

Series de Potencias

Vamos a estudiar series en las cuales los términos dependen de una variable

O sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo y $x \in \mathbb{R}$.

Estas series son una generalización de los polinomios y tienen muchas aplicaciones.

Por ejemplo, se las utiliza para aproximar funciones como $\sin(x)$, e^x , $\Gamma(x)$ y también para aproximar integrales como $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, ya que tienen propiedades que las convierten en fáciles de manipular.

Definición: Sean $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $a \in \mathbb{R}$. Llamamos Serie de potencias centrada en a , a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

(notar que adoptamos la convención $(x-a)^0 = 1$, aún cuando $x=a$).

En el caso particular de $a=0$, la serie de pot. es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

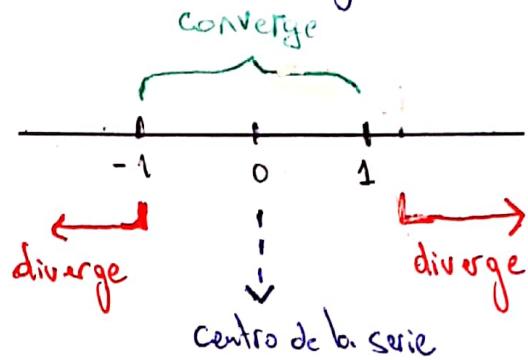
Observemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es una serie de términos constantes, o sea una serie numérica. A continuación vamos a estudiar criterios para decidir para cuales $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

No忘que si $x=a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 < \infty$, o sea, todo serie de potencias centrada en a converge en $x=a$.

Hay series de potencias que sólo convergen en $x=a$, otras que convergen para "algunos" $x \in \mathbb{R}$ y otras que convergen en todo $x \in \mathbb{R}$.

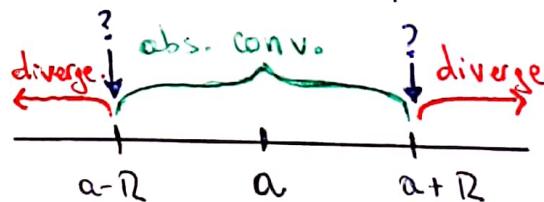
Ejemplo: Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$ y $a=0$, entonces la serie de potencias centrada en 0 tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (*) \leadsto serie geométrica

Ya sabemos que la serie (*) converge y vale $\frac{1}{1-x} \Leftrightarrow |x| < 1$



Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de pot. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

- (i) La serie converge sólo cuando $x=a$.
- (ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\exists R > 0$ tq la serie conv. absolutamente $\forall x$ tq $|x-a| < R$ y es divergente $\forall x$ tq $|x-a| > R$.
(más adelante veremos una manera)
de calcular R



Definición: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias.

- (A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=0$ si sólo converge en $x=a$.
- (B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=\infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia

Definición: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

Observación:

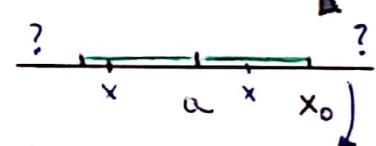
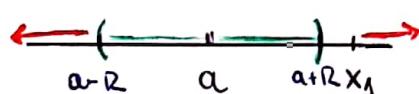
- Si $R=0$, entonces $I=\{a\}$.
- Si $R=\infty$, entonces $I=(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
- Si $0 < R < \infty$, entonces I puede ser $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o $(a-R, a+R]$

Observación: notar que si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge en algún $x_0 \neq a$, entonces por

(iii) del teorema anterior $R \geq |x_0 - a|$ y además la serie converge $\forall x$ tq $|x-a| < |x_0-a|$

Por otro lado, si la serie diverge en x_1 , entonces $R \leq |x_1 - a|$ y además la

serie diverge $\forall x$ tq $|x-a| > |x_1 - a|$



(podría ser $a+R > |x_0 - a|$)

(podría ser $a-R < |x_1 - a|$)

Ejemplo: determine el radio de convergencia R y el intervalo de convergencia I de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

• Si $x=1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente (serie armónica). Luego, $R \leq 1$. ①

• Si $x=-1$, tenemos $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ convergente (crit. ser. alternantes). Luego, $R \geq 1$ ②

De ① y ② concluimos que $R=1$ y que $I = [-1, 1]$.

A continuación veremos un criterio que nos permite calcular el radio de convergencia 53

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dado la serie de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, con $C_n \neq 0 \quad \forall n > n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} .$$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$.

Demonstración: Para cada $x \neq a$, podemos aplicar el criterio del cociente para series numéricas a la serie $I = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \underbrace{(x-a)^n}_{a_n}$.

Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1} (x-a)^{n+1}|}{|C_n (x-a)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} |x-a| = L|x-a|$.

(i) Supongamos $0 < L < \infty$.

Luego, por el Crit. Cociente para series numéricas si $\begin{cases} L|x-a| < 1 \Rightarrow I \text{ conv. abs.} \\ L|x-a| > 1 \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$. O sea

Si $\begin{cases} |x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ conv. abs} \\ |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases} \quad \therefore R = \frac{1}{L}$.

(ii) Si $L = 0$, entonces $L|x-a| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $\therefore R = \infty$.

(iii) Si $L = \infty$, entonces $L|x-a| = \infty \quad \forall x \neq a$ y $\therefore R = 0$.

Ejemplo: Calcule el radio R e intervalo de convergencia I de las siguientes series de pt.

① $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$. Luego, $R=0$ e $I=\{0\}$ (o sea, la serie diverge $\forall x \neq 0$).

② $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Luego $R=1$.

Además, en $x=-1$ y en $x=1$ la serie diverge (por el criterio de la divergencia).

Entonces $I=(-1, 1)$.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} (x-1)^n$ (notar que $a=1$)

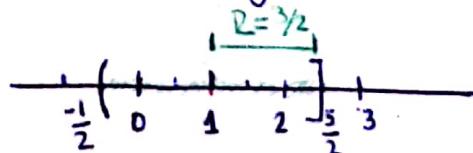
Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}$. Luego, $R=\frac{3}{2}$.

Veamos qué pasa en $x=a-R=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$ y en $x=a+R=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

• Si $x=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} \underset{-1}{\cancel{\downarrow}} \rightarrow \text{diverge}$ (por ser serie armónica)

• Si $x=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rightarrow \text{converge}$ (por criterio para series alternantes)

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I=\left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right]=\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$



Representación de funciones como series de potencias.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge, la serie define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia.

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ si } |x| < 1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ la igualdad (*) vale si } |x| < 1$$

y sea, si $|x| < 1$. Luego, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, si $|x| < 1 \iff x \in (-1, 1)$.

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1-(-\frac{x}{2}))} \stackrel{(\Delta)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \text{ la igualdad } (\Delta) \text{ vale}$$

si $|\frac{x}{2}| < 1$, y sea $|x| < 2$. Luego, $\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$ si $x \in (-2, 2)$.

Teorema (Derivación e integración de una serie de potencias).

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces

la función $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es derivable (y por tanto continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además

$$\textcircled{i} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\textcircled{ii} \quad \int f(x) dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

Los radios de convergencia de las series de potencias de (i) y (ii) son R .

Observación: puede suceder que los intervalos de convergencia de (i) y (ii) NO sean igual al de la serie original.

Observación: otra forma de escribir las ecuaciones (i) y (ii) es

$$(I) \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x-a)^n] \quad ("se\ deriva\ término\ a\ término")$$

$$(II) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx \quad ("se\ integra,\ término\ a\ término")$$

Ejemplo: expresar la función $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como una serie de potencias.

Notemos que $g(x) = f'(x)$ con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además sabemos que $f(x) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1$, & sea su radio de conv. es 1.

$$\text{Luego, } \frac{1}{(1-x)^2} = g(x) \stackrel{(*)}{=} f'(x) \stackrel{(**)}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]' \stackrel{(I)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad y$$

el radio de convergencia es $R = 1$

Ejemplo: expresar la función $\ln(1-x)$ como una serie de potencias.

Observemos que $-\ln(1-x) \stackrel{(*)}{=} \int f(x) dx$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además, $f(x) \stackrel{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x| < 1$.

$$\text{Luego } -\ln(1-x) \stackrel{(*)}{=} \int f(x) dx \stackrel{(**)}{=} \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \stackrel{(II)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ si } |x| < 1.$$

Para determinar C, evaluamos en $x=0$ obteniendo

$$-\ln(1) = C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Por lo tanto } \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ si } |x| < 1 \quad (\text{y sea } R=1).$$

Serie de Taylor y Polinomio de Taylor.

Queremos estudiar: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias?
¿Cómo es posible hallar esa representación?

- Sea f una función que se puede representar como serie de potencias, es decir

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

- Si evaluamos f en $x=a$, obtenemos $f(a) = c_0$

- Por el teorema anterior, podemos derivar f y obtenemos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

- Si evaluamos f' en $x=a$, obtenemos $f'(a) = c_1$

- Aplicando nuevamente el teorema a f' nos queda

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3 c_3(x-a) + 3 \cdot 4 c_4(x-a)^2 + \dots$$

- Si evaluamos f'' en $x=a$, obtenemos $f''(a) = 2c_2$

- Aplicando el teorema a f''' nos queda

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 c_4(x-a) + \dots$$

- Si evaluamos f''' en $x=a$, obtenemos $f'''(a) = 2 \cdot 3 c_3$

De manera general, obtenemos $f^{(n)}(a) = n! c_n$, donde $f^{(n)}$ es la derivada n -ésima de f y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (con la convención $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$)

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema: Si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a (58), es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \forall x \text{ tq } |x-a| < R$. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Definición: dada una función f que tiene derivadas de todos los órdenes en a , se llama serie de Taylor de f centrada en a a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

Observaciones

- ① Para el caso especial $a=0$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ y se suele llamar S. de MacLaurin.
- ② El teorema anterior nos dice que si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a , entonces esa serie es la serie de Taylor de f centrada en a (y por tanto f es igual a su serie de Taylor).

Ejemplo: Calcular la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ (MacLaurin) y determine su radio de convergencia.

Para calcular la S. de Taylor de f en 0 debemos hallar $f^{(n)}(0) \quad \forall n \geq 0$.

Como en este caso $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \geq 0$, tenemos que $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \geq 0$.

Luego, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Para averiguar su radio de convergencia utilizamos el criterio del cociente.

Como $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

Conclusión: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\text{esto nos dice que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R} \right)$

• Nos preguntamos ahora: ¿es cierto que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$?

O de manera más general: ¿cuándo una función f es igual a su serie de Taylor?

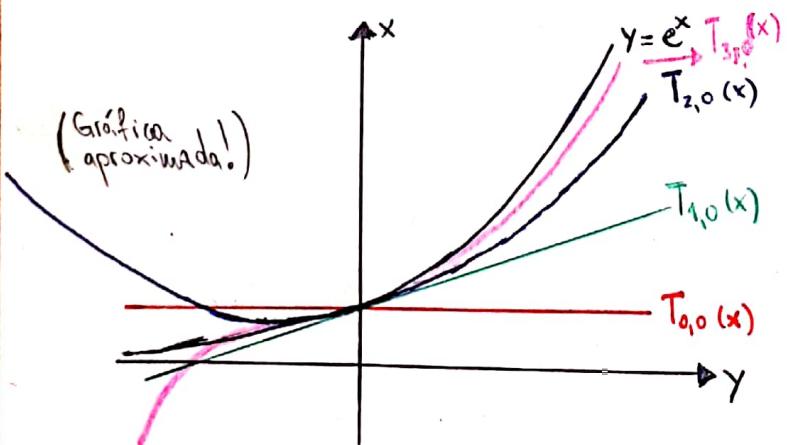
O de nuevo, ¿cuándo es cierto que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$?

Definición: Sea f tq existen $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$. Para $n \geq 0$, definimos el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a como

$$T_{n,a}(x) \doteq \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Observaciones

- ① Notar que la n -ésima suma parcial de la serie de Taylor es justamente el polinomio de Taylor de orden n .
- ② Notar que $T_{1,a}$ es la recta tangente al gráfico de f en el pto. $(a, f(a))$.
- ③ Notar que f y su polinomio de Taylor de orden n $T_{n,a}$ satisfacen $f^{(j)}(a) = T_{n,a}^{(j)}$ $\forall j \leq n$.



$$\begin{aligned} T_{0,0}(x) &= f(0) = e^0 = 1 \\ T_{1,0}(x) &= f(0) + f'(0)x = 1 + x \\ T_{2,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ T_{3,0}(x) &= f(0) + \dots + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Definición: se define el resto de Taylor de orden n centrado en a como

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x).$$

$$(Por lo tanto, f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)).$$

Teorema: Sea f una función tq existe $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Se cumple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \forall x \in (a-c, a+c) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = 0 \quad \forall x \in (a-c, a+c).$$

Demonstración:

$\Rightarrow)$ Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$. Entonces por definición de serie tenemos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,a}(x) \quad (\text{Límite de sumas parciales}).$$

$$\text{Luego, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - T_{n,a}(x)) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,a}(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$\Leftarrow)$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = 0 \quad \forall x \in (a-c, a+c)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_{n,a}(x)) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = f, \quad \forall x \in (a-c, a+c).$$

$$\text{Luego, por definición } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \forall x \in (a-c, a+c).$$

Para usar el teorema anterior necesitamos tener alguna expresión para $R_{n,a}$.

Teorema (Fórmula de Lagrange para el resto). Sea f una función tq existen

$f, f', \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe t entre x y a ($t \in (x, a)$ si $x < a$ y $t \in (a, x)$ si $x > a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Definición: Llamamos fórmula de Taylor a $f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

con t entre a y x .

$$= T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Ejemplos y Aplicaciones

Ejemplo: Probar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

• Ya vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Taylor de f centrada en $a=0$ y su radio es $R=+\infty$.

• Para probar que vale la igualdad, por el teorema anterior basta ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0$

Por b. Fórmula de Lagrange $R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$, para algún t entre 0 y x .

Luego, para $t \in (-x, x)$ tenemos

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = \frac{e^t |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ya vimos que } \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{para todos } x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Dar la serie de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ alrededor de $a=0$ (MacLaurin) y

probar que coincide con $\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Para hallar la serie de Taylor debemos calcular $f^{(n)}(0)$ $\forall n \geq 0$. Tenemos que

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \rightarrow f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

y luego se va repitiendo lo anterior. En general, tenemos que

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad y \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \forall n \geq 0.$$

Luego, la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $a=0$ queda (62)

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Veamos ahora que la serie coincide con la función $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f^{(n+1)}(t) = \pm \operatorname{sen}(t)$ o $\pm \cos(t)$, en cualquier caso vale $|f^{(n+1)}(t)| \leq 1$.

Luego,

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

O sea, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se approxima $\operatorname{sen}(0.2)$ por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, o sea $T_{7,0}(0.2)$.

Queremos estimar el valor de $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)|$.

Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = T_{7,0}(x) + R_{7,0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Fórmula de Taylor)

Por lo tanto $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$.

Ahora, $R_{7,0}(0.2) = \frac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!} (0.2)^8$, para algún $t \in (0, 0.2)$. Como

$|\operatorname{sen}^{(8)}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$|R_{7,0}(0.2)| = \left| \frac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!} (0.2)^8 \right| \leq \frac{1}{8!} \left(\frac{2}{10} \right)^8 = \frac{1}{8! 5^8} .$$

Conclusion: el error que se comete al approximar $\operatorname{sen}(0.2)$ por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\frac{1}{8! 5^8} \approx 6.3 \times 10^{-11}$.

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $\operatorname{Sen}(x)$ por $T_{7,0}(x)$ (63)

para cualquier $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Queremos estimar $|\operatorname{Sen}(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ para $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Como $|R_{7,0}(x)| = \frac{|\operatorname{Sen}^{(8)}(t)| |x|^8}{8!} \leq \frac{|x|^8}{8!} \leq \frac{1}{8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{8! 2^8}$, entonces

el error será menor que $\frac{1}{8! 2^8}$ para cualquier $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ejemplo: Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tq el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x)=\operatorname{Sen}(x)$ aproxima a $\operatorname{Sen}(x)$ con un error menor que 10^{-5} .

Buscamos hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|\operatorname{Sen}(x) - T_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Como $|\operatorname{Sen}(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ basta hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|R_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Ahora, $|R_{7,0}(x)| = \frac{|\operatorname{Sen}^{(8)}(t)| |x|^8}{8!} \leq \frac{1}{8!} |x|^8 < 10^{-5}$

\downarrow
 $t \in (0, x)$
 \Downarrow
 $t \in (x, 0)$

\downarrow
?

Luego, basta tomar $x \in \mathbb{R}$ tq $|x|^8 < \frac{8!}{10^5}$, o sea, todos los $x \in \mathbb{R}$

tq $|x| < \left(\frac{8!}{10^5}\right)^{\frac{1}{8}}$ cumplen lo requerido.

Ejemplo: Usando un polinomio de Taylor adecuado, hallar un valor aprox. de \sqrt{e} con un error menor a 10^{-2} .

- Notemos que $\sqrt{e} = e^{1/2}$. Luego, elegimos $f(x) = e^x$ y $a=0$ (ya que es fácil de calcular $f^{(n)}(0)$ y T_n)

Sabemos que $f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)$.

- Lo que se nos pide es hallar n tal que

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| R_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-2}.$$

Ahora, como $R_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^t}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, para algún $t \in (0, 1/2)$ y $f(x) = e^x$

satisface que $e^t < e^{1/2}$ para $t \in (0, 1/2)$, tenemos

$$\left| R_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2} \quad \text{y equivalentemente } e^{1/2} \cdot 10^2 < 2^{n+1} (n+1)! \quad (\star)$$

Probemos cuál n satisface (\star) ($e^{1/2} \cdot 10^2 \approx 165$)

$$n=0 \rightsquigarrow 2 \cdot 1! = 2 \quad \text{No } \times$$

$$n=1 \rightsquigarrow 4 \cdot 2! = 8 \quad \text{No } \times$$

$$n=2 \rightsquigarrow 8 \cdot 3! = 48 \quad \text{No } \times$$

$$n=3 \rightsquigarrow 16 \cdot 4! = 384 \quad \text{Si } \checkmark$$

O sea, $T_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)$ approxima a \sqrt{e} con un error menor a 10^{-2} .

Como $T_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, el valor aproximado que obtuvimos es $T_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} \approx 1.6458$ ($\sqrt{e} \approx 1.6487$)

Como justamente suponemos que no sabemos calcular $e^{1/2}$, sería mejor acotar e^t de la siguiente manera:

$$e^t < e^{1/2} < e^1 = 2.7183... < 3,$$

Luego, usando la acotación $e^t < 3$, la desigualdad (*) se convierte en: $3 \cdot 10^2 < 2^{n+1} \cdot (n+1)!$