V353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.11.2018, Abgabe: 20.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

In diesem Versuch soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises untesucht und ausgewertet werden.

2 Theorie

[1]

2.1 Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators

Die Zeitkonstante RC kann durch die Messung des Auflade- bzw. Entladevorgangs eines Kondensators bestimmt werden. Der Aufladevorgang eines Kondensators mit Kapazität C, der über einen Widerstand R mit der Spannung U_0 verbunden ist, wird durch die Gleichung

$$U(t) = U_0(1 - \mathbf{exp}(-\frac{t}{RC}))$$

beschrieben. Der Vorgang wird durch die Spannung U zum Zeitpunkt t dargestellt. Auf dieselbe Art und Weise wird der Entladevorgang durch

$$U(t) = U_0\mathbf{exp}(-\frac{t}{RC})$$

beschrieben. Die Zeitkonstante wird anhand der Steigung einer linearen Regression bestimmt. Dazu wird die Gleichung für die Entladung eines Kondensators in die Form $y = mx$ gebracht:

$$-\log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right) = \frac{1}{RC}t. \tag{1}$$

Der negative logarithmierte Quotient der Kondensatorspannung durch die maximale Spannung wird gegen die Zeit aufgetragen. Die Steigung bei der linearen Regression ist gegeben durch

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Die Steigung, wie aus Gleichung (1) entnommen werden kann, wird durch

$$m = \frac{1}{RC}$$

beschrieben. Also wird $\frac{1}{RC}$ bestimmt durch

$$\frac{1}{RC} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{2}$$

Dabei sind, ebenfalls aus Gleichung (1) entnehmbar, $x = t$ und $y = -\log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$. Der Fehler der inversen Zeitkonstante ist gegeben durch

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) - y_i, \tag{3}$$

wobei N die Anzahl der $f(x_i)$ und y_i ist. Der Fehler gilt ebenfalls für die im Folgenden beschriebenen Zeitkonstanten.

2.2 Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung

Eine Wechselspannung $U(t)$ wird durch die Formel

$$U(t) = U_0 \mathbf{cos} \omega t$$

dargestellt. Dabei ist U_0 die maximale Spannung. $\mathbf{cos}\omega t$ beschreibt die Oszillation um den Nullpunkt in Abhängigkeit von der Frequenz ω und der Zeit t. Mit einer Phasenverschiebung ϕ verschiebt sich die Oszillation der Kondensatorspannung um einen gewissen Wert. Die neue Formel lautet dann

$$U_C(t) = U_0 \mathbf{cos}(\omega t + \phi).$$

Ein RC-System setzt sich nach der zweiten Kirchhoffschen Regel aus der Spannung U_R des Widerstands und der Spannung U_C des Kondensators zusammen. Es gilt

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t).$$

Mit den oberen Gleichungen für $U(t)$, $U_C(t)$ und dem Ohmschen Gesetz ergibt sich

$$U_0 \mathbf{cos}\omega t = -A(\omega) RC \mathbf{sin}(\omega t + \phi) + A(\omega)\mathbf{cos}(\omega t + \phi),$$

wobei für die Phasenverschiebung

$$\phi(\omega) = \mathbf{arctan}(-\omega RC) \tag{4}$$

gilt. Die Amplitude $A(\omega)$ ist

$$A(\omega) = -\frac{\mathbf{sin}\phi}{\omega RC} U_0. \tag{5}$$

Durch einige Umformungen ergibt sich dann

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \tag{6}$$

Dabei wird die Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannung durch die Frequenz ω der Erregerspannung beeinflusst. Um die Zeitkonstante RC anhand der Amplitude der

Kondensatorspannung zu bestimmen, wird wieder eine lineare Regression $y = mx$ durchgeführt. Die Gleichung (6) wird so umgeformt, dass $\frac{1}{RC}$ die Steigung m ist:

$$\sqrt{\frac{1}{(\frac{U_0}{A(\omega)})^2 - 1}} = \frac{1}{RC}\frac{1}{\omega}. \tag{7}$$

Für x und y ergeben sich also: $x = \frac{1}{\omega}$ und $y = \sqrt{\frac{1}{(\frac{U_0}{A(\omega)})^2 - 1}}$. Durch die Steigung der Geraden kann dann $\frac{1}{RC}$ mittels (2) bestimmt werden.

2.3 Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung

Die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ lässt sich mit

$$\phi = \frac{a}{T}2\pi \tag{8}$$

bestimmen. Dabei ist a der Abstand der Nulldurchgänge der Spannung des Kondensators und der Spannung des Generators. T ist die Schwingungsdauer, die durch

$$T = \frac{1}{\omega}$$

gegeben ist. ω ist die Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f.$$

Um die Zeitkonstante zu berechnen, wird wieder eine lineare Regression benötigt. Die Gleichung (4) wird so umgestellt, dass die Steigung $m = \frac{1}{RC}$ ist:

$$-\frac{1}{\mathbf{tan}(\phi(\omega))} = \frac{1}{RC}\frac{1}{\omega}. \tag{9}$$

Dann ist $x = \frac{1}{\omega}$ und $y = -\frac{1}{\mathbf{tan}(\phi(\omega))}$. RC kann somit wieder durch (2) bestimmt werden.

2.4 RC-Schwingkreis als Integrator der Spannung U(t)

Ein RC-Schwingkreis kann dazu genutzt werden eine zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ unter bestimmten Bedingungen zu integrieren. Es wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Spannung des Kondensators U_C und dem Integral $\int U(t)dt$ festgestellt. Dieser ergibt sich durch

$$U_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')dt'. \tag{10}$$

2.5 Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung

Die Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ von der Phase ϕ ist in Gleichung (5) zu sehen. Bei gegebenem Wert für die Zeitkonstante lässt sie die Phase also mittels

$$\phi = \mathbf{arcsin}(-\frac{A(\omega)}{U_0}\omega RC) \tag{11}$$

berechnen.

3 Durchführung

3.1 Messung des Entladevorgangs

Die Zeitkonstante RC wird durch die Messung des Entladevorgangs des Kondensators bestimmt. Mit der in Abb. 1 dargestellten Schaltung wird die am Kondensator gemessene Spannung $U_C(t)$ auf einem Oszilloskop in Abhängigkeit von der Zeit t angezeigt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass sich die Spannung $U_C(t)$ innerhalb des Aufzeichnungszeitraums um den Faktor 5 bis 10 ändert. Sobald eine geeignete Kurve auf dem Bildschirm zu erkennen ist, werden mindestens 10 Messwertpaare aufgenommen.

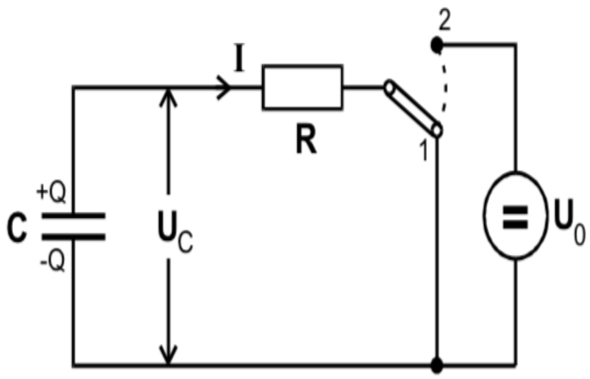

Abbildung 1: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch den Entladevorgang des Kondensators.

3.2 Messung der Amplitude der Kondensatorspannung

Mittels der Schaltung, die in Abb. 2 dargestellt wird, wird die Amplitude der Kondensatorspannung in Abängigkeit von der Frequenz gemessen. Es werden 15 Wertepaare aufgenommen. Die Amplitude wird dabei in Abhängigkeit von der Frequenz über drei Zehnerpotenzenmhinweg gemessen.

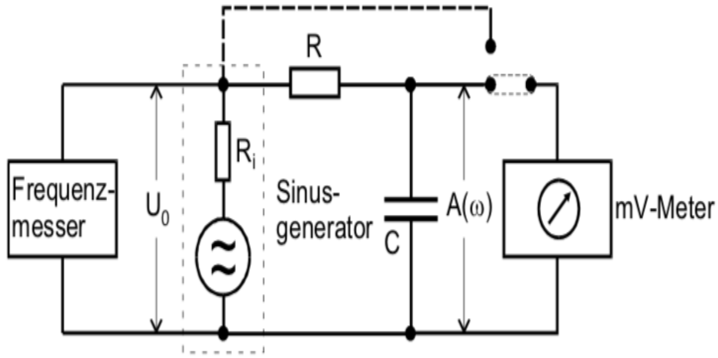

Abbildung 2: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch die Amplitude der Kondensatorspannung.

3.3 Messung der Phasenverschiebung

Zur Ermittlung der Phasenverschiebung werden, wie in Abb. 3 dargestellt, die Kondensatorspannung $U_C(t)$ und die Generatorspannung $U_G(t)$ an ein Zweistrahl-Oszilloskop angeschlossen. Dabei wird der Abstand a der Nulldurchgänge der beiden Kurven gemessen. Die Periodendauer T ergibt sich aus der eingestellten Frequenz.

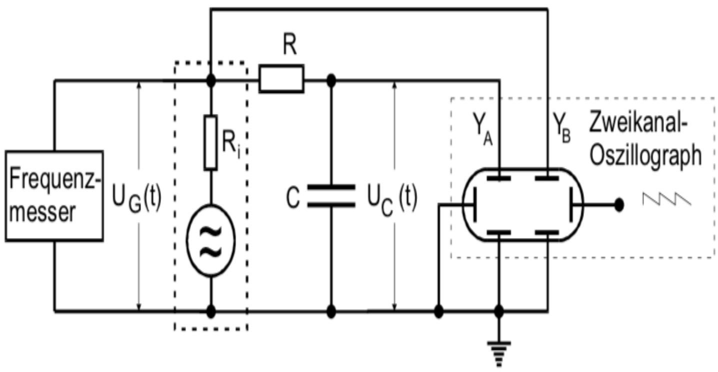

Abbildung 3: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch die Phasenverschiebung.

3.4 Nachweis der Integrator-Eigenschaft eines RC-Kreises

Es wird erneut die Schaltung aus Abb.3 benutzt. Am Sinusgenerator werden nacheinander eine Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannung auf den RC-Kreis gegeben. Dabei werden auf dem Zweikanal-Oszilloskop sowohl die zu integrierende und die integrierte Spannung angezeigt. Von den angezeigten Spannungen werden jeweils Aufnahmen des Bildschirms gespeichert.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators

Die Werte, die für die Bestimmung der Zeitkonstante RC nötig sind, befinden sich in Tabelle 1. Die x und y Werte der linearen Regression (1) sind in Tabelle 2 dargestellt.

Tabelle 1: Spannung U zum Zeitpunkt t, während der Entladung eines Kondensators

U/V	t/s
0,000 00	0,000 00
0,184 00	0,000 40
0,512 00	0,000 80
0,744 00	0,001 20
0,928 00	0,001 60
1,070 00	0,003 00
1,180 00	0,002 40
1,250 00	0,002 80
1,310 00	0,003 20
1,350 00	0,003 60
1,380 00	0,004 00
1,410 00	0,004 40
1,430 00	0,004 80
1,450 00	0,005 20
1,460 00	0,005 60

Abbildung 4 stellt die Gerade dieser linearen Regression dar.
Die Steigung der Geraden ist das Inverse der Zeitkonstante. Mittels Gleichung (2) und der Gleichung für den Fehler (3) berechnet sich das Inverse der Zeitkonstante zu $\frac{1}{RC} = (836{,}5000 \pm 51{,}5139)/\mathrm{s}$.

Tabelle 2: Die Zeit t gegen den negativen Logarithmus der Spannungswerte geteilt durch die maximale Spannung

t/s	$-log(\frac{U(t)}{U_0})$
0,000 00	0,000 00
0,000 40	0,133 73
0,000 80	0,428 17
0,001 20	0,705 47
0,001 60	0,997 75
0,003 00	1,301 55
0,002 40	1,623 14
0,002 80	1,899 39
0,003 20	2,217 84
0,003 60	2,505 53
0,004 00	2,793 21
0,004 40	3,198 67
0,004 80	3,604 14
0,005 20	4,297 29
0,005 60	4,990 43

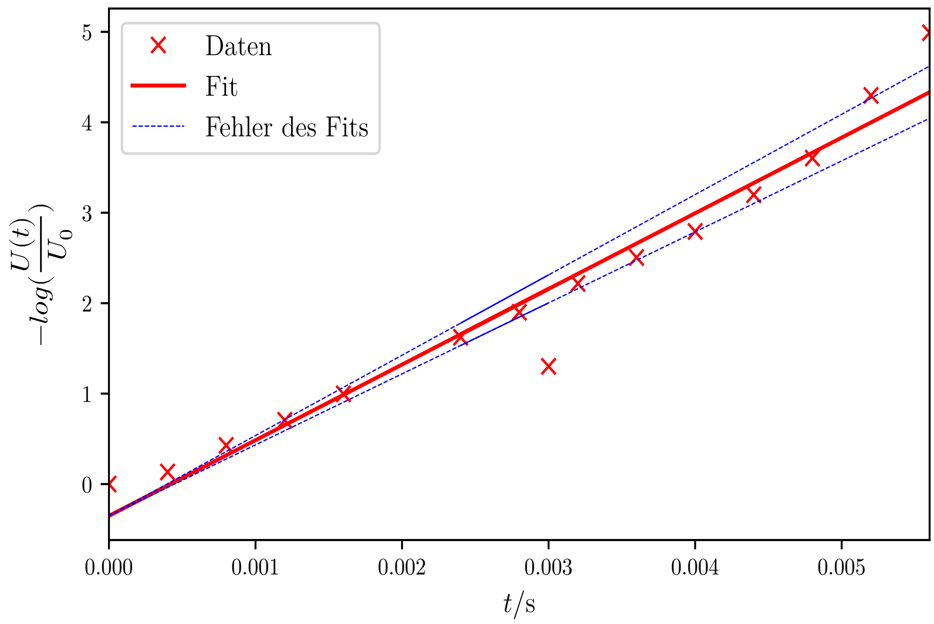

Abbildung 4: Auftragung des negativen Logarithmus der Spannung geteilt durch die maximale Spannung gegen die Zeit. Dargestellt werden die Messwerte, ein Fit und der Fehler des Fits.

4.2 Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung

Die Kondensatorspannungen und die zeitlichen Phasenverschiebungen in Abhängigkeit von der Frequenz sind in Tabelle 3 dargstellt. Um die Zeitkonstante aus der Amplitude der

Tabelle 3: Verschiedene Frequenzen und die dazu entstehende Amplitude der Spannung des Kondensatorsi, U_C, und die zeitliche Phasenverschiebung zur Spannung $U(t)$

f/Hz	$A(\omega)$/V	a/s
65,000 00	0,568 00	0,001 52
80,000 00	0,536 00	0,001 40
100,000 00	0,488 00	0,001 32
250,000 00	0,270 00	0,000 76
400,000 00	0,178 00	0,000 54
650,000 00	0,113 00	0,000 34
800,000 00	0,092 00	0,000 29
1000,000 00	0,092 00	0,000 25
2500,000 00	0,030 00	0,000 11
4000,000 00	0,018 80	$6{,}200\,00 \cdot 10^{-5}$
6500,000 00	0,011 70	$3{,}800\,00 \cdot 10^{-5}$
8000,000 00	0,009 70	$3{,}000\,00 \cdot 10^{-5}$
10 000,000 00	0,007 70	$2{,}400\,00 \cdot 10^{-5}$

Kondensatorspannung errechnen zu können, wird eine lineare Regression (7) durchgeführt. Die x und y Werte dazu finden sich in Tabelle 4. In Abbildung 5 sind diese x und y Werte gegeneinander aufgetragen.
Das Inverse der Zeitkonstante wird wieder durch (2) und der Fehler durch (3) berechnet. Es ergibt sich $\frac{1}{RC} = (885{,}682 \pm 19{,}461)/\mathrm{s}$.

Tabelle 4: Der Kehrwert der Kreisfrequenz ω gegen die Wurzel aus dem Bruch in dessen Nenner die maximale Spannung durch die Amplitudenwerte von U_C zum Quadrat um eins subtrahiert werden

$\frac{1}{\omega}/\mathrm{s}$	$\sqrt{\frac{1}{(\frac{U_0}{A(\omega)})^2-1}}$
0,002 45	2,262 66
0,001 99	1,709 18
0,001 59	1,270 66
0,000 64	0,482 80
0,000 40	0,299 19
0,000 24	0,185 05
0,000 20	0,149 80
0,000 16	0,149 80
$6{,}366\,20 \cdot 10^{-5}$	0,048 37
$3{,}978\,87 \cdot 10^{-5}$	0,030 29
$2{,}448\,54 \cdot 10^{-5}$	0,018 84
$1{,}989\,44 \cdot 10^{-5}$	0,015 62
$1{,}591\,55 \cdot 10^{-5}$	0,012 40

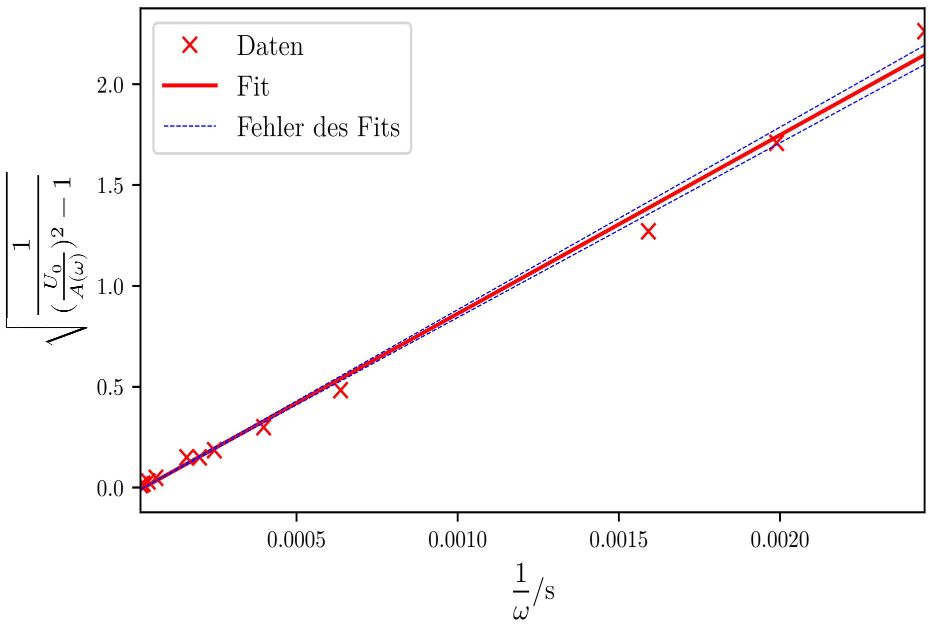

Abbildung 5: Auftragung der Werte aus der linearen Regression. Dargestellt werden die Daten, ein Fit und der Fehler des Fits.

4.3 Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung

Die Abstände der Nulldurchgänge der Spannung des Kondensators und der Spannung des Generators in Abhängigkeit von der Frequenz sind bereits in Tabelle 3 aufgelistet. Um die Zeitkonstante aus dieser Phasenverschiebung zu bestimmen, wird die lineare Regression (9) benötigt. Die x und y Werte befinden sich in Tabelle 5. Abbildung 6 stellt die Gerade der linearen Regression dar, deren Steigung das Inverse der Zeitkonstante ist.

Tabelle 5: Der Kehrwert der Kreisfrequenz gegen den negativen Kehrwert des Tangens der Phase, die sich durch die negative Division der zeitlichen Phasenverschiebung durch die Periodendauer multipliziert mit ergibt

$\frac{1}{\omega}$/s	$-\frac{1}{tan(\phi(\omega))}$
0,002 45	3,117 63
0,001 99	2,723 79
0,001 59	2,271 60
0,000 64	1,471 46
0,000 40	1,240 20
0,000 24	1,201 09
0,000 20	1,120 01
0,000 16	1,000 00
$6{,}366\,20 \cdot 10^{-5}$	0,854 08
$3{,}978\,87 \cdot 10^{-5}$	1,012 65
$2{,}448\,54 \cdot 10^{-5}$	1,019 03
$1{,}989\,44 \cdot 10^{-5}$	1,064 89
$1{,}591\,55 \cdot 10^{-5}$	1,064 89

Mittels (2) und (3) berechnet sich das Inverse der Zeitkonstante zu $\frac{1}{RC} = (873{,}0148 \pm 26{,}6840)/\text{s}$.

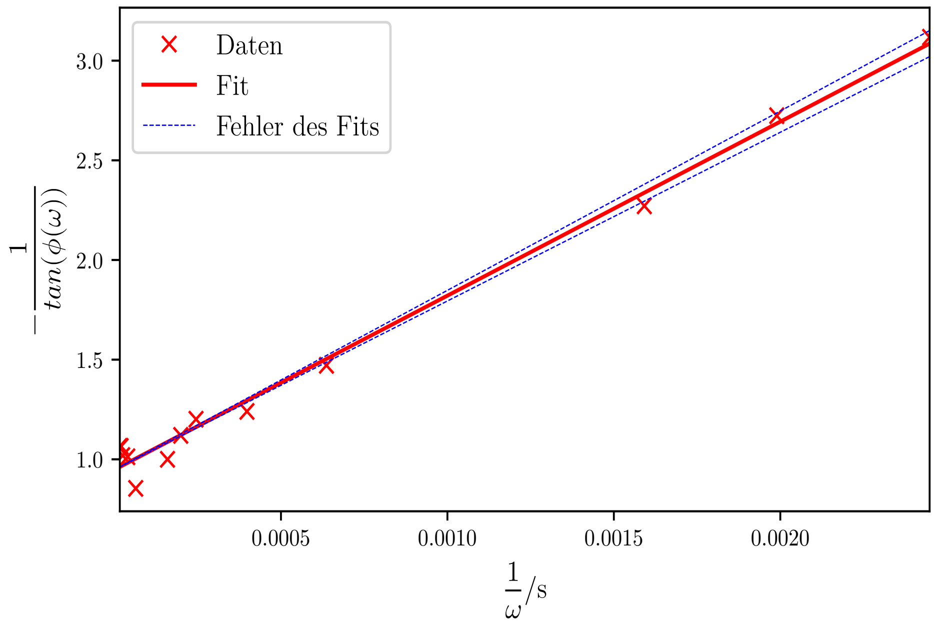

Abbildung 6: Auftragung der Werte aus der linearen Regression. Dargestellt werden die Daten, ein Fit und der Fehler des Fits.

4.4 Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung

Die Werte, die zur Bestimmung der Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ von der Phasenverschiebung ϕ nötig sind, befinden sich in Tabelle 6. Um die verschiedenen errechneten Werte für die Zeitkonstante vergleichen zu können, wird für die in 4.1 und 4.2 berechneten Werte die Phasenverschiebung mittels Gleichung (11) berechnet. In den folgenden Abbildungen 7, 8 und 9 ist die Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ der Radius und die Phase ϕ der Winkel.

Tabelle 6: Die Phasenverschiebung gegen die Amplitude der Spannung U_C geteilt durch die maximale Spannung U_0

ϕ/rad	$\frac{A(\omega)}{U_0}$
−0,310 39	0,914 65
−0,351 86	0,863 12
−0,414 69	0,785 83
−0,596 90	0,434 78
−0,678 58	0,286 63
−0,694 29	0,181 96
−0,728 85	0,148 15
−0,785 40	0,148 15
−0,863 94	0,048 31
−0,779 11	0,030 27
−0,775 97	0,018 84
−0,753 98	0,015 62
−0,753 98	0,012 40

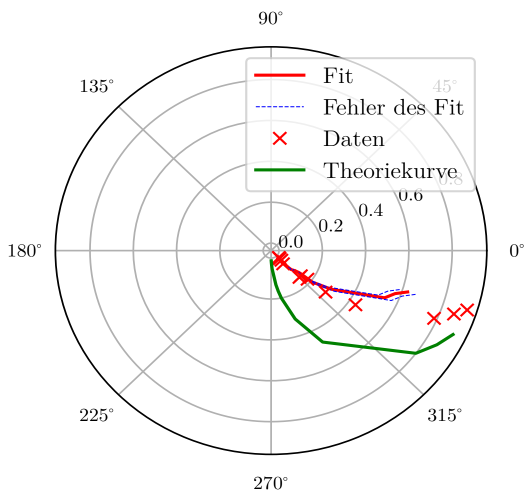

Abbildung 7: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.1 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

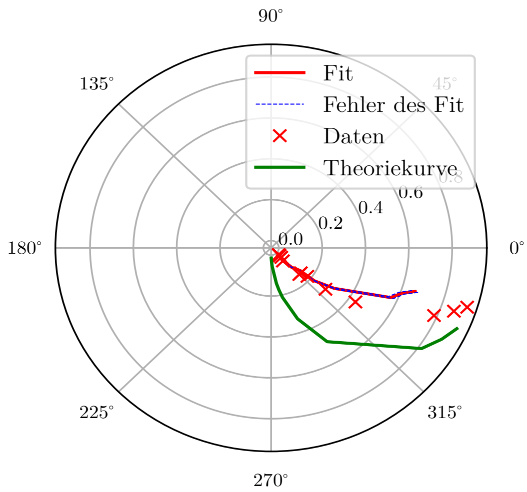

Abbildung 8: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.2 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

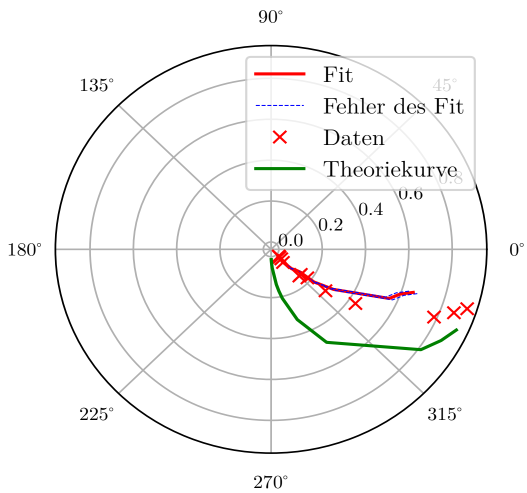

Abbildung 9: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.3 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

4.5 Spannung als Integrator

Die folgenden Abbildungen zeigen die integrierte sowie die zu integrierende Spannung. Dabei wurde eine Sinusspannung angelegt. Die Kondensatorspannung wurde dadurch zu einem Cosinus. Die Dreiecksspannung wurde zu einer Funktion integriert, die einem Sinus ähnelt. Die Rechteckspannung integriert sich zur Dreiecksspannung.

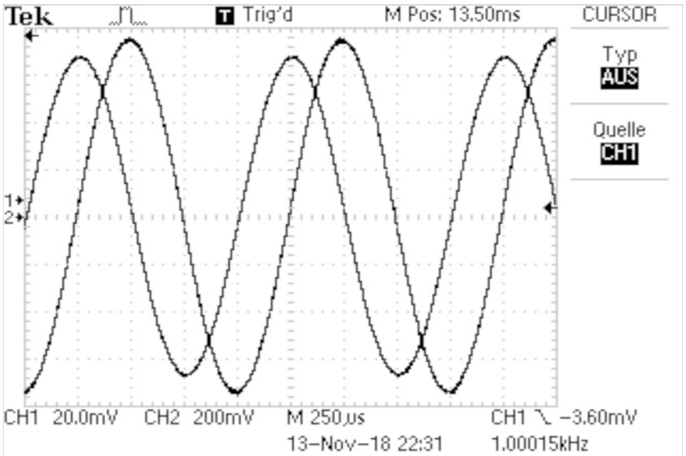

Abbildung 10: Aufnahme des Bildschirms des Oszillokops bei eingestellter Sinusspannung.

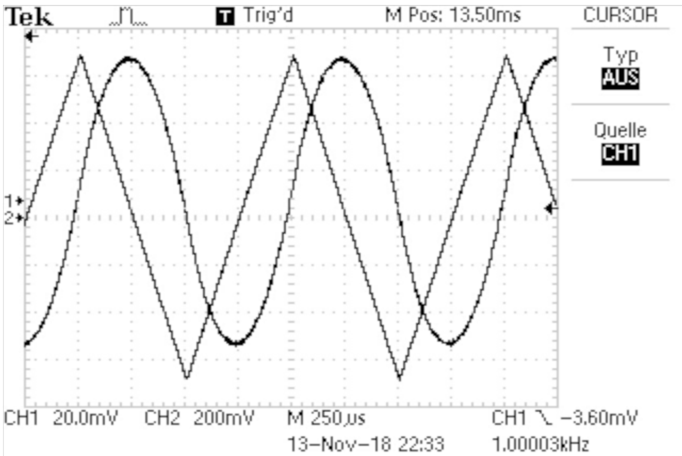

Abbildung 11: Aufnahme des Bildschirms des Oszillokops bei eingestellter Dreiecksspannung.

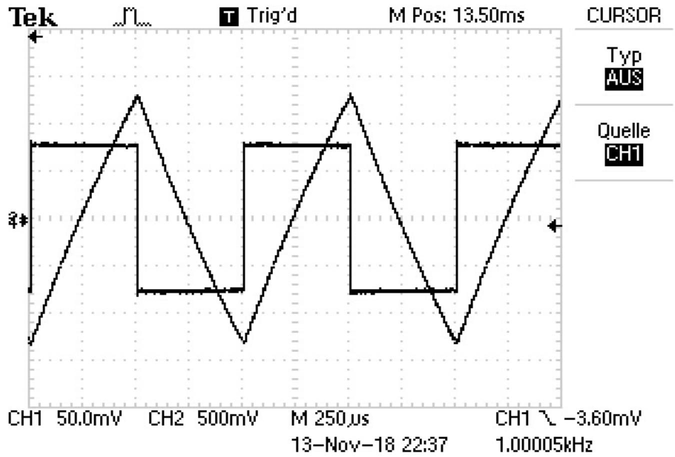

Abbildung 12: Aufnahme des Bildschirms des Oszillokops bei eingestellter Rechteckspannung.

5 Diskussion

Die Auswertung der Funktionen ist recht exakt zu bewerten.

Die gemessenen Werte ergeben nach der halblogarithmischen Auftragung einen Fit, der eine Steigung von 836,50/s hat. Der relative Fehler der linearen Regression liegt bei 6,15 %.

Im Aufgabenteil b) ergibt der nach Umformung der Funktion (6) auch eine lineare Gleichung. Die Werte führen zu einer linearen Regression, dessen Wert bei 885,68/s liegt und der relative Fehler bei 2,197 %. Auffällig ist dabei, dass die Werte für 10 Hz und 20 Hz rausgelassen wurden, da der Wert sonst deutlich abweicht. Auch ein weiterer Wert sticht besonders hervor. Das Problem dabei könnte sein, dass, wenn man den maximalen Wert von 620 Hz als U_0 wählt, man durch Null teilt, weshalb man mindestens 621 mV(keine ahnung, was für einheiten), als U_0 wählen muss, damit dies nicht geschieht. Würde man den Wert bei 10Hz wählen, wäre das Ergebnis imaginär, was auch keiner realistischen physikalischen Lösung entspricht. Somit wird angenommen, dass der Wert bei mindestens 621 mV liegt. Die tatsächliche maximale Amplitude liegt aber vermutlich bei einem noch höheren Wert. Für diesen würden die Werte bei 10 und 20 Hz vermutlich auch passen.

Im Teil c) wird ein Wert von 873,02/s für die Zeitkonstante 1/RC festgestellt. Bei einem relativen Fehler von3,056 % überschneiden sich alle drei Ergebnisse in einem Bereich von $(877{,}09 \pm 10{,}92)$/s. Somit ist eine Systematische Abweichung nicht zwangsläufig zu erkennen. Die Werte für a) und b) weichen dennoch um 5,55 % voneinander ab. Dieser Fehler könnte an dem nicht betrachteten Innenwiderstand des Sinusfrequenzgenerators entstanden sein. Der Wert dieses liegt laut Anleitung bei 600 Ω [1].

Die Funktion der Kondensatorspannung U_C als Integrator der Spannungi $U(t)$ scheint anhand der ermittelten Schaubilder bestätigt zu sein. Die annähernde Korrektheit lässt sich zumindest gut anhand der Schaubilder erkennen, wenn die Abhängigkeit der Hoch- und Tiefpunkte von den Nullstellen der anderen Funktionen betrachtet wird.

Die Abhängigkeit der Relativamplitude zur Phase lässt sich in den Polarkoordinatensystemen gut ablesen. Dabei ist die Eigenschaft von als $arctan$-Funktion gut zu erkennen, da die gemessenen Werte der Theoriekurve eindeutig ähneln, lediglich Phasenverschoben sind.

Literatur

[1] TU Dortmund. „Versuch 353 zum Literaturverzeichnis“. In: (2018).

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: `http://www.scipy.org/`.

[4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.