

CIRCUITOS DIGITAIS

MAPA DE KARNAUGH

MÉTODO DE QUINE-McCLUSKEY

Prof. Marcelo Grandi Mandelli

`mgmandelli@unb.br`

Funções incompletamente especificadas

- ❑ Em certas situações, uma função pode assumir indistintamente o valor "0" ou "1" para certas combinações das variáveis de entrada
- ❑ Dizemos que a função é não especificada para essas combinações particulares das variáveis de entrada
- ❑ Utiliza-se o símbolo "X" na tabela verdade ou mapa de Karnaugh, que é chamado de don't care

Funções incompletamente especificadas

- Exemplo: Detector de números pares na representação BCD

<i>Linha</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F(A,B,C,D)</i>
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

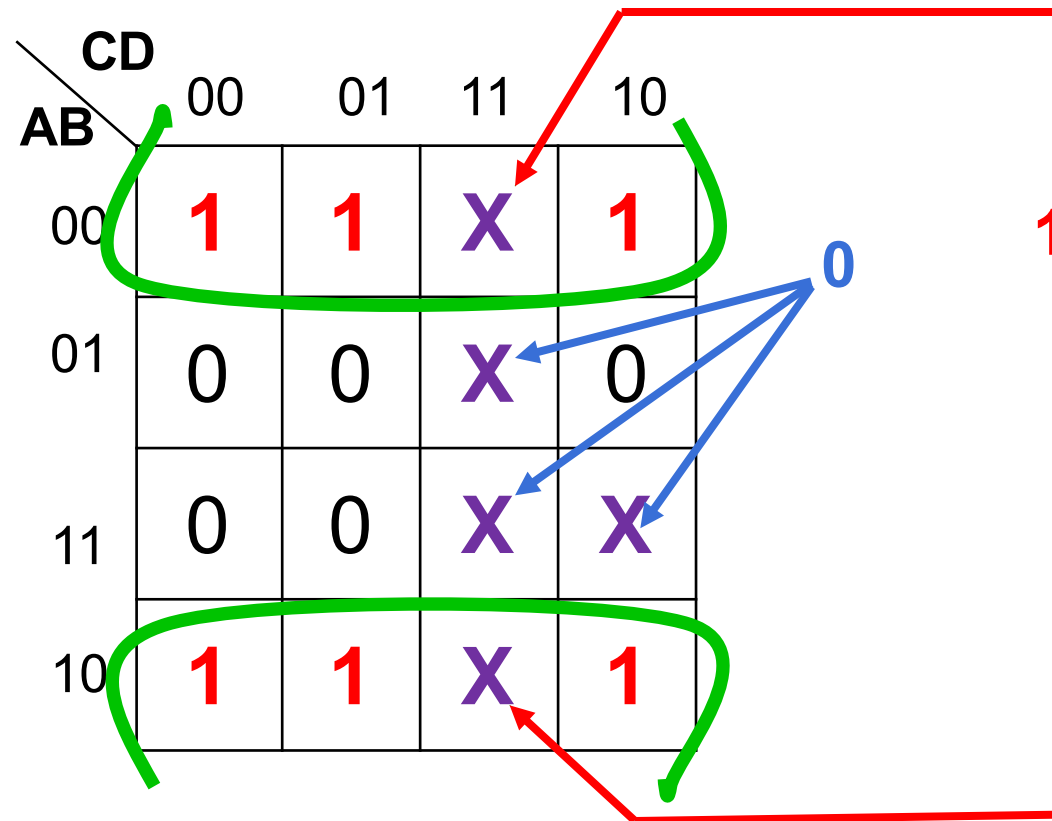
$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Funções incompletamente especificadas

- Na simplificação no mapa de Karnaugh, os don't cares podem assumir os valores "0" ou "1":

$$f(A, B, C, D) = \overline{D}$$

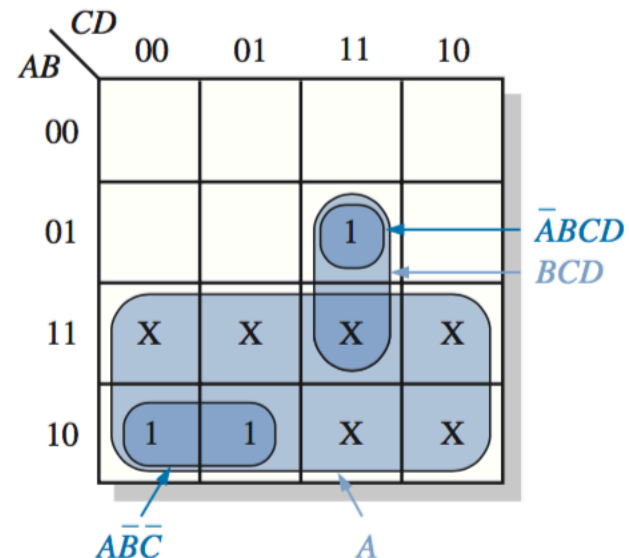


Mapa de Karnaugh com "don't cares"

$$F = \sum m(7, 8, 9) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Entradas				Saída
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

(a) Tabela-verdade



(b) Sem "don't cares" $Y = ABC + \bar{A}BCD$
Com "don't cares" $Y = A + BCD$

Implicantes

□ Definições

- **Implicante Primo (primário)** – é um implicante que não pode ser combinado com outro para eliminar um literal → **são os círculos!**
- **Implicante Primo (primário) Essencial** – círculos que cobrem um “1” que não está em nenhum outro círculo

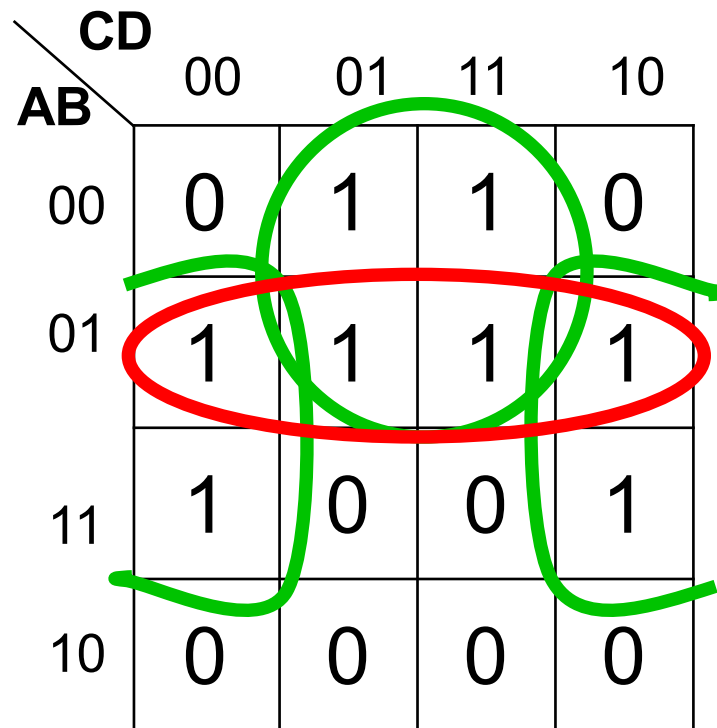
Implicantes

- Todos círculos são implicantes primos
- Em verde → implicantes primos essenciais
- Deve-se escolher apenas um dos círculos em vermelho

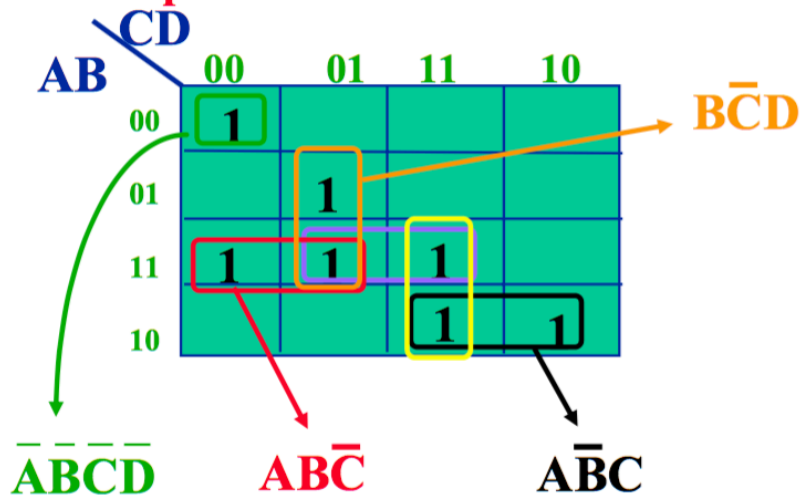
BC		00	01	11	10
A					
0	0	1	1	0	
1	1	1	0	1	

Implicantes

- Em verde → implicantes primos essenciais
- Círculo em vermelho não é essencial porque seus 1s já estão em outros círculos



• Exemplo 2



$$F = \sum m (0,5,10,11,12,13,15)$$

6 implicants primos

p1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	→	essencial	m0
p2	$B\bar{C}D$	→	essencial	m5
p3	$AB\bar{C}$	→	essencial	m12
p4	ABD	→	escolher entre 1 destes	
p5	ACD	→		
p6	$A\bar{B}C$	→	essencial	m10

• Tabela de Cobertura

	m0	m5	m10	m11	m12	m13	m15	
p1	X							essencial
p2		X				X		essencial
p3					X	X		essencial
p4						X	X	escolher entre 1 destes
p5				X			X	
p6		X	X					essencial

falta cobrir só m15 - pode-se escolher p4 ou p5

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{matrix} ABD \\ \text{ou} \\ ACD \end{matrix}$$

Método de Quine-McCluskey

- Provê um procedimento padrão para
 - A geração de todos os implicants primários de uma função lógica
 - A extração do conjunto mínimo de implicants primários capaz de representar uma função lógica

- É um método tabular que pode ser utilizado para a obtenção da expressão mínima de segunda ordem na forma soma-de-produtos a partir de qualquer função lógica, incluindo funções lógicas incompletamente especificadas

Método de Quine-McCluskey

- Tabela de implicação de Quine-McCluskey (para determinar os implicantes primos)
 - Nesse primeiro passo, deve-se listar todos os elementos "1" ou "X" (don't cares) em função dos índices do minitermos e dos don't cares, expressos como um número binário
 - Os elementos da tabela devem ser agrupados de acordo com o número de "1"s da representação binária

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Número de 1's ↓	Coluna 1
0	{ 0000
1	{ 0100 1000
2	{ 0101 0110 1001 1010
3	{ 0111 1101
4	{ 1111

Método de Quine-McCluskey

□ Método

- Comparar cada elemento de um grupo com cada elemento do grupo seguinte
- Se houver diferença em um único bit, isso significa que os elementos podem ser combinados em um termo produto que excluirá a variável correspondente ao bit.
- O termo produto correspondente à associação é colocado numa coluna à direita, com um hífen (-) denotando a variável excluída
- Os termos combinados devem ser marcados (√) para indicar que eles já foram utilizados
- Repetir o processo para todos os elementos de todos os grupos

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 6, 8, 9, 10, 13) + d(0, 7, 15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00
0100 ✓		
1000		
0101		
0110		
1001		
1010		
0111		
1101		
1111		

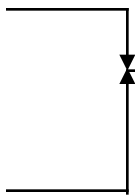
Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 6, 8, 9, 10, 13) + d(0, 7, 15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00
0100 ✓		-000
1000 ✓		
	$\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}\overline{C}D$	
0101		
0110		
1001		
1010		
0111		
1101		
1111		

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 6, 8, 9, 10, 13) + d(0, 7, 15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00 -000
0100 ✓		
1000 ✓		010-
0101 ✓		
0110		
1001		
1010		
0111		
1101		
1111		

$\overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}B\overline{C}$

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00 -000
0100 ✓		
1000 ✓		010- 01-0
0101 ✓		
0110 ✓		
1001		
1010		
0111		
1101		
1111		

Método de Quine-McCluskey


□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00 -000
0100 ✓		
1000 ✓		010- 01-0 100-
0101 ✓		
0110 ✓		
1001 ✓		
1010		
0111		
1101		
1111		

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

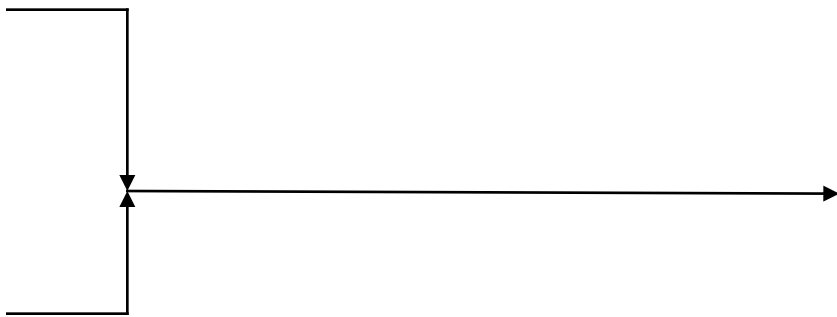
Coluna 1		Coluna 2	
0000	✓	0-00	
		-000	
0100	✓		
1000	✓	010-	
		01-0	
0101	✓	100-	
0110	✓	10-0	
1001	✓		
1010	✓		
0111			
1101			
1111			



Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

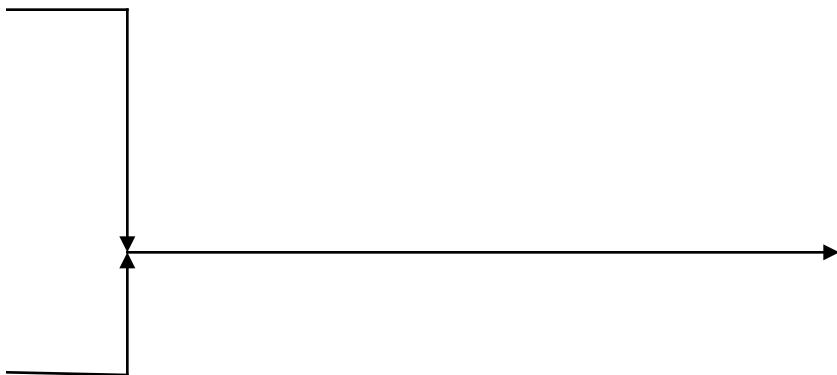
Coluna 1		Coluna 2
0000	✓	0-00 -000
0100	✓	
1000	✓	010- 01-0
0101	✓	100- 10-0
0110	✓	
1001	✓	
1010	✓	01-1
0111	✓	
1101		
1111		



Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000	✓	0-00 -000
0100	✓	
1000	✓	010- 01-0
0101	✓	100- 10-0
0110	✓	
1001	✓	
1010	✓	01-1 -101
0111	✓	
1101	✓	
1111		



Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000 ✓		0-00 -000
0100 ✓		
1000 ✓		010- 01-0
0101 ✓		100- 10-0
0110 ✓		
1001 ✓		
1010 ✓		01-1 -101
0111 ✓		011-
1101 ✓		
1111		

Método de Quine-McCluskey


■ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1		Coluna 2
0000	✓	0-00 -000
0100	✓	
1000	✓	010- 01-0
0101	✓	100- 10-0
0110	✓	
1001	✓	
1010	✓	01-1 -101
0111	✓	011- 1-01
1101	✓	
1111		

Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$


Coluna 1		Coluna 2
0000	✓	0-00 -000
0100	✓	
1000	✓	010- 01-0
0101	✓	100- 10-0
0110	✓	
1001	✓	
1010	✓	01-1 -101
0111	✓	011- 1-01
1101	✓	
1111	✓	-111



Método de Quine-McCluskey

□ Exemplo: $f(A,B,C,D) = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + d(0,7,15)$

Coluna 1	Coluna 2
0000 ✓	0-00 -000
0100 ✓	
1000 ✓	010- 01-0
0101 ✓	100- 10-0
0110 ✓	
1001 ✓	
1010 ✓	01-1 -101
0111 ✓	011- 1-01
1101 ✓	
1111 ✓	-111 11-1



Método de Quine-McCluskey

- O método prossegue para a terceira coluna:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 -000	
0100 ✓		
1000 ✓	010- 01-0	
0101 ✓	100-	
0110 ✓	10-0	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1 -101	
0111 ✓	011-	
1101 ✓	1-01	
1111 ✓	-111 11-1	

Método de Quine-McCluskey

- Elementos não utilizados recebem "*"

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 *	01--
	-000 *	
0100 ✓		
1000 ✓	010- ✓	
	01-0	
0101 ✓	100-	
0110 ✓	10-0	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1	
	-101	
0111 ✓	011- ✓	
1101 ✓	1-01	
1111 ✓	-111	
	11-1	

Método de Quine-McCluskey

- Elemento gerado por diferentes combinações:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 *	01--
	-000 *	
0100 ✓		
1000 ✓	010- ✓	
	01-0 ✓	
0101 ✓	100-	
0110 ✓	10-0	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1 ✓	
	-101	
0111 ✓	011- ✓	
1101 ✓	1-01	
1111 ✓	-111	
	11-1	

Método de Quine-McCluskey

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 *	01--
	-000 *	
0100 ✓		
1000 ✓	010- ✓	
	01-0 ✓	
0101 ✓	100- *	
0110 ✓	10-0 *	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1 ✓	
	-101	
0111 ✓	011- ✓	
1101 ✓	1-01	
1111 ✓	-111	
	11-1 ✓	

Método de Quine-McCluskey

- Elemento gerado por diferentes combinações:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 *	01--
	-000 *	
0100 ✓		
1000 ✓	010- ✓	
	01-0 ✓	
0101 ✓	100- *	
0110 ✓	10-0 *	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1 ✓	
	-101 ✓	
0111 ✓	011- ✓	
1101 ✓	1-01	
1111 ✓	-111 ✓	
	11-1 ✓	

Diagram illustrating the grouping of prime implicants (Column 2) to form the final prime implicants (Column 3):

- 01-1 ✓ and -101 ✓ group to form -1-1
- 011- ✓ and 1-01 group to form 11-1 ✓
- 111 ✓ and 11-1 ✓ group to form 11-1 ✓

Método de Quine-McCluskey

□ Versão final:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
0000 ✓	0-00 *	01-- *
	-000 *	
0100 ✓		-1-1 *
1000 ✓	010- ✓	
	01-0 ✓	
0101 ✓	100- *	
0110 ✓	10-0 *	
1001 ✓		
1010 ✓	01-1 ✓	
	-101 ✓	
0111 ✓	011- ✓	
1101 ✓	1-01 *	
1111 ✓	-111 ✓	
	11-1 ✓	

Os elementos que restaram (com "*") formam o conjunto de *implicantes primários*:

0-00
-000
100-
10-0
1-01
01--
-1-1

Gráfico dos Implicantes Primários

- As linhas são rotuladas com os minitermos cobertos pelos implicantes primários
 - Cada "-" de um implicante primário deve ser substituído por "0" e por "1"
 - Cada índice resultante da substituição acima deve ser colocado, no formato decimal, à esquerda do implicante primário que o originou

Gráfico dos Implicantes Primários

0,4	(0-00)
0,8	(-000)
8,9	(100-)
8,10	(10-0)
9,13	(1-01)
4,5,6,7	(01--)
5,7,13,15	(-1-1)

Gráfico dos Implicantes Primários

- As colunas do gráfico dos implicantes primários são rotuladas com os índices dos minitermos (os don't cares não são incluídos)

	4	5	6	8	9	10	13
0,4 (0-00)							
0,8 (-000)							
8,9 (100-)							
8,10 (10-0)							
9,13 (1-01)							
4,5,6,7 (01--)							
5,7,13,15 (-1-1)							

Gráfico dos Implicantes Primários

- Um "X" deve ser colocado numa posição (linha, coluna) caso o minitermo representado pela coluna seja coberto pelo implicante primário associado à linha

		4	5	6	8	9	10	13
0,4	(0-00)	X						
0,8	(-000)				X			
8,9	(100-)				X	X		
8,10	(10-0)				X		X	
9,13	(1-01)					X		X
4,5,6,7	(01--)	X	X	X				
5,7,13,15	(-1-1)		X					X

Gráfico dos Implicantes Primários

- As colunas que apresentam um único "X" representam minitermos cobertos por um, e apenas um, implicante primário (que passa a ser essencial)

	4	5	6	8	9	10	13
0,4 (0-00)	X						
0,8 (-000)				X			
8,9 (100-)				X	X		
8,10 (10-0)				X		X	
9,13 (1-01)					X		X
4,5,6,7 (01--)	X	X	X				
5,7,13,15 (-1-1)		X					X

Gráfico dos Implicantes Primários

- As colunas que apresentam um único "X" representam minitermos cobertos por um, e apenas um, implicante primário (que passa a ser essencial)

	4	5	6	8	9	10	13
0,4 (0-00)	X						
0,8 (-000)				X			
8,9 (100-)				X	X		
8,10 (10-0)				X		X	
9,13 (1-01)					X		X
4,5,6,7 (01--)	X	X	X				
5,7,13,15 (-1-1)		X					X

Gráfico dos Implicantes Primários

- Note que os implicantes primários essenciais cobrem também minitermos adicionais da função:

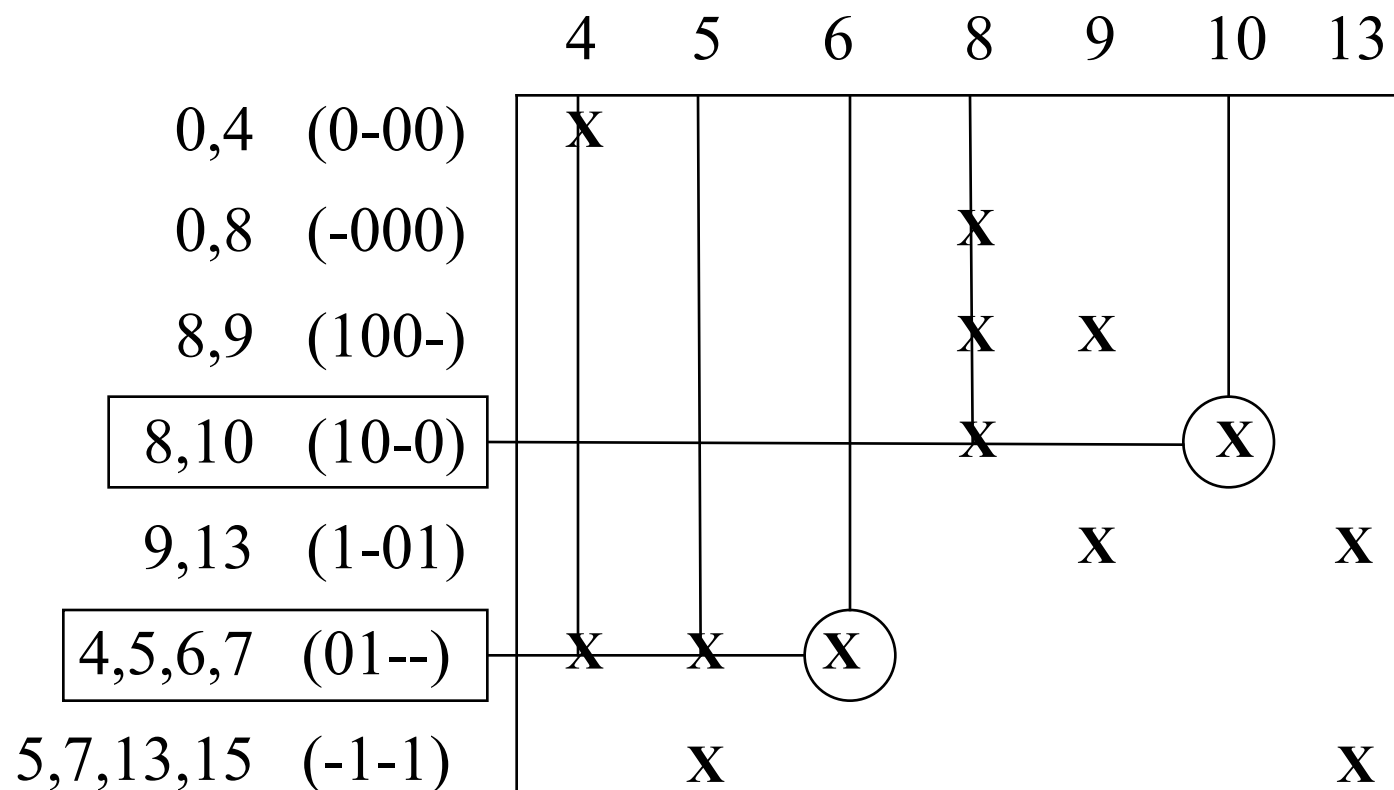


Gráfico dos Implicantes Primários

- No passo final deve-se identificar o menor número de implicantes primários que cobrem os minitermos que restaram:

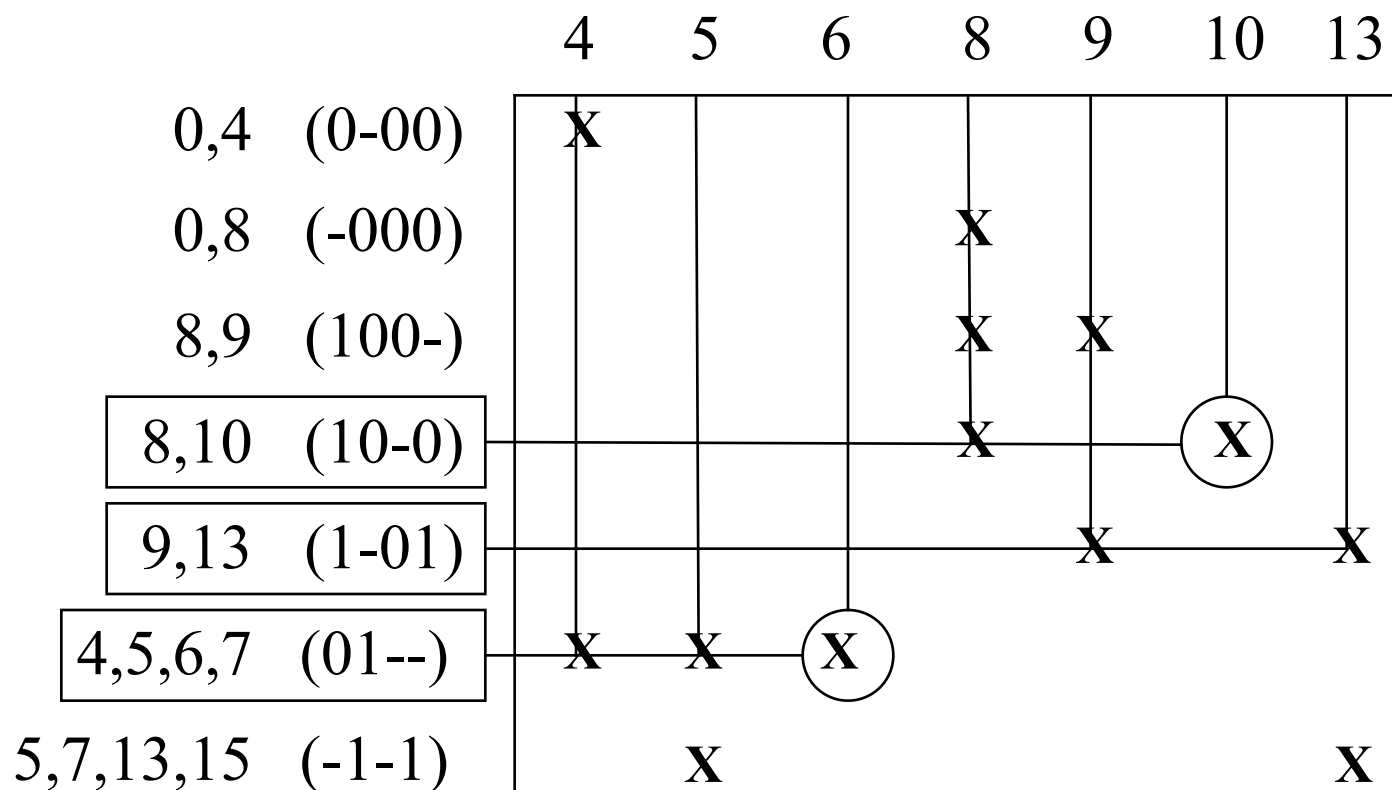


Gráfico dos Implicantes Primários

- Os implicantes primários essenciais resultantes foram:

$$f(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{C}D + \overline{A}B$$

(10-0)

(1-01)

(01--)

- No mapa de Karnaugh:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0 X	4 1	12	8 1
01	1	5 1	13 1	9 1
11	3	7 X	15 X	11
10	2	6 1	14	10 1

$$f(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 6, 8, 9, 10, 13) + d(0, 7, 15)$$

Quine McCluskey - Site

<http://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/ti1/code/qmc/>