Blatt 2

Nr. 1

Da in allen Aufgabenteilen mit zwei Würfeln gewürfelt wurde. Somit ergibt sich dann als Wahrscheinlichkeit für einen einzigen beliebigen Wurf mit einem Würfel $P(\text{ein Würfel, beliebiges Ergebnis}) = \frac{1}{6}$ und für einen Wurf mit zwei Würfeln ergibt sich dann $P(\text{zwei Würfel, beliebiges Ergebnis}) = \frac{1}{36}$. Diese Annahme wurde in den folgenden Teilaufgaben benutzt.

a)
$$P(W_\text{rot} + W_\text{blau} = 9) =$$
$$P(W_\text{rot} = 3, W_\text{blau} = 6) + P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 5) + P(W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 4) + P(W_\text{rot} = 6, W_\text{blau} = 3)$$
$$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

b)
$$P(W_\text{rot} + W_\text{blau} \geq 9) =$$
$$P(W_\text{rot} = 3, W_\text{blau} = 6) + P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 6) + P(W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 6) + P(W_\text{rot} = 6, W_\text{blau} = 6)$$
$$P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 5) + P(W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 5) + P(W_\text{rot} = 6, W_\text{blau} = 5) +$$
$$P(W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 4) + P(W_\text{rot} = 6, W_\text{blau} = 4) +$$
$$P(W_\text{rot} = 6, W_\text{blau} = 3)$$
$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

c) $P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 5 \vee W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 4) =$
$$P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 5) + P(W_\text{rot} = 5, W_\text{blau} = 4)$$
$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P(W_\text{rot} = 4, W_\text{blau} = 5) = \frac{1}{36}$

In den folgenden Aufgaben steht schon fest, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, insofern wird dann quasi nur noch ein einzelner Wurf des blauen Würfels betrachtet.

e) $P(W_\text{rot} + W_\text{blau} = 9)$
$$= P(W_\text{blau} = 5)$$
$$= \frac{1}{6}$$

f) $P(W\text{rot} + W\text{blau} \geq 9) \=

P(W\text{blau} = 5) + P(W\text{blau} = 6) \= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

g) $P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5)$
$= P(W_{\text{blau}} = 5)$
$= \frac{1}{6}$

Aufgabe 2

Bestimmung der Normalisierungskonstante

Gegeben war

$$f(v) = N \cdot exp\left(\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) 4\pi v^2 \,.$$

Mit der Bedingung

$$\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v = 1$$

folgt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi N} &= \int_0^\infty \exp\left(\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) v^2\,\mathrm{d}v \\
\frac{1}{4\pi N} &= -2k_\mathrm{B}T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\int_0^\infty \exp\left(\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}v \\
\frac{1}{4\pi N} &= -2k_\mathrm{B}T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}\int_0^\infty \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u \\
\frac{1}{4\pi N} &= -2k_\mathrm{B}T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\frac{1}{N} &= 8\pi k_\mathrm{B}T\sqrt{\frac{\pi k_\mathrm{B}t}{2}}\,\frac{1}{2m^{3/2}} = \left(\frac{2\pi k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{3/2} \\
N &= \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2a)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m entspricht dem Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Geschwindigkeit. Die erste Ableitung muss also null sein:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} &= 4\pi N v\exp\left(\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\left(2 - \frac{mv^2}{k_\mathrm{B}T}\right) \\
\rightarrow 2 &= \frac{mv^2}{k_\mathrm{B}T} \\
\rightarrow v^2 &= \frac{2k_\mathrm{B}T}{m} \\
\rightarrow v_m &= \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}
\end{aligned}$$

Damit kann man $f(v)$ umschreiben zu:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_m^3}v^2\exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right)$$

Aufgabe 2b)

Gesucht ist der Mittelwert $\langle v\rangle$ der Geschwindigkeit.

$$
\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_m^3} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_m^3} \frac{v_m^4}{2} \\
&= \frac{2 v_m}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2c)

Gesucht ist der Median $v_{0,5}$ der Geschwindigkeitsverteilung. Dieser kann berechnet werden durch

$$\frac{1}{2} = \int_0^{v_{0,5}} f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^{v_{0,5}} v^2 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) \mathrm{d}v$$

Umformen und die Substitution $u = \frac{v}{v_m}$ ergibt

$$1 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_{0,5}}{v_m}} u^2 exp(-u^2)\,\mathrm{d}u$$

In [1]:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
from uncertainties import ufloat

#Definition der Funktion, Koeffizient auf andere Seite gebracht
def func(u):
    return u**2 *np.exp(-u**2)

v = np.linspace(0, 10, 10**5) # Geschwindigkeiten v werden erzeugt

solution =  np.sqrt(np.pi)/8 #linke Seite
g2 = np.empty(1) #leeres Array für for-loop erzeugen (nicht schön gelöst. aber f
unktioniert.)

# mit quad Funktion aus scipy.integrate wird die Funktion numerisch integriert u
nd es wird ein Array g mit
# dem Integral über die Werte v befüllt
for i in range(len(v)):
    g = np.append(g2,quad(func, 0, v[i])[0])
    g2 = g
g = np.delete(g, 0) #Die erste Komponente des Hilfsarray wird gelöscht

v_bigger_than_median = v[g > solution] # alle v die größer als der Median sind
v_smaller_than_median = v[g < solution] # alle v die kleiner als der Median sind
v_median_array = np.array([v_bigger_than_median[0], v_smaller_than_median[-1]])
#Mittelwert zwischen den beiden Werten wird gebildet
v_median = ufloat(v_median_array.mean(), v_median_array.std())
print(f"Die numerisch ermittelte Grenze beträgt: {v_median}")
```

```
Die numerisch ermittelte Grenze beträgt: 1.08766+/-0.00005
```

Dieser Wert muss aufgrund der Grenzen Änderung noch mit v_m multipliziert werden. Es ergibt sich also als Median ein ungefährer Wert von

$$v_{0.5} = 1.08766 \cdot v_m.$$

Aufgabe 2d)

Gesucht wird die volle Breite auf halber Höhe der Verteilung (v_{FWHM}).

Dabei gilt

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{f(v_m)}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{f(v)}{f(v_m)} \\ \frac{1}{2} &= \frac{v}{v_m}^2 \exp\left(-\left(\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Substituiert man $\left(\frac{v}{v_m}\right)^2$ zu u ergibt sich die Form

$$u \cdot exp(-u) = \frac{1}{2e}.$$

Die Lösung dieses Formalismus lässt sich mittels der Lambertschen W-Funktion lösen. Diese ist definiert als

$$z = W(z) \cdot exp(W(z))$$

und gibt uns somit eine Lösung zu unserem Problem. Es ergibt sich dann, dass

$$u = -W_k\left(-\frac{1}{2e}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

ist. Somit ist dann natürlich

$$v = \sqrt{-W_k\left(-\frac{1}{2e}\right)}\, v_m.$$

Dies sind also die Stellen an denen die Funktion auf der Hälfte ihrer Werte landet. Es ergeben sich zwei analytische Lösungen für u.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.231961 \\ u_2 &= 2.67835 \end{aligned}$$

Mit der Differenz dieser beiden Werte kommen wir dann auf unsere volle Breite auf halber Höhe.

$$v = \left(\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}\right) \cdot v_m = 1.155 \cdot v_m$$

Aufgabe 2e)

Gesucht ist die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v. Dafür benötigen wir den Mittelwert des Geschwindigkeit Quadrats $\langle v^2 \rangle$ der Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}\,v_m^3} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}\,v_m^3} \frac{3\sqrt{\pi}v_m^5}{8} \\ &= \frac{3v_m^2}{2}\end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist als

$$\sigma_\mathrm{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$$

definiert.

Somit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\sigma_\mathrm{v} &= \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \\ &= \sqrt{\frac{3v_m^2}{2} - \frac{4v_m^2}{\pi}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}}\right) v_m\end{aligned}$$