V103 - Biegung elastischer Stäbe

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.10.2018, Abgabe: 06.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Ziel dieses Versuches ist es, die Elastizitätsmodule verschiedener Stäbe durch Messung ihrer Biegung zu bestimmen.

2 Theorie

Die Spannung ist die Kraft auf einen Körper pro Flächeneinheit. Die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, ist die Normalspannung σ. Ihre oberflächenparallele Komponente heißt Tangentialspannung. Das Hookesche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen der Spannung σ, die am Körper angreift, und der Deformation des Körpers dar:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

E ist dabei das Elastizitätsmodul. Das Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante, die anhand der Deformation eines Körpers bestimmt werden kann. Eine Art der Deformation ist die Biegung. Sie entsteht, wenn eine Kraft, wie in Abbildung 1 und in Abbildung 2 gezeigt, auf einen Körper wirkt. Zunächst wird die Berechnung der Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung beschrieben. Die Durchbiegung $D(x)$ bezeichnet die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen dem belasteten und unbelasteten Zustand des Stabes. Es wird eine Drehmomentgleichung aufgestellt, um $D(x)$ zu bestimmen. Die Zug- und Druckspannungen, die an der Querschnittsfläche Q angreifen, sind entgegesetzt gleich und bewirken deshalb ein Drehmoment M_σ:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq$$

y ist der Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser. Die neutrale Faser ist die Fläche, in der keine Spannungen auftreten. Ihre Länge ändert sich bei der Biegung folglich nicht. Ein weiteres Drehmoment M_F entsteht durch die Kraft auf einen senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt. Es verdreht den Querschnitt aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage. Die Deformation des Körpers stellt sich so ein, dass die Drehmomente an jeder Stelle x übereinstimmen:

$$M_F = M_\sigma.$$

Dabei ist

$$M_F = F(L-x),$$

da die Kraft F über den Hebelarm $L-x$ an Q angreift. Damit ist das Gleichgewicht der Drehmomente durch

$$\int_Q y\sigma(y)dq = F(L-x) \tag{2}$$

gegeben. Mit dem Hookeschen Gesetz (1) wird die Normalspannung $\sigma(y)$ mittels

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$$

berechnet. Hier ist Δx die Länge eines kurzen Stabstücks und δx die Längenänderung der Faser. Es gilt außerdem

$$\delta x = y\Delta\phi = y\frac{\Delta x}{R},$$

wobei R der Krümmungsradius der Faser bei x ist. Damit ist

$$\sigma(y) = E\frac{y}{R} = Ey\frac{d^2D}{dx^2},$$

da für geringe Kurvenkrümmungen

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2D}{dx^2}$$

gilt, falls

$$(\frac{dD}{dx})^2 << 1$$

ist. Für (2) ergibt sich damit:

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2 dq = F(L-x). \tag{3}$$

Dabei ist

$$I = \int_Q y^2 dq(y)$$

das Flächenträgheitsmoment. Integriert man (3) und stellt die Gleichung nach $D(x)$ um, erhält man für die Biegung bei einseitiger Einspannung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{4}$$

Diese Gleichung ist für $0 \leq x \leq L$ definiert. Die Integrationskonstanten verschwinden, weil $D(0) = 0$ und $\frac{dD}{dx} = 0$ sein müssen.
Liegen beide Stabenden auf und lässt man in der Mitte des Stabes eine Kraft angreifen, greift an der Querschnittsfläche die Kraft $\frac{F}{2}$ mit dem Hebelarm x an. Für die erste Stabhälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt für das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x.$$

Für die zweite Hälfte $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x).$$

Damit ergibt sich hier für (3)

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{5}$$

und

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L-x) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{6}$$

Integriert man beide Gleichungen, ergibt sich

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

und

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad .$$

Da die Biegekurve in der Mitte des Stabes eine horizontale Tangente haben muss, muss für die Konstanten gelten:

$$C = \frac{F}{EI}\frac{L^2}{16}$$

und

$$C' = \frac{3}{16}\frac{F}{EI}L^2.$$

Setzt man die Konstanten in (5) und (6) ein und integriert die Ausdrücke, erhält man die Gleichungen für die Biegung bei zweiseitiger Auflage des Stabes:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{7}$$

und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{8}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden hier, weil $D(0) = 0$ und $D(L) = 0$ sein müssen. Die Biegung eines elastischen Stabes kann also durch (4), (7) und (8) bestimmen.
Weil die Stäbe nicht als exakt gerade angenommen werden können, muss die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen werden. Die Biegung des Stabes durch die Last ist dann

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \tag{9}$$

3 Durchführung

Die Apparatur ist in Abbildung xy zu sehen. Die Stäbe werden entweder einseitig eingeklemmt oder zweiseitig auf den Punkten A und B gelagert. Die Stäbe werden belastet, indem ein Gewicht entweder am Stabende oder in der Stabmitte angehängt wird. Die Biegung wird mit zwei Messuhren, die sich auf einer Längen-Skala befinden und verschiebbar sind, sodass die Biegung an verschiedenen Stellen x bestimmt werden kann, gemessen. Bei Messuhren wird die Verschiebung eines Objektes mittels eines federnden Taststiftes gemessen. Zunächst wird jeweils für zwei einseitig eingespannte Stäbe die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen. Danach wird an das Stabende ein Gewicht angehängt. Die Biegung wird mit einer der Messuhren gemessen. Ein dritter Stab wird zweiseitig aufgelegt. Es wird wieder zunächst die Biegung ohne Gewicht und dann mit

Gewicht gemessen. Hier wird für die erste Hälfte des Stabes $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ die linke Messuhr und für die zweite Hälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ die rechte Messuhr verwendet. Zuletzt werden die Längen, Breiten, beziehungsweise Durchmesser und Massen der Stäbe, sowie die Masse des angehängten Gewichts bestimmt.

4 Auswertung

5 Auswertung

Tabelle 1

$D(x)/mm$ ohne Gewicht	$D(x)/mm$ mit Gewicht	x/cm
0,98	1,10	3,00
1,04	1,10	5,00
1,11	1,17	8,00
1,16	1,17	11,00
1,12	1,18	14,00
1,12	1,19	17,00
1,10	1,19	20,00
1,03	1,21	23,00
0,93	1,23	26,00
0,80	1,24	29,00
0,68	1,25	32,00
0,58	1,25	35,00
0,40	1,25	38,00
0,20	1,26	41,00
0,08	1,26	44,00
−0,10	1,26	47,00
−0,38	1,26	49,00

Tabelle 2

$D(x)/m$ Differenz	$Lx^2 - x^3/3/m^3$
0,000 12	0,000 48
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,001 30
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,003 27
$1{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,006 07
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,009 63
$7{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,013 91
$9{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,018 85
0,000 18	0,024 40
0,000 30	0,030 51
0,000 44	0,037 12
0,000 57	0,044 17
0,000 67	0,051 61
0,000 85	0,059 40
0,001 06	0,067 46
0,001 18	0,075 76
0,001 36	0,084 24
0,001 64	0,089 96

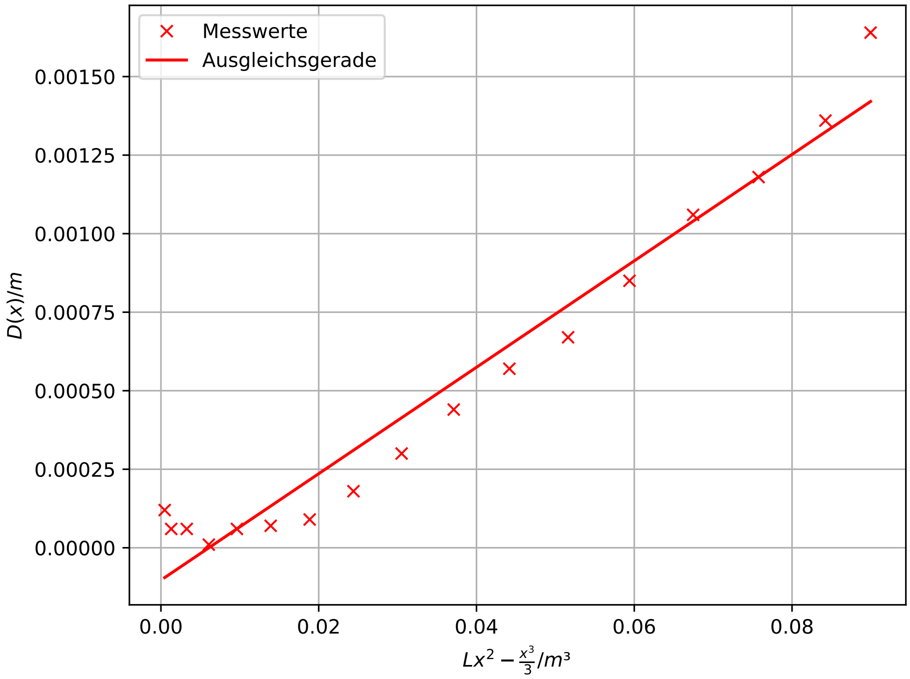

Abbildung 1: Plot.

Tabelle 3

$D(x)/mm$ ohne Gewicht	$D(x)/mm$ mit Gewicht	x/cm
0,87	0,79	3,00
0,91	0,77	5,00
0,98	0,68	8,00
1,01	0,50	11,00
1,03	0,27	14,00
1,03	−0,05	17,00
1,04	−0,42	20,00
0,96	−1,30	26,00
0,88	−1,83	29,00
0,82	−2,42	32,00
0,69	−3,13	35,00
0,55	−3,71	38,00
0,36	−4,41	41,00
0,10	−5,23	44,00
−0,15	−6,16	47,00
−0,33	−6,56	49,00

Tabelle 4

$D(x)/m$ Differenz	$Lx^2 - x^3/3/m^3$
$8{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,000 45
0,000 14	0,001 24
0,000 30	0,003 11
0,000 51	0,005 75
0,000 76	0,009 12
0,001 08	0,013 16
0,001 46	0,017 81
0,002 26	0,028 75
0,002 71	0,034 93
0,003 24	0,041 51
0,003 82	0,048 43
0,004 26	0,055 64
0,004 77	0,063 09
0,005 33	0,070 73
0,006 01	0,078 49
0,006 23	0,083 71

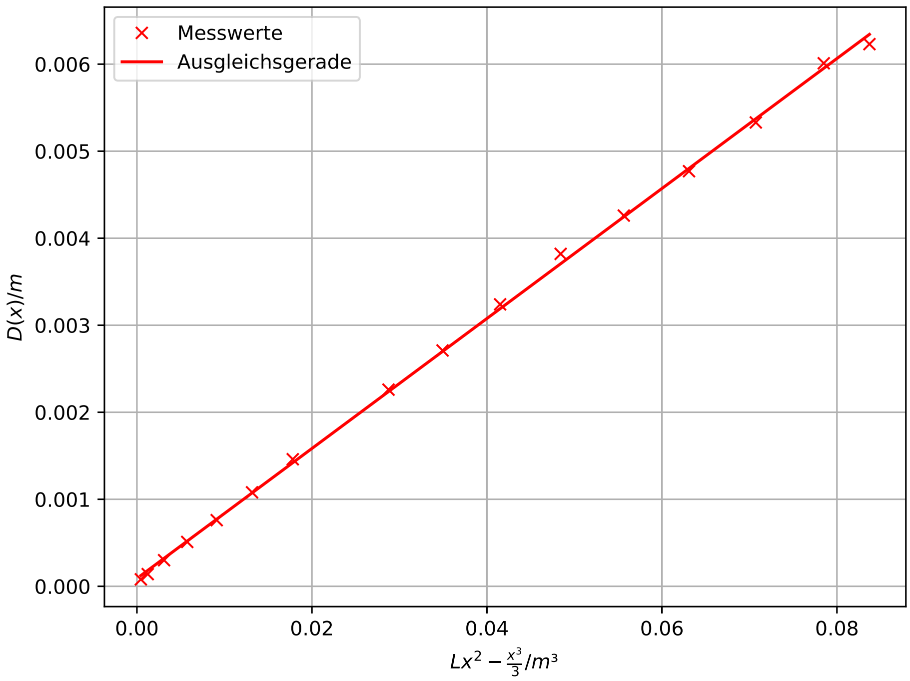

Abbildung 2: Plot.

Tabelle 5

$D(x)/mm$ ohne Gewicht	$D(x)/mm$ mit Gewicht	x/cm
0,75	0,71	3,00
0,79	0,72	5,00
0,82	0,72	8,00
0,83	0,70	11,00
0,80	0,60	14,00
0,74	0,49	17,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,45	0,05	26,00

Tabelle 6

$D(x)/m$ Differenz	$3L^2x - 4x^3/m^3$
$4{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,028 22
$7{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,046 71
$10{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,073 49
0,000 13	0,098 53
0,000 20	0,121 21
0,000 25	0,140 86
0,000 32	0,156 83
0,000 36	0,168 49
0,000 32	0,156 83
0,000 36	0,168 49
0,000 40	0,175 18

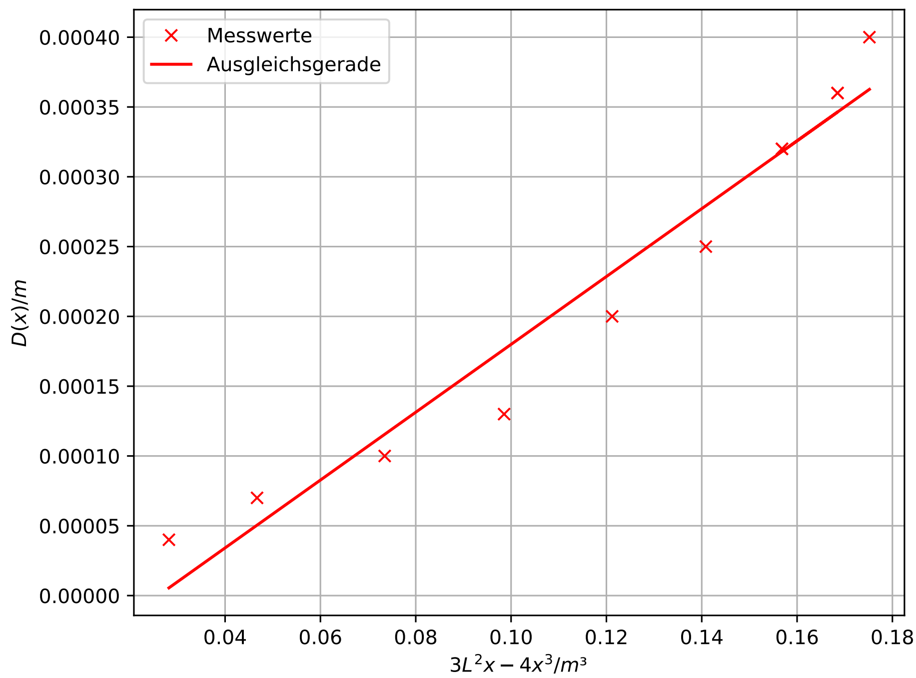

Abbildung 3: Plot.

Tabelle 7

$D(x)/mm$ ohne Gewicht	$D(x)/mm$ mit Gewicht	x/cm
−1,01	−1,75	29,00
−0,97	−1,79	32,00
−1,08	−1,89	35,00
−1,16	−1,98	38,00
−1,35	−2,08	41,00
−1,48	−2,13	44,00
−1,58	−2,15	47,00
−1,67	−2,12	50,00
−1,76	−2,06	53,00

Tabelle 8

$D(x)/m$ Differenz	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3/^3m$
0,000 74	0,176 26
0,000 82	0,171 55
0,000 81	0,161 64
0,000 82	0,147 17
0,000 73	0,128 80
0,000 65	0,107 16
0,000 57	0,082 90
0,000 45	0,056 69
0,000 30	0,029 15

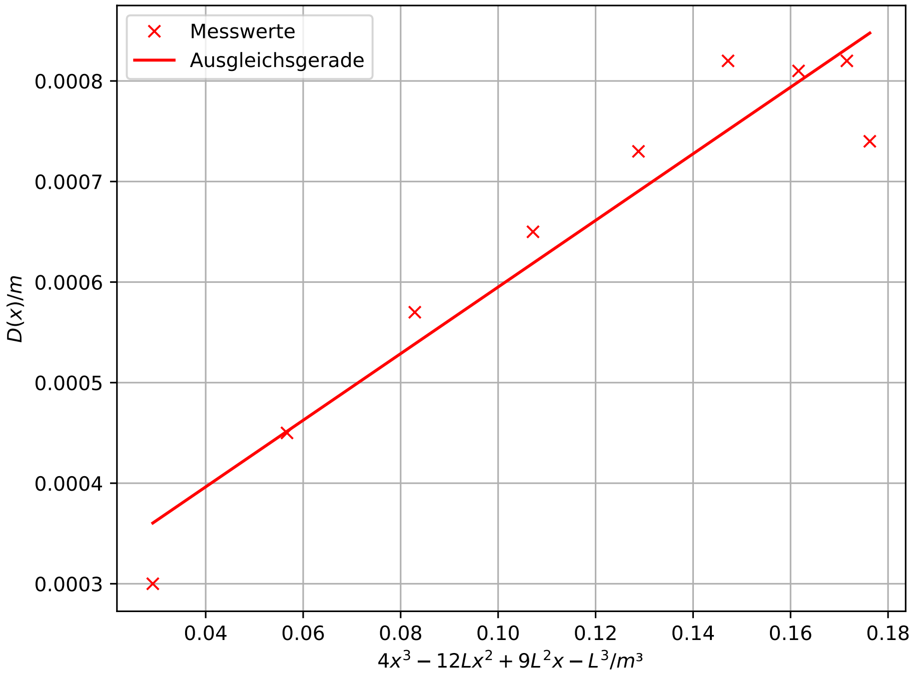

Abbildung 4: Plot.

6 Diskussion

7 Literatur