

V302 - Elektrische Brückenschaltungen

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018, Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Brückenspannung und Abgleichbedingung	3
1.2	Brückenschaltungen	4
1.2.1	Wheatstonesche Brücke	4
1.2.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.2.3	Induktivitätsmessbrücke	4
1.2.4	Maxwell-Brücke	5
1.2.5	Wien-Robinson-Brücke	5
2	Durchführung	6
2.1	Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke	6
2.2	Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke	6
2.3	Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke	7
2.4	Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke	8
2.5	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke	8
2.6	Bestimmung des Klirrfaktors	9
3	Auswertung	9
3.1	Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke	9
3.2	Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke	9
3.3	Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke	10
3.4	Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke	11
3.5	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke	11
3.6	Bestimmung des Klirrfaktors	14
4	Diskussion	14
	Literatur	16

1 Theorie

1.1 Brückenspannung und Abgleichbedingung

Die Spannung U , also die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, wird bei Brückenschaltungen in Abhängigkeit von ihren Widerstandsverhältnissen untersucht. Bei einer allgemeinen Brückenschaltung (s. Abb 1), bezeichnet man die Spannung, die zwischen Punkt A und B auftritt, als Brückenspannung U_{Br} . Die Spannung U_S wird dabei als Speisespannung bezeichnet.

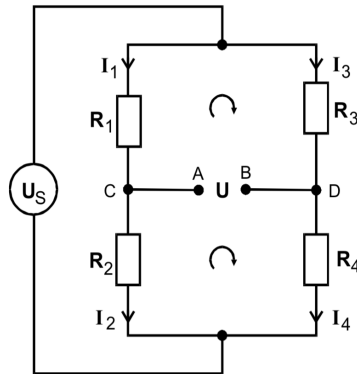


Abbildung 1: Allgemeine Brückenschaltung.

Wichtig sind dabei die zwei Kirchhoffschen Gesetze. Das erste besagt, dass die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein muss. Das zweite Gesetz wird auch Maschenregel genannt und besagt, dass innerhalb einer Masche, also einem in sich geschlossenen Stromkreis, die Summe der elektromotorischen Kräfte, also zum Beispiel die Spannung der Stromquelle, gleich dem Produkt aus der Stromstärke und den Widerständen der Bauteile sein muss.

Aus diesen Gesetzmäßigkeiten lässt sich folgern, dass die Brückenspannung U_{Br} und die Speisespannung U_S in Abb. 1 in folgendem Verhältnis zueinander stehen:

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S.$$

Eine sogenannte abgeglichene Brücke ist dann erreicht, wenn die Brückenspannung verschwindet. Dies passiert, wenn die Abgleichbedingung

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

erfüllt ist. Da die Abgleichbedingung nur vom Verhältnis der Widerstände abhängt, ist mit der Brückenschaltung eine Widerstandsmessung durchführbar. Ist ein Widerstand unbekannt, so wird einer der drei anderen Widerstände so lange variiert, bis die Brückenspannung verschwindet. Anschließend kann über die Abgleichbedingung der unbekannte Widerstand bestimmt werden.

Bei Kapazitiv- und Induktivwiderständen ist es sinnvoll, komplexe Widerstandsoperatoren zu benutzen. Eine Brückenschaltung mit vier komplexen Widerständen hat die gleiche Abgleichbedingung wie eine reele Brückenschaltung. Der einzige Unterschied ist, dass sich daraus zwei Bedingungen ergeben. Der Realteil X und der Imaginärteil Y müssen dabei separiert voneinander betrachtet werden. Die erste Bedingung ist:

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3.$$

Die zweite Bedingung lautet:

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2.$$

1.2 Brückenschaltungen

1.2.1 Wheatstonesche Brücke

Diese Brücke enthält nur ohmsche Widerstände (s. Abb 2). Sie kann, wie oben beschrieben, zur Bestimmung eines unbekannten Widerstands R_X benutzt werden:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (1)$$

1.2.2 Kapazitätsmessbrücke

Für die Berechnung der Kapazität muss die Eigenschaft eines realen Kondensators berücksichtigt werden, dass dieser zum Teil Energie in Wärme umwandelt. Dafür wird ein Ersatzschaltbild betrachtet, bei dem ein fiktiver ohmscher Widerstand mit dem Kondensator in Reihe geschaltet wird. Für die Messung der Kapazität eines unbekannten Kondensators C_X gilt somit unter Berücksichtigung der Abgleichbedingungen für den ohmschen Widerstand

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (2)$$

und für die Kapazität des Kondensators

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (3)$$

1.2.3 Induktivitätsmessbrücke

Analog zur Kapazitätsmessbrücke verliert auch ein induktives Bauteil Energie, indem diese irreversibel in Wärme umgewandelt wird. Diese Verluste werden erneut durch einen fiktiven Widerstand kompensiert. Die Formeln ergeben sich somit zu

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4)$$

und für die Induktivität zu

$$L_X = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (5)$$

1.2.4 Maxwell-Brücke

Da die Induktivitätsmessbrücke insbesondere bei niedrigen Frequenzen aufgrund der zweiten Spule ähnlich starke Verluste hat, wird eine andere Schaltung, die anstelle der Normalinduktivität L_2 eine Normalkapazität enthält, benutzt. Diese Schaltung heißt Maxwell-Brücke (s. Abb 5). Der Kondensator sollte eine möglichst verlustarme Kapazität C_4 besitzen. Aus den Abgleichbedingungen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (6)$$

und

$$L_X = R_2 R_3 C_4. \quad (7)$$

1.2.5 Wien-Robinson-Brücke

Bei den vorherigen Schaltungen ist die Frequenz für die Ergebnisse nicht relevant. Die Wien-Robinson-Brücke (s. Abb. 6) ist eine frequenzabhängige Brückenschaltung. Nach Umformung der Formeln, die sich aus der Abb. 6 ergeben, erkennt man, dass sich ein Verhältnis zwischen den Spannungen U_{Br} und U_S ergibt. Es gilt:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega)^2 + 9\Omega^2}. \quad (8)$$

Dabei ist

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (9)$$

ω_0 ist wiederum gegeben durch

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (10)$$

Der Klirrfaktor k beschreibt den Oberwellengehalt im Vergleich zur Grundwelle. Da die Brückenspannung aufgrund von Oberwellen, die durch den Generator erzeugt werden, bei der Frequenz f_0 nicht Null wird, sondern nur ein Minimum erreicht, ist die Kleinheit des Klirrfaktors ein Maß für die Qualität eines Spannungsgenerators.

Es wird angenommen, dass die Summe der Oberwellen aus der zweiten Oberwelle besteht. Damit ist der Klirrfaktor:

$$k = \frac{U_2}{U_S}.$$

U_2 ist dabei

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{n(2)},$$

wobei der Faktor $n(2)$ das Verhältnis (8) ist: $n(2) = \frac{\sqrt{37}}{37}$. Da $\omega = 2 \cdot \omega_0$ gilt, ergibt sich für Ω durch Gleichung (9) $\Omega = 2$. Damit wird der Klirrfaktor mittels

$$k = \frac{U_{Br}}{U_S \cdot n(2)} = \frac{U_{Br} \cdot 37}{U_S \cdot \sqrt{37}}. \quad (11)$$

berechnet.

2 Durchführung

Die Messungen werden mehrfach ausgeführt, um ein Maß für die Zufallsfehler zu bekommen. Es wird Wechselstrom verwendet. Die Frequenz wird auf 1 kHz gestellt. Die Toleranz der Referenzbauteile R_2 , C_2 und L_2 liegt bei $\pm 0,2\%$, wobei diese in der Auswertung vernachlässigt wird, da der Fehler der Ergebnisse über die Standardabweichung der Mittelwerte gebildet wird.

2.1 Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke

Mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung (s. Abb. 2) werden im ersten Aufgabenteil zwei unbekannte Widerstände ausgemessen. Das Potentiometer hat einen Gesamtwiderstand von $1\text{ k}\Omega$. Der Drehknopf des Potentiometers wird für jeden der beiden Widerstände jeweils so eingestellt, dass die Brückenspannung Null wird. Der am Drehknopf angezeigte Wert ist der Wert für R_3 in Promille. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird. Der Widerstand R_2 wird hier mehrfach variiert. Für jeden unbekannten Widerstand R_X werden drei unterschiedliche Widerstände R_2 benutzt.

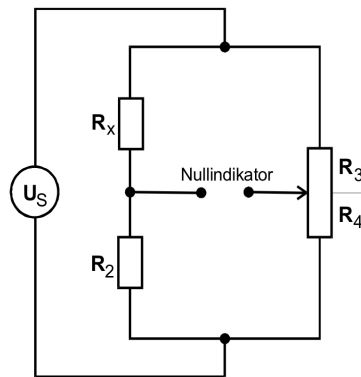


Abbildung 2: Wheatstonesche Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung des Widerstandes R_X genutzt. Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. R_2 ist bekannt.

2.2 Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke

Als nächstes sollen anhand einer Kapazitätsmessbrücke die Kapazität und der Verlustwiderstand von einem Kondensator gemessen werden.

Zunächst wird das Minimum der Brückenspannung mittels R_3/R_4 eingestellt. Anschließend wird R_2 so justiert, dass die Spannung kleiner wird. Die Stellglieder werden weiterhin alternierend so justiert, dass die Brückenspannung Null wird. Die Werte für R_2 und R_3 können an den Potentiometern abgelesen werden. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird.

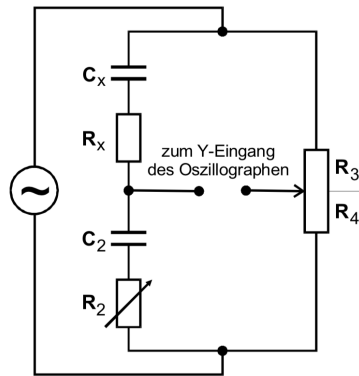


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung der Kapazität C_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild des Kondensators. Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. Der Widerstand R_2 ist verstellbar. C_2 ist bekannt.

2.3 Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivität und der Verlustwiderstand einer unbekannten Spule werden an einer Induktivitätsmessbrücke gemessen.

Zunächst wird das Minimum der Brückenspannung mittels R_3/R_4 eingestellt. Anschließend wird R_2 so justiert, dass die Spannung kleiner wird. Die Stellglieder werden weiterhin alternierend so justiert, dass die Brückenspannung Null wird. Die Werte für R_2 und R_3 können an den Potentiometern abgelesen werden. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird.

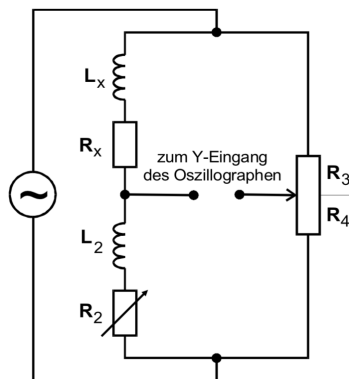


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung von L_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild der Induktivität (Spule). Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. Der Widerstand R_2 ist verstellbar. L_2 ist bekannt.

2.4 Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke

Anschließend wird die Spule ein zweites Mal mit Hilfe der Maxwell-Brücke durchgemessen. R_3 und R_4 werden alternierend so eingestellt, dass die Brückenspannung Null wird.

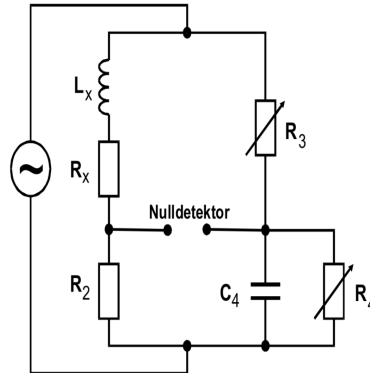


Abbildung 5: Maxwell-Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung von L_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild der Induktivität (Spule). Die Widerstände R_3 und R_4 sind verstellbar. R_2 und C_4 sind bekannt.

2.5 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke

Um die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung U_{Br} zu messen, wird eine Wien-Robinson-Brücke verwendet.

Die eingestellten Frequenzen liegen in einem Bereich von 20 bis 30 000 Hz. Die Werte für die Brückenspannung bei bestimmten eingestellten Frequenzen lassen sich am Oszillographen ablesen. Die eingestellte Spannung U_S lässt sich ebenfalls mit dem Oszillographen bestimmen.

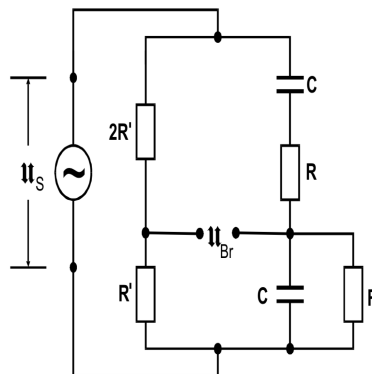


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung der Brückenspannung U_B genutzt. Die Widerstände R' und R , sowie die Kapazität C sind bekannt.

2.6 Bestimmung des Klirrfaktors

Als letztes soll der Klirrfaktor des verwendeten Generators bestimmt werden. Dabei wird das Minimum der Brückenspannung U_{Br} bestimmt. Daraus lässt sich der Klirrfaktor errechnen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke

Die verschiedenen Werte für die Widerstände R_3 , R_4 und R_2 , die zur Berechnung des Widerstandes R_X nötig sind, befinden sich in Tabelle 1. Dabei beziehen sich die ersten drei Zeilen auf den Widerstand R_{X1} und die letzten drei auf den Widerstand R_{X2} . Für jeden Widerstand R_X werden drei verschiedene Widerstände R_2 verwendet.

Tabelle 1: Die verschiedenen Werte der bekannten Widerstände der Wheatstoneschen Brücke. In Zeile 1-3 werden die Werte für den Widerstand 13 angegeben. In Zeile 4-6 für Widerstand 14.

R_3/Ω	R_4/Ω	R_2/Ω
491,0	509,0	332,0
324,0	676,0	664,0
243,0	757,0	1000,0
728,0	272,0	332,0
578,0	422,0	664,0
473,0	527,0	1000,0

Die gesuchten Widerstände lassen sich daraus mit Gleichung (1) berechnen. Für den ersten Widerstand ergibt sich

$$R_{X1} = (319,8 \pm 1,2) \Omega.$$

Der zweite Widerstand berechnet sich zu

$$R_{X2} = (899 \pm 9) \Omega.$$

3.2 Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke

Die Werte zur Berechnung der Kapazität und des Verlustwiderstandes sind in Tabelle 2 aufgelistet. Für alle drei Kapazitäten C_2 liegen jeweils drei Messreihen vor.

Tabelle 2: Die verschiedenen Werte der Widerstände und Kapazitäten einer Kapazitätsmessbrücke.

R_3/Ω	R_2/Ω	R_4/Ω	C_2/nF
741,0	183,0	259,0	994,0
802,0	110,0	198,0	994,0
770,0	135,0	230,0	994,0
730,0	185,0	270,0	750,0
708,0	204,0	292,0	750,0
727,0	203,0	273,0	750,0
601,0	368,0	399,0	450,0
607,0	372,0	393,0	450,0
611,0	338,0	389,0	450,0

Der Verlustwiderstand lässt sich mittels Gleichung (2) zu

$$R_X = (510 \pm 40) \Omega$$

berechnen. Die Kapazität ergibt sich mit Gleichung (3) zu

$$C_X = (293 \pm 26) \text{ nF}.$$

3.3 Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke

Für die Berechnung des Verlustwiderstandes sowie der Induktivität einer Spule werden zwei verschiedene Induktivitäten L_2 verwendet. Die Messdaten befinden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Die verschiedenen Werte der Widerstände und der Spule einer Induktivitätsmessbrücke.

R_3/Ω	R_2/Ω	R_4/Ω	L_2/mH
580,0	69,0	580,0	20,1
558,0	79,0	558,0	20,1
579,0	69,0	579,0	20,1
649,0	57,0	649,0	14,6
646,0	56,0	646,0	14,6
649,0	56,0	649,0	14,6

Der Verlustwiderstand wird mit Gleichung (4) berechnet:

$$R_X = (100 \pm 4) \Omega.$$

Für die Induktivität ergibt sich mit Gleichung (5)

$$L_X = (26,9 \pm 0,8) \text{ mH}.$$

3.4 Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke

Für die erneute Berechnung der Induktivität und des Verlustwiderstandes mit der Maxwell-Brücke werden der Widerstand $R_2 = 1,0 \text{ k}\Omega$ und die Kapazität $C_4 = 992 \text{ nF}$ verwendet. Die eingestellten Widerstände R_3 und R_4 befinden sich in Tabelle 4.

Tabelle 4: Die verschiedenen Widerstände für eine Maxwell-Brücke.

R_3/Ω	R_4/Ω
26,0	263,0
27,0	267,0
26,0	269,0

Der Verlustwiderstand, welcher mit Gleichung (6) berechnet wird, ergibt sich zu

$$R_X = (98,9 \pm 1,8) \Omega.$$

Die mit Gleichung (7) errechnete Induktivität ist

$$L_X = (26,1 \pm 0,5) \text{ mH}.$$

3.5 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke

Es werden die folgenden Bauteile verwendet: $R' = 332 \Omega$, $2R' = 664 \Omega$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 420 \text{ nF}$. Die Speisespannung beträgt $U_S = 2,5 \text{ V}$. Die doppelte Brückenspannung in Abhängigkeit von der Frequenz ist in Tabelle 5 dargestellt. Die Werte ω/ω_0 und U_{Br}/U_S befinden sich in Tabelle 6, wobei die Spannung $U_S = 2,5 \text{ V}$ ist. ω_0 ist dabei die Frequenz, bei der das Brückenspannungsminimum liegt:

$$\omega_{0,exp} = 2513,27 \frac{1}{\text{s}}.$$

Der mittels Gleichung (10) theoretisch errechnete Wert für ω_0 liegt bei

$$\omega_{0,theo} = 2380,95 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tabelle 5: Die Frequenz gegen den doppelten Wert der Amplitude der Brückenspannung.

f/Hz	$2U_{Br}/\text{V}$
20,00	1,68
50,00	1,62
100,00	1,32
150,00	0,95
200,00	0,66
250,00	0,40
300,00	0,25
400,00	0,06
500,00	0,30
600,00	0,49
700,00	0,64
800,00	0,80
900,00	0,90
1000,00	0,96
1100,00	1,01
1200,00	1,04
1300,00	1,09
1400,00	1,13
1500,00	1,20
1600,00	1,19
1700,00	1,19
1800,00	1,22
1900,00	1,23
2000,00	1,28
2500,00	1,31
3000,00	1,37
4000,00	1,42
5000,00	1,41
6000,00	1,46
7000,00	1,41
10 000,00	1,38
11 000,00	1,35
12 000,00	1,37
13 000,00	1,34
14 000,00	1,27
15 000,00	1,31
16 000,00	1,28
17 000,00	1,31
18 000,00	1,35
19 000,00	1,35

Tabelle 6: Die Kreisfrequenz gegen das Verhältnis aus Brückenpannung durch Speisepannung.

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{U_{Br}}{U_S}$
0,05	0,34
0,13	0,32
0,25	0,26
0,38	0,19
0,50	0,13
0,62	0,08
0,75	0,05
1,00	0,01
1,25	0,06
1,50	0,10
1,75	0,13
2,00	0,16
2,25	0,18
2,50	0,19
2,75	0,20
3,00	0,21
3,25	0,22
3,50	0,23
3,75	0,24
4,00	0,24
4,25	0,24
4,50	0,24
4,75	0,25
5,00	0,26
6,25	0,26
7,50	0,27
10,00	0,28
12,50	0,28
15,00	0,29
17,50	0,28
25,00	0,28
27,50	0,27
30,00	0,27
32,50	0,27
35,00	0,25
37,50	0,26
40,00	0,26
42,50	0,26
45,00	0,27
47,50	0,27

Die Werte aus Tabelle 6 sind in Abbildung 7 gegeneinander aufgetragen.

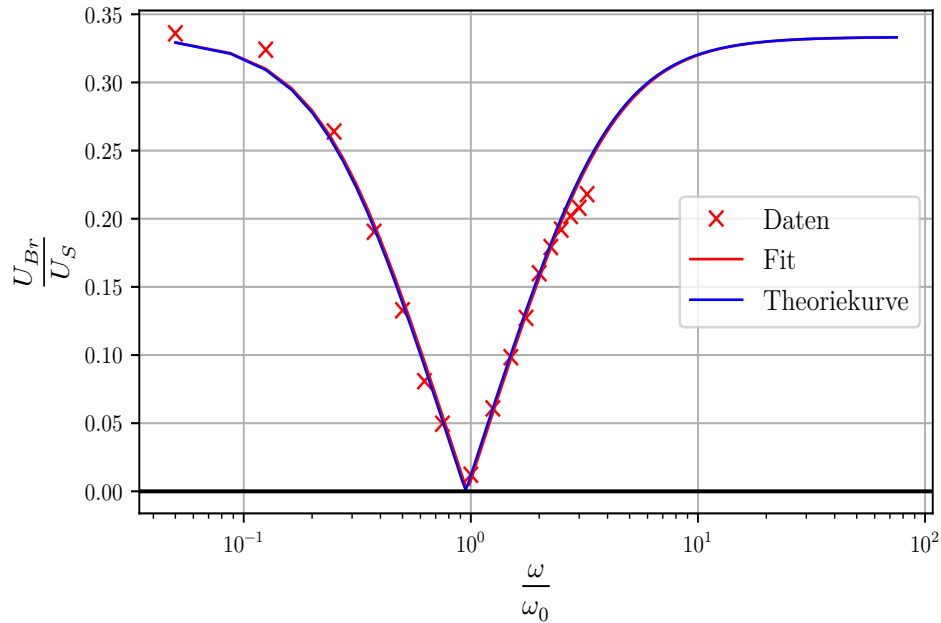


Abbildung 7: U_{Br}/U_S ist gegen ω/ω_0 aufgetragen. Es sind die Daten, ein Fit und die Theoriekurve eingezeichnet.

3.6 Bestimmung des Klirrfaktors

Der minimale Wert der Brückenspannung liegt bei $U_{Br,Min} = 30,4 \text{ mV}$ bei einer Frequenz von $\omega_0 = 2\pi \cdot 400$.

Der Klirrfaktor, der mit Gleichung (11) bestimmt werden kann, ergibt sich zu

$$k = 0,148.$$

4 Diskussion

Die Messung des Widerstands bei der Wheatstone Brückenschaltung liefert bei dem Widerstand Nummer 13 einen Wert von $319,8 \Omega$ mit einem relativen Fehler von $0,38 \%$ und beim Widerstand Nummer 14 einen Wert von 899Ω mit einem relativen Fehler von $1,00 \%$.

Für den Widerstand des Bauteils Nummer 8 ergibt sich ein Wert von 510Ω und ein relativer Fehler von $7,84 \%$. Für die Kapazität ergibt sich ein Wert von 293 nF mit einem relativen Fehler von $8,87 \%$.

Die Induktivität der Spule Nummer 19 wurde auf einen Wert von $26,9 \text{ mH}$ bestimmt. Der relative Fehler liegt dabei bei $2,97 \%$. Der Widerstand hatte einen Wert von 100Ω und sein relativer Fehler wurde auf 4% bestimmt. Die Spule wurde mit der Maxwell-Brücke

erneut gemessen. Dabei kam für die Spule ein Wert von 26,1 mH und für den relativen Fehler ein Wert von 1,91 % heraus. Die Werte des Widerstands lagen bei 98,9 Ω und 1,82 %. Die relative Abweichung der Induktivität der Spulen beträgt 2,97 %. Die relative Abweichung liegt für die Widerstände bei 1,1 %.

Die Messung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung der Wien-Robinson-Brücke lässt einen Wert für ω_0 bei 2513,27 $\frac{1}{s}$ erkennen. Der theoretische Wert liegt bei 2380,95 $\frac{1}{s}$. Die Abweichung dieser beiden Werte liegt bei 5,26 %. Der Klirrfaktor liegt bei 0,148, was relativ hoch ist.

Die Werte liegen alle ziemlich genau in dem zu erwartenden Bereich und auch die Abweichung ist nicht besonders groß. Somit ist die Messung als recht exakt zu bewerten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 302 - Elektrische Brückenschaltungen*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.