

N3 Zadanie numeryczne

Rozwiązać układ $(N+1) \times (N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ (D_2y)_n + y_n &= 0, \quad n = 1 \dots (N-1) \\ y_N &= 0, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (2)$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n) .

Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacja (dla bardzo dużego N).

N4 Zadanie numeryczne

Rozwiązać układ $(N+1) \times (N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ (D_2y)_n + y_n &= 0, \quad n = 1 \dots (N-1) \\ y_{N-1} - 2y_N + y_0 &= 0, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (4)$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n) .

Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacja (dla bardzo dużego N).

N5 Zadanie numeryczne

Rozwiązać układ $(N+1) \times (N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ (D_2y)_n + y_n &= 0, \quad n = 1 \dots (N-1) \\ -3y_0 + 4y_1 + y_2 &= 0, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (6)$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n) .

Wskazówka: Poprzedzić układ równań tak, aby wyliczyć pierwsze wyrazy w sposób jawny.

Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacja (dla bardzo dużego N).

N6 Zadanie numeryczne

Zaimplementować metodę:

- relaksacyjną (Richardsona)

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \gamma (b - Ax^{(n)}),$$

- Jacobiego:

$$x^{(n+1)} = D^{-1} (b - Rx^{(n)}),$$

- Gausa-Seidla

$$x^{(n+1)} = L^{-1} (b - Ux^{(n)}),$$

- Successive OverRelaxation

$$x_i^{(n+1)} = (1 - \omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(n)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Znaleźć rozwiązanie układu z zadania N3 z dokładnością 10^{-10} . Która metoda jest najszybsza? Proszę uwzględnić strukturę układu równań.

Dlaczego z tym układem są problemy? Jak "naprawić" układ aby dało się go rozwiązać iteracyjnie?

Jeśli nie znasz odpowiedzi na powyższe pytania znajdź rozwiązanie dla układu *prawie* takiego jak w zadaniu N3, zastępując równania $(D_2y)_n + y_n = 0$ równaniami $-(D_2y)_n + y_n = 0$. Układ wygodnie jest zapisać w postaci

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ -(D_2y)_n + y_n &= 0, \quad n = 1 \dots (N-1) \\ -\frac{y_{N-1} - 2y_N + y_0}{h^2} &= 0, \end{cases} \quad (7)$$

Uwaga: w razie dalszych problemów z wykorzystaniem macierzy z zadania N3 można skorzystać z macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i walczyć o 3 punkty.

N7 Zadanie numeryczne

Zaimplementować metodę gradientów sprzężonych dla układu z zadania N6 z poprzedniego zestawu.

N8 Zadanie numeryczne

Znaleźć wartości własne macierzy z dokładnością 10^{-8}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

korzystając z metody potęgowej, Rayleigha i metody iteracyjnej QR:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= A, \\ Q^{(n)} R^{(n)} &= B^{(n)}, \\ B^{(n+1)} &:= R^{(n)} Q^{(n)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Uwaga: Metoda Rayleigha będzie omówiona na zajęciach, ale można też oprzeć się o sekcję 3 <https://mathreview.uwaterloo.ca/archive/voli/1/panju.pdf>.

N9 Zadanie numeryczne

Znaleźć cztery najmniejsze wartości i wektory własne macierzy $N \times N$ z dokładnością 10^{-8} , której elementy są dane jako

$$A_{nm} = -\frac{\delta_{n-1,m}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + 4 - \frac{6}{\cosh^2 x_n} \right) \delta_{n,m} - \frac{\delta_{n+1,m}}{h^2}, \quad (10)$$

gdzie N duże $\sim 100 \dots 1000$,

$$h = \frac{2L}{N-1} \quad x_n = -L + nh, \quad L = 10. \quad (11)$$

Cztery znalezione wektory proszę przedstawić w postaci graficznej - wykresu (x_n, y_n) , gdzie y_n n -ta składowa wektora.

N10 Zadanie numeryczne

Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\det(A - \lambda \mathbb{I})$ trzema metodami (poszukiwania miejsc zerowych) z dokładnością 10^{-8} . Które metody działają najszybciej?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

N11 Zadanie numeryczne

Narysować zbiór $\{x_n : n > 100\}$ (atraktor) w zależności od parametru $k \in [2, 4]$ dla odwzorowania logistycznego.

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n). \quad (12)$$

http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwzorowanie_logistyczne

N12 Zadanie numeryczne

$$z^3 - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

metodą Newtona. Zaznaczyć różnymi kolorami baseny atrakcji poszczególnych rozwiązań na płaszczyźnie (Re z , Im z). Do zaznaczania basenów w gnuplocie można użyć komendy

`plot <data file> with image`

gdzie <data file> plik zawierający dane typu

| | | |
|-------|-------|-------|
| x_1 | y_1 | n_1 |
| x_2 | y_2 | n_2 |
| x_3 | y_3 | n_3 |

gdzie x_1, y_1 współrzędne (np część rzeczywista i urojona z), a n numer basenu (ewentualnie zmodyfikowany o ilość koniecznych iteracji aby dojść dostatecznie blisko któregoś z rozwiązań).

N13 Zadanie numeryczne

Znajdź interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ oraz } f_2(x) = e^{-x^2}$$

na przedziale $x \in [-5, 5]$

- dla N równoodległych punktów. Dla jakiego N otrzymamy najmniejszy błąd przybliżenia $\sigma = \max |f(x) - f_{\text{approx}}(x)|$? Dlaczego z funkcją f_1 są takie problemy? Narysuj wykresy (również poza punktami interpolacji!) dla N minimalizującego błąd. 2 ptk.
- dla N punktów $x_n = 5 \cos(\frac{n\pi}{N-1})$. Jaką teraz można uzyskać dokładność? Dlaczego? 2 ptk.
- Wykonaj aproksymację przy użyciu splajnow kubicznych dla N równoodległych punktów. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? 2 ptk.
- Wykonaj aproksymację przy użyciu funkcji sinc

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \phi_n(x), \quad \phi_n(x) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{h}(x - x_n)\right]}{\frac{\pi}{h}(x - x_n)}, \quad x_n = -5 + hn, \quad h = \frac{10}{N-1},$$

przyjmując, że poza zakresem funkcja przyjmuje wartość 0. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? 2 ptk.

Uwaga: w tym zadaniu najważniejsza jest właściwa analiza i wnioski i to one stanowią podstawę oceny.

N14 Zadanie numeryczne

Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^1 \frac{\exp(x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

z dokładnością do 10^{-6} za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów.

Uwaga: za liczenie dwukrotnie (lub więcej) wartości funkcji w obrębie jednej metody przy zagęszczaniu będą odejmowane punkty.

Wskazówka: zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

N15 Zadanie numeryczne

Znajdź rozwiązanie układu równań (z dokładnością $\sim 10^{-6}$)

$$\begin{cases} -\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + 2u_n(u_n^2 - 1) = 0, & n = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = 0, \\ u_N = 1, \end{cases} \quad (13)$$

gdzie $N \sim 100 - 1000$, $h = 20/(N-1)$. Narysuj wykres rozwiązania.