

V308 - Spulen und Magnetfelder

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 27.11.2018, Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Grundlagen zu Magnetfeldern	3
2.2 Magnetfeld eines Spulenpaares	3
2.3 Ferromagnetismus und die Hysteresekurve	4
3 Durchführung	5
3.1 Magnetfelder von langen und kurzen Spulen	5
3.2 Spulenpaare im Magnetfeld	5
3.3 Hysteresekurve einer Ringspule	6
4 Auswertung	6
4.1 Magnetische Flussdichte einer langen und einer kurzen Spule	6
4.2 Magnetische Flussdichte eines Spulenpaares	10
4.3 Hysteresekurve einer Ringspule mit Luftspalt	15
5 Diskussion	20
Literatur	22

1 Ziel

Ziel dieses Versuchs ist es, die Magnetfelder von verschiedenen Spulen zu untersuchen.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Grundlagen zu Magnetfeldern

Die magnetische Flussdichte \mathbf{B} wird durch die Permeabilität μ und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} dargestellt. Es gilt die Beziehung

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}. \quad (1)$$

μ besteht dabei aus der Vakuum-Permeabilität μ_0 und der relativen Permeabilität μ_r , die von der Materie abhängt. Es gilt

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r.$$

Die magnetische Flussdichte im Mittelpunkt einer Spule wird mit der Formel

$$\mathbf{B}(x) = n \cdot \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (2)$$

beschrieben. Dabei ist R der Radius des Rings und n die Anzahl der Windungen. Bei einer langen Spule (Solenoid) ist die magnetische Flussdichte in der Mitte der Spule konstant. Außerhalb der Spule ist der magnetische Fluss inhomogen. Das innere Feld ist proportional zur Länge l der Spule, zur Anzahl der Windungen n und zum Strom I , der durch die Spule fließt. Es gilt die Beziehung

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{n}{l} I. \quad (3)$$

Wird dieser Solenoid zu einem Ring mit Radius r_R gebogen, verschwinden die Randeffekte und das Feld außerhalb des Rings wird null. Im Inneren gilt

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{n}{2\pi r_R} I. \quad (4)$$

Wegen Gleichung (1) muss für das H -Feld gelten:

$$H = \frac{n}{2\pi r_R} I. \quad (5)$$

2.2 Magnetfeld eines Spulenpaares

Ein Helmholtz-Spulenpaar hat ein homogenes Magnetfeld im Innern der zwei Ringe (s. Abb 1). Der Abstand der Spulen entspricht den Radien der Spulen. Die magnetische Flussdichte im Mittelpunkt des Spulenpaares ist durch

$$B(0) = B_n(x) + B_n(-x) = 2n \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (6)$$

gegeben.

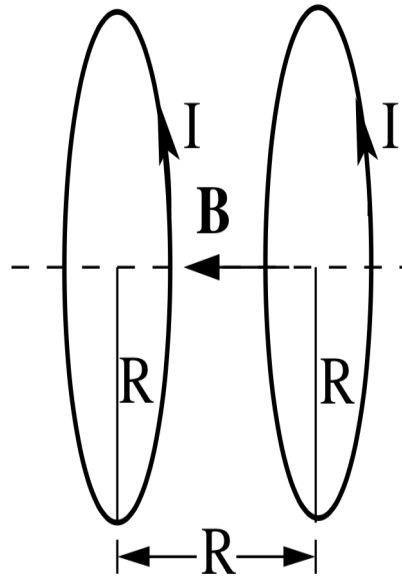


Abbildung 1: Aufbau eines Helmholtz-Spulenpaares. Der Abstand der Spulen entspricht den Radien der Spulen.

2.3 Ferromagnetismus und die Hysteresekurve

Ferromagnetische Materialien besitzen ohne äußere Magnetfelder ein permanentes magnetisches Moment. Sie richten sich in einzelnen Bereichen parallel zueinander aus. Man nennt diese Bereiche Weiß'sche Bezirke. Im unmagnetischen Zustand ist die Ausrichtung der Bereiche statistisch verteilt. Ein äußeres Magnetfeld sorgt für eine Änderung der Richtung der magnetischen Momente und vergrößert somit die Weiß'schen Bereiche.

Die relative Permeabilität μ_r ist in ferromagnetischen Materialien sehr hoch und ist nicht mehr linear proportional zur magnetischen Flussdichte. Die Abhängigkeit kann durch eine Hysteresekurve dargestellt werden. Dabei sind die Achsen das B - und das H -Feld. In der Kurve lassen sich verschiedene markante Punkte erkennen. Ohne äußeres Magnetfeld gilt $B = H = 0$. Wird ein Magnetfeld angelegt, steigt die Magnetisierung an, bis ein Sättigungswert B_S bei H_S erreicht wird. Der Kurvenverlauf dorthin wird Neukurve genannt. Wird das äußere Magnetfeld verringert, bilden sich Bereiche mit entgegengesetzter Magnetisierung. So bleibt, wenn das äußere Magnetfeld abgeschaltet wird, eine Restmagnetisierung B_r , genannt Remanenz, bestehen. Ein Gegenfeld H_c , genannt Koerzitivkraft, kann diese Ausrichtungen wieder aufheben, sodass die magnetische Flussdichte Null wird. Wenn dieses Feld noch weiter erhöht wird, wird die Magnetisierung in dem Stoff negativ und erreicht den Sättigungswert $-B_S$. Wird das äußere Magnetfeld wieder umgekehrt, entsteht eine zum Ursprung punktsymmetrische Kurve, welche Hysteresekurve genannt wird. Hysteresekurven verschiedener Stoffe unterscheiden sich je nach Materialeigenschaften in der Schärfe bzw. Breite.

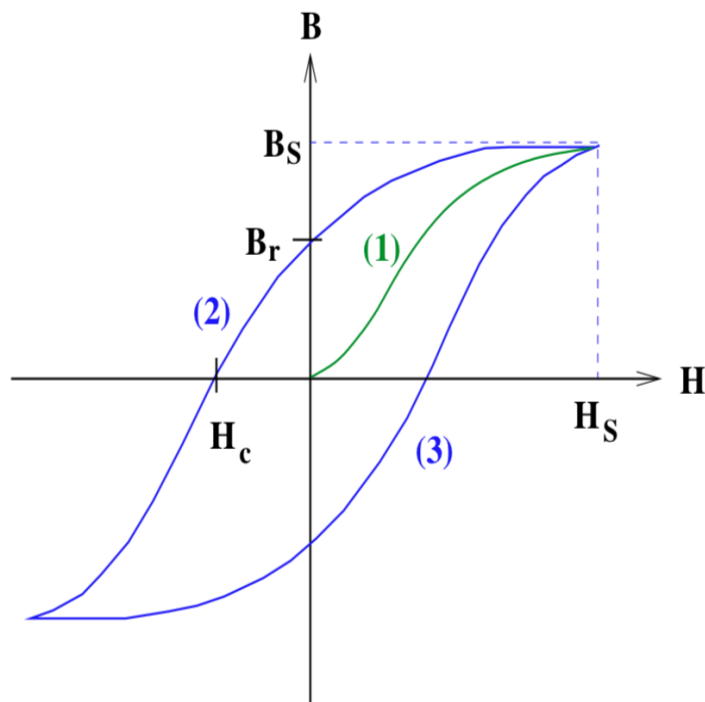


Abbildung 2: Allgemeine Hysteresekurve. Eingezeichnet sind der Sättigungswert B_S sowie H_S , die Remanenz B_r und die Koerzitivkraft H_c .

3 Durchführung

3.1 Magnetfelder von langen und kurzen Spulen

Im ersten Teil des Versuchs wird eine lange Spule an ein Netzgerät angeschlossen. Anschließend wird die Stromstärke eingestellt. Die Werte werden mittels einer longitudinalen Hall-Sonde innerhalb und außerhalb der Spule gemessen. Danach wird die Messung mit einer kurzen Spule wiederholt.

3.2 Spulenpaare im Magnetfeld

Es wird das Magnetfeld eines in Reihe geschalteten Spulenpaares gemessen. Dabei wird der Abstand der Spulen zunächst so gewählt, dass dieser den Radien der Spule entspricht. Es handelt sich also um ein Helmholtz-Spulenpaar. Es wird eine Stromstärke von $I = 4 \text{ A}$ eingestellt. Das Magnetfeld wird mittels einer transversalen Hall-Sonde innerhalb und außerhalb des Spulenpaares gemessen.

Anschließend wird der Abstand der Spulen auf den Durchmesser der Spulen erhöht. Die Stromstärke wird zuerst auf $I = 4 \text{ A}$ eingestellt. Die magnetische Flussdichte wird mit der transversalen Hall-Sonde innerhalb und außerhalb des Spulenpaares gemessen.

Die gleiche Messung wird mit einer eingestellten Stromstärke von $I = 3\text{ A}$ wiederholt.

3.3 Hysteresekurve einer Ringspule

Die Ringspule hat einen Luftspalt. Mit einer transversalen Hall-Sonde wird die magnetische Flussdichte der Ringspule in Abhängigkeit vom Spulenstrom gemessen. Die Stromstärke wird von 0 auf 10 A erhöht. Anschließend wird I bis -10 A verringert. Danach wird die Stromstärke von -10 auf 10 A erhöht.

4 Auswertung

Für die Auswertung wird Python, im Speziellen Matplotlib [2], NumPy [5], SciPy [3] und Uncertainties [4] verwendet.

4.1 Magnetische Flussdichte einer langen und einer kurzen Spule

Die verwendete lange Spule hat $N = 300$ Windungen, eine Länge von $L = 16,5\text{ cm}$ und einen Durchmesser von $D = 4,1\text{ cm}$. Die Werte der magnetischen Flussdichte an den Stellen x inner- und außerhalb der langen Spule befinden sich in den folgenden Tabellen. Die Werte vor der Spule sind in Tabelle 3. Die Werte im Inneren der Spule sind in Tabelle 2. Die Werte hinter der Spule befinden sich in Tabelle ???. Dieselben Werte sind in Abbildung 3 gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 1: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x vor der langen Spule.

$B/\text{ mT}$	$x/\text{ cm}$
0,382	0,000
0,505	0,500
0,744	1,000
0,959	1,500
1,350	2,000
1,544	2,500
1,762	3,000
1,928	3,500
2,024	4,000
2,093	4,500
2,138	5,000

Tabelle 2: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x in der langen Spule.

$B/ \text{ mT}$	$x/ \text{ cm}$
2,203	6,000
2,224	6,500
2,238	7,000
2,248	7,500
2,256	8,000
2,262	8,500
2,265	9,000
2,266	9,500
2,264	10,000
2,256	10,500
2,252	11,000
2,247	11,500
2,241	12,000
2,231	12,500
2,219	13,000
2,221	13,500
2,222	14,000
2,220	14,500
2,216	15,000
2,212	15,500
2,238	16,000
2,245	16,500
2,223	17,000
2,209	17,500
2,187	18,000
2,152	18,500
2,088	19,000
2,000	19,500
1,874	20,000
1,673	20,500

Tabelle 3: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x nach der langen Spule.

$B/ \text{ mT}$	$x/ \text{ cm}$
1,151	21,500
0,820	22,000
0,575	22,500
0,416	23,000
0,303	23,500

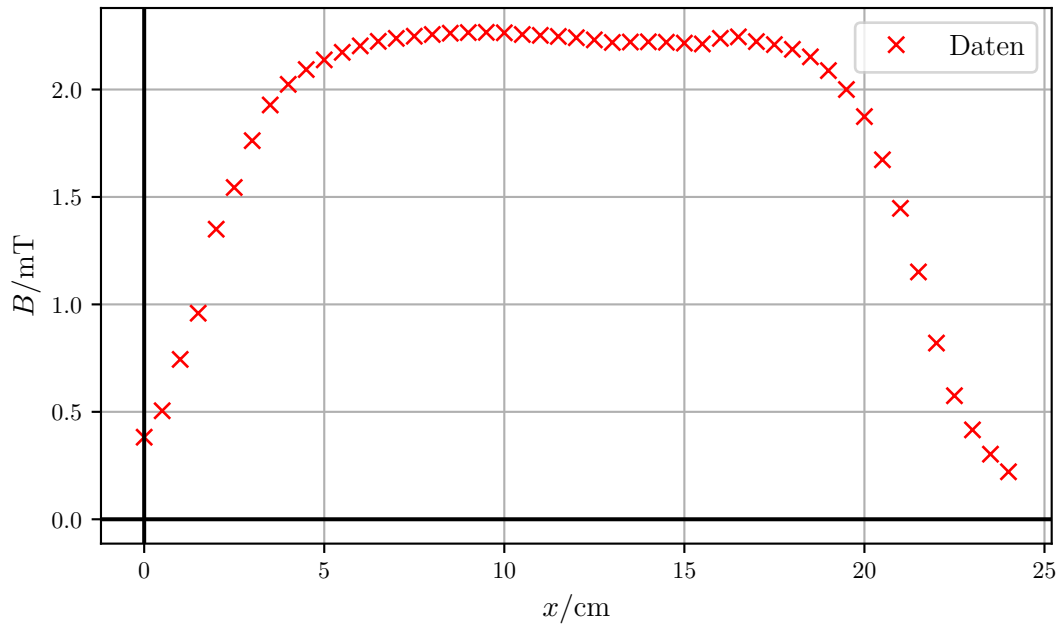


Abbildung 3: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die Position x inner- und außerhalb der langen Spule aufgetragen.

Der experimentell ermittelte Wert für die magnetische Flussdichte der langen Spule ergibt sich also zu

$$B_{lang,exp} = 2,188 \text{ mT}.$$

Der mittels Gleichung (3) ermittelte Wert für das B -Feld beträgt

$$B_{lang,theo} = 2,356 \text{ mT}.$$

Die kurze Spule hat $n = 100$ Windungen, eine Länge von $l = 5,5 \text{ cm}$ und einen Durchmesser von $d = 4,1 \text{ cm}$. In Tabelle 4 sind die Werte des magnetischen Flusses B an verschiedenen Stellen x aufgelistet. Die Werte aus Tabelle 4 sind in Abbildung 4 gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 4: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x in der kurzen Spule.

$B/ \text{ mT}$	$x/ \text{ cm}$
0,231	0,000
0,325	0,500
0,475	1,000
0,670	1,500
0,940	2,000
1,200	2,500
1,455	3,000
1,677	3,500
1,821	4,000
1,901	4,500
1,928	5,000
1,902	5,500
1,844	6,000
1,725	6,500
1,530	7,000
1,181	7,500
0,863	8,000
0,486	8,500
0,350	9,000
0,255	9,500
0,198	10,000

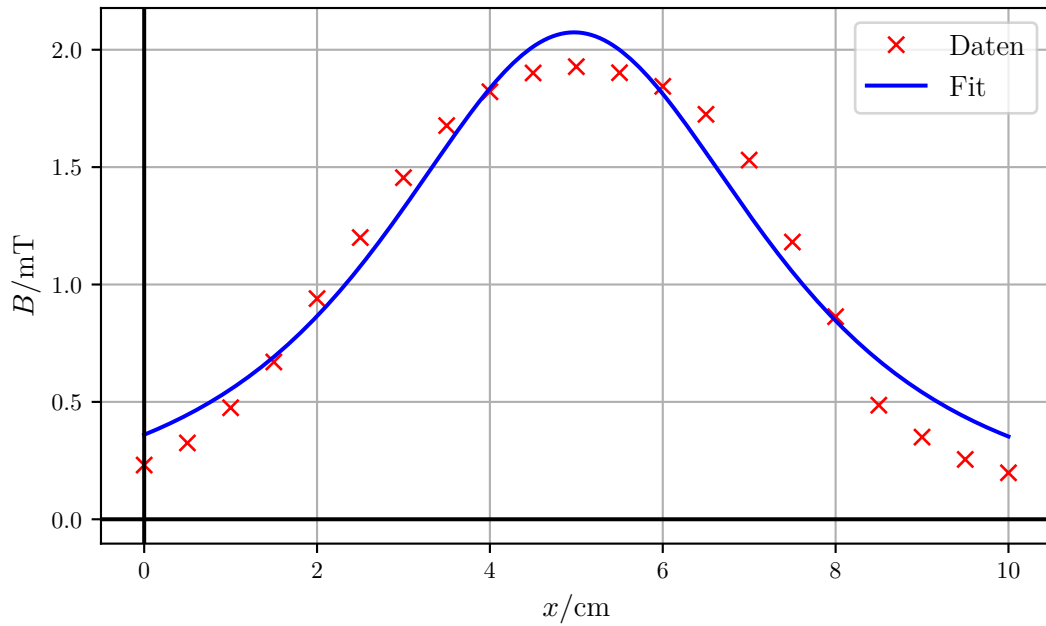


Abbildung 4: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die Position x inner- und außerhalb der kurzen Spule aufgetragen.

Für die maximale magnetische Flussdichte ergibt sich also

$$B_{kurz,exp} = 1,8 \text{ mT}.$$

Die theoretisch errechnete maximale magnetische Flussdichte ergibt sich mit Gleichung (2) zu

$$B_{kurz,theo} = 3,1 \text{ mT}.$$

4.2 Magnetische Flussdichte eines Spulenpaares

Die einzelnen Spulen des gegebenen Spulenpaares haben jeweils eine Windungszahl von $n_{Spule} = 100$. Der mittlere Spulendurchmesser beträgt $d_{Spule} = 125 \text{ mm}$. Die Spulenbreite ist jeweils $b_{Spule} = 33 \text{ mm}$.

Zunächst wird der Abstand der beiden Spulen so festgelegt, dass er den Radien der Spulen entspricht. Es handelt sich um ein Helmholtz-Spulenpaar. Es wird eine Stromstärke von $I = 4 \text{ A}$ für die Messung eingestellt. Die Werte des magnetischen Flusses an verschiedenen Stellen x sind in Tabelle 5 aufgelistet. Dabei wird inner- und außerhalb der Spulen gemessen. Dieselben Werte sind in Abbildung 5 gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 5: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x in- und außerhalb des Spulenpaares bei einem Abstand von 3,125 cm und einem Strom I von 4 A.

B/mT	x/cm
5,646	0,700
5,635	0,800
5,632	0,900
5,631	1,000
5,629	1,100
5,627	1,200
5,621	1,300
3,776	6,600
3,750	6,700
3,700	6,800
3,662	6,900
3,583	7,000
3,524	7,100
3,464	7,200
3,396	7,300

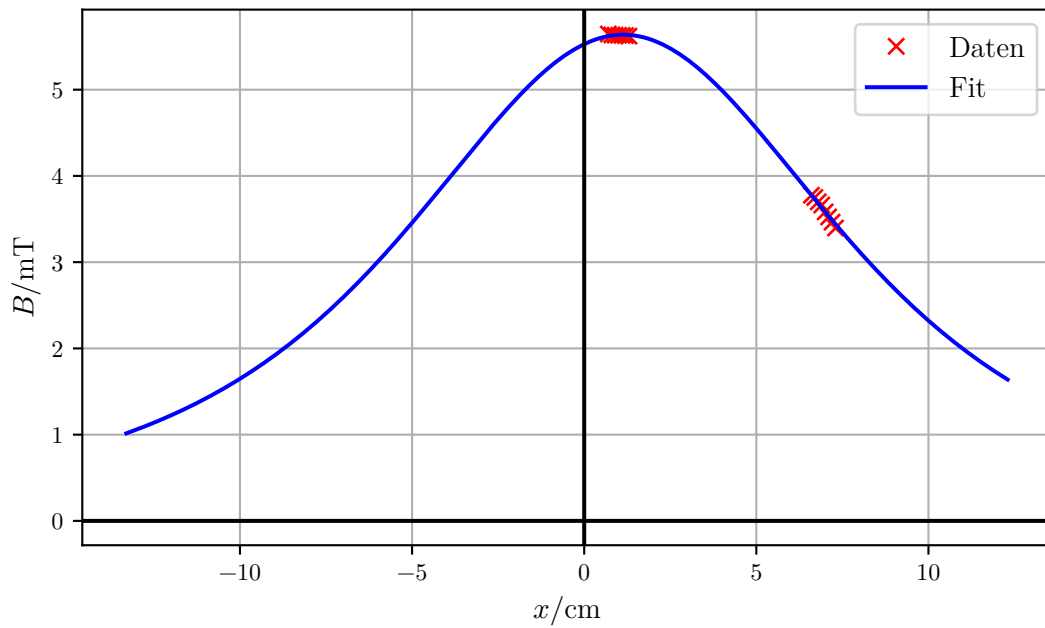


Abbildung 5: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die Position x inner- und außerhalb des Helmholtz-Spulenpaares für eine Stromstärke von 4 A aufgetragen.

Der experimentelle Wert für die magnetische Flussdichte des Helmholtz-Spulenpaares ist also

$$B_{1,exp} = 5,6 \text{ mT}.$$

Der mit Gleichung (6) errechnete theoretische Wert ist

$$B_{1,theo} = 3,7 \text{ mT}.$$

Der Abstand der Spulen wird im nächsten Messabschnitt auf den Durchmesser der Spulen erhöht. Die eingestellte Stromstärke ist, wie im ersten Teil, $I = 4 \text{ A}$. Die magnetische Flussdichte an verschiedenen Stellen x ist in Tabelle 6 dargestellt. Diese Werte sind in Abbildung 6 gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 6: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x in- und außerhalb des Spulenpaares bei einem Abstand von 6,25 cm und einem Strom I von 4 A.

$B/ \text{ mT}$	$x/ \text{ cm}$
2,920	1,000
2,787	1,500
2,674	2,000
2,587	2,500
2,522	3,000
2,480	3,500
2,467	4,000
2,481	4,500
2,525	5,000
2,590	5,500
2,669	6,000
2,784	6,500
2,943	7,000
3,035	7,500
2,454	13,000
2,111	13,500
1,894	14,000
1,534	14,500
1,386	15,000

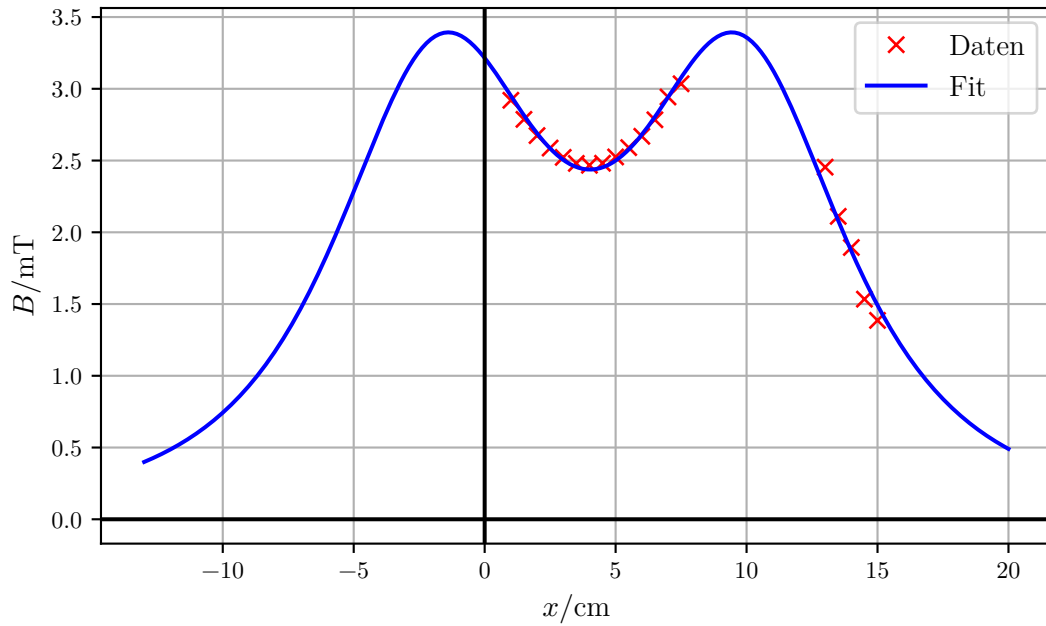


Abbildung 6: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die Position x inner- und außerhalb des Spulenpaares mit einem Abstand, der gleich dem Durchmesser der Spulen ist, und einer Stromstärke von 4 A aufgetragen.

Der experimentell ermittelte Wert für das B -Feld des Spulenpaares bei einem Abstand, der gleich dem Durchmesser der Spulen ist, und gleicher Stromstärke wie zuvor ist

$$B_{2,exp} = 2,5 \text{ mT.}$$

Der mittels (6) berechnete zugehörige theoretische Wert ist

$$B_{2,theo} = 2,8 \text{ mT.}$$

Zuletzt wird die angelegte Stromstärke verändert. Der Abstand der Spulen bleibt unverändert der Durchmesser der Spulen. Die verwendete Stromstärke ist $I = 3 \text{ A}$. Der magnetische Fluss an den Positionen x inner- und außerhalb der Spulen findet sich in Tabelle 7. Diese Werte sind in Abbildung 7 gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 7: Der magnetische Fluss B an verschiedenen Stellen x in- und außerhalb des Spulenpaares bei einem Abstand von 6,25 cm und einem Strom I von 3 A.

$B/$ mT	$x/$ cm
2,637	1,000
2,536	1,500
2,444	2,000
2,362	2,500
2,304	3,000
2,269	3,500
2,256	4,000
2,268	4,500
2,306	5,000
2,370	5,500
2,446	6,000
2,552	6,500
2,657	7,000
2,773	7,500
2,420	13,000
2,265	13,500
2,065	14,000
1,887	14,500
1,702	15,000
1,531	15,500

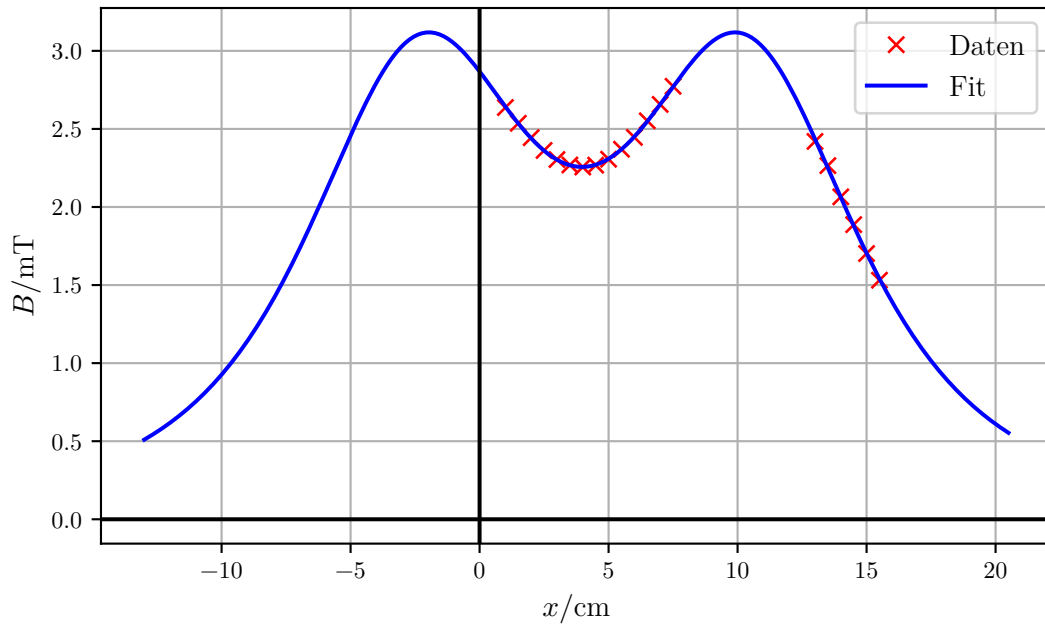


Abbildung 7: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die Position x inner- und außerhalb des Spulenpaares mit einem Abstand, der gleich dem Durchmesser der Spulen ist, und einer Stromstärke von 3 A aufgetragen.

Der experimentelle Wert für das B -Feld des Spulenpaares mit Abstand d_{Spule} und einer Stromstärke von $I = 3$ A ist

$$B_{3,exp} = 2,25 \text{ mT.}$$

Der durch Gleichung (6) berechnete Theoriewert lautet

$$B_{3,theo} = 2,11 \text{ mT.}$$

4.3 Hysteresekurve einer Ringspule mit Luftspalt

Die Windungszahl der TRingspule beträgt $n_{Ring} = 595$. Die Breite des Luftspalts ist $d_{Spalt} = 3$ mm.

Der magnetische Fluss B der Ringspule wird im Luftspalt des Rings gemessen. In den folgenden Tabellen befinden sich die Werte des magnetischen Flusses für verschiedene eingestellte Stromstärken. In Tabelle 8 befinden sich die Werte des magnetischen Flusses für verschiedene eingestellte Stromstärken, die zur Erzeugung der Neukurve führen. In Tabelle 9 sind die restlichen Werte dargestellt.

In den Tabellen 10 und 11 sind dieselben Werte der magnetischen Flussdichten zu finden. Diese sind statt gegen I nun gegen H dargestellt, um eine Hysteresekurve zu erhalten. Die Umrechnung von I nach H erfolgt mittels Gleichung (5).

Diese Werte für den magnetischen Fluss in Abhängigkeit vom H -Feld sind in Abbildung 8 gegen die Stromstärke aufgetragen.

Tabelle 8: Der magnetische Fluss B des gemessenen Magnetfelds gegen den Strom I des erzeugenden Magnetfelds, Neukurve.

$B/ \text{ mT}$	$I/ \text{ A}$
0,0	0,0
111,2	1,0
273,5	2,0
397,8	3,0
479,9	4,0
537,9	5,0
585,1	6,0
621,8	7,0
653,1	8,0
679,9	9,0

Tabelle 9: Der magnetische Fluss B des gemessenen Magnetfelds gegen den Strom I des erzeugenden Magnetfelds.

$B/\text{ mT}$	$I/\text{ A}$
689,1	9,0
671,7	8,0
651,9	7,0
627,7	6,0
600,7	5,0
565,1	4,0
519,2	3,0
455,4	2,0
326,2	1,0
122,8	0,0
-82,1	-1,0
-256,3	-2,0
-391,4	-3,0
-479,6	-4,0
-536,9	-5,0
-582,8	-6,0
-619,5	-7,0
-649,6	-8,0
-678,1	-9,0
-702,7	-10,0
-687,8	-9,0
-669,6	-8,0
-650,1	-7,0
-627,4	-6,0
-599,7	-5,0
-564,2	-4,0
-519,6	-3,0
-452,3	-2,0
-320,6	-1,0
-123,3	0,0
78,4	1,0
258,9	2,0
391,9	3,0
479,0	4,0
537,6	5,0
585,0	6,0
620,1	7,0
650,1	8,0
678,7	9,0

Tabelle 10: Der magnetische Fluss B des gemessenen Magnetfelds gegen das erzeugende H-Feld H , Neukurve.

$B/ \text{ mT}$	$I/ \text{ A}$
0,0	0,0
111,2	1,0
273,5	2,0
397,8	3,0
479,9	4,0
537,9	5,0
585,1	6,0
621,8	7,0
653,1	8,0
679,9	9,0

Tabelle 11: Der magnetische Fluss B des gemessenen Magnetfelds gegen das erzeugende H-Feld H .

$B/\text{ mT}$	$I/\text{ A}$
689,1	9,0
671,7	8,0
651,9	7,0
627,7	6,0
600,7	5,0
565,1	4,0
519,2	3,0
455,4	2,0
326,2	1,0
122,8	0,0
-82,1	-1,0
-256,3	-2,0
-391,4	-3,0
-479,6	-4,0
-536,9	-5,0
-582,8	-6,0
-619,5	-7,0
-649,6	-8,0
-678,1	-9,0
-702,7	-10,0
-687,8	-9,0
-669,6	-8,0
-650,1	-7,0
-627,4	-6,0
-599,7	-5,0
-564,2	-4,0
-519,6	-3,0
-452,3	-2,0
-320,6	-1,0
-123,3	0,0
78,4	1,0
258,9	2,0
391,9	3,0
479,0	4,0
537,6	5,0
585,0	6,0
620,1	7,0
650,1	8,0
678,7	9,0

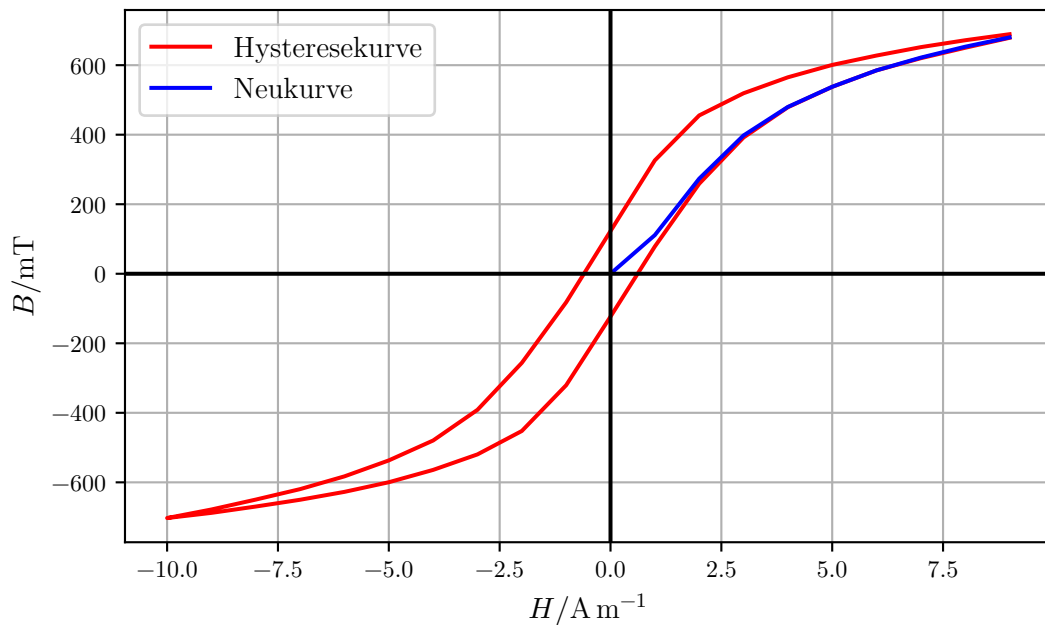


Abbildung 8: Die magnetische Flussdichte B ist gegen die magnetische Feldstärke H aufgetragen. Bei keinem angelegten Strom ist der magnetische Fluss gleich Null. Bei Erhöhung der Stromstärke entsteht die Neukurve, bis ein Sättigungswert B_S (Maximum) erreicht wird. Beim Abschalten des Stroms bleibt eine Restmagnetisierung, die Remanenz B_r (y-Achsenabschnitt), zurück. Ein Gegenfeld H_c , Koerzitivfeld, hebt diese Magnetisierung wieder auf (Schnittpunkt mit der x-Achse). Durch Erhöhung der Stromstärke entsteht eine Hysteresekurve.

Aus der grafischen Darstellung lassen sich verschiedene Faktoren wie die Sättigungsmagnetisierung B_S , die Remanenz B_r und die Koerzitivkraft H_c ablesen. Die Sättigungsmagnetisierung ist das Maximum der gemessenen Werte für die magnetische Flussdichte: $B_S = 704,3 \text{ mT}$. Die Remanenz ist der obere Schnittpunkt mit der y -Achse. Bestimmt man diesen aus der Grafik, ist die Remanenz also $B_r = 122,8 \text{ mT}$. Die eingestellte Stromstärke an der Stelle der Koerzitivkraft H_c ist $I = 0,6 \text{ A/m}$.

5 Diskussion

Die lange Spule hat einen maximalen Wert von $2,19 \text{ mT}$. Der theoretisch berechnete Wert liegt bei $2,356 \text{ mT}$ und hat somit eine relative Abweichung von $7,05 \%$. Ansonsten entsprechen die beobachteten Messungen dem Bild, dass zu erwarten war.

Bei der kurzen Spule passen Theoriekurve und experimental gemessene Kurve auch gut. Die Abweichung im Hochpunkt liegt bei 40 percent .

Das Spulenpaar, als Helmholtzspule, passt ebenfalls gut zur Theoriekurve. Der relative Fehler des Werts in der Mitte des Paares liegt bei einem Wert von $55,5 \text{ percent}$. Bei einem

größeren Abstand ließ sich der Wert, ließ sich die Kurve gut als Addition zweier Spulen beschreiben. Bei einem Strom von 4 A lag die relative Abweichung in der Mitte des Paares bei 10,71 %. Bei der dritten Messung, die erneut den größeren Abstand hatte, aber nur einen Strom von 3 A, wurde ein relativer Fehler von 6,84 percent festgestellt. Somit liegen alle Fehler in einem Bereich von 5 % bis 60 %, was relativ viel ist. Grund dafür könnte die etwas wackelige Apperatur gewesen sein. Außerdem musste die Hall-Sonde immer exakt gleich ausgerichtet sein. Drehte man sie nur leicht, änderten sich die gemessenen Werte bereits extrem.

Vermutlich war die Hallsonde bei der Messung der kurzen Spule und der ersten Messung des Spulenpaares nicht ganz senkrecht, wodurch die starke Abweichung zu den Theoriewerten entstanden ist.

Die Magnetisierung funktionierte recht gut. Die Hysteresekurve sieht genauso aus, wie sie zu erwarten war.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 308 - Spulen und Magnetfelder*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Magnetfeld.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.