V103 - Biegung elastischer Stäbe

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.10.2018, Abgabe: 06.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Ziel dieses Versuches ist es, die Elastizitätsmodule verschiedener Stäbe durch Messung ihrer Biegung zu bestimmen.

2 Theorie

Die Spannung ist die Kraft auf einen Körper pro Flächeneinheit. Die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, ist die Normalspannung σ. Ihre oberflächenparallele Komponente heißt Tangentialspannung. Das Hookesche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen der Spannung σ, die am Körper angreift, und der Deformation des Körpers dar:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

E ist dabei das Elastizitätsmodul. Das Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante, die anhand der Deformation eines Körpers bestimmt werden kann. Eine Art der Deformation ist die Biegung. Sie entsteht, wenn eine Kraft, wie in Abbildung 1 und in Abbildung 2 gezeigt, auf einen Körper wirkt. Zunächst wird die Berechnung der Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung beschrieben.

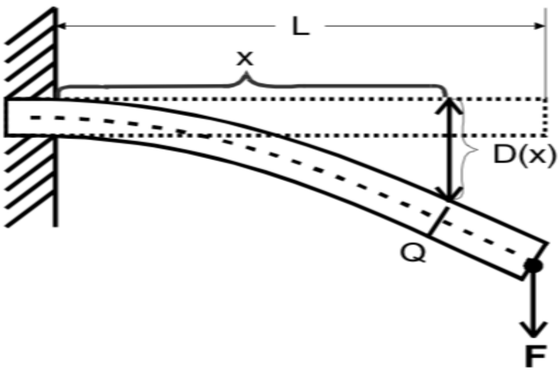

Abbildung 1: Biegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung. [1]

Die Durchbiegung $D(x)$ bezeichnet die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen dem belasteten und unbelasteten Zustand des Stabes. Es wird eine Drehmomentgleichung aufgestellt, um $D(x)$ zu bestimmen. Die Zug- und Druckspannungen, die an der Querschnittsfläche Q angreifen, sind entgegesetzt gleich und bewirken deshalb ein Drehmoment M_σ:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq$$

y ist der Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser. Die neutrale Faser ist die Fläche, in der sich die angreifenden Spannungen gegenseitig aufheben. Ihre Länge ändert sich bei der Biegung folglich nicht. Ein weiteres Drehmoment M_F entsteht durch die Kraft auf einen senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt. Es verdreht den Querschnitt aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage. Die Deformation des Körpers stellt sich so ein, dass die Drehmomente an jeder Stelle x übereinstimmen:

$$M_F = M_\sigma.$$

Dabei ist

$$M_F = F(L - x),$$

da die Kraft F über den Hebelarm $L - x$ an Q angreift. Damit ist das Gleichgewicht der Drehmomente durch

$$\int_Q y\sigma(y)dq = F(L - x) \tag{2}$$

gegeben. Mit dem Hookeschen Gesetz (1) wird die Normalspannung $\sigma(y)$ mittels

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$$

berechnet. Hier ist Δx die Länge eines kurzen Stabstücks und δx die Längenänderung der Faser. Es gilt außerdem

$$\delta x = y\Delta\phi = y\frac{\Delta x}{R},$$

wobei R der Krümmungsradius der Faser bei x ist. Damit ist

$$\sigma(y) = E\frac{y}{R} = Ey\frac{d^2D}{dx^2},$$

da für geringe Kurvenkrümmungen

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2D}{dx^2}$$

gilt, falls

$$(\frac{dD}{dx})^2 << 1$$

ist. Für (2) ergibt sich damit:

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2dq = F(L - x). \tag{3}$$

Dabei ist

$$I = \int_Q y^2dq(y)$$

das Flächenträgheitsmoment. Integriert man (3) und stellt die Gleichung nach $D(x)$ um, erhält man für die Biegung bei einseitiger Einspannung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{4}$$

Diese Gleichung ist für $0 \leq x \leq L$ definiert. Die Integrationskonstanten verschwinden, weil $D(0) = 0$ und $\frac{dD}{dx} = 0$ sein müssen.

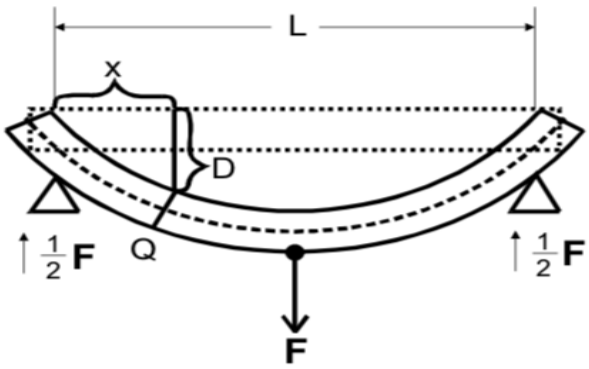

Abbildung 2: Biegung eines elastischen Stabes bei zweitseitiger Auflage.[1]

Liegen beide Stabenden auf und lässt man in der Mitte des Stabes eine Kraft angreifen, greift an der Querschnittsfläche die Kraft $\frac{F}{2}$ mit dem Hebelarm x an. Für die erste Stabhälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt für das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x.$$

Für die zweite Hälfte $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x).$$

Damit ergibt sich hier für (3)

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{5}$$

und

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L-x) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{6}$$

Integriert man beide Gleichungen, ergibt sich

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

und

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad .$$

Da die Biegekurve in der Mitte des Stabes eine horizontale Tangente haben muss, muss für die Konstanten gelten:

$$C = \frac{F}{EI}\frac{L^2}{16}.$$

und

$$C' = \frac{3}{16}\frac{F}{EI}L^2.$$

Die Konstanten werden in (5) und (6) eingesetzt. Durch Integration der Ausdrücke ergeben sich die Gleichungen für die Biegung bei zweiseitiger Auflage des Stabes:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{7}$$

und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{8}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden hier, weil $D(0) = 0$ und $D(L) = 0$ sein müssen. Die Biegung eines elastischen Stabes kann also durch (4), (7) und (8) bestimmt werden. Weil die Stäbe nicht als exakt gerade angenommen werden können, muss die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen werden. Die Biegung des Stabes durch die Last ist dann

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \tag{9}$$

Der Elastizitätsmodul lässt sich mittels einer linearen Regression bestimmen. Die Werte für die Biegung (9) werden gegen eine linearisierte Form des horizontalen Abstands aufgetragen. Diese können aus den Gleichungen (4), (7) und (8) entnommen werden. Die Steigung berechnet sich dabei wie folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{10}$$

Bei dem ersten und zweiten Stab entspricht die Steigung $\frac{F}{2EI}$. Der Ausdruck wird nach E umgestellt. Dadurch ergibt sich eine Gleichung für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{F}{2mI}. \tag{11}$$

Für den dritten Stab ergibt sich für den Elastizitätsmodul auf die selbe Weise die Gleichung:

$$E = \frac{F}{48mI}. \tag{12}$$

3 Durchführung

Die Apparatur ist in Abbildung xy zu sehen. Die Stäbe werden entweder einseitig eingeklemmt oder zweiseitig auf den Punkten A und B gelagert. Die Stäbe werden belastet, indem ein Gewicht entweder am Stabende oder in der Stabmitte angehängt wird. Die Biegung wird mit zwei Messuhren, die sich auf einer Längen-Skala befinden und verschiebbar sind, sodass die Biegung an verschiedenen Stellen x bestimmt werden kann, gemessen. Bei Messuhren wird die Verschiebung eines Objektes mittels eines federnden Taststiftes gemessen.

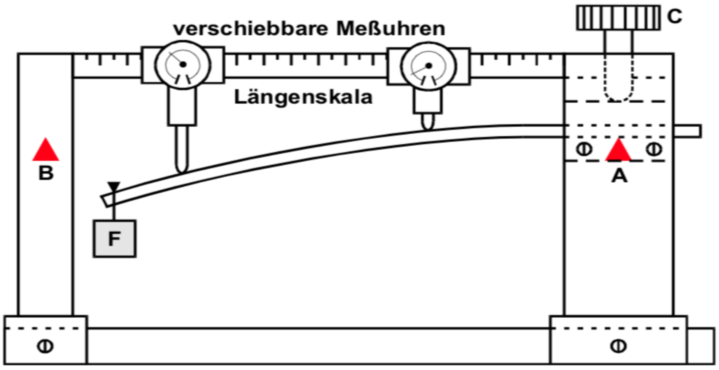

Abbildung 3: Skizze einer Messapparatur zur Bestimmung der Biegung elastischer Stäbe.[1]

Zunächst wird jeweils für zwei einseitig eingespannte Stäbe die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen. Danach wird an das Stabende ein Gewicht angehängt. Die Biegung wird mit einer der Messuhren gemessen. Ein dritter Stab wird zweiseitig aufgelegt. Es wird wieder zunächst die Biegung ohne Gewicht und dann mit Gewicht gemessen. Hier wird für die erste Hälfte des Stabes $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ die linke Messuhr und für die zweite Hälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ die rechte Messuhr verwendet. Zuletzt werden die Längen, Breiten, beziehungsweise Durchmesser und Massen der Stäbe, sowie die Masse des angehängten Gewichts bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des ersten Stabes

Tabelle 1: Gewicht, Länge und Durchmesser des ersten Stabs

Gewicht/g	Länge/cm	Durchmesser/mm
460,30	51,20	8,00

Die Biegung $D(x)$ an den Stellen x mit und ohne Gewicht ist für den ersten Stab in 2 zu sehen. Die Biegung ist jeweils in mm angegeben. Die horizontale Länge x ist in cm angegeben.

Tabelle 2: Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,98	1,10	3,00
1,04	1,10	5,00
1,11	1,17	8,00
1,16	1,17	11,00
1,12	1,18	14,00
1,12	1,19	17,00
1,10	1,19	20,00
1,03	1,21	23,00
0,93	1,23	26,00
0,80	1,24	29,00
0,68	1,25	32,00
0,58	1,25	35,00
0,40	1,25	38,00
0,20	1,26	41,00
0,08	1,26	44,00
−0,10	1,26	47,00
−0,38	1,26	49,00

Die Differenz (9) der beiden Biegungen aus 2 und die jeweiligen horizontalen Abstände in linearisierter Form $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ sind in 3 dargestellt.

Tabelle 3: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht, Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$Lx^2 - x^3/3$/m^3
0,000 12	0,000 48
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,001 30
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,003 27
$1{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,006 07
$6{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,009 63
$7{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,013 91
$9{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,018 85
0,000 18	0,024 40
0,000 30	0,030 51
0,000 44	0,037 12
0,000 57	0,044 17
0,000 67	0,051 61
0,000 85	0,059 40
0,001 06	0,067 46
0,001 18	0,075 76
0,001 36	0,084 24
0,001 64	0,089 96

Auf diese Weise lässt sich mit Hilfe des Graphen der Elastizitätsmodul durch die Steigung bestimmen.

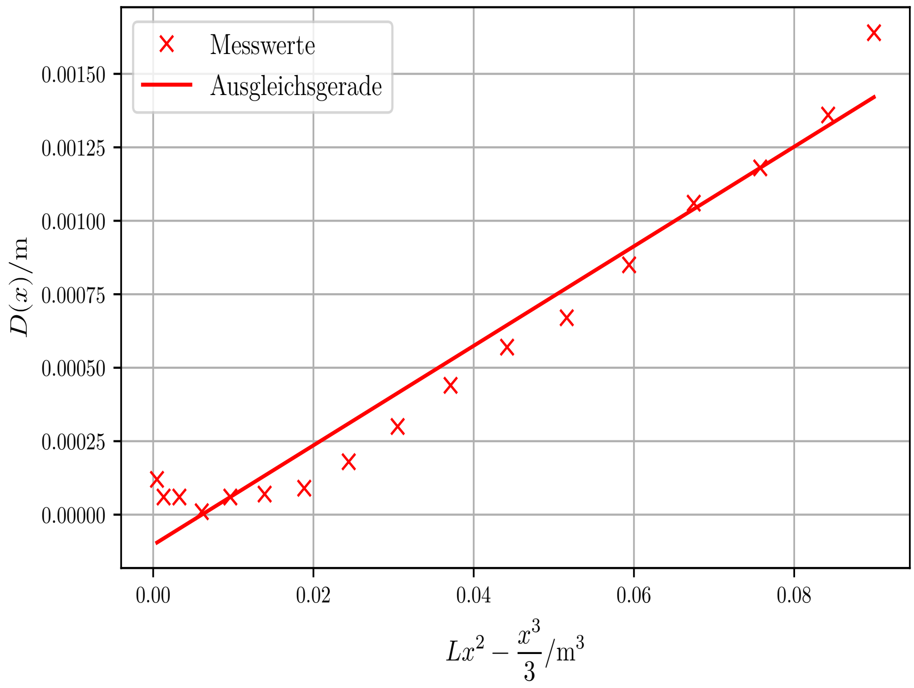

Abbildung 4: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes mit und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden.

Die Steigung ergibt sich mit (10) zu $m = 0{,}016\,939\,\mathrm{m}$. Damit ist der Elastizitätsmodul mit (11)$E = 459{,}04\,\mathrm{GPa}$.

4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des zweiten Stabes

Tabelle 4: Gewicht, Länge und Durchmesser des zweiten Stabs

Gewicht/g	Länge/cm	Durchmesser/mm
121,30	53,80	8,20

In 5 befinden sich die Werte der Biegung $D(x)$ mit und ohne angehängtes Gewicht und die horizontale Auslenkung für den zweiten Stab.

Tabelle 5: Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,87	0,79	3,00
0,91	0,77	5,00
0,98	0,68	8,00
1,01	0,50	11,00
1,03	0,27	14,00
1,03	−0,05	17,00
1,04	−0,42	20,00
0,96	−1,30	26,00
0,88	−1,83	29,00
0,82	−2,42	32,00
0,69	−3,13	35,00
0,55	−3,71	38,00
0,36	−4,41	41,00
0,10	−5,23	44,00
−0,15	−6,16	47,00
−0,33	−6,56	49,00

Die Differenz (9) der Biegungen ohne und mit Gewicht und die Abstände in lineartisierter Form sind in 6 zu sehen.

Tabelle 6: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$Lx^2 - x^3/3$/m^3
$8{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,000 45
0,000 14	0,001 24
0,000 30	0,003 11
0,000 51	0,005 75
0,000 76	0,009 12
0,001 08	0,013 16
0,001 46	0,017 81
0,002 26	0,028 75
0,002 71	0,034 93
0,003 24	0,041 51
0,003 82	0,048 43
0,004 26	0,055 64
0,004 77	0,063 09
0,005 33	0,070 73
0,006 01	0,078 49
0,006 23	0,083 71

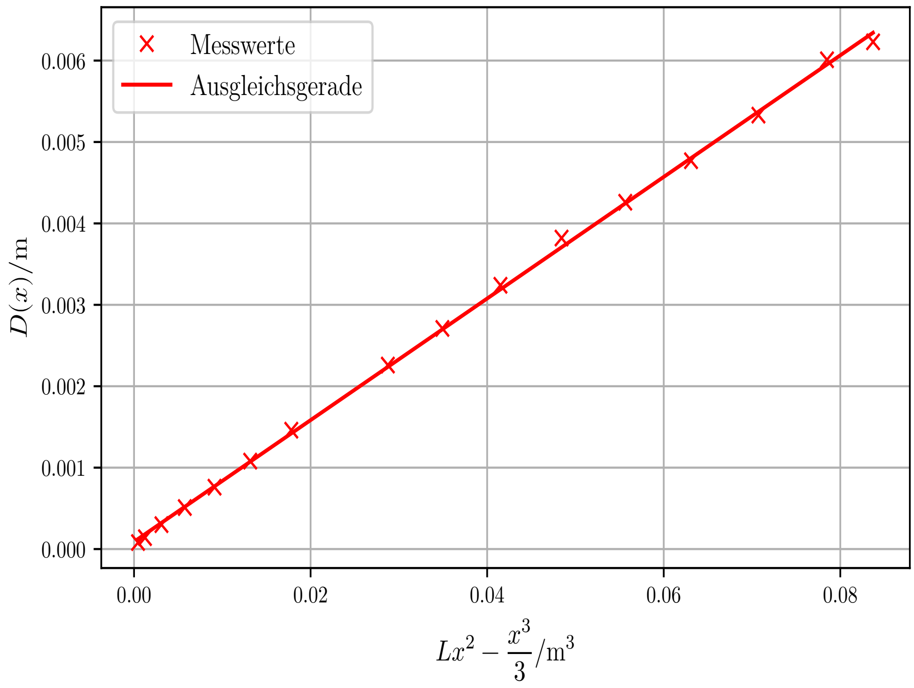

Abbildung 5: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes mit und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden.

Aus der Steigung $m = 0{,}074\,685\,\mathrm{m}$, die mittels (10) berechnet wurde, ergibt sich der Elastizitätsmodul der zweiten Stange (11) zu $E = 160{,}12\,\mathrm{GPa}$.

4.3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des dritten Stabes

Tabelle 7: Gewicht, Länge und Durchmesser des dritten Stabs

Gewicht/g	Länge/cm	Durchmesser/mm
394,30	56,10	8,00

Die Werte der rechten Hälfte des dritten Stabes sind in 8 zu finden.

Tabelle 8: Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,75	0,71	3,00
0,79	0,72	5,00
0,82	0,72	8,00
0,83	0,70	11,00
0,80	0,60	14,00
0,74	0,49	17,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,45	0,05	26,00

Die Differenz (9) der Biegungen ohne und mit Gewicht in der Stabmitte und die Abstände in linearisierter Form $3L^2x - 4x^3$ sind in 9 aufgelistet.

Tabelle 9: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)/\mathrm{m}$ Differenz	$3L^2x - 4x^3/\mathrm{m}^3$
$4{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,028 22
$7{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,046 71
$10{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$	0,073 49
0,000 13	0,098 53
0,000 20	0,121 21
0,000 25	0,140 86
0,000 32	0,156 83
0,000 36	0,168 49
0,000 32	0,156 83
0,000 36	0,168 49
0,000 40	0,175 18

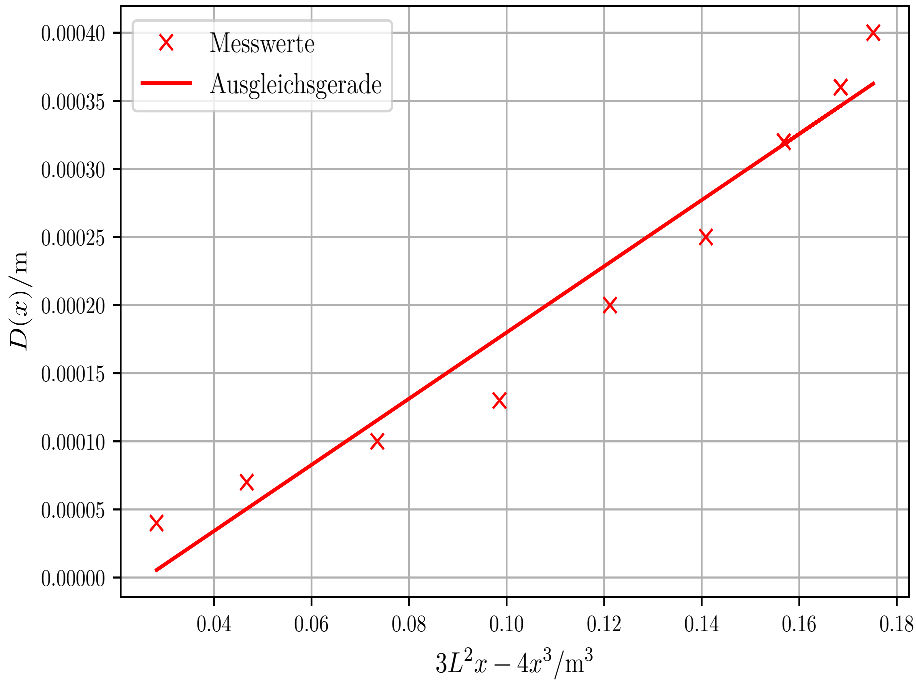

Abbildung 6: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes mit und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden.

Mit der Steigung $m = 0{,}002\,429\,\mathrm{m}$, die mit (10)ermittelt wurde, ist der Elastizitätsmodul für die rechte Hälfte des dritten Stabes (12) $E = 226{,}35\,\mathrm{GPa}$.

Für die linke Hälfte wurde eine andere Messuhr verwendet. Die Werte für die Biegungen der linken Hälfte befinden sich in 10.

Tabelle 10: Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
−1,01	−1,75	29,00
−0,97	−1,79	32,00
−1,08	−1,89	35,00
−1,16	−1,98	38,00
−1,35	−2,08	41,00
−1,48	−2,13	44,00
−1,58	−2,15	47,00
−1,67	−2,12	50,00
−1,76	−2,06	53,00

Die Differenzen und die linearisierten horizontalen Abstände $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ finden sich in 11.

Tabelle 11: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$/m^3
0,000 74	0,176 26
0,000 82	0,171 55
0,000 81	0,161 64
0,000 82	0,147 17
0,000 73	0,128 80
0,000 65	0,107 16
0,000 57	0,082 90
0,000 45	0,056 69
0,000 30	0,029 15

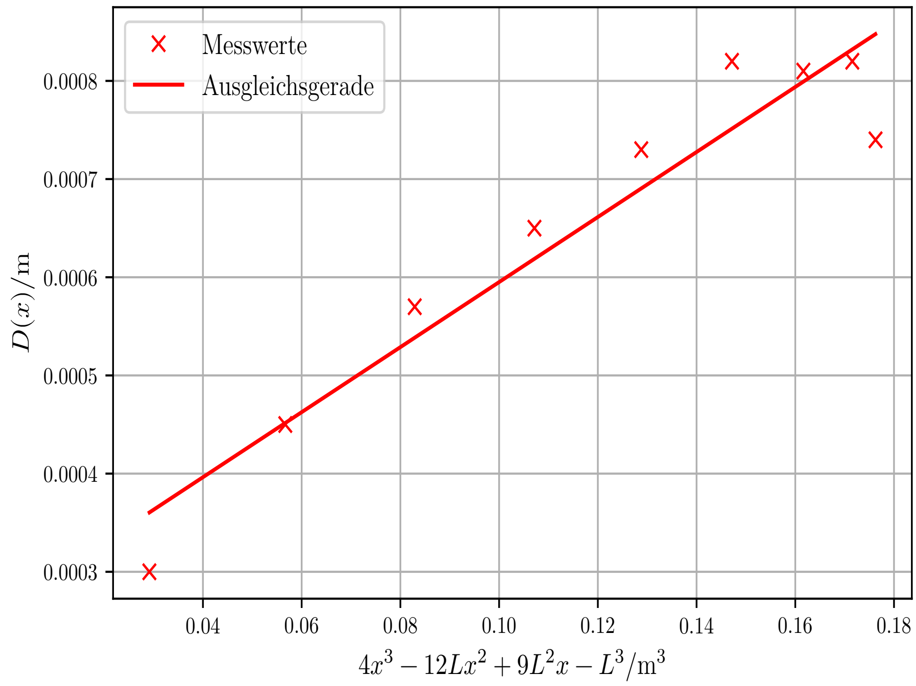

Abbildung 7: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes mit und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden.

Der Elastizitätsmodul für die linke Seite des dritten Stabes errechnet sich mit (12) mittels der Steigung (10) $m = 0{,}003\,312\,\mathrm{m}$ zu $E = 166{,}05\,\mathrm{GPa}$.

5 Diskussion

In der ersten Messung bei dem goldenen Stab mit einer quadratischen Querschnittsfläche und einer Länge von 55 cm, ergibt sich für den Elastizitätsmodul ein Wert, der weit von den zu erwartenden Werten abweicht. Die Messdaten liegen alle, bis auf den unteren und oberen Rand, ziemlich genau auf einer Ausgleichsgeraden, deren Steigung durch die Auswertung auf einen deutlich zu hohen Wert hindeutet. Ursachen für die Abweichung könnten verschiedene Fehler, eventuell sogar systematische, die nicht erkannt wurden, sein. Zum einen sprang die Messuhr teilweise zwischen Stücken Δx, in denen gar keine Steigung mit dem bloßen Auge zu erkennen war und bei denen beim erneuten Überfahren des Bereichs keine Veränderung stattfand. Dies deutet darauf hin, dass die gemessenen Ergebnisse der Uhr nicht fehlerfrei sind, wie in der Auswertung angenommen. Zum anderen ist, obwohl der Körper K mit seiner Masse m bereits 17,6 % über der Masse der Stange lag, die maximale Auslenkung(1,64 mm), die stattgefunden hat, zu niedrig gewesen. Diese sollte mindestens 3 mm betragen. Da während des Messens die Differenzen der Auslenkungen noch nicht überprüft wurden, ließ sich diese Fehlerquelle nicht früh genug erkennen. Die Ursache der Fehler an den Rändern der Messung ist, dass die Stäbe dort kaum ausgelenkt waren und daher auch schon leichte Deformationen der Stäbe zu Unregelmäßigkeiten in der Messung geführt haben. Je nachdem wie stark die Stange eingespannt war, änderte sich auch die Ausrichtung ein wenig und die Stäbe waren leicht nach oben gerichtet und nicht im 90° Winkel zur Erdoberfläche. Auch mit der Dichte, bestimmt aus dem Volumen und dem Gewicht der Stange, lässt sich die Stoffanalyse der Stange nicht genau durchführen. Mit einer Dichte von 13,076 kg/dm^3 lässt sich kein exakter Stoff kombinieren. Mögliche Stoffe wären Quecksilber (13,55 kg/dm^3) oder Blei(11,34 kg/dm^3), wobei Quecksilber bei Raumtemperatur flüssig ist und somit als Element der Stange keinen Sinn ergibt. Wäre der zu messende Stoff aus Blei gewesen, müsste der Elastizitätsmodul bei einem Wert von $E = 19$ GPa liegen. Der gemessene Wert liegt bei $E = 459$ GPa. Somit ist der relative Fehler 2315 %, falls es sich tatsächlich um Blei handelt.
Bei der Messung des silbernen Stabes mit der runden Grundfläche und einer Länge von 55 cm wurde der Elastizitätsmodul $E = 160{,}12$ GPa gemessen. Dabei ist diese Messung deutlich exakter gewesen, denn die Ausgleichsgerade hat keine Werte die wirklich abweichen. Außerdem lag die maximale Auslenkung bei 6,23 mm, also zwischen 3 und 7 mm. Somit scheinen systematische Fehler bei dieser Messung ausgeschlossen zu sein. Trotzdem lässt sich der Wert keinem Metall exakt zuordnen. Die Dichte, die bei 3,98 kg/dm^3 liegt, lässt auf Aluminium(2,7 kg/dm^3) schließen. Der Elastizitätsmodul liegt nur bei $E = 70$ GPa, was einen Fehler von 128,7 % bedeutet, falls es sich tatsächlich um Aluminium handelt. Bei der dritten Messung wurde das Gewicht in die Mitte gehängt. Einer der groben Fehler dabei könnte sein, dass zwei verschiedene Messuhren benutzt wurden. Die berechneten Werte hätten sich den Erwartungen nach symmetrisch zur Mitte der Stange äquivalent zu einander verhalten sollen. Tatsächlich unterscheiden sich die maximalen Auslenkungen der links und rechts des Gewichts gemessenen Werte um 45,95 % (0,4 mm und 0,74 mm). Die maximale Auslenkung liegt somit auch wieder weit unter dem, für eine exakte Messung geforderten Werte von mindestens 3 mm. Der hier gemessene Stab hat

eine Länge von 60 cm und eine kreisförmigen Grundfläche, was mit seinem Gewicht zu einer Dichte von 13,073 kg/dm^3 führt. Diese liegt in der Nähe der Dichte des ersten Stabes. Wie beim ersten Stab ist der Wert für Blei hier der passenste, wobei der Elastizitätsmodul ebenfalls stark abweicht. Der von rechts gemessene Modul liegt bei einem Wert von $E = 226{,}349\,\mathrm{GPa}$, was einer Abweichung von 1091 % entspricht. Der von links gemessene Modul liegt bei $E = 166{,}05\,\mathrm{GPa}$, was eine Abweichung von 773 % bedeutet. Insgesamt ist das Verfahren in der durchgeführten Art und Weise für den Zweck der Stoffanalyse als ziemlich ungenau zu bewerten.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. 2018.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 3.0.0. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 1.1.0. URL: http://www.scipy.org/.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.14.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.

[5] *Technik Tabellen-Industrietechnik*. 2018. URL: https://www.hug-technik.com/inhalt/ta/metall.htm.

[6] *Wikipedia- Elastizitätsmodul*. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul.