

# **V504 - Thermische Elektronenemission**

Jan Herdieckerhoff  
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff  
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 23.04.2019, Abgabe: 30.04.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Austrittsarbeit und die Energieverteilung der Leitungselektronen . . . . .	3
2.2	Berechnung der Sättigungsstromdichte bei der thermischen Elektronen- emission . . . . .	4
2.3	Hochvakuum-Diode . . . . .	4
2.4	Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung . . . . .	5
2.5	Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode . . . . .	5
2.6	Kennlinie der Hochvakuumdiode . . . . .	6
2.7	Temperaturberechnung . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
4.1	Kennlinienschar der Hochvakuumdiode . . . . .	8
4.2	Anlaufstromgebiet der Diode . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
5.1	Kennlinien der Hochvakuumdiode . . . . .	9
5.2	Gültigkeitsbereich des Raumladungsgesetzes . . . . .	15
5.3	Anlaufstromgebiet der Diode und Bestimmung der Kathodentemperatur .	16
5.4	Leistungsbilanz des Heizstromkreises und Abschätzung der Kathodentem- peratur . . . . .	18
5.5	Austrittsarbeit für Wolfram . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>19</b>
6.1	Kennlinien der Hochvakuumdiode . . . . .	19
6.2	Gültigkeitsbereich des Raumladungsgesetzes . . . . .	19
6.3	Anlaufstromgebiet der Diode und Bestimmung der Kathodentemperatur .	20
6.4	Leistungsbilanz des Heizstromkreises und Abschätzung der Kathodentem- peratur . . . . .	20
6.5	Austrittsarbeit für Wolfram . . . . .	20
6.6	Fazit . . . . .	20
	<b>Literatur</b>	<b>21</b>

## 1 Ziel

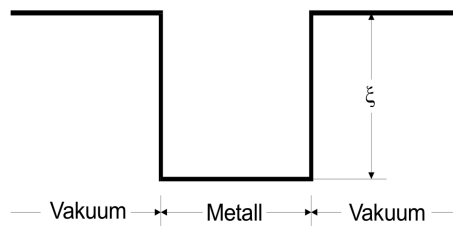
Das Ziel dieses Versuchs ist es, aus einer Metalloberfläche (Wolfram) durch Erwärmung freie Elektronen zu erzeugen und daraus die Temperaturabhängigkeit dieses Vorgangs sowie die Austrittsarbeit für Wolfram zu bestimmen.

Es soll außerdem die Hochvakuumdiode behandelt werden, indem die Kennlinien dieser Diode untersucht werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Austrittsarbeit und die Energieverteilung der Leitungselektronen

Atome sind in Metallen auf ihren Kristallgitterplätzen ionisiert. Es gibt dabei freie Elektronen außerhalb der periodischen Gitter. Diese werden als Leitungselektronen bezeichnet. Das Gitterpotential kann in grober Näherung als konstant betrachtet werden. Das Metallinnere hat ein positives Potential, das vom Außenbereich um einen Betrag  $\phi$  verschieden ist. Man kann dies wie in Abb. 1 als Potentialtopf darstellen. Wenn ein Elektron diesen Topf verlassen möchte, muss es gegen das Potential  $\zeta$  anlaufen können. Es muss also die Austrittsarbeit  $e_0\zeta$  aufbringen können.



**Abbildung 1:** Potentialtopf-Modell eines Metalls. [2]

Aus der Quantentheorie ergibt sich, dass bei Zimmertemperatur die Fermische Grenzenergie  $\zeta$  für alle Metalle größer ist als  $kT$ . Wie in Abb. 2 zu erkennen, muss ein Elektron mindestens die Energie  $\zeta + e_0\Phi$  erbringen, um sich von der Metalloberfläche zu lösen. Als Näherung gilt

$$f(E) = \exp \frac{\zeta - E}{kT} \quad (1)$$

für die Wahrscheinlichkeitsverteilung, dass ein Elektron die Oberfläche verlässt.

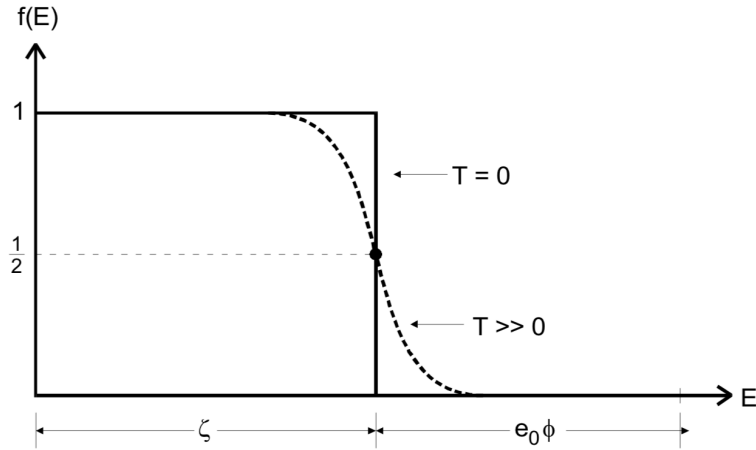


Abbildung 2: Verlauf der Fermi-Diracschen Verteilungsfunktion. [2]

## 2.2 Berechnung der Sättigungsstromdichte bei der thermischen Elektronenemission

Die Sättigungsstromdichte ist die Zahl der Elektronen, die pro Zeit- und Flächeneinheit aus der Metalloberfläche austreten. Diese ist abhängig von der Temperatur. Mittels einiger Umformungen und Zusammenhänge aus der Quantenmechanik ergibt sich die Richardson-Gleichung für die gesuchte Stromdichte  $j_S(T)$ :

$$j_S(T) = 4\pi \frac{e_0 m_0 k^2}{h^3} T^2 \exp \frac{-e_0 \Phi}{kT}. \quad (2)$$

Dabei ist  $e_0$  die Ladung des Elektrons und  $m_0$  seine Masse. Das Plancksche Wirkungsquantum wird mit  $h$  abgekürzt,  $k$  ist die Boltzmann-Konstante und  $\Phi$  ein Potential.

## 2.3 Hochvakuum-Diode

Die Messung des Sättigungsstroms einer emittierenden Metalloberfläche muss im Hochvakuum durchgeführt werden, damit die freien Elektronen nicht mit Luftmolekülen in Wechselwirkungen treten. Der grundsätzliche Aufbau einer Hochvakuum-Diode ist in Abb. 3 zu erkennen. Es wird eine Heizspannung an die Kathode angelegt. Dadurch lösen sich Elektronen und bewegen sich in Richtung der Anode. An der Anode ist eine Saugspannung angeschlossen, um das Gegenfeld zu verringern. Ist dieses zu groß, kommen die Elektronen nicht bei der Anode an.

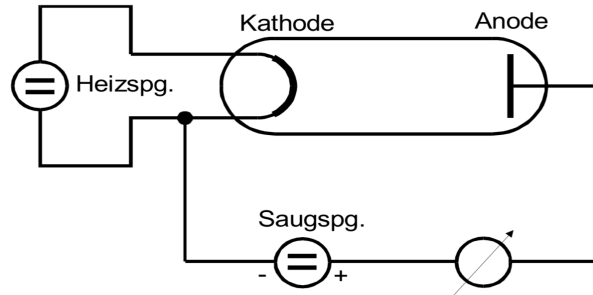


Abbildung 3: Schaltung einer Hochvakuumdiode. [2]

## 2.4 Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung

Der Anodenstrom hängt neben der Kathodentemperatur auch noch von der Anodenspannung ab. Außerdem ist die Geschwindigkeit der Elektronen nicht konstant. Es handelt sich stattdessen um eine beschleunigte Bewegung. Auch die Raumladungsdichte  $\rho$  ist eine Funktion des Ortes und nimmt zur Anode hin ab. Dies gilt, da die Geschwindigkeit zunimmt und die Stromdichte  $j$  konstant ist. Nach einigen Umformungen und einer Integration lässt sich aus der Potentialgleichung herleiten, dass sich der Zusammenhang zwischen der Stromdichte  $j$  und der Anodenspannung  $V$  zu

$$j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{2 \frac{e_0}{m_0}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{a^2} \quad (3)$$

ergibt. Diese Gleichung wird auch Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz genannt. Der Gültigkeitsbereich ist das Raumladungsgebiet - wie in Abb. 4 dargestellt.

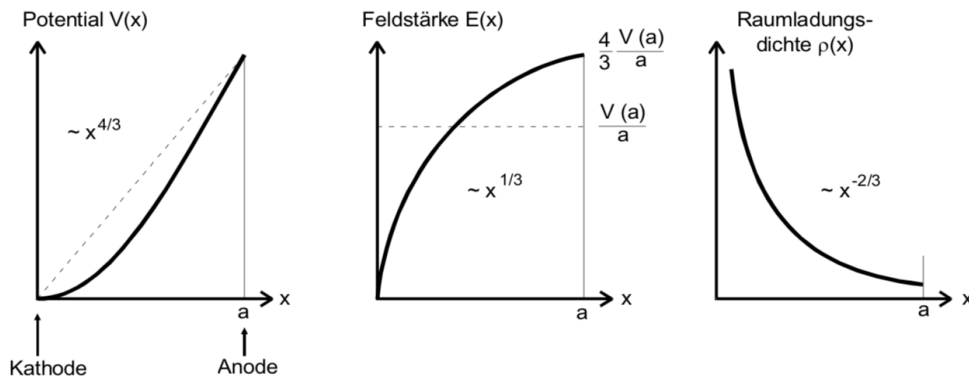
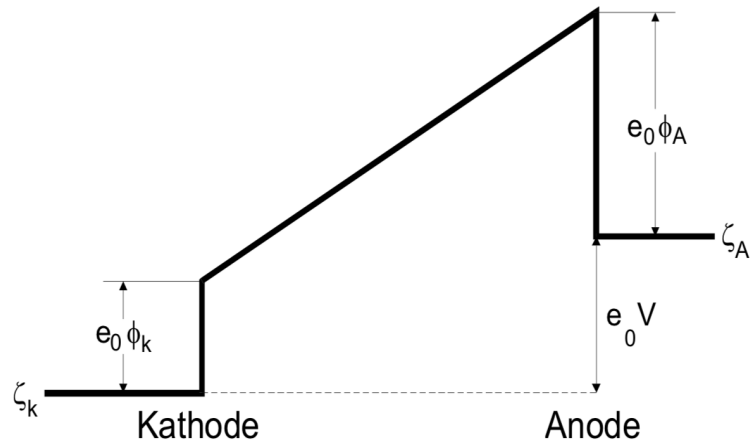


Abbildung 4: Potential, Feldstärke und Raumladungsdichte im Raumladungsgebiet einer Hochvakuumdiode. [2]

## 2.5 Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode

Es wird bei  $V = 0$  noch ein geringer Anodenstrom gemessen, obwohl zu erwarten wäre, dass  $j = 0$  gilt. Dieser entsteht durch die Eigengeschwindigkeit der Elektronen. Bei  $T > 0$

gibt es viele Elektronen, deren Energie größer als die Austrittsarbeit ist. Diese Differenz wird als kinetische Energie umgesetzt. Damit sind sie in der Lage gegen ein geringes Gegenfeld zu laufen - daher der Name Anlaufstrom. Die Energieverhältnisse sind in Abb. 5 dargestellt. Dabei ist wichtig, dass das Anodenmaterial auch eine Austrittsarbeit besitzt. Durch die leitende Verbindung zwischen Anode und Kathode werden die Fermi-Oberflächen auf eine Höhe gebracht. Durch das äußere Potential  $V$  verschieben sie sich um  $e_0 V$ .



**Abbildung 5:** Energieverhältnisse in der Hochvakuumdiode im Anlaufstromgebiet. [2]

Die Abhängigkeit der Anlaufstromstärke vom äußeren Potential ist durch folgende Gleichung darstellbar

$$j(V) = \text{const} \exp - \frac{e_0 V}{k T}. \quad (4)$$

## 2.6 Kennlinie der Hochvakuumdiode

Die Kennlinie wird als der Zusammenhang zwischen Anodenstrom  $I_A$  und dem angelegten Potential bezeichnet. Sie lässt sich in Anlaufstrom-, Raumladungs- und Sättigungsstromgebiet gliedern. Diese Abschnitte sind in Abb. 6 zu erkennen. Aus der Kennlinie lassen sich Kathodentemperatur und die Austrittsarbeit der Kathode ermitteln.

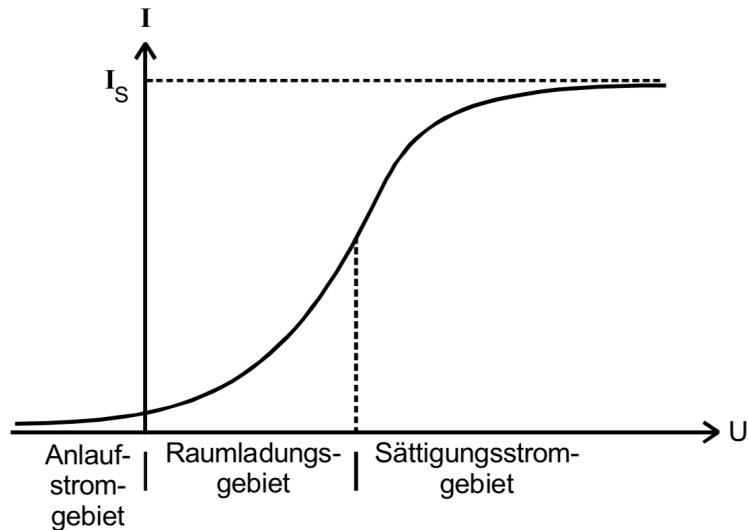


Abbildung 6: Kennlinie einer Hochvakuumdiode. [2]

## 2.7 Temperaturberechnung

Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz lautet

$$N = f \eta \sigma T^4.$$

Dabei ist  $\sigma$  die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante, welche einen Wert von

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{K}^4}$$

hat,  $f$  die emittierende Kathodenoberfläche,  $\eta$  der Emissionsgrad der Oberfläche und  $T$  die Temperatur.

Aus dem Energiesatz folgt

$$I_H U_H = f \eta \sigma T^4 + N_{\text{WL}}.$$

Dabei ist  $N_{\text{WL}}$  die Wärmeleitung, für die ein Wert von  $N_{\text{WL}} = 1 \text{ W}$  angenommen wird. Also lässt sich daraus die Temperatur durch

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_H U_H - 1}{f \eta \sigma}} \quad (5)$$

berechnen.

## 3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von  $N$  Werten wird durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

bestimmt.

Die Standardabweichung der Stichprobe wird berechnet mit:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Die relative Abweichung zwischen zwei Werten kann durch

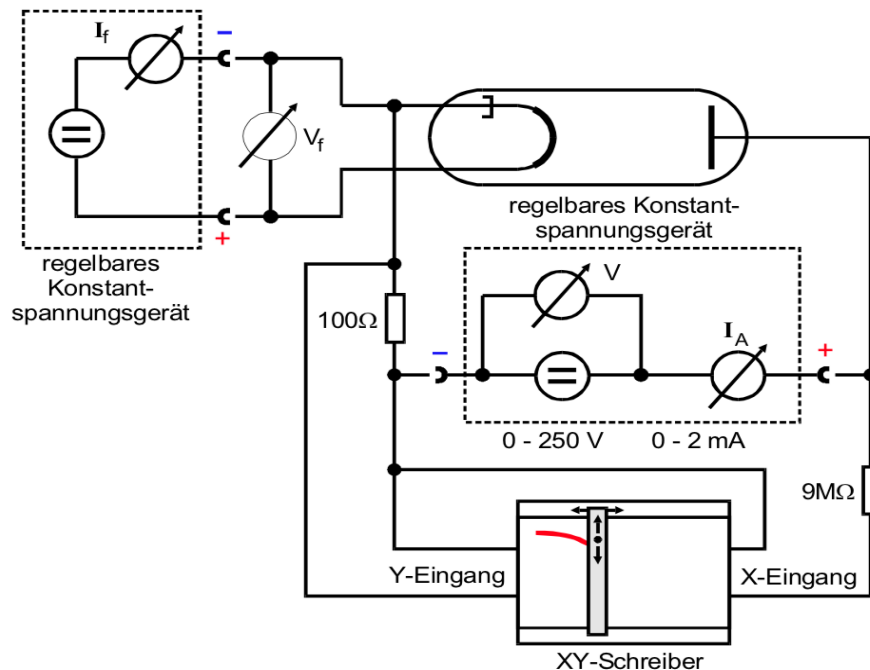
$$\frac{a-b}{a}$$

bestimmt werden.

## 4 Durchführung

### 4.1 Kennlinienschar der Hochvakuumdiode

Durch Variation der Heizstromstärke wird eine Kennlinienschar einer Hochvakuumdiode aus fünf Kennlinien erstellt. Dabei wird die Heizstromstärke  $I_H$  auf 2 bis 2,4 A eingestellt. Die Heizspannung  $V_H$  kann jeweils abgelesen werden. Die Anodenspannung  $V_A$  wird jeweils variiert. Dabei können die zugehörigen Werte des Anodenstroms  $I_A$  abgelesen werden. Es wird die Schaltung aus Abb. 7 verwendet.



**Abbildung 7:** Schaltung zur Messung der Kennlinien der Hochvakuumdiode. [2]



## 4.2 Anlaufstromgebiet der Diode

Für die maximal mögliche Heizleistung wird das Anlaufstromgebiet der Diode untersucht. Dafür wird die in Abb. 8 gezeigte Schaltung nachgebaut. Bei der maximalen Stromstärke von  $I_H = 2,4 \text{ A}$  wird wieder für variierende Anodenspannungen  $V_A$  im Bereich von 0 bis 250 V die Anodenstromstärke  $I_A$  abgelesen.

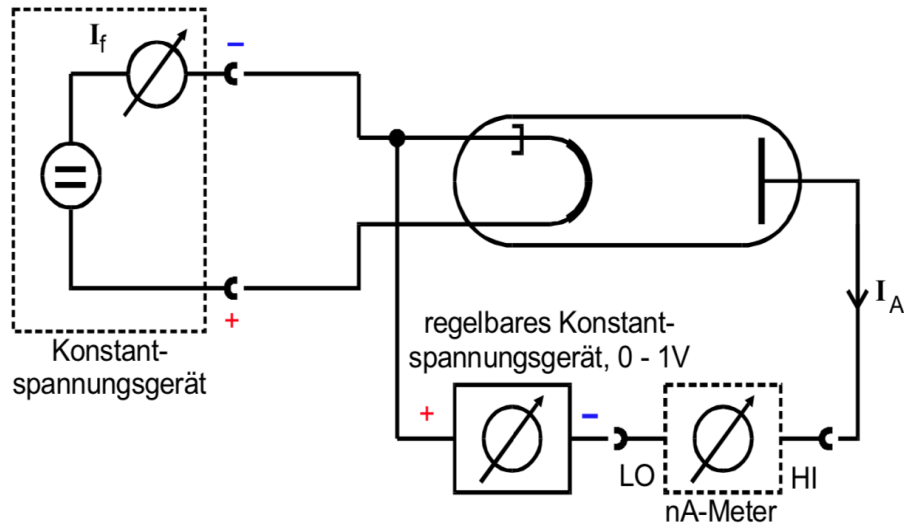


Abbildung 8: Schaltung zur Messung des Anlaufstromgebiets. [2]

## 5 Auswertung

Für die Auswertung wird Python und im Speziellen Matplotlib [3], SciPy [4] Uncertainties [5] und NumPy [6] verwendet.

### 5.1 Kennlinien der Hochvakuumdiode

Die für die Anodenspannung und den Anodenstrom aufgenommenen Werte bei den Heizströmen von  $I_H = 2$  bis  $2,4 \text{ A}$  sind in den Tabellen 4 bis 5 zu sehen.

**Tabelle 1:** Die Spannung und die Stromstärke bei einer Heizspannung von 3 V und die Heizspannung 2,0 A.

$U/\text{V}$	$I/\mu\text{A}$
5,0	3,0
10,0	5,0
15,0	6,0
20,0	7,0
25,0	7,0
30,0	7,0
35,0	7,0
40,0	8,0
60,0	8,0
80,0	8,0
100,0	8,0
120,0	8,0
140,0	8,0
160,0	8,0
170,0	8,0
200,0	9,0
220,0	9,0
240,0	9,0
250,0	9,0

**Tabelle 2:** Die Spannung und die Stromstärke bei einer Heizspannung von 3,2 V und die Heizspannung 2,1 A.

$U/\text{V}$	$I/\mu\text{A}$
5,0	4,0
10,0	10,0
15,0	13,0
20,0	15,0
25,0	16,0
30,0	17,0
35,0	17,0
40,0	18,0
60,0	19,0
80,0	19,0
100,0	19,0
120,0	20,0
140,0	20,0
160,0	20,0
180,0	20,0
200,0	20,0
230,0	21,0

**Tabelle 3:** Die Spannung und die Stromstärke bei einer Heizspannung von 3,5 V und die Heizspannung 2,2 A.

$U/\text{V}$	$I/\mu\text{A}$
5,0	7,0
10,0	17,0
15,0	24,0
20,0	29,0
25,0	32,0
30,0	34,0
35,0	35,0
40,0	36,0
45,0	37,0
50,0	37,0
55,0	38,0
70,0	39,0
90,0	40,0
125,0	41,0
160,0	41,0
180,0	42,0
200,0	42,0

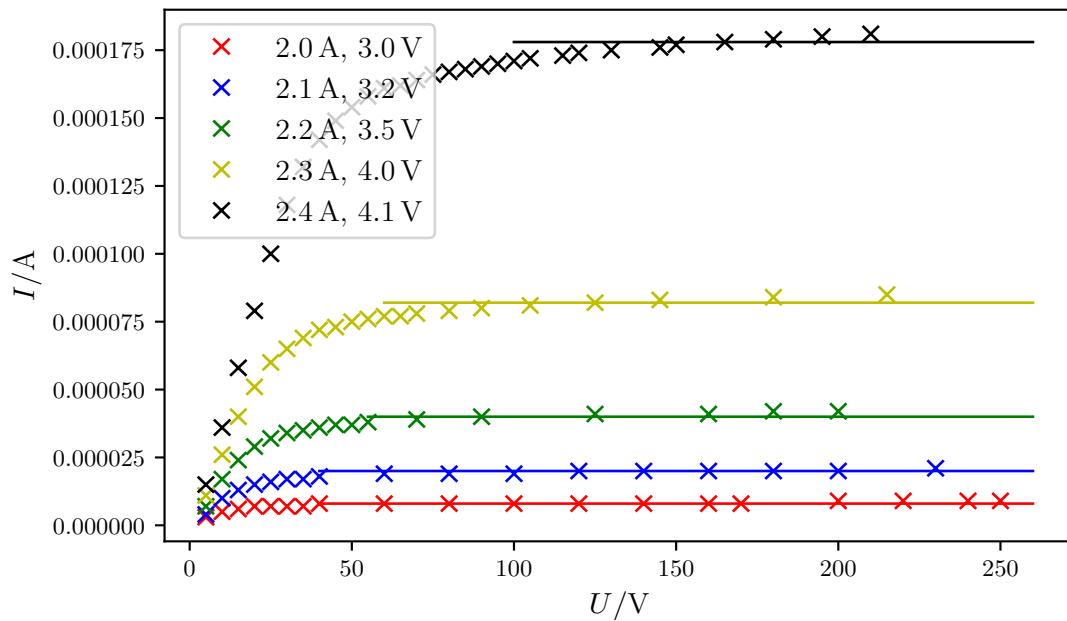
**Tabelle 4:** Die Spannung und die Stromstärke bei einer Heizspannung von 4 V und die Heizspannung 2,3 A.

$U/\text{V}$	$I/\mu\text{A}$
5,0	11,0
10,0	26,0
15,0	40,0
20,0	51,0
25,0	60,0
30,0	65,0
35,0	69,0
40,0	72,0
45,0	73,0
50,0	75,0
55,0	76,0
60,0	77,0
65,0	77,0
70,0	78,0
80,0	79,0
90,0	80,0
105,0	81,0
125,0	82,0
145,0	83,0
180,0	84,0
215,0	85,0

**Tabelle 5:** Die Spannung und die Stromstärke bei einer Heizspannung von 4,1 V und die Heizspannung 2,4 A.

$U/\text{V}$	$I/\mu\text{A}$
5,0	15,0
10,0	36,0
15,0	58,0
20,0	79,0
25,0	100,0
30,0	118,0
35,0	132,0
40,0	142,0
45,0	149,0
50,0	154,0
55,0	158,0
60,0	161,0
65,0	162,0
70,0	164,0
75,0	166,0
80,0	167,0
85,0	168,0
90,0	169,0
95,0	170,0
100,0	171,0
105,0	172,0
115,0	173,0
120,0	174,0
130,0	175,0
145,0	176,0
150,0	177,0
165,0	178,0
180,0	179,0
195,0	180,0
210,0	181,0

Die Ströme sind in Abb. 9 jeweils gegen die Spannungen aufgetragen.



**Abbildung 9:** Die Anodenströme sind jeweils für die verschiedenen Heizströme/-spannungen gegen die Anodenspannungen aufgetragen.

Aus der Abb. 9 lassen sich jeweils die Sättigungsströme ablesen. Diese sind für die verschiedenen Heizströme

$$I_H = 2,0 \text{ A} \Rightarrow I_S = 8 \mu\text{A}$$

$$I_H = 2,1 \text{ A} \Rightarrow I_S = 20 \mu\text{A}$$

$$I_H = 2,2 \text{ A} \Rightarrow I_S = 37 \mu\text{A}$$

$$I_H = 2,3 \text{ A} \Rightarrow I_S = 80 \mu\text{A}$$

$$I_H = 2,4 \text{ A} \Rightarrow I_S = 175 \mu\text{A}.$$

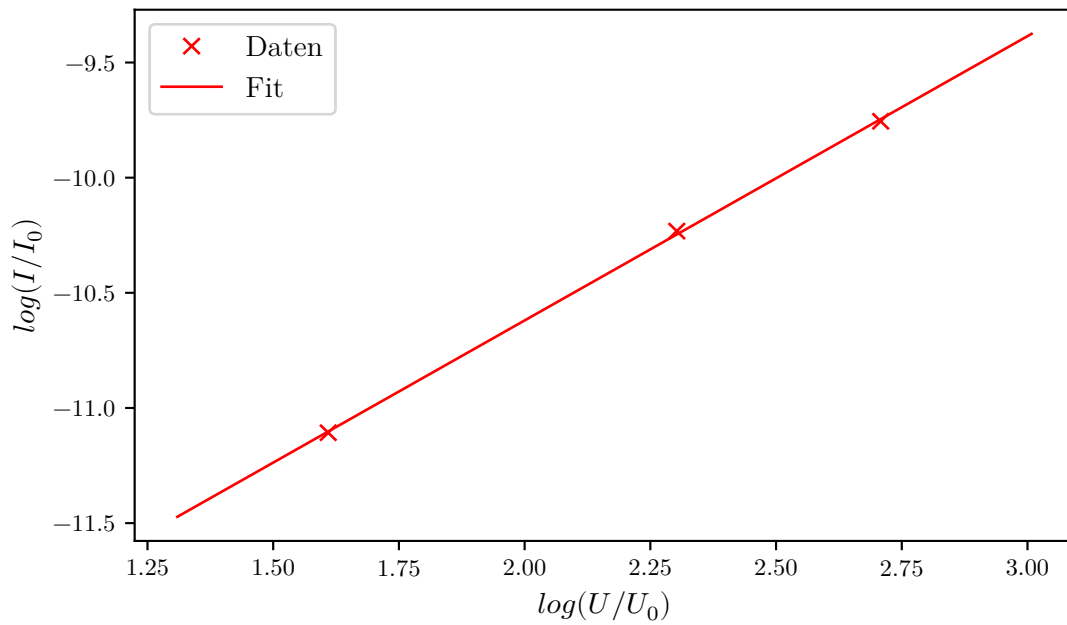
## 5.2 Gültigkeitsbereich des Raumladungsgesetzes

Die logarithmierte Stromstärke ist gegen die logarithmierte Spannung in Abb. 10 aufgetragen. Daraus ergibt sich mit einer linearen Regression der Exponent  $x$  der Spannung aus Gleichung (3). Dieser ist die Steigung der Geraden in Abb. 10. Zur Berechnung des Exponenten wird der Bereich von 5 V bis 15 V betrachtet.

$$x = 1,23 \pm 0,02.$$

Der erwartete Wert liegt bei

$$x_{\text{lit}} = 1,5.$$



**Abbildung 10:** Die logarithmierten Anodenströme sind gegen die logarithmierten Anodenspannungen aufgetragen, um den Exponenten des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes zu verifizieren. Dabei wird nur ein bestimmter Bereich betrachtet. Es sind die Daten und ein Fit eingetragen.

### 5.3 Anlaufstromgebiet der Diode und Bestimmung der Kathodentemperatur

Die Werte für die Spannungen und Ströme im Anlaufstromgebiet befinden sich in den Tabellen 6 bis 8.



**Tabelle 6:** Die Gegenspannung und die dazu gehörende Stromstärke.

$U/\text{mV}$	$I/\text{nA}$
0,0	38,0
50,0	34,0
100,0	28,0
150,0	23,0
200,0	19,0
250,0	15,0
300,0	12,0
350,0	9,0
400,0	7,0
450,0	6,0
500,0	5,0

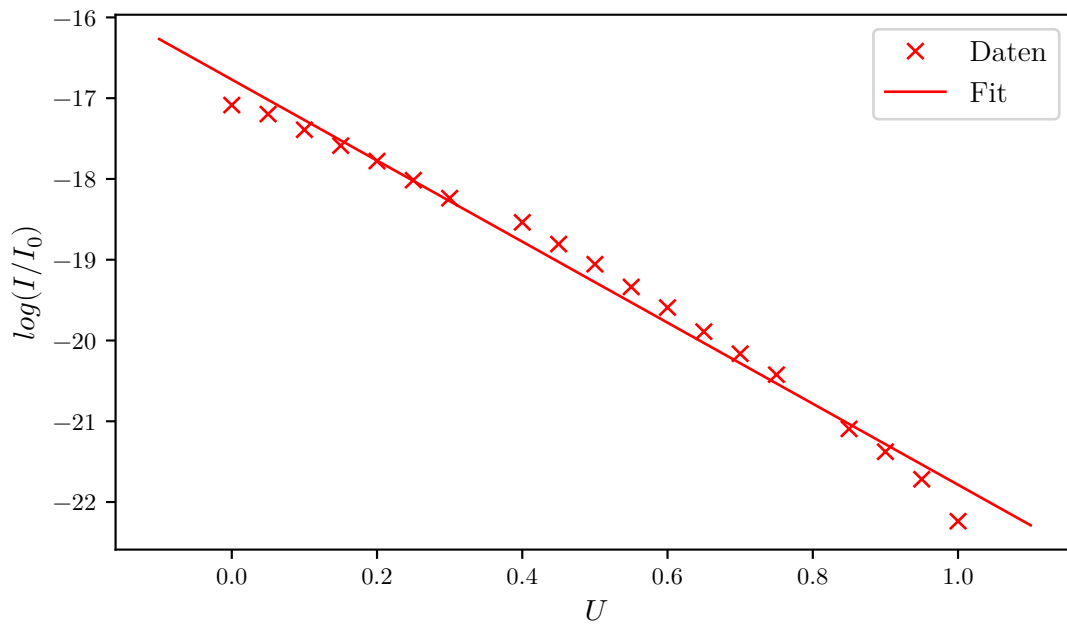
**Tabelle 7:** Die Gegenspannung und die dazu gehörende Stromstärke.

$U/\text{mV}$	$I/\text{nA}$
400,0	8,9
450,0	6,8
500,0	5,3
550,0	4,0
600,0	3,1
650,0	2,3
700,0	1,8
750,0	1,4
800,0	1,0
850,0	0,7
900,0	0,5
950,0	0,2
1000,0	0,1

**Tabelle 8:** Die Gegenspannung und die dazu gehörende Stromstärke.

$U/\text{mV}$	$I/\text{nA}$
850,0	0,7
900,0	0,5
950,0	0,4
1000,0	0,2

Die logarithmierte Stromstärke ist in Abb. 11 gegen die Spannung aufgetragen.



**Abbildung 11:** Die logarithmierte Stromstärke ist gegen die Spannung aufgetragen. Es sind die Daten und ein Fit eingetragen.

Durch Ermittlung der Steigung lässt sich die Temperatur bestimmen, indem Gleichung (4) nach  $T$  umgestellt wird. Die Temperatur im Anlaufstromgebiet ist

$$T = (2,44 \pm 0,12) \cdot 10^3 \text{ K.}$$

#### 5.4 Leistungsbilanz des Heizstromkreises und Abschätzung der Kathodentemperatur

Die in Teil 5.1 verwendeten Heizleistungen, die sich aus Multiplikation der Heizströme mit den Heizspannungen ergeben, sind

$$P_1 = 6,00 \text{ W}$$

$$P_2 = 6,72 \text{ W}$$

$$P_3 = 7,7 \text{ W}$$

$$P_4 = 9,20 \text{ W}$$

$$P_5 = 9,84 \text{ W.}$$

Die Werte für die emittierende Kathodenoberfläche  $f$  und den Emissionsgrad der Oberfläche  $\eta$  sind

$$f = 0,32 \text{ cm}^2$$

$$\eta = 0,28.$$

Daraus ergeben sich mit der Gleichung (5) die Temperaturen

$$T_1 = 1768,87 \text{ K}$$

$$T_2 = 1829,38 \text{ K}$$

$$T_3 = 1903,15 \text{ K}$$

$$T_4 = 2001,74 \text{ K}$$

$$T_5 = 2039,71 \text{ K}.$$

## 5.5 Austrittsarbeit für Wolfram

Für die Berechnung der Austrittsarbeit wurde eine Fläche des Kabels von  $1 \text{ cm}^2$  angenommen. Die somit errechneten Austrittsarbeiten  $e_0\phi$  sind

$$(e_0\phi)_1 = 4,80 \text{ eV}$$

$$(e_0\phi)_2 = 4,83 \text{ eV}$$

$$(e_0\phi)_3 = 4,93 \text{ eV}$$

$$(e_0\phi)_4 = 5,07 \text{ eV}$$

$$(e_0\phi)_5 = 5,04 \text{ eV}.$$

Der sich daraus ergebende Mittelwert ist

$$(e_0\phi)_{\text{mittel}} = (4,93 \pm 0,11) \text{ eV}.$$

Der Literaturwert für die Austrittsarbeit für Wolfram [1] ist

$$(e_0\phi)_{\text{lit}} = 4,55 \text{ eV}.$$

## 6 Diskussion

### 6.1 Kennlinien der Hochvakuumdiode

Die Kennlinien sehen wie erwartet aus. Es lässt sich bei allen Messungen ein Sättigungsstrom am Ende der Kurve erkennen. Bei linearem Anstieg des Beschleunigungsstroms ist eine exponentielle Zunahme zwischen den Kennlinien zu erkennen.

### 6.2 Gültigkeitsbereich des Raumladungsgesetzes

Es wurde ein recht kleiner Gültigkeitsbereich gewählt, da der Exponent in diesem Bereich dem zu erwartenden Wert am nächsten gekommen ist. Der ermittelte Wert besitzt einen relativen Fehler von 1,63 % und weicht um 18 % vom zu erwartenden Literaturwert ab. Dies ist aber auch im Plot schon zu erkennen, da die Kurve nicht ganz wie in der Theorie erwartet aussieht.

### **6.3 Anlaufstromgebiet der Diode und Bestimmung der Kathodentemperatur**

Die Messung des Anlaufstromgebiets mittels des Gegenstroms, der erzeugt wurde, hat relativ gut funktioniert. Die Werte sind trotz zweifachen Wechsels der Skala am Messgerät ziemlich linear in der logarithmischen Auftragung. Es ergibt sich eine Temperatur mit einem relativen Fehler von 4,9 %. Dabei haben wir aber keinen Literaturwert, mit dem wir diese Temperatur vergleichen können.

### **6.4 Leistungsbilanz des Heizstromkreises und Abschätzung der Kathodentemperatur**

Die Leistungsbilanz ist auch ähnlich wie erwartet. Die Temperaturen, die sich hier ergeben, liegen zumindest in der gleichen Größenordnung, wie die Temperatur bei der vorherigen Messung. Die Abweichung zwischen den Werten bei der Bestimmung der Temperatur mittels des Anlaufstromgebiets und der Bestimmung der Leistungsbilanz liegt bei 19,6 %. Mit dem Verlust durch Innenwiderstände und anderen Faktoren, die ein gewisses Maß an Fehlern erzeugen, ist der Fehler in Ordnung.

### **6.5 Austrittsarbeit für Wolfram**

Der relative Fehler des Mittelwerts der Austrittsarbeit liegt bei 2,23 %. Die Abweichung zum Literaturwert für die Austrittsarbeit eines Wolframdrahtes liegt bei 8,35 %.

### **6.6 Fazit**

Somit ist die Messung insgesamt als relativ gut zu bezeichnen. Die Ergebnisse liegen alle halbwegs in dem zu erwartenden Gebiet und es gibt keine außergewöhnlich großen Abweichungen, die nicht durch die üblichen Fehlerquellen zu erklären sind.

## Literatur

- [1] „Austrittsarbeit“. In: (2019). URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Austrittsarbeit>.
- [2] TU Dortmund. *Versuch 504 - Thermische Elektronenemission*. 2019. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V504.pdf>.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.