Eletromagnetismo Computacional
Capítulo 2

Ricardo Adriano

rluiz@cpdee.ufmg.br

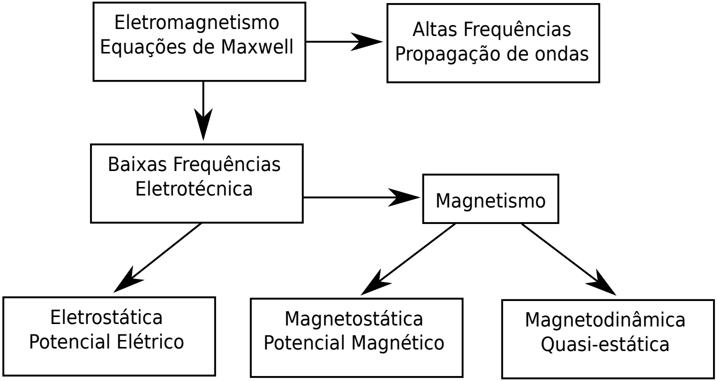
13 de março de 2015

Sumário

Equações de Maxwell

Eletrodinâmica macroscópica

A teoria eletromagnética assume que os meios são contínuos, isto é, a matéria pode ser continuamente subdividida e conservar, desta maneira, as propriedades qualitativas do todo.



Equações de Maxwell

Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo

- Campo elétrico **E** (V/m)
- Indução elétrica **D** (C/m^2) (Densidade de fluxo elétrico)
- Campo magnético **H** (A/m)
- Indução magnética **B** $(T$ ou $Wb/m^2)$ (Densidade de fluxo magnético)
- Densidade superficial de corrente **J** (A/m^2)
- Densidade volumétrica de carga elétrica ρ (C/m^3)

Caracterização dos meios materiais

- Permeabilidade magnética $\mu = \mu_r \mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)
- Permissividade elétrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\epsilon_0 \simeq 8,854 \times 10^{-12}$ (F/m)
- Condutividade elétrica σ (Ω^{-1}/m)

Distribuições de carga

Densidade volumétrica de carga elétrica

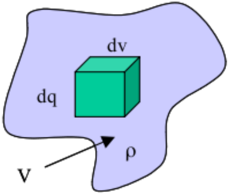
Definição:

$$\rho \equiv \frac{dq}{dv} \equiv \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (C/m^3)$$

onde $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, isso é, a densidade volumétrica de carga é função da posição e do tempo.

A carga total em um volume v será dada por:

$$q = \int_v \rho dv$$



Equações de Maxwell

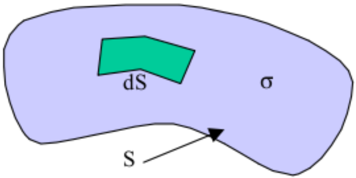
Densidade superficial de carga elétrica

Definição:

$$\rho_{sup} \equiv \frac{dq}{ds} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (C/m^2)$$

onde ρ_{sup}, existe apenas na superfície s e é função da posição e do tempo. A carga total na superfície s será dada por:

$$q = \int_s \rho_{sup} ds$$



Equações de Maxwell

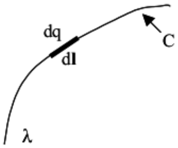
Densidade linear de carga elétrica

Definição:

$$\rho_{lin} \equiv \frac{dq}{dl} \equiv \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (C/m)$$

onde ρ_{lin}, existe apenas em l e é função da posição e do tempo.
A carga total no percurso l será dada por:

$$q = \int_l \rho_{lin} dl$$



Equações de Maxwell

Carga pontual

Carga concentrada em uma região suficientemente pequena para se confundir com um ponto, vista macroscopicamente.

Cargas expressas como densidades volumétricas

É possível representar as diversas distribuições de carga como uma distribuição volumétrica com a ajuda da função delta de Dirac.

Densidade Superficial:

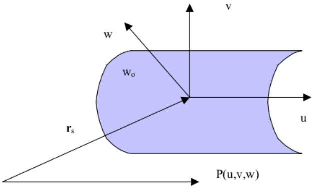
$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{sup}(u, v)\delta(w - w_0)$$

Densidade linear:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{lin}(u)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0)$$

Carga pontual:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0)$$



Note que em todos os casos a carga total é a mesma!

Distribuições de corrente

Densidade superficial de corrente

Quantidade de carga que atravessa uma superfície. É definida como o produto da densidade volumétrica de carga pela velocidade **v** (corrente de convecção).

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (A/m^2)$$

A integral de superfície da densidade de corrente **J** fornece a corrente total que atravessa essa superfície.

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot ds$$

Distribuições de corrente

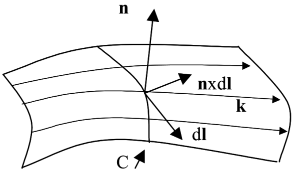
Densidade linear de corrente

Quantidade de carga que atravessa uma linha. É definida como o produto da densidade superficial de carga pela velocidade **v**.

$$\mathbf{k} = \rho_{sup}\mathbf{v} \quad (A/m)$$

Analogamente, a corrente total que atravessa um percurso C será dada por:

$$I = \int_c \mathbf{k} \cdot (\hat{n} \times d\mathbf{l})$$



Distribuições de corrente

Corrente linear ou filiforme

Produto da densidade linear de carga elétrica pela velocidade ($\mathbf{i} = \rho_{lin}\mathbf{v}$).
A corrente total I é obviamente o módulo de $\mathbf{i}$

Distribuições de corrente escritas como densidades superficiais

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(u, v)\delta(w - w_0)$$
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(u)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0)$$

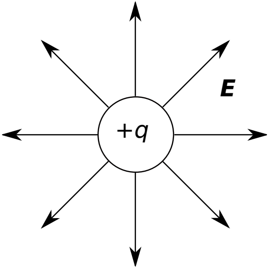
Corrente total

$$\frac{dq}{dt} = I$$

O campo elétrico **E**

Campo elétrico gerado por uma carga

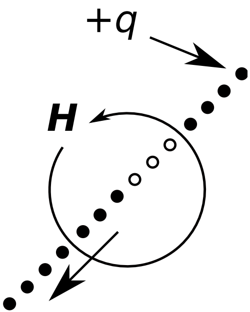
- Michael Faraday (1791 – 1867) foi o primeiro a propor o conceito de campo elétrico
- Pode ser entendido como sendo uma entidade física que transmite a todo o espaço a informação da existência de um corpo eletrizado q e, ao colocarmos outra carga q' nesta região, será constatada a existência de uma força F de origem elétrica agindo nesta carga q'.



O campo magnético **H**

Campo magnético gerado por cargas em movimento

Suponhamos agora que a carga está em movimento com velocidade v. Nesse caso haverá a criação de um campo magnético conforme a figura.



- Cargas em movimento conduzem à noção de corrente elétrica.
- Se essa corrente fluir em um condutor eletricamente neutro, o campo elétrico será nulo (corrente de condução)
- Imãs permanentes ou campos elétricos variando no tempo também produzem **H**

A indução **B** e a permeabilidade magnética μ

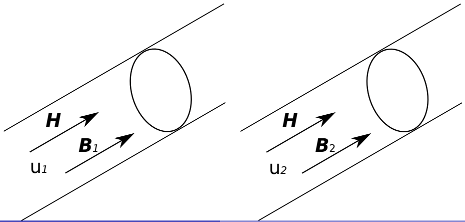
O fluxo magnético Φ

Definiremos o fluxo magnético como o fluxo da indução magnética que atravessa uma superfície

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (Wb)$$

A permeabilidade μ de um material

representa a capacidade de um material de permitir a passagem de fluxo magnético quando submetido a um campo magnético. $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$



$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{|\mathbf{B}_1|}{|\mathbf{B}_2|} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

A indução D e a permissividade elétrica ϵ

Analogia entre $(\mathbf{B}, \mu)$ e $(\mathbf{D}, \epsilon)$

De maneira análoga, o fluxo elétrico gerado em um material quando submetido a um campo elétrico é proporcional à sua permissividade.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

- Variação de ϵ na ordem de 100 vezes
- Variação de μ na ordem de 10^4 vezes

A condutividade σ de um material

- Diferenciação entre materiais dielétricos e condutores
- Lei de Ohm sob a forma local
- Condutor perfeito (PEC)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Equações de maxwell na forma pontual

As quatro equações de Maxwell são:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && (1)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (2)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (3)\\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && (4)
\end{aligned}
$$

Equação da continuidade elétrica

Aplicando a divergência em na eq.(1)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\\
0 &= \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D})
\end{aligned}
$$

Como resultado

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Questão

A partir das propriedades do Divergente e do Rotacional, tente explicar fisicamente as equações

Equações de maxwell na forma integral

A forma integral

- Obtidas usando os teoremas da divergência e Stokes
- Úteis nas soluções analíticas de problemas

Lei de Ampère

Integrando a eq.(1) e aplicando o teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_s \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_{L(s)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \qquad (5) \end{aligned}$$

onde $L(s)$ é a curva que delimita a superfície s

Lei de Ampère

Corrente de condução

O primeiro termo do lado direito de (5) representa as correntes que atravessam a seção s (geralmente transportadas por condutores).

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Corrente de deslocamento

O segundo representa a variação temporal do fluxo elétrico que atravessa s.

$$Id = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Esse termo permite explicar

- a propagação de ondas eletromagnéticas
- a continuidade da corrente em circuitos com capacitores

Lei de Ampère

Exemplo de aplicação

Encontrar o campo magnético gerado por um fio infinito percorrido por uma corrente I

Resposta

Usando o sistema de coordenadas cilíndricas e considerações de simetria, vemos que o campo magnético será função apenas da coordenada r e estará orientado na direção de θ. $\mathbf{H} = H(r)\hat{\theta}$ Assim, para um contorno circular coaxial a I, $H(r)$ será constante e

$$\oint_{L(s)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(s)} H dl = H \oint_{L(s)} dl = 2\pi r H = I$$

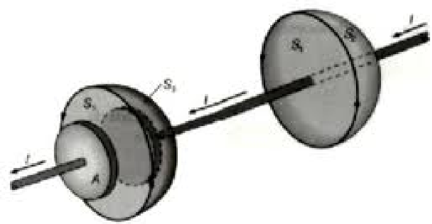
Logo

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

Lei de Ampère

Exemplo de aplicação

Campo magnético gerado por um fio condutor infinito conduzindo uma corrente I conectado a um capacitor



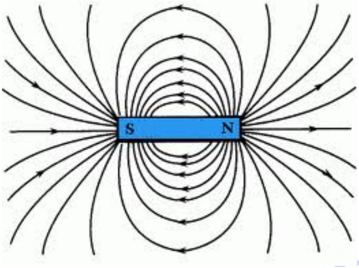
Equações de maxwell na forma integral

Lei Gauss para o campo magnético

Integrando a eq.(2) sobre um volume e aplicando o teorema da divergência

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \oint_{s(v)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{6}$$

onde $s(v)$ é a superfície que delimita o volume v.
Como o $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, o fluxo magnético é conservativo (fluxo que entra em v é igual ao que sai).

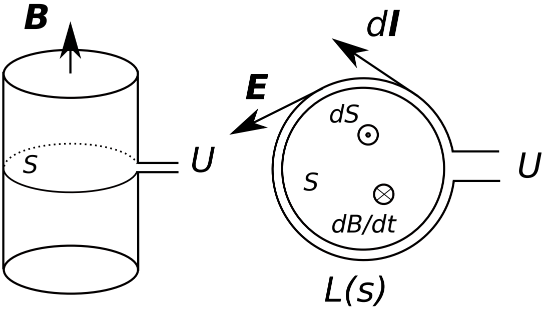


Equações de maxwell na forma integral

Lei de Faraday

Procedimento idêntico ao utilizado para a lei de Ampère

$$\oint_{L(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{7}$$



Força Eletromotriz

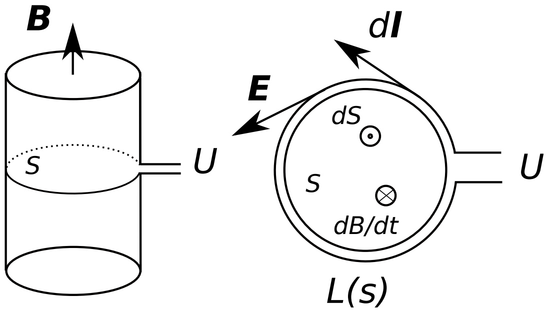
$$U = \int_{L(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Equações de maxwell na forma integral

Lei de Faraday

Considerando $\mathbf{B}$ uniforme sobre a superfície s, ou seja $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$

$$-\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8}$$



Lei de Faraday

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9}$$

Equações de maxwell na forma integral

Lei Gauss para o campo elétrico

Integrando a eq.(4) sobre um volume e aplicando o teorema da divergência

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \oint_{s(v)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv = q \tag{10}$$

Questão

Encontre o campo elétrico gerado por uma carga pontual q no espaço livre. Resposta: $E_r = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$
E no caso de n cargas no espaço livre?

Equações de maxwell

Forma integral

$$\oint_{L(s)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_{s(v)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\oint_{L(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_{s(v)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv = q$$

Forma pontual

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho
\end{aligned}$$

Equações constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Equações de maxwell

Equações no espaço livre

No espaço livre, não há suporte físico para a existência de correntes e cargas e as características do meio são: $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$. Assim as equações de maxwell podem ser reescritas como:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= +\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0
\end{aligned}
$$

O termo $\partial \mathbf{D}/\partial t$ proposto por Maxwell fez prever a existência do fenômeno de ondas eletromagnéticas. Consequentemente, as equações de onda podem ser derivadas das equações de Maxwell

Equação de onda

Aplicando o rotacional à lei de Ampère

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \epsilon_0 \nabla \times (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

Equações no espaço livre

Equação de onda

O lado direito da equação de onda pode ser simplificado lembrando da identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H}$ e que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla^2\mathbf{H}$$

Quanto ao lado esquerdo temos

$$\epsilon_0 \nabla \times (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0 \mathbf{H})$$

Finalmente, a equação de onda do campo **H** para o espaço livre pode ser escrita como

$$\nabla^2\mathbf{H} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

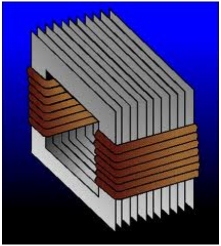
Equações constitutivas

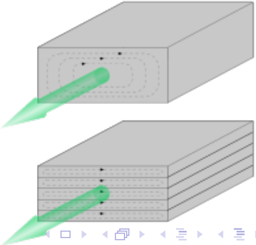
Homogeneidade linearidade e isotropia

Embora as equações de Maxwell sejam lineares, os parâmetros constitutivos dos meios podem não ser. Nesses casos, podemos reescrever as equações constitutivas na forma tensorial

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}}(r, E)\mathbf{E}; \qquad \mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}}(r, H)\mathbf{H}; \qquad \mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}}(r, E)\mathbf{E}$$

onde a barra dupla sobre os parâmetros indicam uma quantidade tensorial. Exemplo: o núcleo de um transformador

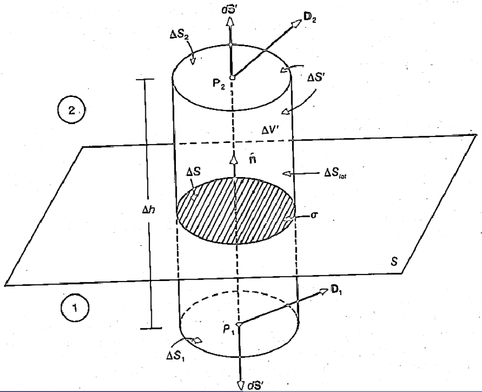




Condições de interface

Lei de Gauss na interface entre dois meios

Assumindo dois meios com características distintas $(\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1)$ e $(\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2)$ e aplicando as leis de Gauss para os campos elétrico e magnético sobre a superfície mostrada na figura teremos:



Campo D

$$\oint_{s(v)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$$

$$s(v) = s_1 + s_2 + s_{lat}$$

Condições de interface

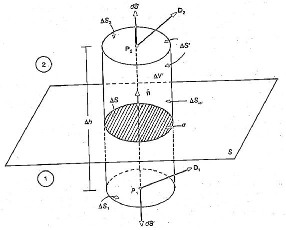
Campo $\mathbf{D}$

Integrando cada superfície

$$\int_{\Delta s_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{\Delta s_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{\Delta s_{lat}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_{lat} = \int_v \rho dv$$

e calculando o limite $\Delta h \to 0$, sendo $\bar{\mathbf{D}}$ o valor médio de $\mathbf{D}$ em s_{lat}

$$\lim_{\Delta h \to 0} (\mathbf{D} \cdot \Delta s_1 + \mathbf{D} \cdot \Delta s_2 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \Delta s_{lat}) = \lim_{\Delta h \to 0} (\rho \Delta s \Delta h)$$



a terceira integral e Δq anulam-se. Observando que $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$, obtém-se:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$$

Condições de interface

Campo **D**

Conclusão: os componentes normais da densidade de fluxo elétrico são contínuos ao longo da interface de separação dos dois meios, mesmo havendo uma distribuição volumétrica de carga elétrica.
Entretanto, caso exista uma densidade superficial de carga:

$$\rho = \rho_{sup}\delta(h - h_0)$$

$$\lim_{\Delta h \to 0} \int_V \rho d_s d_h = \rho_{sup}$$

Consequentemente, se há uma distribuição superficial de carga elétrica sobre a interface de separação entre os dois meios, então os componentes normais de **D** são descontínuos

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{sup}$$

Condições de interface

Campo **B**

As condições de passagem para a densidade de fluxo magnético **B**, podem ser deduzidas de maneira análoga. Assim, a partir da lei de Gauss para o magnetismo, obtém-se facilmente que

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

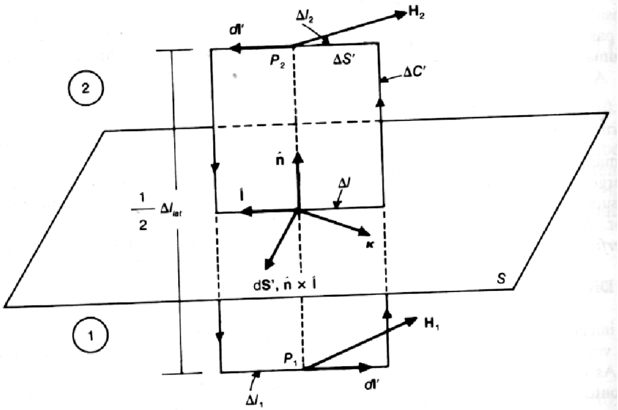
Questão

Baseados nas equações anteriores e nas relações constitutivas, o que podemos dizer sobre as componentes normais dos campos **E** e **H**?

Condições de interface

Lei de Ampère na interface entre dois meios

As condições de passagem do componente tangencial do campo magnético sobre a interface de separação entre dois meios podem ser determinadas aplicando a lei de Ampère ao circuito fechado ΔC da figura.



Condições de interface

Lei de Ampère na interface entre dois meios

Assim, aplicando a lei de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \Delta i + \frac{\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$$

ao percurso fechado ΔC', obtém-se:

$$\int_{\Delta l_1} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_2} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_{lat}} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta s'} \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s'} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta s'} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s'},$$

No limite de $\Delta l_{lat} \rightarrow 0$, isto é:

$$\lim_{\Delta l_{lat}\rightarrow 0}(\mathbf{H_1}\cdot\Delta\mathbf{l_1} + \mathbf{H_2}\cdot\Delta\mathbf{l_2} + <\mathbf{H_{lat}}>\cdot\Delta\mathbf{l}_{lat}) = \lim_{\Delta l_{lat}\rightarrow 0}(<\mathbf{j}>\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{l}\Delta l\Delta l_{lat} + <\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}>\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{l}\Delta l\Delta l_{lat})$$

,

obtém-se:

$$\mathbf{l}\cdot(\mathbf{H_2}-\mathbf{H_1}) = 0, \qquad \mathbf{n}\times(\mathbf{H_2}-\mathbf{H_1}) = 0,$$

Condições de interface

Lei de Ampère na interface entre dois meios

Os componentes tangenciais de **H** são contínuos na interface de separação entre os dois meios, mesmo na presença de uma densidade superficial de corrente elétrica.

Entretanto, caso exista uma densidade linear de corrente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \mathbf{k}\delta(h-h_0) \\
\lim_{\Delta h\to 0}\mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{s} &= \mathbf{J}\cdot(\hat{n}\times\hat{l})\Delta l\Delta h = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{l}) \\
&= \mathbf{l}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{n})
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathbf{l}\cdot(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1) = \mathbf{l}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{n})$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1) = \mathbf{k}$$

Condições de interface

Lei de Faraday na interface entre dois meios

As condições de passagem para o campo elétrico **E**, podem ser deduzidas de maneira análoga. Assim, a partir da lei Faraday, obtém-se facilmente que

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

Questão

Baseados nas equações anteriores e nas relações constitutivas, o que podemos dizer sobre as componentes tangenciais dos campos **D** e **B**?

Condições de interface

Resumo

A Tabela abaixo resume as condições de interface entre os dois meios. Nessa tabela, a densidade superficial de carga ρ_{sup} é descrita como σ (notação do livro da Annita Macedo)

Equações de Maxwell	**Condições de Interface**
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$
$\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B}/\partial t = 0$	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t$	$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k}$
$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho/\partial t$	$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$

Conservação de energia

O vetor de Poynting

A conservação de energia pode ser obtida através dos seguintes desenvolvimentos

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t) \\ \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t) \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda da primeira

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t)$$

onde o lado esquerdo pode ser reescrito usando uma identidade vetorial (ver cap1)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t) \tag{11}$$

Conservação de energia

O vetor de Poynting

Assumindo que as propriedades constitutivas não dependem do tempo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t) &= \epsilon \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{E}/\partial t) = \frac{1}{2}\epsilon \partial(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})/\partial t \\
\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t) &= \mu \mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{H}/\partial t) = \frac{1}{2}\mu \partial(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})/\partial t
\end{aligned}$$

Reescrevendo a eq. (11)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} + u = 0 \tag{12}$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é o vetor de Poynting, $w = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2$ é a densidade de energia armazenada nos campos elétrico e magnético e $u = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ representa as perdas por unidade de área por efeito Joule.

Conservação de energia

O vetor de Poynting (forma integral)

A forma integral pode ser facilmente obtida, integrando ambos os lados em um volume V e aplicando o teorema da divergência ao primeiro membro

$$\oint_{s(v)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_v w dv + \int_v u dv = 0 \qquad (13)$$

ou simplesmente

$$\Phi_p + \frac{\partial W}{\partial t} + U = 0 \qquad (14)$$

Sumário

Força de Lorentz

Forma pontual

Como se comporta uma carga em repouso ou em movimento na presença de um campo eletromagnético? Com as equações vistas até agora não é possível responder a essa pergunta. A resposta exige o conhecimento de uma lei de forças, a qual é independente das equações de Maxwell e equações constitutivas.
A lei da força de Lorentz afirma que a força por unidade de volume que o campo eletromagnético exerce sobre uma densidade volumar de carga $\rho(r,t)$ e uma densidade superficial de corrente $\mathbf{J}(r,t)$ é:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{15}$$

onde o vetor **f** é a densidade volumar da força de Lorentz, dada no SI em (N/m^3)

Força de Lorentz

Forma pontual

As parcelas $\mathbf{f}_e = \rho\mathbf{E}$ e $\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ recebem respectivamente os nomes de densidade volumétrica de força elétrica e densidade volumétrica de força magnética.

Forma integral

A força total que o campo eletromagnético exerce sobre uma distribuição de cargas ρ e correntes $\mathbf{J}$ em uma região espacial de volume V pode facilmente ser obtida integrando-se a eq. (15)

$$\mathbf{F} = \int_v (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv \tag{16}$$

Força de Lorentz

Exemplo

Considere uma carga puntiforme q, movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$ em um certo referencial e submetida a um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e a uma indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Encontre a força total sobre a partícula.
Solução: se $\mathbf{r}'$ é a posição da partícula o instante t,

$$\begin{aligned} \rho &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \mathbf{J} &= \rho\mathbf{v} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_v [q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]dv \\ &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + qv(\mathbf{r}', t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \end{aligned}$$

Sumário

Funções potenciais auxiliares

Introdução

- Podemos resolver as equações de Maxwell através de funções matemáticas auxiliares
- Os potenciais são multiplamente definidos, i.e., existem inúmeros potenciais distintos que levam ao mesmo resultado para os campos eletromagnéticos
- Em outras palavras, **E** e **B** são grandezas físicas, enquanto V e **A** são artifícios matemáticos para determinar **E** e **B**
- É conveniente impor uma condição adicional para fixar $(V, \mathbf{A})$ chamada calibre dos potenciais. (Calibres de Lorentz e Coulomb)

Funções potenciais auxiliares

O potencial escalar elétrico V

Muito conveniente na solução de problemas eletrostáticos pois possibilita o cálculo dos campos vetoriais através do calculo de um campo escalar.
Em condições estáticas

$$\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B}/\partial t) = 0$$

Assim, podemos escrever $\mathbf{E} = -\nabla V$, pois $\nabla \times (\nabla U) = 0$.
Inserindo V na lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \epsilon(\nabla V) = \rho$$

Essa é a equação de Poisson para o problema eletrostático. No caso da carga no interior do domínio ser nula, essa equação se transforma na equação de Laplace.

Funções potenciais auxiliares

O potencial V aplicado na equação de continuidade elétrica

De maneira análoga, podemos inserir o potencial elétrico na equação da continuidade da corrente

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \sigma(\nabla V) = 0$$

Que é a equação de Laplace que governa a distribuição de corrente em materiais condutores.

Importante

Reparem que definimos apenas as equações diferenciais parciais (EDP) que regem o comportamento do potencial escalar elétrico. Para a solução desses problemas, é necessária a correta imposição das condições de contorno.

Funções potenciais auxiliares

O potencial vetor magnético **A**

Em problemas que a densidade de corrente não é nula, definimos um potencial vetor **A** tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Essa relação é coerente com a equação de gauss para o campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pois o $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ é nulo.
Podemos então aplicar essa relação na lei de Ampère

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D}/\partial t) \\
\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}) &= \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D}/\partial t)
\end{aligned}$$

Para os problemas magnetostáticos ou quase estáticos, o termo $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ poderá ser ignorado.

Funções potenciais auxiliares

O potencial vetor magnético **A**

Adicionalmente, podemos inserir A na lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial(\nabla \times \mathbf{A})/\partial t = 0$$
$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

onde o termo entre parênteses pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

que mostra que o campo elétrico pode ser obtido como uma combinação dos potenciais elétrico e magnético

Exercícios recomendados

Livro da Annita

Seção 2.3. exercícios 1 e 2
Seção 2.4. exercício 8
Seção 2.10. exercícios 7, 8, 9 e 10

Livro do Assumpção

Capítulo 2: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12 e 15