

V103 - Biegung elastischer Stäbe

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.10.2018, Abgabe: 06.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Amplitude einer gedämpften Schwingung	3
2.2	Aperiodischer Grenzfall	3
2.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	4
2.4	Frequenzabhängigkeit der Phase	5
3	Durchführung	5
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstands	5
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	6
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase	6
4	Auswertung	6
4.1	Effektiver Widerstand und Abklingdauer	6
4.2	Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall	8
4.3	Resonanzüberhöhung und Breite der Resonanzkurve	8
4.4	d	11
5	Diskussion	13
	Literatur	13

1 Ziel

Das Ziel dieses Versuchs ist es, verschiedene Eigenschaften eines LRC -Schwingkreises anhand von erzwungenen bzw. gedämpften Schwingungen zu untersuchen.

2 Theorie

[1]

2.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung

Die Spannung lässt sich im Allgemeinen als Differentialgleichung darstellen. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die Spannung in einer Masche, also einem Schaltkreis, dass die Summe aller Spannungen gleich Null ergeben muss:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

Dabei ist $U_R(t)$ die zeitlich veränderliche Spannung an dem Widerstand R , $U_C(t)$ die Spannung am Kondensator mit Kapazität C und $U_L(t)$ die Spannung an der Spule mit Induktivität L , also die induktive Spannung. Für die gedämpfte Schwingung ergibt sich die Gleichung:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta), \quad (1)$$

wobei $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$ ist. I ist die Stromstärke, A_0 der Startwert, ν die Frequenz und η eine Phasenverschiebung. Die Abklingdauer ist durch

$$T_{ex} = \frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (2)$$

gegeben. Der effektive Dämpfungswiderstand bestimmt sich durch

$$R_{eff} = 2\pi\mu. \quad (3)$$

2.2 Aperiodischer Grenzfall

Beim aperiodischen Grenzfall geht die Spannung ohne Überschwingung am schnellsten gegen null (gestrichelte Linie Abb. 1). Dieser kann durch die Gleichung

$$I(t) = A e^{-\frac{R}{2L} * t} = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (4)$$

beschrieben werden. Der Dämpfungswiderstand dabei ist gegeben durch

$$R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}. \quad (5)$$

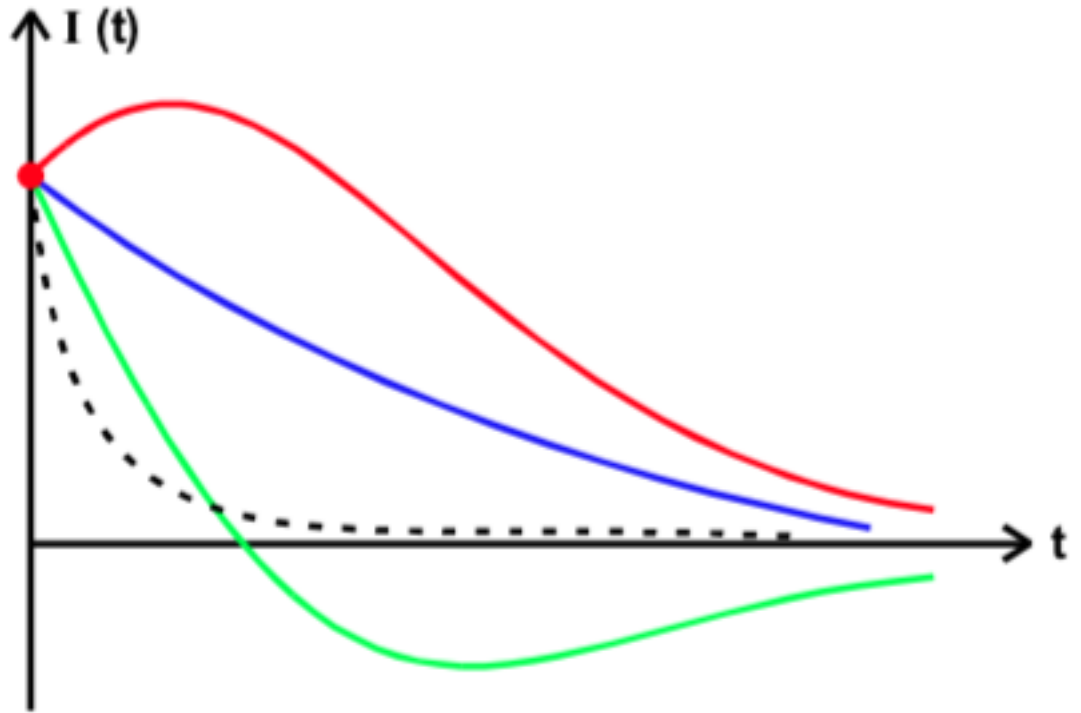


Abbildung 1: Mögliche zeitliche Verläufe des Stroms in einem Schwingkreis mit aperiodischer Dämpfung.

2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Abhängigkeit der Kondensatorspannung von der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f$$

der Erregerspannung lässt sich mittels

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (6)$$

beschreiben. Bei dem Phänomen der Resonanz erreicht U_C ein Maximum, das über der Amplitude U_0 der Erregerspannung liegt:

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = q U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (7)$$

U_C überschreitet bzw. unterschreitet die Erregerspannung also um den Faktor

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (8)$$

Dieser Faktor ist die Güte, bzw. Resonanzüberhöhung. Daraus lässt sich die Breite der Resonanzkurve bestimmen:

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{q}. \quad (9)$$

2.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Die Phase in Abhängigkeit von der Frequenz der Erregerspannung wird durch

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right)$$

beschrieben. Sie lässt sich auch anhand des Abstands der Nulldurchgänge δt zweier Schwingungen beschreiben:

$$\varphi = \frac{\delta t}{T} 2\pi. \quad (10)$$

Dabei ist T die Schwingungsdauer, die sich mittels

$$T = \frac{1}{f}$$

aus der Frequenz ergibt. Die Resonanzfrequenz ist gegeben durch

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (11)$$

An den Stellen $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3}{4}\pi$ gilt für die Frequenzen ω_1 und ω_2 :

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (12)$$

3 Durchführung

3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

Im ersten Teil wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung untersucht. Im Anschluss kann daraus in der Auswertung ein Wert für den effektiven Dämpfungswiderstand ermittelt werden. Dafür wird mit einem Rechteckimpulsgenerator der Schwingkreis zu einer gedämpften Schwingung angeregt. In der Schaltung wird dazu der kleine Festwiderstand verwendet.

3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands

Durch Variation des regelbaren Widerstands kann der Wert R_{ap} ermittelt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall erreicht wird. Der Widerstand wird am Anfang auf seinen Minimalwert eingestellt. Nach und nach wird der Widerstand dann erhöht. Sobald ein Kurvenbereich auftritt, in dem die Steigung des Graphen $\frac{dU_C}{dt}$ größer 0 ist, wurde R_{ap} überschritten. Auf diese Weise lässt sich ablesen, wie groß der Dämpfungswiderstand R_{ap} sein muss, um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Kondensatorspannung und deren Frequenzabhängigkeit wird an einem Serienresonanzkreis gemessen. Hierfür wird eine Wechselspannung an den Schwingkreis angeschlossen. An einem Sinusspannungsgenerator wird die Frequenz eingestellt. Die Kondensatorspannung wird mit einem Oszilloskop gemessen. Der Dämpfungswiderstand soll hierbei der größere der beiden Festwiderstände sein. Insgesamt werden 30 Messwertpaare aufgenommen. Im Bereich von 9 bis 29 kHz und im Bereich von 39 bis 59 kHz wird jeweils in 2 kHz Schritten gemessen. Im Bereich von 29 bis 39 kHz wird in 1 kHz Schritten gemessen.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Anschließend wird die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung verglichen. Dafür wird der zeitliche Abstand der beiden Nulldurchgänge der Schwingungen gemessen. Die benötigte Periodendauer ergibt sich aus der eingestellten Frequenz. Die Messbereiche sind hier die selben wie in 3.3.

4 Auswertung

4.1 Effektiver Widerstand und Abklingdauer

Die Zeit und die Amplitude der Spannung sind in Tabelle ?? dargestellt. Um den effektiven Dämpfungswiderstand zu berechnen, werden die Werte linearisiert. Diese Werte sind in Tabelle ?? zu finden. In Abb. 2 sind die linearisierten Werte dargestellt. Es wird der Logarithmus der Spannung gegen die Zeit aufgetragen.

Tabelle 1: Die einhüllende Funktion der gedämpften Schwingung. Zeit t gegen die Spannung U

$t / \mu\text{s}$	U / V
15,00	1,92
44,00	1,79
72,00	1,67
101,00	1,56
130,00	1,46
159,00	1,38
188,00	1,30
217,00	1,22
246,00	1,17
274,00	1,12
303,00	1,07
332,00	1,03
361,00	1,01
390,00	0,98
419,00	0,94
448,00	0,93

Tabelle 2: Die linearisierten Werte der einhüllende Funktion der gedämpften Schwingung. Zeit t gegen die logarithmierte Spannung $\log U$

$t / \mu\text{s}$	$\log U$
15,00	0,65
44,00	0,58
72,00	0,51
101,00	0,44
130,00	0,38
159,00	0,32
188,00	0,26
217,00	0,20
246,00	0,16
274,00	0,11
303,00	0,07
332,00	0,03
361,00	0,01
390,00	−0,02
419,00	−0,06
448,00	−0,07

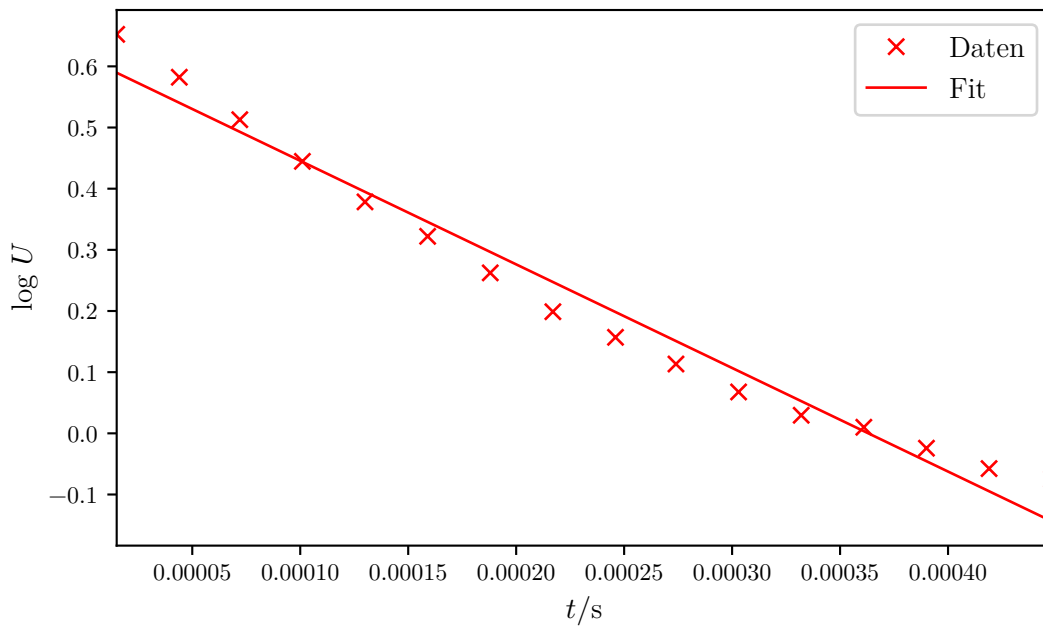


Abbildung 2: Plot.

Daraus ergibt sich durch (3) der effektive Widerstand zu $R_{eff} = (1,69 \pm 0,07) \cdot 10^3 \Omega$. Die Abklingdauer 2 ist somit $T_{ex} = 0,000\,590 \pm 0,000\,026$.

4.2 Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall

Der Wert für den Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall lässt sich ablesen. Er ist $R_{ap} = 3500,0 \Omega$.

Der theoretisch berechnete Wert, der mittels (5) bestimmt wird, ist $R_{ap,theo} = (4390 \pm 9) \Omega$.

4.3 Resonanzüberhöhung und Breite der Resonanzkurve

Tabelle ?? beinhaltet die Spannung der Kondensators sowie die Abstände der Nulldurchgänge der Kondensatorspannung und der Erregerspannung zu verschiedenen Frequenzen. Die Werte zur Berechnung von sind in Tabelle ?? aufgelistet. Die Abbildung 3 stellt diese Werte dar.

Tabelle 3: Kondensatorsspannung und Generatorspannung. Verschiedene Frequenzen, Amplitude der Kondensatorspannung und Zeitdifferenz der beiden Spannungen.

f /kHz	$2U$ /V	t / μ s
9,00	1,66	$2,20 \cdot 10^{-12}$
11,00	1,74	$1,60 \cdot 10^{-12}$
13,00	1,78	$1,60 \cdot 10^{-12}$
15,00	1,86	$1,80 \cdot 10^{-12}$
17,00	1,96	$1,50 \cdot 10^{-12}$
19,00	2,10	$1,70 \cdot 10^{-12}$
21,00	2,30	$1,80 \cdot 10^{-12}$
23,00	2,56	$1,80 \cdot 10^{-12}$
25,00	2,88	$2,20 \cdot 10^{-12}$
27,00	3,32	$2,80 \cdot 10^{-12}$
29,00	4,04	$3,00 \cdot 10^{-12}$
30,00	4,44	$3,60 \cdot 10^{-12}$
31,00	4,80	$4,20 \cdot 10^{-12}$
32,00	5,24	$4,80 \cdot 10^{-12}$
33,00	5,60	$5,60 \cdot 10^{-12}$
34,00	5,72	$6,60 \cdot 10^{-12}$
35,00	5,56	$7,60 \cdot 10^{-12}$
36,00	5,24	$8,40 \cdot 10^{-12}$
37,00	4,76	$9,00 \cdot 10^{-12}$
38,00	4,24	$9,40 \cdot 10^{-12}$
39,00	3,76	$9,80 \cdot 10^{-12}$
41,00	3,00	$1,00 \cdot 10^{-11}$
43,00	2,40	$9,80 \cdot 10^{-12}$
45,00	2,00	$9,80 \cdot 10^{-12}$
47,00	1,72	$9,80 \cdot 10^{-12}$
49,00	1,48	$9,40 \cdot 10^{-12}$
51,00	1,32	$9,20 \cdot 10^{-12}$
53,00	1,04	$9,00 \cdot 10^{-12}$
55,00	0,93	$8,60 \cdot 10^{-12}$
57,00	0,83	$8,40 \cdot 10^{-12}$
59,00	0,76	$8,20 \cdot 10^{-12}$

Tabelle 4: Kreisfrequenz ω gegen die Amplitude der Kondensatorspannung U_C durch die Generatorspannung U_0 dividiert.

$\omega \cdot 10^5 / \frac{1}{s}$	Amplitude $\frac{U_C(\omega)}{U_0}$
0,57	0,99
0,69	1,04
0,82	1,06
0,94	1,11
1,07	1,17
1,19	1,25
1,32	1,37
1,45	1,52
1,57	1,71
1,70	1,98
1,82	2,40
1,88	2,64
1,95	2,86
2,01	3,12
2,07	3,33
2,14	3,40
2,20	3,31
2,26	3,12
2,32	2,83
2,39	2,52
2,45	2,24
2,58	1,79
2,70	1,43
2,83	1,19
2,95	1,02
3,08	0,88
3,20	0,79
3,33	0,62
3,46	0,55
3,58	0,50
3,71	0,45

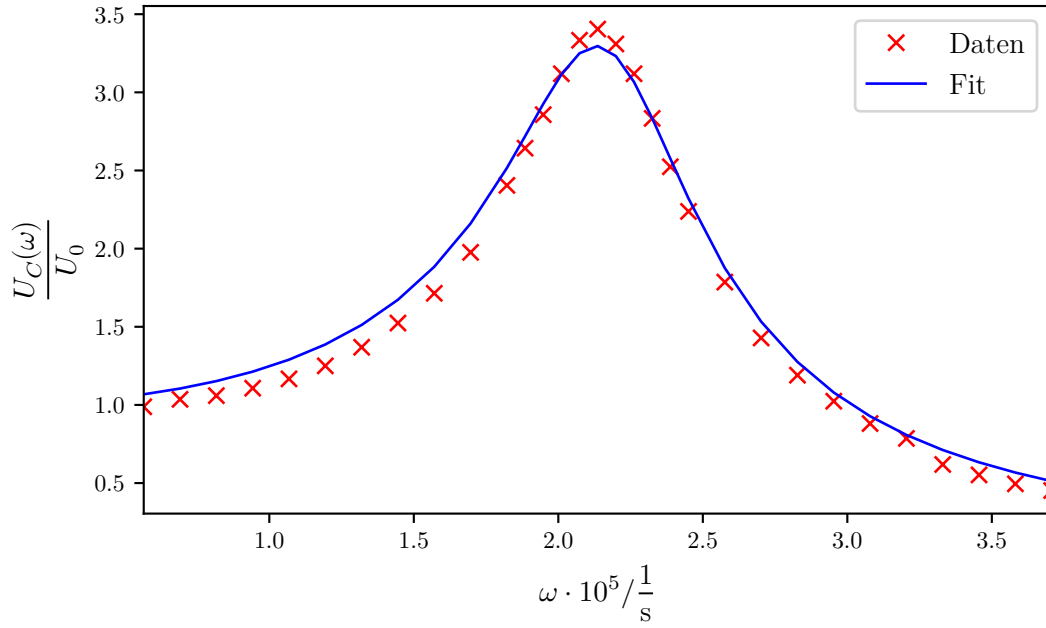


Abbildung 3: Plot.

Daraus lässt sich der Wert für die Resonanzüberhöhung, bzw. die Güte q entnehmen. Sie ist nach Gleichung (7) das Maximum. Also ergibt sich für die Güte $q = 0,34$. Der Breite der Resonanzkurve ist $\omega_+ - \omega_- = 62831,85 \frac{1}{s}$. Der theoretisch errechnete Wert für die Güte, der mit Gleichung (8) bestimmt werden kann, ist $q_{theo} = 4,309 \pm 0,010$. Der mit Gleichung (9) berechnete Wert für die Breite der Resonanzkurve ist $\omega_{+,theo} - \omega_{-,theo} = (5,040 \pm 0,016) \cdot 10^4 \frac{1}{s}$.

4.4 d

Die Abstände der Nulldurchgänge der Kondensatorspannung und der Erregerspannung sind bereits in Tabelle ?? dargestellt. In Tabelle ?? befinden sich die zur Berechnung von ω_{res} , ω_1 und ω_2 nötigen Werte, welche auch in Abb. 4 gegeneinander aufgetragen sind. Die Phase wird dabei durch Gleichung (10) bestimmt.

Tabelle 5: Kreisfrequenz ω gegen die Phasenverschiebung φ der Kondensatorspannung U_C und der Generatorspannung U_0 .

$\omega \cdot 10^5 \text{ / } \frac{1}{s}$	<i>Phase</i> φ
0,57	0,12
0,69	0,11
0,82	0,13
0,94	0,17
1,07	0,16
1,19	0,20
1,32	0,24
1,45	0,26
1,57	0,35
1,70	0,48
1,82	0,55
1,88	0,68
1,95	0,82
2,01	0,97
2,07	1,16
2,14	1,41
2,20	1,67
2,26	1,90
2,32	2,09
2,39	2,24
2,45	2,40
2,58	2,58
2,70	2,65
2,83	2,77
2,95	2,89
3,08	2,89
3,20	2,95
3,33	3,00
3,46	2,97
3,58	3,01
3,71	3,04

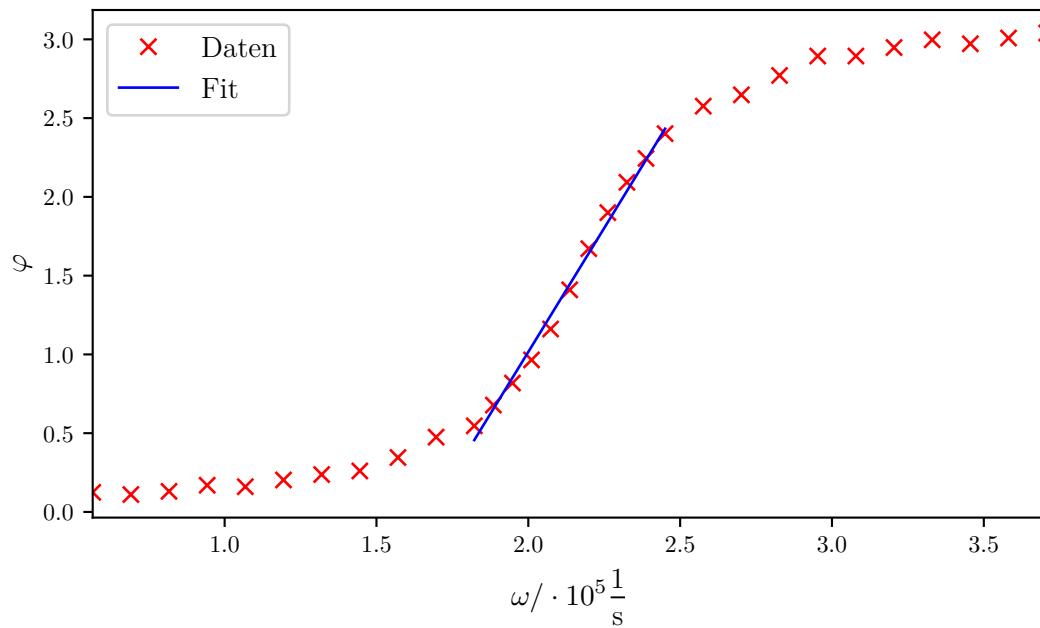


Abbildung 4: Plot.

Aus Abbildung 4 kann man die gesuchten Werte entnehmen. Die Resonanzfrequenz ist $\omega_{res} = 213\,628,30 \frac{1}{s}$. ω_1 und ω_2 haben die Werte $\omega_1 =$ und $\omega_2 =$. Die Resonanzfrequenz lässt sich in der Theorie durch Gleichung (11) bestimmen. Der Wert für diese ist $\omega_{res,theo} =$. Für die Frequenzen $\omega_{1,theo}$ und $\omega_{2,theo}$ ergibt sich mittels Gleichung (12): $\omega_{1,theo} =$ und $\omega_{2,theo} =$.

5 Diskussion

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2018.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.