In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from scipy import stats
import math
from sympy.solvers import solve
from sympy import Symbol, log, exp, diff
```

Nr. 3a)

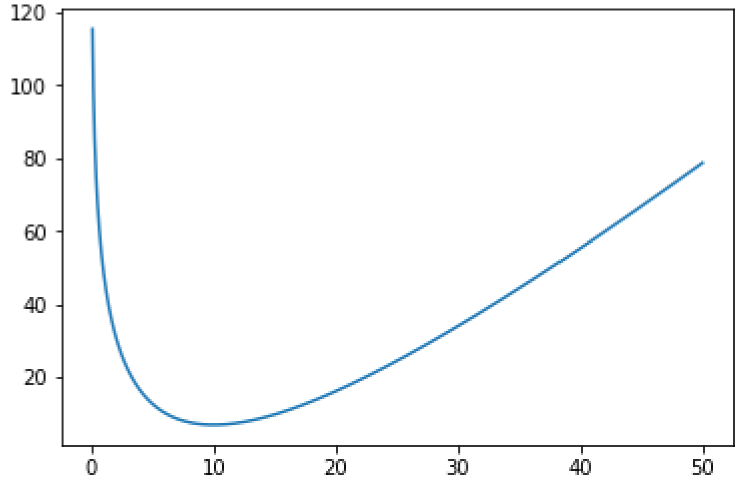
Die Funktion ist im folgenden berechnet und graphisch dargestellt worden. Sie lautet:

$$-ln(L(\lambda)) = -\sum_{i=1}^{n} ln(f(x_i|\lambda))$$

$$= -ln\left(\frac{\lambda^{13}e^{-\lambda}}{13!}\right) - ln\left(\frac{\lambda^{8}e^{-\lambda}}{8!}\right) - ln\left(\frac{\lambda^{9}e^{-\lambda}}{9!}\right)$$

In [2]:

```
p = np.linspace(0.1, 50, 2000)
def func(x):
    return - np.log(x**13 * np.exp(-x)/math.factorial(13))- np.log(x**8 *np.exp(
-x)/math.factorial(8)) - np.log(x**9 * np.exp(-x)/math.factorial(9))

y = func(p)
plt.plot(p, y)
None
```



b)

Hier soll nun die Ableitung und der Wert von λ für das Minimum bestimmt werden. Dafür haben wir die Ableitung erstmal allgemein bestimmt.

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial(-ln(L(\lambda)))}{\partial\lambda}$$

$$= \frac{\partial(-\sum_{i=1}^{n} ln(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}) - \lambda)}{\partial\lambda}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i!}{\lambda^{x_i}})(x_i\frac{\lambda^{x_i-1}}{x_i!}) - 1$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\lambda} - 1)$$

$$\iff -\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\lambda} = 3$$

$$\iff -\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{3} = \lambda$$

Damit gilt in diesem Fall $\lambda = 10$.

c)

Hier sollen die Werte von λ bestimmt werden, für die sich $-ln\mathcal{L}_{max} + \frac{1}{2}$, $-ln\mathcal{L}_{max} + 2$ und $-ln\mathcal{L}_{max} + \frac{9}{2}$ ergeben.

In [3]:

```
L_max = func(10)
print(f"Der Wert -ln L_max beträgt {L_max}.")
```

```
Der Wert -ln L_max beträgt 6.881041446128772.
```

In [4]:

```
# Hier nur den Ansatz. Sympy brauchte ewig zum durchlaufen, vielleicht haben wir
was falsch gemacht, vielleicht ist unser Rechner aber auch einfach nur nicht gut
genug. Deshalb hier nur die Ansätze bei c) und d). Die Idee wird denk ich klar.
#x = Symbol('x')

#x2 = solve(-1/2 -L_max -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-
x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), x)
#x3 = solve(-2 -L_max -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-
x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), x)
#x4 = solve(-9/2 -L_max -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-
x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), x)
```

Die Werte, die sich ergeben entsprechen den σ Werten. σ_1 ist bei dem Wert mit 1/2 erreicht, σ_2 bei 2 und σ_3 bei 9.

d)

In [5]:

```
#z = p
#yTaylor = diff(lambda x: -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), 1, 0) + diff(lambda x: -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), 1, 1) + 1/2* diff(lambda x: -log(x**13 * exp(-x)/math.factorial(13))-log(x**8 *exp(-x)/math.factorial(8))-log(x**9 * exp(-x)/math.factorial(9)), 1, 2)

#plt.plot(p, yTaylor, label="Taylorreihe")
#plt.plot(p, y, label="-ln(L)")
```

Die Näherung passt im Bereich von einem σ sehr gut. In diesem Bereich könnte die Taylorreihe gut genutzt werden.

4)

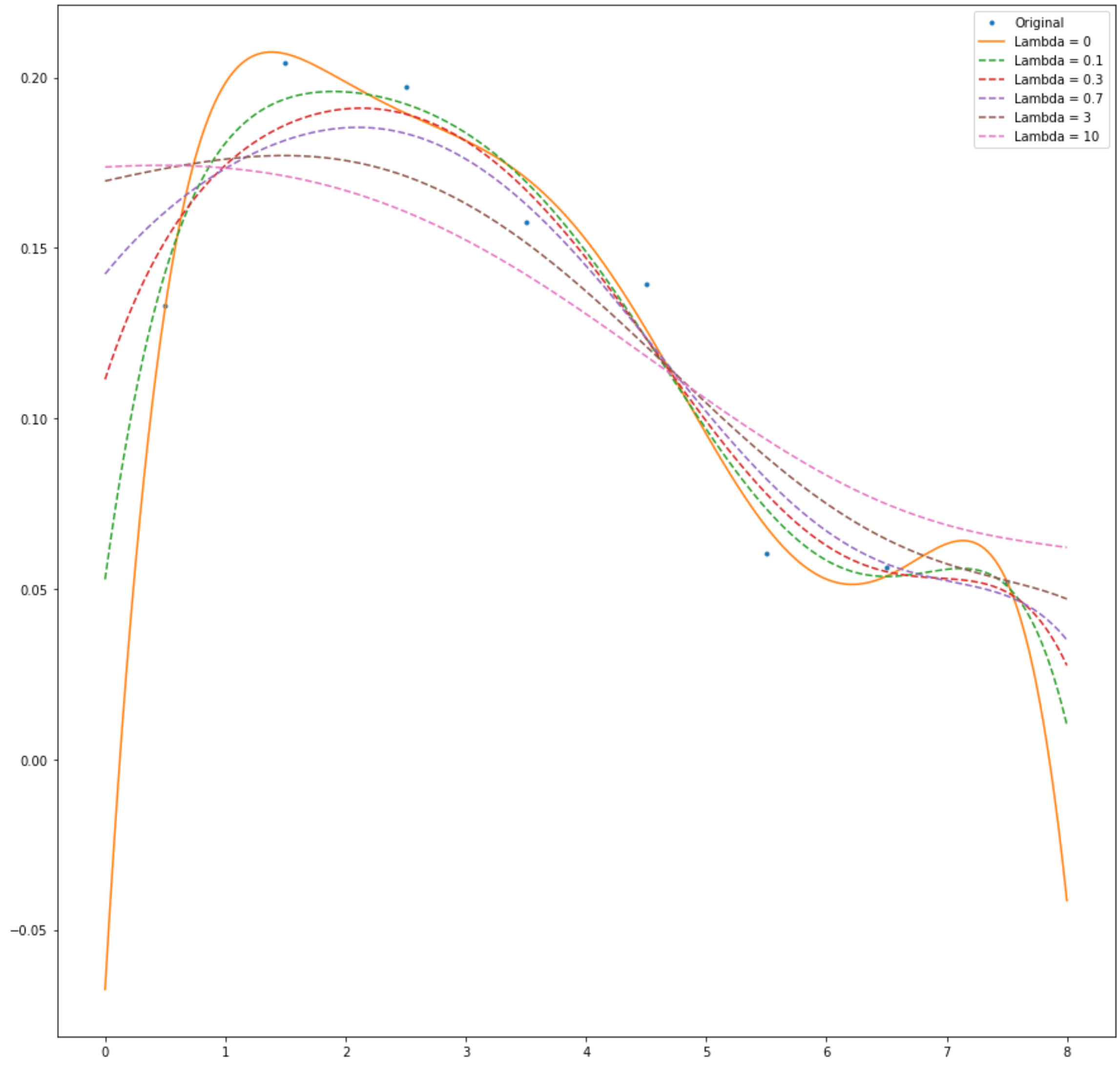
In [6]:

```
x, y= np.genfromtxt("aufg_a.csv", delimiter=",", unpack=True)
x = np.delete(x, (0), axis=0)
y = np.delete(y, (0), axis=0)
```

In [7]:

```
#a)
def func(x, a):
    return x**6 *a[6] + x**5 *a[5] + x**4 *a[4] + x**3 *a[3] + x**2 *a[2] + x**1
*a[1] + x**0 *a[0]
A = np.array([np.ones(len(x)), x, x**2, x**3, x**4, x**5, x**6]).T
a = np.linalg.inv(A.T@A) @ A.T @ y
print("Resultierende Koeffizienten für Lambda = 0: ", a)
x_new = np.linspace(0, 8, 2000)
y_new = func(x_new, a)
plt.figure(figsize=[15,15])
plt.plot(x, y, ".", label="Original")
plt.plot(x_new, y_new, label="Lambda = 0")

C = np.array([[-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, -2, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
              [0, 1, -2, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, -2, 1, 0, 0, 0],
             [0, 0, 0, 1, -2, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, -2, 1, 0],
             [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1]])

lamda = [0.1, 0.3, 0.7, 3, 10]

for i in lamda:
    A = np.array([np.ones(len(x)), x, x**2, x**3, x**4, x**5, x**6]).T
    a = np.linalg.inv(A.T @ A + i*(C@A).T @(C@A)) @ A.T @ y
    print(f"Resultierende Koeffizienten für Lambda = {i}: ", a)
    x_new = np.linspace(0, 8, 2000)
    y_new = func(x_new, a)

    plt.plot(x_new, y_new, "--", label=f"Lambda = {i}")

plt.legend()
None
```

```
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 0:  [-6.74453270e-02  6.096
09038e-01 -5.13748213e-01  2.10566521e-01
 -4.52007751e-02  4.78568049e-03 -1.96288196e-04]
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 0.1:  [ 5.27965881e-02  2.5
9531150e-01 -1.93231287e-01  7.69667253e-02
 -1.71628071e-02  1.90376484e-03 -8.10349704e-05]
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 0.3:  [ 1.11464649e-01  1.0
7755242e-01 -6.42970516e-02  2.49315776e-02
 -6.33557735e-03  7.89265583e-04 -3.62702783e-05]
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 0.7:  [ 1.42378399e-01  4.3
6794604e-02 -1.71856910e-02  6.46195657e-03
 -2.35843750e-03  3.58573783e-04 -1.81387872e-05]
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 3:  [ 1.69656309e-01  7.967
27958e-03 -1.06348501e-03 -1.07152882e-04
 -4.91755883e-04  1.07573168e-04 -6.00485672e-06]
Resultierende Koeffizienten für Lambda = 10:  [ 1.73753418e-01  2.10
097394e-03 -2.09778443e-03 -1.88380412e-04
 -1.43934178e-04  3.94085783e-05 -2.28679067e-06]
```



In [8]:

```
#c)
x = np.genfromtxt("aufg_c.csv", delimiter=",", unpack=True).T
x = np.delete(x, (0), axis=0).T
x, y = x[0], x[1:]
y_mean = y.mean(axis=0)
y_sem = stats.sem(y, axis=0)
W = np.eye(len(x))*1/y_sem

def func(x, a):
    return x**6 *a[6] + x**5 *a[5] + x**4 *a[4] + x**3 *a[3] + x**2 *a[2] + x**1 *a[1] + x**0 *a[0]
A = np.array([np.ones(len(x)), x, x**2, x**3, x**4, x**5, x**6]).T
a = np.linalg.inv(A.T@ W @ A) @ A.T @ W @ y_mean

x_new = np.linspace(0, 8, 2000)
y_new = func(x_new, a)

plt.errorbar(x, y_mean, yerr=y_sem, fmt=".", label="Original")
plt.plot(x_new, y_new, label="Lambda = 0")
None
```