Eletromagnetismo Computacional

Ricardo Adriano

rluiz@cpdee.ufmg.br

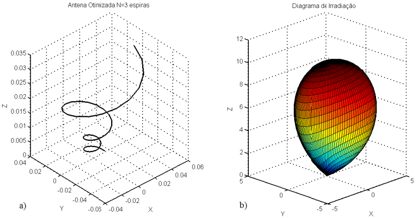
2 de setembro de 2015

Sumário

Introdução

Objetivos

- Apresentar a teoria geral do Eletromagnetismo
- Estudo da Eletrostática, Magnetostática e Eletrodinâmica
- Descrever o funcionamento de alguns métodos numéricos apresentando suas vantagens e desvantagens
- Aplicar os métodos numéricos na solução de problemas eletromagnéticos



Sumário

Derivadas Vetoriais

O operador Nabla (∇)

Definiremos o operado diferencial vetorial nabla ou del por meio de sua expressão num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais x, y e z.

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \tag{1}$$

O nabla é apenas um símbolo sem significado geométrico ou físico que pode ser aplicado a funções escalares e vetoriais.

Operações envolvendo o nabla

Podemos realizar as três operações vetoriais que envolvem dois elementos:

- o produto por um escalar ∇U
- o produto escalar por um vetor $\nabla \cdot \mathbf{A}$
- o produto vetorial por um vetor $\nabla \times \mathbf{A}$

O Gradiente

Definição

Dada a função escalar $U(x, y, z)$ com derivadas parciais $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, O gradiente de U é definido por

$$\nabla U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} \tag{2}$$

Cálculo do diferencial de uma função escalar utilizando o gradiente

Dados dois pontos infinitesimalmente próximos $M(x, y, z)$ e
$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$
o diferencial de U (dU) pode ser escrito como:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = (\nabla U) \cdot \mathbf{dM} \tag{3}$$

onde $\mathbf{dM} = M' - M$

O Gradiente

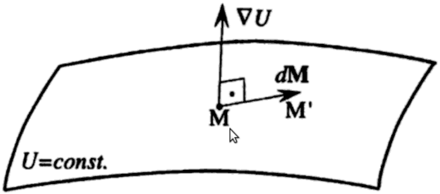
Deslocamento em uma superfície equipotencial

Assumindo que o deslocamento do ponto M ao ponto M' ocorra sobre uma superfície onde $U(x, y, z) = const$

$$dU = (\nabla U) \cdot \mathbf{dM} = 0 \tag{4}$$

onde as soluções possíveis são: $\nabla U = 0$ (solução trivial) ou

$$\nabla U \perp \mathbf{dM} \tag{5}$$



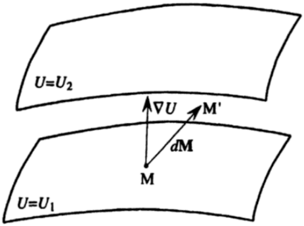
O Gradiente

Direção de máxima variação

Assumindo que o deslocamento do ponto M ao ponto M' ocorra de modo a incrementar o valor de U

$$dU = (\nabla U) \cdot \mathbf{dM} > 0 \tag{6}$$

Nesse caso, o ângulo entre ∇U e **dM** será agudo e a máxima variação de U ocorrerá quando ∇U e **dM** forem paralelos. Em outras palavras, O Gradiente aponta para a direção de máxima variação da função.



O Gradiente

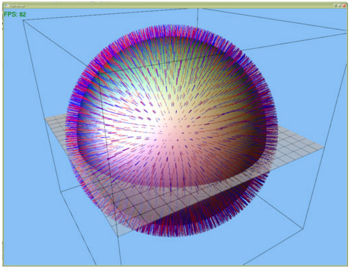
Exemplo

Seja a função distância
$U(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r}; \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

logo

$$\nabla U = \frac{1}{r}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$



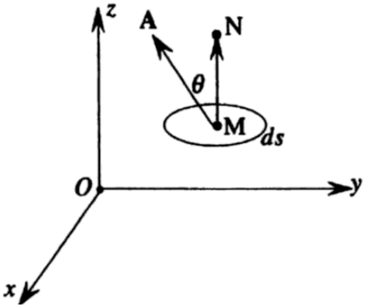
Questão

Encontre o vetor normal unitário à superfície do elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

O Divergente

Definição de fluxo

Dado um campo vetorial $\mathbf{A} = A_x(x,y,z)\hat{x} + A_y(x,y,z)\hat{y} + A_z(x,y,z)\hat{z}$ e um elemento diferencial de superfície ds, conforme mostrado na figura



Definiremos:

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{MN}}{|MN|}$$

$$d\mathbf{s} = \hat{n}ds$$

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = Ads\cos\theta$$

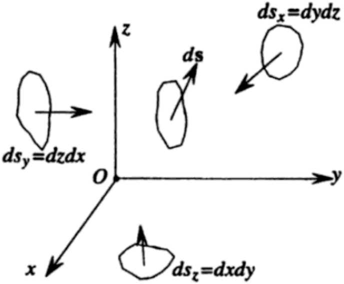
onde $d\Phi$ é o fluxo "líquido" do vetor **A** que a travessa o elemento de superfície.

O Divergente

Fluxo em coordenadas cartesianas

Como $d\mathbf{s}$ é um vetor, ele pode ser decomposto em suas coordenadas cartesianas. Consequentemente:

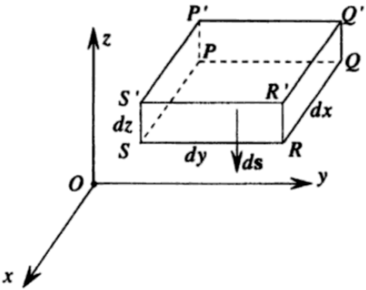
$$d\Phi = A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy$$



O Divergente

Teorema da divergência

Considere a superfície que delimita o retângulo de volume dv da figura. Assuma que o vetor normal é orientado para fora da superfície e que $\mathbf{A}$ possua apenas a componente A_z



Na superfície inferior PQRS

$$d\mathbf{s} = (0, 0, -dxdy) \qquad (7)$$

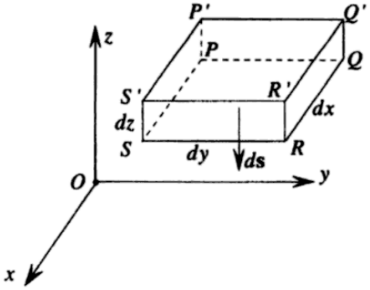
E o fluxo que atravessa essa superfície será dado por

$$-A_{z_{inf}} dxdy \qquad (8)$$

O Divergente

Teorema da divergência

Para as superfícies laterais, **A** será perpendicular à $d\mathbf{s}$ (Campo tangencial à superfície). Consequentemente, os fluxos que atravessam essas superfícies serão nulos.



Na superfície superior $P'Q'R'S'$

$$d\mathbf{s} = (0, 0, dxdy) \qquad (9)$$

E o fluxo que atravessa essa superfície será dado por

$$A_{z_{sup}} dxdy \qquad (10)$$

O Divergente

Teorema da divergência

O fluxo líquido (que entra ou sai do volume dv) será obtido pela somas das equações (8) e (10)

$$d\Phi = \left(A_{z_{sup}} - A_{z_{inf}}\right) dxdy \tag{11}$$

Onde $A_{z_{sup}}$ pode ser escrito em função $A_{z_{inf}}$

$$A_{z_{sup}} = A_{z_{inf}} + dA_z = A_{z_{inf}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11)

$$d\Phi = \left[A_{z_{inf}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz - A_{z_{inf}}\right] dxdy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz = \frac{\partial A_z}{\partial z} dv \tag{13}$$

O Divergente

Teorema da divergência

Assumindo $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e calculando o fluxo sobre as superfícies laterais

$$d\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] dv$$

$$d\Phi = (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv \tag{14}$$

Em outras palavras, a divergência de um campo vetorial $\mathbf{A}$, dá como resultado o fluxo líquido (fluxo que sai – fluxo que entra) por unidade de volume.

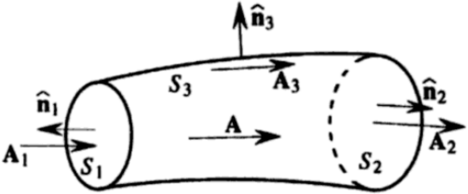
Por fim, integrando (14) obtemos o teorema da divergência

$$\Phi = \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv \tag{15}$$

O Divergente

Fluxo conservativo

Se o fluxo é conservativo, o fluxo que entra em um volume é igual ao fluxo que deixa o volume de modo que o fluxo total é nulo.



$$\Phi = \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

$$d\Phi_1 = \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = -A_1 ds_1$$

$$d\Phi_2 = \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = A_2 ds_2$$

$$d\Phi_3 = \mathbf{A}_3 \cdot d\mathbf{s}_3 = 0$$

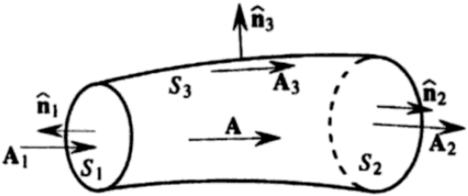
$$\Phi_t = -\int_{s_1} A_1 ds_1 + \int_{s2} A_2 ds_2 = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

O Divergente

Resumo do conceito de divergente

Os resultados possíveis para o valor do fluxo são.

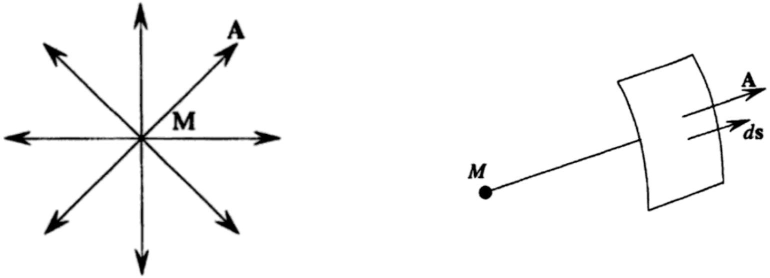
1. $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$ Exite uma fonte de $\mathbf{A}$
2. $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$ Exite um sumidouro de $\mathbf{A}$
3. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ Fluxo conservativo



O Divergente

Exemplo 1 - Divergente > 0

Encontrar o fluxo de um campo radial constante que atravessa uma esfera de raio R

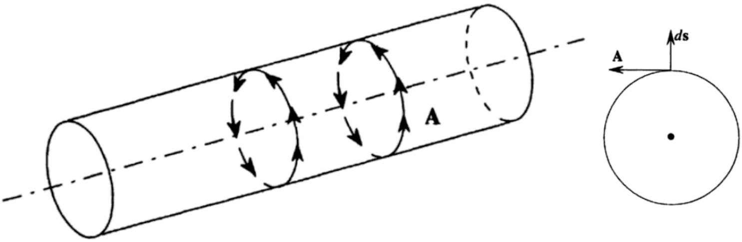


$$\Phi = \int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi R^2 A$$

O Divergente

Exemplo 1 - Divergente = 0

Encontrar o fluxo do campo **A** sobre a superfície do cilindro



$$\Phi = \int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

O Rotacional

Definição

Definiremos o rotacional de um campo vetorial como:

$$rot\,\mathbf{A} = curl\,\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = det\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

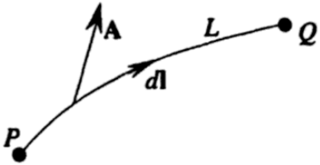
$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

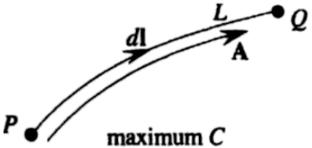
O Rotacional

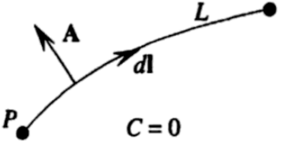
A circulação de um vetor

A circulação de **A** ao longo de um caminho L, entre os pontos P e Q é dada por:

$$C_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$





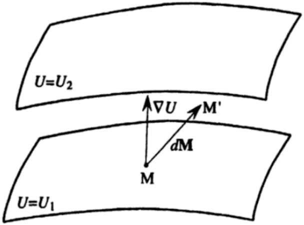


O Rotacional

A circulação de um vetor

Se **A** for o gradiente de uma função escalar

$$C_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q (\nabla U) \cdot d\mathbf{l} \tag{16}$$



Lembrando que

$$dU = (\nabla U) \cdot d\mathbf{l}$$

Eq. (16) se resume a

$$C_{PQ} = \int_P^Q dU = U_Q - U_P$$

Repare que, nesse caso, a circulação não depende do caminho!

O Rotacional

A circulação de um vetor

Se **A** for o gradiente de uma função escalar, o $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

Prova

Sendo $\mathbf{A} = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$, o $\nabla \times \mathbf{A}$ sera dado por:

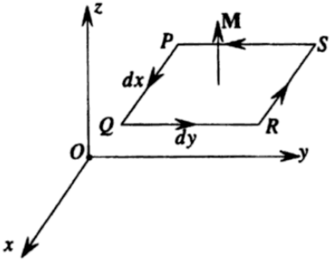
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)\hat{z} = 0$$

O Rotacional

Teorema de Stokes

Calcularemos a circulação de $\mathbf{A}$ ao longo do contorno que delimita o elemento de superfície $d\mathbf{s} = dxdy\hat{z}$ da figura



Integral entre os pontos P e Q

$$C_1 = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot dx\hat{x} = A_x dx$$

Integral entre os pontos R e S

$$C_2 = -\int_R^S \mathbf{A} \cdot dx\hat{x} = -(A_x + dA_x)dx$$

$$C_2 = -(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}dy)dx$$

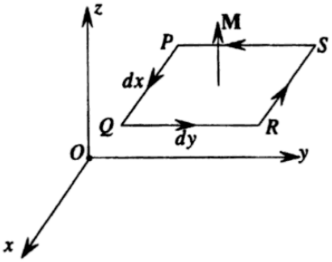
Somando C_1 e C_2

$$C_{1,2} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}dxdy$$

O Rotacional

Teorema de Stokes

De maneira análoga, a soma da circulação dos caminhos SP e QR resultará em $C_{3,4} = \frac{\partial A_y}{\partial x} dxdy$



Circulação total $PQRS$

$$C_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy$$

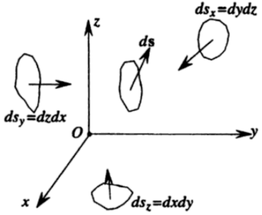
Repare que o termo entre parênteses é a componente z do $\nabla \times \mathbf{A}$

O Rotacional

Teorema de Stokes

O resultado anterior foi obtido para uma superfície orientada na direção $\hat{z}$. Estendendo o resultado para superfícies orientadas nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$ obteremos:

$$C_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dxdy \text{ e } C_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dxdy$$



Forma geral

$$C = C_x + C_y + C_z = \int_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

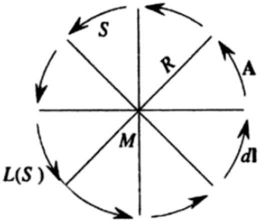
O Rotacional

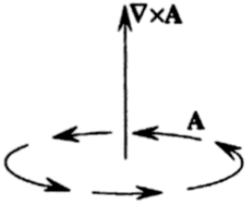
Teorema de Stokes

O rotacional de um campo vetorial **A** ($\nabla \times \mathbf{A}$) dá como resultado um vetor cujos componentes x,y e z dão a circulação desse campo vetorial por unidade de área respectivamente nos planos normais a esses componentes. A circulação do campo ao longo do caminho obedece a regra da mão direita.

Exemplo

Rotacional diferente de zero: $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R A$

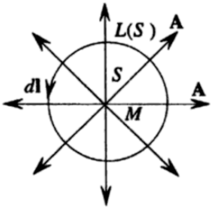




O Rotacional

Exemplo

Rotacional igual a zero.
O Campo é perpendicular a $d\mathbf{l}$

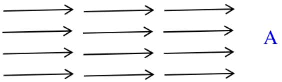


Classificação dos campos vetoriais

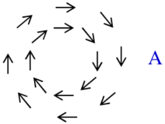
Um campo vetorial é completamente caracterizado quando são definidos seu divergente e rotacional.

- Um campo é dito solenoidal se $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (sem fonte ou sorvedouro)
- Um campo é dito potencial se $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ (campo conservativo)

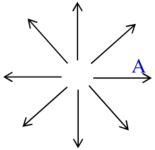
$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\nabla \times \vec{A} = 0$



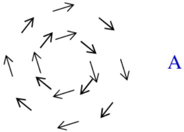
$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\nabla \times \vec{A} \neq 0$



$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ e $\nabla \times \vec{A} = 0$



$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ e $\nabla \times \vec{A} \neq 0$



Operadores de segunda ordem

Operações sobre U ou $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla U) & \\
\nabla \times (\nabla U) &= 0 \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) & \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &
\end{aligned}$$

Operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{dz^2}$$

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

Laplaciano Vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Operadores com mais de uma função

$$\nabla(UQ) = U(\nabla Q) + Q(\nabla U)$$

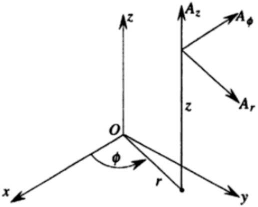
$$\nabla\cdot(U\mathbf{A}) = U(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\nabla U)\cdot\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = -\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) + (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(U\mathbf{A}) = U(\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla U)\times\mathbf{A}$$

Coordenadas cilíndricas e esféricas

Coordenadas cilíndricas



$$\nabla U = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U}{\partial z}$$

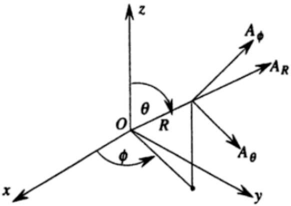
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas e esféricas

Coordenadas esféricas



$$\nabla U = \hat{\mathbf{R}}\frac{\partial U}{\partial R} + \hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}}\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \hat{\theta}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right) + \hat{\phi}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{R}\frac{\partial^2(RU)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)$$

Coordenadas cilíndricas e esféricas

Questões

a) Dado o campo vetorial $\mathbf{A} = xy\hat{x} + y^2\hat{y}$, avalie em coordenadas cartesianas e cilíndricas a circulação deste campo ao longo do percurso fechado C mostrado abaixo.
b) Dado o campo vetorial $\mathbf{B} = (y+z)\hat{y} + xy\hat{z}$, avalie em coordenadas retangulares o fluxo que atravessa a superfície triangular no plano xz definida pelas retas x = 0, z = 0, x = 1- z, mostrado na figura a seguir.