

Primer Parcial. Métodos No Paramétricos.

II-2020

Parte 1. Ejercicios

Loana Beltran Cardozo

Luisa Fernanda Moreno Fuentes

August 10, 2023

1 Intervalos de confianza clásicos

1. Sean Y_1, \dots, Y_n , variables aleatorias iid con $Y_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ $i = 1, \dots, n$, $n = 100$

a) Asigne valores a μ_0 y σ^2

Tomaremos $\mu_0 = 65$ y $\sigma^2 = 7$

b) Usando Monte Carlo simule en R 1000 intervalos de confianza para μ_0 , a través de $\left[\bar{y}_j \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
 $j = 1, \dots, 1000$

El procedimiento se realizó en R y se muestra a continuación:

```
> set.seed(8)
> mu0<-65
> sigma2<-7
> n<-100
> LI<-c()
> LS<-c()
> xbar<-NULL
> a<-c()
>
> for (i in 1:1000){
+   datos=rnorm(n, mu0, sqrt(sigma2))
+   xbar[i]=mean(datos)
+   LI[i]=xbar[i]-1.96*(sqrt(sigma2/n))
+   LS[i]=xbar[i]+1.96*(sqrt(sigma2/n))
+   IC<-cbind(LI,LS)
+ }
>
> for (i in 1:1000) {
+   if(LI[i]<=mu0){a[i]<-1}
+   else{a[i]<-0}
+ }
+ }
```

c) ¿Cuántos intervalos contienen a μ_0 . Es este resultado coherente con lo esperado?

```
> sum(a)
[1] 977
```

Hay 977 intervalos de confianza que contienen a $\mu_0 = 65$, Y con un nivel de significancia del 0.05 existe la posibilidad que máximo 50 intervalos de 1000 no contengan a μ_0 , luego el resultado es coherente ya que sólo 23 intervalos no contienen a μ_0

2. Sean Y_1, \dots, Y_n , variables aleatorias *iid* con $Y_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, $\forall i = 1, \dots, n$, $n = 100$. $n = 100$.

a) Asigne valores a μ_0 y σ^2 .

Solución:

```
set.seed(307)

mu0=27
sigma2=175
m=1000
n=100
```

De modo que elegimos $\mu_0 = 27$ y $\sigma^2 = 175$ y para la generar números aleatorios utilizamos la semilla `set.seed(307)`

b) Simule 1000 intervalos de confianza para μ , usando $\left[\bar{y}_j \pm t_{(0.975,99)} \frac{s_j}{\sqrt{n}} \right]$, $i = 1, \dots, 1000$. $t_{(0.975,99)}$ corresponde al percentil 97.5 de una distribución T-student con 99 grados de libertad. s_j corresponde a la desviación estándar muestral de la j -ésima simulación.

Solución:

```
#matriz de muestras
MM=matrix(0,m,n)
for(i in 1:m)
{
  MM[i,]=rnorm(n,mu0,sqrt(sigma2))
}
#límites
ybarj=apply(MM,1,mean)
sdj=apply(MM,1,sd)
traiq=qt(0.975,99)/sqrt(n)
LI=ybarj-traiq*sdj
LS=ybarj+traiq*sdj
IntC=cbind(LI,LS)
```

Donde la j -ésima fila de la matriz `IntC` es un intervalo de confianza del 95%, correspondiente a la j -ésima muestra.

- ¿Cuántos intervalos contienen a μ ? ¿Es este resultado coherente con lo esperado?.

Solución:

```
IC=NULL
for(i in 1:m)
{
  IC[i]=ifelse(mu0>LS[i] || mu0<LI[i],0,1)
}
```

Por lo tanto al calcular el número de intervalos que contienen a μ tenemos:

```
> sum(IC)
[1] 950
```

Puesto que se hicieron 1000 intervalos de confianza, con $\alpha = 0.05$ sí se esperaría que el 95% de estos contengan a μ . Claro que el valor resultante depende de la semilla usada o de la simulación, sin embargo debería ser cercano a este.

- Con cada simulación haga la prueba de hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_0 : \mu \neq \mu_0$. Ayuda: Con los datos de cada simulación use la función `t.test` de R y almacene en un archivo los valores-p de cada prueba. Después cuente cuantos valores-p son menores del 5%. Esto dará el número total de rechazos.

Solución:

```
pvalue=NULL
for(i in 1:m)
{
  pvalue[i]=t.test(MM[i,],mu=mu0)[[3]]
}
PV=NULL
for(i in 1:m)
{
  PV[i]=ifelse(pvalue[i]<0.05,0,1)
}
```

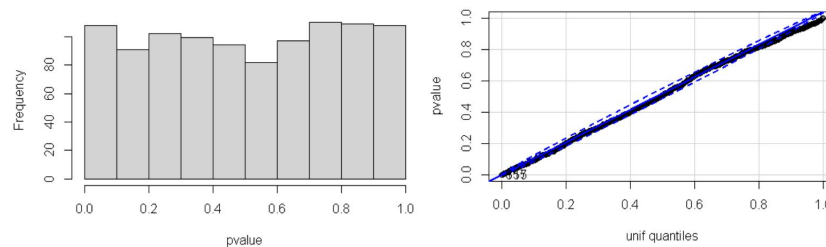
Del mismo modo tenemos el resultado

```
> sum(PV)
[1] 950
```

Tenemos el mismo resultado que anteriormente, haciendo la respectiva prueba con el p -valor.

- Compruebe gráficamente que la distribución del valor-p es uniforme (0,1).

Solución:



```
hist(pvalue)
qqPlot(pvalue,distribution="unif")
```

Al ver las gráficas podríamos decir los p -valor sí se distribuyen $U(0,1)$

2 Pruebas No Paramétricas

3. Haga un cuadro resumen de las pruebas no paramétricas estudiadas. Debe incluir los supuestos, las hipótesis, la estadística de prueba y su distribución (incluyendo la asintótica).

Table 1: Pruebas no paramétricas para una muestra

Test	Signo	Wilcoxon
Supuestos	No se tiene ningún supuesto en específico. θ es la mediana de la distribución	La muestra debe tener una distribución simétrica y continua de mediana θ
Hipótesis	Para Y $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta \neq 0$ $\theta > 0$ $\theta < 0$	Para Y $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta \neq 0$ $\theta > 0$ $\theta < 0$
Estadística de prueba	$S = \sum_{i=0}^n \phi_i$, donde: $\phi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$ y $Y_i = X_i - \theta_0$	$T = \sum_{i=0}^n R_i^+ S(Y_i)$, donde: $S(Y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$ R_i^+ : Rango de $ Y_i $ y $Y_i = X_i - \theta_0$
Distribución Asintótica	Bajo H_0 $Z = \frac{S - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} \sim N(0, 1)$	$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} \sim N(0, 1)$ Donde $E(T) = \frac{n(n+1)}{4}$ Y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$
Región de rechazo	Para $H_a : \theta > 0$ se rechaza si $S \geq b_{(\alpha, 1/2)}$ Para $H_a : \theta < 0$ se rechaza si $S \leq n - b_{(\alpha, 1/2)}$ Para $H_a : \theta < 0$ se rechaza si $S \leq n - b_{(\alpha/2, 1/2)}$ Donde $b_{(\alpha, 1/2)}$ es el cuantil α de una distribución binomial con parámetros $p = \frac{1}{2}$ y n	Se rechaza H_0 si $T \geq K$ tal que $P(T \geq K) = \alpha$

Table 2: Pruebas no paramétricas para muestras pareadas

Test	Signo	Wilcoxon
Supuestos	Un individuo es evaluado dos veces Sea (X_1, X_2) una v.a. bivariada donde $Y = X_1 - X_2$ Y tiene mediana θ	Un individuo es evaluado dos veces Sea (X_1, X_2) una v.a. bivariada donde $Y = X_1 - X_2$ Y tiene mediana θ Y tiene distribución simétrica
Hipótesis	1. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta \neq 0$ 2. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta > 0$ 3. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta < 0$	1. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta \neq 0$ 2. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta > 0$ 3. $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta < 0$
Estadística de prueba	$S = \sum_{i=1}^n \psi_i$ donde $\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \leq 0; \\ 0 & \text{si } Y_i \geq 0. \end{cases}$	$T_c = \sum_{i=1}^n \psi_i R_i^+$ donde R_i^+ es la posición $ Y_i $ en la sucesión ordenada
Distribución Asintótica	$Z_c = \frac{S - n/2}{\sqrt{n/4}} \sim N(0, 1)$	$Z_c = \frac{T - \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \sim N(0, 1)$
Región de rechazo	se rechaza H_0 si 1. $s \leq k, P(S \leq k) = \alpha/2$ ó 2. $s \geq k, P(S \geq k) = \alpha$ 3. $s \leq k, P(S \leq k) = \alpha$	se rechaza H_0 si 1. $Z_c > Z_{1-\alpha/2}$ ó $Z_c < Z_{\alpha/2}$ 2. $Z_c > Z_{1-\alpha/2}$ 3. $Z_c < Z_{\alpha/2}$

Table 3: Pruebas no paramétricas para dos muestras independientes

Test	Wilcoxon	Mann Whitney
Supuestos	Independencia entre muestras $X \sim Fx(t)$ donde $Fx(t)$ es continua. $Y \sim Fy(t)$ donde $Fy(t)$ es continua. Se realiza una muestra combinada de X y Y $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_N$	Independencia entre muestras y dentro de las muestras $X \sim Fx(t)$ donde $Fx(t)$ es continua. $Y \sim Fy(t)$ donde $Fy(t)$ es continua
Hipótesis	$H_0 : \Delta = 0$ $H_a : \Delta \neq 0; \Delta > 0; \Delta < 0$	$H_0 : \Delta = 0$ $H_a : \Delta \neq 0; \Delta > 0; \Delta < 0$
Estadística de prueba	$W = \sum_{i=1}^n S_j$ S_j : Suma de rangos de las X's	$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi(Y_i X_j)$ $\phi(a) = 1$ si $a > 0$ $\phi(a) = 0$ si $a < 0$
Distribución Asintótica	$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \sim N(0, 1)$ $E(W) = \frac{n(m+n+1)}{2}$ $Var(W) = \frac{nm(m+n+1)}{12}$	$Z = \frac{U - E(U)}{\sqrt{Var(U)}} \sim N(0, 1)$ $E(U) = \frac{nm}{2}$ $Var(U) = \frac{nm(m+n+1)}{12}$
Región de rechazo	Se rechaza H_0 a un nivel α si: $Z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ o $Z_c > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_c > z_{1-\alpha}$ $Z_c < z_{\alpha}$	Se rechaza H_0 a un nivel α si: $Z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ o $Z_c > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_c > z_{1-\alpha}$

Table 4: Pruebas no paramétricas para k muestras independientes

Test	Krukall Wallis
Supuestos	k muestras independientes de distribuciones continuas
Hipótesis	$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ vs. $H_a : \theta_i \neq \theta_j$ Para algún $i \neq j$
Estadística de prueba	$H = \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} \right) - 3(N+1) \sim \chi_{1-\alpha, k-1}^2$ R_j corresponde al rango del j-ésimo grupo n_j número de observaciones en el j-ésimo grupo.
Región de rechazo	Se rechaza H_0 al nivel α si $H_c > \chi_{1-\alpha, k-1}^2$

Table 5: Pruebas no paramétricas para muestras pareadas a mas de dos tratamientos

Test	Friedman
Supuestos	Independencia entre individuos pero no entre tratamientos k tratamientos , b bloques Variables continuas
Hipótesis	H_0 : Igualdad de median H_a : Diferencias entre al menos un par
Estadística de prueba	$S = \left(\frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 \right) - 3n(k+1)$ $R_j = \sum_{i=1}^n R_{ij}$ $\bar{R}_j = R_{j=1}/n$
Distribución Asintótica	$S \sim \chi_{k-1}^2$
Región de rechazo	se rechaza H_0 si $S \sim \chi_{k-1,1-\alpha}^2$
Tratamiento de empates	$H_{corr} = \frac{H}{C}$, $C = \frac{\sum_{j=1}^m (t_j^3 - t_j)}{N^3 - N}$ t_j es el número de empates en el j -ésimo grupo de empates m es el número de grupos con rangos empatados

Table 6: Pruebas para homogeneidad de varianzas

Test	Hartley	Bartlett
Supuestos	Requiere que el modelo sea balanceado.	No hay ningún supuesto específico
Hipótesis	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ Vs $\exists i, j \ H_a : \sigma_i^2 = \sigma_j^2$	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ Vs $\exists i, j \ H_a : \sigma_i^2 = \sigma_j^2$
Estadística de prueba	$F_{max} = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2}$	$C = \sum_{j=1}^k (n-1) \ln \bar{S}^2 - \sum_{j=1}^k (n-1) \ln S_j^2$ donde $\bar{S}^2 = \sum_j \frac{S_j^2}{k}$
Región de rechazo	Se rechaza H_0 si $F_{max} > F_{1-\alpha, k, n-1}$	Se rechaza H_0 si $C_{max} > \chi_{\alpha-1, k}$

Table 7: Prueba de comparación Múltiple

Test	Nemenyi
Hipótesis	$H_0 : R_i = R_j$ $H_a : R_i \neq R_j$
Estadística de prueba	$ \bar{R}_i - \bar{R}_j $
Región de rechazo	se rechaza H_0 si $ \bar{R}_i - \bar{R}_j > \frac{q_{\infty, k, \alpha}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k(k+1)}{6n}}$ $q_{\infty, k, \alpha}$ es la cuantila de la distribución del rango estudentizado

4. Ejercicios libro Hollander y Wolfe. Para cada conjunto de ejercicios (de cada página) realice 2.

a) Test de Wilcoxon: Pagina 50. Ejercicios 1-17

1. En la tabla 3.3 se muestran los resultados de un experimento en el que se investigó el efecto de la estimulación del nervio vago sobre la secreción de insulina. Los sujetos fueron perros con pesos diferentes. La tabla 3.3 muestra los niveles de insulina inmunoreactiva en la sangre antes de la estimulación (X) y 5 minutos después (Y). Pruebe la hipótesis de que no

hay efecto versus la alternativa de que la estimulación del nervio vago aumenta el nivel de insulina inmunoreactiva en la sangre.

Solución: Se muestra la tabla 3.3 con los valores respectivos de Z_i y ϕ_i

Table 3.3. Blood levels of immunoreactive Insulin ($\mu\text{U} \setminus \text{ml}$)

Dog i	X_i (antes)	Y_i (Después)	$Z_i = Y_i - X_i$	ψ_i
1	350	480	130	1
2	200	130	-70	0
3	240	250	10	1
4	290	310	20	1
5	90	280	190	1
6	370	1450	1080	1
7	240	280	40	1

Se nos pide probar que:

$$H_0 : \theta = 0 \quad Vs \quad H_1 : \theta > 0$$

Esto lo haremos usando el test de Wilcoxon con la estadística:

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i e_i$$

Donde R_i son los respectivos rangos de Z_i y e_i es la función con valores 1 si $Z_i > 0$ y 0 si $Z_i < 0$.

Lo calculamos mediante el siguiente código

```
Dogs=matrix(c(350,200,240,290,90,370,240,480,130,250,310,280,1450,280),nrow=7)
Dogs
wilcox.test(Dogs[,1],Dogs[,2],alternative="greater",paired = TRUE)
z=Dogs[,2]-Dogs[,1]
x=NULL
for(i in 1:7){
  x[i]=ifelse(z[i]>0,1,0)
}
R=rank(abs(z))
h=R%%x
psignrank(h,7,lower.tail = FALSE)
```

En donde el comando psignrank arroja el p valor dado por la estadística T^+ (llamado en el código h). Y así obtenemos:

$$T^+ = 24$$

y un valor p de 0.0390625. De donde se rechaza la hipótesis nula y podemos afirmar con nivel de significancia de 5% que la estimulación del nervio aumenta los niveles de insulina en la sangre.

10. Aplicar la prueba de aproximación de muestra grande de $H_0 : \theta = 5$ versus $H_0 : \theta > 5$ basada en T^+ a los datos de rotura de picos en la Tabla 3.5.

Solución: Se muestra la tabla 3.5 con los valores respectivos de Z_i y ϕ_i

Table 3.5. Beak-Clapping Counts per Minute

Embryo i	X_i (Dark Period)	Y_i (Illumination)	$Z_i = Y_i - X_i$	ψ_i
1	5.8	5	-0.8	0
2	13.5	21	7.5	1
3	26.1	73	46.9	1
4	7.4	25	17.6	1
5	7.6	3	-4.6	0
6	23.0	77	54.0	1
7	10.7	59	48.3	1
8	9.1	13	3.9	1
9	19.3	36	16.7	1
10	26.3	96	19.7	1
11	17.5	9	-8.5	0
12	17.9	25	7.1	1
13	18.3	59	40.7	1
14	14.2	38	23.8	1
15	55.2	70	14.8	1
16	15.4	36	20.6	1
17	30.0	55	25.0	1
18	21.3	46	24.7	1
19	26.8	25	-1.8	0
20	8.1	30	21.9	1
21	24.3	29	4.7	1
22	21.3	46	24.7	1
23	18.2	71	52.8	1
24	22.5	31	8.5	1
25	31.1	33	1.9	1

Planteamos la T^+ de la siguiente forma

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i e_i$$

Donde R_i son los respectivos rangos de $W_i = (Z_i - 5)$ y e_i es la función con valores 1 si $W_i > 0$ y 0 si $W_i < 0$.

Para hacer el procedimiento paso por paso en R tenemos:

```
Z<-c(-0.8,7.5,46.9,17.6,-4.6,54.0,48.3,3.9,16.7,19.7,-8.5,7.1,
      40.7,23.8,14.8,20.6,25.0,24.7,-1.8,21.9,4.7,24.7,52.8,8.5,1.9)
W<-c(Z-5)
e<-NULL
for(i in 1:25){
  e[i]=ifelse((W[i])<0,0,1)
}
R<-rank(abs(W))
Tc=R%*%e
```

Donde obtenemos que

$$T^+ = 280$$

```
> Tc
      [,1]
[1,] 280
```


Puesto que $n = 25$ y estamos aplicando la aproximación de muestra grande tenemos que

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{25(25+1)}{4} = 162.5$$

Y además

$$V(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{25(25+1)(50+1)}{24} = 1381.25$$

Por lo cual

$$T^* = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{V(T^+)}} = 3.161$$

Teniendo los mismos resultados con

```
n=25
ET=(n*(n+1))/4
VT=(n*(n+1)*(2*n+1))/24
T=(Tc-ET)/sqrt(VT)
```

Puesto que $T^* > Z_\alpha = 1.644854$ rechazamos $H_0 : \theta = 5$. De manera análoga

```
> wilcox.test(Z, alternative = "greater", mu = 5, conf.level = 0.95)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  Z
V = 280, p-value = 0.0008213
alternative hypothesis: true location is greater than 5
```

Llegamos a la misma conclusión, puesto que el valor p es menor a $\alpha = 0.05$ rechazamos H_0 .

b) Test de Signo: Página 70. Ejercicios 43-57.

43. Datos en la Tabla 3.6 son una porción de los datos obtenidos por Cooper et. al (1967). El proposito de si investigación fue determinar si la susceptibilidad a la hipnosis medida en escalas objetivas podía cambiar con práctica y entrenamiento. Para medir se usaron las escalas de Stanfors de susceptibilidad hipnotica. A los sujetos se les administraron estas saclas I y II . Cada sujeto fue visto por un periodo extenso de entrenamiento hipnótico. Luego de estas sesiones, cada sujeto fue reevaluado por otro hipnotista, usando formas equivalentes de medida formas I' y II' . X corresponde al promedio de I y II y Y corresponde al promedio de I' y II' para los seis sujetos. Un nivel alto en la escala indica un alto grado de susceptibilidad hipnótica. Pruebe la hipótesis de no cambio en la susceptibilidad hipnótica versus la alternativa de que la susceptibilidad hipnótica puede aumemntar con entrenamiento.

TABLE 3.6. Average Scores on the Stanford Profile Scales of Hypnotic Susceptibility

Subject i	X_i	Y_i
1	10.5	18.5
2	19.5	24.5
3	7.5	11.0
4	4.0	2.5
5	4.5	5.5
6	2.0	3.5

Source: L. M. Cooper, E. Schubot, S. A. Banford, and C. T. Tart (1967).

Solución:

Realizando el ejercicio por medio del test del signo de muestras pareadas y probando las hipótesis:

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_a : \theta > 0$$

Con θ mediana de las diferencias entre Y y X (Z). Estadística de prueba para juzgar esta hipótesis es:

$$B = \sum_{i=1}^6 \psi_i = 1$$

donde ψ_i es la función con valor 1 si $Z_i > 0$ y 0 si $Z_i < 0$. Así, para este ejercicio $B = 5$ y el p-valor será:

$$P(B \geq 5) = 0.1094$$

Que se obtiene de la tabla A.3 con $n = 6$ y $x = 5$

Analogamente haciendolo en R con la función del test del signo obtenemos:

```
> xi=c(10.5, 19.5, 7.5, 4, 4.5, 2)
> yi=c(18.5, 24.5, 11, 2.5, 5.5, 3.5)
>
>
> SIGN.test(yi, xi, md = 0, alternative = "greater", conf.level = 0.95)
```

Dependent-samples Sign-Test

```
data: yi and xi
S = 5, p-value = 0.1094
alternative hypothesis: true median difference is greater than 0
```

Se observa un p-valor de 0.1094 por lo que no se rechaza $H_0 : \theta = 0$ es decir que no hay diferencia en la susceptibilidad hipnótica con o sin entrenamiento.

52. Aplicar la prueba de aproximación de muestra grande de $H_0 : \theta = 1000$ frente a $H_1 : \theta > 1000$ basada en B a los datos salariales de la tabla 3.2.

TABLE 3.2. Annual Salaries

Pair i	Private	Government
1	12,500	11,750
2	22,300	20,900
3	14,500	14,800
4	32,300	29,900
5	20,800	21,500
6	19,200	18,400
7	15,800	14,500
8	17,500	17,900
9	23,300	21,400
10	42,100	43,200
11	16,800	15,200
12	14,500	14,200

Solución: Primero, planteamos $Z_i = \text{Gobierno}_i - \text{Privado}_i$ y $W_i = Z_i - 1000$ donde ψ_i es la función con valor 1 si $W_i > 0$ y 0 si $W_i < 0$ de modo que

$$B = \sum_{i=1}^{12} \psi_i = 1$$

el resultado anterior es el mismo que el obtenido por

```
P<-c(12500,22300,14500,32300,20800,19200,15800,17500,23300,42100,16800,14500)
G<-c(11750,20900,14800,29900,21500,18400,14500,17900,21400,43200,15200,14200)
Z<-c(G-P)
W<-c(Z-1000)
PSI<-rep(0,12)
for(i in 1:12){
  PSI[i]=ifelse((W[i])<0,0,1)
}
Bc=sum(PSI)
```

Puesto que $n = 12$ y aplicaremos la prueba de aproximación de una muestra grande tenemos que

$$E(B) = \frac{n}{2} = 6$$

$$V(B) = \frac{n}{4} = 3$$

Además

$$B^* = \frac{B - E(B)}{\sqrt{V(B)}} = \frac{1 - 3}{\sqrt{3}} = -2.88$$

Puesto que $-2.88 < Z_\alpha = 1.644854$ No se rechaza $H_0 : \theta = 1000$, de manera análoga obtenemos la misma conclusión con el p -value

```
> SIGN.test(Z, md=1000, alternative= "greater", conf.level=0.95)

One-sample Sign-Test

data:  Z
s = 1, p-value = 0.9998
alternative hypothesis: true median is greater than 1000
95 percent confidence interval:
```

```

-1485.636      Inf
sample estimates:
median of x
      -775

Achieved and Interpolated Confidence Intervals:

      Conf.Level      L.E.pt U.E.pt
Lower Achieved CI    0.9270 -1400.000   Inf
Interpolated CI      0.9500 -1485.636   Inf
Upper Achieved CI    0.9807 -1600.000   Inf

```

c) Test del Signo muestras pareadas. Página 82. Ejercicios 87-93

92. Considere el contenido oxidante en agua de rocío en la tabla 3.13. Use el software R para probar la hipótesis de que la mediana del contenido oxidante es de 0.25 versus la alternativa de que es menor con un nivel de confianza de 0.961. También encuentre con R la estimación y el intervalo de confianza para θ

TABLE 3.13. Oxidant content of dew water

Sample i	Z_i
1	0.32
2	0.21
3	0.28
4	0.15
5	0.08
6	0.22
7	0.17
8	0.35
9	0.20
10	0.31
11	0.17
12	0.11

Solución: Las hipótesis a contrastar son:

$$H_0 : \theta = 0.25 \quad Vs \quad H_1 : \theta < 0.25$$

Para esto usamos el comando SIGN.test()

```

> data3=c(.32,.21,.28,.15,.08,.22,.17,.35,.20,.31,.17,.11)
> SIGN.test(data3,md=0.25,alternative="less", conf.level=0.961)

```

One-sample Sign-Test

```

data:  data3
s = 4, p-value = 0.1938
alternative hypothesis: true median is less than 0.25
96.1 percent confidence interval:
 -Inf 0.2989895

```

Como el p valor es igual a 0.19, mayor que un nivel de significancia de 0.05 no rechazamos la hipótesis nula y puede que el contenido oxidante sea igual a 0.25
Ahora veamos la estimación y el intervalo de confianza para θ

```
sample estimates:
median of x
      0.205
```

Achieved and Interpolated Confidence Intervals:

	Conf.Level	L.E.pt	U.E.pt
Lower Achieved CI	0.9270	-Inf	0.280
Interpolated CI	0.9610	-Inf	0.299
Upper Achieved CI	0.9807	-Inf	0.310

Por lo anterior $\hat{\theta} = 0.205$ y el intervalo será:

$$(-\infty, 0.299]$$

93. Considere los datos de velocidad de sedimentación de la tabla 3.12. Usando un software de computador pruebe la hipótesis de que la velocidad de sedimentación mediana para el Middle Ground sand Ridge (θ) fue 14 cm/s versus la alternativa de que no fue igual a 14. Adicionalmente use el software para encontrar una estimación de θ y encontrar un intervalo de confianza con un coeficiente de confianza de 0.890. Compare con los resultados del ejemplo 3.9

TABLE 3.12. Settling Velocities at 22°C

Sample i	Z_i (cm/s)
1	12.9
2	13.7
3	14.5
4	13.3
5	12.8
6	13.8
7	13.4

Source: J. D. Smith (1969).

Solución:

Este ejercicio se realizó en el software R. El primer paso es probar la hipótesis:

$$H_0 : \theta = 14$$

$$H_a : \theta \neq 14$$

Para esto hacemos uso de la función del test del signo de una muestra predeterminada en R, así:

```
> Z=c(12.9, 13.7, 14.5, 13.3, 12.8, 13.8, 13.4)
>
> ##test del signo
> SIGN.test(Z, md=14, alternative="two.sided", conf.level=0.95)

One-sample Sign-Test

data:  Z
s = 1, p-value = 0.125
alternative hypothesis: true median is not equal to 14
```

Como se observa, el p-valor del test es de 0.125 por lo que no se rechaza $H_0 : \theta = 14$ es decir que la velocidad de sedimentación mediana para el Middle Ground fue de 14cm/s .

Ahora enocontraremos una estimación para θ , en R ésta es:

```
sample estimates:
median of x
      13.4
```

Así, la estimación que se da para θ a partir de los datos es de $\theta = 13.4$

Ahora, encontraremos un intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza del 0.890. El resultado es:

```
> SIGN.test(Z, md=14, alternative="two.sided", conf.level=0.89) #intervalo para 0.89 confi
Achieved and Interpolated Confidence Intervals:
```

	Conf.Level	L.E.pt	U.E.pt
Lower Achieved CI	0.8750	12.9000	13.800
Interpolated CI	0.8900	12.8863	13.896
Upper Achieved CI	0.9844	12.8000	14.500

Así, el intervalo de confianza para θ a un nivel del 0.890 es (12.8863 , 13.896).

Con respecto al ejemplo 3.9 que corresponde a el mismo ejercicio pero con los cálculos realizados manualmente, incluido el intervalo de confianza, podemos decir que los resultados son iguales, el intervalo de confianza para este caso da (12.9 , 13.8) que es aproximadamente igual al hallado en R.

d) Test de Wilcoxon dos muestras. Paginas 123-125. Ejercicios 1-14

1. Los datos de la tabla 4.3 son un subconjunto de los datos obtenido por Thomas y Simmons (1969) que investigaron la relación de los niveles de histamina en el esputo con los irritantes o alergenios inhalados. El contenido de histamina fue reportado en microgramos por gramo peso seco de esputo. Los sujetos fueron 22 fumadores, 9 de ellos alérgicos y 13 asintomáticos. La tabla 4.3 presenta los niveles ordenados de histamina para los 22 sujetos. Pruebe la hipótesis de igualdad de niveles versus la alternativa de que los fumadores alérgicos tienen niveles más altos de histamina que los no alérgicos. Use la aproximación asintótica.

TABLE 4.3. Sputum Histamine Levels ($\mu\text{g/g}$ Dry Weight Sputum)

Allergics	Nonallergics
1651.0	48.1
1112.0	48.0
102.4	45.5
100.0	41.7
67.6	35.4
65.9	34.3
64.7	32.4
39.6	29.1
31.0	27.3
	18.9
	6.6
	5.2
	4.7

Source: H. V. Thomas and E. Simmons (1969).

La hipótesis a probar es:

$$H_0 : \Delta = 0 \quad H_a : \Delta > 0$$

Con Δ diferencia entre niveles de histamina de ambos grupos. Realizaremos ahora el test de Wilcoxon de dos muestras pero con la aproximación asintótica dado que no tenemos el mismo número de observaciones en ambos grupos.

Rangos de las observaciones			
Alergicos	Rango	No alergicicos	Rango
31	7	4.7	1
39.6	11	5.2	2
64.7	16	6.6	3
65.9	17	18.9	4
67.6	18	27.3	5
100	19	29.1	6
102.4	20	32.4	8
1112	21	34.3	9
1651	22	35.4	10
		41.7	12
		45.5	13
		48	14
		48.1	15

Ahora, sumando los rangos de los no alérgicos tenemos:

$$W = \sum_{j=1}^{13} S_j = 102$$

y adicionalmente:

$$E(W) = \frac{n(m+n+1)}{2} = \frac{13(9+13+1)}{2} = 149.5$$

$$Var(W) = \frac{mn(m+n+1)}{12} = \frac{9(13)(9+13+1)}{12} = 224.25$$

$$Z_c = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} = \frac{102 - 149.5}{\sqrt{224.25}} = 3.1719$$

Como Z_c tiene una distribución normal estándar entonces rechazo H_0 si $Z_c \geq Z_\alpha$ donde $Z_\alpha = 1.645$. Luego rechazo $H_0 : \Delta = 0$ y el p-valor correspondiente es $1 - P(Z_c < 3.1719) = 0.0008$. Así los fumadores alérgicos tienen niveles más altos de histamina que los no alérgicos.

- La tabla 4.4 muestra los resultados de un experimento para ver si los niños que miraban shows o películas violentas eran más tolerantes a la violencia en la vida real. La mitad de los 42 niños veían un show violento, los otros 21 veían un programa sin violencia. Después debían cuidar a unos niños a través de un televisor y salir del cuarto y llamar a un adulto si estos se ponían violentos. Los niños se ponían violentos (era un vídeo, no una cámara) y se midió cuántos segundos se demoraban los niños en llamar al adulto Use el test de Wilcoxon para probar si los niños que vieron un programa de televisión fueron más tolerantes a la violencia en vida real (se demoraron más tiempo en salir de la habitación)

Seconds spent in room after witnessing violence

Non violence	Violence
12	37
44	39
34	30
14	7
9	13
19	139
156	45
23	25
13	16
11	146
47	94
26	16
14	23
33	1
15	290
62	169
5	62
8	145
0	36
154	20
146	13

Se nos pide verificar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \theta = 0 \quad H_1 : \theta > 0$$

Pues al hacer la prueba se toma como minuendo a los niños que vieron el programa. Se hace la prueba con el siguiente código

```
> Violent=c(37,39,30,7,13,139,45,25,16,146,94,16,23,1,290,169,62,145,36,20,13)
> NonViolent=c(12,44,34,14,9,19,156,23,13,11,47,26,14,33,15,62,5,8,0,154,146)
> wilcox.test(Violent,NonViolent,alternative="greater",md = 0,conf.level = 0.95)

Wilcoxon rank sum test with
continuity correction

data: Violent and NonViolent
W = 276.5, p-value = 0.08126
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

Ahora veamos la distribución asintótica:

$$E(W) = \frac{n(m+n+1)}{2} = \frac{21(21+21+1)}{2} = 415.5$$

$$Var(W) = \frac{mn(m+n+1)}{12} = \frac{21(21)(21+21+1)}{12} = 1580.122$$

$$Z_c = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} = \frac{276.5 - 415.5}{\sqrt{1580.122}} = -4.402433$$

lo anterior fue calculado con el siguiente código:


```

> W=276.5
> EW=21*43/2
> EW
[1] 451.5
> VarW=((21*21*43)/12)-((21*21/(12*42*41))*2*3)
> VarW
[1] 1580.122
> Asintotica=(W-EW)/sqrt(VarW)
> Asintotica
[1] -4.402433
> 1-pnorm(Asintotica,mean=0,sd=1)
[1] 0.9999946

```

En vista del p valor tan alto no podemos rechazar la hipótesis nula. Entonces podemos afirmar con un nivel de significancia 5% que los niños que ven programas de televisión no necesariamente son más tolerantes a la violencia.

e) Test de Kruskal-Wallis. Página 199. Ejercicios 1-12

1. El entrenamiento previo a la terapia ha mostrado efectos beneficiosos en los procesos y resultados de psicoterapia y consejería. Se investigan 4 enfoques del entrenamiento: (1) Control, sin tratamiento, (2) Lectura terapeutica, (3) Preentrenamiento de terapia vicaria y (4) Entrevista de inducción de rol. Se espera que los tratamientos 2-4 tengan un mejor resultado. Una de las variables más representativas del estudio fue atracción psicoterapeutica. Aplique procedimiento 6.7 con la corrección de empates de 6.8

TABLA 6.2. Raw scores indicating the degree of psychotherapeutic attraction

Control	Reading (TR)	Videotape (VTP)	Group(RII)
0	0	0	1
1	6	5	5
3	7	8	12
3	9	9	13
5	11	11	19
10	13	13	22
13	20	16	25
17	20	17	27
26	24	20	29

Haremos el test de Kruskal-Wallis mediante el comando de R `kruskal.test()`

```

> control=c(0,1,3,3,5,10,13,17,26)
> TR=c(0,6,7,9,11,13,20,20,24)
> VTP=c(0,5,8,9,11,13,16,17,20)
> RII=c(1,5,12,13,19,22,25,27,29)
> DatosPsi=c(control,TR,VTP,RII)
> grupo=c(rep(1,9),rep(2,9),rep(3,9),rep(4,9))
> kruskal.test(DatosPsi~grupo)

```

Kruskal-Wallis rank sum test

data: DatosPsi by grupo

Kruskal-Wallis chi-squared = 4.2646, df = 3, p-value = 0.2343

Dado que el p-valor obtenido en dicho test es de $0.2343 > 0.05 = \alpha$ no se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias.

Ahora veamos la corrección para empates:

```

> g=9 #grupos con empates
> n_empates=c(3,2,2,3,2,2,4,2,3) #tamaños de dichos grupos
> CSuma=0
> for(i in 1:g){
+   CSuma=CSuma+(ti[1]^3-ti[1])
+ }
> CSuma
[1] 216
> C=CSuma/(36^3-36)
> Hcorr=4.2646/(1-C)
> Hcorr
[1] 4.284451
> 1-pchisq(Hcorr,3)
[1] 0.2323416

```

Se llama Hcorr al estadístico chi cuadrado de Kruskal corregido por los empates, su valor es de 4.2844, no muy diferente del primero. De igual forma, no se rechaza la hipótesis nula y parece haber igualdad de medias.

2. Demuestre que las dos expresiones para H en (6.5) son de hecho equivalentes.

Solución:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(R_{\bullet j} - \frac{N+1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(R_{\bullet j}^2 - 2R_{\bullet j} \frac{N+1}{2} + \frac{(N+1)^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

Puesto que $R_j = \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}$ y $R_{\bullet j} = \frac{R_j}{n_j}$, de manera análoga a las sumas de Riemann tenemos

que $\frac{N(N+1)}{2} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}$, donde $N = \sum_{j=1}^k n_j$. Se continúa

$$\begin{aligned}
H &= \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k n_j \left(\frac{R_j}{n_j} \right)^2 - (N+1) \sum_{j=1}^k n_j \left(\frac{R_j}{n_j} \right) + \frac{(N+1)^2}{4} \sum_{j=1}^k n_j \right) \\
&= \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - (N+1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij} + \frac{N(N+1)^2}{4} \right) \\
&= \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - \frac{N(N+1)^2}{2} + \frac{N(N+1)^2}{4} \right) \\
&= \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - \frac{N(N+1)^2}{4} \right) \\
&= \left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} \right) - 3(N+1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto sí son equivalentes

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(R_{\bullet j} - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

$$H = \left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} \right) - 3(N+1) \quad (6.5)$$

2.1 Una muestra

5. Los tiempos de supervivencia (en años) de 12 personas que se han sometido a un trasplante de corazón son: 3.1, 0.9, 2.8, 4.3, 0.6, 1.4, 5.8, 9.9, 6.3, 10.4, 0, 11.5. Con los datos anteriores, encuentre intervalos de confianza del 95% para la mediana (usando Bootstrap) y para el coeficiente de variación (usando Jackknife).

- Intervalo de confianza del 95% para la mediana usando Bootstrap.
El procedimiento se realizó en R como se muestra a continuación.

En primera medida, fijamos un B=10000 y posteriormente realizamos el `lillie.test` para saber de qué manera construir el intervalo de confianza.

```
> set.seed(8)
> sobrevivencia<-c(3.1, 0.9, 2.8, 4.3, 0.6, 1.4, 5.8, 9.9, 6.3,10.4, 0, 11.5)
> Bootstrap<-c()
> for(i in 1:10000)
+   {Bootstrap[i]=median(sample(sobrevivencia, replace=TRUE))
+   }
> lillie.test(Bootstrap)

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  Bootstrap
D = 0.12176, p-value < 2.2e-16
```

Dado que el p-valor es muy cercano a 0, menor a 0.05 entonces rechazamos normalidad. así el intervalo de confianza será de la forma $(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}})$ y calculandolo en R obtenemos:

```
> Interval_C<-c(quantile(Bootstrap, probs=0.025), quantile(Bootstrap, probs=
0.975));Interval_C
2.5% 97.5%
1.15 8.10
```

Luego, el intervalo de confianza del 95% para la mediana con Bootstrap será (1.15, 8.10)

- Intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de variación usando Jackknife.
Realizando el procedimiento en R como se muestra a continuación:

```
> cv<-c()
> n<-length(sobrevivencia)
> Muestras<-matrix(0, nrow=n, ncol=(n-1))
> for (i in 1:length(sobrevivencia)){
+   Muestras[i,]<-sobrevivencia[-i]
+   cv[i]<-(sd(Muestras[i,]))/(mean(Muestras[i,]))
+ }
>
```

```

> tetagor= sd(sobrevivencia)/mean(sobrevivencia)
> tetagor_n=mean( cv)
> tatagor_j=(n*tetagor)-(n-1)*tetagor_n
> bj= (n-1)*(tetagor-tetagor_n)
> vartetagor_j= (n-1)^2*var(cv)/n
> LI=((tetagor-bj)-1.96*sqrt(vartetagor_j))
> LS=((tetagor-bj)+1.96*sqrt(vartetagor_j))
> IntervaloCV=c(LI, LS);IntervaloCV
[1] 0.5386956 1.2113111

```

Luego, el intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de variación usando Jackknife es (0.538 , 1.211)

6. Suponga que tiene una muestra aleatoria de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$. Quiere probar $H_0 : \theta = 0$ vs $H_a : \theta \geq 0$. Dispone de una muestra de tamaño 20 ($n=20$).

- Encuentre una expresión para hallar el valor crítico K del test del **Signo** usando la distribución asintótica de la estadística de prueba.

Solución: Tenemos que la distribución asintótica de la estadística es:

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} \sim N(0, 1)$$

Donde $S = \sum_{i=1}^n \phi_i$, la estadística de prueba del test del signo, $E(S) = \frac{n}{2}$ y $V(S) = \frac{n}{4}$

$$\begin{aligned}
 P(S \geq k) &= \alpha \\
 P(S - E(S) \geq k - E(S)) &= \\
 P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} \geq \frac{k - E(S)}{\sqrt{V(S)}}\right) &= \\
 P(Z \geq Z_\alpha) &= \alpha
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{k - E(S)}{\sqrt{V(S)}} &= Z_\alpha \\
 k - E(S) &= Z_\alpha \sqrt{V(S)} \\
 k &= E(S) + Z_\alpha \sqrt{V(S)} \\
 k &\approx \frac{n}{2} + Z_\alpha \sqrt{\frac{n}{4}}
 \end{aligned}$$

Y se obtiene la expresión para K

- Encuentre una expresión, basada en la distribución asintótica de la estadística de **Signo**, para calcular la potencia de este test.

Solución: Recordando que el error tipo II (β) se puede ver como la probabilidad de no rechazar H_0 dado que es falsa, y que además la potencia ($\rho(\theta)$) se puede ver como $1 - \beta$ es decir que

$$\begin{aligned}
 \rho(\theta) &= 1 - \beta(\theta) \\
 &= P(\text{rechazar } H_0 | \text{es falsa } H_0) \\
 &= P(Z > Z_\alpha | \theta > \theta_0) && \text{distribución asintótica} \\
 &= P(S \geq k; \theta > 0) \\
 &= \sum_{i=k}^n p^i (1-p)^{n-i}
 \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores terminan siendo equivalentes. Ahora, con la distribución asintótica obtenemos que:

$$\beta(\theta) \approx P\left(\frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 1 - P\left(Z < \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Calcule la potencia del test del **Signo** para $p=0.51, 0.52, \dots, 0.99$ usando la expresión del ítem anterior: **Solución:**

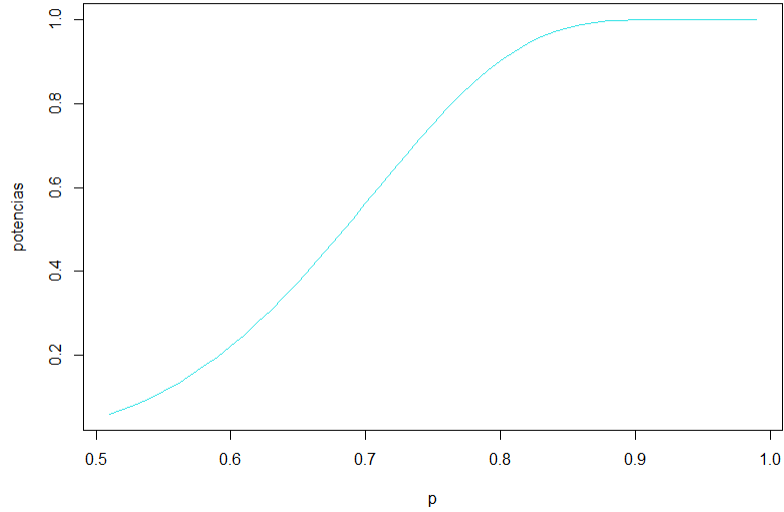
```
> set.seed(45)
> p=seq(0.51,0.99, by=0.01)
> Z=qnorm(0.95)
> n=20
> k=(n/2)+(Z*sqrt(n/4))
> potencias=1-pnorm((k-(n*p))/sqrt(n*p*(1-p)))
> potencias
[1] 0.05988710 0.07116866 0.08394585 0.09831348
[5] 0.11435790 0.13215467 0.15176625 0.17323960
[9] 0.19660379 0.22186767 0.24901755 0.27801503
[13] 0.30879501 0.34126388 0.37529806 0.41074284
[17] 0.44741172 0.48508634 0.52351699 0.56242396
[21] 0.60149983 0.64041278 0.67881108 0.71632900
[25] 0.75259405 0.78723592 0.81989679 0.85024333
[29] 0.87797983 0.90286233 0.92471302 0.94343387
[33] 0.95901834 0.97155938 0.98125164 0.98838585
[37] 0.99333334 0.99651981 0.99838932 0.99936223
[41] 0.99979475 0.99995029 0.99999197 0.99999929
[45] 0.99999998 1.00000000 1.00000000 1.00000000
[49] 1.00000000
```

El vector "potencias" contiene las 50 potencias de los 50 test con el valor de respectivo

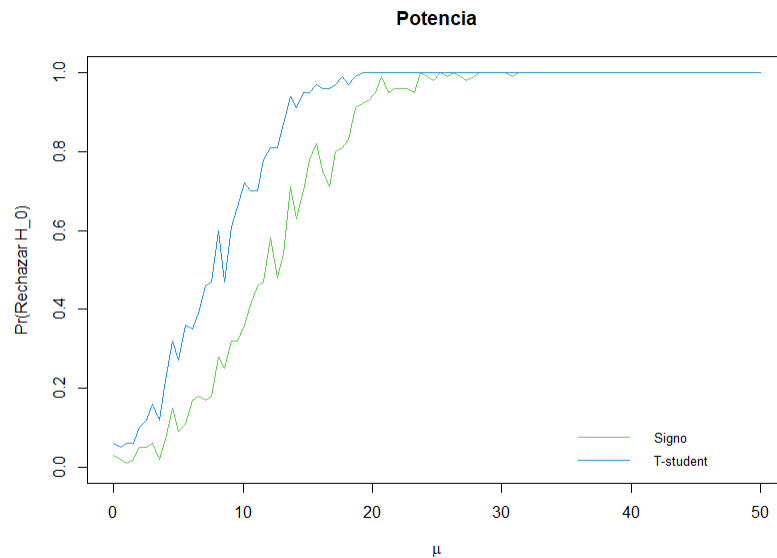
- Grafique la función potencia

Solución: Usamos el comando:

```
plot(p,potencias,type = "l", col=85)
```



- Compare la función de potencia del **Signo** con la función de potencia basado en la distribución **T-student** **Solución:**



- Suponga que quiere probar $H_0 : \theta = 0$ vs $H_0 : \theta > 0$ y que dispone de una muestra de tamaño 20 ($n = 20$).

- Encuentre una expresión para hallar el valor crítico K del test de **Wilcoxon** usando la distribución asintótica de la estadística de prueba.

Solución: Puesto que si consideramos la distribución asintótica cuando n es grande tenemos una expresión de la forma

$$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} \sim N(0, 1)$$

Donde $T = \sum_{i=1}^n R_i^+ S(Y_i)$, $E(T) = \frac{n(n+1)}{4}$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

Además sabemos que se rechaza H_0 si $T \geq k$ donde k tal que $P(T \geq k) = \alpha$, comenzaremos con esta expresión

$$\begin{aligned} P(T \geq k) &= \alpha \\ P(T - E(T) \geq k - E(T)) &= \\ P\left(\frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} \geq \frac{k - E(T)}{\sqrt{V(T)}}\right) &= \\ P(Z \geq Z_\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

De modo que al tener la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{k - E(T)}{\sqrt{V(T)}} &= Z_\alpha \\ k - E(T) &= Z_\alpha \sqrt{V(T)} \\ k &= E(T) + Z_\alpha \sqrt{V(T)} \\ k &\approx \frac{n(n+1)}{4} + Z_\alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \end{aligned}$$

Encontramos una expresión para el valor crítico k .

- Encuentre una expresión, basada en la distribución asintótica de la estadística de Wilcoxon, para calcular la potencia de este test.

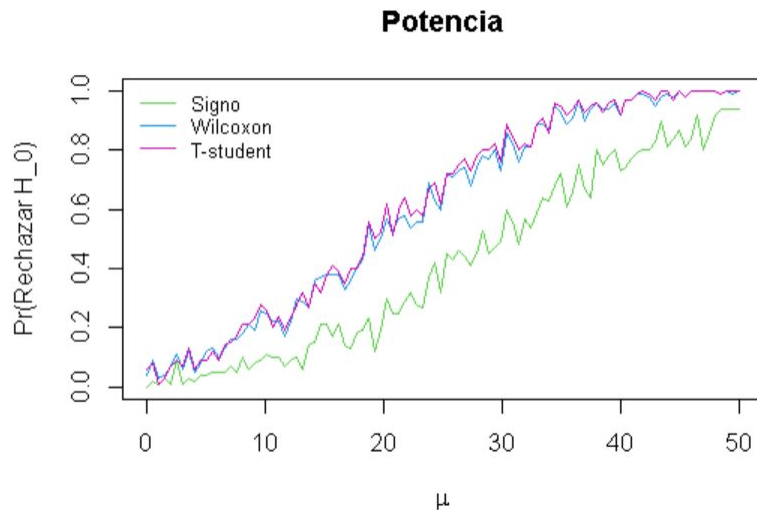
Solución: Recordando que el error tipo II (β) se puede ver como la probabilidad de no rechazar H_0 dado que es falsa, y que además la potencia ($\rho(\theta)$) se puede ver como $1 - \beta$ es decir que

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= 1 - \beta(\theta) \\ &= P(\text{rechazar } H_0 | \text{es falsa } H_0) \\ &= P(Z > Z_\alpha | \theta > \theta_0) \quad \text{distribución asintótica} \\ &= P(T \geq k; \theta > 0) \end{aligned}$$

Las anteriores terminan siendo expresiones equivalentes.

- Usando simulación de una distribución normal $\mu = 0$, compare la potencia de los tests del Signo, Wilcoxon y T-student.

Solución: Haremos 100 simulaciones de muestras de tamaño 20 por cada variación de μ , donde esta comienza en 0 y va hasta el valor 50 y $sd=50$.



Por lo cual podemos ver que el test del Signo tiene menor desempeño con respecto a la media de una normal cuando de potencia se habla, además de que la potencia del test de Wilcoxon es casi la misma que la de la prueba T-student aunque esta es ligeramente mayor.

2.2 Dos muestra pareadas

8. Se llevó a cabo un estudio para determinar el grado en el cual el alcohol entorpece la habilidad de pensamiento para realizar una tarea. Se seleccionaron 10 personas de distintas características. Cada persona hizo la actividad sin nada de alcohol y después de haber consumido alcohol (hasta tener 0.1%). Los tiempos antes y después (en minutos), se dan a continuación.

Antes	Después
28	35
22	40
55	25
45	37
32	30
32	30
39	58
45	51
67	34
61	48
46	30

- a) El tiempo antes es menor que el tiempo después por más de 10 minutos?. Emplee los tests del Signo y Wilcoxon. Haga las pruebas a mano y usando R.

Solución:

Test del signo:

A mano:

Sea X_1 Antes, X_2 Después y $Y = X_2 - X_1$ planteamos la hipótesis:

$$H_0 : \theta = 10$$

$$H_a : \theta > 10$$

Con θ mediana de Y. La estadística de prueba para juzgar esta hipótesis es:

$$S = \sum_{i=1}^{10} \psi_i$$

donde ψ_i es la función con valor 1 si $Y_i > 10$ y 0 si $Y_i < 10$. Así, para este ejercicio $S = 2$ ya que tenemos que $Y = 7, 18, -30, -8, -2, 19, 6, -33, -13, -16$.

Así, considerando un nivel de significancia del 0.05 se rechaza H_0 si S , con $P[S \leq k] = 0.05$ y ese k es 8, porque $P(S \geq 8) = 0.054$. Como $S < k$, es decir $2 < 8$ no hay evidencia para rechazar $H_0 : \theta = 10$, es decir que el tiempo antes no es menor que el tiempo de después por más de 10 minutos.

En R:

Realizando este mismo ejercicio en R tenemos:

```
> x1<-c(28,22,55,45,32,39,45,67,61,46)
> x2<-c(35,40,25,37,30,58,51,34,48,30)
> SIGN.test(x2,x1,md=10, alternative = "greater")

Dependent-samples Sign-Test

data:  x2 and x1
S = 2, p-value = 0.9893
alternative hypothesis: true median difference is greater than 10
95 percent confidence interval:
 -17.49333      Inf
sample estimates:
median of x-y
          -5

Achieved and Interpolated Confidence Intervals:

               Conf.Level   L.E.pt U.E.pt
Lower Achieved CI    0.9453 -16.0000    Inf
Interpolated CI      0.9500 -17.4933    Inf
Upper Achieved CI    0.9893 -30.0000    Inf
```

Dado que el p-valor es de 0.9893 no rechazamos $H_0 : \theta = 10$, es decir que el tiempo antes no es menor que el tiempo de después por más de 10 minutos.

Test de Wilcoxon:

A mano:

Sea X_1 Antes, X_2 Después y $Y = X_2 - X_1$ planteamos la hipótesis:

$$H_0 : \theta = 10$$

$$H_a : \theta > 10$$

Con θ mediana de Y . La estadística de prueba para juzgar esta hipótesis es:

$$T = \sum_{i=1}^{10} R_i^+ \psi_i$$

donde ψ_i es la función con valor 1 si $Y_i > 10$ y 0 si $Y_i < 10$ y R_i^+ es la posición que ocupa $|Y_i|$ en la sucesión ordenada.

Así, para este ejercicio tenemos:

$-Y_i$	R_i	ψ_i	$R_i\psi_i$
7	3	1	3
18	7	1	7
30	9	0	0
8	4	0	0
1	2	0	0
19	8	1	8
6	2	1	2
33	10	0	0
13	5	0	0
16	6	0	0

Luego $T = 20$. Además tenemos que:

$$E(T) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{10(10+1)}{4} = 27.5$$

$$Var(T) = \frac{n(n+1)(2n+2)}{24} = \frac{10(10+1)(20+1)}{24} = 96.25$$

$$Z_c = \frac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} = \frac{20 - 27.5}{\sqrt{96.25}} = -0.7644$$

Como Z_c tiene una distribución normal estándar entonces rechazamos H_0 si $Z_c \geq Z_\alpha$ donde $Z_\alpha = 1.645$. Luego no hay evidencia para rechazar $H_0 : \theta = 10$ es decir que el tiempo antes no es menor que el tiempo de después por más de 10 minutos.

En R:

Realizando este mismo ejercicio en R tenemos:

```
> wilcox.test(x1, x2, alternative = "two.sided",
+             mu = 10, paired = TRUE, conf.level = 0.95)

Wilcoxon signed rank exact test

data:  x1 and x2
V = 20, p-value = 0.4922
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 10
```

Dado que el p-valor es de 0.4922 no rechazamos $H_0 : \theta = 10$, es decir que el tiempo antes no es menor que el tiempo de después por más de 10 minutos.

b) Realice la comparación usando un test de permutaciones.

Solución:

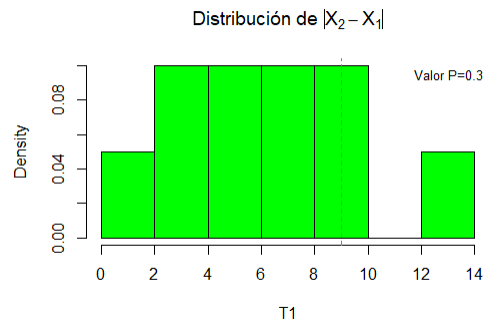
Desarrollado en R:

```
> set.seed(10)
> comb<-c(x2, x1)
> perm<-complete_ra(20, conditions = c("a", "d"))
> datos<-data.frame(comb,perm)
```

```

> medianas<-tapply(datos$comb, datos$perm, median)
> T1<-abs(medianas[1]-medianas[2])
> Tc1=abs(median(x2)-median(x1));Tc1
[1] 9
>
>
> T1=NULL
> P=10
> for (i in 1:P){
+   comb<-c(x1, x2)
+   perm<-complete_ra(20, conditions = c("a", "d"))
+   datos=data.frame(comb,perm)
+   medianas=tapply(datos$comb, datos$perm, median)
+   T1[i]=abs(medianas[1]-medianas[2])
+ }
>
> hist(T1, freq=FALSE, main=expression(Distribución~de~abs(X[2]-X[1])),
col="green")
> abline(v=Tc1, col=2, lty=2)
> p_valor=sum(ifelse(T1>Tc1, 1,0))/P;p_valor
[1] 0.3
> legend("topright", bty="n", legend="Valor P=0.3", col=2, cex=0.8)
>

```



2.3 Dos Muestras Independientes

9. Defina el test de Ansary-Bradley de igualdad de varianzas (ver capítulo 5 del libro de Hollander y Wolfe).

Solución: Primero debemos considerar los siguientes supuestos:

- Las X_1, X_2, \dots, X_m son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas correspondientes a la población 1. Del mismo modo las Y_1, Y_2, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas correspondientes a la población 2.
- Las X_1, X_2, \dots, X_m y las Y_1, Y_2, \dots, Y_n son mutuamente excluyentes.

Se plantea la hipótesis de que X tiene la misma distribución que Y , donde F corresponde a la función de distribución de la población 1 y Q a la de la población 2. Se puede ver como:

$$H_0 : F(t) = G(t) \quad \forall t$$

Puesto que asumimos que se cumple, tenemos que Y tiene la misma distribución de X mas no la misma mediana. Es equivalente a probar

$$\frac{X - \theta_1}{\eta_1} \stackrel{d}{=} \frac{Y - \theta_2}{\eta_2}$$

donde η_1 y η_2 son parámetros de escala para X y Y respectivamente. Además que desde este punto adicionamos (no obligatorio) el supuesto de

1. La mediana de X es (θ_1) igual a la mediana (θ_2) de Y
De modo que el parámetro de interés es la proporción de escala $\gamma = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ y si existe $Var(X)$ y $Var(Y)$ se tiene que $\gamma^2 = \frac{Var(X)}{Var(Y)}$. Planteando

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad vs \quad H_1 : \gamma^2 > 1, H_2 : \gamma^2 < 1, H_3 : \gamma^2 \neq 1$$

Se procede uniendo de las muestras, terminando con una de tamaño $N = n + m$, además de organizarlas de menor a mayor y asignar su respectivo rango con dicho orden. Puesto que el estadístico de prueba es

$$C = \sum_{j=1}^n R_{ij}$$

Por lo tanto se rechaza H_0 si $C \geq c_\alpha$ para el primer caso, para H_2 y H_3 rechazamos H_0 si $C \leq [c_{1-\alpha} - 1]$ o, si $C \geq c_\alpha$ o $C \leq [c_{1-\alpha} - 1]$. Donde los valores de c_α se encuentran en la tabla A8 del Hollander and Wolfe.

- a) Aplíquelo a un conjunto de datos reales o simulados usando R (ver función `ansari.test`).

Solución: El dataset `births` del paquete `openintro` contiene información sobre 150 nacimientos junto con información de las madres. Se quiere determinar si existen evidencias significativas de que el peso de los recién nacidos cuyas madres fuman difiere de aquellos cuyas madres no fuman. Nos planteamos

$$\frac{W_{nonsmoker} - \theta}{\eta_1} \stackrel{d}{=} \frac{W_{smoker} - \theta}{\eta_2}$$

```
> library(openintro)
> births
# A tibble: 150 x 9
   f_age m_age weeks premature visits gained weight sex_baby smoke
   <int> <int> <int> <fct>      <int>  <int>  <dbl> <fct>    <fct>
1    31    30    39 full term      13     1   6.88 male    smoker
2    34    36    39 full term       5    35   7.69 male  nonsmoker
3    36    35    40 full term      12    29   8.88 male  nonsmoker
4    41    40    40 full term      13    30    9  female nonsmoker
5    42    37    40 full term     NA    10   7.94 male  nonsmoker
6    37    28    40 full term      12    35   8.25 male    smoker
7    35    35    28 premie        6    29   1.63 female nonsmoker
8    28    21    35 premie        9    15    5.5 female  smoker
9    22    20    32 premie        5    40    2.69 male    smoker
10   36    25    40 full term      13    34   8.75 female nonsmoker
# ... with 140 more rows
```

La anterior es una pequeña mirada a los datos, donde suponemos la independencia correspondiente al peso de los hijos de madres fumadoras y de las que no lo hacen. Tendremos en cuenta el peso ("weight") y si la madre fuma o no es decir la columna "smoke".

```
R<-rank(weight)
P<-cbind(births,R)
Cs<-(P[P$smoke == "smoker", "R"])
```

Puesto que ambas poblaciones ("nonsmoker" y "smoker") ya están mezcladas, añadimos el rango con respecto al peso, en Cs llamamos el rango del peso de los niños de madres que fuman, para continuar sumamos lo obtenido en Cs

```
sum(Cs)
[1] 3396
```

Puesto que tenemos bastantes datos ($N = 150$, $m = 100$ de "nonsmoker" y $n = 50$ de "smoker") continuaremos con la distribución asintótica es decir

$$C^* = \frac{C - E_0(C)}{\{\text{var}_0(C)\}^{1/2}} = 11.926$$

donde

$$E_0(C) = \frac{n(N+1)^2}{4N} = \frac{50(150+1)^2}{4 * 150} = 1900.08$$

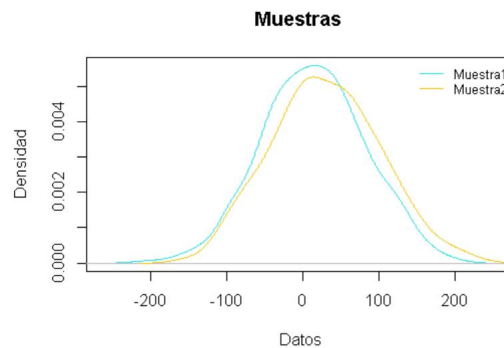
$$\text{var}_0(C) = \frac{mn(N+1)(3+N^2)}{48N^2} = \frac{100 * 50(150+1)(3+150^2)}{48 * 150^2} = 15731.2$$

Por lo que N es impar.

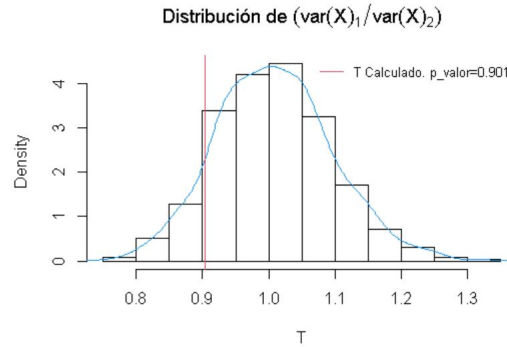
Como $C^* > Z_{\alpha/2}$ Rechazamos H_0 es decir que no hay evidencia suficiente para decir que tienen la misma función de distribución los pesos de niños de madres fumadoras con respecto a los hijos de no fumadoras. De manera similar traba la función `ansari.test` en R.

- b) Haga un test de **permutaciones** para comparar las varianzas de las dos poblaciones

Solución: Comenzamos simulando dos muestras con la distribución normal en R, la primera muestra con $\mu_1 = 20$ y $\sigma_1 = 63$, la segunda con $\mu_2 = 30$ y $\sigma = 70$, cada una de tamaño $n = 500$. Gráficamente su densidad se ve del siguiente modo



A primera vista se ve que su dispersión es muy similar, podemos pensar que se inclina a no rechazar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, pero igual lo comprobaremos. Al calcular T_c con permutaciones (Código en el script) obtenemos que $T_c = 0.9036712$ el cual se mostrará en la siguiente gráfica, además de este tambien encontramos el p -valor, simulando T y viendo el promedio de estos que sea mayor al T_c . Donde $T = V(X_1)/V(X_2)$ el cual vemos a continuación



Efectivamente tenemos que el $p_valor > \alpha$ y por lo cual no rechazamos H_0 .

2.4 K-Muestras

Use R para los siguientes ejercicios.

- Genere muestras aleatorias de tres distribuciones normales con medias y varianzas iguales. Pruebe la hipótesis de normalidad de cada muestra usando el test de Lilliefors. Pruebe la hipótesis de igualdad de medianas usando la estadística de Kruskal-Wallis. Compruebe previamente que las varianzas son iguales (usando un test de Bartlett).

Solución: Creamos las 3 muestras normales con parámetros $\mu = 4$ y $\sigma^2 = 2$ y mediante el test de Bartlett verificamos la homogeneidad de varianzas:

```
> muestra1=rnorm(500,4,2)
> muestra2=rnorm(300,4,2)
> muestra3=rnorm(1000,4,2)
> bartlett.test(list(muestra1,muestra2,muestra3))
```

Bartlett test of homogeneity of variances

data: list(muestra1, muestra2, muestra3)
Bartlett's K-squared = 0.4299, df = 2, p-value = 0.8066

Analizamos el p valor de la prueba de Bartlett, como es de 0.6711 podemos decir que no se rechaza la hipótesis nula de varianzas iguales, lo que es coherente con la generación de las muestras iniciales. Ahora veamos las pruebas de normalidad usando el comando lillie.test()

```
> lillie.test(muestra1)
```

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data: muestra1
D = 0.026773, p-value = 0.5187

```
> lillie.test(muestra2)
```

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data: muestra2
D = 0.022488, p-value = 0.9705

```
> lillie.test(muestra3)

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  muestra3
D = 0.022019, p-value = 0.2828
```

Obtenemos los siguientes p valores de acuerdo a cada muestra respectivamente: 0.5187, 0.9705 y 0.2828, entonces no se rechaza ninguna de las 3 hipótesis de normalidad para las 3 muestras. Luego el test confirma que sí provienen de una distribución normal. Veamos ahora el test de Kruskal-wallis mediante el comando `kruskal.test()`

```
> y=c(muestra1,muestra2,muestra3)
> grupo1=c(rep(1,500),rep(2,300),rep(3,1000))
> kruskal.test(y~grupo1)

Kruskal-Wallis rank sum test

data:  y by grupo1
Kruskal-Wallis chi-squared = 1.5816, df = 2, p-value = 0.4535
```

Con dicha prueba se obtiene un p valor de 0.4535, de donde no se rechaza la hipótesis de igualdad medias, lo cuál es, nuevamente, consistente con la generación de dichas medias al inicio del ejercicio.

- Genere muestras aleatorias de tres distribuciones normales con medias distintas y varianzas iguales. Pruebe la hipótesis de igualdad de medianas usando la estadística de Kruskal-Wallis. Pruebe previamente que las varianzas son iguales. Haga un test de comparación múltiple no paramétrico.

Solución:

En primer lugar tomarán los siguientes valores $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 15$ y $\mu_3 = 8$ para las tres poblaciones normales. Se simulan las 3 normales con el siguiente código:

```
> set.seed(10)
> n=1000
> muestra1=rnorm(n, 5, 2)
> muestra2=rnorm(n, 15, 2)
> muestra3=rnorm(n, 8, 2)
>
> datos=c(muestra1, muestra2, muestra3)
> grupos=c( rep(1, 1000), rep(2, 1000), rep(3, 1000))
> datosf=as.data.frame(cbind(datos, grupos))
```

Ahora miraremos si las varianzas son iguales con el test de Hartley y el de Bartlett y obtenemos:

```
> hartleyTest(datos~grupos, data=datosf)

Hartley's maximum F-ratio test of homogeneity of variances

data:  datos by grupos
F Max = 1.108, df = 999, k = 3, p-value = 0.2372
```

```
> bartlett.test(datos~grupos, data=datosf)

Bartlett test of homogeneity of variances

data:  datos by grupos
Bartlett's K-squared = 2.6251, df = 2, p-value = 0.2691
```

Dado que los p-valores son 0.237 y 0.269 respectivamente no hay evidencia para rechazar la hipótesis de homogeneidad de varianzas. Así procederemos a realizar el test de Kruskal-Wallis.

```
> kruskal.test(datos ~ grupos, data = datosf) ##Rechazo hipotesis de igualdad de medianas

Kruskal-Wallis rank sum test

data:  datos by grupos
Kruskal-Wallis chi-squared = 2298.2, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Dado el p-valor de 0 aproximadamente rechazo la hipótesis de igualdad de medianas de los tres grupos. Ahora realizaremos el test de dunn de comparación múltiple para saber cuáles grupos difieren entre ellos.

```
> dunn.test (datos, g=grupos, method="bonferroni", kw=TRUE, label=TRUE, alpha=0.05)
Kruskal-Wallis rank sum test

data:  datos and grupos
Kruskal-Wallis chi-squared = 2298.2014, df = 2, p-value = 0
```

Col	Mean	1	2
2	-47.51591	0.0000*	
3	-18.25071	0.0000*	29.26519

```
alpha = 0.05
Reject Ho if p <= alpha/2
```

Luego hay diferencias significativas entre las medianas de todos los grupos.

- Genere muestras de tres distribuciones normales (dos con medias iguales y una con media distinta) de varianzas iguales. Pruebe la hipótesis de igualdad de medianas usando la estadística de **Kruskal-Wallis**. Pruebe previamente que las varianzas son iguales.
Solución: Primeo creamos las simulaciones, donde $\sigma = 20$ para las tres distribuciones, y la segunda sí tiene una media distinta.

```
set.seed(1)
m1<-c(trunc(rnorm(30,70,20)))
set.seed(2)
```

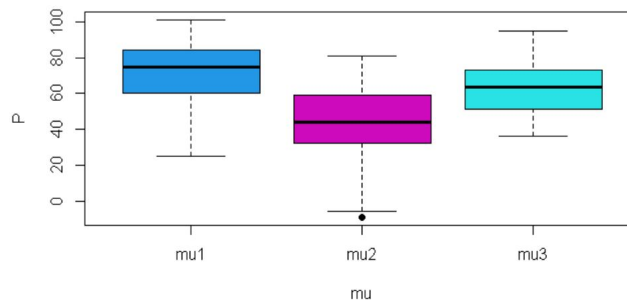


```

m2<-c(trunc(rnorm(30,40,20)))
set.seed(3)
m3<-c(trunc(rnorm(30,70,20)))

mu =c(rep("mu1", 30), rep("mu2", 30), rep("mu3", 30))
P = c(m1,m2,m3)
mu=as.factor(mu)
datos <- as.data.frame(cbind( mu,P))

```



Miramos si sus varianzas efectivamente son iguales, para ello usamos los siguientes test:

```

> hartleyTest(P ~ mu, data=datos)

Hartley's maximum F-ratio test of homogeneity of
variances

data: P by mu
F Max = 2.0444, df = 29, k = 3, p-value = 0.1403

> bartlett.test(P ~ mu, data=datos)

Bartlett test of homogeneity of variances

data: P by mu
Bartlett's K-squared = 3.8425, df = 2, p-value = 0.1464

> leveneTest(P ~ mu)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value Pr(>F)
group 2  1.2593  0.289
87

```

Sin nos fijamos en los p -valores de cada test, notamos que todos son mayores a α , además que para el test de Bartlett como de Hartley se tienen valores parecidos. Proseguimos con Kruskal a probar $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ es decir igualdad de medianas

```

> kruskal.test(P ~ mu, data = datos)

Kruskal-Wallis rank sum test

```

```
data: P by mu
Kruskal-Wallis chi-squared = 22.018, df = 2, p-value =
1.656e-05
```

Como el p -value es menor a α rechazamos H_0 .

- Use un test de **comparaciones múltiples** no paramétrico (si se requiere) para determinar en el ejercicio anterior entre cuales poblaciones hay diferencias.

Solución: Cómo vimos en el punto anterior, al menos una mediana es distinta a las demás. En vista de la presencia de empates usaremos el test de Nemenyi con el comando de R: `posthoc.kruskal.nemenyi.test`

```
> posthoc.kruskal.nemenyi.test(P~mu, dist="Chisquare")

Pairwise comparisons using Nemenyi-test with Chi-squared
approximation for independent samples

data: P by mu

      mu1      mu2
mu2 2.8e-05 -
mu3 0.3668  0.0067

P value adjustment method: none
Warning message:
In posthoc.kruskal.nemenyi.test.default(c(57, 73, 53, 101, 76, 53, :
```

Este comando nos arroja los p valores según las comparaciones múltiples. Vemos que el p valor correspondiente a μ_1 y μ_2 es casi cero, luego podemos afirmar con un nivel de significancia α que dichas medias distan significativamente. También el p valor correspondiente a μ_2 y μ_3 es bastante pequeño, lo que indica una diferencia entre dichas medias

- Simule un conjunto de datos para el cual sea válido usar el test de **Friedman** asumiendo cierta la hipótesis nula y haga la correspondiente prueba.

Solución: Los supuestos del test de Friedman son que un mismo individuo es observado bajo condiciones experimentales distintas, además, generaliza el test del signo de muestras pareadas a mas de dos tratamientos. Hay independencia entre individuos pero no entre tratamientos. Se prueba la hipótesis nula igualdad de medianas. Ahora veamos una simulación de datos en R para el que sea válido usar Friedman y la correspondiente prueba:

```
> set.seed(8)
> x<-rnorm(100)
> y<-300*x
> datos<-matrix(c(x,y),ncol = 2 ,dimnames = list(1:100,c("mues1","mues2")))
> cor.test(x,y,method = "spearman")

Spearman's rank correlation rho

data: x and y
S = 0, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
rho
1
```

Con esa simulación de datos garantizamos que cada individuo sea independiente pero que los tratamientos no lo sean, además estamos asumiendo cierta la hipótesis nula de igualdad de medianas ya que hicimos $y = 300x$ es decir Y como combinación lineal de X de igual manera, comprobamos esta relación entre tratamientos con un test de correlación de Spearman que indica un p valor de aproximadamente 0, por lo que rechazamos la hipótesis de no correlación entre X y Y.

Teniendo los supuestos, procederemos a realizar el test de Friedman:

```
> friedman.test(datos)

Friedman rank sum test

data:  datos
Friedman chi-squared = 0.64, df = 1, p-value = 0.4237
```

El test arroja un p-valor superior a 0.05, así no se rechaza la hipótesis de igualdad de medianas entre los tratamientos X y Y

- Simule un conjunto de datos para el cual sea válido usar el test de **Friedman** asumiendo falsa la hipótesis nula y haga la correspondiente prueba.

Solución: Si suponemos H_0 falsa, tendríamos medianas diferentes. Lo haremos con una distribución exponencial del tal modo que los individuos son independientes, pero no habrá independencia entre grupos:

```
> set.seed(9)
> lamda=3
> x1<-rexp(30, lamda)
> x2<-2*x1
> x3<-3*x1
> datos<-matrix(c(x1,x2,x3), ncol = 3, dimnames = list(1:30, c("1", "2", "3")))
> friedman.test(datos)

Friedman rank sum test

data:  datos
Friedman chi-squared = 60, df = 2, p-value = 9.358e-14
```

Es evidente que rechazaríamos H_0 puesto que el p-valor es bastante pequeño y menor a α .

11. ¿Cuándo es apropiado usar el test de Kruskal-Wallis y cuándo el de Jonckheere-Tersptra (no visto en el curso)? ¿Cuál es el criterio para escoger uno u otro?. Aplique los tests de Kruskal-Wallis y Jonckheere-Tersptra al ejemplo dado en la tabla 6.2 del libro de Hollander y Wolfe.

Solución: El test de Kruskal-Wallis sirva para verificar igualdad entre medianas entre grupos. Es la alternativa no paramétrica del test ANOVA, pues no requiere normalidad en los datos, pero no utiliza ninguna información apriori de los grupos. El test de Jonckheere-Tersptra es muy útil cuando sí hay una información apriori sobre los grupos y es que estos tienen un ordenamiento, por ejemplo, si se tienen q grupos, estos pueden estar dados por q temperaturas ascendentes, y dicho factor influye en la variable respuesta. Este test es más potente que el test de Kruskal-Wallis cuando los grupos se pueden ordenar y tiene los mismos supuestos: independencia entre observaciones y que provengan de una distribución continua y que esté medida en una escala ordinal o cuantitativa discreta.

La tabla 6.2 fue usada en el ejercicio del inciso c) del punto 4. Luego el test de Kruskal-Wallis se puede encontrar en dicho punto (pág. 14). Veamos el test de Jonckheere-Tersptra:

```
> jonckheere.test(DatosPsi, grupo)
```

```
Jonckheere-Terpstrata test
```

```
data: DatosPsi and grupo
```

```
Jonckheere z-value = 1.8909, p-value = 0.05864
```

```
alternative hypothesis: monotonic
```

Luego, con un nivel de significancia de 5% obtenemos nuevamente, que no existe evidencia suficiente para rechazar H_0 y entonces las medias pueden ser iguales