente pode ser obtida a partir de J_s

$$J_s = \frac{NI}{S_s} \Rightarrow I = \frac{S_s}{N} J_s$$

onde S_s é a área ocupada pela densidade J_s e S_s/N é a seção transversal do fio da bobina

Impedância equivalente

Efeitos da variação da frequência

- A indutância diminui com o aumento da frequência uma vez que o efeito pelicular reduz a passagem do fluxo
- A resistência aumenta com o aumento da frequência. Consequência do aumento da corrente induzida (proporcional a $\partial B / \partial t$)

Trabalho computacional 3

Problema do alto falante

Imagine que no entreferro do alto falante do trabalho computacional 2 exista uma bobina de dimensões $(0.5\text{mm} \times 6\text{mm})$ por onde flui uma densidade de corrente constante $J = 1\text{mA/m}^2$ perpendicular ao plano do alto falante. Calcule a força exercida nessa bobina utilizando a força de Laplace nas seguintes condições:

- Bobina localizada no centro do entreferro
- Bobina deslocada de 3mm para cima a partir do centro do entreferro
- Bobina deslocada de 3mm para baixo a partir do centro do entreferro

Detalhe passo a passo como você modelou o problema e comente os resultados obtidos.

Trabalho computacional 3

Problema do eletroímã

- a) Assumindo que a densidade de corrente é constante e igual a 1mA, calcule a força na peça P utilizando o trabalho virtual e o tensor de Maxwell.
- b) Assumindo agora que a densidade de corrente aplicada é da forma $J_s = 1\cos(\omega t)\text{mA}$ e que $\mu_n = 1000\mu_0$ e $\sigma_n = 0$, encontre a profundidade de penetração na barra e a impedância equivalente do eletroímã para as seguintes configurações:

- $\mu_p = 1000\mu_0$, $\sigma_p = 10^5 \text{S/m}$ fixos e f variando (60Hz, 120Hz, 300Hz)
- $\mu_p = 1000\mu_0$, $f = 60\text{Hz}$ fixos e σ_p variando (10^4S/m , 10^5S/m , 10^6S/m)
- $\sigma_p = 10^5 \text{S/m}$, $f = 60\text{Hz}$ fixos e μ_p variando ($500\mu_0$, $1000\mu_0$, $2000\mu_0$)

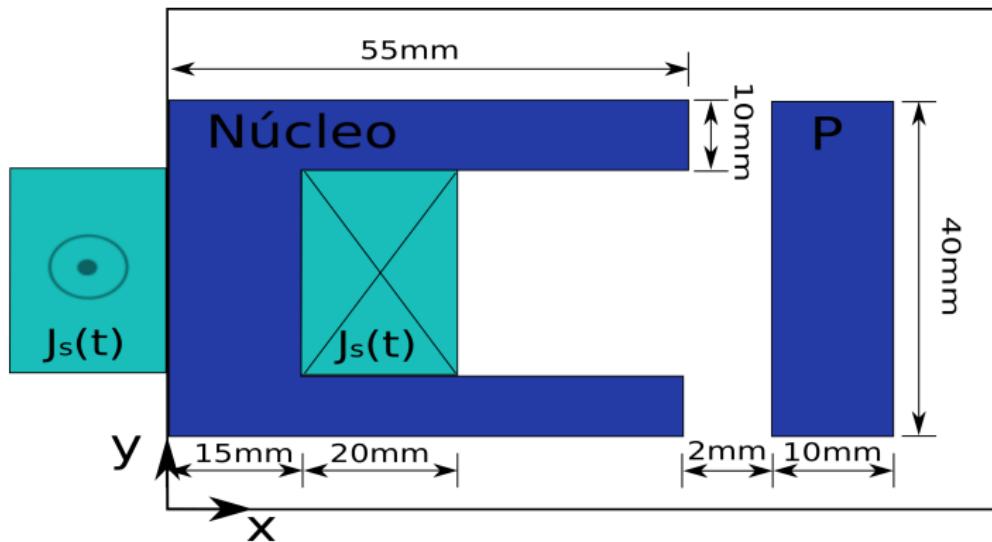
onde μ_n e σ_n são os parâmetros do no núcleo, μ_p e σ_p são os parâmetros da barra e as dimensões do problema são dadas na figura a seguir.



Trabalho computacional 3

Geometria do eletroímã

Explique os resultados obtidos e compare os valores simulados da profundidade de penetração com a expressão $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$.



Sumário

- 1 A Eletrostática e o Método de Elementos Finitos
- 2 A Magnetostática e o Método de Elementos Finitos
- 3 A Quase-estática e o Método de Elementos Finitos
- 4 O Eletromagnetismo e o Método de Diferenças Finitas

As Equações de Maxwell

Forma diferencial simétrica

Os termos \mathbf{M} e ρ_m podem ser introduzidos para proporcionar simetria às equações

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

As Equações de Maxwell

Solução usando o FDTD

O FDTD baseia-se exclusivamente nas equações de Ampère e Faraday, as quais podem ser reescritas como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma^e \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma^m \mathbf{H} - \mathbf{M}_i$$

em que: $\mathbf{J} = \sigma^e \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$ e $\mathbf{M} = \sigma^m \mathbf{H} + \mathbf{M}_i$.

As Equações de Maxwell

Solução usando o FDTD

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\epsilon} (\sigma^e \mathbf{E} + \mathbf{J}_i) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\mu} (\sigma^m \mathbf{H} + \mathbf{M}_i)\end{aligned}\quad (2)$$

O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD)

Principais características

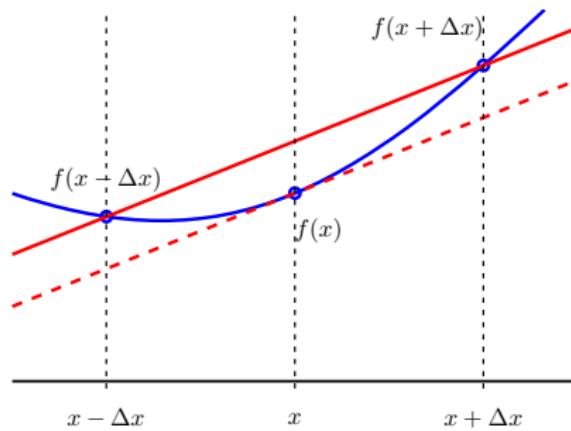
- Simples e intuitivo;
- Trabalha diretamente com as variáveis de campo e não envolve a inversão de matrizes;
- Precisão quadrática;
- Modelagem direta de fenômenos não lineares e domínios com vários meios constitutivos;
- Tempo de processamento: pode ser elevado para problemas 3D;
- Modelagem de geometrias complexas: Não tão eficiente quanto os elementos do FEM.

O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD)

Aproximação por derivada centrada

Pode-se obter $f'(x)$ calculando-se a diferença dos valores da função nos pontos adjacentes

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$



O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD)

Qualidade da aproximação

O erro na aproximação pode ser obtido usando a diferença entre a expansão em série de Taylor para $f(x + \Delta x)$ e $f(x - \Delta x)$

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x f'(x) + \frac{2(\Delta x)^3}{6} + \dots$$

a qual pode ser rearranjada para obter $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{2(\Delta x)^2}{6} + \dots$$

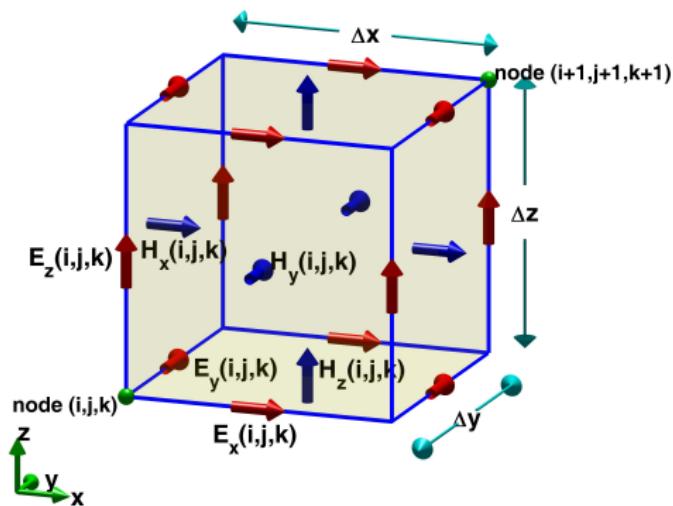
que pode ser expressa por:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD)

Algoritmo de Yee

A Fig. a seguir apresenta a distribuição espacial das componentes de \mathbf{E} e \mathbf{H} para a discretização das equações de Maxwell.



Algoritmo de Yee

Notação dos componentes dos campos

Os componentes do campo \vec{E} e \vec{H} serão representados por:

$$E_x(i, j, k) \Rightarrow ((i - 0.5)\Delta x, (j - 1)\Delta y, (k - 1)\Delta z)$$

$$E_y(i, j, k) \Rightarrow ((i - 1)\Delta x, (j - 0.5)\Delta y, (k - 1)\Delta z)$$

$$E_z(i, j, k) \Rightarrow ((i - 1)\Delta x, (j - 1)\Delta y, (k - 0.5)\Delta z)$$

$$H_x(i, j, k) \Rightarrow ((i - 1)\Delta x, (j - 0.5)\Delta y, (k - 0.5)\Delta z)$$

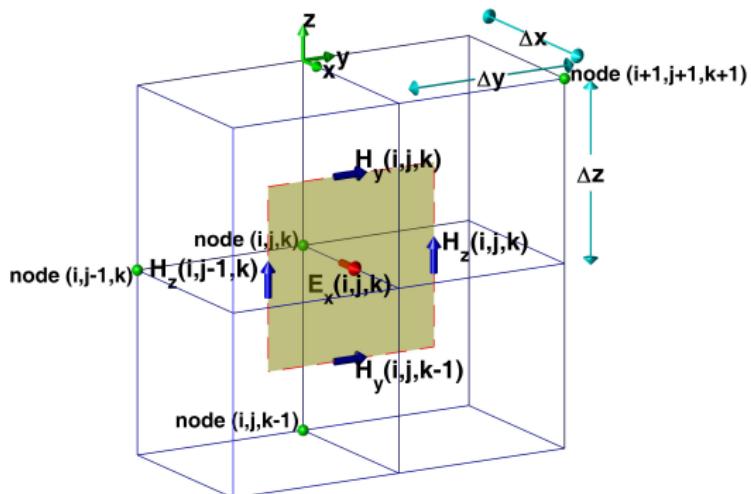
$$H_y(i, j, k) \Rightarrow ((i - 0.5)\Delta x, (j - 1)\Delta y, (k - 0.5)\Delta z)$$

$$H_z(i, j, k) \Rightarrow ((i - 0.5)\Delta x, (j - 0.5)\Delta y, (k - 1)\Delta z)$$

Algoritmo de Yee

Cálculo da componente E_x

A expressão para $E_x(i, j, k)$ pode ser obtida a partir da Fig. a seguir:



Algoritmo de Yee

Cálculo da componente E_x

Usando diferenças finitas a partir da Fig. anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k)}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon_x(i, j, k)} \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j - 1, k)}{\Delta y} \\ &- \frac{1}{\varepsilon_x(i, j, k)} \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k - 1)}{\Delta z} \\ &- \frac{\sigma_x^e(i, j, k)}{\varepsilon_x(i, j, k)} E_x^{n+1/2}(i, j, k) - \frac{1}{\varepsilon_x(i, j, k)} J_{ix}^{n+1/2}(i, j, k) \quad (3) \end{aligned}$$

Algoritmo de Yee

Cálculo da componente E_x

O termo $E_x^{n+1/2}(i, j, k)$ pode ser aproximado por:

$$E_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{E_x^{n+1}(i, j, k) + E_x^n(i, j, k)}{2}$$

Algoritmo de Yee

Cálculo da componente E_x

Após algumas manipulações, obtém-se:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i, j, k) &= \frac{2\varepsilon_x(i, j, k) - \Delta t \sigma_x^e(i, j, k)}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t \sigma_x^e(i, j, k)} E_x^n(i, j, k) \\ &+ \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t \sigma_x^e(i, j, k)) \Delta y} (H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j - 1, k)) \\ &- \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t \sigma_x^e(i, j, k)) \Delta z} (H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k - 1)) \\ &- \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t \sigma_x^e(i, j, k)} J_{i_x}^{n+1/2}(i, j, k) \quad (4) \end{aligned}$$

Algoritmo de Yee

Cálculo da componente E_x

A qual pode ser finalmente expressa por:

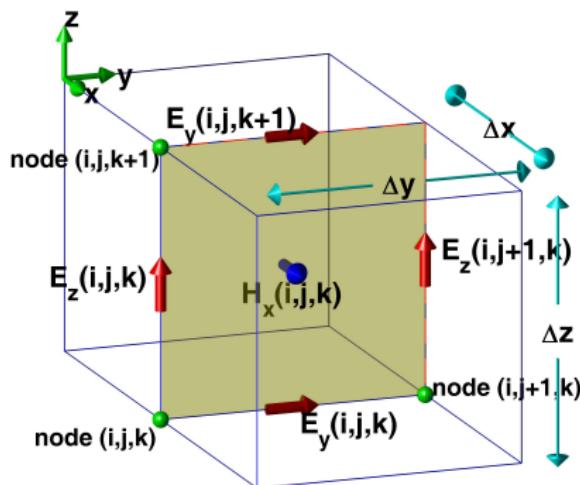
$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i, j, k) = & C_{exe}(i, j, k) \times E_x^n(i, j, k) \\ & + C_{exhz}(i, j, k) \times (H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j - 1, k)) \\ & - C_{exhy}(i, j, k) \times (H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k - 1)) \\ & - C_{exj}(i, j, k) \times J_{i_x}^{n+1/2}(i, j, k) \quad (5) \end{aligned}$$

Onde os termos $C_{e\dots}$ são constantes que dependem das propriedades dos materiais, da geometria e da discretização ($\Delta t, \Delta x, \Delta y, e \Delta z$)

Algoritmo de Yee

Cálculo da componente H_x

De maneira similar, a expressão para $H_x(i, j, k)$ pode ser obtida a partir da Fig. a seguir:



Algoritmo de Yee

Cálculo da componente \mathbf{H}_x

Repetindo o processo anterior, a componente $\mathbf{H}_x^{n+1/2}(i, j, k)$ pode ser escrita como

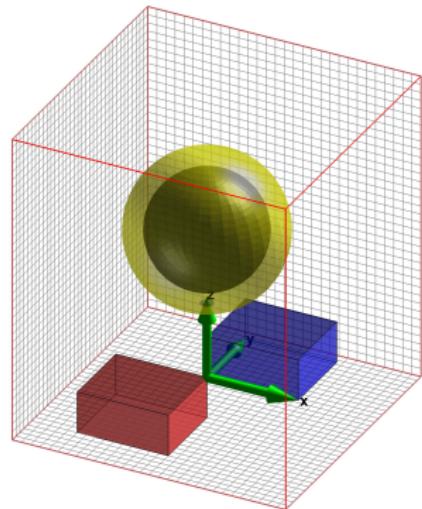
$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}(i, j, k) = & C_{hxh}(i, j, k) \times H_x^{n-1/2}(i, j, k) \\ & + C_{hxey}(i, j, k) \times (E_y^n(i, j, k+1) - E_y^n(i, j, k)) \\ & - C_{hxez}(i, j, k) \times (E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)) \\ & - C_{hxm}(i, j, k) \times M_{i_x}^n(i, j, k) \quad (6) \end{aligned}$$

Onde os termos $C_{h\dots}$ são constantes que dependem das propriedades dos materiais, da geometria e da discretização ($\Delta t, \Delta x, \Delta y, e \Delta z$)

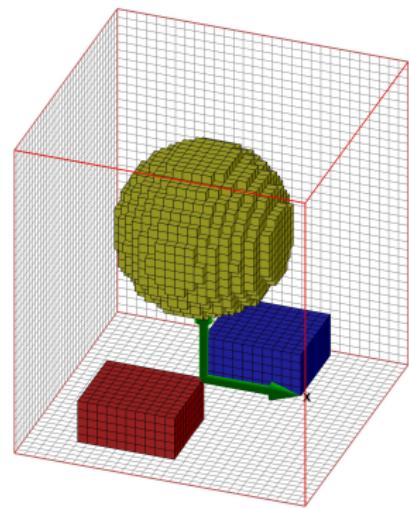
Algoritmo FDTD

- ① Definir domínio e parâmetros físicos dos meios
- ② Calcular os coeficientes dos campos ($C_{e\dots}$ e $C_{h\dots}$)
- ③ While (*critério de parada não for satisfeito*) do:
 - ▶ Atualizar os componentes de H no instante $(n + 0.5)\Delta t$
 - ▶ Atualizar os componentes de E no instante $(n + 1)\Delta t$
 - ▶ Aplicar condições de contorno
 - ▶ $t \leftarrow t + 1$

Discretização do domínio



Geometria do problema



Representação usando células
de Yee