## Inhaltsverzeichnis

## 1 Ziel

Das Ziel dieses Versuches ist es, anhand der Drehschwingungen eines Drahtes seine elastischen Konstanten zu bestimmen. Außerdem soll durch Erweiterung um ein Magnetfeld und einen Permanentmagneten das magnetische Moment dieses Magneten ermittelt werden.

## 2 Theorie

Die Kraft pro Flächeneinheit ist die Spannung. Ihre Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, ist die Normalspannung $\sigma$. Die Tangentialspannung (oder Schubspannung) $\tau$ ist die Komponente der Spannung, die parallel zur Oberfläche steht.
Ein isotroper Körper ist ein Material, bei dem die elastischen Konstanten richtungsunabhängig sind. Man beschreibt sein elastisches Verhalten durch vier Konstanten: Der Schubmodul $G$ charakterisiert die Gestaltselastizität (solche Verformung tritt auf, wenn an Probe ausschließlich Tangentialspannungen angreifen), der Kompressionsmodul $Q$ die Volumenelastizität. Der Elastizitätsmodul $E$ beschreibt die relative Längenänderung eines unter dem Einfluss einer Normalspannung stehenden Körpers in Spannungsrichtung. Die Poissonsche Querkontraktionszahl $\mu$ beschreibt die Längenänderung eines solchen Körpers senkrecht zur Richtung von $\vec{\sigma}$. Bei diesem Versuch wird nur der Schubmodul $G$ bestimmt. Für $E$ wird ein Literaturwert genommen. $Q$ und $\mu$ können aus den anderen beiden Modulen mittels

$$E = 2G(\mu + 1) \tag{1}$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \tag{2}$$

berechnet werden.
Der Schubmodul $G$ lässt sich aus der Torsion eines Drahtes bestimmen. Dieser wird an einer Seite fest eingespannt. An der anderen Seite greift an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ein Kräftepaar an. Dadurch entsteht ein Drehmoment auf den Draht, welches vom Hebelarm, der über den Probendurchmesser varriert, abhängig ist. Also wird die Probe in Hohlzylinder infinitesimaler Dicke $dr$ zerlegt. Für jeden wird das infinitesimale Drehmoment $dM$ angegeben und über den gesamten Probenradius $R$ integriert:

$$dM = rdK.$$

Mit der Schubspannung $\tau = \frac{dK}{dF}$, die als Tangentialkraft pro Flächeneinheit gegeben ist, ergibt sich:

$$dM = r\tau dF.$$

Die Schubspannung ist auch durch das Hookesche Gesetz

$$\tau = G\alpha$$

gegeben. Damit folgt

$$dM = rG\alpha dF. \tag{3}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Scherungswinkel $\alpha$, dem Torsionswinkel $\phi$ und der Probenlänge $L$ ist folgender:

$$\alpha = \frac{r\phi}{L}. \tag{4}$$

Der Flächeninhalt eines Kreisrings ist durch

$$dF = 2\pi r dr \tag{5}$$

gegeben. Setzt man (3), (4) und (5) zusammen, erhält man:

$$dM = 2\pi \frac{G}{L} \phi r^3 dr.$$

Also ist das gesamte Drehmoment

$$M = \int 2\pi \frac{G}{L} \phi r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \phi. \tag{6}$$

Dabei ist

$$D = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \tag{7}$$

der Proportionalitätsfaktor zwischen $M$ und $\phi$. An den am Torsionsdraht hängenden Körper greifen zwei entgegengesetzt wirkende Drehmomente an: das durch die Torsion des Drahtes (6) und das durch die Trägheit der rotierenden Masse.
Die Schwingungsdauer des Systems ist gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}}. \tag{8}$$

Das Trägheitsmoment $\theta$ setzt sich dabei aus dem Trägheitsmoment der Kugel $\theta_K$ und dem der Halterung der Kugel $\theta_H$ zusammen. Das Trägheitsmoment einer Kugel wird durch

$$\theta_K = \frac{2}{5} m_K R_K^2 \tag{9}$$

bestimmt. $\theta_H$ ist bei diesem Versuch angegeben.
Setzt man jetzt (7) und die Trägheitsmomente (9) und $\theta_H$ in (8) ein, ergibt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m_K R_K^2 + \theta_H}{\frac{\pi G R^4}{2L}}}.$$

Quadriert man diesen Ausdruck und stellt ihn nach $G$ um, erhält man für den Schubmodul $G$ die endgültige Gleichung

$$G = \frac{\frac{16}{5} \pi L m_K R_K^2 + 8\pi L \theta_H}{T^2 R^4}. \tag{10}$$

Das magnetische Moment ist gegeben durch

$$\vec{m} = p \cdot \vec{a}.$$

$p$ ist die Polstärke und $\vec{a}$ der Abstand der Pole. In einem homogenen Magnetfeld, wie es von der Helmholtz-Spule erzeugt wird, wirken auf einen Magneten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die an den Polen angreifen. Es gibt also keine resultierende Kraft, sondern ein Drehmoment $\vec{M}_{Mag}$, das den Magneten in Feldrichtung dreht:

$$\vec{M}_{Mag} = p\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Der Betrag des Drehmoments ist

$$M_{Mag} = mB\sin(\gamma).$$

Die Periodendauer der Torsionsschwingung ist jetzt natürlich eine andere. Sie ist gegeben durch

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{mB + D}}.$$

Quadriert man diesen Ausdruck und stellt ihn nach $m$ um, erhält man für das magnetische Moment

$$m = \frac{4\pi^2\theta}{Tm^2 B} - \frac{D}{B}. \tag{11}$$

# 3 Durchführung

Die Messapparatur besteht aus einem Torsionsdraht und einer an diesem aufgehängten Kugel. Das System soll Torsionsschwingungen ausführen. Die Schwingungsdauer soll dabei mit einer elektronischen Stoppuhr gemessen werden. Die Signale, die nötig sind, um die Stoppuhr zu steuern, werden durch eine Lichtschranke erzeugt. Eine Beleuchtungsvorrichtung neben der Apparatur wirft einen Lichtstrahl auf einen am Torsionsdraht angebrachten Spiegel. Wenn der Spiegel vom Lichtstrahl getroffen wird, gibt der Lichtdetektor, also die Photodiode, ein elektrisches Signal an das Zählwerk der Stoppuhr ab.
SKIZZE 1
Zuerst wird der Spiegel so justiert, dass der reflektierte Lichtstrahl ein wenig neben die Photodiode fällt. Die Beleuchtungsvorrichtung wird so eingestellt, dass ein scharfes Bild des Spaltes auf der Mattscheibe entsteht. Wenn das System durch Hin- und Herbewegen des Justierrads zu Torsionsbewegungen angeregt wird, wandert der Lichtstrahl zu einem Umkehrpunkt und wieder zurück. Dabei geht er über die Photodiode und löst einen elektrischen Impuls aus, der die Uhr startet. Der nächste Impuls entsteht, wenn der Lichtstrahl vom Umkehrpunkt zurückkommt und wieder über die Photodiode wandert. Dieser Impuls wird allerdings nicht benötigt. Der darauf folgende, dritte Impuls, der entsteht, wenn der Strahl vom anderen Umkehrpunkt zurückkehrt und die Diode überstreicht, stoppt die Uhr. Es wurde eine volle Periode ausgeführt. Der vierte Impuls löst

einen Rückstellimpuls für das Zählwerk aus. Die Stoppuhr wird also wieder auf Null gesetzt. Die nächste Periode wird danach genauso gemessen. Um das Schubmodul $G$ zu bestimmen, werden zehn Schwingungsdauern gemessen.
Zuletzt soll noch das magnetische Moment eines Permanentmagneten gemessen werden. Die Versuchsapparatur wird dafür erweitert. Es wird ein Helmholtz-Spulenpaar, welches ein homogenes Magnetfeld erzeugt, hinzugestellt. Die Kugel, die unten am Draht angehängt ist, wird in der Halterung so gedreht, dass der darin enthaltene Magnet parallel zum Magnetfeld steht. Die Dipolachse soll also in Ruhelage parallel zur Feldrichtung stehen.
SKIZZE 2
Der Spiegel muss jetzt so justiert werden, dass deutlich kleinere Auslenkungen als beim vorherigen Versuchsteil möglich sind. Das Justierrad wird kurz aus der Ruhelage ausgelenkt, um eine Drehschwingung zu erzeugen. Die Schwingungsdauer wird für jede eingestellte Stromstärke der Helmholtz-Spulen fünf mal gemessen. Es wird für fünf verschiedene Stromstärken gemessen.

## 4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von $N$ Werten wird durch

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

bestimmt. Die Standardabweichung der Stichprobe wird berechnet mit:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Das sogenannte Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz ist gegeben durch

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i)^2}.$$

Dabei ist $f$ eine von unsicheren Werten $x_i$ abhängige Funktion mit Standardabweichungen $\sigma_i$.

Bei der linearen Regression wird die Gerade

$$y(x) = mx + b$$

durch das Streudiagramm gelegt. Dabei ist $m$ die Steigung mit

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

und $b$ der $y$-Achsenabschnitt mit

$$b = \frac{\overline{y} \cdot \overline{x^2} - \overline{xy} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

(Wenn im Folgenden Mittelwert, Standardabweichung oder die Standardabweichung von Funktionen unsicherer Größen berechnet werden, werden diese Formeln verwendet.) Zur Auswertung und Berechnung der Fehler wurde Python, im Speziellen uncertainties.unumpy und numpy, benutzt.

# 5 Auswertung

Einige Eigenschaften der Messapparatur sind angegeben. Diese sind in Tabelle 1 dargestellt.

TABELLE 1

Dabei ist $m_K$ die Masse der Kugel, $2R_K$ der Durchmesser der Kugel, $R_K$ der Radius der Kugel und $\theta_H$ das Trägheitsmoment der Kugelhalterung. $N$ ist die Windungszahl der Helmholtz-Spule und $R_H$ ihr Radius.

## 5.1 Bestimmung des Schubmoduls $G$

Die Abmessungen des Torsionsdrahtes, die zur Berechnung des Schubmoduls $G$ benötigt werden, sind in Tabelle 2 zu finden. $L$ ist hier die Länge des Drahtes, $d$ sein Durchmesser und $R$ sein Radius. Die Periodendauern $T$ der Torsionsschwingungen sind in Tabelle 3 aufgelistet.

TABELLE 2

TABELLE 3

Die gemessenen Werte werden gemittelt. Damit ergibt sich für die Länge des Drahtes $L = (0{,}6860 \pm 0{,}0008)\,\mathrm{m}$. Der gemittelte Durchmesser ist Die mittlere Periodendauer ist $T = (20{,}036 \pm 0{,}012)\,\mathrm{s}$. Für den Schubmodul ergibt sich also mittels (10)

## 5.2 Bestimmung der anderen elastischen Konstanten

Die elastischen Konstanten lassen sich aus dem Schubmodul $G$ und dem Elastizitätsmodul $E$ mittels (2) bestimmen. Für $E$ wird ein Literaturwert genommen: Damit ergibt sich für das Kompressionsmodul und für die Poissonsche Querkontraktionszahö $\mu = 110 \pm 6$.

## 5.3 Bestimmung des magnetischen Moments

# 6 Diskussion

Die Methode zur Bestimmung des Schub- oder Torsionsmoduls $G$ und des magnetischen Moments $m$ sind nach der Auswertung als relativ genau zu bewerten. Die Messung des Elastizitätsmoduls $E$ konnte leider nicht durchgeführt werden, da die Messgeräte dafür nicht zur Verfügung standen. Der Wert des Schubmoduls $G$ liegt mit $(95 \pm 5)$ GPa unter Berücksichtigung des Fehlers bei einer Abweichung von 12,23 % vom Literaturwert. Ein Grund dafür könnte die vermutlich nicht ganz exakte Messung der Breite des Drahtes sein. Auch die Messung der Länge des Drahtes stellte sich als relativ kompliziert heraus, da der Draht recht schwierig zu erreichen war. Er war bereits in der Vorrichtung mit der Helmholtz-Spule verbaut. Auch die Reibung der Luft und eine eventuell zu starke Auslenkung der Vorrichtung können zu den Fehlern des Systems geführt haben. Das Gewicht und der Durchmesser der Kugel, sowie das Trägheitsmoment der Vorrichtung und die Werte des Helmholtz-Spulenpaars waren gegeben. Das Bauen der Schaltung wurde durch eine vorliegende Skizze unterstützt. Beim Messen der Schwingungsdauer $T$ kam es erst zu Schwierigkeiten, da der am Draht befestigte Spiegel zu sehr gewackelt hat. Dadurch hat die Photodiode ein zu schwaches Signal erhalten und konnte dieses nicht messen. Nachdem dieser Fehler behoben wurde, verlief die restliche Messung recht positiv, was sich auch an den gemessenen Daten erkennen lässt. Die Werte zur Bestimmung des magnetischen Moments, also die Drehschwingung $T_m$ in Korrelation zum magnetischen Fluss $B$, ergeben eine lineare Funktion, wenn man das Inverse des Quadrats von $T_m$ gegen $B$ aufträgt. Durch den Wert der Steigung und die Trägheitsmomente der Vorrichtung sowie der Kugel ließ sich das magnetische Moment problemlos berechnen. Ob dies einen realistischen Wert hat, lässt sich leider nicht sagen, da wir zu dem Permanentmagneten im Inneren der Kugel keinen Literaturwert kennen.

# 7 Literatur