

ELETROMAGNETISMO COMPUTACIONAL

TRABALHO COMPUTACIONAL 1

Simulação de Problemas Eletrostáticos

Objetivo: Nesta aula iremos compreender um pouco sobre a utilização do método de elementos finitos na resolução de problemas em eletrostática.

Exemplo de aplicação: Para uma melhor compreensão da utilização do software FEMM em problemas de eletrostática, siga o tutorial *eletrostática.avi* disponível no Moodle. Ele apresenta os passos necessários para a modelagem do capacitor quadrado discutido em sala.

Problema 1: O capacitor de placas paralelas.

Considere o capacitor de placas paralelas da fig. 1. A solução analítica desse problema é obtida assumindo-se que a largura das placas é muito maior do que o espaçamento entre as mesmas e que o espraçamento dos campos nas bordas pode ser negligenciado. Assim, os campos no interior do capacitor podem ser aproximados pelos campos gerados por duas placas infinitas com densidades superficiais de cargas opostas.

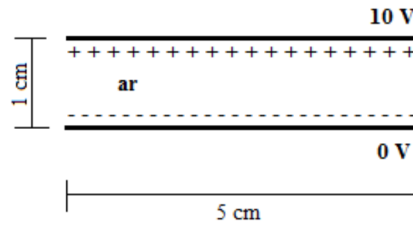


FIGURA 1. Capacitor de placas paralelas

Resolvendo o problema analiticamente, O Campo Elétrico \mathbf{E} na região entre as duas placas será dado por

$$(1) \quad \mathbf{E} = -\frac{\rho_{sup}}{\epsilon} \hat{z}$$

onde ρ_{sup} é a densidade superficial de carga elétrica contida em uma das placas, ϵ é a permissividade do ar e \hat{z} é a direção perpendicular às placas.

Como $\mathbf{E} = -\nabla V$, podemos escrever o potencial escalar elétrico como

$$(2) \quad V = -\frac{\rho_{sup}}{\epsilon} z + k$$

Assumindo-se que a placa com o potencial de $0V$ está localizada em $z = 0$, o valor da constante k é obtido ($k = 0$).

Uma vez definido o potencial elétrico, a densidade superficial de carga pode ser obtida avaliando-se a equação (2) no ponto $z = 1\text{cm}$. Com o potencial elétrico e a densidade de carga é possível encontrar a Capacitância e a quantidade de energia armazenada no capacitor. A Capacitância pode ser obtida pela relação $C = Q/V$ sendo Q a carga total na placa do capacitor. Repare que se aumentarmos a tensão no capacitor, a carga total acumulada também aumentará fazendo com que a capacitância permaneça constante. Quanto à energia armazenada no capacitor, ela pode ser obtida diretamente pela expressão $W = 1/2 CV^2$ ou pode ser calculada a partir dos campos (Vetor de poynting).

$$(3) \quad w = \frac{W}{vol} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Solução utilizando o FEMM: Uma das maneiras de simular o problema do capacitor de placas paralelas com o FEMM é apresentada na fig 2. Nela, o domínio do problema é definido pela região retangular entre as placas do capacitor. No contorno do domínio são impostas condições de Dirichlet $V = 0V$ para a parte inferior e $V = 10V$ para a parte superior. Nas laterais do contorno, a condição de Neumann homogênea é imposta. Como essa é a condição padrão do FEMM para problemas eletrostáticos, ela é imposta automaticamente.

A distribuição do potencial elétrico sobre o domínio é representada pela intensidade das cores conforme apresentado na legenda. Repare que o potencial varia linearmente com z . Isso é mais facilmente observado no gráfico $V \times z$ da fig. 3

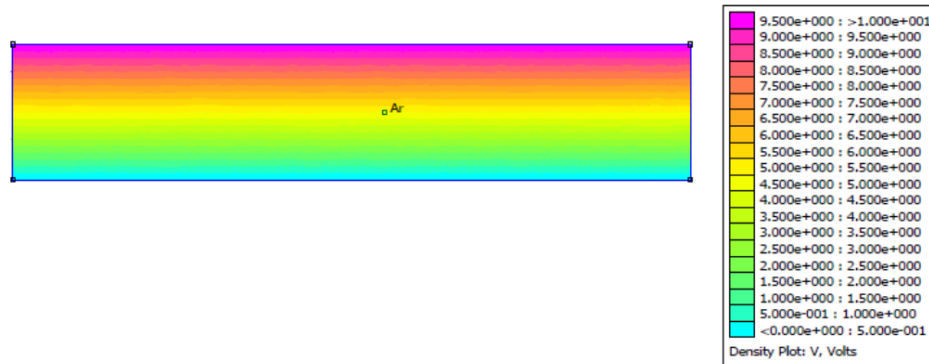
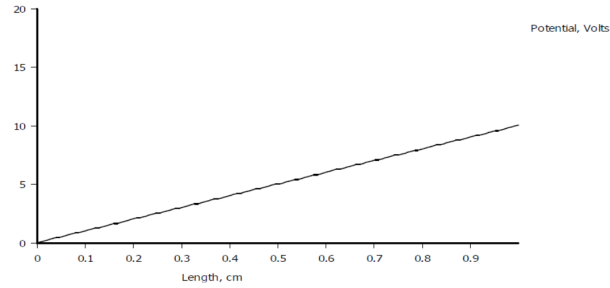


FIGURA 2. Representação do capacitor de placas paralelas no FEMM

Parte prática

Crie um arquivo de texto com o nome "TC01" com um cabeçalho contendo os nomes dos integrantes da dupla e a tabela abaixo. Resolva o problema do capacitor de placas paralelas analiticamente e utilizando o domínio da figura 2. Assuma que as placas são quadradas e preencha as duas primeiras colunas da tabela 1. Na tabela, o subscrito "*centro*" representa um ponto no centro do capacitor. Já o subscrito "*borda*" representa um ponto na borda do capacitor equidistante das placas.

FIGURA 3. Potencial em função de z

	Analítico	FEM 1	FEM 2	FEM 3	FEM 4
$V_{centro}(V)$					
$V_{borda}(V)$					
$ E_{centro} (V/m)$					
$ E_{Borda} (V/m)$					
$Q(C)$					
$C(F)$					
$W(J)$					

TABELA 1. Capacitor de placas paralelas

Redefina a tensão nas placas superior e inferior do capacitor utilizando os valores $V = +5V$ e $V = -5V$ respectivamente. Resolva o problema e armazene os resultados na coluna FEM 2 da tabela. Com os novos níveis de tensão, modifique o domínio do problema para levar em conta o efeito do espraçamento. Pense em como devem ser definidas as novas condições de contorno para o problema e armazene o resultado na coluna FEM 3. Por fim, tente utilizar as condições de simetria para reduzir o domínio do problema para um quarto do domínio utilizado na coluna FEM 4. Escreva um breve parágrafo comentando os resultados obtidos.

Problema 2: O cabo coaxial.

Considere que o cabo coaxial apresentado na fig. 4 está submetido a uma diferença de potencial de 100 V e que as propriedades dos materiais são: ϵ_r do teflon igual a 2,1 e ϵ_r do nylon igual a 3,8. A solução analítica desse problema pode ser obtida a partir da integração da lei de Gauss do campo elétrico sobre superfícies cilíndricas de comprimento arbitrário. Dica: assuma que a densidade superficial de carga nos condutores é conhecida para encontrar os campos e, posteriormente, utilize o valor da tensão para encontrar as densidades superficiais de carga.

Parte prática

Simule o problema e plote o potencial, o campo elétrico e o fluxo elétrico em função do raio. Compare os resultados com os resultados analíticos. Os resultados são condizentes com as condições de interface estudadas em sala? Adicione os resultados e conclusões ao arquivo "TC01".

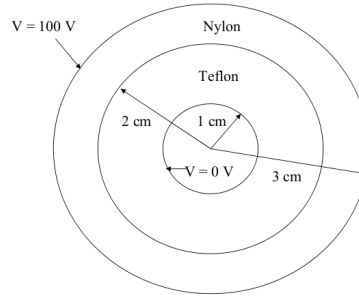


FIGURA 4. Geometria do cabo coaxial

Problema 3: Materiais com permissividade elevada

Esse problema tem como objetivo explorar o comportamento do campo elétrico na presença de um objeto com permissividade elétrica elevada. Para isso, considere o domínio da fig. 5. Nela, um pequeno cilindro de germânio envolto em ar é sub-

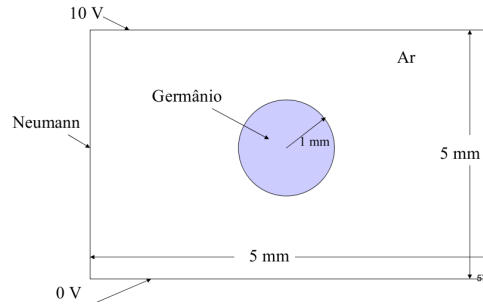


FIGURA 5. Geometria do problema 3

metido a um campo elétrico oriundo da diferença de potencial entre duas placas condutoras.

Parte prática

Encontre o potencial e o campo elétrico entre as placas do problema da fig. 5 assumindo que no germânio $\epsilon_r = 16$. Repare que quando $\epsilon_r \rightsquigarrow \infty$, O campo elétrico tende a ficar parecido com o de um material condutor. Entretanto, o mesmo não ocorre com o fluxo elétrico. Assumindo z como sendo o eixo perpendicular às placas, adicione no arquivo os gráficos $V \times z$, $|D| \times z$ e $|E| \times z$ para uma reta cortando a circunferência ao meio. Aponte quais as principais semelhanças e diferenças entre os resultados encontrados e os previstos para uma material condutor. Analise os resultados tanto dentro quanto fora do cilindro.

Problema 4: O propulsor eletrostático

Uma aplicação interessante de campos eletrostáticos é a propulsão de veículos espaciais, sobretudo pequenos satélites (1-100 kg). Ao invés de queimar o combustível

para gerar impulso a partir da expansão dos gases, os propulsores eletrostáticos aceleram partículas carregadas, gotículas ou íons o que permite uma maior eficiência. O princípio de funcionamento do propulsor é apresentado na fig. 6

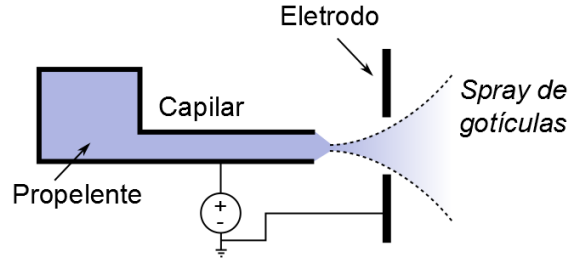


FIGURA 6. Esquemático de um propulsor eletrostático

Na ausência do campo elétrico, a tensão superficial na superfície do propelente ao final do tubo capilar fará com que o líquido permaneça em repouso. Aplicando-se uma diferença de potencial entre o capilar e o eletrodo (em forma de anel), as cargas positivas existentes no líquido se moverão em direção à superfície no capilar. A densidade superficial de carga na superfície do líquido (ρ_{sup}) será proporcional à componente tangencial do campo elétrico (E_n) sobre a superfície (condição de interface). A força de atração entre a densidade superficial e o eletrodo irá deformar a superfície do líquido. Com a deformação, as cargas se moverão para a região deformada aumentando o campo elétrico naquela região (efeito de pontas). A mudança da geometria da superfície modifica também a tensão superficial de modo a encontrar um novo ponto de equilíbrio [1].

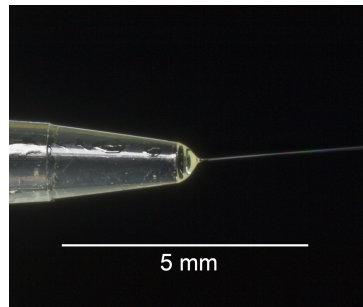


FIGURA 7. “Cone de Taylor” Foto por Robert Lamberts - The New Zealand Institute for Plant and Food Research Ltd.

Entretanto se o campo elétrico atingir um valor crítico, o sistema se tornará instável e o líquido será expelido. A forma como a superfície se deforma é conhecida como cone de Taylor e é ilustrada na fig. 7. A instabilidade ocorre aproximadamente quando

$$(4) \quad E_n > \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2\epsilon_0 R}}$$

onde γ é a tensão superficial do líquido, e R é o raio do tubo capilar [2].

A tensão necessária para o gerar o campo elétrico crítico pode ser obtida aproximando-se o eletrodo por um plano condutor infinito [2]. Nesse caso a tensão será dada por.

$$(5) \quad V = \sqrt{\frac{\gamma R_c}{\epsilon_0}} \ln \left(\frac{4d}{R_c} \right)$$

onde R_c é o raio de curvatura da superfície do líquido sem a presença do campo elétrico e d é a distância entre o capilar e o eletrodo.

Parte prática

Considere o diâmetro do tubo capilar $2R = 0.1\text{mm}$, a distancia entre o tubo e o eletrodo $d = 5\text{mm}$ e que os raios do eletrodo são $R_a = 2,5\text{mm}$ e $R_b = 7,5\text{mm}$. Considere também que o propelente é a Formamida (CH_3NO), com $\gamma = 0,05\text{N/m}$, $\epsilon_r = 84$ e que $R_c = 0,05\text{mm}$. Construa um modelo axissimétrico para simular o problema na situação de instabilidade. Descreva o modelo e apresente os resultados no relatório. Compare a simulação com as expressões analíticas.

Por fim, repare que as linhas de fluxo de \mathbf{D} apontam para o eletrodo, ou seja, uma gotícula que se desprenda do tubo será acelerada até o eletrodo e, se nada for feito, ela permanecerá lá. Isso significa que o impulso total resultante seria nulo. Para evitar esse problemas, poderíamos usar uma fonte pulsante. Assim a força cessaria quando a partícula estivesse próxima ao eletrodo. Outra forma de fazer isso é adicionar um sistema neutralizador na saída do propulsor da figura 6. Pesquise e descubra como esse sistema funciona.

Converta o arquivo para o formato **PDF** e o envie pelo Moodle. **Cuidado!** Arquivos que não estiverem em formato **PDF** não serão avaliados.

REFERÊNCIAS

- [1] L. Velasquez-Garcia, A. Akinwande, and M. Martinez-Sanchez, “A micro-fabricated linear array of electrospray emitters for thruster applications,” *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 15, pp. 1260–1271, Oct 2006.
- [2] M. M. Sanchez, “Mit opencourseware - space propulsion lecture notes 23-25.” Massachusetts Institute of Technology, 2015.