Blatt 11

31

a

Fluss konstant im Messzeitraum

gemessene Protonen folgen poissonverteilung

$$L(\lambda) = \prod_i P(X = x_i) \quad , \quad P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow L(\lambda) = \frac{\lambda^{4135}}{4135!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4020}}{4020!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4203}}{4203!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4218}}{4218!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4227}}{4227!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4231}}{4231!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{4310}}{4310!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{29526} \cdot e^{-7\lambda}}{4135! \cdot 4020! \cdot 4203! \cdot 4218! \cdot 4227! \cdot 4231! \cdot 4310!} \quad := a$$

Verwende Log-Likelihood weil einfacher:

$$l(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = 29526 \cdot \ln(\lambda) - 7\lambda - \ln(a)$$

$$\approx 29526 \cdot \ln(\lambda) - 7\lambda - 216968{,}57$$

Maximum suchen:

$$\frac{l(\lambda)}{d\lambda} = 29526 \cdot \frac{1}{\lambda} - 7 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 4218$$

Damit ist die wahrscheinlichste Zählrate $N = 4218$.

Der Log-Likelihoodwert dafür ist $l(4218) = -37{,}55$.

Der Likelihoodwert ist $L(4218) = e^{-37{,}55} = 4{,}92 \cdot 10^{-17}$.

b

linear ansteigender Fluss

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{4135}}{4135!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^{4202}}{4202!} e^{-2\lambda} \cdot \frac{(3\lambda)^{4203}}{4203!} e^{-3\lambda} \cdot \frac{(4\lambda)^{4218}}{4218!} e^{-4\lambda} \cdot \frac{(5\lambda)^{4227}}{4227!} e^{-5\lambda} \cdot \frac{(6\lambda)^{4231}}{4231!} e^{-6\lambda} \cdot \frac{(7\lambda)^{4310}}{4310!} e^{-7\lambda}$$

verwende wieder die Log-Likelihoodfunktion:

$$l(\lambda) = 29526 \cdot \ln(\lambda) - 28\lambda + 4202 \cdot \ln(2) + 4203 \cdot \ln(3) + 4218 \cdot \ln(4) + 4227 \cdot \ln(5) + 4231 \cdot \ln(6) + 4310 \cdot \ln(7) - \ln(a)$$

$$\approx 29526 \cdot \ln(\lambda) - 28\lambda - 180820{,}15$$

Maximum suchen:

$$\frac{d\, l(\lambda)}{d\lambda} = 29526 \cdot \frac{1}{\lambda} - 28 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1054{,}5$$

Das ist der Flussparameter.

$$l(\lambda = 1054{,}5) = -4820{,}92$$

$$L(\lambda = 1054{,}5) = e^{-4280{,}92} \approx 6{,}608 \cdot 10^{-1860} \approx 0$$

(c)

Wilks Theorem: $-2\ln(\Gamma(x)) \sim \chi^2(d)$ $d = \mathrm{Dim}(\Theta) - \mathrm{Dim}(\Theta_0)$

Hypothese: linearer Anstieg

Alternativhypothese: kein linearer Anstieg.

Wilks-Theorem ist hier anwendbar, weil Hypothese und Alternativhypothese linear zusammenhängen.

d

<u>zu a!</u>

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{33928}}{a \cdot 4402!} e^{-8\lambda}$$

$$l(\lambda) \approx 33928 \ln(\lambda) - 8\lambda - 249503{,}59$$

Maximum!

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = 33928 \frac{1}{\lambda} - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 4241$$

$$l(4241) = -46{,}13$$

$$L(4241) = e^{-46{,}13} = 9{,}25 \cdot 10^{-21}$$

<u>zu b:</u>

$$L(\lambda) = L_a(\lambda) \cdot \frac{(8\lambda)^{4402}}{4402!} \cdot e^{-8\lambda}$$

$$l(\lambda) \approx 33928 \ln(\lambda) - 42\lambda - 201738{,}09$$

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = 33928 \frac{1}{\lambda} - 42 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 807{,}81$$

$$l(807{,}81) = -8540{,}99$$

$$L(807{,}81) = e^{-8540{,}99} \approx 0$$