

V353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Jan Herdieckerhoff
jan.herdieckerhoff@tu-dortmund.de

Karina Overhoff
karina.overhoff@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.11.2018, Abgabe: 20.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators	3
2.2	Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung . . .	3
2.3	Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung	4
2.4	Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung	4
2.5	RC-Schwingkreis als Integrator der Spannung $U(t)$	4
3	Durchführung	5
3.1	Messung des Entladevorgangs	5
3.2	Messung der Amplitude der Kondensatorspannung	5
3.3	Messung der Phasenverschiebung	6
3.4	Nachweis der Integrator-Eigenschaft eines RC-Kreises	6
4	Auswertung	7
4.1	Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators	7
4.2	Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung . . .	10
4.3	Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung	12
4.4	Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung	14
4.5	Spannung als Integrator	16
5	Diskussion	18
	Literatur	20

1 Ziel

In diesem Versuch soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises untersucht und ausgewertet werden.

2 Theorie

[1]

2.1 Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators

Die Zeitkonstante RC kann durch die Messung des Auflade- bzw. Entladevorgangs eines Kondensators bestimmt werden. Der Aufladevorgang eines Kondensators mit Kapazität C , der über einen Widerstand R mit der Spannung U_0 verbunden ist, wird durch die Gleichung

$$U(t) = U_0(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))$$

beschrieben. Der Vorgang wird durch die Spannung U zum Zeitpunkt t dargestellt. Auf dieselbe Art und Weise wird der Entladevorgang durch

$$U(t) = U_0 \exp(-\frac{t}{RC})$$

beschrieben.

2.2 Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung

Eine Wechselspannung $U(t)$ wird durch die Formel

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

dargestellt. Dabei ist U_0 die maximale Spannung. $\cos \omega t$ beschreibt die Oszillation um den Nullpunkt in Abhängigkeit von der Frequenz ω und der Zeit t . Mit einer Phasenverschiebung ϕ verschiebt sich die Oszillation der Kondensatorspannung um einen gewissen Wert. Die neue Formel lautet dann

$$U_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi).$$

Ein RC -System setzt sich nach der zweiten Kirchhoffschen Regel aus der Spannung U_R des Widerstands und der Spannung U_C des Kondensators zusammen. Es gilt

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t).$$

Mit den oberen Gleichungen für $U(t)$, $U_C(t)$ und dem Ohmschen Gesetz ergibt sich

$$U_0 \cos \omega t = -A(\omega) RC \sin(\omega t + \phi) + A(\omega) \cos(\omega t + \phi),$$

wobei für die Phasenverschiebung

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (1)$$

gilt. Die Amplitude $A(\omega)$ ist

$$A(\omega) = -\frac{\sin\phi}{\omega RC} U_0. \quad (2)$$

Durch einige Umformungen ergibt sich dann

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (3)$$

Dabei wird die Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannung durch die Frequenz ω der Erregerspannung beeinflusst.

2.3 Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung

Die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ lässt sich mit

$$\phi = \frac{a}{T} 2\pi \quad (4)$$

bestimmen. Dabei ist a der Abstand der Nulldurchgänge der Spannung des Kondensators und der Spannung des Generators. T ist die Schwingungsdauer, die durch

$$T = \frac{1}{\omega}$$

gegeben ist. ω ist die Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f.$$

2.4 Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung

Die Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ von der Phase ϕ ist in Gleichung (2) zu sehen.

2.5 RC-Schwingkreis als Integrator der Spannung $U(t)$

Ein RC-Schwingkreis kann dazu genutzt werden eine zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ unter bestimmten Bedingungen zu integrieren. Es wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Spannung des Kondensators U_C und dem Integral $\int U(t)dt$ festgestellt. Dieser ergibt sich durch

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (5)$$

3 Durchführung

3.1 Messung des Entladevorgangs

Die Zeitkonstante RC wird durch die Messung des Entladevorgangs des Kondensators bestimmt. Mit der in Abb. 1 dargestellten Schaltung wird die am Kondensator gemessene Spannung $U_C(t)$ auf einem Oszilloskop in Abhängigkeit von der Zeit t angezeigt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass sich die Spannung $U_C(t)$ innerhalb des Aufzeichnungszeitraums um den Faktor 5 bis 10 ändert. Sobald eine geeignete Kurve auf dem Bildschirm zu erkennen ist, werden mindestens 10 Messwertpaare aufgenommen.

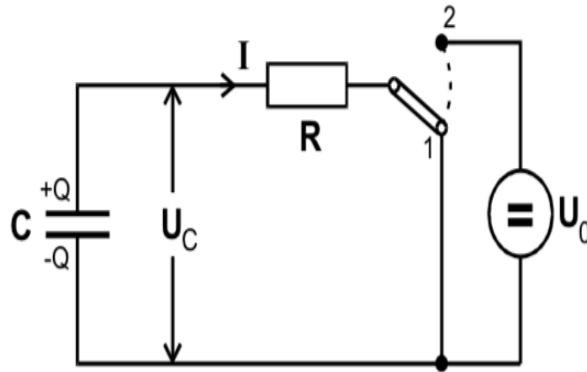


Abbildung 1: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch den Entladevorgang des Kondensators.[1]

3.2 Messung der Amplitude der Kondensatorspannung

Mittels der Schaltung, die in Abb. 2 dargestellt wird, wird die Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Es werden 15 Wertepaare aufgenommen. Die Amplitude wird dabei in Abhängigkeit von der Frequenz über drei Zehnerpotenzen hinweg gemessen.

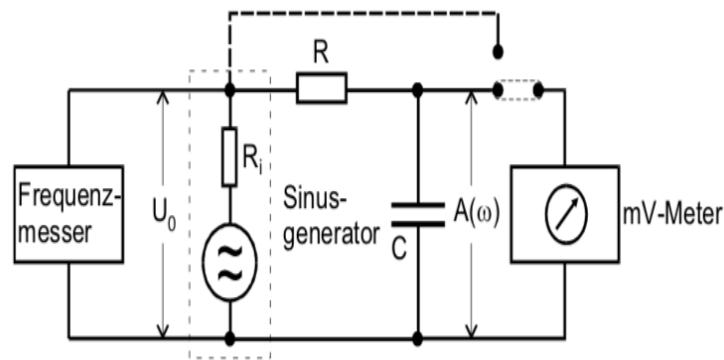


Abbildung 2: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch die Amplitude der Kondensatorspannung.[1]

3.3 Messung der Phasenverschiebung

Zur Ermittlung der Phasenverschiebung werden, wie in Abb. 3 dargestellt, die Kondensatorspannung $U_C(t)$ und die Generatorspannung $U_G(t)$ an ein Zweistrahl-Oszilloskop angeschlossen. Dabei wird der Abstand a der Nulldurchgänge der beiden Kurven gemessen. Die Periodendauer T ergibt sich aus der eingestellten Frequenz.

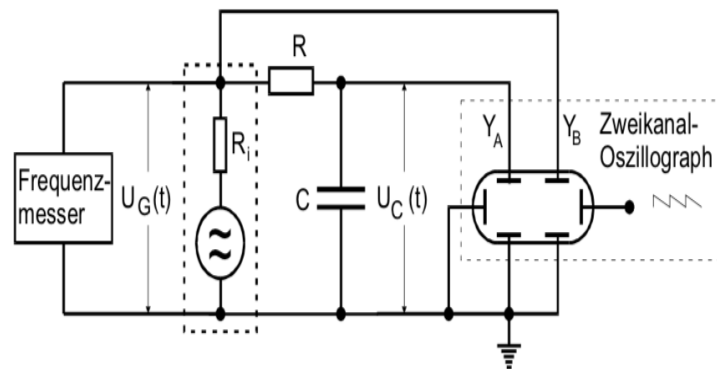


Abbildung 3: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch die Phasenverschiebung.[1]

3.4 Nachweis der Integrator-Eigenschaft eines RC-Kreises

Es wird erneut die Schaltung aus Abb.3 benutzt. Am Sinusgenerator werden nacheinander eine Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannung auf den RC-Kreis gegeben. Dabei werden auf dem Zweikanal-Oszilloskop sowohl die zu integrierende als auch die integrierte Spannung angezeigt. Von den angezeigten Spannungen werden jeweils Aufnahmen des Bildschirms gespeichert.

4 Auswertung

Für die Berechnung vieler Ergebnisse wird der Wert U_0 benötigt. Dieser wird auf einen Wert von 621 mV gesetzt, damit die Rechnungen funktionieren. Bei der Auswertung bzw. Berechnung wird Python, im Speziellen matplotlib.pyplot [2], numpy [5], uncertainties.unumpy [4] und scipy [3] verwendet.

4.1 Bestimmung von RC über den Entladevorgang des Kondensators

Die Zeitkonstante wird anhand der Steigung einer linearen Regression bestimmt. Dazu wird die Gleichung für die Entladung eines Kondensators in die Form $y = mx + b$ gebracht:

$$-\log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right) = \frac{1}{RC}t. \quad (6)$$

Der negative logarithmierte Quotient der Kondensatorspannung durch die maximale Spannung wird gegen die Zeit aufgetragen. Die Steigung bei der linearen Regression ist gegeben durch

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Die Steigung, wie aus Gleichung (6) entnommen werden kann, wird durch

$$m = \frac{1}{RC}$$

beschrieben. Also wird $\frac{1}{RC}$ bestimmt durch

$$\frac{1}{RC} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (7)$$

Dabei sind, ebenfalls aus Gleichung (6) entnehmbar, $x = t$ und $y = -\log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$. Der Fehler der inversen Zeitkonstante ist gegeben durch

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - y_i, \quad (8)$$

wobei N die Anzahl der Datenpaare, $f(x_i)$ die Werte des Fits an der Stelle x_i und y_i die gemessenen y -Werte an der Stelle x_i sind. Der Fehler gilt ebenfalls für die im Folgenden beschriebenen Zeitkonstanten.

Die Werte, die für die Bestimmung der Zeitkonstanten RC nötig sind, befinden sich in Tabelle 1. Die x und y Werte der linearen Regression (6) sind in Tabelle 2 dargestellt. Abbildung 4 stellt die Gerade dieser linearen Regression dar.

Die Steigung der Geraden ist das Inverse der Zeitkonstante. Mittels Gleichung (7) und der Gleichung für den Fehler (8) berechnet sich das Inverse der Zeitkonstante zu $\frac{1}{RC} = (836,500 \pm 51,514) \frac{1}{s}$.

Tabelle 1: Spannung U zum Zeitpunkt t , während der Entladung eines Kondensators.

U/V	t/ms
0,000	0,000
0,184	0,400
0,512	0,800
0,744	1,200
0,928	1,600
1,070	2,000
1,180	2,400
1,250	2,800
1,310	3,200
1,350	3,600
1,380	4,000
1,410	4,400
1,430	4,800
1,450	5,200
1,460	5,600

Tabelle 2: Die Zeit t gegen den negativen Logarithmus der Spannungswerte geteilt durch die maximale Spannung.

t/ms	$-\log(\frac{U(t)}{U_0})$
0,000	0,000
0,400	0,134
0,800	0,428
1,200	0,705
1,600	0,998
2,000	1,302
2,400	1,623
2,800	1,899
3,200	2,218
3,600	2,506
4,000	2,793
4,400	3,199
4,800	3,604
5,200	4,297
5,600	4,990

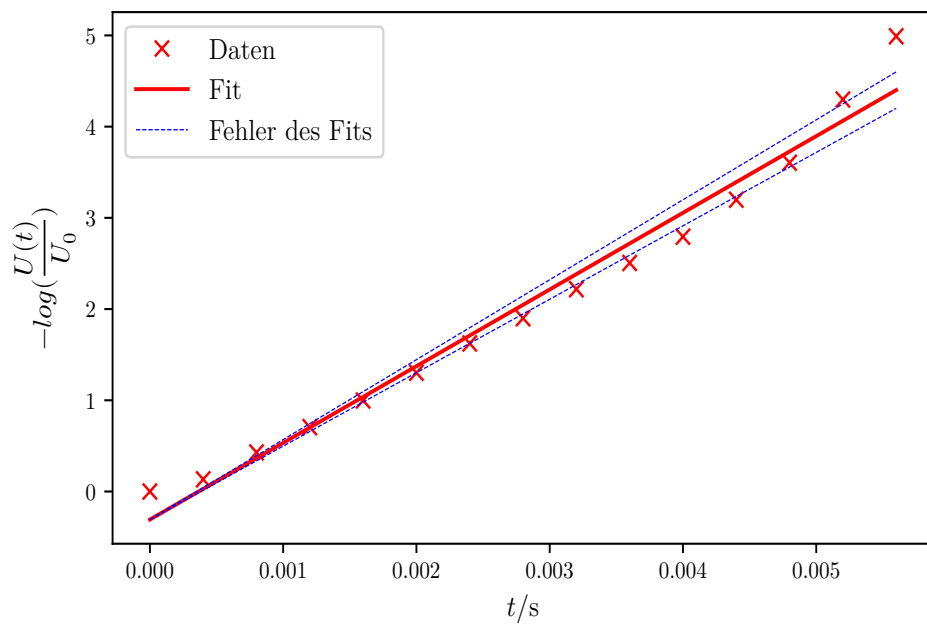


Abbildung 4: Auftragung des negativen Logarithmus der Kondensatorspannung geteilt durch die maximale Spannung gegen die Zeit beim Entladevorgang. Dargestellt werden die Daten, der dazugehörige Fit und der Fehler des Fits.

4.2 Bestimmung von RC über die Amplitude der Kondensatorspannung

Um die Zeitkonstante RC anhand der Amplitude der Kondensatorspannung zu bestimmen, wird wieder eine lineare Regression $y = mx + b$ durchgeführt. Die Gleichung (3) wird so umgeformt, dass $\frac{1}{RC}$ die Steigung m ist:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{U_0}{A(\omega)}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\omega}. \quad (9)$$

Für x und y ergeben sich also: $x = \frac{1}{\omega}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{U_0}{A(\omega)}}\right)^2 - 1}$. Durch die Steigung der

Geraden kann dann $\frac{1}{RC}$ mittels (7) bestimmt werden.

Die Kondensatorspannungen und die zeitlichen Phasenverschiebungen in Abhängigkeit von der Frequenz sind in Tabelle 3 dargestellt. Um die Zeitkonstante aus der Amplitude der

Tabelle 3: Verschiedene Frequenzen und die dazu entstehende Amplitude der Spannung des Kondensators, U_C , und die zeitliche Phasenverschiebung zur Spannung $U(t)$.

f/Hz	$A(\omega)/\text{mV}$	$a/\mu\text{s}$
65,000	568,000	1520,000
80,000	536,000	1400,000
100,000	488,000	1320,000
250,000	270,000	760,000
400,000	178,000	540,000
650,000	113,000	340,000
800,000	92,000	290,000
1000,000	92,000	250,000
2500,000	30,000	110,000
4000,000	18,800	62,000
6500,000	11,700	38,000
8000,000	9,700	30,000
10 000,000	7,700	24,000

Kondensatorspannung errechnen zu können, wird eine lineare Regression (9) durchgeführt. Die x und y Werte dazu finden sich in Tabelle 4. In Abbildung 5 sind diese x und y Werte gegeneinander aufgetragen.

Das Inverse der Zeitkonstante wird wieder durch (7) und der Fehler durch (8) berechnet. Es ergibt sich $\frac{1}{RC} = (885,682 \pm 19,461) \frac{1}{\text{s}}$.

Tabelle 4: Der Kehrwert der Kreisfrequenz ω gegen die Wurzel aus dem Bruch in dessen Nenner die maximale Spannung durch die Amplitudenwerte von U_C zum Quadrat um eins subtrahiert werden.

$\frac{1}{\omega}/\mu\text{s}$	$\sqrt{\frac{1}{(\frac{U_0}{A(\omega)})^2 - 1}}$
2448,538	2,263
1989,437	1,709
1591,549	1,271
636,620	0,483
397,887	0,299
244,854	0,185
198,944	0,150
159,155	0,150
63,662	0,048
39,789	0,030
24,485	0,019
19,894	0,016
15,915	0,012

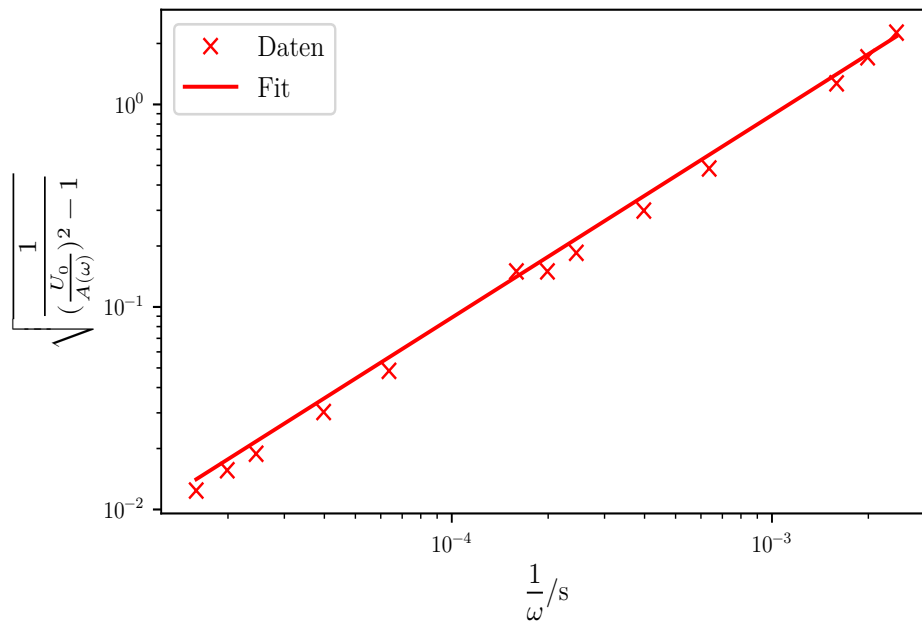


Abbildung 5: Auftragung der Wurzel aus dem Bruch in dessen Nenner die maximale Spannung durch die Amplitudenwerte von U_C zum Quadrat um eins subtrahiert werden gegen den Kehrwert der Kreisfrequenz. Dargestellt werden die Daten und der zugehörige Fit. Die Skala ist logarithmiert.

4.3 Bestimmung von RC über die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung

Um die Zeitkonstante zu berechnen, wird wieder eine lineare Regression benötigt. Die Gleichung (1) wird so umgestellt, dass die Steigung $m = \frac{1}{RC}$ ist:

$$-\frac{1}{\tan(\phi(\omega))} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\omega}. \quad (10)$$

Dann ist $x = \frac{1}{\omega}$ und $y = -\frac{1}{\tan(\phi(\omega))}$. RC kann somit wieder durch (7) bestimmt werden. Die Abstände der Nulldurchgänge der Spannung des Kondensators und der Spannung des Generators in Abhängigkeit von der Frequenz sind bereits in Tabelle 3 aufgelistet. Um die Zeitkonstante aus dieser Phasenverschiebung zu bestimmen, wird die lineare Regression (10) benötigt. Die x und y Werte befinden sich in Tabelle 5. Abbildung 6 stellt die Gerade der linearen Regression dar, deren Steigung das Inverse der Zeitkonstante ist.

Tabelle 5: Der Kehrwert der Kreisfrequenz gegen den negativen Kehrwert des Tangens der Phase, die sich durch die negative Division der zeitlichen Phasenverschiebung durch die Periodendauer multipliziert mit π ergibt.

$\frac{1}{\omega}/\mu\text{s}$	$-\frac{1}{\tan(\phi(\omega))}$
2448,538	3,118
1989,437	2,724
1591,549	2,272
636,620	1,471
397,887	1,240
244,854	1,201
198,944	1,120
159,155	1,000
63,662	0,854
39,789	1,013
24,485	1,019
19,894	1,065
15,915	1,065

Mittels (7) und (8) berechnet sich das Inverse der Zeitkonstante zu $\frac{1}{RC} = (873,015 \pm 26,684) \frac{1}{\text{s}}$.

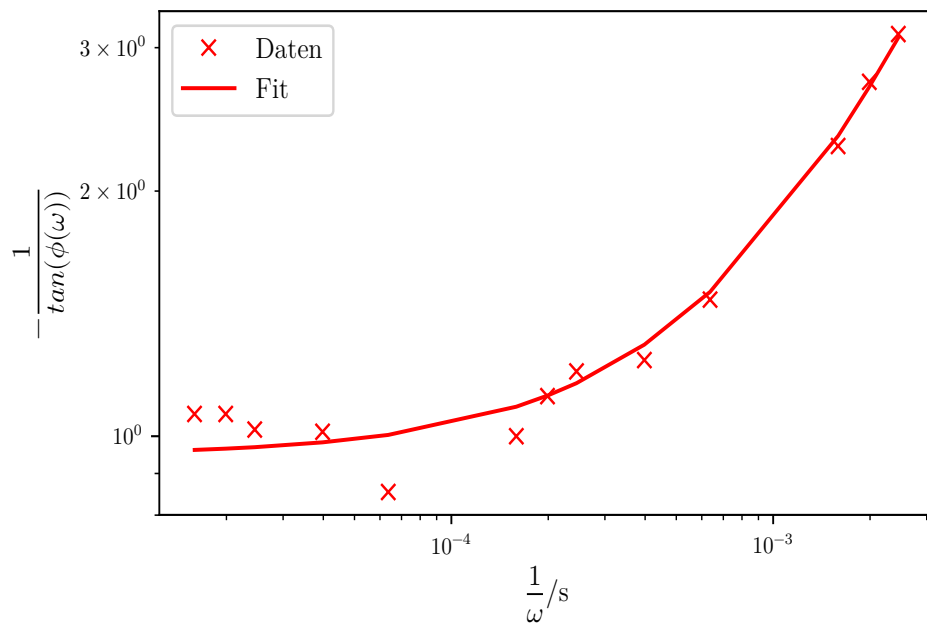


Abbildung 6: Auftragung des negativen Kehrwerts des Tangens der Phase, die sich durch die negative Division der zeitlichen Phasenverschiebung durch die Periodendauer multipliziert mit π ergibt gegen den Kehrwert der Kreisfrequenz. Dargestellt werden die Daten und der dazugehörige Fit. Die Skala ist logarithmiert.

4.4 Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phasenverschiebung

Die Werte, die zur Bestimmung der Abhängigkeit der Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ von der Phasenverschiebung ϕ nötig sind, befinden sich in Tabelle 6. Um die verschiedenen

Tabelle 6: Die Phasenverschiebung gegen die Amplitude der Spannung U_C geteilt durch die maximale Spannung U_0 .

ϕ/rad	$\frac{A(\omega)}{U_0}$
−0,310	0,915
−0,352	0,863
−0,415	0,786
−0,597	0,435
−0,679	0,287
−0,694	0,182
−0,729	0,148
−0,785	0,148
−0,864	0,048
−0,779	0,030
−0,776	0,019
−0,754	0,016
−0,754	0,012

errechneten Werte für die Zeitkonstante RC vergleichen zu können, wird für die in 4.1, 4.2 und 4.3 berechneten Werte in den folgenden Abbildungen 7, 8 und 9 die Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ als Radius und die Phase ϕ als Winkel dargestellt. Die rote Linie entspricht den berechneten Werten $\frac{A(\omega)}{U_0}$, die durch Einsetzen von ϕ in die Formel (2) bestimmt werden. Die grüne Linie entspricht der Theoriekurve, welche durch die Formel (1) mit den Werten für RC bestimmt wird.

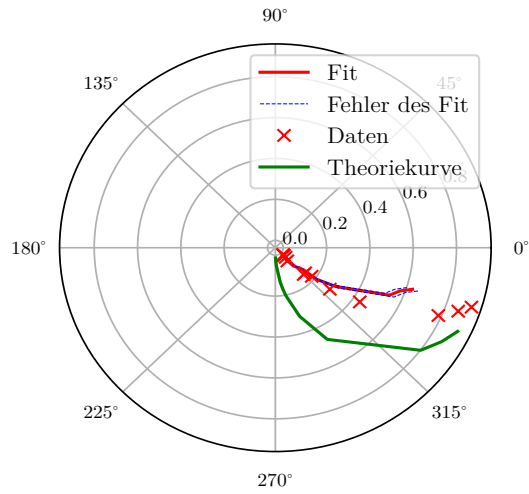


Abbildung 7: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.1 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

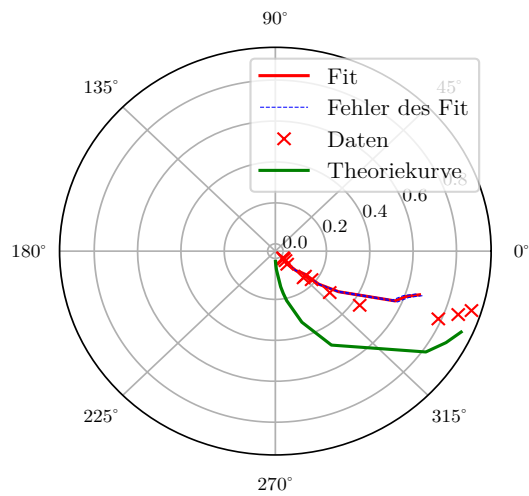


Abbildung 8: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.2 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

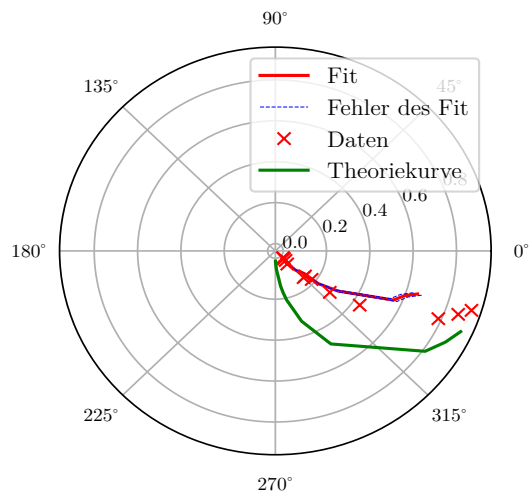


Abbildung 9: Abhängigkeit der Relativamplitude in Abhängigkeit von der Phase für die in 4.3 berechnete Zeitkonstante in einem Polarkoordinatensystem dargestellt. Es sind Daten, ein Fit, der Fehler des Fits und die Theoriekurve eingezeichnet.

4.5 Spannung als Integrator

Die folgenden Abbildungen zeigen die integrierte, sowie die zu integrierende Spannung. Dabei wird eine Sinusspannung angelegt. Die Kondensatorspannung wird dadurch zu einem Cosinus. Die Dreiecksspannung wird zu einer Funktion integriert, die einem Sinus ähnelt. Die Rechteckspannung integriert sich zur Dreiecksspannung.

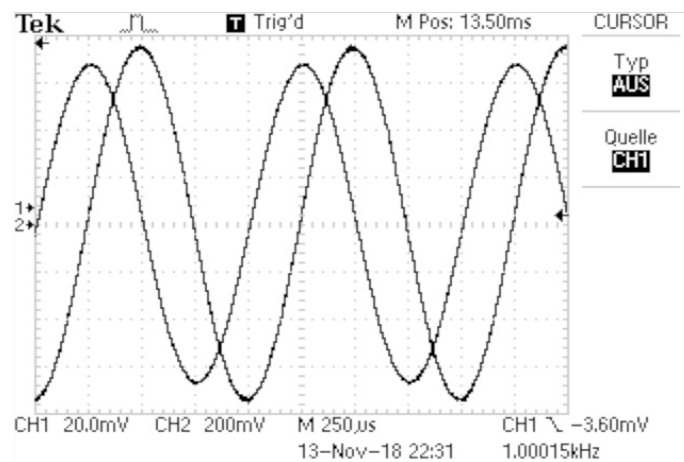


Abbildung 10: Aufnahme des Bildschirms des Oszilloskops bei eingestellter Sinusspannung.

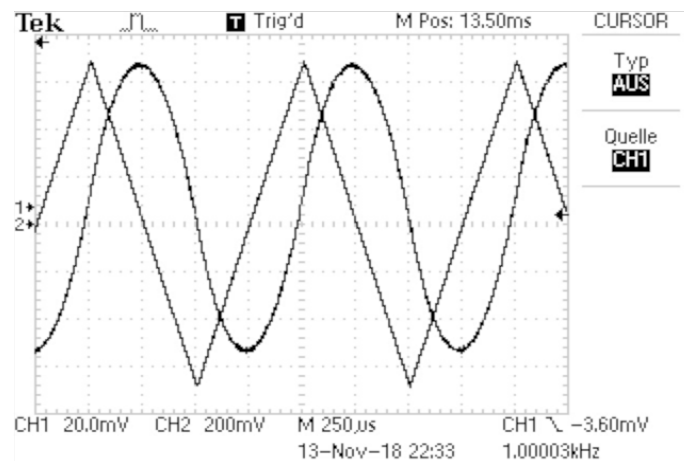


Abbildung 11: Aufnahme des Bildschirms des Oszilloskops bei eingestellter Dreiecksspannung.

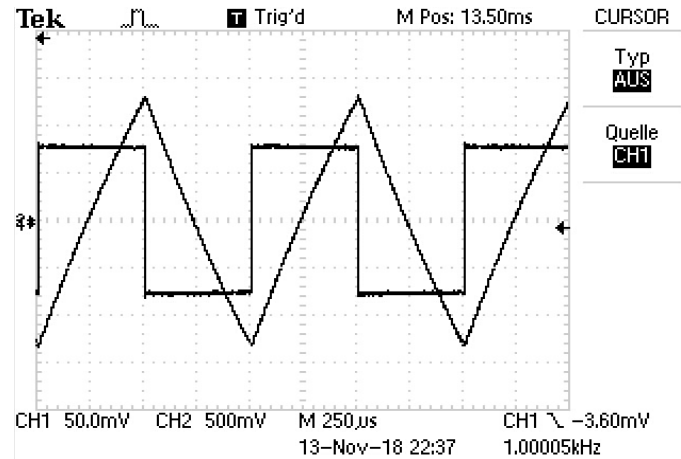


Abbildung 12: Aufnahme des Bildschirms des Oszilloskops bei eingestellter Rechteckspannung.

5 Diskussion

Die Auswertung der Funktionen ist als recht exakt zu bewerten.

Die gemessenen Werte ergeben nach der halblogarithmischen Auftragung einen Fit, der eine Steigung von $836,50 \frac{1}{s}$ hat. Der relative Fehler der linearen Regression liegt bei 6,15 %.

Im Abschnitt 4.2 ergibt sich nach der Umformung der Funktion (3) auch eine lineare Gleichung. Die Daten führen zu einer linearen Regression, deren Steigung bei $885,68 \frac{1}{s}$ liegt. Der relative Fehler liegt bei 2,197 %. Auffällig ist dabei, dass die Werte für 10 Hz und 20 Hz rausgelassen werden mussten, um ein realistisches Ergebnis zu bekommen. Auch zwei weitere Werte weichen auffällig stark vom Fit ab. Die Ursache dafür könnte sein, dass der Wert, der für die maximale Amplitude U_0 gewählt wurde, nach Anleitung demselben Wert entsprechen sollte, der als erstes gemessen wurde. Dies führt aber dazu, dass durch null geteilt wird. Also muss ein Wert gewählt werden, der etwas größer ist. Wäre dieser Wert exakt bestimmt worden, würden vermutlich auch die rausgenommenen Werte sinnvoll auf dem Fit liegen. Somit wird angenommen, dass der Wert bei mindestens 621 mV liegt.

Im Abschnitt 4.3 wird ein Wert von $873,02 \frac{1}{s}$ für die inverse Zeitkonstante $1/RC$ bei einem relativen Fehler von 3,056 % festgestellt. Alle drei Ergebnisse überschneiden sich in einem Bereich von $(877,09 \pm 10,92) \frac{1}{s}$. Somit ist eine systematische Abweichung nicht zu erkennen. Die Werte für $1/RC$ im Abschnitt 4.1 und 4.2 weichen dennoch um 5,55 % voneinander ab. Dieser Fehler könnte durch den nicht betrachteten Innenwiderstand des Sinusfrequenzgenerators entstanden sein. Der Wert dieses Widerstands liegt laut Anleitung bei 600Ω [1].

Die Funktion der Kondensatorspannung U_C als Integrator der Spannung $U(t)$ scheint sich anhand der ermittelten Schaubilder zu bestätigen. Die annähernde Korrektheit lässt sich zumindest gut an den Schaubildern erkennen, indem die Abhängigkeit der Hoch-

und Tiefpunkte von den Nullstellen der jeweils anderen Funktionen betrachtet wird. Die Abhängigkeit der Relativamplitude zur Phase ϕ lässt sich in den Polarkoordinatensystemen gut ablesen. Dabei ist die Eigenschaft von ϕ als *arctan*-Funktion gut zu erkennen, da die gemessenen Werte den Werten der Theoriekurve eindeutig ähneln, lediglich phasenverschoben sind.

Literatur

- [1] TU Dortmund. „Versuch 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises“. In: (2018). URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.