

Blatt 2

Nr. 1

Da in allen Aufgabenteilen mit zwei Würfeln gewürfelt wurde. Somit ergibt sich dann als Wahrscheinlichkeit für einen einzigen beliebigen Wurf mit einem Würfel $P(\text{ein Würfel, beliebiges Ergebnis}) = \frac{1}{6}$ und für einen Wurf mit zwei Würfeln ergibt sich dann $P(\text{zwei Würfel, beliebiges Ergebnis}) = \frac{1}{36}$. Diese Annahme wurde in den folgenden Teilaufgaben benutzt.

a)

$$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9) =$$

$$P(W_{\text{rot}} = 3, W_{\text{blau}} = 6) + P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 4) + P(W_{\text{rot}} = 6, W_{\text{blau}} = 3)$$

$$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

b)

$$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) =$$

$$P(W_{\text{rot}} = 3, W_{\text{blau}} = 6) + P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 6) + P(W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 6) + P(W_{\text{rot}} = 6, W_{\text{blau}} = 6) \cdot$$

$$P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 6, W_{\text{blau}} = 5) +$$

$$P(W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 4) + P(W_{\text{rot}} = 6, W_{\text{blau}} = 4) +$$

$$P(W_{\text{rot}} = 6, W_{\text{blau}} = 3)$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

c)

$$P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5 \vee W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 4) =$$

$$P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{rot}} = 5, W_{\text{blau}} = 4)$$

$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d)

$$P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5) = \frac{1}{36}$$

In den folgenden Aufgaben steht schon fest, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, insofern wird dann quasi nur noch ein einzelner Wurf des blauen Würfels betrachtet.

e)

$$P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9)$$

$$= P(W_{\text{blau}} = 5)$$

$$= \frac{1}{6}$$

f) $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9) =$

$$P(W_{\text{blau}} = 5) + P(W_{\text{blau}} = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g)} \quad & P(W_{\text{rot}} = 4, W_{\text{blau}} = 5) \\ &= P(W_{\text{blau}} = 5) \\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmung der Normalisierungskonstante

Gegeben war

$$f(v) = N \cdot \exp\left(\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2.$$

Mit der Bedingung

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi N} &= \int_0^\infty \exp\left(\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^2 dv \\ \frac{1}{4\pi N} &= -2k_B T \frac{d}{dm} \int_0^\infty \exp\left(\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv \\ \frac{1}{4\pi N} &= -2k_B T \frac{d}{dm} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \int_0^\infty \exp(-u^2) du \\ \frac{1}{4\pi N} &= -2k_B T \frac{d}{dm} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \frac{1}{N} &= 8\pi k_B T \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2}} \frac{1}{2m^{3/2}} = \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2} \\ N &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2a)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m entspricht dem Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Geschwindigkeit. Die erste Ableitung muss also null sein:

$$\begin{aligned} \frac{df(v)}{dv} &= 4\pi N v \exp\left(\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \left(2 - \frac{mv^2}{k_B T}\right) \\ \rightarrow 2 &= \frac{mv^2}{k_B T} \\ \rightarrow v^2 &= \frac{2k_B T}{m} \\ \rightarrow v_m &= \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \end{aligned}$$

Damit kann man $f(v)$ umschreiben zu:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_m^3} v^2 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right)$$

Aufgabe 2b)

Gesucht ist der Mittelwert $\langle v \rangle$ der Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned}
 \langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v f(v) dv \\
 &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) dv \\
 &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \frac{v_m^4}{2} \\
 &= \frac{2v_m}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2c)

Gesucht ist der Median $v_{0,5}$ der Geschwindigkeitsverteilung. Dieser kann berechnet werden durch

$$\frac{1}{2} = \int_0^{v_{0,5}} f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^{v_{0,5}} v^2 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) dv$$

Umformungen ergeben

$$1 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_{0,5}}{v_m}} u^2 \exp(-u^2) du$$

In [1]:

```

import numpy as np
from scipy.integrate import quad
from uncertainties import ufloat

#Definition der Funktion, Koeffizient auf andere Seite gebracht
def func(u):
    return u**2 * np.exp(-u**2)

v = np.linspace(0, 10, 10**5) # Geschwindigkeiten v werden erzeugt

solution = np.sqrt(np.pi)/8 #linke Seite
g2 = np.empty(1) #leeres Array für for-loop erzeugen (nicht schön gelöst. aber f
unktioniert.)

# mit quad Funktion aus scipy.integrate wird die Funktion numerisch integriert u
nd es wird ein Array g mit
# dem Integral über die Werte v befüllt
for i in range(len(v)):
    g = np.append(g2, quad(func, 0, v[i])[0])
    g2 = g
g = np.delete(g, 0) #Die erste Komponente des Hilfsarray wird gelöscht

v_bigger_than_median = v[g > solution] # alle v die größer als der Median sind
v_smaller_than_median = v[g < solution] # alle v die kleiner als der Median sind
v_median_array = np.array([v_bigger_than_median[0], v_smaller_than_median[-1]])
#Mittelwert zwischen den beiden Werten wird gebildet
v_median = ufloat(v_median_array.mean(), v_median_array.std())
print(f"Die numerisch ermittelte Grenze beträgt: {v_median}")

```

Die numerisch ermittelte Grenze beträgt: 1.08766+/-0.00005

Dieser Wert muss aufgrund der Grenzen Änderung noch mit v_m multipliziert werden. Es ergibt sich also als Median ein ungefährender Wert von

$$v_{0.5} = 1.08766 \cdot v_m.$$

Aufgabe 2d)

Gesucht wird die volle Breite auf halber Höhe der Verteilung (v_{FWHM}).

Dabei gilt

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{f(v_m)}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{f(v)}{f(v_m)} \\ \frac{1}{2} &= \frac{v^2}{v_m^2} \exp\left(-\left(\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Substituiert man $\frac{v}{v_m}^2$ zu u ergibt sich die Form

$$u \cdot \exp(-u) = \frac{1}{2e}.$$

Die Lösung dieses Formalismus lässt sich mittels der Lambertschen W-Funktion lösen. Diese ist definiert als

$$z = W(z) \cdot \exp(W(z))$$

und gibt uns somit eine Lösung zu unserem Problem. Es ergibt sich dann, dass

$$u = -W_k\left(-\frac{1}{2e}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

ist. Somit ist dann natürlich

$$v = \sqrt{-W_k\left(-\frac{1}{2e}\right)} v_m.$$

Dies sind also die Stellen an denen die Funktion auf der Hälfte ihrer Werte landet. Es ergeben sich zwei analytische Lösungen für u .

$$u_1 = 0.231961$$

$$u_2 = 2.67835$$

Mit der Differenz dieser beiden Werte kommen wir dann auf unsere volle Breite auf halber Höhe.

$$v = (\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}) \cdot v_m = 1.155 \cdot v_m$$

Aufgabe 2e)

Gesucht ist die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v . Dafür benötigen wir den Mittelwert des Geschwindigkeit Quadrats $\langle v^2 \rangle$ der Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \frac{3\sqrt{\pi} v_m^5}{8} \\ &= \frac{3v_m^2}{2}\end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist als

$$\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$$

definiert.

Somit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \\ &= \sqrt{\frac{3v_m^2}{2} - \frac{4v_m^2}{\pi}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}}\right) v_m\end{aligned}$$