

V204 - Wärmeleitung von Metallen

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.01.2018, Abgabe: 11.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
3	Fehlerrechnung	4
4	Durchführung	4
4.1	Statische Methode	5
4.2	Dynamische Methode für Messing und Aluminium	5
4.3	Dynamische Methode für Edelstahl	5
5	Auswertung	5
5.1	Statische Methode	6
5.2	Dynamische Methode	8
5.2.1	Breiter Messingstab	8
5.2.2	Aluminiumstab	9
5.2.3	Edelstahlstab	10
6	Diskussion	11
6.1	Statische Methode	11
6.1.1	Vergleich der Temperaturverläufe der fernen Thermoelemente . . .	11
6.1.2	Wärmeleitfähigkeit	11
6.1.3	Wärmestrom	12
6.1.4	Vergleich der Temperaturdifferenzen der Thermoelemente von Edelstahl und Messing	12
6.2	Dynamische Methode	12
	Literatur	13

1 Ziel

Bei diesem Versuch soll die Wärmeleitung von Aluminium, Messing und Edelstahl untersucht werden.

2 Theorie

In einem Körper, der sich in einem Temperaturungleichgewicht befindet, kommt es zu einem Wärmetransport entlang des Temperaturgefälles. Dies kann z.B. durch Wärmeleitung geschehen. In festen Körpern erfolgt der Wärmetransport über Phononen und frei bewegliche Elektronen. In Metallen ist der Gitterbeitrag (Phononen) zu vernachlässigen. Ist das eine Ende eines Stabes wärmer als das andere, durchfließt die Wärmemenge dQ die Querschnittsfläche A in der Zeit dt . Es gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

wobei κ die Wärmeleitfähigkeit ist.

Für die Wärmestromdichte j_ω gilt:

$$j_\omega = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung kann hieraus die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

wobei ρ die Dichte und c die spezifische Wärme ist. Dabei ist $\frac{\kappa}{\rho c}$ die Temperaturleitfähigkeit. Sie gibt die Schnelligkeit an, mit der sich ein Temperaturunterschied ausgleicht. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hängt von der Geometrie des Stabes und den Anfangsbedingungen ab.

Wird ein Stab abwechselnd erwärmt und abgekühlt, breitet sich wegen der periodischen Temperaturwechsel eine räumliche und zeitliche Temperaturwelle aus. Diese wird folgendermaßen beschrieben:

$$T(x, t) = T_{\max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right).$$

Die Phasengeschwindigkeit v der Welle ist

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}}.$$

Für die Wärmeleitfähigkeit ergibt sich nach einigen kleinen Umformungen:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)}. \quad (2)$$

Dabei sind A_{nah} und A_{fern} die Amplituden an verschiedenen Stellen x_{nah} und x_{fern} . Die Größe Δx ist der Abstand zwischen diesen beiden Messstellen und Δt die Phasendifferenz der Temperaturwelle zwischen beiden Messstellen.

3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von N Werten wird durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

bestimmt.

Die Standardabweichung der Stichprobe wird berechnet mit:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Die relative Abweichung zwischen zwei Werten kann durch

$$\frac{a-b}{a}$$

bestimmt werden.

4 Durchführung

Das Experiment zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit ist in Abb. 1 dargestellt. Auf einer Grundplatte liegen vier Proben aus drei verschiedenen Materialien. Die vier Stäbe werden von einem Peltierelement geheizt und gekühlt. Ein Peltierelement besteht aus Halbleitern und basiert auf dem Peltier-Effekt. Es erzeugt bei Stromdurchfluss eine Temperaturdifferenz. Die Temperaturen werden an zwei Stellen an jedem Stab mit Thermoelementen gemessen und an einen Datenlogger weitergegeben.

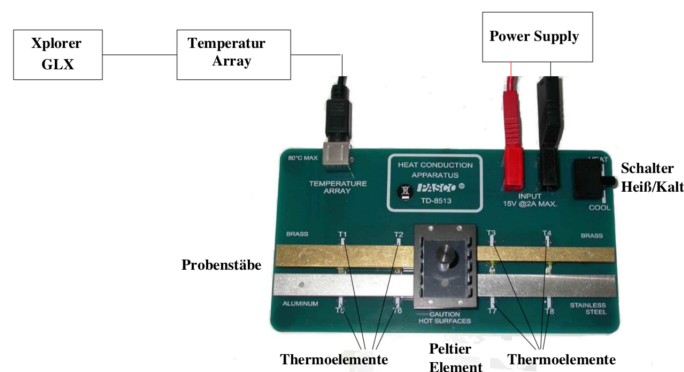


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

Zwischen den Messungen werden die Stäbe wieder auf unter 30 °C abgekühlt

4.1 Statische Methode

Zunächst wird der zeitliche Verlauf der Temperatur der Stäbe mit der statischen Methode untersucht. Dafür werden die Stäbe 700 s lang erhitzt. Dabei werden jeweils Werte im Abstand von 5 s aufgenommen. Der Verlauf für die Thermoelemente T_1 , T_4 , T_5 und T_8 wird graphisch dargestellt und ausgedruckt. Dies sind die fernen Thermoelemente. Die Verläufe der Differenzen der Thermoelemente des Edelstahlstabes $\Delta T = T_7 - T_8$ und der des breiten Messingstabes $\Delta T = T_2 - T_1$ werden ebenfalls graphisch dargestellt und ausgedruckt. Außerdem werden 5 Temperaturen in einem Abstand von 140 s für die vier fernen Thermoelemente gemessen. Die jeweiligen Abstände der nahen und der fernen Thermoelemente werden gemessen.

4.2 Dynamische Methode für Messing und Aluminium

Die Stäbe werden nun periodisch erhitzt bzw. gekühlt. Die Werte werden in einem Abstand von 2 s aufgenommen. Eine Periode beträgt 80 s. Die Stäbe werden also jeweils 40 s lang erhitzt und anschließend 40 s lang gekühlt. Es werden 10 Perioden gemessen. Die Temperaturverläufe für Messing (Thermoelemente T_1 und T_2) und für Aluminium (Thermoelemente T_5 und T_6) werden graphisch dargestellt und ausgedruckt.

4.3 Dynamische Methode für Edelstahl

Eine Periode beträgt 200 s. Die Stäbe werden also 100 s lang erhitzt und anschließend 100 s lang gekühlt. Es werden 11,5 Perioden gemessen. Die Temperaturverläufe des Edelstahlstabes (Thermoelemente T_7 und T_8) werden graphisch dargestellt und ausgedruckt.

5 Auswertung

Der Abstand der Thermoelemente der jeweiligen Stäbe beträgt

$$x = 3 \text{ cm.}$$

Die Werte für die Dichte [1], die spezifische Wärme [1] und die Wärmeleitfähigkeit [6] von Messing sind:

$$\begin{aligned}\rho &= 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ c &= 385 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \\ \kappa &= 120 \frac{\text{W}}{\text{m K}}.\end{aligned}$$

Die Werte für Aluminium [1], [6] sind:

$$\rho = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 830 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\kappa = 236 \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

Die Werte für Edelstahl [1], [7] sind:

$$\rho = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\kappa = 21 \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

5.1 Statische Methode

Tabelle 1: Zeit gegen Temperaturen der einzelnen Elemente

t/s	$T_1/^\circ\text{C}$	$T_2/^\circ\text{C}$	$T_3/^\circ\text{C}$	$T_4/^\circ\text{C}$	$T_5/^\circ\text{C}$	$T_6/^\circ\text{C}$	$T_7/^\circ\text{C}$	$T_8/^\circ\text{C}$
140,00	35,40	39,82	33,67	30,53	40,12	41,31	36,38	26,85
280,00	40,52	43,72	37,20	34,46	45,30	45,68	40,30	30,35
420,00	43,19	45,96	39,49	37,01	47,53	47,68	42,19	32,87
560,00	44,81	47,43	41,08	38,69	48,84	48,93	43,56	34,66
700,00	46,06	48,64	42,43	40,10	49,94	50,00	44,83	36,20

Die Temperaturverläufe der fernen Thermoelemente befinden sich im Anhang (I,II). Der Wärmestrom für die fernen Thermoelemente für fünf Zeiten kann mittels Gleichung 1 bestimmt werden. Für den breiten Messingstab (T1/T2) ergibt sich somit:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(140 \text{ s}) = -0,848 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(280 \text{ s}) = -0,614 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(420 \text{ s}) = -0,532 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(560 \text{ s}) = -0,503 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(700 \text{ s}) = -0,495 \text{ W}$$

Für den schmalen Messingstab (T3/T4) ergibt sich:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(140 \text{ s}) = -0,351 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(280 \text{ s}) = -0,307 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(420 \text{ s}) = -0,278 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(560 \text{ s}) = -0,268 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(700 \text{ s}) = -0,261 \text{ W}$$

Für den Aluminiumstab (T5/T6) ergibt sich:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(140 \text{ s}) = -0,449 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(280 \text{ s}) = -0,143 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(420 \text{ s}) = -0,057 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(560 \text{ s}) = -0,034 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(700 \text{ s}) = -0,023 \text{ W}$$

Für den Edelstahlstab (T7/T8) ergibt sich:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(140 \text{ s}) = -0,320 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(280 \text{ s}) = -0,334 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(420 \text{ s}) = -0,313 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(560 \text{ s}) = -0,299 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(700 \text{ s}) = -0,290 \text{ W}$$

Die Temperaturdifferenz der beiden Thermoelemente des Edelstahlstabs ist graphisch dargestellt und befindet sich im Anhang (III). Für den breiten Messingstab ist die Temperaturdifferenz der beiden Thermoelemente ebenfalls graphisch dargestellt (IV).

5.2 Dynamische Methode

Die Auswertung der dynamischen Methode für den breiten Messingstab, den Aluminiumstab und den Edelstahlstab ist im Folgenden zu sehen.

5.2.1 Breiter Messingstab

Tabelle 2: Die Phasenverschiebung der T1- und T2-Funktion der Maxima und der Minima aus dem Plot von Seite V im Anhang.

φ_{\max}/s	φ_{\min}/s
0,35	0,20
0,40	0,25
0,45	0,20
0,35	0,20
0,30	0,25
0,30	0,30
0,30	0,20
0,35	0,25
0,35	0,25
0,35	0,30

Tabelle 3: Die Amplitude der T1-Funktion und die Amplitude der T2-Funktion aus dem Plot von Seite V im Anhang.

$Amp_{T1}/^{\circ}C$	$Amp_{T2}/^{\circ}C$
2,18	0,80
2,18	0,75
2,18	0,68
2,13	0,65
2,10	0,68
2,10	0,63
2,08	0,65
2,05	0,63
2,08	0,60

Die Temperaturverläufe für den breiten Messingstab (Thermoelemente $T1$ und $T2$) sind graphisch dargestellt (V).

Durch Abmessung der Amplituden $A1$ und $A2$ und der Phasendifferenzen Δt und

Mittelung dieser, ergeben sich folgende Werte:

$$A_1 = (8,47 \pm 0,18) \text{ K}$$

$$A_2 = (2,69 \pm 0,24) \text{ K}$$

$$\Delta t = (14,8 \pm 1,5) \text{ s.}$$

Aus diesen Werten lässt sich mittels Gleichung (2) die Wärmeleitfähigkeit bestimmen. Diese ergibt sich zu

$$\kappa = (87 \pm 11) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

5.2.2 Aluminiumstab

Tabelle 4: Die Phasenverschiebung der T5- und T6-Funktion der Maxima und der Minima aus dem Plot von Seite VI im Anhang.

$\varphi_{\text{max}}/\text{s}$	$\varphi_{\text{min}}/\text{s}$
0,25	0,15
0,20	0,15
0,20	0,15
0,20	0,15
0,20	0,20
0,20	0,15
0,20	0,15
0,30	0,20
0,20	0,20

Tabelle 5: Die Amplitude der T5-Funktion und die Amplitude der T6-Funktion aus dem Plot von Seite VI im Anhang.

$Amp_{\text{T5}}/^{\circ}\text{C}$	$Amp_{\text{T6}}/^{\circ}\text{C}$
2,80	1,58
2,83	1,50
2,72	1,50
2,65	1,45
2,68	1,45
2,63	1,35
2,58	1,38
2,58	1,38
2,55	1,35

Die Temperaturverläufe für die Thermoelemente des Aluminiumstabes befinden sich im Anhang (VI). Auf die selbe Weise wie in 5.2.1 beschrieben lassen sich die Werte für den

Aluminiumstab bestimmen:

$$A_5 = (4,79 \pm 0,25) \text{ K}$$

$$A_6 = (8,89 \pm 0,31) \text{ K}$$

$$\Delta t = (9,6 \pm 1,0) \text{ s.}$$

Damit ergibt sich mit (2) eine Wärmeleitfähigkeit von

$$\kappa = (176 \pm 26) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

5.2.3 Edelstahlstab

Tabelle 6: Die Phasenverschiebung der T7- und T8-Funktion der Maxima und der Minima aus dem Plot von Seite V im Anhang.

$\varphi_{\text{max}}/\text{s}$	$\varphi_{\text{min}}/\text{s}$
0,50	0,30
0,55	0,30
0,45	0,35
0,50	0,35
0,50	0,35
0,55	0,35
0,45	0,35
0,45	0,35
0,50	0,35
0,55	0,45

Tabelle 7: Die Amplitude der T7-Funktion und die Amplitude der T8-Funktion aus dem Plot von Seite V im Anhang.

$Amp_{T7}/^\circ\text{C}$	$Amp_{T8}/^\circ\text{C}$
3,22	0,65
3,18	0,60
3,13	0,55
3,18	0,50
3,15	0,48
3,20	0,50
3,20	0,48
3,13	0,48
3,15	0,48
3,18	0,48

Die Temperaturverläufe für die Thermoelemente des Edelstahlstabes befinden sich im Anhang (VII). Die Amplituden und die Phasendifferenz des Edelstahlstabes ergeben sich zu

$$A_7 = (12,19 \pm 0,12) \text{ K}$$

$$A_8 = (1,99 \pm 0,23) \text{ K}$$

$$\Delta t = (53,1 \pm 3,4) \text{ s.}$$

Die Wärmeleitfähigkeit ist mit Gleichung (2)

$$\kappa = (15,0 \pm 1,4) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

6 Diskussion

Im Folgenden wird die statische sowie die dynamische Methode diskutiert.

6.1 Statische Methode

Zunächst wird die Auswertung der statischen Methode diskutiert.

6.1.1 Vergleich der Temperaturverläufe der fernen Thermoelemente

In den Temperaturverläufen $T1/T4$ und $T5/T8$ sind einige Merkmale zu erkennen. So ist erkennbar, dass in der Grafik $T1/T4$ die Kurve für $T1$ über der Kurve von $T4$ liegt. Dies deutet darauf hin, dass der Messingstab mit der größeren Querschnittsfläche eine bessere Wärmeleitfähigkeit als der Messingstab mit der kleineren Oberfläche besitzt. In Grafik $T5/T8$ ist zu erkennen, dass der Aluminiumstab eine bessere Wärmeleitfähigkeit als die anderen Stäbe hat. Edelstahl fällt sogar in den ersten 50 Sekunden noch ein wenig ab, obwohl die Temperatur des Aluminiumstabs sofort anfängt zu steigen. Bei allen vier Kurven ist es so, dass die Temperatur anfangs stärker steigt und dann immer langsamer steigt. Beim Edelstahl sieht es sogar beinahe linear aus. Die anderen Kurven steigen ähnlich wie eine Wurzel- oder eine logarithmische Funktion.

6.1.2 Wärmeleitfähigkeit

Die Abweichung der Temperaturen bei $T5$ und $T6$ war mit $49,94^\circ\text{C}$ und $50,00^\circ\text{C}$ nach 700s am geringsten. Daher ist daraus zu schließen, dass das Material Aluminium die beste Wärmeleitfähigkeit besitzt. Im Vergleich zu Messing und Edelstahl ist zu erkennen, dass das Aluminium am schnellsten heiß wurde. Da die geometrischen Bedingungen bei allen drei Materialien dieselben waren, ist klar zu erkennen, dass es eine Material- und keine Geometrie-eigenschaft ist, die die Wärmeleitfähigkeit in diesem Fall bestimmt.

6.1.3 Wärmestrom

Die Wärmeströme liegen in der zu erwartenden Größenordnung. Interessant ist dabei, dass der Wärmestrom in Messing größer ist als im Aluminium. Aluminium scheint wohl die größte Wärmeleitfähigkeit zu besitzen, aber einen geringeren Wärmestrom innerhalb des Stabs. Das bedeutet, dass $\frac{\partial T}{\partial x}$ bei Messing deutlich größer sein muss, als bei Aluminium. Die Temperaturdifferenz pro Strecke ist bei größerer Wärmeleitfähigkeit also geringer. Der Wärmestrom ist höher. Zu erkennen ist, dass der Wärmestrom am Anfang noch groß ist und mit der Zeit dann abnimmt. Daran lässt sich erkennen, dass die Temperatur in einer Wurzel oder logarithmischen Funktion zunimmt.

6.1.4 Vergleich der Temperaturdifferenzen der Thermoelemente von Edelstahl und Messing

In der Grafik $T7 - T8$ ist zu erkennen, dass die Differenz zwischen dem nahen und dem fernen Thermoelement anfangs stark zunimmt, aber nach ca. 200 s ein Maximum erreicht und anschließend fällt. Die Grafik $T2 - T1$ lässt erkennen, dass auch hier die Differenz steigt, bis sie bei ca. 75 s ein Maximum erreicht und anschließend fällt. Dabei fällt auf, dass das Gefälle deutlich größer ist und der Hochpunkt deutlich eher erreicht wird. Dafür ist in Grafik $T7 - T8$ aber der Hochpunkt bei einer höheren Temperatur. Er liegt bei ca. 10 °C, wohingegen der Graph in Grafik $T2 - T1$ sein Maximum bei ca. 5,25 °C hat. Das bedeutet, dass die Temperaturdifferenz beim Edelstahl nicht schnell zunimmt, aber sobald sie ein sehr hohes Maximum erreicht hat, nur langsam abfällt. Somit ist zu erkennen, dass Edelstahl keine hohe Wärmeleitfähigkeit besitzt, da der Zeitraum, bis das Maximum erreicht wurde, größer als beim Messing ist. Anschließend ist der Zeitraum auch groß, bis die Differenz wieder abgenommen hat.

6.2 Dynamische Methode

Für die Wärmeleitfähigkeit des Messings ergibt sich ein relativer Fehler von 12,64 %. Für Aluminium liegt der relative Fehler bei 14,77 %. Für Edelstahl liegt der Fehler bei 9,33 %. Der experimentelle Wert von κ_{Mes} entspricht 72,5 % des Literaturwertes. Für κ_{Alu} ergibt sich ein prozentualer Wert von 74,57 % und für κ_{Edel} ergibt sich ein Wert von 71,43 %. Interessant ist, dass somit alle drei Metalle in einem ziemlich ähnlichen Bereich liegen, was die Abweichung zum Literaturwert angeht. Die Auswertung mit dem Gerät scheint wohl einen Fehler von 25 bis 30 % zu haben. Grund dafür wird zum Beispiel die nicht ideale Wärmeisolierung sein.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 204 - Wärmeleitung von Metallen*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Waermeleitf.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] „Wärmeleitfähigkeit“. In: (). URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit>.
- [7] „Wärmeleitfähigkeit - Metalle“. In: (). URL: https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php.