

# **V103 - Biegung elastischer Stäbe**

Jan Herdieckerhoff  
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff  
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.10.2018, Abgabe: 06.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Amplitude einer gedämpften Schwingung . . . . .	3
2.2	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	3
2.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung . . . . .	4
2.4	Frequenzabhängigkeit der Phase . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung . . . . .	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstands . . . . .	6
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung . . . . .	7
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Effektiver Widerstand und Abklingdauer . . . . .	8
4.2	Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall . . . . .	10
4.3	Resonanzüberhöhung und Breite der Resonanzkurve . . . . .	10
4.4	Resonanzfrequenz . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>16</b>

## 1 Ziel

Das Ziel dieses Versuchs ist es, verschiedene Eigenschaften eines  $LRC$ -Schwingkreises anhand von erzwungenen bzw. gedämpften Schwingungen zu untersuchen.

## 2 Theorie

[1]

### 2.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung

Die Spannung lässt sich im Allgemeinen als Differentialgleichung darstellen. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die Spannung in einer Masche, also einem Schaltkreis, dass die Summe aller Spannungen gleich Null ergeben muss:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

Dabei ist  $U_R(t)$  die zeitlich veränderliche Spannung an dem Widerstand  $R$ ,  $U_C(t)$  die Spannung am Kondensator mit Kapazität  $C$  und  $U_L(t)$  die Spannung an der Spule mit Induktivität  $L$ , also die induktive Spannung. Für die gedämpfte Schwingung ergibt sich die Gleichung:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta), \quad (1)$$

wobei  $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$  ist.  $I$  ist die Stromstärke,  $A_0$  der Startwert,  $\nu$  die Frequenz und  $\eta$  eine Phasenverschiebung. Die Abklingdauer ist durch

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (2)$$

gegeben. Der effektive Dämpfungswiderstand bestimmt sich durch

$$R_{eff} = 4\pi\mu L. \quad (3)$$

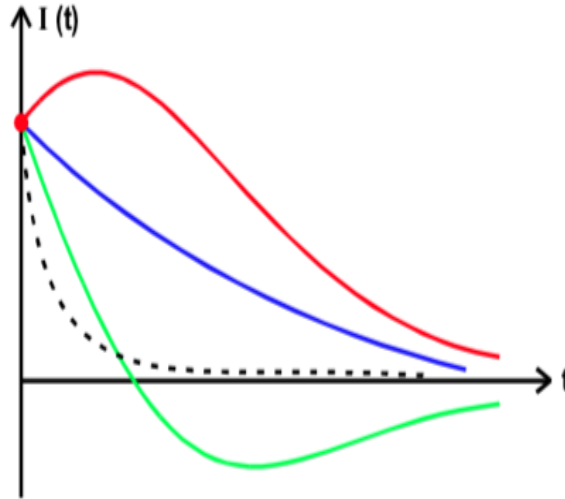
### 2.2 Aperiodischer Grenzfall

Beim aperiodischen Grenzfall geht die Spannung ohne Überschwingung am schnellsten gegen null (gestrichelte Linie Abb. 1). Dieser kann durch die Gleichung

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (4)$$

beschrieben werden. Der Dämpfungswiderstand dabei ist gegeben durch

$$R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}. \quad (5)$$



**Abbildung 1:** Mögliche zeitliche Verläufe des Stroms in einem Schwingkreis mit aperiodischer Dämpfung.

### 2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Abhängigkeit der Kondensatorspannung von der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f$$

der Erregerspannung lässt sich mittels

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (6)$$

beschreiben. Bei dem Phänomen der Resonanz erreicht  $U_C$  ein Maximum, das über der Amplitude  $U_0$  der Erregerspannung liegt:

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = q U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (7)$$

$U_C$  überschreitet bzw. unterschreitet die Erregerspannung also um den Faktor

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (8)$$

Dieser Faktor ist die Güte, bzw. Resonanzüberhöhung. Daraus lässt sich die Breite der Resonanzkurve bestimmen:

$$\frac{U_C(\omega_+)}{U_0} = \frac{U_C(\omega_-)}{U_0} = \frac{q}{\sqrt{2}}. \quad (9)$$

## 2.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Die Phase in Abhängigkeit von der Frequenz der Erregerspannung wird durch

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right)$$

beschrieben. Sie lässt sich auch anhand des Abstands der Nulldurchgänge  $\delta t$  zweier Schwingungen beschreiben:

$$\varphi = \frac{\delta t}{T} 2\pi. \quad (10)$$

Dabei ist  $T$  die Schwingungsdauer, die sich mittels

$$T = \frac{1}{f}$$

aus der Frequenz ergibt. Die Resonanzfrequenz ist gegeben durch

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (11)$$

An den Stellen  $\frac{\pi}{4}$  oder  $\frac{3}{4}\pi$  gilt für die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ :

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (12)$$

Die Differenz bzw. die Breite der Resonanzkurve ist also

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}. \quad (13)$$

## 3 Durchführung

### 3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

Im ersten Teil wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung untersucht. Im Anschluss kann daraus in der Auswertung ein Wert für den effektiven Dämpfungswiderstand ermittelt werden. Dafür wird mit einem Rechteckimpulsgenerator der Schwingkreis zu einer gedämpften Schwingung angeregt. In der Schaltung wird dazu der kleine Festwiderstand verwendet.

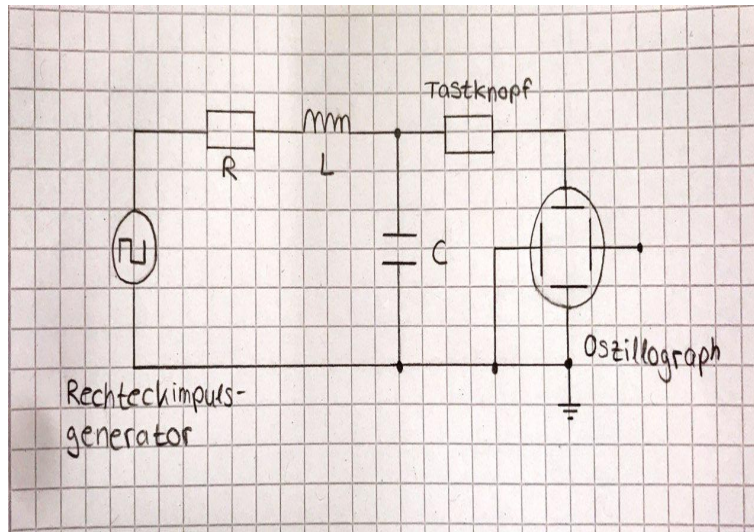


Abbildung 2: Schaltkreis zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Amplitude.

### 3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands

Durch Variation des regelbaren Widerstands kann der Wert  $R_{ap}$  ermittelt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall erreicht wird. Der Widerstand wird am Anfang auf seinen Minimalwert eingestellt. Nach und nach wird der Widerstand dann erhöht. Sobald ein Kurvenbereich auftritt, in dem die Steigung des Graphen  $\frac{dU_C}{dt}$  größer 0 ist, wurde  $R_{ap}$  überschritten. Auf diese Weise lässt sich ablesen, wie groß der Dämpfungswiderstand  $R_{ap}$  sein muss, um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen.

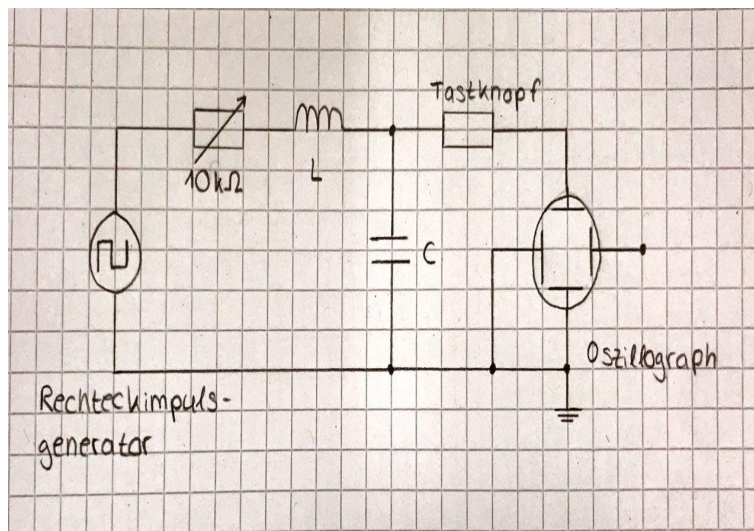
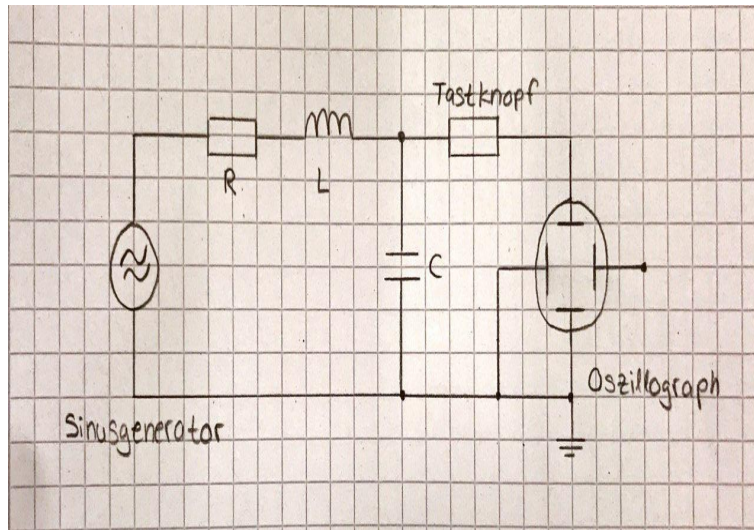


Abbildung 3: Schaltkreis zur Bestimmung des Dämpfungswiderstands beim aperiodischen Grenzfall.

### 3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Kondensatorspannung und deren Frequenzabhängigkeit wird an einem Serienresonanzkreis gemessen. Hierfür wird eine Wechselspannung an den Schwingkreis angeschlossen. An einem Sinusspannungsgenerator wird die Frequenz eingestellt. Die Kondensatorspannung wird mit einem Oszilloskop gemessen. Der Dämpfungswiderstand soll hierbei der größere der beiden Festwiderstände sein. Insgesamt werden 30 Messwertpaare aufgenommen. Im Bereich von 9 bis 29 kHz und im Bereich von 39 bis 59 kHz wird jeweils in 2 kHz Schritten gemessen. Im Bereich von 29 bis 39 kHz wird in 1 kHz Schritten gemessen.



**Abbildung 4:** Schaltkreis zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phase.

### 3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Anschließend wird die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung verglichen. Dafür wird der zeitliche Abstand der beiden Nulldurchgänge der Schwingungen gemessen. Die benötigte Periodendauer ergibt sich aus der eingestellten Frequenz. Die Messbereiche sind hier die selben wie in 3.3. Der Schaltkreis aus Abb. 4 wird auch für diese Messung verwendet.

## 4 Auswertung

Die aufgenommenen Werte der Spannungen  $U_C$  wurden mit dem Schalter am Tastkopf auf X10 gemessen. Deshalb werden die Werte mit einem Faktor 10 multipliziert.

#### 4.1 Effektiver Widerstand und Abklingdauer

Die Zeit und die Amplitude der Spannung sind in Tabelle 1 dargestellt. Um den effektiven Dämpfungswiderstand zu berechnen, werden die Werte linearisiert. Diese Werte sind in Tabelle 2 zu finden. In Abb. 5 sind die linearisierten Werte dargestellt. Es wird der Logarithmus der Spannung gegen die Zeit aufgetragen.

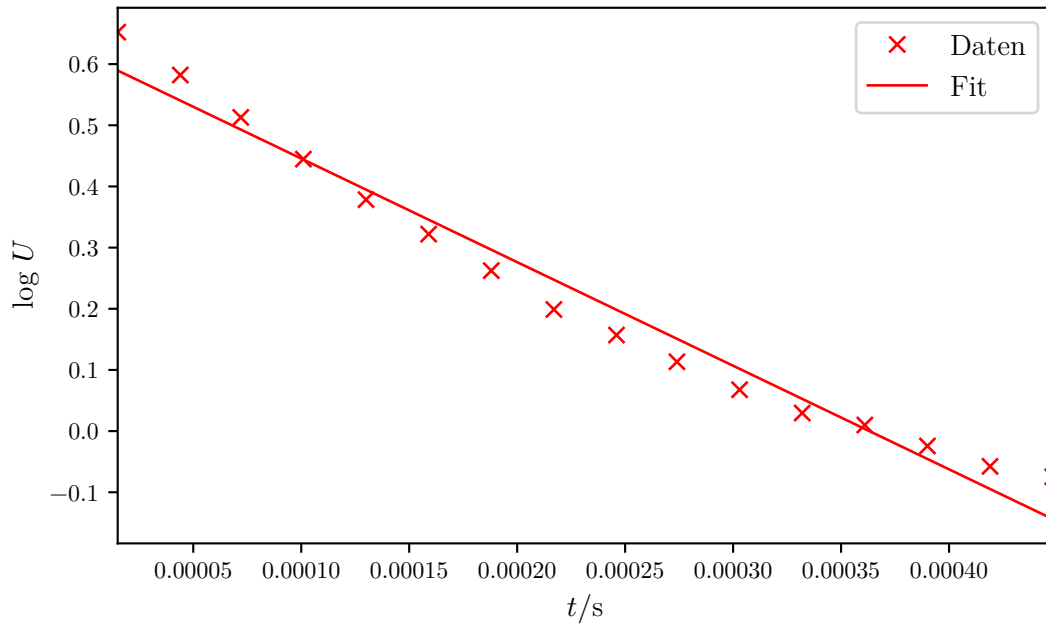
**Tabelle 1:** Die einhüllende Funktion der gedämpften Schwingung. Zeit  $t$  gegen die Spannung  $U$

$t / \mu\text{s}$	$U / \text{V}$
15,00	1,92
44,00	1,79
72,00	1,67
101,00	1,56
130,00	1,46
159,00	1,38
188,00	1,30
217,00	1,22
246,00	1,17
274,00	1,12
303,00	1,07
332,00	1,03
361,00	1,01
390,00	0,98
419,00	0,94
448,00	0,93



**Tabelle 2:** Die linearisierten Werte der einhüllende Funktion der gedämpften Schwingung. Zeit  $t$  gegen die logarithmierte Spannung  $\log U$

$t / \mu\text{s}$	$\log U$
15,00	0,65
44,00	0,58
72,00	0,51
101,00	0,44
130,00	0,38
159,00	0,32
188,00	0,26
217,00	0,20
246,00	0,16
274,00	0,11
303,00	0,07
332,00	0,03
361,00	0,01
390,00	−0,02
419,00	−0,06
448,00	−0,07



**Abbildung 5:** Die logarithmierte Spannung ist gegen die Zeit aufgetragen.

Daraus ergibt sich aus der Steigung und durch die Gleichung (3) der effektive Widerstand zu  $R_{eff} = (34,2 \pm 1,5) \Omega$ . Die Abklingdauer 2 ist somit  $T_{ex} = (0,000\,590 \pm 0,000\,026) \text{ s}$ . Der theoretische effektive Widerstand (3) ist  $R_{eff,theo} = (48,1 \pm 0,1) \Omega$  und die Abklingdauer (2)  $T_{ex,theo} = (0,000\,420\,4 \pm 0,000\,001\,5) \text{ s}$ .

## 4.2 Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall

Der Wert für den Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall lässt sich ablesen. Er ist  $R_{ap} = 3500,0 \Omega$ .

Der theoretisch berechnete Wert, der mittels (5) bestimmt wird, ist  $R_{ap,theo} = (4390 \pm 9) \Omega$ .

## 4.3 Resonanzüberhöhung und Breite der Resonanzkurve

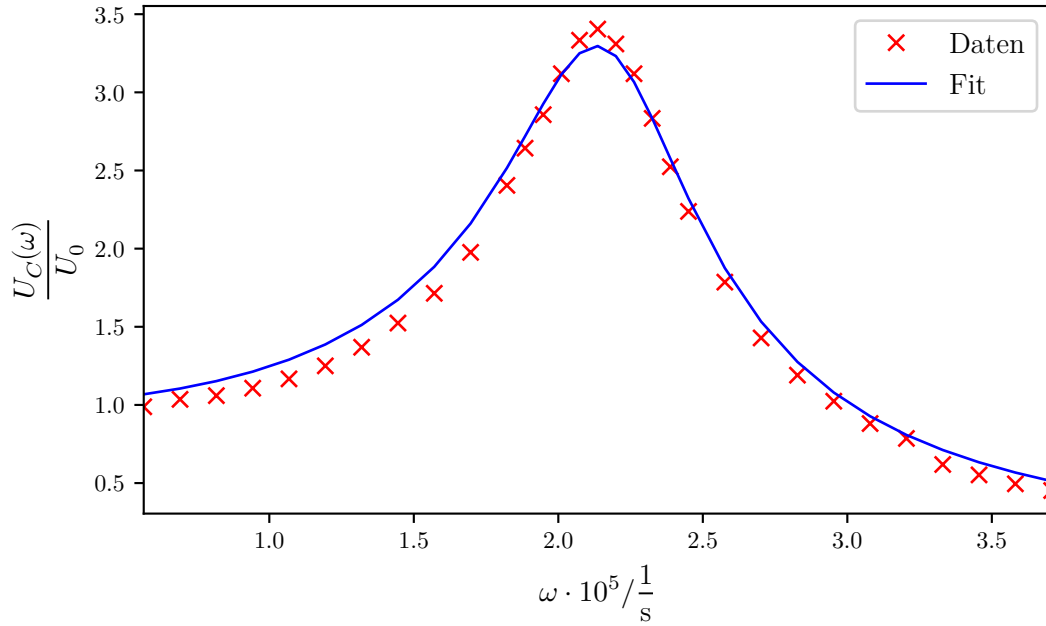
Tabelle 3 beinhaltet die Spannung der Kondensators sowie die Abstände der Nulldurchgänge der Kondensatorspannung und der Erregerspannung zu verschiedenen Frequenzen. Die Werte zur Bestimmung der Güte und der Breite der Resonanzkurve sind in Tabelle 4 aufgelistet. Die Abbildung 6 stellt diese Werte dar.

**Tabelle 3:** Kondensatorspannung und Generatorspannung. Verschiedene Frequenzen, Amplitude der Kondensatorspannung und Zeitdifferenz der beiden Spannungen.

$f$ /kHz	$2U$ /V	$t$ / $\mu$ s
9,00	1,66	2,20
11,00	1,74	1,60
13,00	1,78	1,60
15,00	1,86	1,80
17,00	1,96	1,50
19,00	2,10	1,70
21,00	2,30	1,80
23,00	2,56	1,80
25,00	2,88	2,20
27,00	3,32	2,80
29,00	4,04	3,00
30,00	4,44	3,60
31,00	4,80	4,20
32,00	5,24	4,80
33,00	5,60	5,60
34,00	5,72	6,60
35,00	5,56	7,60
36,00	5,24	8,40
37,00	4,76	9,00
38,00	4,24	9,40
39,00	3,76	9,80
41,00	3,00	10,00
43,00	2,40	9,80
45,00	2,00	9,80
47,00	1,72	9,80
49,00	1,48	9,40
51,00	1,32	9,20
53,00	1,04	9,00
55,00	0,93	8,60
57,00	0,83	8,40
59,00	0,76	8,20

**Tabelle 4:** Kreisfrequenz  $\omega$  gegen die Amplitude der Kondensatorspannung  $U_C$  durch die Generatorspannung  $U_0$  dividiert.

$\omega \cdot 10^5 \text{ / } \frac{1}{\text{s}}$	Amplitude $\frac{U_C(\omega)}{U_0}$
0,57	0,99
0,69	1,04
0,82	1,06
0,94	1,11
1,07	1,17
1,19	1,25
1,32	1,37
1,45	1,52
1,57	1,71
1,70	1,98
1,82	2,40
1,88	2,64
1,95	2,86
2,01	3,12
2,07	3,33
2,14	3,40
2,20	3,31
2,26	3,12
2,32	2,83
2,39	2,52
2,45	2,24
2,58	1,79
2,70	1,43
2,83	1,19
2,95	1,02
3,08	0,88
3,20	0,79
3,33	0,62
3,46	0,55
3,58	0,50
3,71	0,45



**Abbildung 6:** Die Amplitude der Kondensatorspannung geteilt durch die Generatorspannung ist gegen die Kreisfrequenz aufgetragen. Das Maximum ist die Güte. Es liegt bei der Resonanzfrequenz.

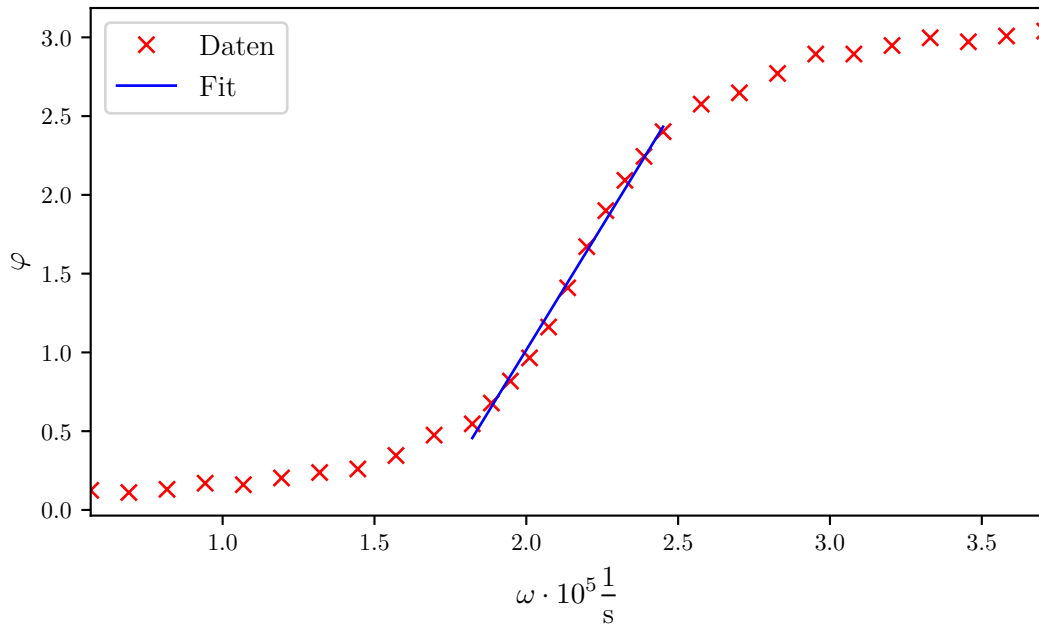
Daraus lässt sich der Wert für die Resonanzüberhöhung, bzw. die Güte  $q$  entnehmen. Sie ist nach Gleichung (7) das Maximum. Also ergibt sich für die Güte  $q = 3,40$ . Die Breite der Resonanzkurve ist mit Gleichung (9)  $\omega_+ - \omega_- = 62\,831,85 \frac{1}{s}$ . Der theoretisch errechnete Wert für die Güte, der mit Gleichung (8) bestimmt werden kann, ist  $q_{theo} = 4,309 \pm 0,010$ . Der mit Gleichung (13) berechnete Wert für die Breite der Resonanzkurve ist  $\omega_{+,theo} - \omega_{-,theo} = (5,040 \pm 0,016) \cdot 10^4 \frac{1}{s}$ .

#### 4.4 Resonanzfrequenz

Die Abstände der Nulldurchgänge der Kondensatorspannung und der Erregerspannung sind bereits in Tabelle 3 dargestellt. In Tabelle 5 befinden sich die zur Berechnung von  $\omega_{res}$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nötigen Werte, welche auch in Abb. 7 gegeneinander aufgetragen sind. Die Phase wird dabei durch Gleichung (10) bestimmt.

**Tabelle 5:** Kreisfrequenz  $\omega$  gegen die Phasenverschiebung  $\varphi$  der Kondensatorspannung  $U_C$  und der Generatorspannung  $U_0$ .

$\omega \cdot 10^5 \text{ } / \frac{1}{\text{s}}$	<i>Phase</i> $\varphi$
0,57	0,12
0,69	0,11
0,82	0,13
0,94	0,17
1,07	0,16
1,19	0,20
1,32	0,24
1,45	0,26
1,57	0,35
1,70	0,48
1,82	0,55
1,88	0,68
1,95	0,82
2,01	0,97
2,07	1,16
2,14	1,41
2,20	1,67
2,26	1,90
2,32	2,09
2,39	2,24
2,45	2,40
2,58	2,58
2,70	2,65
2,83	2,77
2,95	2,89
3,08	2,89
3,20	2,95
3,33	3,00
3,46	2,97
3,58	3,01
3,71	3,04



**Abbildung 7:** Die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung und der Generatorspannung ist gegen die Kreisfrequenz aufgetragen.

Aus Abbildung 7 kann man die gesuchten Werte in Verbindung mit Tabelle 4 entnehmen. Die Resonanzfrequenz liegt an der Stelle des Maximums und ist somit  $\omega_{res} = 213\,628,30 \frac{1}{s}$ . Die Werte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind näherungsweise  $\omega_-$  und  $\omega_+$ .  $\omega_1$  und  $\omega_2$  haben die Werte  $\omega_1 = 182\,212,37 \frac{1}{s}$  und  $\omega_2 = 245\,044,23 \frac{1}{s}$ . Die Resonanzfrequenz lässt sich in der Theorie durch Gleichung (11) bestimmen. Der Wert für diese ist  $\omega_{res,theo} = (2,142 \pm 0,004) \cdot 10^5 \frac{1}{s}$ . Für die Frequenzen  $\omega_{1,theo}$  und  $\omega_{2,theo}$  ergibt sich mittels Gleichung (12):  $\omega_{1,theo} = (1,934 \pm 0,004) \cdot 10^5 \frac{1}{s}$  und  $\omega_{2,theo} = (2,438 \pm 0,005) \cdot 10^5 \frac{1}{s}$ .

## 5 Diskussion

Im ersten Aufgabenteil wurde der Wert für den effektiven Widerstand bestimmt. Dieser liegt bei  $34,2 \pm 1,5 \Omega$ , was somit einer relativen Abweichung von 28,9 % zum Literaturwert ( $48,1 \pm 0,1 \Omega$ ) entspricht. Die Messung ist also nicht als besonders exakt zu bewerten. Dasselbe gilt auch für die Periodendauer  $T_{ex}$ . Der bestimmte Wert und der Literaturwert haben eine Abweichung von 40,34 %.

Auch die Messung des Widerstands, bei dem der aperiodische Grenzfall zum ersten Mal auftritt, hat eine ähnlich starke Abweichung. Der relative Fehler liegt bei 20,27 %.

Der relative Fehler der Resonanzüberhöhung  $q$  liegt bei 20,97 %. Dies passt auch in die Größenordnung der vorherigen Abweichungen. Grund hierfür könnte sein, dass mit

einem konstanten Wert für  $U_0$  gerechnet wurde, obwohl dieser im Bereich um  $q$  niedriger geworden ist. Im Gegensatz dazu ist der Wert  $\omega_{res}$  im Experiment nah an dem theoretisch berechneten Wert. Die Abweichung beträgt hierbei lediglich 0,267 %. Die Differenz der Werte  $\omega_-$  und  $\omega_+$  hat zur Differenz der theoretisch berechneten Werte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  eine Abweichung von 24,66 %. Dieser Wert liegt wieder in der Größenordnung der vorherigen Fehlerwerte.

Somit ist die Messung insgesamt als relativ exakt zu bezeichnen. Es gab lediglich einen durchgehenden Fehler in der Höhe von ca. 20 bis 30%.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2018.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.