1. Notas previas

- Se usarán algunas clases estándar de Java para simplificar las cosas
- No se presenta el código implementado de todas las fórmulas, ya que muchas pueden ser programadas fácilmente
- π está definido en Java en la constante Math.PI
- Se trabajará siempre con los ángulos en radianes. Para convertir un ángulo α en grados, en uno en radianes θ: $\theta = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$
- Se harán las comparaciones entre números de punto flotante usando un épsilon. El enunciado del problema debe establecer el margen de error. Este es el épsilon, que se define como variable estática de clase (*public static double eps = 1e-6;*).

2. Puntos

Para representar un punto se usa la clase de Java *Point2D.Double*

```java
Point2D.Double o = new Point2D.Double(); // El punto (0, 0)
Point2D.Double p = new Point2D.Double(0.5, 2.75);
```

2.1. Distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se puede usar un método de Java:

```java
double d = o.distance(p);
```

También hay un método que devuelve el cuadrado de la distancia, para evitar sacar la raíz cuadrada y perder precisión:

```java
double dSquare = o.distanceSq(p);
```

2.2. Rotar un punto

Se rota un punto (x, y) por un ángulo θ en sentido antihorario.

```java
public static Point2D.Double rotar(Point2D.Double p, double theta){
  double x = p.getX() * Math.cos(theta) - p.getY() * Math.sin(theta);
  double y = p.getX() * Math.sin(theta) + p.getY() * Math.cos(theta);
  return new Point2D.Double(x, y);
}
```

3. Vectores

Sean dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$. El vector que va desde p_1 hacia p_2 se define como:

$$V = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

3.1. Magnitud de un vector

$$|V| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

3.2. Dirección de un vector

El ángulo entre un vector $V = \langle v_x, v_y \rangle$ y los ejes x y y es:

$$\cos\theta_x = \frac{v_x}{|V|}, \quad \cos\theta_y = \frac{v_y}{|V|}$$

3.3. Vectores paralelos y perpendiculares

```java
public static int vectoresParalelosPerpend(double[] a, double[] b){
  if(Math.abs(a[1]*b[0] - a[0]*b[1]) < eps){
    return 1; // Son paralelos
  } else if(Math.abs(a[0]*b[0] + a[1]*b[1]) < eps){
    return 2; // Son perpendiculares
  }else{
    return 0; // Ni paralelos ni perpendiculares
  }
}
```

3.4. Ángulo entre vectores

El menor ángulo entre dos vectores $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ es:

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|A||B|}$$

4. Líneas

Para representar una recta definida por dos puntos se usa la clase de Java *Line2D.Double*

```
    Point2D.Double p1 = new Point2D.Double(1, 0);
    Point2D.Double p2 = new Point2D.Double(3, 5);
    Line2D.Double l = new Line2D.Double(p1, p2);
```

4.1. Distancia de un punto a una recta

```
    Point2D.Double p3 = new Point2D.Double(-2, -1);
    double dLinea = l.ptLineDist(p3);
```

4.2. Distancia de un punto a un segmento

```
    double dSegmento = l.ptSegDist(p3);
```

4.3. Distancia entre dos segmentos

Sean dos segmentos s_1, s_2. La distancia más corta entre ellos es:

```
public static double distanciaSegmentos(Line2D.Double s1, Line2D.Double s2){
  double[] d = new double[4];
  d[0] = s2.ptSegDist(s1.getP1());
  d[1] = s2.ptSegDist(s1.getP2());
  d[2] = s1.ptSegDist(s2.getP1());
  d[3] = s1.ptSegDist(s2.getP2());
  double min = Double.MAX_VALUE;
  for(int i=0; i<4; i++){
    if(d[i] < min){
      min = d[i];
    }
  }
  return min;
}
```

4.4. Verificar si dos rectas son paralelas o perpendiculares

Se puede hacer utilizando vectores, pero con este método no se puede especificar el punto de intersección, o determinar si las dos rectas son la misma.

```
// Usa el metodo de vectores paralelos y perpendiculares
public static int lineasParalelasPerpend(Line2D.Double l1, Line2D.Double l2){
  double[] v1 = {l1.getX2()-l1.getX1(), l1.getY2()-l1.getY1()};
  double[] v2 = {l2.getX2()-l2.getX1(), l2.getY2()-l2.getY1()};
  return vectoresParalelosPerpend(v1, v2);
}
```

4.5. Interseción de dos rectas

Si las dos rectas no son paralelas, se intersectan en un punto. Se halla la ecuación general de ambas rectas y se soluciona un sistema lineal de ecuaciones para hallar el punto de intersección.

La ecuación general de una recta tiene la forma $Ax + By + C = 0$.

```
public static double[] ecuacionGeneral(Line2D.Double l){
  double[] coef = new double[3];
  Point2D p1 = l.getP1();
  Point2D p2 = l.getP2();
  if(Math.abs(p1.getX() - p2.getX()) < eps){
    coef[0] = 1.0;
    coef[1] = 0.0;
    coef[2] = -p1.getX();
  }else{
    coef[0] = -(p1.getY() - p2.getY()) / (p1.getX() - p2.getX());
    coef[1] = 1.0;
    coef[2] = -coef[0]*p1.getX() - p1.getY();
  }
  return coef;
}

public static void interseccion(Line2D.Double l1, Line2D.Double l2){
  double[] e1 = ecuacionGeneral(l1);
  double[] e2 = ecuacionGeneral(l2);
  if(Math.abs(e1[0]-e2[0]) < eps && Math.abs(e1[1]-e2[1]) < 0){
    // Las lineas son paralelas
    if(Math.abs(e1[2]-e2[2]) < eps){
      // Las lineas son la misma
    }
  }else{
    // Las lineas se intersectan
```

```
      double x = (e2[1]*e1[2] - e1[1]*e2[2]) / (e2[0]*e1[1] - e1[0]*e2[1]);
      if(Math.abs(e1[1]) > eps){
        double y = -(e1[0]*x + e1[2]);
      }else{
        double y = -(e2[0]*x + e2[2]);
      }
    }
  }
```

4.6. Verificar si tres puntos son colineales

Se puede usar para verificar si el punto p_3 pertenece a la recta definida por los puntos p_1 y p_2.

```
public static boolean colineales(Point2D.Double p1, Point2D.Double p2, Point2D.Double p3){
  double det = p1.getX()*(p2.getY()-p3.getY()) + p2.getX()*(p3.getY()-p1.getY()) + p3.getX()*(p1.getY()-p2.getY());
  if(Math.abs(det) < eps){
    return true;
  }else{
    return false;
  }
}
```

5. Círculos

Un círculo se define con un centro (x_0, y_0) y un radio r.

5.1. Área y perímetro

Área: πr^2
Perímetro: $2\pi r$

5.2. Determinar si un punto está dentro o fuera de un círculo

```
public static int puntoEnCirculo(Point2D.Double c, double r, Point2D.Double p){
  double r2 = r*r;
  double dist = c.distanceSq(p);
  if(Math.abs(dist - r2) < eps){
    return 0; // En el borde
  }else if(dist > r2){
    return 1; // Afuera
  }else{
    return 2; // Adentro
  }
}
```

5.3. Arco, sector, cuerda y segmento

Longitud del Arco: $r\theta$
Área del Sector: $\frac{r^2\theta}{2}$
Longitud de la Cuerda: $2r \cdot \sin(\frac{\theta}{2})$
Área del Segmento: $\frac{r^2}{2} \cdot (\theta - \sin\theta)$

5.4. Círculo formado por 3 puntos

Sean tres puntos p_1, p_2 y p_3. Si no son colineales, existe un círculo que pasa por los tres. Se hallan los coeficientes de la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, de los cuales se puede extraer el radio y el centro de la misma.

```
public static void circuloPuntos(Point2D.Double p1, Point2D.Double p2, Point2D.Double p3){
  double x1 = p1.getX(), y1 = p1.getY();
  double x2 = p2.getX(), y2 = p2.getY();
  double x3 = p3.getX(), y3 = p3.getY();

  double det = x1*(y2-y3) + x2*(y3-y1) + x3*(y1-y2);
  if(Math.abs(det) < eps){
    // Los puntos son colineales, no existe circulo que pase por los 3
  }else{
    double k1 = -(x1*x1) - (y1*y1);
    double k2 = -(x2*x2) - (y2*x2);
    double k3 = -(x3*x3) - (y3*y3);

    double d1 = k1*(y2-y3) + k2*(y3-y1) + k3*(y1-y2);
    double d2 = x1*(k2-k3) + x2*(k3-k1) + x3*(k1-k2);
    double d3 = x1*(y2*k3 - y3*k2) + x2*(y3*k1 - y1*k3) + x3*(y1*k2 - y2*k1);

    double A = d1/det;
    double B = d2/det;
    double C = d3/det;
```

```
        // Los parametros del circulo
        double x0 = -A/2;
        double y0 = -B/2;
        double r = 0.5 * Math.sqrt(A*A + B*B - 4*C*C);
    }
}
```

5.5. Recta tangente a un círculo

Es posible hallar la ecuación general de la recta tangente en un punto (x_1, y_1) a una circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio r.

Sean $w = x_1 - x_0$ y $t = y_1 - y_0$. La ecuación general de la recta tangente es:

$$wx + ty + (-wx_0 - ty_0 - r^2) = 0$$

6. Triángulos

6.1. Desigualdad triangular

Todo triángulo cumple las siguientes desigualdades:

$$a + b > c \qquad a + c > b \qquad b + c > a$$

6.2. Área de un triángulo dados sus lados

Sea el s el semiperímetro del triángulo:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

El área del triángulo es (fórmula de Herón):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

6.3. Área de un triángulo dados sus puntos

Si se tienen las coordenadas (x_i, y_i) de los tres puntos que definen un triángulo, su área es:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

6.4. Círculo inscrito y circunscrito

$$r_i = \frac{A}{s}, \quad r_c = \frac{abc}{4A}$$

6.5. Ley del seno y del coseno

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

7. Polígonos

Un polígono de n puntos se representa como un vector de n posiciones de tipo *Point2D.Double*.

Se asume por defecto que los puntos están ordenados en sentido antihorario. Si el polígono no está ordenado, estos algoritmos retornan basura. Habría que ordenarlo primero.

7.1. Perímetro

```
public static double perimetro(Point2D.Double[] poligono) {
  int n = poligono.length;
  double p = 0.0;
  for(int i=0; i<n; i++) {
    int j = (i+1)%n;
    p += poligono[i].distance(poligono[j]);
  }
  return p;
}
```

7.2. Área

El algoritmo solo sirve para polígonos simples (que no se intersectan a sí mismos). Si el polígono está ordenado en sentido horario, retorna el área negativa.

```
public static double area(Point2D.Double[] poligono) {
  int n = poligono.length;
  double a = 0.0;
  for(int i=0; i<n; i++) {
    int j = (i+1)%n;
    a += poligono[i].x*poligono[j].y - poligono[j].x*poligono[i].y;
  }
```

```java
    return a/2.0;
}
```

7.3. Centroide

Es el "centro de masa" de un polígono. Este punto es la posición media de todos los puntos del polígoono. Si se dibujara el polígono en papel y se recortara, se podría balancear en un palillo ubicado en el centroide.

El algoritmo sólo sirve para polígonos simples.

```java
public static Point2D.Double centroide(Point2D.Double[] poligono){
  int n = poligono.length;
  double a = area(poligono);
  double cx = 0.0, cy = 0.0;
  for(int i=0; i<n; i++) {
    int j = (i+1)%n;
    cx += (poligono[i].x+poligono[j].x)*(poligono[i].x*poligono[j].y - poligono[j].x*poligono[i].y);
  }
  for(int i=0; i<n; i++) {
    int j = (i+1)%n;
    cy += (poligono[i].y+poligono[j].y)*(poligono[i].x*poligono[j].y - poligono[j].x*poligono[i].y);
  }
  cx = cx / (6*a);
  cy = cy / (6*a);
  return new Point2D.Double(cx, cy);
}
```

7.4. Verificar si un polígono es convexo

```java
// Retorna positivo si p1,p2,p3 hacen un giro a la izquierda
// Retorna negativo si p1,p2,p3 hacen un giro a la derecha
// Retorna 0 si p1,p2,p3 son colineales
public static int giro(Point2D.Double p1, Point2D.Double p2, Point2D.Double p3){
  double det = p1.x*(p2.y-p3.y) + p2.x*(p3.y-p1.y) + p3.x*(p1.y-p2.y);
  if(Math.abs(det) < eps){
    return 0;
  }else if(det > 0){
    return 1;
  }else {
    return -1;
  }
}

public static boolean esConvexo(Point2D.Double[] poligono){
  int n = poligono.length;
  boolean izq = giro(poligono[0], poligono[1], poligono[2]) >= 0;
  for(int i=1; i<n; i++){
    int j = (i+1) %n;
    int k = (i+2) %n;
    int z = giro(poligono[i], poligono[j], poligono[k]);
    if((z >= 0) != izq) return false;
  }
  return true;
}
```

7.5. Verificar si un punto está dentro de un polígono

Funciona para polígonos cóncavos y convexos.

```java
public static double angulo(Point2D.Double p1, Point2D.Double p2, Point2D.Double p3) {
  double[] v1 = {p1.x-p2.x, p1.y-p2.y};
  double[] v2 = {p3.x-p2.x, p3.y-p2.y};
  double m1 = Math.sqrt(v1[0]*v1[0] + v1[1]*v1[1]);
  double m2 = Math.sqrt(v2[0]*v2[0] + v2[1]*v2[1]);
  double theta = (v1[0]*v2[0] + v1[1]*v2[1]) / (m1*m2);
  return Math.acos(theta);
}

// Usa tambien el metodo 'giro' definido anteriormente
public static boolean puntoEnPoligono(Point2D.Double[] poligono, Point2D.Double a) {
  int n = poligono.length;
  double anguloTotal = 0.0;
  for(int i=0; i<n; i++) {
    int j = (i+1) %n;
    if(giro(poligono[i], a, poligono[j]) == 1) {
      anguloTotal += angulo(poligono[i], a, poligono[j]);
    }else {
```

```java
        anguloTotal -= angulo(poligono[i], a, poligono[j]);
      }
    }
    if(Math.abs(Math.abs(anguloTotal) - 2*Math.PI) < eps) {
      return true;
    }else {
      return false;
    }
  }
```

7.6. Convex Hull

Algoritmo *Andrew's Monotone Chain*. Toma un conjunto de n puntos y halla su envolvente convexa, que es el polígono convexo más pequeño que los encierra a todos. La envolvente convexa es un subconjunto de los n puntos.

El algoritmo tiene una complejidad de $O(n \log n)$.

```java
// Usa el metodo 'giro' definido anteriormente
public static Point2D.Double[] convexHull(Point2D.Double[] puntos) {
  int n = puntos.length;
  int k = 0;
  Point2D.Double[] hull = new Point2D.Double[2 * n];

  Arrays.sort(puntos, new Comparator<Point2D.Double>() {
    @Override
    public int compare(Point2D.Double p1, Point2D.Double p2) {
      if (Math.abs(p1.x - p2.x) < eps) {
        if(Math.abs(p1.y - p2.y) < eps) return 0;
        else if(p1.y < p2.y) return -1;
        else return 1;
      } else {
        if(p1.x < p2.x) return -1;
        else return 1;
      }
    }
  });

  // Lower hull
  for (int i=0; i<n; i++) {
    while (k >= 2 && giro(hull[k-2], hull[k-1], puntos[i]) <= 0) {
      k--;
    }
    hull[k] = puntos[i];
    k++;
  }

  // Upper hull
  int t = k+1;
  for (int i=n-2; i>=0; i--) {
    while (k >= t && giro(hull[k-2], hull[k-1], puntos[i]) <= 0) {
      k--;
    }
    hull[k] = puntos[i];
    k++;
  }
  if (k > 1) {
    hull = Arrays.copyOfRange(hull, 0, k-1); // Remove non-hull vertices after k
  }

  return hull;
}
```