Eletromagnetismo Computacional
Introdução ao Método de elementos finitos

Ricardo Adriano

rluiz@cpdee.ufmg.br

4 de abril de 2012

1. Conceitos fundamentais - Problema unidimensional

2. Problemas 2D e 3D

Sumário

Conceitos e definições

O método de elementos finitos (FEM)

Os passos principais para a solução de um problema de valor de contorno utilizando o FEM são:

1. Encontrar a forma fraca ou variacional do problema
2. Aproximar a solução do problema na forma fraca usando funções de aproximação finitas

O problema unidimensional

Encontre $u(x)$ que satisfaça a seguinte equação diferencial no intervalo $x \in [0, 1]$

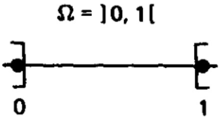
$$u_{,xx} + f = 0$$

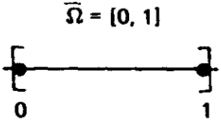
onde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $u_{,xx} \equiv d^2u/dx^2$

Notações

Domínios abertos e fechados

- Domínio aberto: $\Omega =]0,1[\rightarrow 0 < x < 1$
- Domínio fechado: $\bar{\Omega} = [0,1] \rightarrow 0 \leq x \leq 1$





Forma Forte

Unicidade da solução

O problema unidimensional terá solução única apenas se forem fornecidas as devidas condições de contorno. Vamos assumir que u deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} u(1) &= q \\ u_{,x}(0) &= -h \end{aligned}$$

onde q e h são constantes. A esse tipo de problema, dá-se o nome problema de valor de contorno em dois pontos.

Forma Forte

Forma forte do problema

A forma forte (S) é então definida como:

$$
(S) \begin{cases} \text{Given } f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ and constants } g \text{ and } h, \text{ find } u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ such that} \\ \qquad u_{,xx} + f = 0 \qquad \text{on } \Omega \\ \qquad u(1) = g \\ \qquad -u_{,x}(0) = h \end{cases}
$$

onde a solução analítica pode ser obtida por integração direta de f

$$
u(x) = g + (1 - x)h + \int_x^1 \left\{ \int_0^y f(z)\, dz \right\} dy
$$

Forma Fraca

Forma fraca ou variacional

Diferente de outros métodos (FDM) a forma forte não é apropriada para a solução de problemas via o FEM. Para definir a forma fraca (W), precisaremos fazer uso de duas classes de funções

- Funções de teste
- Funções de ponderação

Funções de teste

Classe de funções candidatas à solução que devem satisfazer a condição $u(1) = q$ e que suas derivadas sejam do tipo quadrado integrável. ou seja

$$\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty \quad (1)$$

Funções de teste

Funções de teste

Funções que obedecem a eq. (1) são chamadas H^1 ou seja $u \in H^1([0,1])$ ou simplesmente $u \in H^1$ assim, o conjunto de funções de teste pode ser definido por

$$\mathcal{S} = \{u \mid u \in H^1, u(1) = q\}$$

Funções de peso

O conjunto de funções de peso é muito semelhante ao conjunto de funções de forma. Entretanto, as funções de peso devem ser homogêneas onde os valores da função de teste são conhecidos. Matematicamente:

$$\mathcal{V} = \{w \mid w \in H^1, w(1) = 0\}$$

Forma fraca

Forma fraca

Uma vez definidas as funções de teste e funções de peso para o problema, a forma fraca (W) sera definida por

$$(W)\left\{\begin{array}{l}\text{Given } f,\ g, \text{ and } h, \text{ as before. Find } u \in \mathcal{S} \text{ such that for all } w \in \mathcal{V} \\[2ex] \boxed{\displaystyle\int_0^1 w_{,x} u_{,x}\, dx = \int_0^1 w f\, dx + w(0)h} \end{array}\right.$$

Equivalência entre forma forte e forma fraca

Prova

Podemos "provar" a equivalência entre as formas forte e fraca considerando as seguintes proposições:

a) Se u é solução de (S). Então u será também solução de (W)

b) Se u é solução de (W). Então u será também solução de (S)

Proposição a)

Assumindo u como solução de $(S) \Rightarrow (u_{,xx} + f = 0 \text{ em } \Omega)$ podemos escrever:

$$0 = -\int_0^1 w(u_{,xx} + f)dx$$

para todo $w \in \mathcal{V}$

Equivalência entre forma forte e forma fraca

Proposição a)

Integrando por partes

$$0 = \int_0^1 w_{,x} u_{,x}\, dx - \int_0^1 wf\, dx - wu_{,x}|_0^1$$

lembrando que $-u_{,x}(0) = h$ e que $w(1) = 0$ e reorganizando a equação

$$\int_0^1 w_{,x} u_{,x}\, dx = \int_0^1 wf\, dx + w(0)h$$

Que é exatamente a equação da forma fraca.
Adicionalmente, como $u(1) = q$, u pertence ao conjunto $\mathcal{L}$. Logo, se u é solução de (S), u será também a solução de (W).

Equivalência entre forma forte e forma fraca

Proposição b)

Assumindo que u é solução de (W), a condição $u(1) = q$ de (S) é automaticamente satisfeita pois $u \in \mathcal{L}$.
Integrando (W) por partes e lembrando que $w(1) = 0$.

$$0 = \int_0^1 w(u_{,xx} + f)\,dx + w(0)[u_{,x}(0) + h]$$

Para provar que u é também solução de (S), temos que mostrar que a equação acima implica em

i) $u_{,xx} + f = 0$ em Ω

ii) $u_{,x}(0) + h = 0$

Equivalência entre forma forte e forma fraca

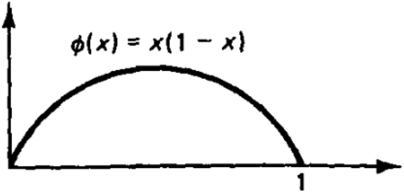
Proposição b) condição i)

Lembrando que (W) é válida para qualquer função w pertencente a $\mathcal{V}$, podemos escolher uma função w do tipo $w = \phi(u_{,xx} + f)$ onde $\phi(x) = x(x-1)$. Assim, substituindo w em

$$0 = \int_0^1 w(u_{,xx} + f)\, dx + w(0)[u_{,x}(0) + h]$$

obtemos

$$0 = \int_0^1 \phi(u_{,xx} + f)^2\, dx + 0$$



Equivalência entre forma forte e forma fraca

Proposição b) condição ii)

Uma vez que a condição i) é satisfeita, podemos escolher qualquer função w tal que $w(0) \neq 0$. Assim, podemos reescrever

$$0 = \int_0^1 w(u_{,xx} + f)\, dx + w(0)[u_{,x}(0) + h]$$

como

$$0 = 0 + w(0)[u_{,x}(0) + h]$$

o que valida a condição ii)

Algumas considerações sobre a forma fraca

Condições de contorno

- A condição $u(1) = q$ foi imposta na definição do espaço $\mathcal{L}$ (Condição de contorno essencial).
- Já a condição $u_{,x}(0) = -h$ não aparece explícita em (W), sendo imposta de "maneira fraca"(Condição de contorno natural).
- Os termos presentes na forma fraca são bilineares e simétricos.
- O método de elementos finitos é construído a partir da forma fraca.

Formas bilineares simétricas

Definição

Definiremos as formas bilineares como:

$$
\begin{aligned}
a(w,u) &= \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx \\
(w,f) &= \int_0^1 wf \, dx
\end{aligned}
$$

Forma fraca

Aplicando a definição anterior na forma fraca obtemos

$$a(w,u) = (w,f) + w(0)h$$

Formas bilineares simétricas

Simetria

A partir da definição das formas bilineares, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a(v,u) \\ (u,v) &= (v,u) \end{aligned}$$

Bilinearidade

Linear em cada "slot". Sendo c_1 e c_2 constantes:

$$\begin{aligned} a(c_1 u + c_2 v, w) &= c_1 a(u,w) + c_2 a(v,w) \\ (c_1 u + c_2 v, w) &= c_1 (u,w) + c_2 (v,w) \end{aligned}$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Restrição do domínio de busca

O primeiro passo para a solução do problema consiste em construir espaços de funções de base finitas para a aproximar $\mathcal{L}$ e $\mathcal{V}$. Esses espaços serão associados à discretização da geometria do problema

$$\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S} \qquad \text{(i.e., if } u^h \in \mathcal{S}^h\text{, then } u^h \in \mathcal{S}\text{)}$$

$$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \qquad \text{(i.e., if } w^h \in \mathcal{V}^h\text{, then } w^h \in \mathcal{V}\text{)}$$

Onde h refere-se à qualidade da discretização do domínio Ω.
Como $\mathcal{L}^h$ e $\mathcal{V}^h$ são subconjuntos de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{V}$:

$$u^h(1) = g$$

$$w^h(1) = 0$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em utilizar um mesmo espaço de funções para construir as funções u^h e w^h. Dado uma função $v^h \in \mathcal{V}$, uma função u^h pode ser escrita como:

$$u^h = v^h + q^h \tag{2}$$

Onde q^h é uma função conhecida que satisfaz a condição $q^h(1) = q$. Logo

$$\begin{aligned} u^h(1) &= v^h(1) + q^h(1) \\ &= 0 + q \end{aligned}$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Método de Galerkin

Escrevendo a equação da forma fraca em termos de $\mathcal{L}^h$ e $\mathcal{V}^h$

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)h$$

Aplicando a eq. (2) e apropriedade da bilinearidade

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, q^h)$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Método de Galerkin

Finalmente, podemos escrever a forma fraca de Galerkin como:

$$(G)\begin{cases} \text{Given } f,\ q, \text{ and } h, \text{ as before, find } u^h = v^h + q^h, \text{ where } v^h \in \mathcal{V}^h, \\ \text{such that for all } w^h \in \mathcal{V}^h \\ \qquad a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, q^h) \end{cases}$$

Note que:

- w^h e v^h pertencem ao mesmo espaço $\mathcal{V}^h$
- $\mathcal{V}^h$ e q^h são conhecidos (Gerados a partir da geometria do problema)

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Construção de $\mathcal{V}^h$

O espaço $\mathcal{V}^h$ é construído como a combinação linear de um conjunto de funções $N_A : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $A = 1, 2, ..., n$.
Assim, funções w^h pode ser escritas como:

$$w^h = \sum_{A=1}^{n} c_A N_A = c_1 N_1 + c_2 N_2 + ... + c_n N_n$$

As funções N_A são conhecidas com funções de forma, base ou interpolação. E cada função deve satisfazer

$$N_A(1) = 0, \ A = 1, 2, ..., n$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Construção de $\mathcal{L}^h$ e q^h

O espaço $\mathcal{L}^h$ é construído a partir de $\mathcal{V}^h$ e da função q^h. A função q^h será construída a partir da função de forma $N_{n+1} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$\begin{aligned} N_{n+1}(1) &= 1 \\ q^h &= qN_{n+1} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} u^h &= v^h + q^h \\ u^h &= \sum_{A=1}^{n} d_A N_A + qN_{n+1} \end{aligned}$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Construção do sistema matricial

Reescrevendo a equação de Galerkin utilizando as funções de forma

$$
\begin{aligned}
a\left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A, \sum_{B=1}^{n} d_B N_b\right) &= \left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A, f\right) + \left[\sum_{A=1}^{n} c_A N_A(0)\right] h \\
&\quad - a\left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A, q N_{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

Aplicando a propriedade da linearidade em w^h

Como os termos da equação de Galerkin são bilineares, podemos retirar os coeficientes c_A das integrações.

$$\sum_{A=1}^{n} c_A \, a(N_A, \sum_{B=1}^{n} d_B N_b) = \sum_{A=1}^{n} c_A \{(N_A, f) + [N_A(0)]h - a(N_A, qN_{n+1})\}$$

Lembrando que os coeficientes c_A são arbitrários, a equação de Galerkin acima deverá ser válida para cada função N_A separadamente. Ou seja:

$$a(N_A, \sum_{B=1}^{n} d_B N_b) = (N_A, f) + [N_A(0)]h - a(N_A, qN_{n+1})$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

O sistema matricial

Aplicando novamente a propriedade da linearidade.

$$\sum_{B=1}^{n} a(N_A, N_B)d_B = (N_A, f) + [N_A(0)]h - a(N_A, qN_{n+1})$$

Onde essa equação deverá ser válida para cada função N_A, $A = 1, 2, ..., n$

Definindo

$$\begin{aligned} K_{AB} &= a(N_A, N_b) \\ F_A &= (N_A, f) + [N_A(0)]h - a(N_A, qN_{n+1}) \end{aligned}$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

O sistema matricial

Podemos escrever o sistema matricial $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$ onde $\mathbf{K}$ é conhecida como matriz de rigidez, $\mathbf{d}$ o vetor deslocamento e $\mathbf{F}$ o vetor força.

$$\boldsymbol{K} = [K_{AB}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \{F_A\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \{d_B\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix}$$

Construindo a solução do problema com o método de elementos finitos

O sistema matricial

Uma vez resolvido o sistema matricial, a solução do problema pode ser aproximada em qualquer ponto do domínio utilizando.

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n} N_A(x) d_A + N_{n+1}(x) q$$

ou simplesmente

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(x) d_A$$

onde $d_{n+1} = q$.

A qualidade da aproximação dependerá da escolha das funções N_A e do número de funções de forma n utilizadas na discretização do problema

Exemplo 1

Um grau de liberdade

Vamos aplicar o método de elementos finitos para o problema unidimensional considerando uma força constante $f = \rho$

$$(S) \begin{cases} \text{Given } \ell : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ and constants } q \text{ and } h, \text{ find } u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ such that} \\ u_{,xx} + \ell = 0 \quad \text{on } \Omega \\ u(1) = q \\ -u_{,x}(0) = h \end{cases}$$

onde a solução analítica pode ser obtida por integração direta de $f(x)$

$$u(x) = q + (1 - x)h + \underbrace{\rho(1 - x^2)/2}_{u_{part}(x)} \tag{3}$$

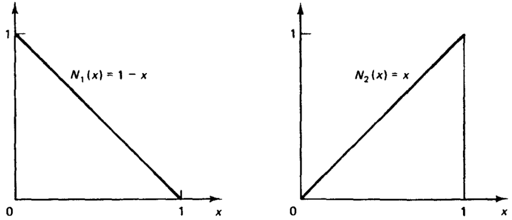
Exemplo 1

Um grau de liberdade

Com apenas um grau de liberdade ($n = 1$),

$$\begin{aligned} w^h &= c_1 N_1 \\ u^h &= v^h + q^h = d_1 N_1 + q N_2 \end{aligned}$$

Lembrando que as funções devem satisfazer $N_1(1) = 0$ e $N_2(1) = 1$, escolheremos as seguintes funções.



Exemplo 1

Um grau de liberdade

O sistema matricial será reduzido a uma única linha

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [K_{11}] = K_{11} \\
\mathbf{F} &= \{F_1\} = F_1 \\
\mathbf{d} &= \{d_1\} = d_1
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
K_{11} = &\quad a(N_1, N_1) = \int_0^1 \underbrace{N_{1,x}}_{-1} \underbrace{N_{1,x}}_{-1} dx = 1 \\
F_1 = &\quad (N_1, \underbrace{f(x)}_{\rho}) + N_1(0)h - a(N_1, N_2)q \\
= &\quad \rho \int_0^1 (1-x)dx + h - q \int_0^1 N_{1,x} N_{2,x} dx
\end{aligned}
$$

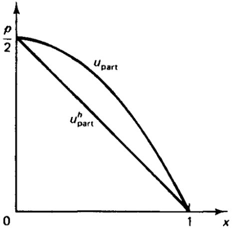
Exemplo 1

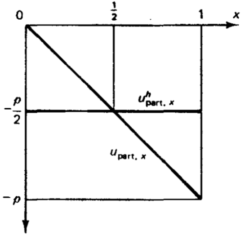
Um grau de liberdade

Resolvendo a equação, encontramos $d_1 = \rho/2 + h + q$ que permite encontrar a solução do problema em todo o domínio

$$
\begin{aligned}
u^h(x) &= N_1 d_1 + N_2 q = (1-x)(\rho/2 + h + q) + xq \\
&= q + (1-x)h + \underbrace{\rho(1-x)/2}_{u^h_{part}(x)}
\end{aligned}
$$

Comparando com a solução analítica eq. (3)





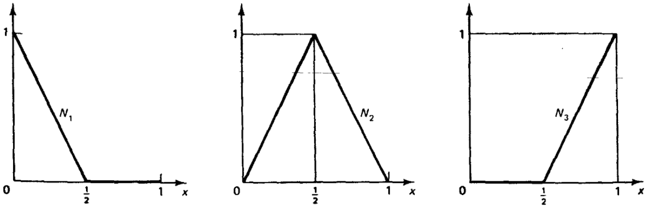
Exemplo 2

Dois graus de liberdade

Com dois graus de liberdade ($n = 2$),

$$
\begin{aligned}
w^h &= c_1 N_1 + c_2 N_2 \\
u^h &= v^h + q^h = d_1 N_1 + d_2 N_2 + q N_3
\end{aligned}
$$

Lembrando que as funções devem satisfazer $N_1(1) = N_2(1) = 0$ e $N_3(1) = 1$, escolheremos as seguintes funções.



Exemplo 2

Funções de forma

As expressões analíticas das funções de forma serão:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exemplo 2

O sistema matricial

A partir das expressões das funções de forma, podemos montar o sistema matricial

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$d = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x}\, dx = \int_0^{1/2} N_{A,x} N_{B,x}\, dx + \int_{1/2}^1 N_{A,x} N_{B,x}\, dx$$

$$K_{11} = 2, \qquad K_{12} = K_{21} = -2, \qquad K_{22} = 4$$

$$K = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_A &= (N_A, \ell) + N_A(0)h - a(N_A, N_3)g \\ &= \int_0^1 N_A \ell\, dx + N_A(0)h - \int_{1/2}^1 N_{A,x} N_{3,x}\, dx\, g \end{aligned}$$

Exemplo 2

Solução

Resolvendo o sistema matricial:

$$d = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{p}{4} + h \\ \frac{p}{2} + 2q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p}{2} + q + h \\ \frac{3p}{8} + q + \frac{h}{2} \end{Bmatrix}$$

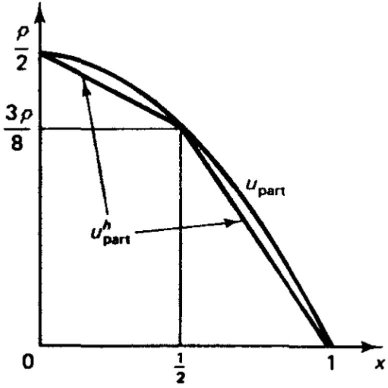
$$u^h(x) = q + h(1 - x) + u^h_{\text{part}}(x)$$

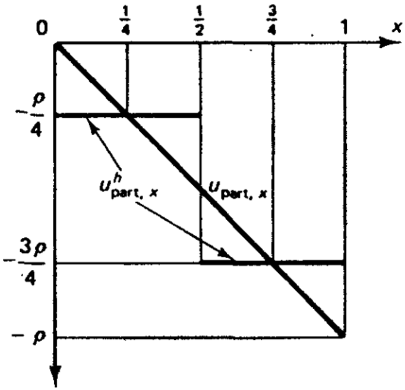
$$u^h_{\text{part}} = \frac{p}{2} N_1 + \frac{3p}{8} N_2$$

Exemplo 2

Comparação com a solução analítica

A comparação é feita utilizando apenas as parcelas u_{part} das soluções





Aproximação por funções lineares por parte

O espaço de elementos finitos lineares por parte

Os exemplos anteriores são casos particulares onde as funções de forma são obtidas por aproximações lineares em cada intervalo.
Subdividindo o domínio em n intervalos não sobrepostos, podemos escrever as funções de forma como:

Nós internos ao domínio

$$N_A(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{A-1})}{h_{A-1}}, & x_{A-1} \le x \le x_A \\ \dfrac{(x_{A+1} - x)}{h_A}, & x_A \le x \le x_{A-1} \\ 0 \quad , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Nós na borda do domínio

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{h_1}, \qquad x_1 \le x \le x_2$$

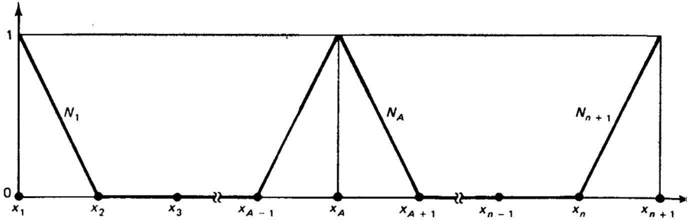
$$N_{n+1}(x) = \frac{x - x_n}{h_n}, \qquad x_n \le x \le x_{n+1}$$

$\Rightarrow$ Note que o espaçamento entre os nós não precisa ser uniforme!

Aproximação por funções lineares por parte

O espaço de elementos finitos lineares por parte

Representação gráfica das funções de forma



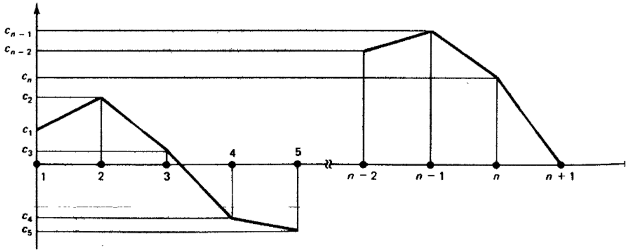
Propriedades

- Obedecem as propiedades do delta de Kronecker $N_A(x_B) = \delta_{AB}$
  - $N_A(x_B) = 1$ se $A = B$
  - $N_A(x_B) = 0$ se $A \neq B$
- $u^h(x_A) = d_a$

Aproximação por funções lineares por parte

O espaço de elementos finitos lineares por parte

Representação gráfica das funções w^h e u^h



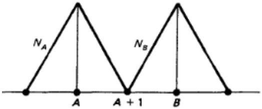
Propriedades de u^h

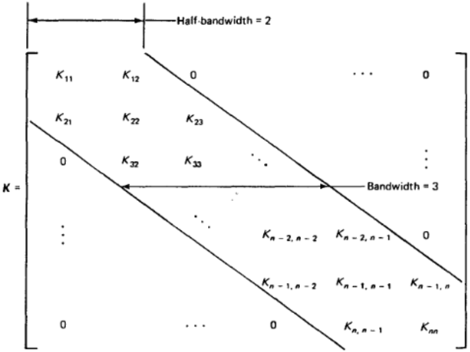
- u^h é exato sobre os nós
- Como u^h é linear por partes, $u^h_{,x}$ será constante em cada elemento
- Existe pelo menos um ponto em cada elemento onde $u^h_{,x}$ é exato

Propriedades da matriz de rigidez

Propriedades

K é uma matriz banda, simétrica (propriedade oriunda da bilinearidade de $a(.,.)$) e positiva definida. Tais características possibilitam o uso de técnicas eficientes para o armazenamento e solução do sistema matricial.

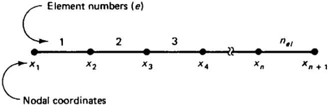




Aspectos computacionais

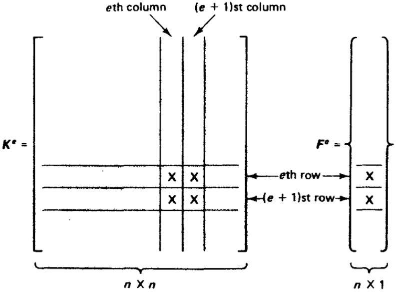
Construção do sistema elemento por elemento

Assumindo que o domínio seja dividido em n_{el} elementos, podemos construir uma matriz local $\mathbf{K}_e$ para cada elemento. Cada matriz local é posteriormente incorporada à matriz $\mathbf{K}$ conforme a numeração global de seus nós.



$$k^e = \underbrace{[k^e_{ab}]}_{2 \times 2}, \qquad f^e = \underbrace{\{f^e_a\}}_{2 \times 1}$$

$$k^e_{ab} = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x} \, dx$$



Sumário

Problemas 2D e 3D

Etapas para a solução de problemas 2D e 3D

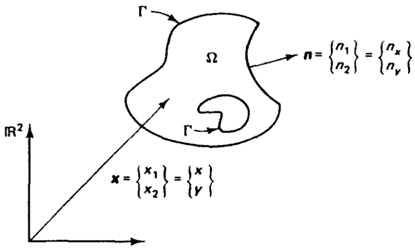
A solução de problemas 2D e 3D seguirá os mesmos passos da solução do problema unidimensional. Quais sejam:

1. Definição da forma forte do problema
2. Construção da forma fraca
   - Definir os espaços das funções u e w
   - Ponderar (S) por uma função arbitrária w, integrar o resultado no domínio e igualar a zero (Método dos resíduos ponderados)
   - Encontrar a forma bilinear (W) utilizando integração por partes
3. Aproximar a solução do problema na forma fraca usando funções de aproximação de base finita
4. Montar e resolver o sistema matricial resultante

Problemas 2D e 3D

Notação

Dano $n_{sd} (= 2 \text{ ou } 3)$, definiremos o domínio do problema $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, a fronteira do domínio $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_{sd}-1}$, o vetor normal à fronteira do domínio $\mathbf{n}$ e vetor posição $\mathbf{x}$ conforme ilustrado.



Obviamente, se $n_{sd} = 3$, Ω será um volume, Γ será uma superfície fechada e

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n} = \{n_i\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Problemas 2D e 3D

Condições de contorno

Assim como no problema unidimensional, a unicidade da solução dependerá da imposição de condições de contorno na fronteira do domínio. Usualmente, as condições impostas são as condições de Dirichlet e Neumann

Condição de Dirichlet

Assume-se que u seja conhecido na fronteira Γ_q

$$u(\mathbf{x}) = q, \ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q$$

Condição de Neumann

Assume-se que a derivada normal de u seja conhecida na fronteira Γ_h

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{x}) = h, \ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h$$

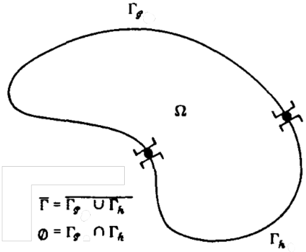
Problemas 2D e 3D

Condições de contorno

No caso de q ou h iguais a zeros, as condições são chamadas de condições homogêneas. Repare que a condição de Dirichlet é uma condição essencial enquanto a condição de Neumann é uma condição natural da forma fraca.

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{u | u \in H^1, u(\mathbf{x}) = q, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q\} \\ \mathcal{V} &= \{w | w \in H^1, w(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q\}\end{aligned}$$



Problemas 2D e 3D

Teorema da divergência

Usando a notação do livro do Hughes, podemos reescrever o teorema da aplicado a uma função f escalar como:

$$\int_{\Omega} f_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_i d\Gamma \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla f d\Omega = \oint_{\Gamma} f d\Gamma$$

Essa equação pode ser obtida aplicando o teorema da divergência a uma função vetorial $\mathbf{f} = f\mathbf{c}$ onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

Integração por partes

A partir do teorema da divergência para a função escalar f, podemos escrever:

$$\int_{\Omega} f_{,i} g d\Omega = -\int_{\Omega} f g_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_i d\Gamma$$

Problemas 2D e 3D

Forma fraca

Utilizando o método dos resíduos ponderados e com o auxílio das equações acima, podemos encontrar a forma fraca do problema. Para o problema de transferência de calor descrito no Hughes:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Given } \ell : \Omega \to \mathbb{R},\ q : \Gamma_q \to \mathbb{R} \text{ and } h : \Gamma_h \to \mathbb{R}, \text{ find } u \in \mathcal{S} \text{ such that} \\ \text{for all } w \in \mathcal{V} \\ \\ \boxed{-\int_\Omega w_{,i} q_i \, d\Omega = \int_\Omega w \ell \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h \, d\Gamma} \\ \\ \text{where } q_i = -\kappa_{ij} u_{,j}, \end{array} \right.$$

Problemas 2D e 3D

Forma fraca

Reescrevendo na forma compacta

$$a(w,u) = (w,f) + (w,h)_\Gamma$$

onde

$$\begin{aligned} a(w,u) &= \int_\Omega w_{,i} k_{ij} u_{,j} \, d\Omega = \int_\Omega (\nabla w)^T \mathbf{k} \nabla w \, d\Omega \\ (w,f) &= \int_\Omega wf \, d\Omega \\ (w,h)_{\Gamma_h} &= \int_{\Gamma_h} wf \, d\Gamma \end{aligned}$$

Problemas 2D e 3D

Método de Galerkin

Assim como no problema 1D, as funções em $\mathcal{L}$ podem ser escritas como

$$u^h = v^h + q^h$$

onde $v^h(\mathbf{x}) = 0$ e $q^h(\mathbf{x}) = q$, $\forall x \in \Gamma_q$.
Substituindo na eq. da forma fraca

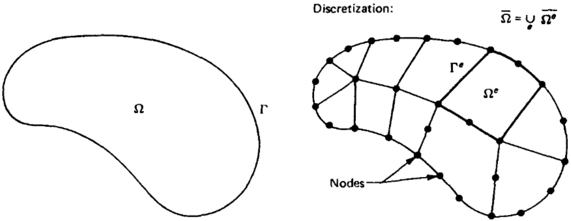
(G) Given ℓ, q, and h [as in (W)], find $u^h = v^h + q^h \in \mathcal{S}^h$ such that for all $w^h \in \mathcal{V}^h$ (cf. Sec. 1.5):

$$\boxed{a(w^h, v^h) = (w^h, \ell) + (w^h, h)_\Gamma - a(w^h, q^h)}$$

Problemas 2D e 3D

Discretização

O passo seguinte consiste na construção das funções de forma N_A que são obtidas a partir da discretização do problema. A discretização deve respeitar a fronteira entre os materiais

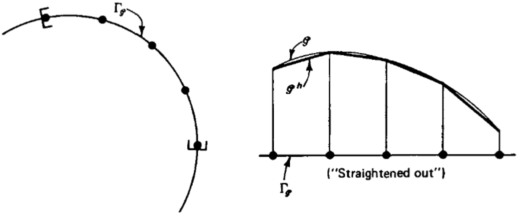


$$w^h(x) = \sum_{A \in n - n_q} N_A(\mathbf{x}) c_A \qquad v^h(x) = \sum_{A \in n - n_q} N_A(\mathbf{x}) d_A$$

Problemas 2D e 3D

Aproximação da condição de contorno de Dirichlet

O passo seguinte consiste na construção das funções de aproximação N_A que são obtidas a partir da discretização do problema.

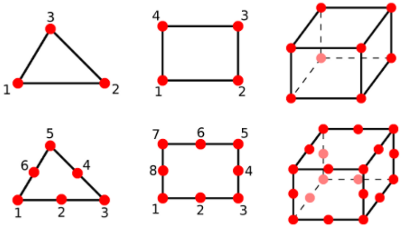


$$q^h(x) = \sum_{A \in n_q} N_A(\mathbf{x}) q_A, \; q_A = q(\mathbf{x}_A)$$

Problemas 2D e 3D

Construção das funções de forma

As funções de forma dependem dos tipos de elementos utilizados na discretização

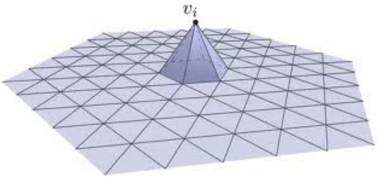


Exemplo de elementos bidimensionais e tridimensionais. Por convenção, a numeração dos nós segue o sentido anti-horário.

Problemas 2D

Elementos triangulares de primeira ordem

Elementos triangulares são muito utilizados devido à sua simplicidade e capacidade de representar geometrias complexas.



Propriedades

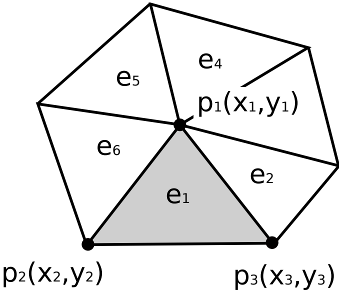
Possuem as mesmas propriedades das funções lineares por parte

- Obedecem as propiedades do delta de Kronecker $N_A(x_B) = \delta_{AB}$
  - $N_A(x_B) = 1$ se $A = B$; $N_A(x_B) = 0$ se $A \neq B$
- $u^h(x_A) = d_a$

Elementos triangulares de primeira ordem

Construção das funções de forma

Como os elementos são de primeira ordem, a função u irá variar linearmente dentro de cada elemento conforme uma equação do tipo:



$$u(x, y) = a + bx + cy$$

Avaliando essa equação nos nós de e_1

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ u_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ u_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

Nas coordenadas dos vértices, o potencial deve ser o potencial do próprio vértice. Ao resolvermos o sistema de equações acima, podemos obter os valores de a, b e c.

Elementos triangulares de primeira ordem

Construção das funções de forma

Substituindo os valores de a, b e c na expressão de $u(x, y)$, podemos escrevê-la na seguinte forma:

$$u(x,y) = \frac{1}{D}(p_1+q_1x+r_1y)u_1+\frac{1}{D}(p_2+q_2x+r_2y)u_2+\frac{1}{D}(p_3+q_3x+r_3y)u_3$$

onde D é o dobro da área de e_1 e $p_i = x_j y_k - x_k y_j$, $q_i = y_j - y_k$, $r_i = x_k - x_J$ são obtidos através de permutação cíclica

Como as funções obedecem as propriedades do delta de Kronecker, apenas N_1, N_2 e N_3 serão diferentes de zero em e_1, ou seja:

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

Elementos triangulares de primeira ordem

Construção das funções de forma

Por analogia:

$$N_A(x,y) = \frac{1}{D}(p_i + q_i x + r_i y),\ A = 1,2,3$$

Como as funções N_A são lineares, o gradiente de u será constante em cada elemento.

$$\nabla N_A(x,y) = \frac{1}{D}(q_i \hat{x} + r_i \hat{y}),\ A = 1,2,3$$

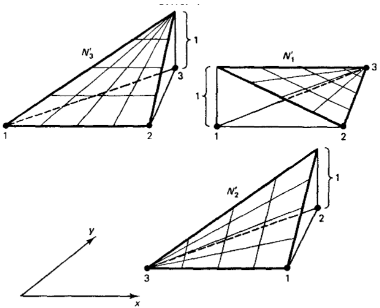
Questão

Mostre que as funções N_A obedecem as propriedades do delta de Kronecker

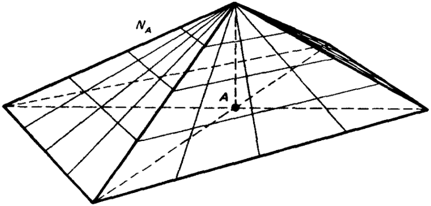
Elementos triangulares de primeira ordem

Construção das funções de forma

Esboço das funções N_A. Repare que, na transição entre dois elementos, u dependerá apenas dos nós sobre a aresta entre os elementos.



N_1, N_2 e N_3 em e_1

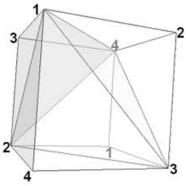


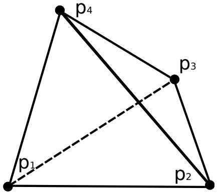
N_A de um nó compartilhado por 4 elementos

Problemas 3D

Elementos tetraêdricos de primeira ordem

São o equivalente tridimensional dos elementos triangulares.





Possuem as mesmas propriedades das funções lineares por parte e dos elementos triangulares. No interior de um tetraedro, $u(x, y, z)$ pode ser aproximado por:

$$u(x, y, z) = a + bx + cy + dz$$