Blatt 9

(22)

x_1 mit σ_{x_1} und x_2 mit σ_{x_2} gemessen, Keine Korrelation.

(a)

$$x = az + b$$

Berechnung mit gewichteter Methode der kleinsten Quadrate:

Lösungen für die Geradengleichung sind:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{x}$$

$$V(\hat{a}) = (A^T W A)^{-1} \qquad \text{Kovarianzmatrix}$$

Dabei ist

$$W = (V(\vec{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \qquad \text{Fehler ohne Korrelation}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$$

Berechne nun

$$A^T W A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 & 1/\sigma_{x_2}^2 \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 + \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} & \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} & \frac{z_1^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S_1 & S_z \\ S_z & S_{zz} \end{pmatrix}$$

$$A^T W \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{z_2}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{x_2}{\sigma_{x_2}^2} \\ \frac{z_1 x_2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{z_2 x_1}{\sigma_{x_2}^2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S_x \\ S_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{a}} = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \begin{pmatrix} S_{zz} & -S_z \\ -S_z & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left(S_{zz} S_x - S_z S_{xz} \right) = \frac{S_{zz} S_x - S_z S_{xz}}{S_1 S_{zz} - S_z^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-S_z S_x + S_1 S_{xz}}{S_1 S_{zz} - S_z^2}$$

Damit ergibt sich die Geradengleichung

$$x = b + az = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left(S_{zz} S_x - S_z S_{xz} + z \left(S_1 S_{xz} - S_z S_x \right) \right)$$

Die Kovarianzmatrix ist:

$$V(\vec{a}) = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \begin{pmatrix} S_{zz} & -S_z \\ -S_z & S_1 \end{pmatrix}$$

Der Korrelationskoeffizient ist:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{-S_z}{\sqrt{S_{zz} S_1}}$$

b)

Einsetzen in Geradengleichung:

$$x_3 = \frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left((-S_z S_x + S_1 S_{xz}) z_3 + S_{zz} S_x - S_z S_{xz} \right)$$

Fehler folgt aus Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right|^2 \sigma_a^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right|^2 \sigma_b^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial b} \operatorname{cov}(a, b)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{S_1 S_{zz} - S_z^2} \left(z_3^2 S_1 + S_{zz} - 2 z_3 S_z \right)}$$

c)

Ohne Korrelation ist $S_z = 0$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{x_3} = \sqrt{\frac{z_3^2 S_1 + S_{zz}}{S_1 S_{zz}}} = \sqrt{\frac{z_3^2}{S_{zz}} + \frac{1}{S_1}}$$

(23)

(a) Testen, ob $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ ist. Dann müsste gelten:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu$$
$$= \frac{1}{n} n\mu$$
$$= \mu$$

$\Rightarrow \bar{X}$ ist erwartungstreu für μ.

(b) $E((\bar{X}-\mu)^2) = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

erster Teil: $Var(\bar{X}) = E((\bar{X}-\mu))^2$ Entspricht der Definition der Varianz mit $X = \bar{X}$

zweiter Teil:

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{1}{n^2} n \, Var(X)$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

(c) $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ erwartungstreue Schätzfunktion für σ^2 ?

$$E(S_0^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E((X_i-\mu)^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

S_0^2 ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

d) $S_1'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ erwartungstreue Schätzfunktion für σ^2?

$$E(S_1'^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu - (\bar{X} - \mu))^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left((x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right)\right)$$

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x}-\mu)\, n\, (\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E((x_i-\mu)^2) - 2E((\bar{x}-\mu)^2) + E((\bar{x}-\mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - Var(\bar{x})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 \neq \sigma^2$$

S_1' ist also nicht erwartungstreu für σ^2.

Erwartungstreu ist hingegen $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$:

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum \left((x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n-1} \sum (x_i-\mu)^2 - \frac{2n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2 + \frac{n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n-1} \sum (x_i-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{x}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum Var(x_i) - \frac{n}{n-1} Var(\bar{x})$$

$$= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2$$

$$= \frac{n-1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2 \quad \square$$