

# **V207 - Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler**

Jan Herdieckerhoff  
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff  
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.12.2018, Abgabe: 07.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Dynamische Viskosität . . . . .	3
2.2	Reynoldszahlen . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Messen der Falldauern der Kugeln im Viskosimeter . . . . .	4
3.2	Messen der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser	5
<b>4</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1	Bestimmung der Apparaturkonstante für die große Kugel . . . . .	7
5.2	Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser . . . . .	8
5.3	Bestimmung der Reynoldszahlen . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
6.1	Bestimmung der Apparaturkonstante für die große Kugel . . . . .	13
6.2	Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser . . . . .	13
6.3	Graphische Auswertung . . . . .	14
6.4	Bestimmung der Reynoldszahlen . . . . .	14
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Ziel

Das Ziel dieses Versuchs ist es, die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser mittels Kugelfall-Viskosimeter zu bestimmen.

## 2 Theorie

### 2.1 Dynamische Viskosität

Ein Körper, der sich in einer Flüssigkeit bewegt, wird von verschiedenen Kräften beeinflusst. Es wirken die Reibungskraft, die Schwerkraft und die Auftriebskraft. Die Reibungskraft hängt dabei von verschiedenen Faktoren ab: Von der Berührungsfläche  $A$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der sogenannten dynamischen Viskosität  $\eta$ . Diese ist eine Materialkonstante der Flüssigkeit und hängt stark von der Temperatur dieser Flüssigkeit ab.

Mit dem Kugelfallviskosimeter lässt sich diese Viskosität bestimmen. Dafür wird eine Kugel in einer Flüssigkeit, deren Ausdehnung hinreichend groß ist, damit sich keine Wirbel bilden, fallen gelassen. Die Stokes'sche Reibung lässt sich folgendermaßen beschreiben

$$F_R = 6 \pi \eta v r.$$

Beim Fallen nimmt die Reibung mit zunehmender Geschwindigkeit immer weiter zu, bis sich ein Kräftegleichgewicht einstellt. Die Reibungs- und Auftriebskraft wirken entgegen der Schwerkraft. Die Viskosität  $\eta$  lässt sich aus der Fallzeit  $t$ , der Dichte der Flüssigkeit  $\rho_{Fl}$  und der Dichte der Kugel  $\rho_K$  bestimmen. Der Proportionalitätsfaktor  $K$  ist eine Apparaturkonstante und enthält sowohl die Höhe, als auch die Kugelgeometrie. Es gilt

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t. \quad (1)$$

Die Apparaturkonstante  $K$  kann also als

$$K = \frac{\eta}{(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t} \quad (2)$$

bestimmt werden. Die Dichte einer Kugel lässt sich mit dem Durchmesser  $d$  und der Masse  $m$  durch

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3} \quad (3)$$

bestimmen. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität lässt sich mit der Andradeschen Gleichung als

$$\eta(T) = A \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right). \quad (4)$$

beschreiben. Die Werte  $A$  und  $B$  sind hier Konstanten.

## 2.2 Reynoldszahlen

Die Reynoldszahlen  $Re$  geben das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften durch

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

an. Mit der Fallgeschwindigkeit

$$v = \frac{x}{t} \tag{5}$$

werden die Reynoldszahlen mittels

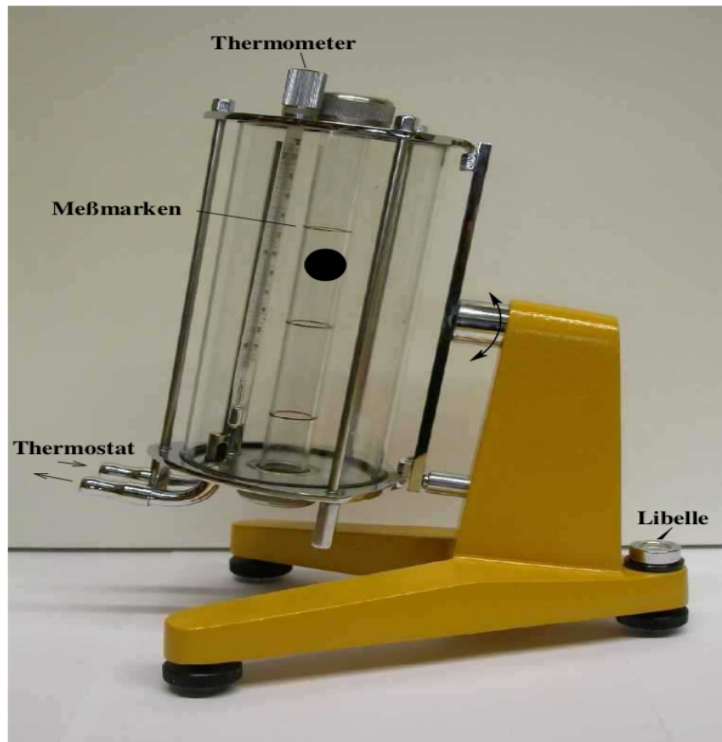
$$Re = \frac{\rho x d}{\eta t} \tag{6}$$

berechnet. Sind die Reynoldszahlen größer als 2300, wird eine Flüssigkeit als turbulent bezeichnet. Ist sie kleiner, ist sie laminar.

## 3 Durchführung

### 3.1 Messen der Falldauern der Kugeln im Viskosimeter

Beim Kugelfallviskosimeter nach Höppler (Abb. 1) wird die Kugel in einem Rohr, dessen Radius nur geringfügig größer ist als der Radius der Kugel, fallen gelassen. Mithilfe der Libelle wird das Viskosimeter justiert, falls es nicht gerade steht.



**Abbildung 1:** Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler. In dem Rohr im Inneren des Wasserbads befindet sich destilliertes Wasser. Die Kugel wird in dem Rohr fallen gelassen. Durch das Thermostat kann die Temperatur des Wasserbads eingestellt werden.

Das Viskosimeter wird mit destilliertem Wasser gefüllt, wobei darauf geachtet wird, dass sich keine Luftblasen an der Rohrwand oder an der Kugel befinden. Da beim senkrechten Fall Wirbel entstehen könnten und die Kugel unkontrolliert an die Rohrwand stoßen würde, wird das Fallrohr um einen kleinen Winkel gekippt. Die Kugel kann an der Rohrwand heruntergleiten.

Zunächst wird die Dichte der großen und kleinen Glaskugel aus der Masse und dem Volumen bestimmt. Anschließend werden jeweils zehn Fallzeiten für die kleine und die große Kugel bei Raumtemperatur mit einer Stoppuhr gemessen. Es wird die Zeit gemessen, die die Kugel nach Überschreiten der ersten Markierung bis zum Überschreiten der letzten Markierung braucht. Wenn die Kugel die untere Markierung überschreitet, wird das Viskosimeter um  $180^\circ$  gedreht und die Messung wiederholt.

### 3.2 Messen der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser

Als nächstes wird die Temperaturabhängigkeit von destilliertem Wasser bestimmt. Dazu wird das Wasserbad auf  $70^\circ$  aufgeheizt. Die Fallzeit der großen Kugel wird jeweils zwei mal für zehn verschiedene Temperaturen gemessen.

## 4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von  $N$  Werten wird durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (7)$$

bestimmt.

Die Standardabweichung der Stichprobe wird berechnet mit:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Der relative Fehler zwischen zwei Werten kann durch

$$\frac{a-b}{a}$$

bestimmt werden.

Bei der linearen Regression wird die Gerade

$$y(x) = mx + b$$

durch das Streudiagramm gelegt. Dabei ist  $m$  die Steigung mit

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

und  $b$  der  $y$ -Achsenabschnitt mit

$$b = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Der Fehler der Gleichung 1, die zur Bestimmung der Viskosität  $\eta$  verwendet wird, ergibt sich zu

$$\sigma_\eta = \sqrt{K^2 (\rho_K - \rho_{Fl})^2 \sigma_t^2}. \quad (9)$$

Der Fehler der Gleichung 2, die zur Ermittlung der Proportionalitätskonstante  $K$  verwendet wird, ergibt sich zu

$$\sigma_K = \sqrt{\frac{\eta^2 \sigma_t^2}{(\rho_K - \rho_{Fl})^2 t^4} + \frac{\sigma_\eta^2}{(\rho_K - \rho_{Fl})^2 t^2}}. \quad (10)$$

Der Fehler der Gleichung 6, die zur Berechnung der Reynoldszahlen  $Re$  benutzt wird, ergibt sich zu

$$\sigma_{Re} = \sqrt{\frac{d^2 \rho^2 x^2 \sigma_t^2}{\eta^2 t^4} + \frac{d^2 \rho^2 x^2 \sigma_\eta^2}{\eta^4 t^2}}. \quad (11)$$

## 5 Auswertung

Für die Auswertung werden Matplotlib [2], NumPy [5], SciPy [3] und Uncertainties [4] benutzt.

### 5.1 Bestimmung der Apparaturkonstante für die große Kugel

Die Fallstrecke beträgt

$$x = 10 \text{ cm.}$$

Die Masse, der Durchmesser und die Apparaturkonstante der kleinen Kugel sind durch

$$\begin{aligned} m_{\text{klein}} &= 3,71 \text{ g} \\ d_{\text{klein}} &= 0,0156 \text{ m} \\ K_{\text{klein}} &= 76,4 \frac{\text{nPa m}^3}{\text{kg}} \end{aligned}$$

gegeben. Die Masse und der Durchmesser der großen Kugel betragen

$$\begin{aligned} m_{\text{groß}} &= 4,21 \text{ g} \\ d_{\text{groß}} &= 0,0158 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Dichte des destillierten Wassers beträgt

$$\rho_{\text{Fl}} = 998,2067 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Aus der Masse und dem Volumen der Kugeln ergibt sich jeweils mittels Gleichung (3) die Dichte der Kugel zu

$$\begin{aligned} \rho_{\text{klein}} &= 1866,39 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \rho_{\text{groß}} &= 2038,51 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Die Falldauern der kleinen und der großen Kugel im Kugelfall-Viskosimeter bei Raumtemperatur befinden sich in Tabelle 1.

**Tabelle 1:** Die Falldauer der kleinen Kugel und die Falldauer der großen Kugel.

$t_{\text{klein}}/\text{s}$	$t_{\text{groß}}/\text{s}$
11,6	65,5
11,6	65,7
11,6	64,9
11,7	64,8
11,6	65,3
11,9	65,5
11,5	64,9
11,6	65,4
11,7	65,2
11,8	64,9

Für die mittleren Falldauern ergibt sich mit den Gleichungen (7) und (8)

$$t_{\text{klein}} = (11,7 \pm 0,1) \text{ s}$$

$$t_{\text{groß}} = (65,2 \pm 0,3) \text{ s}.$$

Mit Gleichung (1) und Gleichung (9) berechnet sich die Viskosität mit  $K_{\text{klein}}$ ,  $\rho_{\text{klein}}$  und  $t_{\text{klein}}$  zu

$$\eta = (773 \pm 7) \mu\text{Pa}\cdot\text{s}.$$

Mit diesem Wert folgt für die Apparaturkonstante  $K_{\text{groß}}$  mittels Gleichung (2) und Gleichung (10)

$$K_{\text{groß}} = (11,40 \pm 0,11) \frac{\text{nPa}\cdot\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

## 5.2 Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser

Die Falldauern der großen Kugel für verschiedene Temperaturen sind in den Tabellen 2 und 3 dargestellt.



**Tabelle 2:** Die Fallzeit in Abhängigkeit zur Temperatur der Flüssigkeit.

$T/\text{K}$	$t_1/\text{s}$
326,2	46,8
328,2	45,1
330,2	44,1
331,2	42,6
333,2	41,3
335,2	39,9
337,2	37,9
339,2	35,6
341,2	32,5
343,2	28,2

**Tabelle 3:** Die Fallzeit in Abhängigkeit zur Temperatur der Flüssigkeit.

$T/\text{K}$	$t_2/\text{s}$
326,2	46,5
328,2	44,5
330,2	42,8
331,2	42,2
333,2	40,6
335,2	38,5
337,2	36,7
339,2	33,9
341,2	31,0
343,2	28,3

Die Viskositäten die mit der Gleichung (1) für die Falldauern der ersten und der zweiten Messung sind in Tabelle 4 zu finden.

**Tabelle 4:** Die Viskosität für die erste und zweite Messung.

$\eta_1/\text{mPa s}$	$\eta_2/\text{mPa s}$
$0,555 \pm 0,006$	$0,551 \pm 0,005$
$0,535 \pm 0,005$	$0,528 \pm 0,005$
$0,523 \pm 0,005$	$0,508 \pm 0,005$
$0,505 \pm 0,005$	$0,501 \pm 0,005$
$0,490 \pm 0,005$	$0,482 \pm 0,005$
$0,473 \pm 0,005$	$0,456 \pm 0,005$
$0,449 \pm 0,004$	$0,435 \pm 0,004$
$0,423 \pm 0,004$	$0,402 \pm 0,004$
$0,386 \pm 0,004$	$0,368 \pm 0,004$
$0,335 \pm 0,003$	$0,336 \pm 0,003$

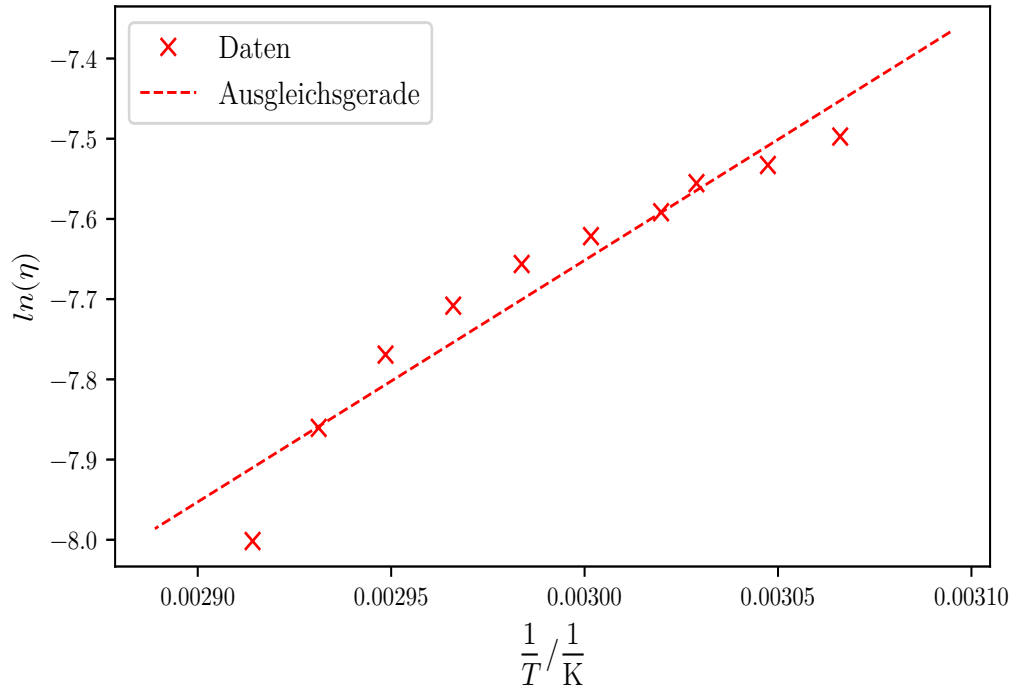
Das Inverse der Zeit gegen die logarithmierte Viskosität für die erste Messung ist in Tabelle 5 und für die zweite Messung in Tabelle 6 dargestellt. Diese Werte sind für die erste Messung in Abb. 2 und für die zweite Messung in Abb. 3 gegeneinander aufgetragen.

**Tabelle 5:** Die invertierte Temperatur gegen die logarithmierte Viskosität für die erste Messung.

$\frac{10^3}{T}/\text{K}$	$\ln(\eta_1)/\text{Pa s}$
3,066	$-7,497 \pm 0,01$
3,047	$-7,533 \pm 0,01$
3,029	$-7,555 \pm 0,01$
3,020	$-7,592 \pm 0,01$
3,002	$-7,621 \pm 0,01$
2,984	$-7,656 \pm 0,01$
2,966	$-7,708 \pm 0,01$
2,949	$-7,769 \pm 0,01$
2,931	$-7,860 \pm 0,01$
2,914	$-8,002 \pm 0,01$

**Tabelle 6:** Die invertierte Temperatur gegen die logarithmierte Viskosität für die zweite Messung.

$\frac{10^3}{T} / \frac{1}{\text{K}}$	$\ln(\eta_2) / \text{Pa s}$
3,066	$-7,497 \pm 0,01$
3,047	$-7,533 \pm 0,01$
3,029	$-7,555 \pm 0,01$
3,020	$-7,592 \pm 0,01$
3,002	$-7,621 \pm 0,01$
2,984	$-7,656 \pm 0,01$
2,966	$-7,708 \pm 0,01$
2,949	$-7,769 \pm 0,01$
2,931	$-7,860 \pm 0,01$
2,914	$-8,002 \pm 0,01$



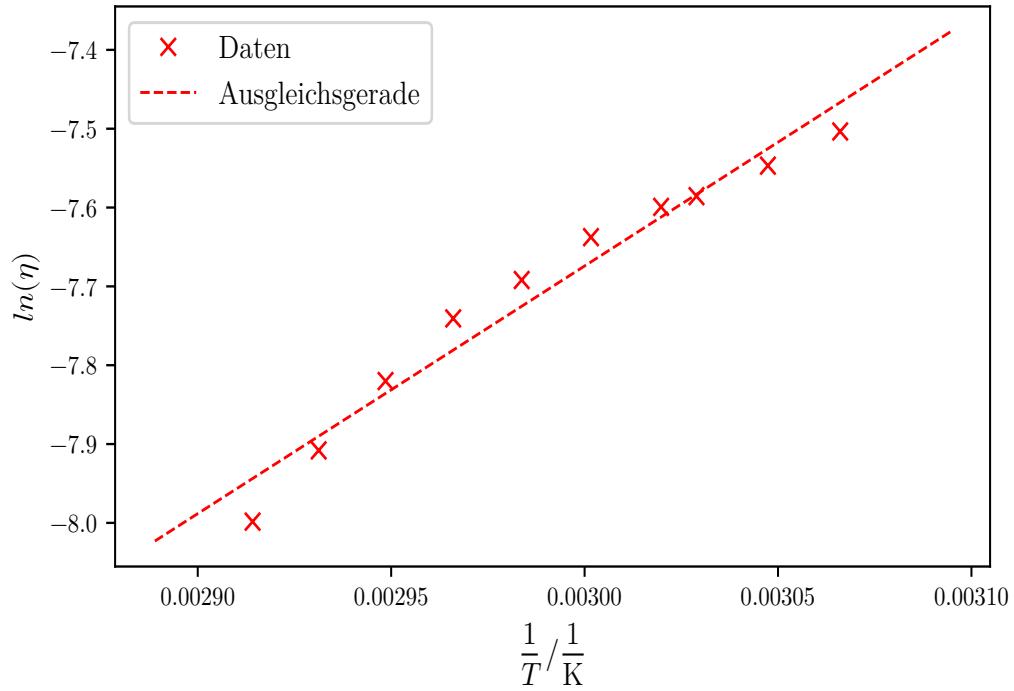
**Abbildung 2:** Die logarithmierte Viskosität ist gegen das Inverse der Falldauer der ersten Messung aufgetragen.

Die Parameter aus Gleichung (4) ergeben sich mittels einer Regression und derselbigen

Formel zu

$$A_1 = (0,566 \pm 0,515) \text{ nPa s}$$

$$B_1 = (3012,12 \pm 304,10) \text{ K}.$$



**Abbildung 3:** Die logarithmierte Viskosität ist gegen das Inverse der Falldauer der zweiten Messung aufgetragen.

Die Parameter aus Gleichung (4) ergeben sich mittels einer Regression und derselbigen Formel zu

$$A_2 = (0,376 \pm 0,251) \text{ nPa s}$$

$$B_2 = (3140,87 \pm 223,67) \text{ K}.$$

### 5.3 Bestimmung der Reynoldszahlen

Die Geschwindigkeit der kleinen Kugel ergibt sich mit Gleichung (5) und der Falldauer  $t_{\text{klein}}$  zu

$$v_{\text{klein}} = (8,58 \pm 0,08) \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Mit Gleichung (6) folgt für die Reynoldszahl für die kleine Kugel

$$Re_{\text{klein}} = 172,7 \pm 3,1.$$

Die Geschwindigkeit der großen Kugel ist

$$v_{\text{groß}} = (1,534 \pm 0,007) \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Die Reynoldszahl für die große Kugel ergibt sich auf die gleiche Weise zu

$$Re_{\text{groß}} = 31,27 \pm 0,31.$$

Die Reynoldszahlen für die große Kugel bei verschiedenen Temperaturen ergeben sich auf die gleiche Weise und sind in folgender Tabelle aufgetragen.

**Tabelle 7:** Die Temperatur und die Reynoldszahlen der erste und zweite Messung.

$T/\text{K}$	$Re_1$	$Re_2$
326,15	$60,8 \pm 0,6$	$61,6 \pm 0,6$
328,15	$65,3 \pm 0,6$	$67,2 \pm 0,7$
330,15	$68,3 \pm 0,7$	$72,6 \pm 0,7$
331,15	$73,4 \pm 0,7$	$74,6 \pm 0,7$
333,15	$78,0 \pm 0,8$	$80,5 \pm 0,8$
335,15	$83,6 \pm 0,8$	$89,8 \pm 0,9$
337,15	$92,7 \pm 0,9$	$98,9 \pm 1,0$
339,15	$104,8 \pm 1,0$	$116,0 \pm 1,2$
341,15	$125,7 \pm 1,3$	$138,3 \pm 1,4$
343,15	$166,7 \pm 1,7$	$165,7 \pm 1,6$

## 6 Diskussion

### 6.1 Bestimmung der Apparaturkonstante für die große Kugel

Bei der Messung der Viskosität für die kleine Kugel ergab sich eine Viskosität von  $773 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$  mit einem relativen Fehler von 0,91 %. Daraus ergab sich wiederum eine Apparaturkonstante von  $11,4 \text{ nPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}$  mit einem relativen Fehler von 0,96 %. Es gibt keine Literaturwerte, somit kann über die Richtigkeit dieser Ergebnisse keine Aussage getroffen werden. Fehlerquellen könnten dabei zum Beispiel sein, dass dabei die Apparatur nicht richtig eingerastet war und dass eventuell kleine Blasen die Werte beeinflusst haben.

### 6.2 Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser

Die Messung der Temperaturabhängigkeiten führte bei uns ein wenig zu Problemen, da wir mit  $25^\circ\text{C}$  begonnen hatten, sich aber dann bei ca.  $50^\circ\text{C}$  ziemlich starke Blasen

gebildet haben und wir diese daraufhin entfernt haben. Das erneute Erwärmen des zugeführten Wassers dauerte aber länger als gedacht und führte dazu, dass wir unsere Messung nochmal neu begannen bei einer Temperatur von 53 °C bzw. 326,15 °C.

Die ermittelten Konstanten A und B aus der Andradeschen Gleichung ergeben sich für die erste Messung zu 56,6 nPa s mit einem relativen Fehler von 90,97 % und 3012,12 K mit einem relativen Fehler von 10,1 %. Für die zweite Messung ergibt sich für A ein Wert von 37,5 nPa s mit einem relativen Fehler, der bei 66,76 % liegt. Für B ergibt sich 3140,87 K mit einem relativen Fehler von 7,12 %.

### **6.3 Graphische Auswertung**

Bei der graphischen Auswertung fällt auf, dass die ersten zwei Werte noch stark von der Ausgleichsgeraden abweichen, die darauf folgenden Werte aber nicht. Dies liegt vermutlich an dem zugeführten Wasser. Die Temperatur in dem Behälter wird vermutlich noch nicht ganz der Temperatur auf der Anzeige entsprochen haben. Somit sind die Werte ein wenig verschoben und müssten eigentlich noch weiter links auf der Temperaturskala stehen. Dieses Ergebnis ergibt also im Kontext unserer Durchführung Sinn und entspricht dem, was zu erwarten war.

### **6.4 Bestimmung der Reynoldszahlen**

Die Reynoldszahl für den Fall der kleinen Kugel beträgt 172,7 und der relative Fehler liegt bei 1,80 %. Für die große Kugel ergab sich ein Wert von 31,27 mit einem relativen Fehler von 0,99 %. Da Flüssigkeiten mit einem Wert von unter 2300 bei der Reynoldszahl noch als laminare Flüssigkeit geleten, haben wir es in unserer Messung auch mit einer laminaren Flüssigkeit zu tun gehabt.

Die in der Tabelle 7 bestimmten Werte zeigen, dass mit zunehmender Temperatur auch die jeweilige Reynoldszahl steigt. Bei einer Zunahme von 17 °C nimmt die Reynoldszahl um mehr als 100 zu. Das bedeutet, dass die Flüssigkeit mit zunehmender Temperatur immer turbulenter wird. Dies entspricht auch dem zu erwartenden Ergebnis, da sich Moleküle schneller bewegen, je wärmer das jeweilige Material ist, was einem turbulenteren Verhalten entspricht.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 207 - Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.