Blatt 12

33

Hypothese: gleiche Verteilung

$\sum_{i=1}^{r} p_1 = 1 \quad , \quad N = \sum_{i=1}^{r} n_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{r} m_i$

a)

Die Zählraten in den einzelnen bins folgen einer Poissonverteilung

PDF: $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ Nullhypothese: für beide gleich

Für das erste Histogramm: $Np_i = \lambda \quad , \quad n_i = k$

$$\Rightarrow P_{Np_i}(n_i) = \frac{e^{-Np_i} (Np_i)^{n_i}}{n_i!}$$

Für das zweite Histogramm: $Mp_i = \lambda, \quad m_i = k$

$$\Rightarrow P_{Mp_i}(n_i) = \frac{e^{-Mp_i} (Mp_i)^{m_i}}{m_i!}$$

b)

Likelihoodfunktion:

$$L(p_i, m_i, n_i) = \frac{e^{-Np_i} (Np_i)^{n_i}}{n_i!} \cdot \frac{e^{-Mp_i} (Mp_i)^{m_i}}{m_i!} = \frac{e^{-p_i(N+M)} (p_i)^{n_i+m_i} N^{n_i} M^{m_i}}{n_i! \; m_i!}$$

Schätzer, der die Likelihood maximiert:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} \overset{!}{=} 0 = -\frac{(N+M) e^{-p_i(N+M)} (p_i)^{n_i+m_i} N^{n_i} M^{m_i}}{n_i! \; m_i!} + \frac{(n_i+m_i) e^{-p_i(N+M)} (p_i)^{n_i+m_i-1} N^{n_i} M^{m_i}}{n_i! \; m_i!}$$

$$= \frac{e^{-p_i(N+M)} N^{n_i} M^{m_i}}{n_i! \; m_i!} (p_i)^{n_i+m_i} \left(-(N+M) + \frac{(n_i+m_i)}{p_i} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{n_i+m_i}{N+M} = p_i$$

c)

χ^2 - Statistik

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\sigma_i^{\text{Modell}})^2}$$

y_i: gemessene Daten

$f(x_i)$: Verteilungsfkt. des Modells

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - M\hat{p}_i)^2}{M\hat{p}_i}$$

(d)

Die χ^2 - Verteilung hat $r-1$ Freiheitsgrade, da ein p_i durch die Normierung

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

schon festgelegt ist. Für kleine Bininhalte folgt die Teststatistik keiner χ^2 - Verteilung, da dann die Poisson-Verteilung nicht mehr gut durch eine Gaußverteilung beschrieben wird.

(e)

$$\chi^2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{r} \frac{(Nm_i - Mn_i)^2}{n_i + m_i} \quad , \quad N = \sum_{i=1}^{r} n_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

$$N = 632 \qquad M = 81$$

$$\Rightarrow \chi^2 = \frac{1}{632 \cdot 81} \left(\frac{26569}{14} + \frac{28975}{56} + \frac{64208169}{363} \right)$$

$$\simeq 9{,}429$$

Lese aus Tabelle aus der Vorlesung für 2 Freiheitsgrade ab:

$\alpha = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 = 4{,}61$

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 = 5{,}99$

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 = 9{,}21$

Ab einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ wird die Nullhyhothese angenommen, denn dann ist

$$\chi^2_{\text{Verteilung}} > \chi^2_{\text{Stichprobe}}$$