(26)

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & 0 \le x \le b \\ 0 & x < 0 \quad , x > b \end{cases}$$

a)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n ; b) = L(b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, b)$$

$$L = \frac{1}{b^n} \mathbb{1}(x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, b])$$

$$= \frac{1}{b^n} \mathbb{1}(\max_i \{x_i\} \le b)$$

Der Schätzer für b ist dann

$$\hat{b} = \underset{b}{\operatorname{argmax}}\, L = \max_i \{i\}$$

b)

$\hat{b}$ erwartungstreu?

$$P_b(x_i \le x) = \int_0^x \frac{1}{b}\, dx = \frac{x}{b} \qquad , \text{falls } x \le b$$

Dann ist die W'keit, dass das Maximum aller xi kleiner als ein festes x ist

$$P_b(\max_i \{x_i\} \le x) = \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow P_b(\max_i \{x_i\} \ge x) = 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

Es gilt: $E(X) = \int_{\mathbb{R}} P(X \ge x)\, dx$

$$E(\hat{b}) = \int_0^b dx \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^n\right) = x \Big|_0^b - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{b^n} \Big|_0^b = \frac{n}{n+1} b$$

$\hat{b}$ ist damit nicht erwartungstreu. Korrigiert werden kann das durch

$$\hat{b}' = \frac{n+1}{n} \max_i \{x_i\}$$

Dann ist $E(\hat{b}) = b$.