

V302 - Elektrische Brückenschaltungen

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018, Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Brückenspannung und Abgleichbedingung	3
1.2	Brückenschaltungen	4
1.2.1	Wheatstonesche Brücke	4
1.2.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.2.3	Induktivitätsmessbrücke	4
1.2.4	Maxwell-Brücke	5
1.2.5	Wien-Robinson-Brücke	5
2	Durchführung	6
2.1	Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke	6
2.2	Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke	7
2.3	Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke	8
2.4	Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke	9
2.5	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke	10
2.6	Bestimmung des Klirrfaktors	11
3	Auswertung	11
3.1	Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke	11
3.2	Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke	12
3.3	Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke	13
3.4	Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke	13
3.5	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke	13
3.6	Bestimmung des Klirrfaktors	16
	Literatur	17

1 Theorie

1.1 Brückenspannung und Abgleichbedingung

Die Spannung U , also die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, wird bei Brückenschaltungen in Abhängigkeit von ihren Widerstandsverhältnissen untersucht. Bei einer allgemeinen Brückenschaltung (s. Abb 1), bezeichnet man die Spannung, die zwischen Punkt A und B auftritt, als Brückenspannung. U_S wird dabei als Speisespannung bezeichnet.

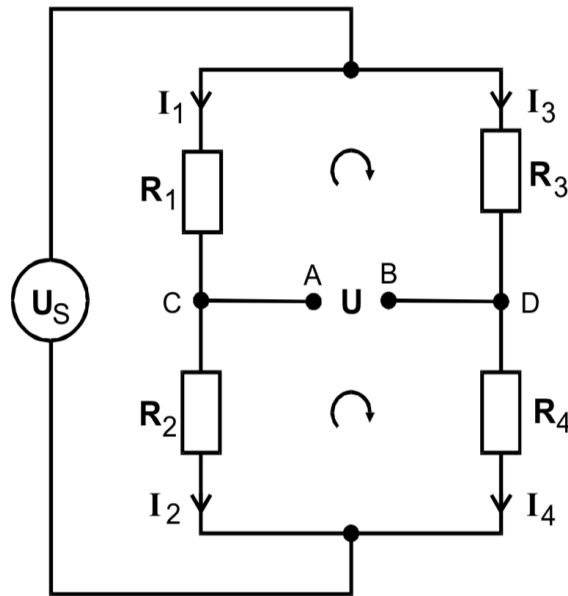


Abbildung 1: Allgemeine Brückenschaltung.

Wichtig sind dabei die Kirchhoffschen Gesetze. Das erste lautet, dass die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein muss. Das zweite Gesetz heißt Maschenregel und besagt, dass innerhalb einer Masche, also einem in sich geschlossenen Stromkreis, die Summe der elektromotorischen Kräfte, also zum Beispiel die Spannung der Stromquelle, gleich der Summe aus der Stromstärke und den Widerständen der Bauteile sein muss.

Aus diesen Gesetzmäßigkeiten lässt sich folgern, dass die Brückenspannung U_B und die Speisespannung U_S in Abb. 1 in folgendem Verhältnis zueinander stehen:

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S.$$

Eine abgegliche Brücke ist der Fall, wenn die Brückenspannung verschwindet. Dies passiert, wenn die Abgleichbedingung

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

gilt. Da die Abgleichbedingung nur vom Verhältnis der Widerstände abhängt, ist mit der Brückenschaltung eine Widerstandsmessung durchführbar. Ist ein Widerstand unbekannt, so wird einer der drei anderen Widerstände so lange variiert, bis die Brückenspannung verschwindet. Anschließend kann über die Abgleichbedingung der Widerstand bestimmt werden.

Bei Kapazitiv- und Induktivwiderständen ist es sinnvoll komplexe Widerstandsoperatoren zu benutzen. Eine Brückenschaltung mit vier komplexen Widerständen hat die gleiche Abgleichbedingung wie eine reele Brückenschaltung. Der einzige Unterschied ist, dass sich daraus zwei Bedingungen ergeben. Der Realteil X und der Imaginärteil Y müssen dabei separiert voneinander betrachtet werden. Die erste Bedingung ist:

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3.$$

Die zweite Bedingung lautet:

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2.$$

1.2 Brückenschaltungen

1.2.1 Wheatstonesche Brücke

Diese Brücke enthält nur ohmsche Widerstände (s. Abb 2). Sie kann, wie oben beschrieben, zur Bestimmung eines unbekannten Widerstands R_X benutzt werden:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (1)$$

1.2.2 Kapazitätsmessbrücke

Für die Berechnung muss die Eigenschaft eines realen Kondensators berücksichtigt werden, dass dieser zum Teil Energie in Wärme umwandelt. Dafür wird ein Ersatzschaltbild betrachtet, bei dem ein fiktiver ohmscher Widerstand mit dem Kondensator in Reihe geschaltet wird. Für die Messung der Kapazität eines unbekannten Kondensators C_X gilt somit unter Berücksichtigung der Abgleichbedingungen für den ohmschen Widerstand

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (2)$$

und für die Kapazität des Kondensators

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (3)$$

1.2.3 Induktivitätsmessbrücke

Analog zur Kapazitätsmessbrücke verliert auch ein induktives Bauteil Energie, indem diese irreversibel in Wärme umgewandelt wird. Diese Verluste und die Phasenverschiebung

werden erneut durch einen fiktiven Widerstand kompensiert. Die Formeln ergeben sich auf dieselbe Weise zu

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4)$$

und für die Induktivität zu

$$L_X = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (5)$$

1.2.4 Maxwell-Brücke

Da die Induktivitätsmessbrücke insbesondere bei niedrigen Frequenzen aufgrund der zweiten Spule ähnlich starke Verluste hat, wird eine andere Schaltung, die anstelle der Normalinduktivität L_2 eine Normalkapazität enthält, benutzt. Diese Schaltung heißt Maxwell-Brücke (s. Abb 5). Der Kondensator sollte eine möglichst verlustarme Kapazität C_4 besitzen. Aus den Abgleichbedingungen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (6)$$

und

$$L_X = R_2 R_3 C_4. \quad (7)$$

1.2.5 Wien-Robinson-Brücke

Bei den vorherigen Schaltungen ist die Frequenz nicht wichtig. Es gibt aber einen Frequenzbereich, in dem der Abgleich unter optimalen Bedingungen durchführbar ist. Die Wien-Robinson-Brücke (s. Abb. 6) ist eine frequenzabhängige Brückenschaltung. Nach Umformung der Formeln, die sich aus der Abb. 6 ergeben, erkennt man, dass sich ein Verhältnis zwischen den Spannungen U_B und U_S ergibt. Es gilt:

$$\left| \frac{U_B}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega)^2 + 9\Omega^2}. \quad (8)$$

Dabei ist

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (9)$$

ω_0 ist wiederum gegeben durch

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (10)$$

Der Klirrfaktor k beschreibt den Oberwellengehalt im Vergleich zur Grundwelle. Da die Brückenspannung aufgrund von Oberwellen, die durch den Generator erzeugt werden, bei der Frequenz f_0 nicht Null wird, sondern nur ein Minimum erreicht, ist die Kleinheit des Klirrfaktors ein Maß für die Qualität eines Spannungsgenerators.

Es wird angenommen, dass die Summe der Oberwellen aus der zweiten Oberwelle besteht. Damit ist der Klirrfaktor:

$$k = \frac{U_2}{U_1}.$$

U_2 ist dabei

$$U_2 = \frac{U_B}{n(2)},$$

wobei der Faktor $n(2)$ das Verhältnis (8) ist. Da $\omega = 2\omega_0$ gilt, ergibt sich für Ω durch Gleichung (??) $\Omega = 2$. Damit wird der Klirrfaktor mittels

$$k = \frac{U_B}{U_1 \cdot n(2)}. \quad (11)$$

berechnet.

2 Durchführung

Die Messungen werden mehrfach ausgeführt, um ein Maß für die Zufallsfehler zu bekommen. Es wird Wechselstrom verwendet. Die Frequenz wird auf 1 kHz gestellt. Die Toleranz der Referenzbauteile R_2 , C_2 und L_2 liegt bei $\pm 0,2\%$.

2.1 Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke

Mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung (s. Abb. 2) werden im ersten Aufgabenteil zwei unbekannte Widerstände ausgemessen. Das Potentiometer hat einen Gesamtwiderstand von 1 k Ω . Der Drehknopf des Potentiometers wird für jeden der beiden Widerstände jeweils so eingestellt, dass die Brückenspannung Null wird. Der am Drehknopf angezeigte Wert ist der Wert für R_3 in Promille. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird. Der Widerstand R_2 wird hier variiert. Für jeden unbekannten Widerstand R_X werden drei unterschiedliche Widerstände R_2 benutzt.

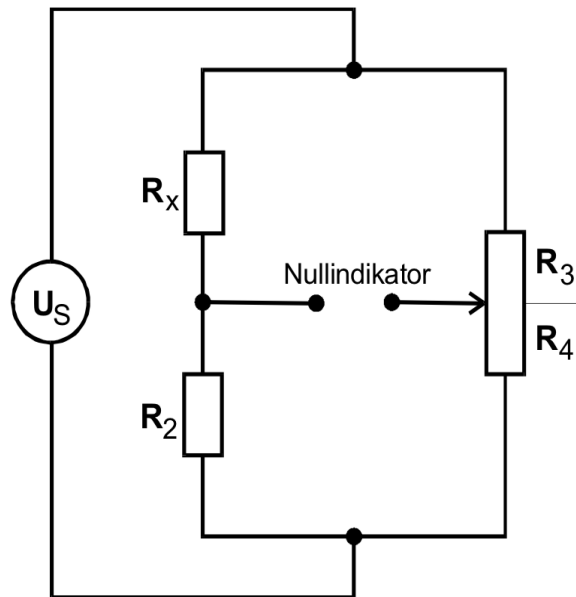


Abbildung 2: Wheatstonesche Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung des Widerstandes R_X genutzt. Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. R_2 ist bekannt.

2.2 Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke

Als nächstes sollen anhand einer Kapazitätsmessbrücke die Kapazität und der Verlustwiderstand von einem Kondensator gemessen werden.

Zunächst wird das Minimum der Brückenspannung mittels R_3/R_4 eingestellt. Anschließend wird R_2 so justiert, dass die Spannung kleiner wird. Die Stellglieder werden weiterhin alternierend so justiert, dass die Brückenspannung Null wird. Die Werte für R_2 und R_3 können an den Potentiometern abgelesen werden. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird.

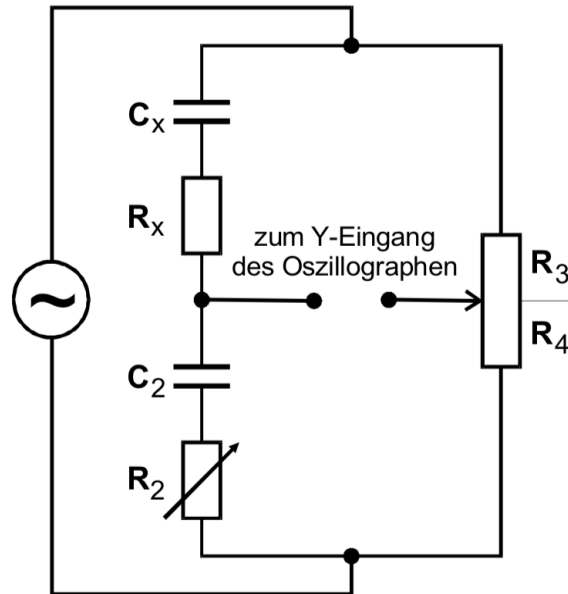


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung der Kapazität C_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild des Kondensators. Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. Der Widerstand R_2 ist verstellbar. C_2 ist bekannt.

2.3 Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivität und der Verlustwiderstand einer unbekannten Spule werden an einer Induktivitätsmessbrücke gemessen.

Zunächst wird das Minimum der Brückenspannung mittels R_3/R_4 eingestellt. Anschließend wird R_2 so justiert, dass die Spannung kleiner wird. Die Stellglieder werden weiterhin alternierend so justiert, dass die Brückenspannung Null wird. Die Werte für R_2 und R_3 können an den Potentiometern abgelesen werden. R_4 ergibt sich, indem R_3 von 1000 abgezogen wird.

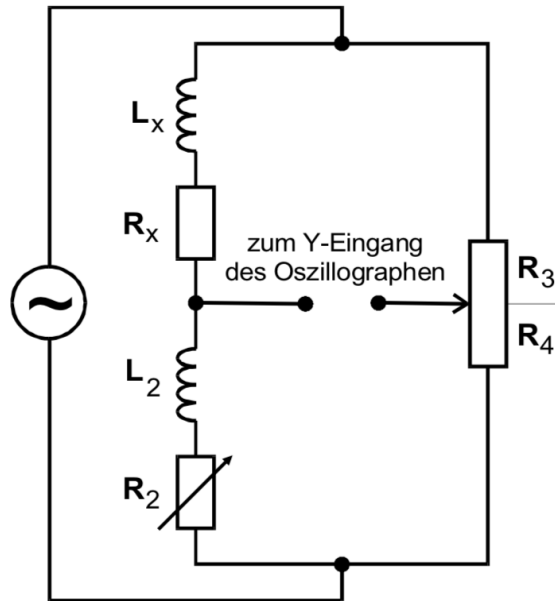


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung von L_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild der Induktivität (Spule). Die Widerstände R_3 und R_4 sind als Potentiometer ausgebildet. Der Widerstand R_2 ist verstellbar. L_2 ist bekannt.

2.4 Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke

Anschließend wird die Spule ein zweites Mal mit Hilfe der Maxwell-Brücke durchgemessen. R_3 und R_4 werden alternierend so eingestellt, dass die Brückenspannung Null wird.

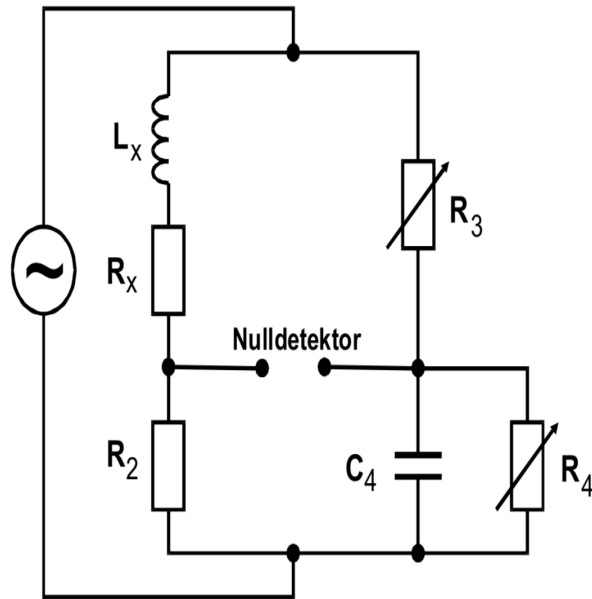


Abbildung 5: Maxwell-Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung von L_X genutzt. Der Widerstand R_X folgt aus dem Ersatzschaltbild der Induktivität (Spule). Die Widerstände R_3 und R_4 sind verstellbar. R_2 und C_4 sind bekannt.

2.5 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke

Um die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung U_B zu messen, wird eine Wien-Robinson-Brücke verwendet.

Die eingestellten Frequenzen liegen in einem Bereich von 20 bis 30 000 Hz. Die Werte für die Brückenspannung bei bestimmten eingestellten Frequenzen lassen sich am Oszillographen ablesen. Die eingestellte Spannung U_S lässt sich ebenfalls mit dem Oszillographen bestimmen.

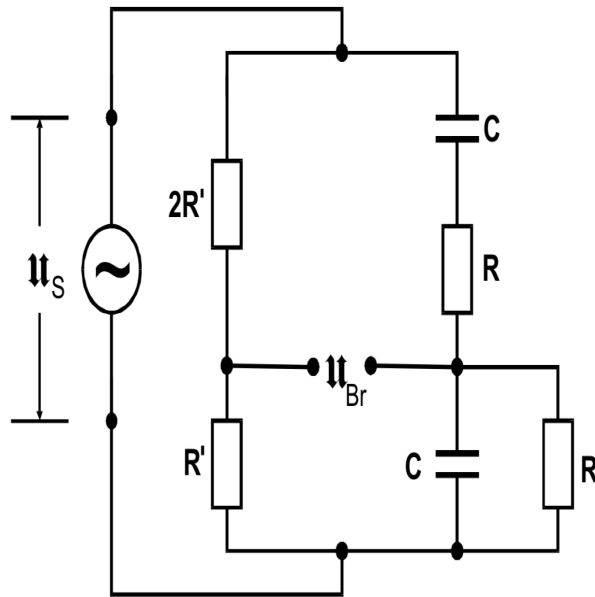


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke. Diese Schaltung wird zur Bestimmung der Brückenspannung U_B genutzt. Die Widerstände R' und R , sowie die Kapazität C sind bekannt.

2.6 Bestimmung des Klirrfaktors

Als letztes soll der Klirrfaktor des verwendeten Generators bestimmt werden. Dabei wird das Minimum der Brückenspannung U_B bestimmt. Daraus lässt sich der Klirrfaktor errechnen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung von Widerständen mittels Wheatstone-Brücke

Die verschiedenen Werte für die Widerstände R_3 , R_4 und R_2 , die zur Berechnung des Widerstandes R_X nötig sind, befinden sich in Tabelle 1. Dabei beziehen sich die ersten drei Zeilen auf den Widerstand R_{X1} und die letzten drei auf den Widerstand R_{X2} . Für jeden Widerstand R_X werden drei verschiedene Widerstände R_2 verwendet.

Tabelle 1: Die verschiedenen Werte der bekannten Widerstände der Wheatstoneschen Brücke.

$R3/\Omega$	$R4/\Omega$	$R2/\Omega$
491,	509,	332,
324,	676,	664,
243,	757,	1000,
728,	272,	332,
578,	422,	664,
473,	527,	1000,

Die gesuchten Widerstände lassen sich daraus mit Gleichung (1) berechnen. Für den ersten Widerstand ergibt sich

$$R_{X1} = (319,8 \pm 1,2) \Omega.$$

Der zweite Widerstand berechnet sich zu

$$R_{X2} = (899 \pm 9) \Omega.$$

3.2 Bestimmung von Kapazitäten mittels Kapazitätsmessbrücke

Die Werte zur Berechnung der Kapazität und des Verlustwiderstandes sind in Tabelle 2 aufgelistet. Für alle drei Kapazitäten C_2 liegen drei Messdaten vor.

Tabelle 2: Die verschiedenen Werte der Widerstände und Kapazitäten einer Kapazitätsmessbrücke.

$R3/\Omega$	$R2/\Omega$	$R4/\Omega$	$C2/\text{nF}$
741,	183,	259,	994,
802,	110,	198,	994,
770,	135,	230,	994,
730,	185,	270,	750,
708,	204,	292,	750,
727,	203,	273,	750,
601,	368,	399,	450,
607,	372,	393,	450,
611,	338,	389,	450,

Der Verlustwiderstand lässt sich mittels Gleichung (2) zu

$$R_X = (5,1 \pm 0,4) \cdot 10^2 \Omega$$

berechnen. Die Kapazität ergibt sich mit Gleichung (3) zu

$$C_X = (2,93 \pm 0,26) \cdot 10^{-7} \text{ F}.$$

3.3 Bestimmung von Induktivitäten mittels Induktivitätsmessbrücke

Für die Berechnung des Verlustwiderstandes sowie der Induktivität einer Spule werden zwei verschiedene Induktivitäten L_2 verwendet. Die Messdaten befinden sich in Tabelle ?? . Der Verlustwiderstand wird mit Gleichung (4) berechnet:

$$R_X = (100 \pm 4) \Omega.$$

Für die Induktivität ergibt sich mit Gleichung (5)

$$L_X = (0,0269 \pm 0,0008) \text{ H}.$$

3.4 Bestimmung von Induktivitäten mittels Maxwell-Brücke

Für die erneute Berechnung der Induktivität und des Verlustwiderstandes mit der Maxwell-Brücke werden der Widerstand $R_2 = 1,0 \text{ k}\Omega$ und die Kapazität $C_4 = 992 \text{ nF}$ verwendet. Die eingestellten Widerstände R_3 und R_4 befinden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Die verschiedenen Widerstände für eine Maxwell-Brücke.

$R3/\text{ohm}$	$R4/\Omega$
26,	263,
27,	267,
26,	269,

Der Verlustwiderstand, welcher mit Gleichung (6) berechnet wird, ergibt sich zu

$$R_X = (98,9 \pm 1,8) \Omega.$$

Die mit Gleichung (7) errechnete Induktivität ist

$$L_X = (0,0261 \pm 0,0005) \text{ H}.$$

3.5 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung mittels Wien-Robinson-Brücke

Die doppelte Brückenspannung in Abhängigkeit von der Frequenz ist in Tabelle 4 dargestellt. Die Werte ω/ω_0 und U_B/U_S befinden sich in Tabelle 5. ω_0 ist dabei die Frequenz, bei der das Brückenspannungsminimum liegt:

$$\omega_{0,exp} = 2513,27 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tabelle 4: Die Frequenz gegen den doppelten Wert der Amplitude der Brückenspannung.

f/Hz	$2U_{Br}/\text{V}$
20,000	1,680
50,000	1,620
100,000	1,320
150,000	0,952
200,000	0,664
250,000	0,404
300,000	0,248
400,000	0,061
500,000	0,304
600,000	0,492
700,000	0,636
800,000	0,800
900,000	0,896
1000,000	0,960
1100,000	1,010
1200,000	1,040
1300,000	1,090
1400,000	1,130
1500,000	1,200
1600,000	1,190
1700,000	1,190
1800,000	1,220
1900,000	1,230
2000,000	1,280
2500,000	1,310
3000,000	1,370
4000,000	1,420
5000,000	1,410
6000,000	1,460
7000,000	1,410
10 000,000	1,380
11 000,000	1,350
12 000,000	1,370
13 000,000	1,340
14 000,000	1,270
15 000,000	1,310
16 000,000	1,280
17 000,000	1,310
18 000,000	1,350
19 000,000	1,350
20 000,000	1,350
21 000,000	1,350
22 000,000	1,350
30 000,000 ¹⁴	1,350

Tabelle 5: Die Kreisfrequenz gegen das Verhältnis aus Brückenpannung durch Speisepannung.

ω/ω_e	$\frac{U_{Br}}{U_S}$
0,050	0,336
0,125	0,324
0,250	0,264
0,375	0,190
0,500	0,133
0,625	0,081
0,750	0,050
1,000	0,012
1,250	0,061
1,500	0,098
1,750	0,127
2,000	0,160
2,250	0,179
2,500	0,192
2,750	0,202
3,000	0,208
3,250	0,218
3,500	0,226
3,750	0,240
4,000	0,238
4,250	0,238
4,500	0,244
4,750	0,246
5,000	0,256
6,250	0,262
7,500	0,274
10,000	0,284
12,500	0,282
15,000	0,292
17,500	0,282
25,000	0,276
27,500	0,270
30,000	0,274
32,500	0,268
35,000	0,254
37,500	0,262
40,000	0,256
42,500	0,262
45,000	0,270
47,500	0,270
50,000	0,270
52,500	0,270
55,000 ¹⁵	0,270
75,000	0,270

Die Werte aus Tabelle 5 sind in Abbildung 7 gegeneinander aufgetragen.

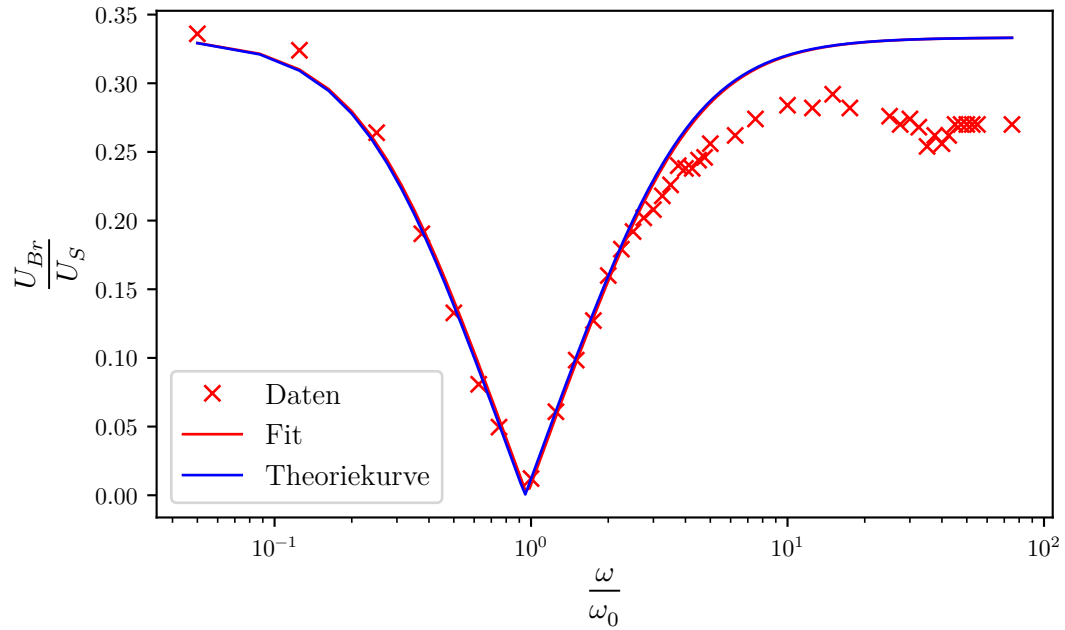


Abbildung 7: U_B/U_S ist gegen ω/ω_0 aufgetragen. Es sind die Daten, ein Fit und die Theoriekurve eingezeichnet.

3.6 Bestimmung des Klirrfaktors

Die minimale Wert der Brückenspannung liegt bei $U_{B,Min} = 30,4 \text{ mV}$ bei einer Frequenz von $\omega_0 = 2\pi \cdot 400$.

Der Klirrfakto, der mit Gleichung (11) bestimmt werden kann, ergibt sich zu

$$k = 0,16.$$

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 302 - Elektrische Brückenschaltungen*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.