

# **V408 - Geometrische Optik**

Jan Herdieckerhoff  
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff  
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.06.2019, Abgabe: 11.06.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Linsen . . . . .	3
2.2	Abbildungsfehler . . . . .	4
2.3	Methode von Bessel . . . . .	5
2.4	Methode von Abbe . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
4.1	Brennweitenbestimmung . . . . .	7
4.2	Methode von Bessel . . . . .	7
4.3	Methode von Abbe . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
5.1	Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes . . . . .	8
5.2	Methode von Bessel . . . . .	9
5.3	Methode von Abbe . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
6.1	Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes . . . . .	13
6.2	Überprüfung der Messgenauigkeit . . . . .	14
6.3	Brennweitenbestimmung mit der Methode von Bessel . . . . .	14
6.4	Brennweitenbestimmung mit der Methode von Abbe . . . . .	14
6.5	Fazit . . . . .	14
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

## 1 Ziel

Das Ziel dieses Versuchs ist es die Brennweite einer Linse mit verschiedenen Methoden zu messen. Außerdem sollen die Linsengleichung und das Abbildungsgesetz verifiziert werden.

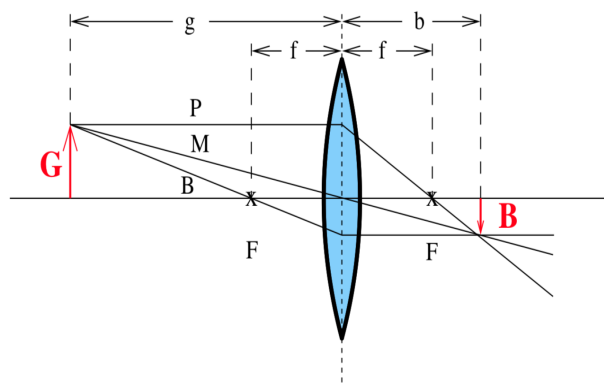
## 2 Theorie

### 2.1 Linsen

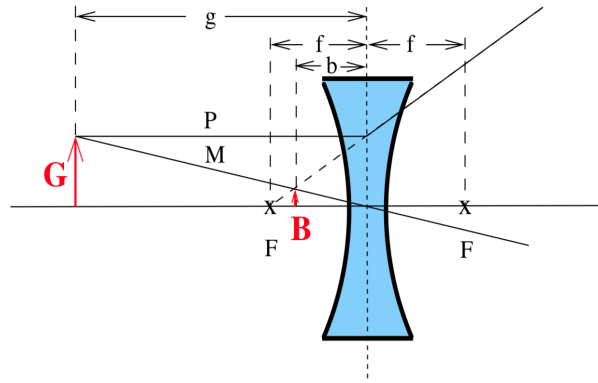
Linsen bestehen im Allgemeinen aus einem Material, das dichter als Luft ist. Nach Fresnels Brechungsgesetzen wird das Licht beim Ein- und Austritt gebrochen.

In diesem Versuch werden Sammellinsen und Zerstreuungslinsen verwendet. Sammellinsen sind in der Mitte dicker als am Rand und bündeln das einstrahlende Licht. Die Brennweite  $f$  einer Sammellinse, also die Entfernung von der Linse und dem Brennpunkt  $F$ , und die Bildweite  $b$  sind, wie in Abb. 1 zu erkennen, positiv und es entsteht ein reelles Bild auf einem Schirm.

Bei Zerstreuungslinsen (Abb. 2) sind die Brennweite  $f$  und die Bildweite  $b$  negativ und ein virtuelles Bild wird erzeugt.



**Abbildung 1:** Skizze einer Sammellinse. Es sind die Gegenstandsgröße  $G$ , die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildgröße  $B$ , die Bildweite  $b$ , die Brennpunkte  $F$ , die Brennweiten  $f$ , der Parallelstrahl  $P$ , der Mittelpunktstrahl  $M$  und der Brennpunktstrahl  $B$  eingezeichnet. [2]



**Abbildung 2:** Skizze einer Zerstreuungslinse. Es sind die Gegenstandsgröße  $G$ , die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildgröße  $B$ , die Bildweite  $b$ , die Brennpunkte  $F$ , die Brennweiten  $f$ , der Parallelstrahl  $P$  und der Mittelpunktstrahl  $M$  eingezeichnet. [2]

Für die Bildkonstruktion in den Skizzen werden jeweils drei ausgezeichnete Strahlen eingezeichnet. Dabei gibt es den Parallelstrahl  $P$ , den Mittelpunktstrahl  $M$  und den Brennpunktstrahl  $B$ . Die Wortbedeutung ist selbsterklärend.

Aus den Brechungsgesetzen und einigen geometrischen Überlegungen folgt das sogenannte Abbildungsgesetz

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

Dabei ist  $V$  der Abbildungsmaßstab, also das Verhältnis zwischen Bild- und Gegenstandsgröße,  $B$  die Bildgröße und  $G$  die Gegenstandsgröße. Im selben Verhältnis stehen  $b$ , die Bildweite, und  $g$ , die Gegenstandsweite, zueinander.

Für dünne Linsen folgt aus denselben Überlegungen die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (2)$$

Bei Systemen aus mehreren Linsen muss die Rechnung anders gemacht werden. Die Mittelebene muss dann durch zwei Hauptebenen  $H$  und  $H'$  ersetzt werden. Brennweite, Gegenstandsweite und die Bildweite werden in Bezug zu der jeweiligen Hauptebene bestimmt, die stellvertretend für das ganze Linsensystem betrachtet wird.

Die sogenannte reziproke Brennweite definiert die Brechkraft als  $D = 1/f$  mit der Einheit Dioptrie. Bei einem Linsensystem aus verschiedenen gekrümmten Linsen summieren sich die Brechkraften  $D_i$  der einzelnen Linsen, sodass gilt

$$D = \sum_i^N D_i.$$

## 2.2 Abbildungsfehler

Es gibt Abbildungsfehler, die die Messung und vor allem die Exaktheit der Messung beeinflussen können.

So liegt zum Beispiel bei der sogenannten sphärischen Abberration der Brennpunkt achsenferner Strahlen näher an der Linse als der von achsennahen Strahlen.

Bei der chromatischen Abberation liegt der Brennpunkt von blauem Licht näher an der Linse als der von rotem Licht, da blaues Licht aufgrund der Dispersionsrelation stärker gebrochen wird.

Bei der Bildfeldwölbung liegt das Bild von einem ebenen Gegenstand nicht in einer Ebene, sondern auf einer gewölbten Fläche. ([1])

Bei der Koma ist die Linse geneigt. Durch achsenferne Strahlen werden Striche als geschwungene Linien abgebildet. ([1])

## 2.3 Methode von Bessel

Die Brennweite wird mit einer Linse bestimmt, indem der Abstand zwischen Gegenstand und Bild konstant bleibt und zwei Linsenpositionen gesucht werden, bei denen das Bild scharf ist. Aus der Summe

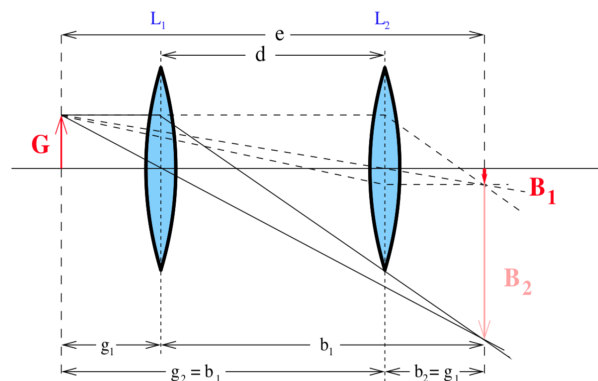
$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2 \quad (3)$$

und der Differenz

$$d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2 \quad (4)$$

ergibt sich die Brennweite zu

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (5)$$



**Abbildung 3:** Skizze der Methode von Bessel. Es sind zwei Linsen zu sehen, die die zwei Linsenpositionen darstellen sollen. Es sind außerdem die Gegenstandsgröße  $G$ , die Gegenstandsweiten  $g_i$ , die Bildgröße  $B$ , die Bildweiten  $b_i$ , der Abstand zwischen Gegenstand und Bild  $e$ , der Abstand der Linsenpositionen  $d$ , der Parallelstrahl  $P$ , der Mittelpunktstrahl  $M$  und der Brennpunktstrahl  $B$  eingezeichnet. [2]

## 2.4 Methode von Abbe

Ein Linsensystem aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse wird zwischen Schirm und Lampe hin- und herbewegt und es wird nach einem scharfen Bild gesucht. Der

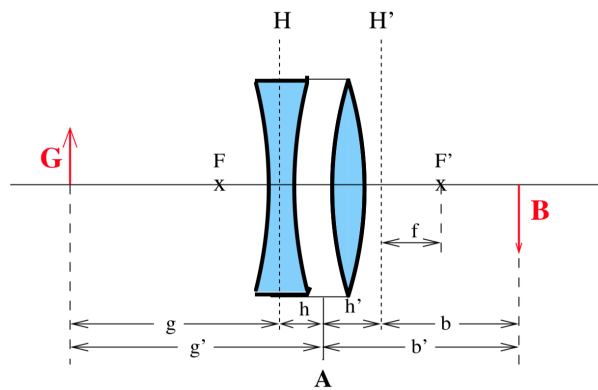
Aufbau ist in Abb. 4 zu sehen. Die Gegenstandsweite  $g'$  und die Bildweite  $b'$  lassen sich bei einem System aus Linsen von einem Referenzpunkt aus gut messen. Wenn der Abbildungsmaßstab bekannt ist, lässt sich daraus die Brennweite und der Abstand zu den Hauptebenen bestimmen. Dafür kann der lineare Zusammenhang

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (6)$$

beziehungsweise der Zusammenhang

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (7)$$

mit einer linearen Regression gelöst werden. Dabei sind  $h$  der Abstand von Referenzpunkt und Hauptebene  $H$  und  $h'$  der Abstand von Referenzpunkt und Hauptebene  $H'$ .



**Abbildung 4:** Skizze der Methode von Abbe. Es sind eine Sammell- und eine Zerstreuungslinse zu sehen. Außerdem sind die Gegenstandsgröße  $G$ , die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildgröße  $B$ , die Bildweite  $b$ , der Referenzpunkt  $A$ , die Gegenstandsweite  $g'$  bezüglich des Referenzpunktes, die Bildweite  $b'$  bezüglich des Referenzpunktes, die Brennpunkte  $F$ , die Brennweite  $f$ , die Hauptebenen  $H$  und  $H'$  sowie die Abstände  $h$  und  $h'$  von Referenzpunkt zu den Hauptebenen eingezeichnet. [2]

### 3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von  $N$  Werten wird durch

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

bestimmt.

Die Standardabweichung der Stichprobe wird berechnet mit

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Die reaktive Abweichung zwischen zwei Werten kann durch

$$f = \frac{x_a - x_r}{x_r}$$

bestimmt werden.

Die allgemeine Formel für eine lineare Regression ergibt sich mit der Steigung  $m$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $n$  zu

$$y = m \cdot x + n. \quad (8)$$

## 4 Durchführung

Es wird eine optische Bank benutzt, auf der die optischen Elemente, also die Lampe, die Linsen und der Schirm, befestigt werden. Die Lichtquelle ist eine Halogenlampe und der Gegenstand ein "Perl L", eine Art Filter, durch den ein L-förmiges Bild durchgelassen wird.

### 4.1 Brennweitenbestimmung

Im ersten Schritt soll bei einer festen Gegenstandsweite  $g$  die Position des Schirms variiert werden, bis ein scharfes Bild zu erkennen ist. Dabei sollen die Gegenstands- und Bildweite sowie die Bildgröße gemessen werden. Die Messung wird für zehn verschiedene Gegenstandsweiten durchgeführt.

### 4.2 Methode von Bessel

Bei dieser Methode wird die Brennweite einer Linse bestimmt, indem der Abstand zwischen Gegenstand und Bild konstant bleibt und dabei zwei Linsenpositionen eingestellt werden, bei denen das Bild scharf wird. Es werden die Bild- und Gegenstandsweiten aufgenommen. Die Messung wird zehn mal durchgeführt.

Anschließend soll die chromatische Abberation für blaues und rotes Licht bestimmt werden. Dazu werden ein blauer und ein roter Filter verwendet. Die vorherige Messung wird jeweils fünf mal durchgeführt.

### 4.3 Methode von Abbe

Eine Zerstreuungslinse und eine Sammellinse werden zwischen der Lampe und dem Schirm positioniert. Die beiden Linsen werden so dicht zusammengestellt, dass sie sich berühren und beim Verschieben wird ein fester Abstand zwischen den beiden Linsen beibehalten. Ein Referenzpunkt A wird gewählt. Es wird für zehn verschiedene Gegenstandsweiten ein scharfes Bild erzeugt und die Bild- und Gegenstandsweite  $b'$  und  $g'$  sowie die Bildgröße  $B$  werden gemessen.

## 5 Auswertung

### 5.1 Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes

In Tab. 1 sind die Gegenstandsweite  $g$ , die Brennweite  $b$  und die Bildgröße  $B$  aufgelistet. Die Gegenstandsgröße beträgt  $G = 3\text{ cm}$ .

**Tabelle 1:** Es sind die Bildweite und die Bildgröße bei verschiedenen Gegenstandsweiten zu sehen.

$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$B/\text{cm}$
12,7	38,9	8,4
13,7	32,2	6,5
14,7	28,2	5,3
15,7	25,3	4,4
16,7	22,5	3,7
17,7	21,3	3,3
18,7	19,8	3,0
19,7	18,5	2,6
20,7	17,8	2,4
21,7	17,4	2,2

Aus den Werten für die Bildweite  $b$  und die Gegenstandsweite  $g$  ergibt sich mit Gleichung eqn:abbildungsgesetz der Mittelwert des Abbildungsmaßstabes  $V$  zu

$$V_{\text{Var1}} = 1,5 \pm 0,7.$$

Aus den Werten für die Bildgröße  $B$  und die Gegenstandsgröße  $G$  ergibt sich mit Gleichung (1) der Mittelwert des Abbildungsmaßstabes  $V$  zu

$$V_{\text{Var2}} = 1,4 \pm 0,6.$$

Nach Gleichung (2) ergibt sich für die Brennweite  $f$  ein Wert von

$$f = (9,62 \pm 0,05)\text{ cm}.$$

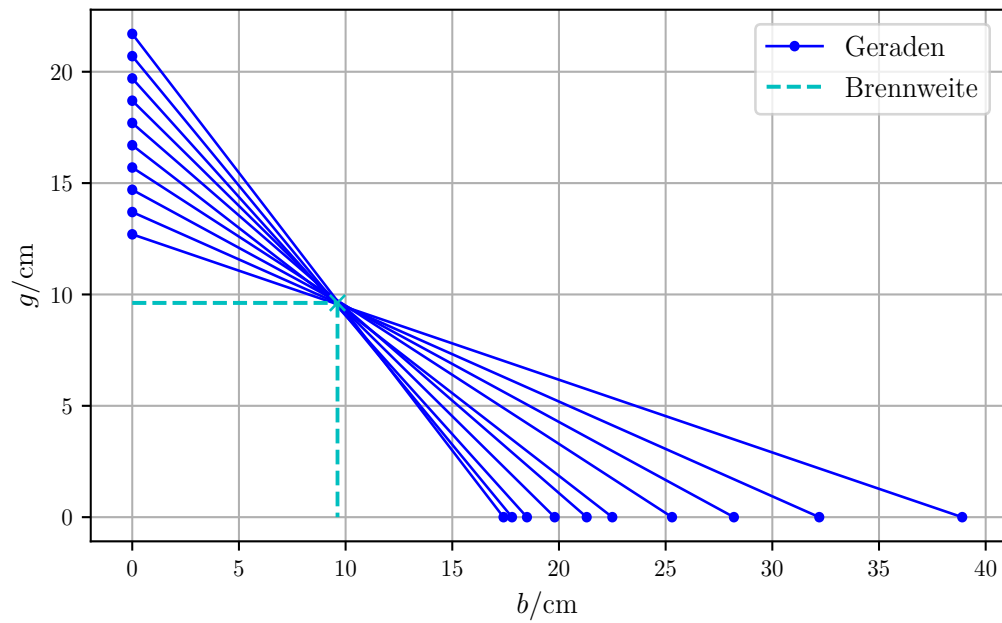
Die Herstellerangabe gibt für die Brennweite einen Wert von

$$f_{\text{real}} = 10\text{ cm}$$

an.

Um die Messgenauigkeit visuell erkennen zu können, werden die Werte  $b$  und  $g$  als Schnittpunkte mit der  $x$ - und  $y$ -Achse betrachtet. Die zueinandergehörenden Werte werden verbunden und es wird geschaut, in welchem Punkt sich die Geraden schneiden (Abb. 5).





**Abbildung 5:** Die Werte für  $g$  sind als Schnittpunkte mit der  $y$ -Achse und die Werte für  $b$  sind als Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse dargestellt. Die zueinandergehörenden Werte sind miteinander verbunden. Der Schnittpunkt der Geraden ist die gemessene Brennweite.

## 5.2 Methode von Bessel

In Tab. 2 sind die Werte für die Gegenstandsweiten und den Bildweiten bei verschiedenen Abständen von Schirm (Bild) und Gegenstand bei weißem Licht aufgelistet.

**Tabelle 2:** Die ersten Gegenstands- und Bildweiten und die zweiten Gegenstands- und Bildweiten, die mit der Methode von Bessel gemessen wurden, für weißes Licht.

$g_1/\text{cm}$	$b_1/\text{cm}$	$g_2/\text{cm}$	$b_2/\text{cm}$
12,7	38,0	37,4	13,3
12,8	39,9	39,4	13,3
12,4	42,3	41,9	12,8
12,2	44,5	43,8	12,9
12,0	46,7	46,0	12,7
11,9	50,8	50,5	12,2
11,7	55,0	54,5	12,2
11,7	57,0	56,8	11,9
11,5	59,2	58,8	11,9
11,4	63,3	62,9	11,8

Mit Gleichung (3), Gleichung (4) und der Gleichung (5) ergibt sich mit den jeweils ersten Werten für die Gegenstands- und Bildweiten für die Brennweite der Linse ein Wert von

$$f_{\text{weiß},1} = (9,62 \pm 0,06) \text{ cm.}$$

Mit den zweiten Werten ergibt sich für die Brennweite

$$f_{\text{weiß},2} = (9,89 \pm 0,06) \text{ cm.}$$

In Tab. 3 sind die gleichen Werte für einen roten Filter und in Tab. 4 sind die Werte für einen blauen Filter aufgelistet.

**Tabelle 3:** Die ersten Gegenstands- und Bildweiten und die zweiten Gegenstands- und Bildweiten, die mit der Methode von Bessel gemessen wurden, für rotes Licht.

$g_1/\text{cm}$	$b_1/\text{cm}$	$g_2/\text{cm}$	$b_2/\text{cm}$
13,3	37,4	36,9	13,8
12,9	39,8	39,4	13,3
12,5	42,2	41,9	12,8
12,3	44,4	43,9	12,8
12,2	46,5	46,1	12,6

**Tabelle 4:** Die ersten Gegenstands- und Bildweiten und die zweiten Gegenstands- und Bildweiten, die mit der Methode von Bessel gemessen wurden, für blaues Licht.

$g_1/\text{cm}$	$b_1/\text{cm}$	$g_2/\text{cm}$	$b_2/\text{cm}$
13,0	37,7	37,3	13,4
12,8	39,9	39,5	13,2
12,6	42,1	41,8	12,9
12,3	44,4	44,1	12,6
12,2	46,5	46,0	12,7

Auf dieselbe Weise wie zuvor ergibt sich, dass die Brennweite für rote Strahlen mit den ersten bzw. zweiten Werten bei

$$f_{\text{rot},1} = (9,70 \pm 0,07) \text{ cm}$$

$$f_{\text{rot},2} = (9,92 \pm 0,08) \text{ cm}$$

liegt.

Für das Licht mit blauem Filter ergeben sich die Brennweiten

$$f_{\text{blau},1} = (9,67 \pm 0,02) \text{ cm}$$

$$f_{\text{blau},2} = (9,87 \pm 0,05) \text{ cm}.$$

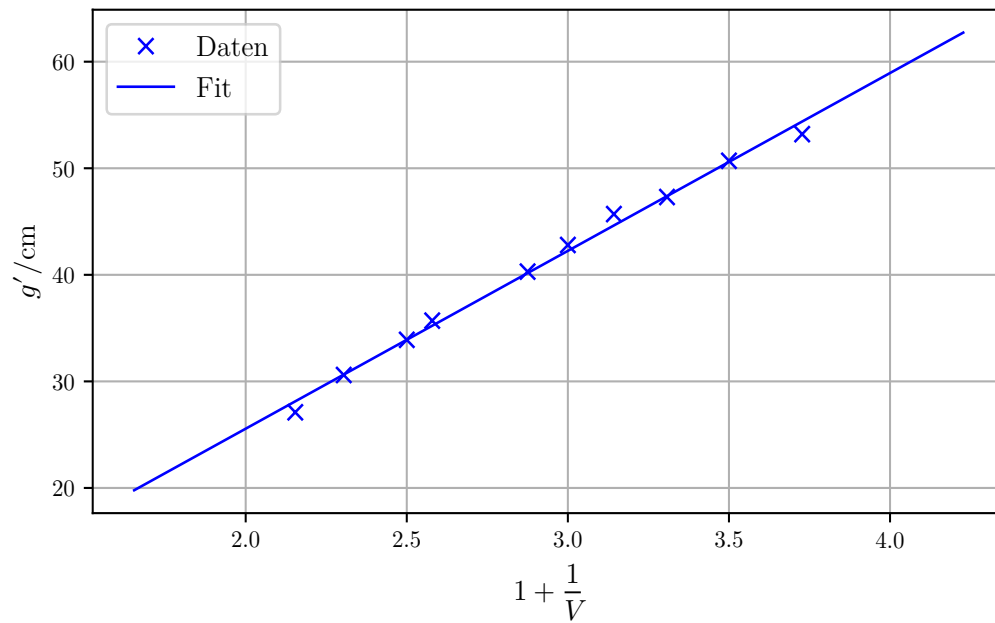
### 5.3 Methode von Abbe

In Tab. 5 sind die Gegenstands- und Bildweiten bezüglich des Referenzpunktes  $A$  und die jeweilige Bildgröße eingetragen.

**Tabelle 5:** Die Gegenstands- und Bildweiten bezüglich des Referenzpunktes und die jeweiligen Bildgrößen, die mit der Methode von Abbe gemessen wurden.

$g'/\text{cm}$	$b'/\text{cm}$	$B/\text{cm}$
27,1	45,6	2,6
30,6	44,1	2,3
33,9	42,8	2,0
35,7	43,0	1,9
40,3	40,4	1,6
42,8	39,9	1,5
45,7	39,0	1,4
47,3	39,4	1,3
50,7	38,0	1,2
53,2	37,5	1,1

Die Werte  $g'$  sind in Abb. 6 gegen  $(1 + 1/V)$  aufgetragen. In Abb. 7 sind die Werte  $b'$  gegen  $(1 + V)$  aufgetragen.



**Abbildung 6:** Die Gegenstandsweite bezüglich des Referenzpunktes ist gegen  $1 + 1/V$  aufgetragen.

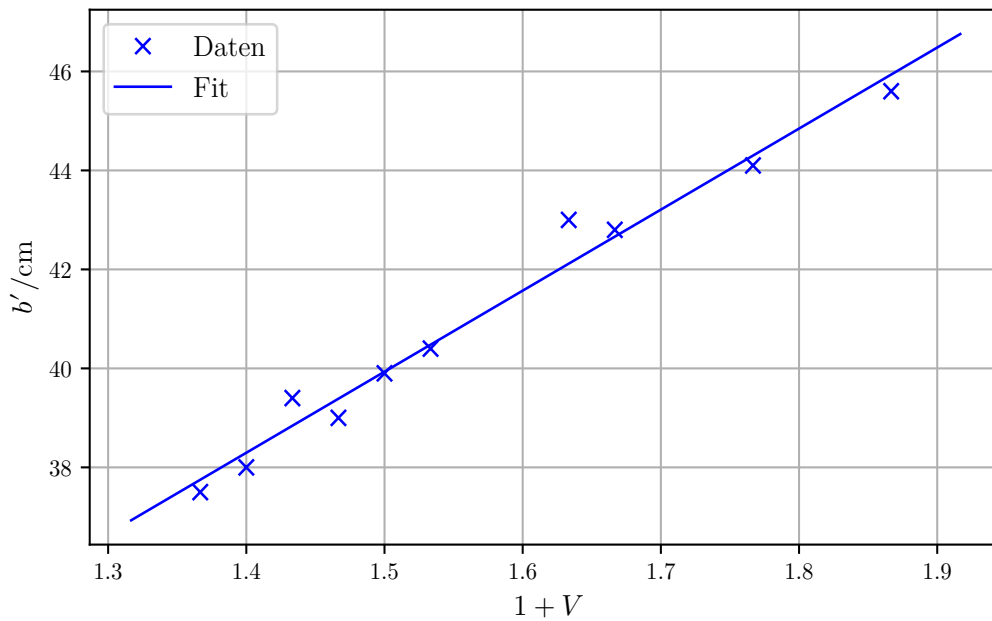
Die Steigung der Ausgleichsgerade ist nach Gleichung (6) die Brennweite. Der  $y$ -Achsenabschnitt ist die Entfernung der Hauptebene  $H$  zum Referenzpunkt  $A$ . Für Abb. 6 ergibt sich die Brennweite zu

$$f_{\text{Abbe},1} = (16,69 \pm 0,46) \text{ cm}$$

und die Hauptebene  $H$  des Linsensystems liegt

$$h = (-7,82 \pm 1,36) \text{ cm}$$

entfernt.



**Abbildung 7:** Die Bildweite bezüglich des Referenzpunktes ist gegen  $1 + V$  aufgetragen.

Analog ist die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abb. 7 nach Gleichung (7) die Brennweite und der  $y$ -Achsenabschnitt ist die Entfernung  $h'$  der Hauptebene  $H'$  zum Referenzpunkt A. Die Brennweite ergibt sich zu

$$f_{\text{Abbe},2} = (16,37 \pm 0,89) \text{ cm}.$$

Die Hauptebene  $H'$  des Linsensystems liegt

$$h' = (15,37 \pm 1,41) \text{ cm}$$

entfernt.

## 6 Diskussion

### 6.1 Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes

Der mit der Bild- und Gegenstandsweite ermittelte Mittelwert des Abbildungsmaßstabes weicht um 6,7% von dem Wert des mit der Bild- und Gegenstandsgröße berechneten Mittelwerts des Abbildungsmaßstabes ab. Die Werte liegen also relativ nah aneinander und das Abbildungsgesetz kann als bestätigt angesehen werden.

Die mit der Linsengleichung ermittelte Brennweite weicht von der vom Hersteller angegebenen Brennweite um 3,8% ab. Die Linsengleichung kann also auch als bestätigt angesehen werden.

## 6.2 Überprüfung der Messgenauigkeit

Die Geraden in 5 schneiden sich alle in einem Punkt, der zuvor ermittelten Brennweite. Dort gilt  $x = y$ . Das bedeutet, dass die Messgenauigkeit hoch ist.

## 6.3 Brennweitenbestimmung mit der Methode von Bessel

Die erste Brennweite für das weiße Licht weicht um 2,7 % von der zweiten Brennweite ab. Die erste Brennweite weicht von der Herstellerangabe um 3,8 % ab, die zweite um 1,1 %. Die erste Brennweite für das rote Licht weicht um 2,2 % von der zweiten Brennweite ab. Die erste Brennweite für das blaue Licht weicht um 2,0 % von der zweiten Brennweite ab. Die zuvor in 5.1 ermittelte Brennweite bei weißem Licht weicht von der ersten Brennweite, die mit der Methode von Bessel mit weißem Licht bestimmt wurde, um 0 % ab. Von der zweiten Brennweite weicht die zuvor berechnete um 2,7 % ab.

Die jeweils erste Berechnung führt für die Brennweite des roten Lichts zu einer Abweichung von 0,8 % zur Brennweite des weißen Lichts und die Abweichung der Brennweite des blauen Lichts beträgt 0,5 %. Die zweite Berechnung ergibt, dass die Abweichung des roten Filters bei 0,3 % und die Abweichung für den blauen Filter bei 0,2 % liegt. Somit kann von einer geringen chromatischen Abberation gesprochen werden, da die Brennweite des roten Lichts jeweils weiter von der des weißen Lichts entfernt liegt, als die des blauen Lichts.

## 6.4 Brennweitenbestimmung mit der Methode von Abbe

Die mit Abb. 6 bestimmte Brennweite nach der Methode von Abbe weicht von der mit Abb. 7 bestimmten Brennweite um 2,0 % ab.

## 6.5 Fazit

Da die Fehler der einzelnen berechneten Größen und die relativen Abweichungen alle klein sind, lässt sich sagen, dass die Messung ziemlich exakt ist.

Fehler bei der Messung könnte sein, dass die Definition eines scharfen Bildes nicht immer dieselbe war und somit Unregelmäßigkeiten bei der Messung entstanden sind.

## Literatur

- [1] „Abbildungsfehler bei Linsen“. In: (2019). URL: <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/abbildungsfehler-bei-linsen>.
- [2] TU Dortmund. *V408 - Geometrische Optik*. 2019. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V408.pdf>.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.