Практикум кафедры СКИ

СЛАУ Метод отражений

Решение системы линейных уравнений методом отражений.

Алгоритм решения СЛАУ методом отражения

Определение. Пусть дан единичный вектор **x** размерности n, (т.е. ||**x**|| = 1), тогда матрицей отражения называется U(**x**) = **I** - 2**xx***, где * - транспонирование, а под нормой здесь и далее понимается обычная евклидова норма.

Лемма 1. Матрица U(**x**) является ортогональной матрицей.

Лемма 2. Матрица U(**x**) является симметричной матрицей.

Лемма 3. Матрица U(**x**) имеет собственное значение -1 кратности 1, которому отвечает собственный вектор **x** и собствееное значение 1 кратности n-1, которому отвечает собственное подпространтсво $\langle \mathbf{x} \rangle^{\perp}$ = {**y**: (**x**,**y**) = 0}.

Лемма 4. Геометрический смысл преобразования, задаваемый матрицей U(**x**): отражение относительно гиперплоскости $\langle \mathbf{x} \rangle^{\perp}$

Лемма 5. Пусть **e** - еденичный вектор (||**e**||=1), тогда для любого n-мерного вектора **y** существует такой еденичный вектор **x**, что U(**x**)**y** = ||**y**||**e**.

Лемма 6. Произведение матрицы отражения на вектор может быть вычислено за 2n-1 операцию сложения и 2n+1 операцию умножения.

Лемма 7. Произведение матрицы отражения (размера n×n) на матрицу размера nxm может быть вычислено за m(2n-1) операций умножения и m(2n+1) операций сложения.

Алгоритм метода отражений.

Пусть требуется решить систему линейных уравнений **Ax**=**b**

Через $\mathbf{a}_1 = (a_{11},\dots,a_{1n})^*$ обозначим первый столбец матрицы **A**, согласно лемме 5 существует вектор $\mathbf{x}^{(1)}$, равный,

$$x^{(1)} = \pm \frac{a_1 - ||a_1|| e_1}{||a_1 - ||a_1|| e_1||}$$

такой что $U(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{a}_1 = ||\mathbf{a}_1||\mathbf{e}_1$. Умножим на матрицу отражения левую и правую чсати уравнения **Ax=b**, получим уравнение $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(1)}$

$$A^{(1)} = U_1 A = U\left(x^{(1)}\right) A, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} ||a_1|| & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = U_1 b$$

Пусть сделан k-1 шаг алгоритма и система приведена к виду $\mathbf{A}^{(k-1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k-1)}$, где $\mathbf{A}^{(k-1)} = U_{k-1}U_{k-2}\dots U_1\mathbf{A}$, а $\mathbf{b}^{(k-1)} = U_{k-1}U_{k-2}\dots U_1\mathbf{b}$.

$$A^{(k-1)}=\begin{pmatrix} \|a_1\| & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,k-1} & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \|a_2\| & c_{23} & \dots & c_{2,k-1} & c_{2k} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \|a_3\| & \dots & c_{3,k-1} & c_{3k} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|a_{k-1}\| & c_{k-1,k} & \dots & c_{k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad U_i=\begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & U(x^{(i)}) \end{pmatrix}, \quad i=1,\dots,k-$$

Обозначим через $\mathbf{a}_k = (a_{kk}, \dots , a_{nk})^*$. Тогда согласно лемме 5 существует вектор $\mathbf{x}^{(k)}$ (размерности n-k+1) равный

$$x^{(k)}=\pm\frac{a_k-\|a_k\|e_k}{\|a_k-\|a_k\|e_k\|}$$

такой, что $U(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{a}_k = \|\mathbf{a}_k\|\mathbf{e}_k$, где $\mathbf{e}_k = (1,0,\dots,0)$ (вектор размерности n-k+1)

Умножая матрицу U_k на левую и правую часть системы уравнений $\mathbf{A}^{(k-1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k-1)}$, получим систему уравнений $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$, где $\mathbf{A}^{(k)} = U_kU_{k-1}U_{k-2}\cdots U_1\mathbf{A}$, а $\mathbf{b}^{(k)} = U_kU_{k-1}U_{k-2}\cdots U_1\mathbf{b}$.

$$A^{(k-1)}=\begin{pmatrix} \|a_1\| & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,k-1} & c_{1k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \|a_2\| & c_{23} & \dots & c_{2,k-1} & c_{2k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \|a_3\| & \dots & c_{3,k-1} & c_{3k} & c_{3,k+1} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|a_{k-1}\| & c_{k-1,k} & c_{k-1,k+1} & \dots & c_{k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \|a_k\| & c_{k,k+1} & \dots & c_{k,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad U_k=\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & U(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Отметим, что при умножении матрицы вида U_k на матрицу вида $\mathbf{A}^{(k-1)}$ происходит умножение матрицы отражения на подматрицу матрицы $\mathbf{A}^{(k-1)}$ размера n-k+1 (остальная часть матрицы в преобразовании не участвует).

После n шагов процесса система примет вид $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$, где $\mathbf{R}$ - верхнетреугольная матрица. $R = \mathbf{A}^{(n)} = U_nU_{n-1}\cdots U_2U_1\mathbf{A}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}^{(n)} = U_nU_{n-1}\cdots U_2U_1\mathbf{b}$. Полученную систему можно решить используя обратный ход метода Гаусса.

Решение СЛАУ

◄ Объявления

Перейти на...

Задание 1 ►