V103 - Biegung elastischer Stäbe

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.10.2018, Abgabe: 06.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Ziel dieses Versuches ist es, die Elastizitätsmodule verschiedener Stäbe durch Messung ihrer Biegung zu bestimmen.

2 Theorie

Die Spannung ist die Kraft auf einen Körper pro Flächeneinheit. Die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, ist die Normalspannung σ. Ihre oberflächenparallele Komponente heißt Tangentialspannung. Das Hookesche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen der Spannung σ, die am Körper angreift, und der Deformation des Körpers dar:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

E ist dabei das Elastizitätsmodul. Das Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante, die anhand der Deformation eines Körpers bestimmt werden kann. Eine Art der Deformation ist die Biegung. Sie entsteht, wenn eine Kraft, wie in Abbildung 1 und in Abbildung 2 gezeigt, auf einen Körper wirkt. Zunächst wird die Berechnung der Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung beschrieben. Die Durchbiegung $D(x)$ bezeichnet die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen dem belasteten und unbelasteten Zustand des Stabes. Es wird eine Drehmomentgleichung aufgestellt, um $D(x)$ zu bestimmen. Die Zug- und Druckspannungen, die an der Querschnittsfläche Q angreifen, sind entgegesetzt gleich und bewirken deshalb ein Drehmoment M_σ:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq$$

y ist der Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser. Die neutrale Faser ist die Fläche, in der keine Spannungen auftreten. Ihre Länge ändert sich bei der Biegung folglich nicht. Ein weiteres Drehmoment M_F entsteht durch die Kraft auf einen senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt. Es verdreht den Querschnitt aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage. Die Deformation des Körpers stellt sich so ein, dass die Drehmomente an jeder Stelle x übereinstimmen:

$$M_F = M_\sigma.$$

Dabei ist

$$M_F = F(L - x),$$

da die Kraft F über den Hebelarm $L - x$ an Q angreift. Damit ist das Gleichgewicht der Drehmomente durch

$$\int_Q y\sigma(y)dq = F(L - x) \tag{2}$$

gegeben. Mit dem Hookeschen Gesetz (1) wird die Normalspannung $\sigma(y)$ mittels

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$$

berechnet. Hier ist Δx die Länge eines kurzen Stabstücks und δx die Längenänderung der Faser. Es gilt außerdem

$$\delta x = y\Delta\phi = y\frac{\Delta x}{R},$$

wobei R der Krümmungsradius der Faser bei x ist. Damit ist

$$\sigma(y) = E\frac{y}{R} = Ey\frac{d^2D}{dx^2},$$

da für geringe Kurvenkrümmungen

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2D}{dx^2}$$

gilt, falls

$$(\frac{dD}{dx})^2 << 1$$

ist. Für (2) ergibt sich damit:

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2 dq = F(L-x). \tag{3}$$

Dabei ist

$$I = \int_Q y^2 dq(y)$$

das Flächenträgheitsmoment. Integriert man (3) und stellt die Gleichung nach $D(x)$ um, erhält man für die Biegung bei einseitiger Einspannung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{4}$$

Diese Gleichung ist für $0 \leq x \leq L$ definiert. Die Integrationskonstanten verschwinden, weil $D(0) = 0$ und $\frac{dD}{dx} = 0$ sein müssen.
Liegen beide Stabenden auf und lässt man in der Mitte des Stabes eine Kraft angreifen, greift an der Querschnittsfläche die Kraft $\frac{F}{2}$ mit dem Hebelarm x an. Für die erste Stabhälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt für das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x.$$

Für die zweite Hälfte $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x).$$

Damit ergibt sich hier für (3)

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{5}$$

und

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L - x) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{6}$$

Integriert man beide Gleichungen, ergibt sich

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

und

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad .$$

Da die Biegekurve in der Mitte des Stabes eine horizontale Tangente haben muss, muss für die Konstanten gelten:

$$C = \frac{F}{EI}\frac{L^2}{16}$$

und

$$C' = \frac{3}{16}\frac{F}{EI}L^2.$$

Setzt man die Konstanten in (5) und (6) ein und integriert die Ausdrücke, erhält man die Gleichungen für die Biegung bei zweiseitiger Auflage des Stabes:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{7}$$

und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad . \tag{8}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden hier, weil $D(0) = 0$ und $D(L) = 0$ sein müssen. Die Biegung eines elastischen Stabes kann also durch (4), (7) und (8) bestimmt werden. Weil die Stäbe nicht als exakt gerade angenommen werden können, muss die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen werden. Die Biegung des Stabes durch die Last ist dann

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \tag{9}$$

Der Elastizitätsmodul lässt sich mittels einer linearen Regression bestimmen. Die Werte für die Biegung (9) werden gegen eine liearisierte Form des horizontalen Abstands aufgetragen. Diese können aus den Gleichungen (4), (7) und (8) entnommen werden. Die Steigung berechnet sich dabei wie folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{10}$$

Bei dem ersten und zweiten Stab entspricht die Steigung $\frac{F}{2EI}$. Stellt man den Ausdruck nach E um, erhält man eine Gleichung für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{F}{2mI}. \tag{11}$$

Für den dritten Stab ergibt sich für den Elastizitätsmodul auf die selbe Weise die Gleichung:

$$E = \frac{F}{48mI}. \tag{12}$$

3 Durchführung

Die Apparatur ist in Abbildung xy zu sehen. Die Stäbe werden entweder einseitig eingeklemmt oder zweiseitig auf den Punkten A und B gelagert. Die Stäbe werden belastet, indem ein Gewicht entweder am Stabende oder in der Stabmitte angehängt wird. Die Biegung wird mit zwei Messuhren, die sich auf einer Längen-Skala befinden und verschiebbar sind, sodass die Biegung an verschiedenen Stellen x bestimmt werden kann, gemessen. Bei Messuhren wird die Verschiebung eines Objektes mittels eines federnden Taststiftes gemessen. Zunächst wird jeweils für zwei einseitig eingespannte Stäbe die Biegung ohne angehängtes Gewicht gemessen. Danach wird an das Stabende ein Gewicht angehängt. Die Biegung wird mit einer der Messuhren gemessen. Ein dritter Stab wird zweiseitig aufgelegt. Es wird wieder zunächst die Biegung ohne Gewicht und dann mit Gewicht gemessen. Hier wird für die erste Hälfte des Stabes $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ die linke Messuhr und für die zweite Hälfte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ die rechte Messuhr verwendet. Zuletzt werden die Längen, Breiten, beziehungsweise Durchmesser und Massen der Stäbe, sowie die Masse des angehängten Gewichts bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des ersten Stabes

Die Biegung $D(x)$ an den Stellen x mit und ohne Gewicht ist für den ersten Stab in 1 zu sehen. Die Biegung ist jeweils in mm angegeben. Die horizontale Länge x ist in cm angegeben. Die Differenz (9) der beiden Biegungen aus 1 und die jeweiligen horizontalen Abstände in linearisierter Form $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ sind in 2 dargestellt. Auf diese Weise lässt sich mit Hilfe des Graphen der Elastizitätsmodul durch die Steigung bestimmen. Die Steigung ergibt sich mit (10) zu $m = 0{,}016\,939\,\mathrm{m}$. Damit ist der Elastizitätsmodul mit (11)$E = 459{,}04\,\mathrm{GPa}$.

4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des zweiten Stabes

In 3 befinden sich die Werte der Biegung $D(x)$ mit und ohne angehängtes Gewicht und die horizontale Auslenkung für den zweiten Stab. Die Differenz (9) der Biegungen ohne und mit Gewicht und die Abstände in lineartisierter Form sind in 4 zu sehen. Aus der Steigung $m = 0{,}074\,685\,\mathrm{m}$, die mittels (10) berechnet wurde, ergibt sich der Elastizitätsmodul der zweiten Stange (11) zu $E = 160{,}12\,\mathrm{GPa}$.

4.3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls des dritten Stabes

Die Werte der rechten Hälfte des dritten Stabes sind in 5 zu finden. Die Differenz (**??**) der Biegungen ohne und mit Gewicht in der Stabmitte und die Abstände in linearisierter Form $3L^2x - 4x^3$ sind in 6 aufgelistet. Mit der Steigung $m = 0{,}002\,429\,\mathrm{m}$, die mit (10)ermittelt wurde, ist der Elastizitätsmodul für die rechte Hälfte des dritten Stabes (12) $E = 226{,}35\,\mathrm{GPa}$.

Tabelle 1: Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,98	1,10	3,00
1,04	1,10	5,00
1,11	1,17	8,00
1,16	1,17	11,00
1,12	1,18	14,00
1,12	1,19	17,00
1,10	1,19	20,00
1,03	1,21	23,00
0,93	1,23	26,00
0,80	1,24	29,00
0,68	1,25	32,00
0,58	1,25	35,00
0,40	1,25	38,00
0,20	1,26	41,00
0,08	1,26	44,00
−0,10	1,26	47,00
−0,38	1,26	49,00

Tabelle 2: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht, Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$Lx^2 - x^3/3/\mathrm{m}^3$
0,00	0,00
$6{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,00
$6{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,00
$1{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,01
$6{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,01
$7{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,01
$9{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,02
0,00	0,02
0,00	0,03
0,00	0,04
0,00	0,04
0,00	0,05
0,00	0,06
0,00	0,07
0,00	0,08
0,00	0,08
0,00	0,09

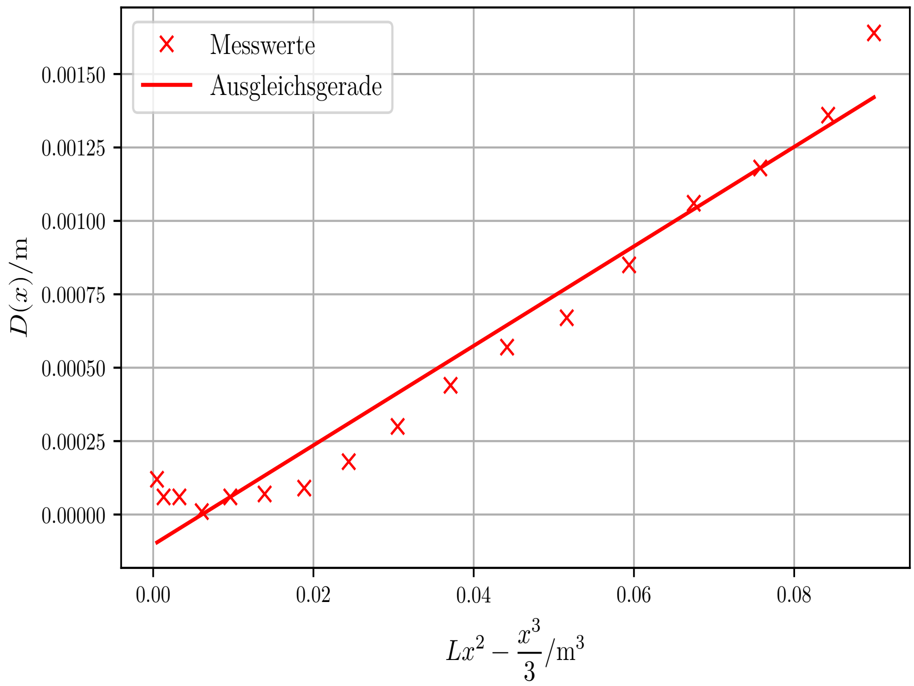

Abbildung 1: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes mit und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden

Tabelle 3

Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,87	0,79	3,00
0,91	0,77	5,00
0,98	0,68	8,00
1,01	0,50	11,00
1,03	0,27	14,00
1,03	−0,05	17,00
1,04	−0,42	20,00
0,96	−1,30	26,00
0,88	−1,83	29,00
0,82	−2,42	32,00
0,69	−3,13	35,00
0,55	−3,71	38,00
0,36	−4,41	41,00
0,10	−5,23	44,00
−0,15	−6,16	47,00
−0,33	−6,56	49,00

Tabelle 4: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$Lx^2 - x^3/3/\mathrm{m}^3$
$8{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,00
0,00	0,00
0,00	0,00
0,00	0,01
0,00	0,01
0,00	0,01
0,00	0,02
0,00	0,03
0,00	0,03
0,00	0,04
0,00	0,05
0,00	0,06
0,00	0,06
0,01	0,07
0,01	0,08
0,01	0,08

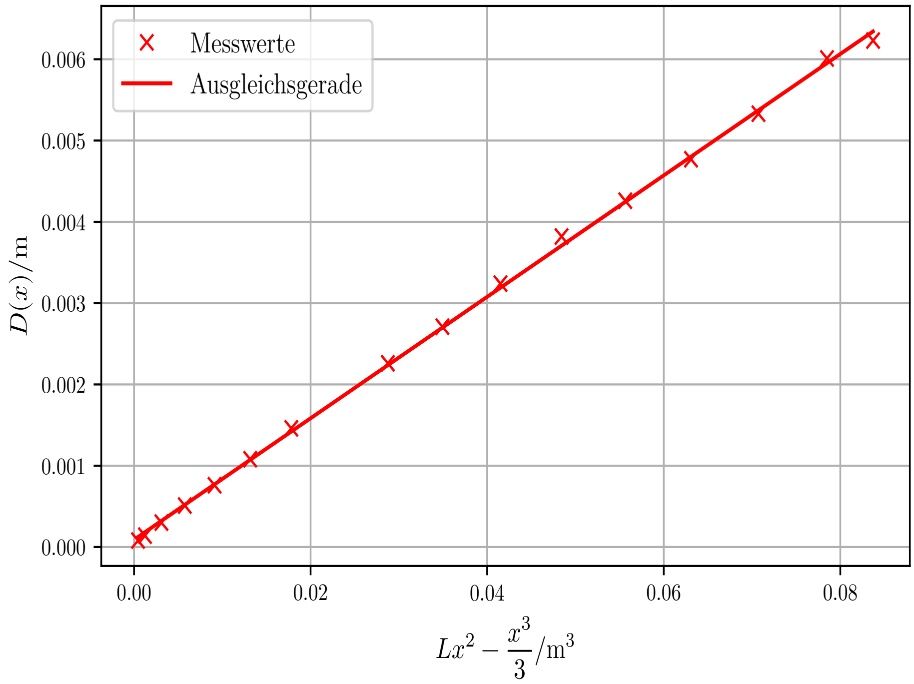

Abbildung 2: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes m it und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden

Tabelle 5

Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
0,75	0,71	3,00
0,79	0,72	5,00
0,82	0,72	8,00
0,83	0,70	11,00
0,80	0,60	14,00
0,74	0,49	17,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,66	0,34	20,00
0,55	0,19	23,00
0,45	0,05	26,00

Tabelle 6: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)/\mathrm{m}$ Differenz	$3L^2x - 4x^3/\mathrm{m}^3$
$4{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,03
$7{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,05
$10{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,07
0,00	0,10
0,00	0,12
0,00	0,14
0,00	0,16
0,00	0,17
0,00	0,16
0,00	0,17
0,00	0,18

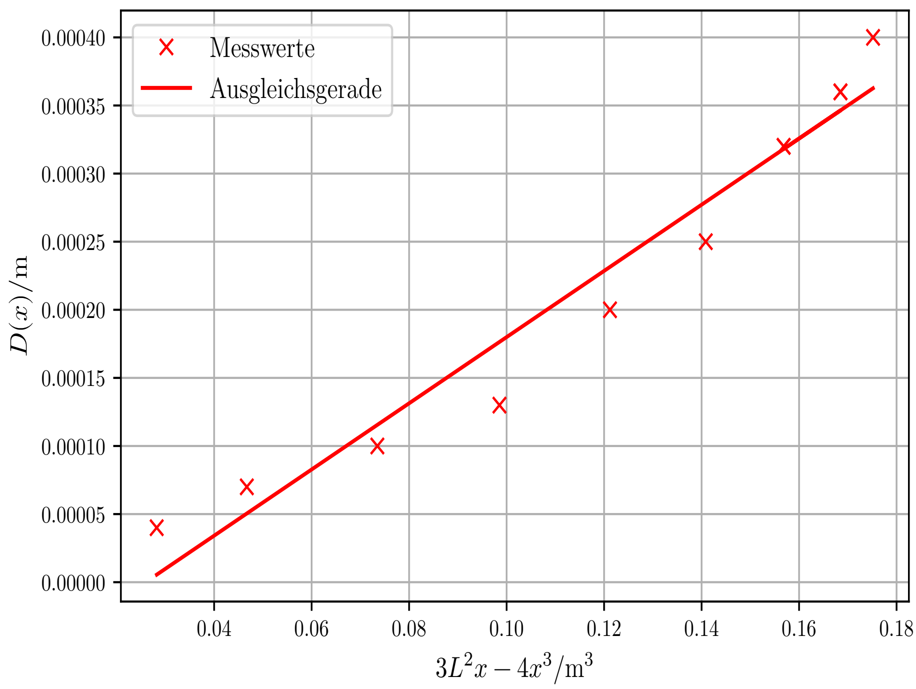

Abbildung 3: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes m it und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden

Für die linke Hälfte wurde eine andere Messuhr verwendet. Die Werte für die Biegungen der linken Hälfte befinden sich in 7. Die Differenzen und die linearisierten horizontalen

Tabelle 7

Vertikaler Abstand der Stange zur Messuhr mit und ohne Gewicht, Abstand der Messuhr vom Ursprung auf der horizontalen Achse

$D(x)$/mm ohne Gewicht	$D(x)$/mm mit Gewicht	x/cm
−1,01	−1,75	29,00
−0,97	−1,79	32,00
−1,08	−1,89	35,00
−1,16	−1,98	38,00
−1,35	−2,08	41,00
−1,48	−2,13	44,00
−1,58	−2,15	47,00
−1,67	−2,12	50,00
−1,76	−2,06	53,00

Abstände $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ finden sich in 8. Der Elastizitätsmodul für die linke

Tabelle 8: Differenz der vertikalen Abstände mit und ohne Gewicht , Formel zur Linearisierung der Messkurve

$D(x)$/m Differenz	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3/\mathrm{m}^3$
0,00	0,18
0,00	0,17
0,00	0,16
0,00	0,15
0,00	0,13
0,00	0,11
0,00	0,08
0,00	0,06
0,00	0,03

Seite des dritten Stabes errechnet sich mit (12) mittels der Steigung (10) $m = 0{,}003\,312\,\mathrm{m}$ zu $E = 166{,}05\,\mathrm{GPa}$.

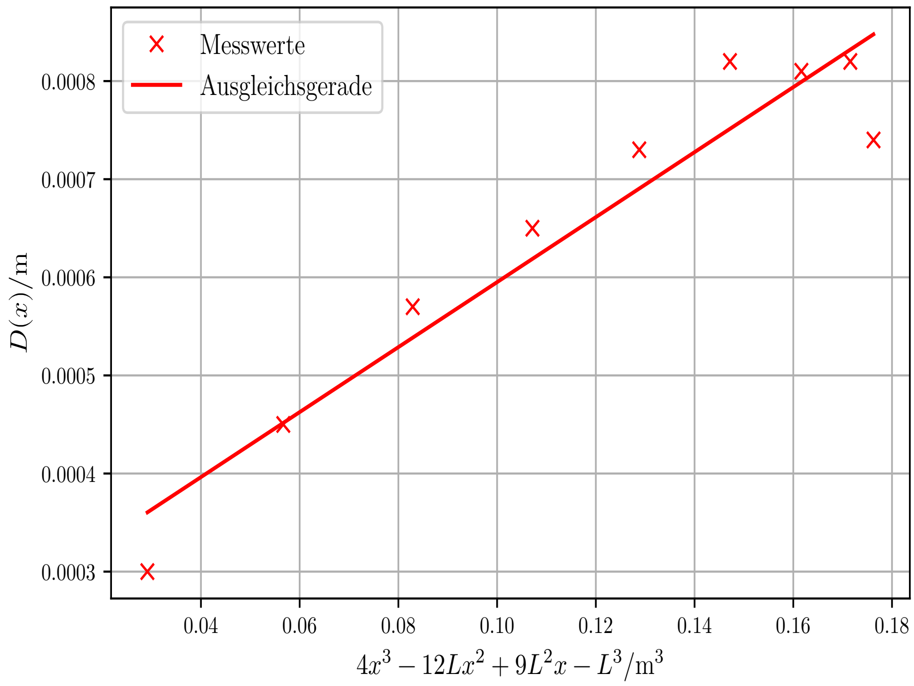

Abbildung 4: Auftragung der Differenzen der vertikalen Abstände des Stabes m it und ohne Gewicht gegen die horizontalen Abstände in linearisierter Form mit zusätzlicher Ausgleichsgeraden

5 Diskussion

In der ersten Messung bei dem goldenen Stab mit einer quadratischen Querschnittsfläche und einer Länge von $55cm$, ergab sich für den Elastizitätsmodul ein Wert, der weit von den zu erwartenden Werten abweicht. Die Messdaten liegen alle, bis auf den unteren und oberen Rand ziemlich genau auf einer Ausgleichsgeraden, deren Steigung durch die Auswertung auf einen deutlich zu hohen Wert hindeutet. Ursachen für die Abweichung könnten verschiedene Fehler sein. Zum einen sprang die Messuhr teilweise zwischen Stücken Δx, in denen gar keine Steigung mit dem bloßen Auge zu erkennen war und bei denen beim erneuten überfahren des Bereichs auch keine Veränderung stattfand. Dies deutet darauf hin, dass die gemessenen Ergebnisse der Uhr nicht so Fehler frei sind, wie nun für die Auswertung angenommen werden sollte. Zum anderen ist, obwohl der Körper K mit seiner Masse m bereits 17.6%über der Masse der Stange lag, die maximale Auslenkung, die stattgefunden hat, zu niedrig gewesen ($1.64mm$). Diese sollte mindestens $3mm$ betragen, aber da während des Messens die Differenzen der Auslenkung noch nicht überprüft wurden, ließ sich diese Fehlerquelle nicht früh genug erkennen. Aber auch mit der aus dem Volumen der Stange und dem Gewicht derselbigen lässt sich die Stoffanalyse der Stange nicht genau erkennen. Mit einer Dichte von $13,076\frac{kg}{dm^3}$ lässt sich kein exakter Stoff kombinieren. Mögliche Stoffe wären Quecksilber $(13,55\frac{kg}{dm^3})$ oder Blei$(11,34\frac{kg}{dm^3})$, wobei Quecksilber bei Raumtemperatur im flüssigen Zustand ist. Wäre der zu messende Stoff aus Blei gewesen, müsste der Elastizitätsmodul bei einem Wert von $19GPa$ liegen. Der gemessene Wert liegt bei $459GPa$. Somit liegt der relative Fehler, falls es sich tatsächlich um Blei gehandelt haben sollte bei 2315% Abweichung.

Bei der Messung des silbernen Stabs mit der runden Grundfläche und einer Länge von $55cm$ wurde der Elastizitätsmodul $160,12GPa$ gemessen. Dabei ist diese Messung deutlich exakter gewesen, denn sowohl die Ausgleichsgerade hat keine Werte die wirklich abweichen, aber auch die maximale Auslenkung lag bei $6.23mm$ also zwischen 3 und $7mm$. Somit scheinen systematische Fehler ausgeschlossen zu sein. Trotzdem lässt sich der Wert keinem Metall exakt zuordnen. Der Dichte nach, die bei $3.98\frac{kg}{dm^3}$ liegt, lässt auf Aluminium$(2,7\frac{kg}{dm^3})$ schließen. Der Modul liegt dabei nur bei $70GPa$, was auf einen Fehler von $128,7\%$ hindeutet, vorausgesetzt es handelt sich tatsächlich um Alluminium.

Bei der dritten Messung wurde das Gewicht in die Mitte gehängt. Einer der groben Fehler könnte dabei sein, dass zwei verschiedene Messuhren benutzt wurden. Die berechneten Werte hätten sich den Erwartungen nach symmetrischen zur Mitte der Stange äquivalent zu einander verhalten sollen, aber tatsächlich unterscheiden sich die maximalen Auslenkungen der von links und rechts des Gewichts gemessenen Werte um $45,95\%$ ($0,4mm$ und $0.74mm$). Die maximale Auslenkung liegt somit auch wieder weit unter den, für eine exakte Messung geforderten Werte von mindestens $3mm$ Auslenkung. Der hier gemessene Stab hat eine Länge von $60cm$ und hat eine kreisförmigen Grundfläche, was mit seinem Gewicht zu einer Dichte von $13,073\frac{kg}{dm^3}$ führt. Dieser liegt sehr in der Nähe des in der ersten Messung verwendeten Stabes. Wie auch dort ist der Wert für Blei der passenste, wobei auch dort der Elastizitätsmodul stark abweicht. Der von rechts gemessene Modul liegt bei einem Wert von $226.349GPa$, was einer Abweichung von 1091% entspricht.

Der von links gemessene Modul liegt bei $166,05 GPa$, was eine Abweichung von 773% bedeutet.

Insgesamt ist das Verfahren in der durchgeführten Art und Weise für den Zweck der Stoffanalyse als ziemlich ungenau zu bewerten.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. 2018.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 3.0.0. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 1.1.0. URL: http://www.scipy.org/.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.14.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.

[5] *Technik Tabellen-Industrietechnik*. 2018. URL: https://www.hug-technik.com/inhalt/ta/metall.htm.

[6] *Wikipedia- Elastizitätsmodul*. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul.