

СЛАУ Метод отражений

Толстобров Кирилл Александрович, группа 323.

Постановка задачи

Требуется написать параллельную программу с использованием технологии OpenMP для решения системы линейных уравнений Ax=b методом отражений.

Алгоритм решения

Первый этап алгоритма - приведение матрицы к верхнему треугольному виду методом отражений. Данный этап состоит из $n - 1$ шагов ($n * n$ - размер матрицы). На k -ом шаге производится вычисление вектора $x_k = \frac{a_k - |a_k|e_k}{|(a_k - |a_k|e_k)|}$ где a_k - k -ый столбец полученной к этому шагу матрицы A без первых $k - 1$ элементов, $e_k = [1, 0, 0, \dots, 0]$ - вектор размерности $n - k + 1$. Затем производится замена матрицы A и вектора b на $U(x_k)A$ и $U(x_k)b$ соответственно, где $U(x_k)$ - матрица отражения (под $U(x_k)A$ подразумевается умножение $U(x_k)$ на нижнюю правую подматрицу матрицы A размера $(n - k + 1) * (n - k + 1)$, под $U(x_k)b$ подразумевается умножение $U(x_k)$ на вектор из последних $n - k + 1$ элементов вектора b). Умножение матрицы отражения на вектор производится неявно, без хранения матрицы в памяти, по формуле $U(x)b = b - 2x(b, x)$. Умножение матрицы отражения на матрицу A осуществляется умножением матрицы отражения на соответствующие столбцы указанным способом. Умножение $U(x_k)A$ производится параллельно с использованием директивы parallel, каждая нить производит умножение матрицы $U(x_k)$ на подмножество столбцов A , загрузка нитей равномерна.

Второй этап алгоритма - обратный ход метода Гаусса.

Исследования и результаты

Все опыты с проводились на вычислительном комплексе Polus.

Программа компилировалась командой: g++ main.cpp -o prog -fopenmp -std=c++11. Запуск программы производился командой: bsub < task.lsf, содержимое командного файла task.lsf:

```
#BSUB -J "OpenMP_job"

#BSUB -W 0:15

#BSUB -o prog.%J.out

#BSUB -e prog.%J.err

#BSUB -R "affinity[core(N)]"

OMP_NUM_THREADS=P

/polusts/lsf/openmp/launchOpenMP.py ./prog K
```

где N, P, K в последних трех строчках - соответственно кол-во ядер, кол-во нитей, имя файла с исходными данными (соответствует размеру матрицы).

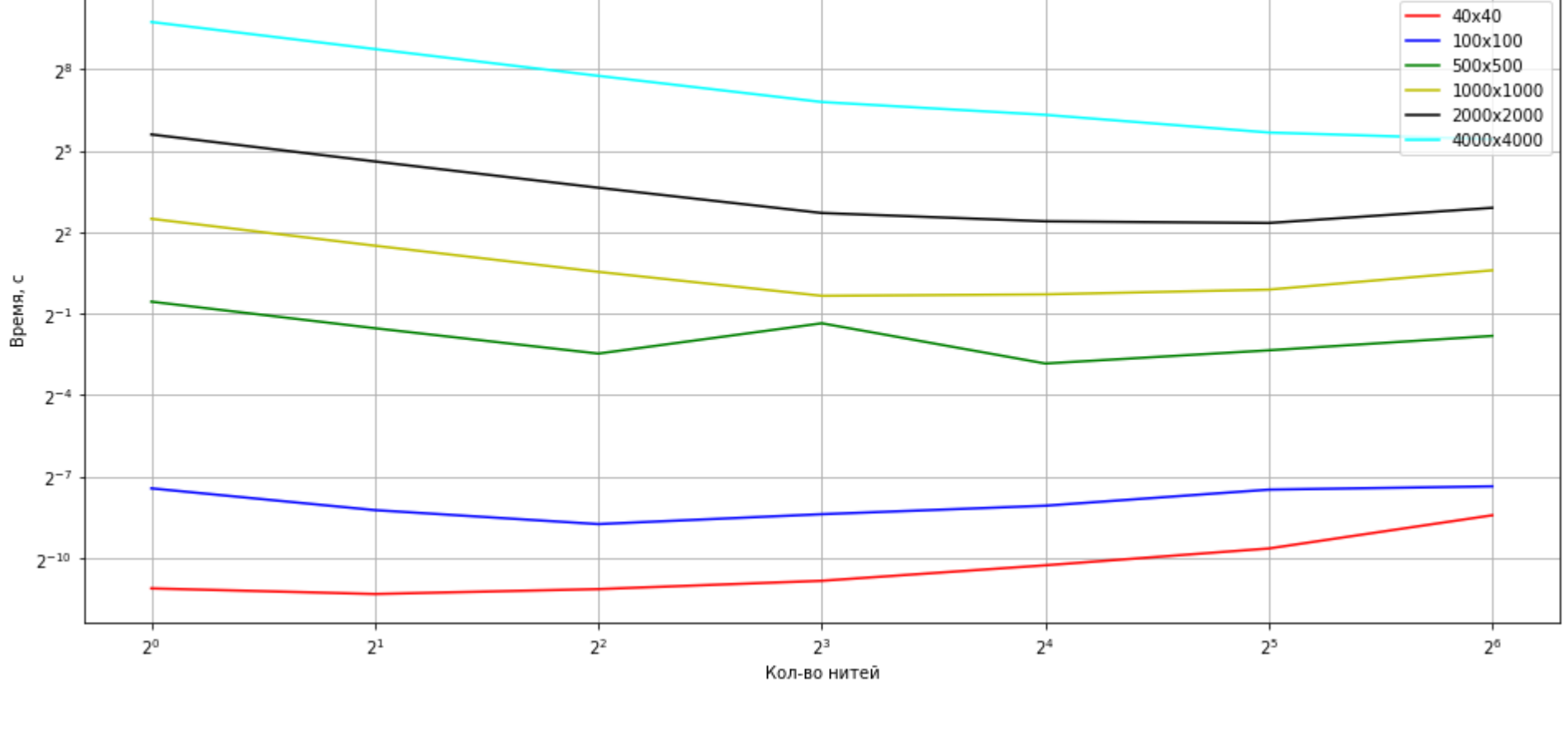
Опыты проводятся с матрицами размеров 40x40, 100x100, 500x500, 1000x1000, 2000x2000, 4000x4000. Количество OMP нитей: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Измерялась зависимость времени выполнения программы (T1 - время приведения системы к вехрнему треугольному виду, T2 - время на обратный ход метода Гаусса, T - T1+T2), ускорения и эффективности в зависимости от числа OMP нитей. Результаты представлены на графиках.

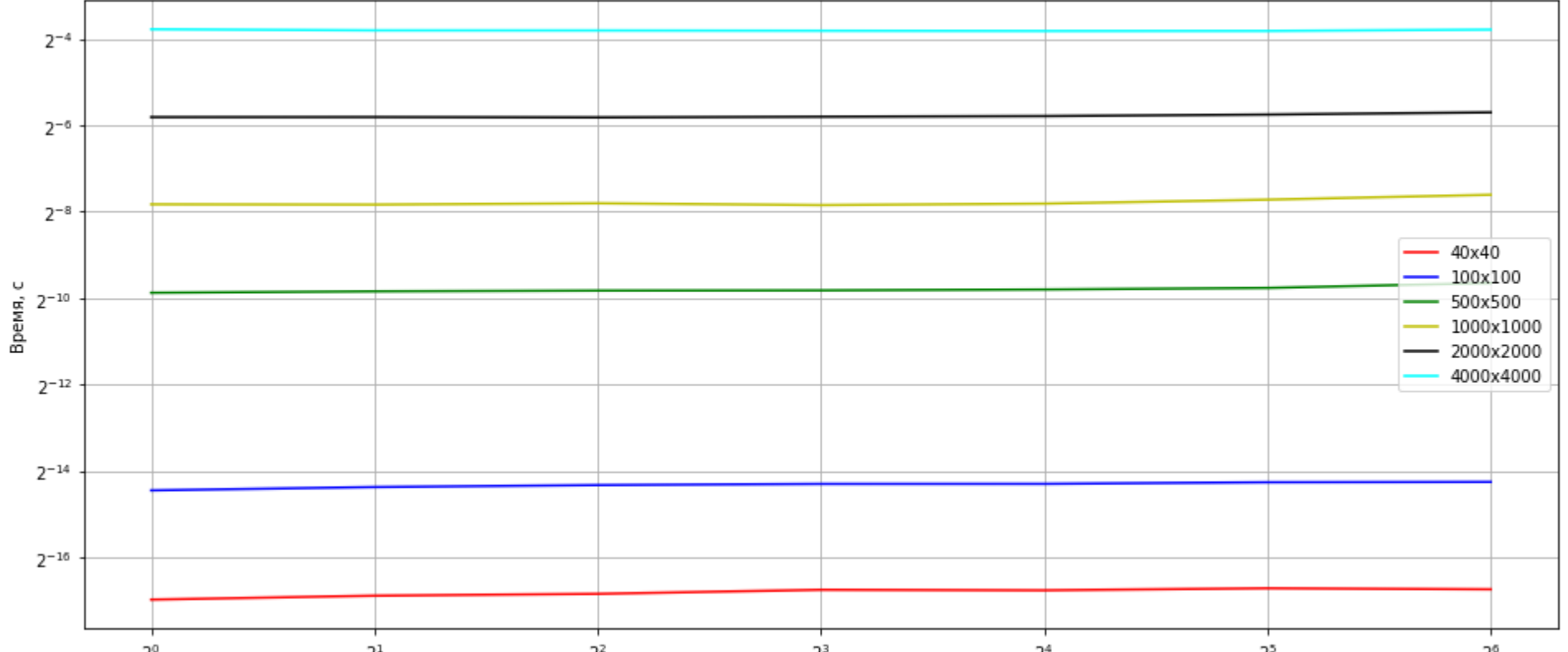
Для проверки корректности работы программы в каждом опыте также измерялась норма невязки и норма разницы между полученным и точным решениями. За все опыты первый показатель ни разу не превысил 10^{-6} , второй не превысил 10^{-7} . Исходя из этого можно сделать вывод, что программа работает корректно.

threads number	40x40 matrix T1, s	100x100 matrix T1, s	500x500 matrix T1, s	1000x1000 matrix T1, s	2000x2000 matrix T1, s	4000x4000 matrix T1, s	
0	1	0.000452	0.005808	0.680265	5.636870	48.45570	853.5640
1	2	0.000392	0.003333	0.345471	2.837540	24.34030	428.0160
2	4	0.000444	0.002334	0.180823	1.456170	12.44460	216.1470
3	8	0.000549	0.003004	0.391769	0.789414	6.53322	110.8900
4	16	0.000816	0.003730	0.140347	0.819672	5.28295	79.9328
5	32	0.001253	0.005622	0.196557	0.925290	5.06316	50.8906
6	64	0.002924	0.006112	0.284084	1.513750	7.45495	42.8557

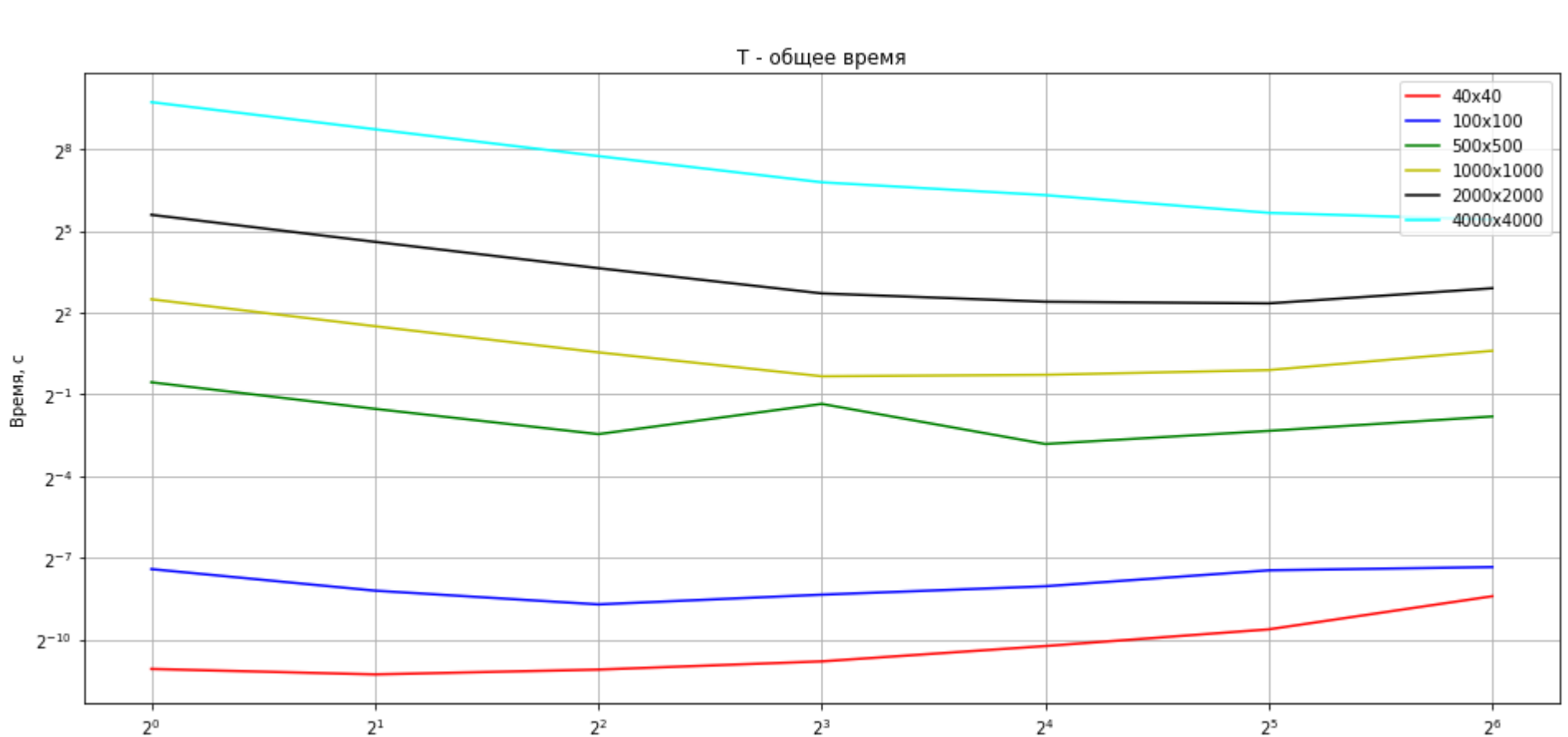
T1 - время приведения к треугольному виду



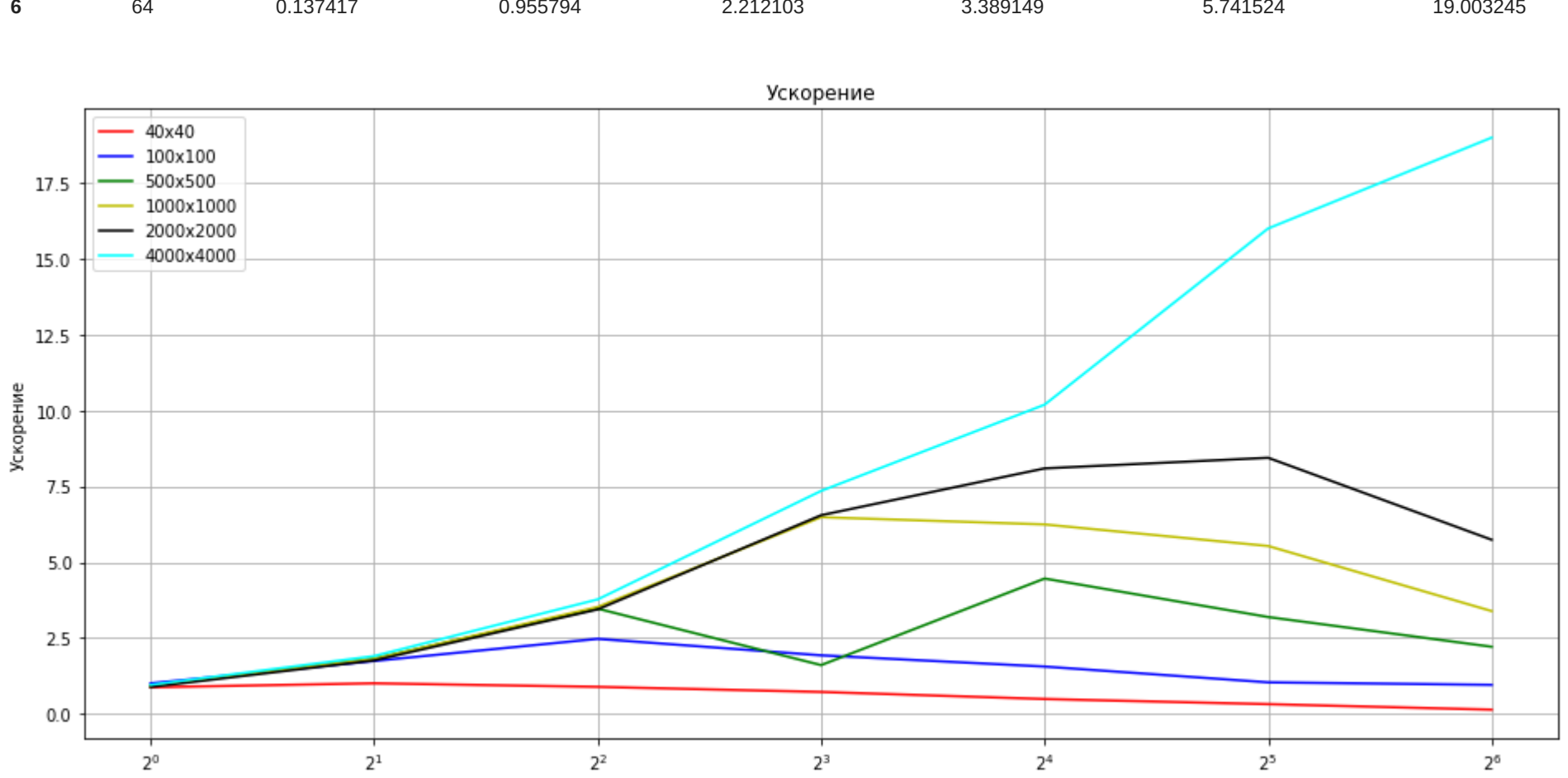
threads number	40x40 matrix T2, s	100x100 matrix T2, s	500x500 matrix T2, s	1000x1000 matrix T2, s	2000x2000 matrix T2, s	4000x4000 matrix T2, s	
0	1	0.000008	0.000045	0.001065	0.004400	0.017834	0.073006
1	2	0.000008	0.000047	0.001089	0.004381	0.017852	0.071694
2	4	0.000009	0.000049	0.001102	0.004475	0.017756	0.071594
3	8	0.000009	0.000050	0.001106	0.004346	0.017941	0.071304
4	16	0.000009	0.000050	0.001122	0.004450	0.018121	0.071006
5	32	0.000009	0.000051	0.001150	0.004742	0.018580	0.071068
6	64	0.000009	0.000051	0.001244	0.005129	0.019248	0.072567



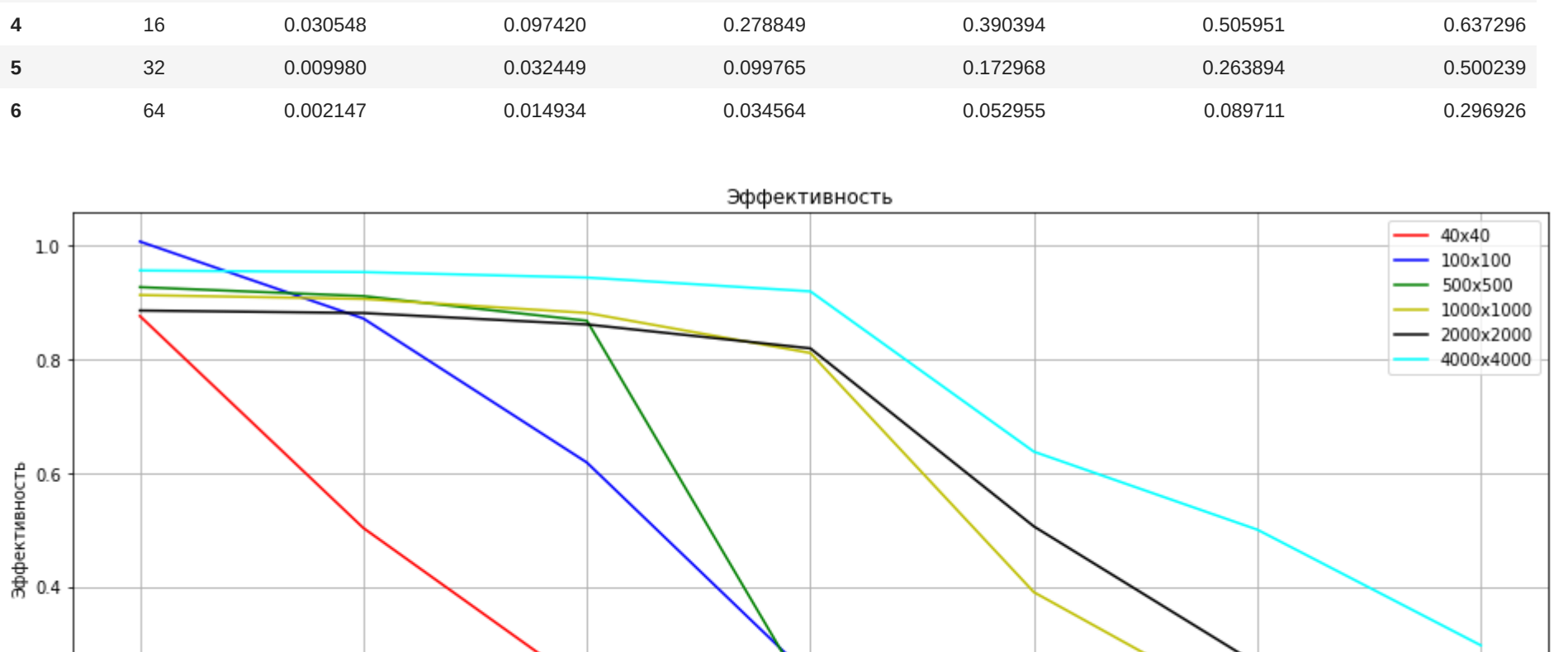
Кол-во нитей							
threads number	40x40 matrix T, s	100x100 matrix T, s	500x500 matrix T, s	1000x1000 matrix T, s	2000x2000 matrix T, s	4000x4000 matrix T, s	
0	1	0.000460	0.005853	0.681330	5.641270	48.47350	853.6370
1	2	0.000400	0.003381	0.346560	2.841920	24.35810	428.0880
2	4	0.000453	0.002382	0.181925	1.460650	12.46230	216.2180
3	8	0.000558	0.003053	0.392875	0.793760	6.55117	110.9610
4	16	0.000825	0.003779	0.141469	0.824122	5.30107	80.0038
5	32	0.001262	0.005673	0.197707	0.930032	5.08174	50.9617



KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							
KUI-BU RIVER							



	threads number	40x40 matrix efficiency	100x100 matrix efficiency	500x500 matrix efficiency	1000x1000 matrix efficiency	2000x2000 matrix efficiency	4000x4000 matrix efficiency
0	1	0.875674	1.006530	0.926387	0.912509	0.885294	0.955649
1	2	0.503165	0.871295	0.910629	0.905675	0.880884	0.952815
2	4	0.222464	0.618239	0.867356	0.881065	0.860862	0.943234
3	8	0.090220	0.241185	0.200819	0.810653	0.818810	0.918991
4	16	0.030548	0.097420	0.278849	0.390394	0.505951	0.637296
5	32	0.009980	0.032449	0.099765	0.172968	0.263894	0.500239
6	64	0.002147	0.014934	0.034564	0.052955	0.089711	0.296926



Как мы видим, использование параллельного алгоритма значительно ускоряет программу. При этом с увеличением размера матриц ускорение и эффективность растут.

