

V206 - Die Wärmepumpe

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.12.2018, Abgabe: 08.01.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Mathematische Voraussetzung	3
2.2	Theoretische Grundlagen einer Wärmepumpe	3
2.3	Funktionsweise einer Wärmepumpe	4
2.4	Bestimmung der Güteziffer	5
2.5	Bestimmung des Massendurchsatzes	5
2.6	Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung	5
3	Fehlerrechnung	6
4	Durchführung	7
5	Auswertung	8
5.1	Temperaturverläufe	8
5.2	Bestimmung der Güteziffern	10
5.3	Bestimmung des Massendurchsatzes	11
5.4	Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung	12
6	Diskussion	12
6.1	Temperaturverläufe	12
6.2	Bestimmung der Güteziffern	13
6.3	Bestimmung des Massendurchsatzes	13
6.4	Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung	13
	Literatur	13

1 Ziel

Die Funktionsweise und das physikalische Verhalten einer Wärmepumpe soll bei diesem Versuch übermittelt werden.

2 Theorie

2.1 Mathematische Voraussetzung

Die Formel für ein Polynom dritten Grades lautet

$$T(t) = at^3 + bt^2 + ct + d. \quad (1)$$

Deren Ableitung ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = at^2 + bt + c. \quad (2)$$

2.2 Theoretische Grundlagen einer Wärmepumpe

Die thermische Energie geht in einem abgeschlossenen System immer vom heißeren zum kälteren Körper über. Es ist möglich, die Richtung des Wärmeflusses mit der Aufwendung zusätzlicher Energie umzukehren. Eine Vorrichtung, die diesen Prozess durchführt, ist eine sogenannte Wärmepumpe.

Das Verhältnis aus der transportierten Wärmemenge und der dafür aufgebrauchten Arbeit nennt man Gütezahl ν der Wärmepumpe. Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich ableiten, dass sich die abgegebene Wärmemenge Q_1 aus der Summe der entnommenen Wärmemenge Q_2 und der aufgewandten Energie W bestimmt. Somit gilt

$$Q_1 = Q_2 + W.$$

Die Gütezahl ergibt sich zu

$$\nu = \frac{Q_1}{W}.$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich ableiten, dass zwischen den Wärmemengen Q_1 und Q_2 und den Temperaturen T_1 und T_2 in einem idealen System folgende Beziehung besteht:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Für die Richtigkeit dieser Gleichung muss aber die Voraussetzung gelten, dass der Prozess der Wärmeübertragung reversibel, also umkehrbar, ist.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$Q_1 = W + \frac{T_2}{T_1} Q_2$$

gilt und sich die Gütezahl ν zu folgender Gleichung ergibt:

$$\nu_{id} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (3)$$

Dies gilt aber nur im Idealfall. Für die reale Wärmepumpe gilt die Ungleichung:

$$\nu_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

2.3 Funktionsweise einer Wärmepumpe

Die Wärme wird innerhalb der Pumpe als Phasenumwandlungsenergie eines Gases transportiert, das beim Verdampfen Wärme aufnimmt und bei der Verflüssigung wieder abgibt. Der schematische Aufbau der hier verwendeten Apparatur ist in Abb. 1 zu erkennen.

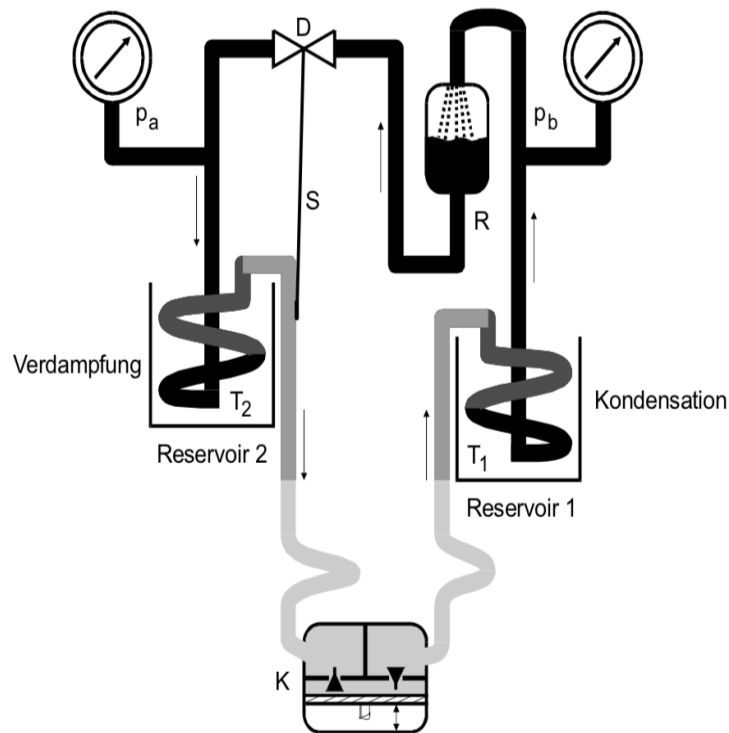


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe. Der Druck p_b und die Temperatur T_1 beziehen sich auf das Reservoir 1. Der Druck p_a und die Temperatur T_2 beziehen sich auf das Reservoir 2. p_b und T_1 sind jeweils größer als die anderen Werte.

2.4 Bestimmung der Güteziffer

Aus dem Quotienten aus ΔT_1 und Δt ergibt sich die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge zu

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t}.$$

$m_1 c_w$ ist dabei die Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 1. $m_k c_k$ ist die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers. Für die Güteziffer ergibt sich dann mit N als die vom Wattmeter angezeigte und über das Zeitintervall Δt gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors:

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t \cdot N} = \frac{(m_1 c_w + m_k c_k)}{N} \frac{\Delta T_1}{\Delta t}. \quad (4)$$

2.5 Bestimmung des Massendurchsatzes

Für Q_2 lässt sich die Gleichung 2.4 analog anwenden:

$$\nu = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t \cdot N} = \frac{(m_2 c_w + m_k c_k)}{N} \frac{\Delta T_2}{\Delta t}.$$

Für die Wärmeentnahme durch Verdampfung des Transportmediums wird pro Massen- und Zeiteinheit die Verdampfungswärme L verbraucht:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = L \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Der Massendurchsatz wird also durch

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t \cdot L} = \frac{(m_2 c_w + m_k c_k)}{L} \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (5)$$

bestimmt.

2.6 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Die mechanische Kompressorleistung N_{mech} ergibt sich zu

$$N_{mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6)$$

Dabei ist κ das Verhältnis der Molwärmen C_P und C_V . ρ ist die Dichte des Transportmediums im gasförmigen Zustand. Diese wird bestimmt durch

$$\rho = \frac{p_a T_0}{p_0 T_2} \rho_0. \quad (7)$$

Die Normalbedingungen lauten $p_0 = 10^5$ Pa und $T_0 = 273,15$ K.

3 Fehlerrechnung

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Ableitung eines Polynoms dritten Grades mit den Fehler behafteten Größen a , b , c und t lautet:

$$\sigma_{T(t)} = \sqrt{9\sigma_a^2 t^4 + 4\sigma_b^2 t^2 + \sigma_c^2 + \sigma_t^2 (6at + 2b)^2}. \quad (8)$$

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Formel 4 mit der die Gütezahl bestimmt wird, ergibt sich mit den Fehler behafteten Größen m_1 , N , $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$ zu:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu = & \left(\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta t} \right)^2 \frac{c_w^2 \sigma_{m_1}^2}{N^2} + \frac{\sigma_{\frac{\Delta T_1}{\Delta t}}^2}{N^2} (c_k m_k + c_w m_1)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta t} \right)^2 \frac{\sigma_N^2}{N^4} (c_k m_k + c_w m_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Formel 3 mit der die ideale Gütezahl bestimmt wird, ergibt sich mit den Fehler behafteten Größen T_1 und T_2 zu:

$$\sqrt{\frac{T_1^2 \sigma_{T_2}^2}{(T_1 - T_2)^4} + \sigma_{T_1}^2 \left(-\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} + \frac{1}{T_1 - T_2} \right)^2}. \quad (10)$$

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Formel 5 mit der der Massendurchsatz bestimmt wird, ergibt sich mit den Fehler behafteten Größen m_2 , N , $\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$ zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\Delta m}{\Delta t}} = & \left(\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta t} \right)^2 \frac{c_w^2 \sigma_{m_2}^2}{N^2} + \frac{\sigma_{\frac{\Delta T_2}{\Delta t}}^2}{N^2} (c_k m_k + c_w m_2)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta t} \right)^2 \frac{\sigma_N^2}{N^4} (c_k m_k + c_w m_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Formel 7 mit der die Dichte bestimmt wird, ergibt sich mit den Fehler behafteten Größen p_a , T_2 zu:

$$\sigma_\rho = \sqrt{\frac{T_0^2 \sigma_{p_a}^2 \rho_0^2}{T_a^2 p_0^2} + \frac{T_0^2 \sigma_{T_a}^2 p_a^2 \rho_0^2}{T_a^4 p_0^2}}. \quad (12)$$

Die Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung für die Formel 6 mit der die mechanische Leistung bestimmt wird, ergibt sich mit den Fehler behafteten Größen p_a , p_b , ρ und $\frac{\Delta m}{\Delta t}$

zu:

$$\sigma_{N_{mech}} = \left(\frac{\sigma_{\frac{\Delta m}{\Delta t}}^2 \left(-p_a + p_b \left(\frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right)^2}{\rho_0^2 (\kappa - 1)^2} + \frac{\sigma_{p_a}^2 \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2 \left(-1 + \frac{p_b \left(\frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\kappa p_a} \right)^2}{\rho_0^2 (\kappa - 1)^2} \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{p_b}^2 \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2 \left(\left(\frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{\left(\frac{p_a}{p_b} \right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\kappa} \right)^2}{\rho_0^2 (\kappa - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

4 Durchführung

Die Reservoirs der in Abb. 2 dargestellten Apparatur werden jeweils mit einer Wassermenge von 3 L aufgefüllt. Anschließend werden die Temperaturen T_1 und T_2 in den Reservoirs, die Drücke p_a und p_b im Verdampfungs- bzw. Verflüssigungsbereich und die Leistungsaufnahme des Kompressors gemessen. Der Zeittakt beträgt dabei eine Minute. Die Messung wird abgebrochen, sobald T_1 einen Wert von ca. 50 °C erreicht hat.

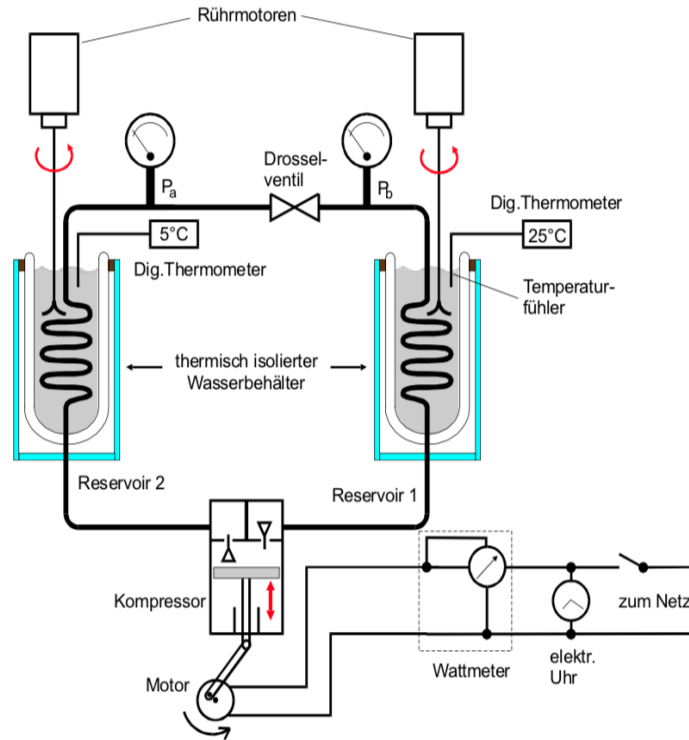


Abbildung 2: Aufbau einer Wärmepumpe sowie der Messapparatur. Der Druck p_b und die Temperatur T_1 beziehen sich auf das Reservoir 1. Der Druck p_a und die Temperatur T_2 beziehen sich auf das Reservoir 2. p_b und T_1 sind jeweils größer als die anderen Werte.

5 Auswertung

Die gemessenen Temperaturen T_1 und T_2 , sowie die Drücke p_a und p_b und die Leistungsaufnahme des Kompressors zu verschiedenen Zeiten t sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Die Temperatur in Reservoir 1 und Reservoir 2 und die dazugehörigen Drücke und die Leistungsaufnahme des Kompressors zu verschiedenen Zeitpunkten.

t/min	$T_1/^\circ\text{C}$	p_b/bar	$T_2/^\circ\text{C}$	p_a/bar	N/W
0,0	22,4	5,0	22,1	5,4	0,0
1,0	23,2	7,3	22,1	2,6	165,0
2,0	24,2	7,5	22,0	2,8	180,0
3,0	25,6	8,0	20,9	3,0	185,0
4,0	27,3	8,5	19,3	3,1	195,0
5,0	29,0	8,8	17,3	3,2	200,0
6,0	30,9	9,3	15,7	3,2	203,0
7,0	32,7	9,6	14,1	3,2	205,0
8,0	34,5	10,0	12,3	3,3	205,0
9,0	36,2	10,5	10,7	3,3	208,0
10,0	37,8	10,9	9,1	3,3	208,0
11,0	39,4	11,2	7,6	3,3	210,0
12,0	41,0	11,5	6,2	3,3	210,0
13,0	42,5	11,9	4,9	3,3	212,0
14,0	44,0	12,2	3,8	3,3	212,0
15,0	45,4	12,5	2,9	3,3	212,0
16,0	46,7	12,9	2,5	3,3	212,0
17,0	48,0	13,3	1,6	3,3	210,0
18,0	49,3	13,5	1,2	3,2	210,0
19,0	50,4	13,9	0,7	3,3	210,0

5.1 Temperaturverläufe

Die Temperaturverläufe der beiden Reservoirs sind in Abbildung 3 zu sehen.

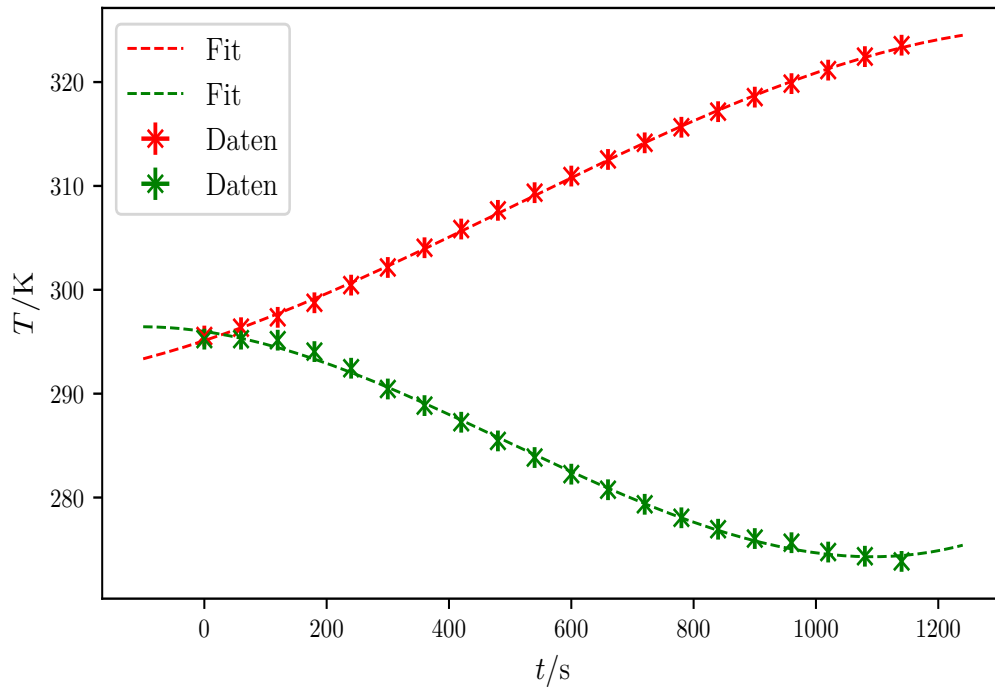


Abbildung 3: Temperaturverläufe. Es sind jeweils die Daten und ein Fit dargestellt. Die rote Kurve stellt die Temperatur in Reservoir x dar. Die grüne Kurve stellt die Temperatur in Reservoir y dar. Dabei wird die Temperatur durch Gleichung 1, ein Polynom dritten Grades, dargestellt. Die Fitparameter der Kurve der Temperatur im ersten Reservoir sind $a_1 = (-1,20 \pm 0,17) \cdot 10^{-8} \text{ K/s}^3$, $b_1 = (1,83 \pm 0,30) \cdot 10^{-5} \text{ K/s}^2$, $c_1 = (1,95 \pm 0,14) \cdot 10^{-2} \text{ K/s}$ und $d_1 = 295,11 \pm 0,18 \text{ K}$. Die Fitparameter der Kurve der Temperatur im zweiten Reservoir sind $a_2 = (2,61 \pm 0,30) \cdot 10^{-8} \text{ K/s}^3$, $b_2 = (-3,87 \pm 0,52) \cdot 10^{-5} \text{ K/s}^2$, $c_2 = (-0,87 \pm 0,25) \cdot 10^{-2} \text{ K/s}$ und $d_2 = 295,99 \pm 0,32 \text{ K}$.

Die Differentialquotienten $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ für vier verschiedene Temperaturen sind im Folgenden zu sehen. Es werden die Temperaturen

$$T_1 = 1^\circ\text{C} = 274,15 \text{ K}$$

$$T_2 = 5^\circ\text{C} = 278,15 \text{ K}$$

$$T_3 = 10^\circ\text{C} = 283,15 \text{ K}$$

$$T_4 = 15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ K}$$

betrachtet. Dabei ist (2) die Ableitung der Funktion der Temperatur $T(t)$. Für $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T_1}{\Delta t}(1) &= 0,0216 \pm 0,0015 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_1}{\Delta t}(5) &= 0,0272 \pm 0,0023 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_1}{\Delta t}(10) &= 0,028 \pm 0,004 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_1}{\Delta t}(15) &= 0,023 \pm 0,007 \frac{\text{K}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Für $\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T_2}{\Delta t}(1) &= -0,0130 \pm 0,0026 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_2}{\Delta t}(5) &= -0,025 \pm 0,004 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_2}{\Delta t}(10) &= -0,027 \pm 0,007 \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta T_2}{\Delta t}(15) &= -0,015 \pm 0,012 \frac{\text{K}}{\text{s}}\end{aligned}$$

5.2 Bestimmung der Güteziffern

Die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers beträgt

$$m_k c_k = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Die realen Güteziffern für die vier Temperaturen werden mittels Gleichung (4) berechnet. Die idealen Güteziffern werden mit Gleichung (3) bestimmt. Beide Größen sind in Tabelle 2 jeweils gegenübergestellt.

Tabelle 2: Die Ergebnisse für die realen und idealen Gütewerte für die vier verschiedenen Temperaturwerte.

ν_{real}	ν_{ideal}
$0,64 \pm 0,05$	$270,0 \pm 350,0$
$0,67 \pm 0,06$	$25,8 \pm 3,1$
$0,68 \pm 0,1$	$10,8 \pm 0,5$
$0,54 \pm 0,16$	$7,5 \pm 0,23$

5.3 Bestimmung des Massendurchsatzes

Das im Versuch verwendete Gas ist Dichlordifluormethan. Die Verdampfungswärme L des Gases wird durch die Dampfdruck-Kurve in Abb. 4 bestimmt. Die Wertepaare des Drucks p und der Temperatur T , die zur Darstellung der Dampfdruck-Kurve nötig sind, befinden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Druck- und Temperaturskala gegeneinander aufgetragen.

p / bar	T / °C
1,0	−30,0
2,0	−13,0
3,0	−0,5
4,0	8,0
5,0	15,5
6,0	22,0
7,0	27,5
8,0	33,0
9,0	37,5
10,0	42,0

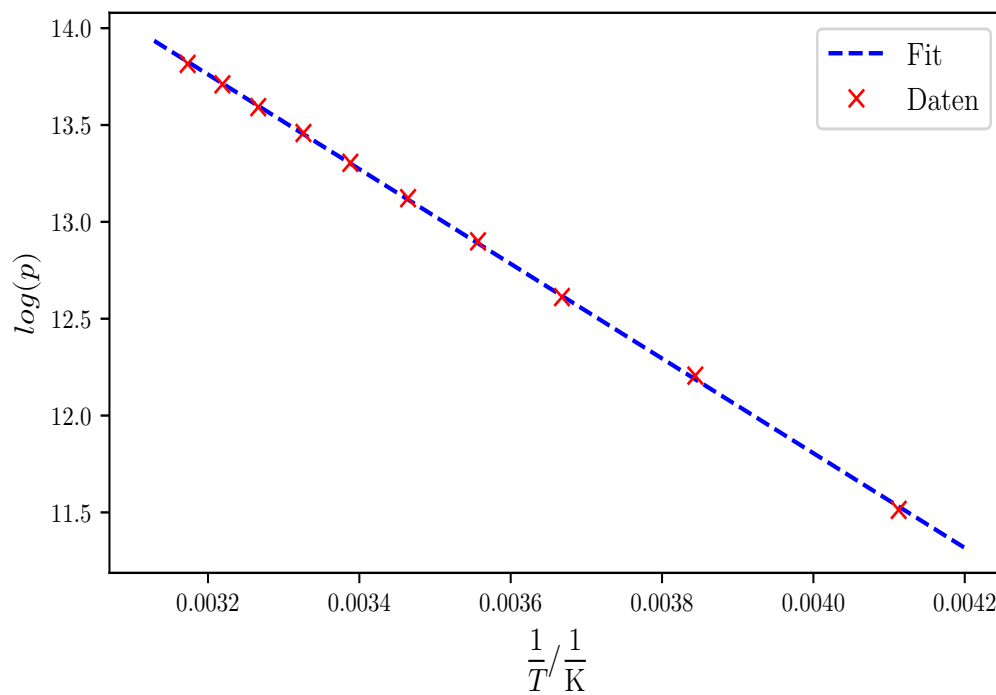


Abbildung 4: Dampfdruck-Kurve.

Die Verdampfungswärme ist durch eine Ausgleichsrechnung somit

$$L = (-2,032 \pm 0,011) \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}}.$$

Die Massendurchsätze ergeben sich damit mit Gleichung (5) zu

$$\begin{aligned}\frac{\Delta m}{\Delta t}(1) &= (3,2 \pm 0,6) \frac{\text{mmol}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta m}{\Delta t}(5) &= (6,0 \pm 1,0) \frac{\text{mmol}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta m}{\Delta t}(10) &= (1,0 \pm 0,3) \frac{\text{mmol}}{\text{s}} \\ \frac{\Delta m}{\Delta t}(15) &= (0,6 \pm 0,5) \frac{\text{mmol}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

5.4 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Dichlordifluormethan hat bei den Werten

$$\begin{aligned}T &= 273,15 \text{ K} \\ p &= 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \kappa &= 1,14\end{aligned}$$

die Dichte

$$\rho_0 = 5,51 \frac{\text{g}}{\text{L}},$$

die mit Gleichung (7) berechnet werden kann. Die mechanischen Kompressorleistungen für die vier Temperaturen ergeben sich mit Gleichung (6) zu den in Tabelle 4 stehen Werten.

Tabelle 4: Die Ergebnisse für die mechanische und die elektrische Leistung für die vier verschiedenen Temperaturwerte.

N_{mech}	N_{real}
$7,2 \pm 1,5$	165
$13,3 \pm 2,2$	200
$2,6 \pm 0,7$	208
$1,6 \pm 1,3$	212

6 Diskussion

6.1 Temperaturverläufe

Die Temperaturverläufe, die in den Plots aufgetragen wurden, können mit einem Polynom dritten Grades ziemlich exakt gefittet werden.

Die Differentialquotienten haben relative Fehler im Bereich von 6,9 % bis 80 %. Sie sind somit zum Teil ziemlich groß. Was dabei auffällt ist, dass die relativen Fehler am Anfang klein sind und dann für spätere Zeitpunkte größer werden.

6.2 Bestimmung der Güteziffern

Die realen Güteziffern haben einen relativen Fehler. Bei der ersten Temperatur beträgt dieser 7,8 %. Bei der zweiten Messung liegt der relative Fehler bei 9,0 %, bei der dritten bei 14,7 % und bei der vierten Messung bei 29,6 %. Die idealen Güteziffern haben aufgrund der fehlerbehafteten Temperaturwerte einen relativen Fehler, der im Bereich von 3,1 % bis 129,6 % liegt. Der relative Fehler ist bei der ersten idealen Ziffer besonders hoch und nimmt bei den anderen drei Werten dann ziemlich stark ab. Die relative Abweichung zwischen den idealen und den realen Gütewerten beträgt für die erste Temperatur 0,24 %, für die zweite Temperatur 2,60 %, für die dritte Temperatur 6,30 % und für die vierte Temperatur 7,2 %.

6.3 Bestimmung des Massenduchsatzes

Die Verdampfungswärme L , die mittels einer Ausgleichsrechnung bestimmt wurde, ergibt einen Wert von $-20\,320\text{ J/mol}$ mit einem relativen Fehler von 0,54 %.

Der Massenduchsatz für die erste Temperatur hat einen relativen Fehler von 18,75 %, für die zweite Temperatur 16,67 %, für die dritte Temperatur 28,16 % und für die vierte Temperatur 83,33 %.

6.4 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Die mechanische Leistung bei der ersten Temperatur weicht um 4,36 % von der Leistung ab, die verbraucht wurde, um die Wärmepumpe anzutreiben. Für die zweite Temperatur ergibt sich ein Wert von 6,65 %, für die dritte Temperatur 1,25 % und für die vierte Temperatur 0,75 %. Somit ist das System der Wärmepumpe nicht als sonderlich effizient zu bewerten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 206 - Die Wärmepumpe*. 2018.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.

- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.