Índice			8.5. Multiconjuntos
1. Mapas		1	8.7. Desarreglos
			8.8. Números de Catalan
2. S	lets	2	
9 Т	Union-Find	2	9. Otros
J. (	Jillon-F ilid	_	9.1. Ordenamiento de Arrays y Listas (ascendente y descendente) 18 9.2. Cola de Prioridad
4. (	Grafos	3	9.3. Interfaz Comparable
4	l.1. BFS y DFS	3	9.4. Imprimir números decimales redondeados
	2.2. Shortest Hop	4	9.5. BufferedReader y BufferedWriter
4	3. Ordenamiento topológico		
4	4.4. Componentes fuertemente conexas (Algoritmo de Tarjan)	5	. 3.6
	1.5. Puntos de articulación	6	1. Mapas
	l.6. Puentes	7	Estructura de datos que guarda pares (clave, valor). El HashMap no pone
	1.7. Minimum Spanning Tree (Algoritmo de Kruskal)	7	las claves en ningún orden en particular. TreeMap ordena las claves de acuer-
	1.8. Algoritmo de Dijkstra	$\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$	do a su orden natural. LinkedHashMap pone las claves en el orden en que se
	1.10. Máximo flujo y mínimo corte	10	ingresen.
-	.10. Maximo najo y minimo corac	10	Las operaciones .put(), .get() y .containsKey() son $O(1)$ en HashMap y
5. F	KMP	11	LinkedHashMap, y $O(\log n)$ en TreeMap.
			Ejemplo: Contar cuántas veces aparece cada palabra en un String.
	Programación dinámica	12	public static void main(String args[]) {
	3.1. Longest Increasing Subsequence		public static void main(String args[]) {  HashMap <string, integer=""> map = new HashMap<string,< td=""></string,<></string,>
	5.2. Longest Common Subsequence		$\rightarrow \text{Integer} > ();$
	5.4. Edit Distance		//TreeMap < String, $Integer > map = new TreeMap < String$ ,
	5.5. El problema de la mochila (Knapsack)		$\hookrightarrow Integer > ();$
Ü		10	//LinkedHashMap < String, $Integer > map = new$
7. I	Геоría de números	13	$\hookrightarrow LinkedHashMap < String, Integer > ();$
7	'.1. Algoritmo de Euclides	13	5
	7.2. Verificar si un número es primo		String s = "tres_tristes_tigres_tragaban_trigo_en_un
	7.3. Criba de Eratóstenes		→ _trigal_en_tres_tristes_trastos";  C+:
	7.4. Factorización prima de un número		String palabras[] = s.split("");
7	7.5. Fórmulas		for(int i=0; i <palabras.length; i++){<="" td=""></palabras.length;>
	7.5.1. Cantidad de divisores		for (int $i=0$ ; $i < palabras.length$ ; $i++)$ {  if (!map.containsKey(palabras[i])){
	7.5.2. Suma de divisores		map.put(palabras[i], 1);
	7.5.5. Tuncion $\varphi$ de Duiei		12 } else {
8. Combinatoria			map.put(palabras[i], map.get(palabras[i])+1);
8	3.1. Permutaciones	16	14 }
8	3.2. Subconjuntos		15 }
	3.3. Coeficientes binomiales		16
8	3.4. Coeficientes multinomiales	17	17 // Obtener un elemento

# 2. Sets

Estructura de datos que actúa como "bolsa" donde se almacenan elementos, pero no puede almacenar elementos duplicados.

En HashSet .add() y .contains() son O(1), mientras que en TreeSet son  $O(\log n)$ . Sin embargo, en el TreeSet los elementos quedan ordenados.

```
public static void main(String[] args) {
     HashSet<String> hs = new HashSet<String>():
     //TreeSet < String > ts = new TreeSet < String > ();
     hs.add("Hola");
     hs.add("Hola");
     hs.add("Mundo");
     //Imprime 2, porque no se aceptan repetidos
     System.out.println(hs.size());
10
      //Recorrido
11
     for (String s: hs) {
12
        System.out.println(s);
14
15
```

# 3. Union-Find

Estructura de datos que soporta las siguientes operaciones eficientemente:

- $\bullet$  Unir los conjuntos de los elementos p,q
- $\blacksquare$  Determinar si los elementos p,q pertenecen al mismo conjunto o no

```
1 class UnionFind{
2 private int[] parent, size;
```

```
private int components;
   // n = Numero de nodos
   public UnionFind(int n){
     components = n;
     parent = new int[n];
     size = new int[n];
     for (int i=0; i< n; i++){
       parent[i] = i;
       size[i] = 1;
13
14
   private int root(int p){
     while (p != parent [p]) {
       parent[p] = parent[parent[p]];
       p = parent[p];
20
21
     return p;
22
   //Une los nodos p.q
   public void union(int p, int q){
     int rootP = root(p);
     int rootQ = root(q);
     if(rootP != rootQ)
       if(size[rootP] < size[rootQ]){</pre>
          parent[rootP] = rootQ;
          size[rootQ] = size[rootQ] + size[rootP];
       }else{
          parent[rootQ] = rootP;
          size[rootP] = size[rootP] + size[rootQ];
       components --;
   //Retorna true si p,q estan conectados
   public boolean connected (int p, int q) {
     return root(p) = root(q);
43
44
   //Retorna el numero de componentes conexas
```

```
public int getComponents(){
     return components;
48
49
51 class Main {
   public static void main(String[] args){
      UnionFind uf = new UnionFind (5);
      uf.union(0, 2);
     uf.union(1, 0);
55
      uf.union(3, 4);
56
57
     //El numero de componentes es
58
     int comp = uf.getComponents();
     //Dos nodos estan conectados?
61
     boolean connected = uf.connected(0, 3);
62
63
64
```

#### 4. Grafos

# 4.1. BFS y DFS

Recorren un grafo a partir de un nodo origen y visitan todos los nodos alcanzables desde éste. Ambos algoritmos tienen una complejidad de O(n+m) donde n es el número de nodos y m es el número de aristas del grafo. El siguiente ejemplo está con DFS pero funciona igual con BFS.

```
static ArrayList < Integer > g[];
static boolean seen[];

public static void main(String[] args) {
    Scanner sc = new Scanner(System.in);
    int n = sc.nextInt();

    seen = new boolean[n];
    g = new ArrayList[n];
    for(int i = 0; i < n; i++){
        g[i] = new ArrayList < Integer > ();
    }

while(sc.hasNextInt()){
```

```
int u = sc.nextInt();
        int v = sc.nextInt();
        g[u]. add (v);
        // Si el grafo es no-dirigido, tambien se agrega
            \hookrightarrow arista de v a u
        g[v]. add (u);
19
20
      //Visita solo los nodos que son alcanzables desde el
         \hookrightarrow nodo 's'
      int s = 0:
      dfs(s);
24
25
      //Con el vector 'seen' vemos cuales son estos nodos
      for (int i=0; i< n; i++){
        if (seen [i]) {
          //'i' es alcanzable desde 's'
29
30
31
      //Si queremos visitar todos los nodos
      for (int u=0; u< n; u++){
        if (! seen [u]) {
          //Si no hemos visitado 'u', hacer DFS en 'u'
          dfs(u);
   private static void dfs(int u){
      seen[u] = true;
      int len = g[u]. size();
      for (int i=0; i< len; i++){
        int v = g[u].get(i);
        if (! seen [v]) {
          dfs(v);
50
   private static void bfs(int u){
      seen[u] = true;
      Queue<Integer > q = new LinkedList<Integer > ();
```

```
q.add(u);
      while (!q. isEmpty()) {
57
        u = q. poll();
58
         int len = g[u]. size();
59
         for (int i=0; i< len; i++){
60
           int v = g[u].get(i);
61
           if (! seen [v]) {
62
             seen[v] = true;
             q. add (v);
65
66
67
68
```

## 4.2. Shortest Hop

Modificación de BFS que calcula el camino más corto desde un nodo origen s a todos los demás. Sólo funciona cuando el peso de todas las aristas es 1. Su complejidad es la misma de BFS: O(n+m).

```
static ArrayList<Integer> g[];
   static boolean seen [];
   static int dist[];
   public static void main(String[] args) {
      int n = 10;
      seen = new boolean[n];
      dist = new int[n];
      g = new ArrayList[n];
10
      for (int i=0; i< n; i++){
11
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
12
13
14
      int s = 0;
15
      shortestHop(s);
16
      //Despues de llamar este metodo, en dist[i] esta la
17
         \hookrightarrow distancia mas corta (s, i)
18
19
   public static void shortestHop(int u){
      int n = g.length;
21
22
```

```
//Distancia "infinita" hacia todos los nodos
      Arrays. fill (dist, Integer.MAX_VALUE);
24
      //Distancia 0 hacia el nodo de origen
      dist[u] = 0;
26
      //BFS "modificado"
      seen[u] = true;
      Queue<Integer > q = new LinkedList<Integer > ();
      q.add(u);
      while (!q. isEmpty()) {
        u = q.poll();
        int len = g[u]. size();
        for (int i = 0; i < len; i + +){
          int v = g[u].get(i);
          if (! seen [v]) {
             seen[v] = true;
             q. add (v);
             //Lo unico que cambia es que se calcula el
                \hookrightarrow dist [v]
             dist[v] = dist[u] + 1;
43
44
45
```

# 4.3. Ordenamiento topológico

Todo grafo dirigido acíclico (DAG) tiene un ordenamiento topológico. Esto significa que para todas las aristas (u,v), u aparece en el ordenamiento antes que v. Visualmente es como si se pusieran todos los nodos en línea recta y todas las aristas fueran de izquierda a derecha, ninguna de derecha a izquierda.

El algoritmo para hallar dicho ordenamiento es una modificación de DFS y complejidad es la misma: O(n+m). El método retorna falso si detecta un ciclo en el grafo, ya que en este caso no existe ordenamiento topológico posible.

```
static ArrayList<Integer> g[];
static int seen[];
static LinkedList<Integer> topoSort;

public static void main(String[] args) {
   int n = 10;
   seen = new int[n];
```

```
topoSort = new LinkedList<Integer >();
      g = new ArrayList[n];
10
      for(int i = 0; i < n; i++)
11
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
12
13
14
      boolean sinCiclo = true;
15
16
      //Es necesario hacer el ciclo para visitar todos los
17
         \hookrightarrow nodos
      for (int u=0; u< n; u++)
18
        if(seen[u] == 0)
19
          sinCiclo = sinCiclo && topoDfs(u);
20
21
22
23
      if (sinCiclo) {
24
        //La lista 'topoSort' contiene los nodos en su
25
           → orden topologico
      }else{
26
        //Hay un ciclo
27
28
29
30
   private static boolean topoDfs(int u){
31
      //DFS "modificado" para hacer ordenamiento
32
         \rightarrow topologico
      //Se marca 'u' como 'gris'
33
      seen[u] = 1;
34
      int len = g[u]. size();
35
      boolean sinCiclo = true;
36
      for (int i=0; i< len; i++){
37
        int v = g[u].get(i);
38
        if(seen[v] == 0)
39
          sinCiclo = sinCiclo && topoDfs(v);
40
        else if(seen[v] == 1)
41
          //Hay un ciclo, retorna falso
42
          sinCiclo = false:
43
44
45
      //Se agrega el nodo 'u' al inicio de la lista y se
46
         \rightarrow marca 'negro'
      seen[u] = 2;
```

# 4.4. Componentes fuertemente conexas (Algoritmo de Tarjan)

Calcula la componente fuertemente conexa a la que pertenece cada nodo de un grafo dirigido. Si dos nodos u, v están en la misma componente, significa que existe un camino de u a v y uno de v a u. Su complejidad es O(n+m).

```
static ArrayList<Integer> g[];
   static boolean [] seen, stackMember;
   static int[] disc, low, scc;
   static Stack<Integer> st;
   static int time, component;
   public static void main(String[] args) {
      int n = 10;
9
      seen = new boolean[n];
10
      stackMember = new boolean[n];
11
      disc = new int[n];
      low = new int[n];
      scc = new int[n];
      st = new Stack < Integer > ();
15
      time = 0;
16
      component = 0;
17
      g = new ArrayList[n];
18
      for (int i = 0; i < n; i++)
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
21
22
      for (int u=0; u< n; u++){
        if (! seen [u]) {
          tarjan(u);
26
      //scc[i]==x \ significa \ que \ 'i' \ pertenece \ a \ la
         \hookrightarrow componente 'x'
29
   private static void tarjan(int u){
```

```
seen[u] = true;
32
      st.add(u);
33
      stackMember[u] = true;
34
      disc[u] = time;
35
      low[u] = time;
36
      time++:
37
38
      int len = g[u]. size();
39
      for (int i=0; i< len; i++)
40
        int v = g[u].get(i);
41
         if (! seen [v]) {
42
           tarian(v);
43
           low[u] = Math.min(low[u], low[v]);
44
         } else if (stackMember[v]) {
           low[u] = Math.min(low[u], disc[v]);
46
47
48
49
      if(low[u] = disc[u])
50
        int w:
51
         do{}
52
           w = st.pop();
           stackMember[w] = false;
54
           scc[w] = component;
55
         \mathbf{while}(\mathbf{w} != \mathbf{u});
56
         component++:
57
58
59
```

## 4.5. Puntos de articulación

Halla los puntos de articulación de un grafo. Un punto de articulación es un nodo del grafo que si se quitara causaría que el grafo se "desconectara". Si el grafo no era conexo en un principio, un punto de articulación es un nodo que, si se quitara, incrementaría el número de componentes conexas. La complejidad del algoritmo es O(n+m).

```
static ArrayList<Integer> g[];
static boolean[] seen, ap;
static int[] disc, low, parent;
static int time;

public static void main(String[] args) {
```

```
int n = 10;
      g = new ArrayList[n];
      seen = new boolean[n]:
      ap = new boolean[n];
      disc = new int[n];
      low = new int[n];
      parent = new int[n];
15
      time = 0;
      for (int i = 0; i < n; i++)
16
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
        parent[i] = -1;
18
19
20
21
      for (int u=0; u< n; u++){
        if (! seen [u]) {
22
          articulationPoints(u);
23
24
      //Si \ ap[i] = true, 'i' es un punto de articulación
27
   private static void articulation Points (int u) {
      seen[u] = true;
      disc[u] = time;
      low[u] = time;
32
     time++;
33
      int children = 0;
      int len = g[u]. size();
      for (int i=0; i< len; i++){
        int v = g[u].get(i);
        if (! seen [v]) {
          children++;
40
          parent[v] = u;
          articulationPoints(v);
          low[u] = Math.min(low[u], low[v]);
43
          \mathbf{if}(\text{parent}[\mathbf{u}] = -1 \&\& \text{children} > 1)
44
            ap[u] = true;
45
          else if(parent[u] != -1 \&\& low[v] >= disc[u])
46
            ap[u] = true;
47
48
        }else if(v != parent[u]){
```

#### 4.6. Puentes

Halla los puentes de un grafo. Un puente es una arista del grafo que si se quitara causaría que el grafo se "desconectara". Si el grafo no era conexo en un principio, un puente es una arista que, si se quitara, incrementaría el número de componentes conexas. La complejidad del algoritmo es O(n+m).

```
1 class Bridge {
   public int u, v;
   public Bridge(int u, int v){
      this.u = u;
      this.v = v;
7 }
public class GraphBridges {
   static ArrayList<Integer> g[];
   static boolean [] seen;
   static int[] disc, low, parent;
   static int time;
   static ArrayList<Bridge> bridgeEdges;
16
   public static void main(String[] args) {
17
      int n = 10;
18
     g = new ArrayList[n];
20
      seen = new boolean[n];
21
      disc = new int[n];
22
     low = new int[n];
23
      parent = new int[n];
24
     time = 0;
25
      bridgeEdges = new ArrayList<Bridge>();
26
      for (int i = 0; i < n; i++)
27
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
28
        parent[i] = -1;
29
30
31
```

```
for (int u=0; u< n; u++){
        if (! seen [u]) {
          bridges (u);
     // 'bridgeEdges' contiene objetos tipo Bridge que
         → indican que la arista u.v es un puente
   private static void bridges (int u) {
      seen[u] = true;
      disc[u] = time;
42
      low[u] = time;
43
      time++;
      int len = g[u]. size();
      for (int i=0; i< len; i++){
        int v = g[u].get(i);
        if (! seen [v]) {
49
          parent[v] = u;
50
          bridges (v);
          low[u] = Math.min(low[u], low[v]);
          if(low[v] > disc[u])
            Bridge b = new Bridge(u, v):
            bridgeEdges.add(b);
55
56
        }else if(v != parent[u]){
          low[u] = Math.min(low[u], disc[v]);
61
62 }
```

# 4.7. Minimum Spanning Tree (Algoritmo de Kruskal)

Halla el árbol de cubrimiento mínimo de un grafo no-dirigido y conexo. Si no está garantizado de antemano que el grafo sea conexo, hay que verificarlo antes de correr este algoritmo.

Utiliza la estructura de datos Union-Find discutida anteriormente. El grafo debe ser representado como una lista de objetos tipo Arista. Tiene una complejidad de  $O(m \log n)$ .

1//Se necesita implementar tambien la clase UnionFind

```
3 class Arista implements Comparable < Arista > {
   public int u, v, costo;
   public Arista(int u, int v, int costo){
      this.u = u:
      this.v = v;
      this.costo = costo;
   public int compareTo(Arista o) {
      return this.costo - o.costo;
11
12
13
15 public class Kruskal {
   public static void main(String[] args) {
      int n = 10; //Cantidad de nodos del grafo
      ArrayList<Arista> aristas = new ArrayList<Arista>();
19
      int mst = kruskal(aristas, n);
20
21
22
   public static int kruskal (ArrayList < Arista > aristas,
       \hookrightarrow int n) {
      Collections.sort(aristas);
24
25
      UnionFind uf = \mathbf{new} UnionFind(n);
26
      int costoMST = 0;
27
      int i = 0:
28
      while (uf.getComponents() != 1) {
        Arista a = aristas.get(i);
30
        if (!uf.connected(a.u, a.v)){
31
          uf.union(a.u, a.v);
32
          costoMST += a.costo;
33
34
        i++;
35
36
37
      return costoMST;
38
39
40
```

# 4.8. Algoritmo de Dijkstra

Halla la distancia más corta desde un nodo origen src hacia todos los demás nodos. Funciona con grafos dirigidos y no dirigidos, siempre y cuando los pesos de las aristas sean no-negativos. Se debe representar el grafo tanto en lista como en matriz de adyacencia. Su complejidad es  $O(m + n \log n)$ .

```
class Nodo implements Comparable < Nodo > {
   int id, distancia;
    public Nodo(int id, int distancia){
      \mathbf{this}.id = id;
      this. distancia = distancia;
    public int compareTo(Nodo o) {
      return this. distancia - o. distancia;
10 }
<sub>12</sub> public class Dijkstra {
    static ArrayList < Integer > g[];
    static int[][] p;
    static int[] distancias, padre;
    static boolean [] visitado;
    static PriorityQueue < Nodo > proximo:
    public static void main(String[] args) {
     int n = 8;
21
22
      g = new ArrayList[n];
      p = new int[n][n];
      distancias = new int[n];
      padre = new int[n];
      visitado = new boolean[n];
      proximo = new PriorityQueue<Nodo>();
      for (int i=0; i< n; i++) {
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
        distancias [i] = Integer.MAX_VALUE;
32
33
34
      int src = 0;
      dijkstra (src);
35
```

```
//El vector 'nodos' contiene la menor distancia de '
37
          \hookrightarrow src 'a todos los nodos
      //Por ejemplo, la menor distancia de 'src' a 4 es:
38
      int menorDist = distancias [4];
39
40
      //Para hallar el camino como tal entre 'src' y un
41
          \rightarrow nodo
      LinkedList < Integer > camino = new LinkedList < Integer
42
          \rightarrow >():
      int r = 4:
43
      camino.add(r);
44
      \mathbf{while}(\mathbf{r} != \mathbf{src})
45
        r = padre[r];
46
        camino.addFirst(r);
48
49
50
    public static void dijkstra(int src){
51
      distancias[src] = 0;
52
      proximo.add(new Nodo(src, 0));
53
      padre[src] = src;
54
55
      while (!proximo.isEmpty()) {
56
        Nodo u = proximo.poll();
57
        if (! visitado [u.id]) {
58
           visitado[u.id] = true;
59
          int len = g[u.id]. size();
60
          for (int i=0; i<len; i++) {
61
             int v = g[u.id].get(i);
62
             if(u.distancia + p[u.id][v] < distancias[v])
63
               distancias[v] = u.distancia + p[u.id][v];
64
               proximo.add(new Nodo(v, distancias[v]));
65
               padre[v] = u.id;
66
67
71
72
```

## 4.9. Algoritmo de Floyd-Warshall

Halla la distancia más corta desde todos los nodos hacia todos los demás. El grafo debe estar representado en matriz de adyacencia, y puede tener aristas con peso negativo. Sin embargo, no puede tener ciclos de peso negativo. En caso de que exista un ciclo negativo, el algoritmo lo detectará. Si todas las artistas son no-negativas, se puede omitir la comprobación del ciclo negativo.

La matriz de adyacencia debe armarse así:

$$\operatorname{grafo}(i,j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si & i = j \\ c_{i,j} & si & \text{existe una arista de } i \text{ a } j \text{ con costo } c_{i,j} \\ \infty & si & i \neq j \text{ y no existe arista de } i \text{ a } j \end{array} \right.$$

La complejidad del alrgoritmo es  $O(n^3)$ .

```
public static void main(String[] args) {
      int n = 5;
      int grafo[][] = new int[n][n];
      int A[][] = new int[n][n];
      for (int i = 0; i < n; i + +){
        for (int j=0; j< n; j++){
          if(i == j)
            grafo[i][j] = 0;
          }else{
            grafo[i][j] = Integer.MAX_VALUE;
13
14
15
      //Tener la matriz del grafo llena antes de hacer
16
         \hookrightarrow esto
      for (int i=0; i< n; i++){
17
        for (int j=0; j< n; j++){
          A[i][j] = grafo[i][j];
20
21
22
      for (int k=0; k< n; k++){
23
        for (int i = 0; i < n; i + +){
          for (int j=0; j< n; j++){
            int option1 = A[i][j];
            int option2;
            if(A[i][k] = Integer.MAX.VALUE || A[k][j] =
                → Integer .MAX_VALUE) {
```

```
option2 = Integer.MAX_VALUE;
             }else{
30
               option2 = A[i][k] + A[k][j];
31
32
             A[i][j] = Math.min(option1, option2);
33
34
35
36
37
      //Verificar si el grafo tiene un ciclo negativo
38
      boolean negativeCycle = false;
39
      for (int i=0; i < n & ! negativeCvcle; <math>i++){
40
        if(A[i][i] < 0)
41
          negativeCycle = true;
42
43
44
45
```

## 4.10. Máximo flujo y mínimo corte

Halla el máximo flujo que se puede emitir desde un origen s hacia un destino t, dado que los enlaces (aristas) tienen una capacidad dada.

Es el algoritmo de Edmonds-Karp, una implementación del método de Ford-Fulkerson que usa BFS para hallar los caminos en el grafo residual. Su complejidad es de  $O(nm^2)$ .

Si hay varios orígenes  $\{s_1,s_2,...\}$ , se pone un "super origen" s, y se agregan aristas  $(s,s_i)$  con capacidad infinita. Análogamente, si hay varios destinos  $\{t_1,t_2,...\}$ , se agrega un "super destino" t y se agregan aristas  $(t_i,t)$  con capacidad infinita.

El máximo flujo es igual al mínimo corte (esto es un teorema). Por ende, este algoritmo halla también el mínimo costo de cortar aristas de manera que  $s\ y\ t$  queden desconectados.

```
static ArrayList<Integer> g[];
static int[] parent;
static int[][] cap;
static int[][] flow;

public static void main(String[] args) {
    Scanner sc = new Scanner(System.in);
    int n = sc.nextInt();
    int m = sc.nextInt();
    g = new ArrayList[n];
```

```
for (int i = 0; i < n; i++)
        g[i] = new ArrayList<Integer >();
12
13
      parent = new int[n];
14
      cap = new int[n][n];
15
      flow = new int[n][n];
      for (int i = 0; i < m; i + +){
        int u = sc.nextInt();
19
        int v = sc.nextInt():
        int c = sc.nextInt();
        g[u].add(v);
22
        // Siempre se agrega esta arista, aunque el grafo
23
            \hookrightarrow sea dirigido
        g[v].add(u);
        cap[u][v] = c;
        // La siguiente linea solo se agrega si el grafo
            \hookrightarrow es no-dirigido
        // cap [v] [u] = c;
      int s = sc.nextInt();
     int t = sc.nextInt();
      int max = maxFlow(s, t):
33
34
   public static int maxFlow(int s, int t) {
      int ans = 0;
      while(true) {
        Arrays. fill (parent, -1);
        Queue<Integer > q = new LinkedList<Integer >();
        q.add(s);
        while (!q. isEmpty()) {
          int u = q.poll();
          if(u = t) break;
45
          int len = g[u]. size();
          for (int i = 0; i < len; i + +){
            int v = g[u].get(i);
             if(parent[v] = -1 \&\& cap[u][v] - flow[u][v] >
49
                \hookrightarrow 0){
              q.add(v);
```

```
parent[v] = u;
51
52
53
54
         if(parent[t] = -1) break;
55
56
         int bottleneck = Integer.MAX_VALUE;
57
         int end = t;
58
         \mathbf{while} (\mathbf{end} != \mathbf{s})  {
59
            int start = parent[end];
60
            bottleneck = Integer.min(bottleneck, cap[start][
61
                \hookrightarrow end ] - flow [start ] [end]);
            end = start:
62
63
64
         end = t;
65
         \mathbf{while} (\mathbf{end} != \mathbf{s})  {
66
            int start = parent[end];
67
            flow[start][end] += bottleneck;
68
            flow[end][start] = -flow[start][end];
69
            end = start;
70
71
72
         ans += bottleneck;
73
74
       return ans;
75
76
```

# 5. KMP

Algoritmo para buscar una cadena pattern dentro de una cadena text. Su complejidad es de O(m+n) donde m es la longitud de text y n es la longitud de pattern. Retorna la posición donde inicia la primera ocurrencia de text dentro de pattern, o -1 si no existe.

```
lps[i] = index + 1;
          index++;
          i++;
        }else{
10
          if(index != 0)
            index = lps[index - 1];
          }else{
            lps[i] = 0;
14
            i++;
15
16
18
      return lps;
19
20
21
   public static int KMP(String text, String pattern) {
      int lps[] = computeTemporaryArray(pattern);
      int i=0;
24
     int j=0;
      while (i < text.length() && j < pattern.length()) {
        if (text.charAt(i) == pattern.charAt(j)){
          i++;
          j++;
        }else{
          if(j!=0){
            j = lps[j-1];
32
          }else{
            i++;
35
36
      if(i = pattern.length())
        return i-j;
      return -1;
42
43
   public static void main(String[] args) {
      String text = "ABABABABC";
      String pattern = "BABABC";
      int index = KMP(text, pattern);
48
```

# 6. Programación dinámica

## 6.1. Longest Increasing Subsequence

Halla la longitud de la subsecuencia creciente más larga que hay en un vector (o String). También halla los elementos que pertenecen a dicha subsecuencia, por si llega a ser necesario. Su complejidad es  $O(n^2)$ .

```
public static void main(String[] args) {
      int array [] = \{3, 4, -1, 0, 6, 2, 3\};
      int n = array.length;
      int T[] = new int[n];
      int previous[] = new int[n];
      for (int i=0; i< n; i++){
       T[i] = 1;
        previous[i] = i;
10
11
      for (int i=1; i < n; i++){
12
        for (int j=0; j<i; j++){
13
          if (array [i] > array [j]) {
14
            if(T[j] + 1 > T[i])
15
               T[i] = T[j] + 1;
16
               previous[i] = j;
17
18
19
20
21
22
      int \max Index = 0;
23
      for (int i=0; i< n; i++){
24
        if(T[i] > T[maxIndex])
25
          \max Index = i:
26
27
28
29
      //Longitud de la LIS
30
      int lisLength = T[maxIndex];
31
32
      //La subsecuencia como tal
33
      int t = maxIndex:
34
      int newT = maxIndex;
35
```

### 6.2. Longest Common Subsequence

Halla la longitud de la subsecuencia común más larga entre dos Strings (o vectores). También halla los elementos que pertenecen a dicha subsecuencia, por si llega a ser necesario. Su complejidad es O(mn), donde m y n son las longitudes de los Strings.

```
public static void main(String[] args) {
      String str1 = "ABCDGHLQR";
      String str2 = "AEDPHR";
      char x[] = str1.toCharArray();
      char y[] = str2.toCharArray();
      int T[][] = \text{new int}[x.length + 1][y.length + 1];
      for (int i=1; i \le x \cdot length; i++){
        for (int j=1; j \le y. length; j++){
          if(x[i-1] = y[j-1])
            T[i][j] = T[i-1][j-1] + 1;
          }else{
            T[i][j] = Math.max(T[i][j-1], T[i-1][j]);
16
17
18
      //Longitud de la LCS
19
      int lcsLength = T[x.length][y.length];
20
      //La LCS como tal
22
      int i = x.length;
      int j = y.length;
      StringBuilder sb = new StringBuilder();
25
      while (i > 0 \&\& j > 0) {
26
        if(T[i][j]) == T[i-1][j])
27
```

## 6.3. Coin Change Problem

#### 6.4. Edit Distance

## 6.5. El problema de la mochila (Knapsack)

Se tiene una mochila con capacidad W, y n items con un peso  $w_i$  y un valor  $v_i$  cada uno. Se quiere hallar el conjunto de items tal que la suma de sus pesos no exceda W, y que la suma de sus valores sea lo más grande posible. Su complejidad es O(nW). Es posible indicar cuál es el mayor valor posible, y con un ciclo adicional, indicar exactamente cuáles items se seleccionaron.

```
public static void main(String[] args) {
      int n = 4:
     int W = 8:
     int values [] = \{15, 10, 9, 5\};
     int weights [] = \{1, 5, 3, 4\};
     //Tener cuidado: En la matriz los items se numeran
         \hookrightarrow 1...n y la capacidad de la mochila 1...W
     int A[][] = new int [n+1][W+1];
     //Aca se resuelve el problema. Asegurarse de tener
10
         \hookrightarrow los values y weights
      for (int i=1; i <= n; i++) {
11
        for (int x=0; x=0; x++) {
12
          if (weights [i-1] > x) {
13
            A[i][x] = A[i-1][x];
          } else {
15
            int p = A[i-1][x];
16
            int q = A[i-1][x-weights[i-1]] + values[i-1];
17
            A[i][x] = (p > q) ? p : q
18
```

```
20
21
22
      //El valor maximo que se puede obtener es A[n][W]
23
      int solution = A[n][W];
      //Si se quiere determinar cuales items se incluyeron
      boolean chosen [] = new boolean [n];
      int i = n;
      int j = W;
30
      \mathbf{while} (i > 0) 
        if(A[i][j] = A[i-1][j])
          i --:
        }else{
          chosen[i-1] = true;
          j = j-weights[i];
      //Si \ chosen[i] = true \ es \ porque \ i \ se \ incluyo
```

# 7. Teoría de números

# 7.1. Algoritmo de Euclides

Se utiliza para hallar el máximo común divisor (MCD) entre dos números. También se puede usar para hallar el mínimo común múltiplo (MCM).

```
public static int mcd(int a, int b){
    while(b != 0){
    int t = b;
    b = a % b;
    a = t;
    }
    return a;
}

//Dividir primero para evitar overflow en a*b
public static int mcm(int a, int b){
    return a * (b / mcd(a, b));
```

13

### 7.2. Verificar si un número es primo

Dependiendo del problema, puede que nos sirva la forma "fuerza bruta". Esta forma tiene una complejidad de  $O(\sqrt{n})$ . Sin embargo, si tenemos números de más de 64 bits (que no caben en un long) ya esta forma no es viable.

La clase Big Integer provee un método probabilístico para determinar si un número es primo. Si el número es compuesto, el método retona false siempre. Si el método retorna true, hay una probabilidad de  $1-\frac{1}{2^x}$  de que el número sea primo, donde x es un parámetro que se le pasa a la función. Generalmente un valor de x=10 está bien.

```
public static boolean isPrime(int x){
      if(x == 1) return false;
     if(x = 2) return true;
     if(x \% 2 == 0) return false;
     int s = (int) Math. ceil(Math. sqrt(x));
     for (int i=3; i \le s; i+=2)
        if (x \% i = 0) return false:
10
11
     return true;
12
13
14
   public static void main(String[] args) {
15
     isPrime (63); //true
16
     isPrime(99); //false
17
18
      //De hecho estos si caben en un int pero los pongo
         \hookrightarrow como ejemplo
      BigInteger a = new BigInteger ("104723");
20
      BigInteger b = new BigInteger("104727");
21
     a.isProbablePrime(10); //true
22
     b. isProbablePrime (10); //false
23
24
```

#### 7.3. Criba de Eratóstenes

Algoritmo para hallar los números primos menores o iguales a n. Su complejidad es  $O(n \log \log n)$ .

```
public static ArrayList<Integer> criba(int n){
      boolean marked [] = new boolean [n+1];
      marked[0] = true;
      marked[1] = true;
      ArrayList<Integer> primos = new ArrayList<Integer>()
      for (int i=2; i <= n; i++){
        if (! marked [ i ] ) {
          primos.add(i);
          //OJO: Si esta teniendo problemas de overflow,
              \hookrightarrow cambie la siquiente linea por i = 2*i
          int j = i*i;
          \mathbf{while}(i \le n)
            marked[j] = true;
            i = i+i;
16
17
      return primos;
```

# 7.4. Factorización prima de un número

Se busca expresar un número n como una multiplicación de factores primos, de la forma:

$$n = \prod p_i^{a_i} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$$

Previamente se debe hacer una Criba de Eratóstenes modificada. Verifique en la especificación de la entrada del problema cuál es el máximo número x que tendrá que factorizar, y haga la Criba hasta  $\sqrt{x}$ .

El método retorna un HashMap donde la *clave* es el factor primo  $p_i$  y el valor su multiplicidad  $a_i$ . Se puede modificar fácilmente para retornar una lista de todos los factores, o retornar la cantidad de factores.

Con algunas modificaciones, puede funcionar más o menos hasta  $n = 10^{12}$ .

```
static int menorFactor[];
static ArrayList<Integer> primos;

public static void main(String[] args) {
//Por ejemplo, si el mayor valor posible es 10000,
se hace la criba hasta 100
```

```
cribaFactores (100);
      HashMap<Integer, Integer> fac = factorizar (895);
      System.out.println(fac.toString());
10
    public static void cribaFactores(int n){
11
      menorFactor = new int [n+1];
12
      Arrays. fill (menorFactor, -1);
13
      primos = new ArrayList < Integer > ();
14
15
      for (int i=2; i <= n; i++)
16
        if(menorFactor[i] = -1)
17
          primos.add(i);
18
          //OJO: Si esta teniendo problemas de overflow,
              \hookrightarrow cambie la siquiente linea por j = 2*i
          int i = i * i;
20
          while (i \le n)
21
             if(menorFactor[j] == -1)
22
               menorFactor[j] = i;
23
               = j+i;
27
28
29
30
    public static HashMap<Integer, Integer> factorizar(int
31
      HashMap<Integer, Integer> factores = new HashMap<
32
         \hookrightarrow Integer, Integer >();
33
      if (n >= menorFactor.length) {
34
        for(int p : primos){
35
          if(n \% p == 0){
36
             int count = 0;
37
             while (n \% p = 0)
38
               n = n/p;
               count++;
40
41
             factores.put(p, count);
42
43
          if(n < menorFactor.length) break;</pre>
44
45
```

```
if (n >= menorFactor.length) {
    factores.put(n, 1);
    return factores;
}

while (n > 1) {
    int f = menorFactor[n];
    if (f == -1) {
        f = n;
    }

if (factores.containsKey(f)) {
        factores.put(f, factores.get(f)+1);
    } else {
        factores.put(f, 1);
    }

return factores;
}
```

#### 7.5. Fórmulas

Para  $n \geq 2$  es posible calcular algunas cosas partiendo de la factorización prima de n:

$$n = \prod p_i^{a_i} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$$

n=1 es un caso especial:

$$d(1) = \sigma(1) = \varphi(1) = 1$$

#### 7.5.1. Cantidad de divisores

$$d(n) = \prod (a_i + 1)$$

#### 7.5.2. Suma de divisores

$$\sigma(n) = \prod \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Esta función toma todos los divisores. Por ejemplo, los divisores de 12 son  $\{1,2,3,4,6,12\}$ . Por ende,  $\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28$ . Si se quiere la

suma de los divisores propios (es decir, los divisores excluyendo a n), basta con hallar:

$$s(n) = \sigma(n) - n$$

En el ejemplo anterior, s(12) = 28 - 12 = 16.

#### 7.5.3. Función $\varphi$ de Euler

Dos números son relativamente primos (o coprimos) si no tienen divisores en común (es decir, si su MCD es 1).  $\varphi(n)$  se define como la cantidad de enteros positivos menores a n y coprimos a n.

$$\varphi(n) = \prod (p_i - 1)p_i^{a_i - 1}$$

# 8. Combinatoria

#### 8.1. Permutaciones

Un conjunto de n elementos diferentes tiene n! permutaciones. El número máximo cuyo factorial cabe en un long de 64 bits es n=20. Más allá, se requiere usar BigInteger.

El siguiente código es para generar las permutaciones explícitamente. Se puede hacer hasta n=10.

```
static String elements [];
   static boolean p[];
   static LinkedList<String> permutation;
   public static void main(String[] args) {
     int n = 3;
     elements = new String[n];
     p = new boolean[n];
     permutation = new LinkedList<String>();
10
     elements [0] = A;
11
     elements [1] = "B";
12
     elements [2] = "C";
13
14
      generatePermutations();
15
16
17
   public static void generatePermutations() {
18
     int n = elements.length;
19
     if(permutation.size() == n)
20
```

```
System.out.println(permutation.toString());
}else{
    for(int i=0; i<n; i++){
        if(!p[i]){
            p[i] = true;
            permutation.addLast(elements[i]);
            generatePermutations();
            p[i] = false;
            permutation.pollLast();
        }
}
</pre>
```

# 8.2. Subconjuntos

Un conjunto de n elementos tiene  $2^n$  posibles subconjutos.

Si se busca generarlos, cada subconjunto puede representarse como un número b de n bits. El elemento k pertenece al subconjunto si el bit k de b está en 1. No es viable hacerlo para n>30.

### 8.3. Coeficientes binomiales

El número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n, está dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Sin embargo no es muy práctico usar esta fórmula ya que involucra factoriales. Se puede utilizar la recurrencia  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  para generar todos los coeficientes binomiales  $\binom{i}{i}$  para  $0 \le i, j \le n$ .

```
public static void main(String[] args) {
    int n = 10;
    long[][] C = new long[n][n];

for(int i=0; i<n; i++){
    C[i][0] = 1;
    for(int j=1; j<=i; j++){
        C[i][j] = C[i-1][j-1] + C[i-1][j];
    }
}</pre>
```

Este código funciona para  $n \leq 67$ . Más allá, se requiere usar BigInteger.

#### 8.4. Coeficientes multinomiales

Es el número de formas de particionar un conjunto de tamaño n en subconjuntos disjuntos de tamaño  $a_1, a_2, ..., a_m$ .

$$\binom{n}{a_1, a_2 \dots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \dots \cdot a_m!}$$

# 8.5. Multiconjuntos

Un multiconjunto es un conjunto que permite elementos repetidos. El número de multiconjuntos de cardinalidad k, con elementos tomados de un conjunto de cardinalidad n, se puede contar como:

$$\binom{n}{k} = \binom{k+n-1}{k}$$

También se puede usar una recurrencia:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{k} = 0 \text{ para } k > 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

#### 8.6. Particiones

Una partición de un conjunto es una colección de subconjuntos disjuntos, tales que la unión de todos ellos es el conjunto original. La cantidad de maneras diferentes de particionar un conjunto de n elementos en k partes se denota como S(n,k) (números de Stirling de tipo 2).

$$S(n,k) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & k = 0 \\ S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) & n \ge 1, k \ge 1 \end{cases}$$

#### 8.7. Desarreglos

Un desarreglo es una permutación que no "mapea" ningún elemento a sí mismo. Por ejemplo, 231 es un desarreglo de 123, pero 132 no lo es (ya que el 1 queda en la misma posición).

El número de desarreglos de un conjunto de n elementos es:

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}$$

Puede ser más práctico usar la siguiente recurrencia:

$$D_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) & n \ge 2 \end{cases}$$

El máximo  $D_n$  que cabe en un long es con n=20.

#### 8.8. Números de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Sin embargo, puede ser más práctico usar la siguiente recurrencia:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \frac{2(2n-1)C_{n-1}}{(n+1)}$$

El número  $C_n$  tiene muchas interpretaciones. Entre ellas:

- lacktriangle El número de árboles binarios diferentes con n vértices
- $\blacksquare$  El número formas de hacer una expresión con n pares de paréntesis balanceados

- $\blacksquare$  El número de formas de triangular un polígono con n+2 lados
- $\blacksquare$  El número de caminos monótonos que no pasan sobre la diagonal en una cuadrícula de  $n \cdot n$ .

El  $C_n$  más grande que cabe en un long es con n=33.

#### 9. Otros

# 9.1. Ordenamiento de Arrays y Listas (ascendente y descendente)

Cuando necesite ordenar un vector o una lista, utilice los métodos .sort() que tiene Java. El algoritmo que utilizan es QuickSort y su complejidad es  $O(n \log n)$ .

```
public static void main(String[] args) {
   int n = 10;
   String v[] = new String[n];
   ArrayList<Integer > l = new ArrayList<Integer >();

Arrays.sort(v);
   Collections.sort(l);
   //Collections.sort() tambien ordena LinkedList
}
```

## 9.2. Cola de Prioridad

Cola en la que la cabeza siempre es el menor elemento presente. Las operaciones add() y poll() son  $O(\log n)$ . La operación peek() es O(1).

También se puede invertir, haciendo que la cabeza siempre sea el mayor elemento, pasando el parámetro Collections.reverseOrder().

# 9.3. Interfaz Comparable

En ocasiones se puede necesitar ordenar un vector o lista de un tipo de datos definido por el usuario (clase), o utilizar una cola de prioridad. Para hacer esto, la clase debe implementar la interfaz Comparable de Java.

El método compareTo() debe retornar:

- Negativo si this < obj.
- $\bullet$  0 si this = obj.
- Positivo si this > obj.

Por ejemplo, se tiene una clase Persona con dos campos: nombre y edad. Se quiere ordenar una lista de objetos tipo Persona de menor a mayor edad.

```
class Persona implements Comparable < Persona > {
   public String nombre;
    public int edad:
    public Persona (String nombre, int edad) {
      \mathbf{this} . nombre = nombre;
      \mathbf{this}.\,\mathrm{edad} = \mathrm{edad};
    public int compareTo(Persona obj) {
      return this.edad - obj.edad:
10
11 }
13 class Main {
    public static void main(String[] args) {
      ArrayList<Persona>p = new ArrayList<Persona>();
      p.add(new Persona("Carlos", 20));
      p.add(new Persona("Juan", 20));
      Collections.sort(p);
19
20 }
```

#### 9.4. Imprimir números decimales redondeados

Generalmente basta con esta función de Java para redondear correctamente números decimales.

```
public static void main(String[] args) {
double d = 9.2651659;
//Por ejemplo, para redondear a 4 decimales
System.out.format("%.4f\n", d);
//Hay que poner el \n si se quiere imprimir tambien

un salto de linea
}
```

## 9.5. BufferedReader y BufferedWriter

Scanner es sencillo de utilizar pero es lento. Se recomienda utilizar siempre BufferedReader para leer entradas.

En algunas ocasiones también se necesitará un modo más rápido que System.out.println() para imprimr. BufferedWriter es más rápido, nunca está de más usarlo.

```
//Solo lee por lineas
      //Ciclo hasta end of input
      String s;
      \mathbf{while}((\mathbf{s} = \mathbf{br.readLine}()) != \mathbf{null}) \{
        String l[] = s.split("");
      //Ciclo con numero de casos
      int t = Integer.parseInt(br.readLine());
      for (int i=0; i < t; i++){
        String 1 [] = br.readLine().split("");
13
14
15
      BufferedWriter bw = new BufferedWriter(new
          → OutputStreamWriter(System.out));
      //No pone un salto de linea al final. Por tanto, se
          \hookrightarrow debe poner \n cuando sea necesario
      bw. write ("Hola_mundo\n");
      //El flush es el que realmente imprime en consola.
          \hookrightarrow En lo posible, hacer flush solo una vez, al
          → final de procesar todos los casos
      bw.flush();
21
```