

# 1 Filtros Ativos Em Sistemas Elétricos

## 1.1 Potência Ativa, Reativa e Fator de Potência

Como forma de entender melhor a qualidade de energia e a operação de filtros ativos é necessário ter os conceitos de potência ativa, reativa e fator de potência .

Para entender melhor a definição de potência em circuitos elétricos é necessário antes desenvolver alguns conceitos utilizados no desenvolvimento matemático para a interpretação das grandezas físicas. Ao longo da história várias teorias foram abordadas e importantes trabalhos são reconhecidamente aceitos para detalhar de melhor maneira casos desde específicos, quanto generalista no enfoque quanto a relação de tensão e corrente de um circuito elétrico. Esse estudo todo deu origem a área de teoria da potência, a qual vem sendo estudada até os dias de hoje para o aprofundamento e elaboração de novos conceitos para explicar fenômenos específicos [1] .

A teoria da potência tem o intuito de avaliar a troca de energia entre fonte de potência elétrica e a carga do ponto de vista das características dos valores de tensão corrente em seus terminais [2]. Esse estudo tem por finalidade aferir o fator de potência, a qual é um parâmetro intrínseco ao circuito e depende apenas das características da carga, independentemente da fonte. Cabe salientar que a carga possui características distintas ao circuito, de modo que a sua disposição na estrutura de diferentes sistemas leva a uma caracterização diferente do fator de potência. Ainda na avaliação de troca de energia entre os elementos do circuito, o estudo da teoria da potência tem por finalidade prover informações a respeito da eficiência na troca de energia entre fontes e cargas. A eficiência na troca de potência em circuitos é avaliada segundo a corrente que circula pelo mesmo. Esse conceito afere a mínima corrente necessária para transferir uma quantidade de energia num determinado espaço de tempo dada uma tensão específica [2]. O fator de potência está intimamente ligado à eficiência na troca de energia, sendo que em circuitos a qual seu valor é baixo existe um alto valor de corrente a qual circula, porém não é convertido em trabalho na saída do sistema. A consequência da presença de uma corrente excedente circulante é dada pela sobrecarga da fonte, aumento das perdas nos condutores e degradação da qualidade de energia. Esta ultima é mostrada na seção ???. Nessa seção será mostrada que a incidência de correntes com distorção harmônica traz eleva a potência necessária extraída da fonte para uma determinada carga ativa do sistema. Com isso o fator de potência é degradado, fazendo com que seu valor seja diminuído. Com isso será mostrado que para o caso onde o fator de potência é unitário tem-se que a qualidade de

energia é tida como perfeita e há plena eficiência na troca de energia entre fontes e cargas.

Dentre as principais grandezas a ser estudada na Teoria da Potência elenca-se a potência ativa e aparente. É conhecido que na operação de um circuito elétrico que nem toda a corrente proveniente de uma fonte de tensão é convertida em trabalho para cada unidade de tempo. Nesse contexto aplica-se a definição de potência ativa, a qual é a corrente que efetivamente é transferida de uma fonte para a carga de maneira a gerar trabalho na saída do sistema. Há também a potência aparente que é definida com a potência que é gerada por uma fonte de energia e que circula pelo sistema na forma de corrente elétrica, sem necessariamente ser convertida em trabalho na saída do sistema. Esse contexto pode-se estender para o entendimento para qualidade de energia de um sistema

Para o estudo a seguir sobre a definição de potência é necessário antes ter conhecimento de alguns conceitos matemáticos. Dentre esses conceitos, tem-se a determinação de valores eficazes de funções. Dada uma função qualquer no domínio do tempo  $f(t)$ , periódica e com período cujo valor é dado por  $T$ , a formulação matemática para encontrar seu valor eficaz recai segundo a norma Euclidiana [1], dada pela seguinte equação:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} \quad (1.1)$$

### 1.1.1 Monofásico

#### 1.1.1.1 Senoidal

Dada uma função  $f(t)$  sinusoidal com a frequência angular  $\omega t$  e amplitude cujo valor de pico é dado por  $F_p$ , tem-se que o valor eficaz de  $f(t)$  é dada segundo a equação:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [F_P \cos(\omega t + \phi)]^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_P \quad (1.2)$$

Portanto tem-se que o valor de pico de uma função sinusoidal é  $\sqrt{2}$  vezes maior que o valor eficaz. Cabe enfatizar que determinação desse valor é independente da frequência angular da função.

De forma a melhor entender os conceitos da teoria da potência, o circuito mais simples será explanado para trazer a tona uma base com os conceitos que serão apresentados no entendimento do problema da qualidade de energia. O sistema mais simples para o estudo da transferência de potência pode ser aplicado ao circuito mais simplista, ou seja,

considerando um sistema monofásico, com fonte de tensão sinusoidal, alimentando uma carga linear e operando em regime permanente. Tal sistema pode ser visto na figura 1. Com essas características definidas, espera-se que a forma de onda da corrente também apresente uma forma sinusoidal, com amplitude e defasagem distintas em relação à tensão. Isso vem do fato da carga ser linear, a qual é explicado detalhadamente na seção ???. Com isso, define-se as equações da tensão e corrente segundo as expressões 1.3 e 1.4, respectivamente.

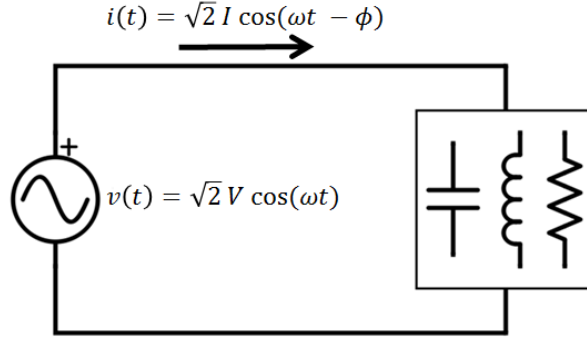


FIGURA 1 – Circuito monofásico, linear em regime permanente

$$v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t) \quad (1.3)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \phi) \quad (1.4)$$

A potência instantânea em um circuito monofásico é definida segundo a equação 1.5.

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= 2 V \cos(\omega t) I \cos(\omega t - \phi) \\ &= VI[\cos(\phi) + \cos(2\omega t - \phi)] \\ &= VI \cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t)] + VI \sin(\phi) \sin(2\omega t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

A equação 1.5 pode ser dividido em dois termos variantes no tempo: o primeiro é dado por

$$VI \cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t)] \quad (1.6)$$

e o segundo por:

$$VI \sin(\phi) \sin(2\omega t) \quad (1.7)$$

Por definição, a potência ativa é definida pelo valor médio da equação 1.6, ou seja, pela expressão 1.8, e a potência reativa é definida pelo valor de pico da equação 1.7, ou pela expressão 1.9.

$$P = VI \cos \phi \quad (1.8)$$

$$Q = VI \sin \phi \quad (1.9)$$

Uma rápida análise nas equações 1.6 e 1.7 trazem importantes considerações a respeito do modo de operação de um circuito monofásico, senoidal, linear. Primeiramente pode-se observar que a equação 1.6 é oscilatória e apresenta valores sempre positivos. A porção de potência ativa pode ser interpretada como a que proporciona o fluxo de energia proveniente da fonte para ser transformada em trabalho na carga. Essa consideração é válida para potência ativa visto que seu valor nunca é negativo. Ainda, por ser oscilatória, define-se o valor médio a qual é a média de transferência de potência da fonte para carga. Por outro lado, a equação 1.7 apresenta um valor senoidal centrado em zero. Sua interpretação vem do fato de que a carga hora age como consumidora, hora age como fornecedora de potência. Nesse caso linear esse efeito é causado pela inserção de elementos armazenadores de energia no circuito, como indutores e capacitores. A potência reativa é dada pela oscilação de energia entre a fonte e a carga, a qual não é transformada em trabalho na saída do sistema. Por existir um fluxo de potência de forma oscilatória com média zero, existe uma parcela da corrente que flui pelo sistema mas não age na transferência de potência entre a fonte e carga de modo a ser transformar em trabalho na saída do sistema.

As formas de onda que ilustram um caso específico dado por um sistema linear com tensão e correntes senoidais, com esta última defasada com relação à primeira, são mostrados na figura 2. Aqui são apresentados a tensão, a corrente, as potências instantânea, ativa e reativa. O gráfico superior apresenta a tensão, a corrente e a potência instantânea, que nada mais é que a multiplicação de  $v(t)$  por  $i(t)$ . O gráfico inferior apresenta as formas de onda das expressões 1.6 e 1.7, além da potência instantânea. Aqui cabe observar também os valores de  $P$  e  $Q$ . Outra observação importante é o fato de a potência instantânea apresentar valores negativos em alguns intervalos de tempo. Durante esse intervalo tem-se que a carga está entregando potência para a fonte.

Além da concepção dos conceitos estabelecidos anteriormente sobre as potências  $P$  e  $Q$  existe outro parâmetro crucial no estabelecimento da teoria da potência de forma a integrar esses valores previamente estabelecidos. A concepção de potência aparente é dada como sendo a potência total fornecida pelo gerador e presente nas linhas de transmissão.



FIGURA 2 – Circuito real monofásico

De forma geral, tem-se que a definição de potência aparente é dada pela multiplicação dos valores eficazes da tensão e corrente, respectivamente, ou seja:

$$S = V I \quad (1.10)$$

Considerando agora o estudo específico onde o sistema é composto por uma fonte de tensão senoidal alimentando uma carga linear, pode-se ainda obter a expressão de potência aparente como sendo expressa através dos valores de  $P$  e  $Q$ . Analisando as equações 1.8 e 1.9 observa-se que estas estão defasadas em 90 graus. Com isso, tem-se que pode-se obter o valor de potência aparente segundo a equação 1.11.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(VI \cos \phi)^2 + (VI \sin \phi)^2} = VI \quad (1.11)$$

Outra forma de obter o mesmo resultado, é através da utilização de fasores para representar as equações  $S$  em relação à  $P$  e  $Q$ . Definindo  $\dot{V}$  e  $\dot{I}$  como sendo os valores fasoriais da tensão e corrente de um sistema, tem-se que a potência aparente é escrita segundo a equação 1.12.

$$\mathbf{S} = \dot{V} \dot{I}^* = P + jQ = VI \cos \phi + jVI \sin \phi \quad (1.12)$$

O módulo  $\mathbf{S}$  leva à mesma expressão definida em 1.11. Considerando o plano imaginário encontrado a partir da utilização das grandezas fasoriais, pode-se expressar

graficamente as potências do circuito linear operando em regime permanente através do triângulo de cargas representadas no plano imaginário.

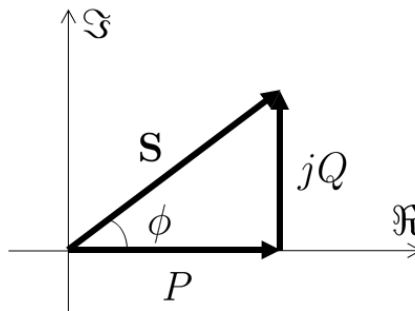


FIGURA 3 – Triângulo de potências

$$\lambda = \frac{P}{S} \quad (1.13)$$

colocar  
isso no  
lugar  
ade-  
quado

#### 1.1.1.2 Não senoidal Monofásico

Dentre a importância do estudo da teoria da potência, tem-se a elucidação da contribuição dos conceitos de distorção harmônica nas tensões e correntes na influência que está tem no entendimento da potência aparente e, conseqüentemente, no fator de potência. Os primeiros estudos sobre este tema foi desenvolvido no final do século XIX [1, 3] com a verificação da relação com distorção harmônica e potência aparente. Dentre os trabalhos conseguintes a principal contribuição foi dada por Budeanu na década de 20, a qual em seu estudo ele propôs tratar as teoria da potência de sistemas não senoidais através do domínio da frequência com a série de Fourier. A proposta de Budeanu foi abordar a corrente e a tensão através da série de Fourier, ou seja, considerando a tensão e corrente como uma série de funções sinusoidais com frequências e amplitude distintas. Essa consideração trouxe a definição de valor eficaz para uma forma de onda não sinusoidal de tensão e corrente segundo a equação 1.14 [1].

$$V = \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} V_h^2} ; \quad I = \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} \quad (1.14)$$

Onde  $V_h$  e  $I_h$  denotam os valores eficazes das funções sinusoidais da h-ésima harmônica. O desenvolvimento do conceito de  $V$  e  $I$  das equação 1.14 com a definição de potência aparente da equação 1.10 traz a introdução de um novo parâmetro, denominada de potência harmônica ou de distorção, cuja variável é  $D$ . Como ocorre na equação 1.11, pode-se definir a potência aparente através dos valores  $P$ ,  $Q$  com a introdução de  $D$ . Sendo assim,

segundo Budeanu a potência aparente de uma função não sinusoidal é definida segundo a equação 1.15 [1, 3].

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \quad (1.15)$$

Este conceito foi largamente aceito e utilizado ao longo de décadas, visto que traz uma maneira de explicar a lacuna do aumento da potência aparente em circuitos não senoidais com a introdução da potência de distorção  $D$  na definição do conceito de potência aparente [1]. Entretanto a teoria de Budeanu não é mais aceita de modo geral visto que existe várias deficiências nessa teoria [1, 3, 4]. Tais deficiências recaem no fato de que para circuitos não senoidais a concepção da teoria de Budeanu traz interpretações errôneas das definições de potência, além de que estas não possuem nenhum atributo da qual podem relacionar o fenômeno de potência em circuitos não senoidais. Na teoria de Budeanu para circuitos não senoidais, a diminuição da potência reativa não preserva o o conceito da diminuição da perda da linha para uma mesma transferência de energia [1, 3]. Outra deficiência dessa teoria é que está não traz nenhuma informação útil necessária no desenvolvimento de métodos para compensar a distorção. Além disso, os valores encontrados na teoria de Budeanu não são suficientes para prover informações relacionadas à distorção harmônica [3, 4]. Por esses motivo, a teoria introduzida por Budeanu, apesar de ser utilizado por muitos engenheiros, foi excluído da norma IEEE 1459 em sua recente revisão de 2010 [1].

Outro estudo proposto na mesma época e de forma independente à Budeanu foi feito por Stanislaw Fryze. Este focou seu estudo na teoria da potência no domínio do tempo e, apesar de apresentar algumas limitações, é suficientemente completa para o entendimento da questão da potência e no desenvolvimento de uma proposta a qual utilizaria compensadores para tratar de componentes de corrente indesejadas nas linhas do sistema.

Segundo Fryze, em sinais periódicos e com forma de onda qualquer pode-se basear a teoria da potência fundamentalmente na decomposição da corrente provida pela fonte entre componente ativa e reativa [3]. Considerando um sistema cuja corrente entregue pela fonte é definida por  $i(t)$ , pode-se decompor esta nas parcelas de  $i_p(t)$  e  $i_q(t)$ , sendo a primeira a componente ativa e a segunda a componente reativa da corrente, ou seja:

$$i(t) = i_p(t) + i_q(t) \quad (1.16)$$

Para definir a parcela da corrente ativa do sistema é necessário primeiro entender o conceito de potência ativa para circuito periódicos com forma de onda qualquer. O conceito de potência ativa do sistema com essas características é definido segundo o valor médio da potência instantânea, como mostra a equação 1.17, sendo que potência instan-

tânea é definida pela multiplicação da tensão e corrente, representadas por  $v(t)$  e  $i(t)$ , respectivamente.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \quad (1.17)$$

A proposta de Fryze com a definição de corrente  $i(t)$  como a composição de componentes  $i_p$  e  $i_q$  foi a introdução de um conceito de condutância equivalente no sistema de modo a requerer apenas a parcela da corrente ativa  $i_p$  da fonte de tensão. A interpretação de tal condutância equivalente representa uma carga puramente resistiva, a qual para uma mesma tensão, absorve a mesma potência ativa da carga realmente utilizada. A definição da corrente ativa, juntamente com a inclusão da condutância equivalente é dada a seguir:

$$i_p(t) = \frac{P}{V^2} v(t); \quad G_P = \frac{P}{V^2} \implies i_p(t) = G_P v(t) \quad (1.18)$$

Utilizando equações 1.16 e 1.18 e realizando o produto interno entre as correntes ativas e reativas tem-se:

$$\begin{aligned} \langle i_p, i_q \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_p(t) i_q(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T i_p(t) [i(t) - i_p(t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P}{V^2} v(t) i(t) - \left( \frac{P}{V^2} v(t) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{P}{V^2} \int_0^T v(t) i(t) dt - \frac{P^2}{V^4} \int_0^T v(t)^2 dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Isso leva a uma característica importante sobre a ortogonalidade apresentada entre  $i_p$  e  $i_q$ . Por ser ortogonais as correntes  $i_p$  e  $i_q$  existe a seguinte implicação:

$$I^2 = I_p^2 + I_q^2 \quad (1.20)$$

Ainda, Fryze definiu o valor da potência reativa como sendo o produto dos valores eficazes da tensão e da corrente reativa, ou seja,  $Q = V I_q$ . Com essa relação e pela propriedade da ortogonalidade entre  $i_p(t)$  e  $i_q(t)$ , tem-se que a relação  $S^2 = P^2 + Q^2$ , tal qual apresentada na equação 1.11 é válida para a teoria de Fryze.

Com sua teoria, Fryze foi capaz de quantificar o total de energia não útil que percorre o sistema na forma de corrente reativa. Com isso foi possível a introdução da ideia de compensadores ativos, visto que tem-se conhecimento da parcela da corrente a qual deve ser anulada [1]. Entretanto sua teoria possui algumas limitações quanto a



interpretação da corrente reativa, visto que não é possível classificar as características dos distúrbios presentes na corrente, além de que a definição de potência ativa proposto pela condutância equivalente não necessariamente é observada como de fato potência útil [3].

### 1.1.2 Trifásico

#### 1.1.2.1 Definição de Potências em Sistemas Senoidais

#### 1.1.2.2 Definição de Potências em Sistemas Não-Senoidais

## 1.2 Potência Instantânea Utilizando a Teoria P-Q

[5] [6]

A potência instantânea utilizando a teoria P-Q é um conceito que utiliza de artifícios matemáticos para definir uma série de potências instantâneas presentes em circuitos trifásicos. A base da teoria consiste no estudo das tensões e correntes no domínio do tempo sem que haja restrição quanto ao balanceamento do sistema, à forma de onda e, ainda podendo ser aplicada no regime transitório do sistema. Além disso, esta teoria pode ser utilizada tanto para circuitos trifásicos a três fios com ou sem neutro, quanto em circuitos a quatro fios com neutro. Uma das propostas concebida na utilização dessa teoria é a determinação das correntes circulantes no sistema as quais não transferem potências úteis à carga. Sendo assim essa teoria traz uma poderosa ferramenta para ser utilizada no desenvolvimento de compensadores ativos para mitigar o efeito da circulação de potências não úteis do sistema, a qual inclui-se a eliminação de harmônicos, a compensação de reativos, ou mesmo a eliminação de desbalanços [7, 8].

Inicialmente tal teoria foi desenvolvida por Akagi [6] a qual definiu as tensões e correntes de um sistema trifásico como sendo valores instantâneos quantificados em espaços vetoriais  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}$ , respectivamente. Porém em seu desenvolvimento inicial foi proposto a transformação do espaço vetorial nas coordenadas  $abc$ , a qual é definida pelo sistema de referência estacionário cujas tensões e correntes são defasadas em 120 graus entre si, para as coordenadas  $\alpha\beta 0$ , a qual o sistema de referência estacionário é dado ortogonalmente entre si [8]. Outra forma de tratar com a definição de potência instantânea é trabalhando diretamente com o espaço vetorial nas coordenadas  $abc$ , sendo que as propriedades do sistema independem das coordenadas e são válidas tanto para o caso em que as definições são aplicadas em  $abc$  como em  $\alpha\beta 0$ .

achar a referência que diz que essa teoria é aplicável somente a sistemas trifásicos

definir se alpha beta 0 vem antes

### 1.2.0.3 considerando coordenadas $\alpha\beta 0$

A teoria da potência instantânea utiliza a teoria empregando a potência instantânea utilizando a teoria P-Q é através da transformação das coordenadas de um sistema com fases  $abc$  para coordenadas  $\alpha\beta 0$ . O emprego dessa abordagem traz implicações de modo a poder introduzir sistemas trifásicos mais genéricos com a presença de sequência 0. Os resultados apresentados nessa abordagem apresenta as mesmas propriedades e interpretações de potência instantânea nas coordenadas  $abc$ , ou seja, estas independem do sistema de coordenada a qual é aplicado a teoria [5].

### 1.2.0.4 Transformada de Clarke

A transformação de coordenadas das tensões instantâneas referenciadas no sistema  $abc$  para tensões instantâneas referenciadas no sistema  $\alpha\beta 0$  é feita através da aplicação da transformada de Clarke. Primeiramente considera-se que um sistema trifásico seja composto por tensões de fase  $v_a$ ,  $v_b$  e  $v_c$  deslocadas em ângulo por 120 graus ( $2\pi/3$ ) entre si. Desse modo utilizando da equação 1.21 obtém-se as novas tensões instantâneas  $v_\alpha$  e  $v_\beta$ , cujo ângulo de defasagem é dado por 90 graus ( $\pi/2$ ) .

referenciadas

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Ainda, por apresentar uma matriz inversível, é possível transformar um sistema referenciado em coordenadas  $\alpha\beta 0$  para  $abc$ , ou seja, retornar ao estado onde as tensões apresentam defasagem de 120 graus entre si. Para a transformada inversa de  $\alpha\beta 0$  para  $abc$  a relação a seguir é utilizada:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Do mesmo modo que ocorre nas tensões, a transformada de coordenada também pode ser feita para a corrente. Uma propriedade importante observada nessa transformação é o fato de que ela pode ser utilizada independentemente ao fato da forma da corrente,

ou seja, está pode conter conteúdo harmônico que a transformação ainda é válida. Sendo assim a equação 1.23 pode ser utilizada.

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Similarmente que ocorre com a tensão, a transformada inversa de coordenadas é dada segundo a equação 1.24

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Um dos triunfos da transformada de Clarke é a separação das componentes de sequência zero das tensões e correntes ( $v_0$  e  $i_0$  respectivamente) expressas nas coordenadas  $abc$ , ou seja, os eixos  $\alpha$  e  $\beta$  não carregam contribuições da sequência zero de tais componentes.

Para melhor visualizar a transformada de Clarke em um sistema trifásico balanceado, as figuras 4 e 5 mostram as tensões típicas de um sistema balanceado referenciado nas coordenadas  $abc$  e sua equivalente transformada nas coordenadas  $\alpha\beta 0$ , respectivamente. Nessas figuras além das formas de onda em função do tempo, representadas pelas figuras 4a e 5a há ainda os equivalentes fasoriais estacionários representados pelas figuras 4b e 5b. Através da análise dessas figuras fica claro o modo que a transformada de Clarke muda a referência de um sistema trifásico com tensões  $v_a$ ,  $v_b$  e  $v_c$  defasadas em 120 graus para um sistemas cuja representações  $v_\alpha$  e  $v_\beta$  estão defasadas em 90 graus.

#### 1.2.0.5 Potência Instantânea em coordenadas $\alpha\beta 0$

As potências instantâneas  $P$  e  $Q$  podem calculadas independentemente das coordenadas definidas para as tensões e correntes. Nessa seção será apresentada as definições das potências considerando as coordenadas  $\alpha\beta 0$ . Primeiramente, tratando as tensões  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  e  $v_0$  segundo o espaço vetorial definido por  $\mathbf{v} = [v_\alpha \ v_\beta \ v_0]^T$  e, similarmente para corrente, definindo o espaço vetorial com as correntes  $i_\alpha$ ,  $i_\beta$  e  $i_0$  no vetor  $\mathbf{i} = [i_\alpha \ i_\beta \ i_0]^T$ , a potência

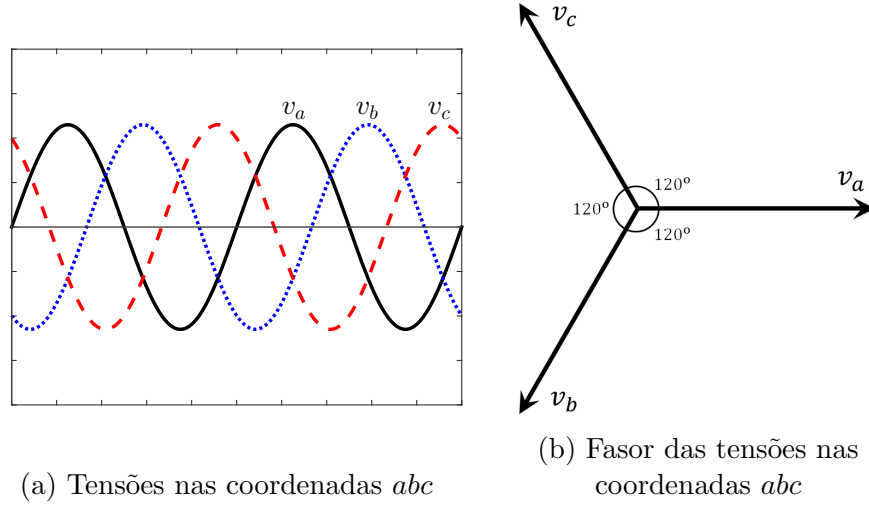


FIGURA 4 – Circuito típico de um retificador de 12 pulsos com sua respectiva corrente de entrada

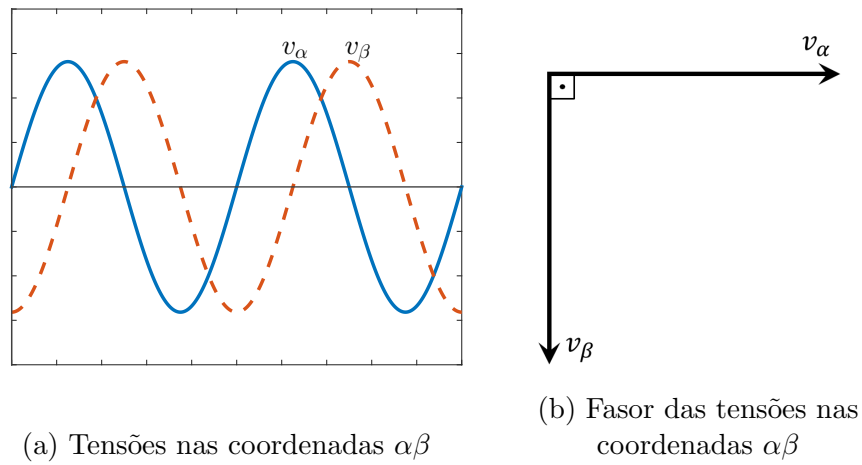


FIGURA 5 – Circuito típico de um retificador de 12 pulsos com sua respectiva corrente de entrada

instantânea ativa  $P$  pode ser definida segundo a equação 1.25.

$$p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}$$

$$p = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0 \quad (1.25)$$

Já a definição de potência reativa é descrita por um vetor composto pelos elementos  $q_\alpha$ ,  $q_\beta$  e  $q_0$  na forma de  $\mathbf{q} = [q_\alpha \ q_\beta \ q_0]^T$ ,  $\mathbf{q}$  qual é definido segundo a expressão:

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{i} \quad (1.26)$$

Ou seja, expandindo a equação XXX tem-se que a definição de  $\mathbf{q}$  é dada por:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\beta i_0 - v_0 i_\beta \\ v_0 i_\alpha - v_\alpha i_0 \\ v_\alpha i_\beta - v_\beta i_\alpha \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

A norma do vetor  $\mathbf{q}$  representa o valor total da potência instantânea, conforme a expressão ???. Cabe lembrar os valores  $q_\alpha$ ,  $q_\beta$  e  $q_0$  são variantes no tempo, fazendo com que o valor  $q$  seja variante da mesma forma que  $p$ .

$$q = |\mathbf{q}| = \sqrt{q_\alpha^2 + q_\beta^2 + q_0^2} \quad (1.28)$$

Com a definição das potências instantâneas  $p$  e  $q$  define-se certos parâmetros para o entendimento das propriedades e significados físicos de tais potências. Para tal, define-se as correntes ativas e reativas instantâneas segundo as expressões 1.29 e 1.30, respectivamente.

$$\mathbf{i}_p = \begin{bmatrix} i_{\alpha p} \\ i_{\beta p} \\ i_{0p} \end{bmatrix} \triangleq \frac{p}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{i}_q = \begin{bmatrix} i_{\alpha q} \\ i_{\beta q} \\ i_{0q} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (1.30)$$

Além disso, as expressões 1.10 e 1.13 são válidas para os valores encontrados na teoria das potências instantâneas, ou seja,  $S = vi$  e  $\lambda = p/s$ . Conforme apresentado em [?], tais definições apresentam certos teoremas que demonstram algumas propriedades da teoria da potência instantânea.

A primeira propriedade importante é o fato de que a corrente  $\mathbf{i}$  que percorre o sistema trifásico nas coordenadas  $\alpha\beta 0$  é definido pela composição das correntes  $\mathbf{i}_p$  e  $\mathbf{i}_q$ , ou seja,  $\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}_p + \mathbf{i}_q$ . Expandindo as expressões 1.29 e 1.30, tem-se que a equação 1.31 pode

ser adquirida:

$$\mathbf{i}_p + \mathbf{i}_q = \begin{bmatrix} v_\alpha \left( \frac{v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \right) \\ v_\beta \left( \frac{v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \right) \\ v_0 \left( \frac{v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_0(v_0 i_\alpha - v_\alpha i_0) - v_\beta(v_\alpha i_\beta - v_\beta i_\alpha)}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \\ \frac{v_\alpha(v_\alpha i_\beta - v_\beta i_\alpha) - v_0(v_\beta i_0 - v_0 i_\beta)}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \\ \frac{v_\beta(v_\beta i_0 - v_0 i_\beta) - v_\alpha(v_0 i_\alpha - v_\alpha i_0)}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = \mathbf{i} \quad (1.31)$$

Outra importante propriedade é dado pelo paralelismo entre os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}_p$  durante todo espaço de tempo, ou seja,  $\mathbf{v} \times \mathbf{i}_p \equiv 0$ . Para demonstrar essas propriedades a equações 1.32 pode ser analisadas. Essa propriedade tem um importante significado a qual é a definição da potência a qual encarrega da transferência da potência ativa da fonte para a carga dada ao fato de tanto a tensão e a corrente estarem sob o mesmo eixo. Desta forma pode-se atribuir a dimensão de Watt (W) para a potência proveniente do produto entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}_p$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{i}_p &= \mathbf{v} \times \left( \frac{p}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Analogamente a propriedade explanada anteriormente, observa-se a ortogonalidade entre a tensão  $\mathbf{v}$  e a corrente  $\mathbf{i}_q$ , ou seja,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q \equiv 0$ . A demonstração dessa propriedade pode ser analisada segundo a equação 1.33. Como explicado anteriormente, o produto entre as tensões e correntes reativas não proporcionam a transferência de potência entre a fonte e a carga dado a ortogonalidade entre tais vetores. Desse modo a dimensão de tal potência não pode ser considerada W, VA ou var, sendo assim os autores de tal teoria introduziram uma nova unidade: Volt-Ampere Imaginário (vai) [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\ &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\ &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{-(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{i}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\ &= \frac{-(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

A potências instantâneas definidas podem ser combinadas numa matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} p \\ q_\alpha \\ q_\beta \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\alpha & v_\beta & v_0 \\ 0 & -v_0 & v_\beta \\ v_0 & 0 & -v_\alpha \\ -v_\beta & v_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

#### 1.2.0.6 Potência Instantânea em coordenadas *abc*

Como forma de apresentar um detalhamento de mais fácil entendimento das definições e significados físicos da teoria P-Q, o estudo considerando as coordenadas *abc* é melhor utilizado. Desse

Tendo o sistema com as tensões e correntes definidas por:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

A potência ativa instantânea do sistema é definida por

$$p \triangleq \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \quad (1.37)$$

e a potência reativa instantânea do sistema é definido por

$$\mathbf{q} \triangleq \mathbf{v} \times \mathbf{i} \quad (1.38)$$

A potência  $\mathbf{q}$  é dada por um vetor na forma:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_b i_c - v_c i_b \\ v_c i_a - v_a i_c \\ v_a i_b - v_b i_a \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Ainda é definido a corente ativa instantanea por:

$$\mathbf{i}_p = \begin{bmatrix} i_{ap} \\ i_{bp} \\ i_{cp} \end{bmatrix} \triangleq \frac{p}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \quad (1.40)$$

Ainda é definido a corente reativa instantanea por:

$$\mathbf{i}_q = \begin{bmatrix} i_{aq} \\ i_{bq} \\ i_{cq} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (1.41)$$

$$\mathbf{i}_p = \begin{bmatrix} i_{ap} \\ i_{bp} \\ i_{cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \left( \frac{v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \right) \\ v_b \left( \frac{v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \right) \\ v_c \left( \frac{v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \right) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{i}_q = \begin{bmatrix} i_{aq} \\ i_{bq} \\ i_{cq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_c(v_c i_a - v_a i_c) - v_b(v_a i_b - v_b i_a)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \\ \frac{v_a(v_a i_b - v_b i_a) - v_c(v_b i_c - v_c i_b)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \\ \frac{v_b(v_b i_c - v_c i_b) - v_a(v_c i_a - v_a i_v)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Fazendo a soma de  $\mathbf{i}_p$  com  $\mathbf{i}_q$  obtém-se a seguinte relação:

$$\mathbf{i}_p + \mathbf{i}_q = \begin{bmatrix} \frac{v_a(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} + \frac{v_c(v_c i_a - v_a i_c) - v_b(v_a i_b - v_b i_a)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \\ \frac{v_b(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} + \frac{v_a(v_a i_b - v_b i_a) - v_c(v_b i_c - v_c i_b)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \\ \frac{v_c(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} + \frac{v_b(v_b i_c - v_c i_b) - v_a(v_c i_a - v_a i_v)}{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \mathbf{i} \quad (1.44)$$

ou seja, prova-se que pela definição de corrente  $i_p$  e  $i_q$  que a composição estas é dada pela corrente suprida pelo fonte à carga do sistema. Ainda pela definição de  $i_p$  e  $i_q$ ,



utilizando a definição em (EQUACAO p) porém utilizando  $p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q$  temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\
 &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\
 &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{-(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{i}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \\
 &= \frac{-(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

ou seja, prova-se que pela definição de corrente  $i_p$  e  $i_q$  que a composição estas é dada pela corrente suprida pelo fonte à carga do sistema. Ainda pela definição de  $i_p$  e  $i_q$ , utilizando a definição em (EQUACAO p) porém utilizando  $p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q$  temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \times \mathbf{i}_p &= \mathbf{v} \times \left( \frac{p}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

isto também implica que as correntes  $\mathbf{i}_q$  são ortogonais à  $\mathbf{v}$ , ou seja  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_q \equiv 0$  e que as correntes  $\mathbf{i}_p$  são paralelas à  $\mathbf{v}$ , ou então  $\mathbf{v} \times \mathbf{i}_p \equiv 0$ . Isto trás uma implicação importante que é a ortogonalidade entre as correntes  $\mathbf{i}_p$  e  $\mathbf{i}_q$  no sistema, ou seja:

$$\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_q \equiv 0 \tag{1.47}$$

Com isso, também é mostrado que a parcela da corrente  $\mathbf{i}_p$  corresponde apenas a transferência de potência ativa instantânea no sistema. Por outro lado tem-se que a corrente  $\mathbf{i}_q$  corresponde apenas a parcela da potência reativa instantânea do sistema

## 1.3 Filtros Ativos

### 1.3.1 Filtros Ativo Empregando a Teoria P-Q

## Referências Bibliográficas

- [1] PAREDES, H. K. M. *Eletrônica de Potência para Geração, Transmissão e Distribuição de Energia Elétrica: Tópicos em teorias de potência em condições não ideais de operação*. Acessado em 24/06/2016. Disponível em: <<http://www.dsce.fee.unicamp.br/antenor/pdf/it744/CAP6.pdf>>.
- [2] STAUDT, V. Fryze-buchholz-depenbrock: A time-domain power theory. In: IEEE. *2008 International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation*. [S.l.], 2008. p. 1–12.
- [3] CZARNECKI, L. Budeanu and fryze: Two frameworks for interpreting power properties of circuits with nonsinusoidal voltages and currents. *Electrical Engineering*, Springer, v. 80, n. 6, p. 359–367, 1997.
- [4] CZARNECKI, L. S. What is wrong with the budeanu concept of reactive and distortion power and why it should be abandoned. *IEEE Transactions on Instrumentation and measurement*, IEEE, v. 1001, n. 3, p. 834–837, 1987.
- [5] PENG, F. Z.; LAI, J.-S. Generalized instantaneous reactive power theory for three-phase power systems. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IEEE, v. 45, n. 1, p. 293–297, 1996.
- [6] AKAGI, H.; KANAZAWA, Y.; NABAE, A. Instantaneous reactive power compensators comprising switching devices without energy storage components. *IEEE Transactions on industry applications*, IEEE, n. 3, p. 625–630, 1984.
- [7] AKAGI, H.; WATANABE, E. H.; AREDES, M. *Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [8] WATANABE, E. H.; AREDES, M. *Teoria de Potência Ativa e Reativa Instantânea e Aplicações - Filtros Ativos e FACTS* -. UFRJ - Rio de Janeiro: Laboratório de Eletrônica de Potência.