# 1 Ziel

Ziel dieses Versuches ist es, die Elastizitätsmodule verschiedener Stäbe durch Messung ihrer Biegung zu bestimmen.

# 2 Theorie

Die Spannung ist die Kraft auf einen Körper pro Flächeneinheit. Die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, ist die Normalspannung $\sigma$. Ihre oberflächenparallele Komponente heißt Tangentialspannung. Das Hookesche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen der Spannung $\sigma$, die am Körper angreift, und der Deformation des Körpers dar:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

$E$ ist dabei das Elastizitätsmodul. Das Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante, die anhand der Deformation eines Körpers bestimmt werden kann. Eine Art der Deformation ist die Biegung. Sie entsteht, wenn eine Kraft, wie in Abbildung 1 und in Abbildung 2 gezeigt, auf einen Körper wirkt. Zunächst wird die Berechnung der Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung beschrieben. Die Durchbiegung $D(x)$ bezeichnet die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen dem belasteten und unbelasteten Zustand des Stabes. Es wird eine Drehmomentgleichung aufgestellt, um $D(x)$ zu bestimmen. Die Zug- und Druckspannungen, die an der Querschnittsfläche $Q$ angreifen, sind entgegesetzt gleich und bewirken deshalb ein Drehmoment $M_\sigma$:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{2}$$

$y$ ist der Abstand des Flächenelementes $dq$ von der neutralen Faser. Die neutrale Faser ist die Fläche, in der keine Spannungen auftreten. Ihre Länge ändert sich bei der Biegung folglich nicht. Ein weiteres Drehmoment $M_F$ entsteht durch die Kraft auf einen senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt. Es verdreht den Querschnitt aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage. Die Deformation des Körpers stellt sich so ein, dass die Drehmomente an jeder Stelle $x$ übereinstimmen:

$$M_F = M_\sigma. \tag{3}$$

Dabei ist

$$M_F = F(L - x), \tag{4}$$

da die Kraft $F$ über den Hebelarm $L - x$ an $Q$ angreift. Damit ist das Gleichgewicht der Drehmomente durch

$$\int_Q y\sigma(y)dq = F(L - x) \tag{5}$$

gegeben. Mit dem Hookeschen Gesetz (1) wird die Normalspannung $\sigma(y)$ mittels

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x} \tag{6}$$

berechnet. Hier ist $\Delta x$ die Länge eines kurzen Stabstücks und $\delta x$ die Längenänderung der Faser. Es gilt außerdem

$$\delta x = y\Delta\phi = y\frac{\Delta x}{R}, \tag{7}$$

wobei $R$ der Krümmungsradius der Faser bei $x$ ist. Damit ist

$$\sigma(y) = E\frac{y}{R} = Ey\frac{d^2D}{dx^2}, \tag{8}$$

da für geringe Kurvenkrümmungen

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2D}{dx^2} \tag{9}$$

gilt, falls

$$(\frac{dD}{dx})^2 << 1 \tag{10}$$

ist. Für (5) ergibt sich damit:

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2 dq = F(L-x). \tag{11}$$

Dabei ist

$$I = \int_Q y^2 dq(y) \tag{12}$$

das Flächenträgheitsmoment. Integriert man (**??**) und stellt die Gleichung nach $D(x)$ um, erhält man für die Biegung bei einseitiger Einspannung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{13}$$

Diese Gleichung ist für $0 \leq x \leq L$ definiert. Die Integrationskonstanten verschwinden, weil $D(0) = 0$ und $\frac{dD}{dx} = 0$ sein müssen. Liegen beide Stabenden auf und lässt man in der Mitte des Stabes eine Kraft angreifen, greift an der Querschnittsfläche die Kraft $\frac{F}{2}$ mit dem Hebelarm $x$ an. Für die erste Stabhälfte gilt für das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x, 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \tag{14}$$

Für die zweite Hälfte gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x), \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{15}$$

Damit ergibt sich hier für (**??**)

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{16}$$

und

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L-x), \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{17}$$

Integriert man beide Gleichungen, ergibt sich

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{18}$$

und

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C', \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{19}$$

Da die Biegekurve in der Mitte des Stabes eine horizontale Tangente haben muss, muss für die Konstanten gelten:

$$C = \frac{F}{EI}\frac{L^2}{16} \tag{20}$$

und

$$C' = \frac{3}{16}\frac{F}{EI}L^2. \tag{21}$$

. Setzt man die Konstanten in (**??**) und (**??**) ein und integriert die Ausdrücke, erhält man die Gleichungen für die Biegung bei zweiseitiger Auflage des Stabes:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3), 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{22}$$

und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3), \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{23}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden hier, weil $D(0) = 0$ und $D(L) = 0$ sein müssen. Die Biegung eines elastischen Stabes kann also durch (**??**), (**??**) und (**??**) bestimmen. Weil die Stäbe nicht als exakt gerade angenommen werden können, muss die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen werden. Die Biegung des Stabes durch die Last ist dann

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \tag{24}$$