Práctico 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$
Soluciones

Vectores y producto escalar.

1. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

   Solución:
   a) $2v + 3w - 5u = 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1)$
   $= (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)}$
   b) $5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$
   c) $5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$

2. Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle$,
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

   Solución:
   a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -2 + (-6) + 0 = \boxed{-8}$
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$

3. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:
   $$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$
   Solución: Calculamos ambos miembros por separado.

   Miembro izquierdo: $\langle 2v + 3w, -u\rangle = \langle 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1), -(1, -1, 1)\rangle$
   $= \langle(-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1)\rangle = \langle(4, -5, -3), (-1, 1, -1)\rangle$
   $= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6}$

   Miembro derecho: $-2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle = -2\langle(-1, 2, 0), (1, -1, 1)\rangle - 3\langle(2, -3, -1), (1, -1, 1)\rangle$
   $= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1)$
   $= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6}$

4. Probar que
   a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

   Solución: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.
   a) $\langle(2, 3, -1), (1, -2, -4)\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$
   b) $\langle(2, -1), (1, 2)\rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$

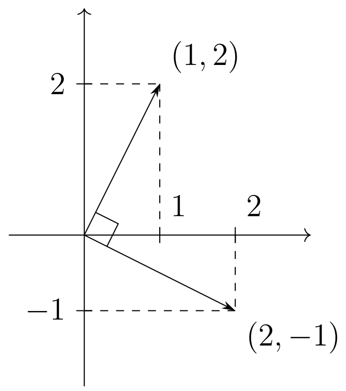


Figura 1. Ejercicio 4.b

5. Encontrar
   a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
   c) vectores $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ donde $w_1 = (1, 1, 1)$, utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

   Solución:
   a) Buscamos un vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(4, 3)$

$$\langle (3, -4), (x, y) \rangle = 3x - 4y = 0.$$

O escrito de otro modo, $3x = 4y$ o $x = \frac{4}{3}y$. Notemos que no tenemos ningún otra condición sobre los valores de x e y. Podemos entonces probar que valores específicos satisfacen la ecuación. Por ejemplo, si tomamos $y = 1$ entonces debemos tomar $x = \frac{4}{3}$. Es decir, el vector $(\frac{4}{3}, 1)$. Verifiquemos que

$$\langle (3, -4), (\frac{4}{3}, 1) \rangle = 3 \cdot \frac{4}{3} + (-4) \cdot 1 = 4 - 4 = \boxed{0}.$$

En conclusión, $(\frac{4}{3}, 1)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$.

   b) Procedemos como antes. Buscamos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle (2, -1, 4), (x, y, z) \rangle = 2x - y + 4z = 0.$$

En este caso podemos despejar y en función de x y z. Es decir, $y = 2x + 4z$. Luego, si tomamos $x = 1$ y $z = 0$, entonces debemos tomar $y = 2$. Es decir, el vector $(1, 2, 0)$. Verfiquemos que $\langle (2, -1, 4), (1, 2, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = \boxed{0}$
En conclusión, $(1, 2, 0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$.

   c) Seguiremos la idea de la Observación y el Ejemplo a continuación de la Proposición 1.7.5 (Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) del Apunte. Elegimos un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $v = e_1 = (1, 0, 0)$. Entonces el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, aplicado al conjunto $\{w_1\}$ y el vector v, nos asegura que el siguiente vector w_2 es ortogonal a w_1.

$$\begin{aligned} w_2 &= v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, 0, 0) - \frac{\langle (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle}(1, 1, 1) = (1, 0, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) \\ w_2 &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Ahora elegimos otro vector, por ejemplo $v = e_2 = (0, 1, 0)$, y le aplicamos el proceso al conjunto $\{w_1, w_2\}$ y al vector v. Entonces el siguiente vector w_3 es ortogonal a los vectores $\{w_1, w_2\}$.

$$w_3 = v - \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$
$$= (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) - \frac{\langle (0,1,0), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\rangle}{\langle \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\rangle}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$
$$= (0,1,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$
$$w_3 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

En conclusión, $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

6. Encontrar la longitud de los vectores.

   (a) $(2,3)$, (b) (t, t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

   SOLUCIÓN:

   $a)$ $||(2,3)|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$

   $b)$ $||(t,t^2)|| = \sqrt{t^2+(t^2)^2} = \sqrt{t^2+t^4} = \boxed{|t|\sqrt{1+t^2}}$

   $c)$ $||(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)|| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

7. Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

   (a) $v = (2,2), w = (1,0)$, (b) $v = (-5,3,1), w = (2,-4,-7)$.

   SOLUCIÓN: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

   $a)$ $\langle v, w\rangle = \langle (2,2),(1,0)\rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2+0 = \boxed{2}$
   $||v|| = ||(2,2)|| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   $||w|| = ||(1,0)|| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$
   $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45°}$

   $b)$ $\langle v, w\rangle = \langle(-5,3,1),(2,-4,-7)\rangle = -5\cdot 2 + 3\cdot(-4) + 1\cdot(-7) = -10-12-7 = \boxed{-29}$
   $||v|| = ||(-5,3,1)|| = \sqrt{(-5)^2+3^2+1^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$
   $||w|| = ||(2,-4,-7)|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+(-7)^2} = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$
   $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}}\right) = \boxed{126°9'55{,}57''}$

8. Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

   SOLUCIÓN: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

   $\langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3 =$
   $= \langle (x_1,x_2,x_3),(1,0,0)\rangle e_1 + \langle (x_1,x_2,x_3),(0,1,0)\rangle e_2 + \langle (x_1,x_2,x_3),(0,0,1)\rangle e_3$
   $= (x_1\cdot 1 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 0)e_1 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0)e_2 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 1)e_3$
   $= (x_1+0+0)e_1 + (0+x_2+0)e_2 + (0+0+x_3)e_3 = \boxed{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$

   $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) =$
   $= (x_1\cdot 1, x_1\cdot 0, x_1\cdot 0) + (x_2\cdot 0, x_2\cdot 1, x_2\cdot 0) + (x_3\cdot 0, x_3\cdot 0, x_3\cdot 1)$

$= (x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3) = (x_1+0+0, 0+x_2+0, 0+0+x_3) = (x_1,x_2,x_3) = \boxed{v}$

9. Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
   a) se cumple:
   $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$
   b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
   $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

   Solución:
   a) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=} \langle u, \lambda_1 v\rangle + \langle u, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P3}}{=} \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle \overset{\mathbf{P1}}{=} \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle$

   b) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=}$
   $\overset{\mathbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P3}}{=}$
   $\overset{\mathbf{P3}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \overset{\mathbf{HIP}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle$

   En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w\rangle = 0$.

Rectas.

10. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.
    a) $v = (1,-1)$, $w = (4,3)$, $x = (-1,5)$, $y = (5,2)$.
    b) $v = (1,-1,5)$, $w = (-2,3,-4)$, $x = (3,1,1)$, $y = (-3,9,-17)$.

    Solución: Calulamos las diferencias correspondientes y las analizamos:
    a) $w - v = (4,3) - (1,-1) = (4-1, 3-(-1)) = (3,4)$
    $y - x = (5,2) - (-1,5) = (5-(-1), 2-5) = (6,-3)$
    No son equivalentes ni paralelos.
    b) $w - v = (-2,3,-4) - (1,-1,5) = (-2-1, 3-(-1), -4-5) = (-3,4,-9)$
    $y - x = (-3,9,-17) - (3,1,1) = (-3-3, 9-1, -17-1) = (-6,8,-18)$.
    No son equivalente pero si paralelos. Tomando $\lambda = 2$ se tiene que $y - x = \lambda(w - v)$.

11. Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.
    a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
    b) Graficar en el plano a R_1.
    c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
    d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

    Solución:
    a) Para la descripción paramétrica necesitamos un vector paralelo a R_1, es decir, ortogonal a $(1,3)$. Un vector así puede ser el $(3,-1)$, con el que tenemos:
    Descripción paramétrica: $\boxed{R_1 = \{(2,0) + t(3,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

    Para la descripción implícita simplemente reemplazamos todos los datos dados en la ecuación $ax + by = \langle (x_0, y_0), (a,b)\rangle$ y tenemos:
    Descripción implícita: $\boxed{R_1 = \{(x,y) \mid x + 3y = 2\}}$
    b) ver figura 3
    c) Para dar un punto sobre la recta conviene usar la descripción paramétrica. En este caso debe ser distinto a p_1, con lo que cualquier valor de $t \neq 0$ va a servir. Si tomamos por ejemplo $t = -1$ vamos a tener $\boxed{p = (-1,1)}$.

d) Para verificar si un punto pertenece, conviene usar la descripción implícita. Calculamos cada punto y reemplazamos en la ecuación:

$$\begin{array}{l|l}
p + p_1 = (-1,1) + (2,0) = (1,1) & -p = (1,-1) \\
(1) + 3 \cdot (1) = 4 \neq 2 & (1) + 3 \cdot (-1) = -2 \neq 2 \\
\therefore p + p_1 \notin R_1 & \therefore -p \notin R_1
\end{array}$$

12. Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.
   a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.
   b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1,0)$ y es paralela al vector $(1,3)$.

Solución: Los procedimientos son análogos a los del ejercicio 13. Las gráficas están en la figura 3

a) Descripción paramétrica: $\boxed{R_2 = \{t(3,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Descripción implícita: $\boxed{R_2 = \{(x,y) \mid x + 3y = 0\}}$
Tomando $t = -1$ tenemos $\boxed{p = (-3,1)}$.

$$\begin{array}{l|l}
p + p_2 = (-3,1) + (0,0) = (-3,1) & -p = (3,-1) \\
(-3) + 3 \cdot (1) = -3 + 3 = 0 & (3) + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0 \\
\therefore p + p_2 \in R_2 & \therefore -p \in R_2
\end{array}$$

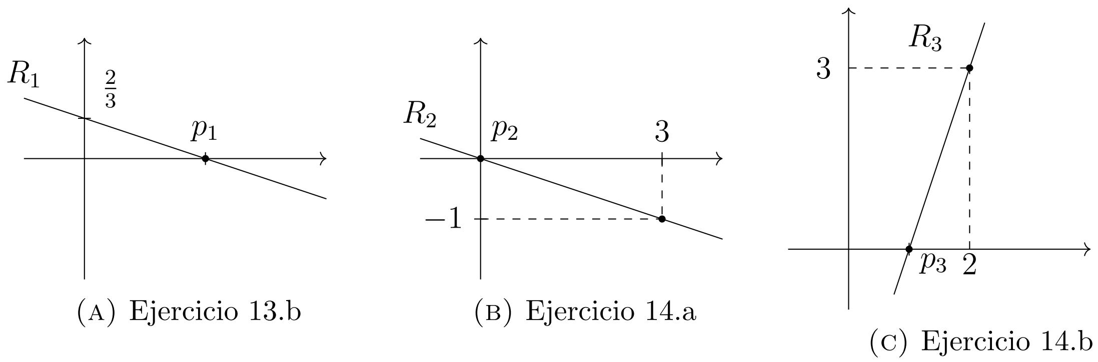
b) Descripción paramétrica: $\boxed{R_3 = \{(1,0) + t(1,3) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Por la descripción paramétrica de R_3, sabemos que los puntos de la rectas son de la forma $(x,y) = (1+t, 3t)$, o sea $x = 1+t$ e $y = 3t$. Despejando t en ambas igualdades, obtenemos que

$$t = x - 1 = \frac{1}{3}y.$$

De la segunda igualdad deducimos que todos los puntos de la recta son aquellos que satisfacen $x - \frac{1}{3}y = 1$ o equivalentemente $3x - y = 3$. En conclusión, la descripción implícita es $\boxed{R_3 = \{(x,y) \mid 3x - y = 3\}}$
Tomando $t = 1$ tenemos que $\boxed{p = (2,3)}$ es un punto de la recta distinto a p_3.

$$\begin{array}{l|l}
p + p_3 = (2,3) + (1,0) = (3,3) & -p = (-2,-3) \\
3 \cdot 3 - 3 = 6 \neq 3 & 3 \cdot (-2) - (-3) = -3 \neq 3 \\
\therefore p + p_3 \notin R_3 & \therefore -p \notin R_3
\end{array}$$



(a) Ejercicio 13.b   (b) Ejercicio 14.a   (c) Ejercicio 14.b

Figura 2

13. Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

SOLUCIÓN: Para este ejercicio conviene tomar la descripción implícita de las rectas. Comencemos con la intersección de las dos primeras rectas.

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &= \{(x,y) \mid x+3y=2\} \bigcap \{(x,y) \mid x+3y=0\} \\ &= \{(x,y) \mid x+3y=2 \quad \text{y} \quad x+3y=0\}. \end{aligned}$$

Es decir, la intersección de R_1 y R_2 son todos los puntos (x,y) que satisfacen las ecuaciones $x+3y=2$ y $x+3y=0$ al mismo tiempo. En otras palabras, son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

Notemos que no hay nigún punto con esta propiedad. En efecto, para cualquier valores de x e y que elijamos, no puede suceder que al hacer la cuenta $x+3y$ obtengamos simultáneamente el resultado 2 y el resultado 0.

En conclusión, tenemos $\boxed{R_1 \cap R_2 = \emptyset}$

Analicemos ahora la otra intersección. Tenemos que

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_3 &= \{(x,y) \mid x+3y=2\} \bigcap \{(x,y) \mid 3x-y=3\} \\ &= \{(x,y) \mid x+3y=2 \quad \text{y} \quad 3x-y=3\}. \end{aligned}$$

Es decir, la intersección de R_1 y R_3 es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x-y=3 \end{cases}$$

Para encontrar dichas soluciones podemos proceder por sustitución. Esto es, de la primera ecuación obtenemos que $x = 2-3y$. Luego sustituimos este valor de x en la segunda ecuación, obteniendo que

$$3x - y = 3\cdot(2-3y) - y = 6 - 9y - y = 6 - 10y = 3.$$

De donde resulta que $y = \frac{3}{10}$. Ahora, usamos este valor de y en la primera ecuación:

$$x + 3y = x + 3\cdot(\frac{3}{10}) = 2$$

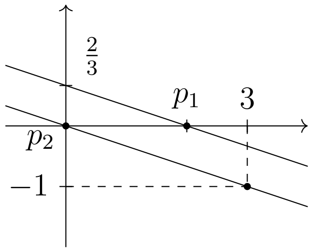
Entonces $x = \frac{11}{10}$. En conclusión, el par $x = \frac{11}{10}$, $y = \frac{3}{10}$ es la única solución del sistema y por lo tanto

$$\boxed{R_1 \cap R_3 = \left\{\left(\frac{11}{10}, \frac{3}{10}\right)\right\}}$$

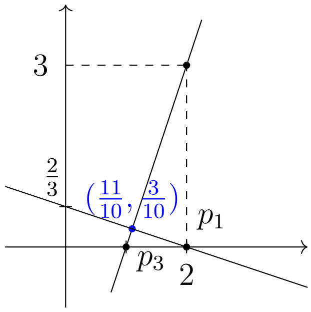
14. Sea $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by=c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.
    a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0,0) \in L$?
    b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
    c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p+q \in L$?

SOLUCIÓN:

a) Si $(0,0) \in L$, entonces esos valores de x e y deben verificar la ecuación normal de la recta. Es decir, debe suceder $c = ax+by = a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0$. Con lo cual debe ser $c = 0$ y por lo tanto es el único valor de c con esta propiedad.



(A) $R_1 \cap R_2$



(B) $R_1 \cap R_3$

FIGURA 3

b) Llamemos $q = (x_q, y_q)$. Como $q \in L$, sabemos que se cumple

$$ax_q + by_q = c \tag{1}$$

Ahora supongamos que además $\lambda q = (\lambda x_q, \lambda y_q) \in L$. Vamos a tener entonces:

$$\begin{aligned}
a(\lambda x_q) + b(\lambda y_q) &= c \\
\lambda a x_q + \lambda b y_q &= c \\
\lambda(a x_q + b y_q) &= c \quad \text{(Reemplazamos la ecuación 1)} \\
\lambda c &= c \\
(\lambda - 1)c &= 0
\end{aligned}$$

Luego tenemos dos casos: Si $\lambda = 1$, entonces c puede tomar cualquier valor. Si $\lambda \neq 1$ entonces sólo puede ser $c = 0$. En particular, si $c = 0$, λ puede tener cualquier valor.

c) Llamemos $p = (x_p, y_p)$. Como $p \in L$ vamos a tener el análogo a la ecuación 1 para p:

$$ax_p + by_p = c \tag{2}$$

Ahora suponemos que además $p + q = (x_p + x_q, y_p + y_q) \in L$ y tenemos:

$$\begin{aligned}
a(x_p + x_q) + b(y_p + y_q) &= c \\
ax_p + ax_q + by_p + by_q &= c \\
(ax_p + by_p) + (ax_q + by_q) &= c \\
c + c &= c \quad \text{(Reemplazamos las ecuaciones 1 y 2)} \\
2c &= c \\
c &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto debe ser $c = 0$ y es el único valor con esta propiedad.

15. Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongo que $(0,0) \in L$, entonces por el ejercicio 19.a) tengo que $c = 0$. Si $c = 0$, por ejercicio 19.b) tengo que como $q \in L$ entonces $\lambda q \in L$. Luego, por ejercicio 19.c) tengo que como $p \in L$ y $\lambda q \in L$ entonces su suma también: $p + \lambda q \in L$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considero un $p \in L$ cualquiera, y tomo $\lambda = -1$ y $q = p$. Tengo entonces por hipótesis que $p + \lambda q \in L$, pero $p + \lambda q = p + (-1)p = p - p = (0,0)$ y por lo tanto $(0,0) \in L$. □

Ejercicios de repaso.

16. Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$
¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Solución: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$||v + w||^2 \stackrel{def}{=} \langle v + w, v + w\rangle \stackrel{9.b)}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \stackrel{def}{=} ||v||^2 + ||w||^2 \qquad \square$$

En $\mathbb{R}^2$ esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras.*

17. ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que
$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$
Solución: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle^2 = (v_1w_1 + v_2w_2)^2 \tag{3}$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (3):

$$||v||^2||w||^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1w_1)^2 + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + (v_2w_2)^2$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (3). Sumamos y restamos $2(v_1w_1)(v_2w_2)$ y agrupamos:

$$||v||^2||w||^2 = (v_1w_1)^2 + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + (v_2w_2)^2 + 2(v_1w_1)(v_2w_2) - 2(v_1w_1)(v_2w_2) =$$

$$= [(v_1w_1)^2 + 2(v_1w_1)(v_2w_2) + (v_2w_2)^2] + [(v_2w_1)^2 - 2v_1w_1v_2w_2 + (v_1w_2)^2]$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

$$||v||^2||w||^2 = \underbrace{(v_1w_1 + v_2w_2)^2}_{=\langle v,w\rangle^2} + \underbrace{(v_2w_1 - v_1w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w\rangle^2 \qquad \square$$

18. Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.
   a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.
   b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.
   c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

Solución:

a) Debemos despejar la ecuación implícita y reemplazarla en el vector:
$(x, y, z) \in P_1 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z)\rangle = 0$

$(x,y,z) \in P_1 \iff 2x - y + z = 0$
$(x,y,z) \in P_1 \iff 2x + z = y$
$(x,y,z) \in P_1 \iff (x,y,z) = (x, 2x+z, z) = x(1,2,0) + z(0,1,1)$
$\therefore \boxed{P_1 = \{s(1,2,0) + t(0,1,1) \mid s,t, \in \mathbb{R}\}}$

b) Análogo al item anterior:
$(x,y,z) \in P_2 \iff \langle (2,-1,1),(x,y,z)\rangle = 1$
$(x,y,z) \in P_2 \iff 2x - y + z = 1$
$(x,y,z) \in P_2 \iff 2x + z - 1 = y$
$(x,y,z) \in P_2 \iff (x,y,z) = (x, 2x+z-1, z) = (0,-1,0) + x(1,2,0) + z(0,1,1)$
$\therefore \boxed{P_2 = \{(0,-1,0) + s(1,2,0) + t(0,1,1) \mid s,t, \in \mathbb{R}\}}$

c) Los planos P_1 y P_2 son paralelos.

19. Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.
   a) π_1: el plano que pasa por $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-2,0)$.
   b) π_2: el plano que pasa por $(1,2,-2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,-1)$, $(3,-2,1)$.
   c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1,2,0) + t(2,0,1) + (1,0,0);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

Solución:

a) Llamemos $p_0 = (0,0,0)$, $p_1 = (1,1,0)$ y $p_2 = (1,-2,0)$ a los puntos involucrados. Como p_0 es el origen y p_2 no es un múltiplo de p_1, tenemos que los puntos no son colineales. Luego para la descripción paramétrica basta con elegir uno de ellos y dos parejas distintas cualquiera. Así, por ejemplo podríamos escribir:
$\pi_1 = \{p_0 + s\,\overrightarrow{p_0p_1} + t\,\overrightarrow{p_0p_2} \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{s(1,1,0) + t(1,-2,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\}}$
Notar que cualquier otra elección para el primer punto y las dos parejas da lugar a parametrizaciones diferentes, pero equivalentes, de π_1.
Para la ecuación normal vamos a necesitar un vector que sea ortogonal a ambas direcciones, $\overrightarrow{p_0p_1}$ y $\overrightarrow{p_0p_2}$. A simple vista puede verse que un vector que cumple eso es $e_3 = (0,0,1)$. Luego reemplazamos eso en la ecuación normal $\langle v, e_3\rangle = \langle p_0, e_3\rangle$. Notar que podríamos haber elegido cualquier punto en π_1 en lugar de p_0, y todos deberían dar el mismo resultado. La ecuación normal sería entonces:
$\pi_1 = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, e_3\rangle = 0\}}$

b) Llamemos $p_0 = (1,2,-2)$, $p_1 = (2,1,-1)$ y $p_2 = (3,-2,1)$. En este caso conviene empezar con la ecuación normal pues contamos con una dirección perpendicular al plano: $\overrightarrow{p_1p_2} = p_2 - p_1 = (1,-3,2)$. Reemplazamos en la ecuación normal y tenemos:
$\pi_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1p_2}\rangle = \langle p_0, \overrightarrow{p_1p_2}\rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1p_2}\rangle = -9\}}$
Para encontrar la forma paramétrica se siguen los mismos pasos que en el ejercicio 16.a) y 16.b):
$(x,y,z) \in \pi_2 \iff \langle (1,-3,2),(x,y,z)\rangle = -9$
$(x,y,z) \in \pi_2 \iff x - 3y + 2z = -9$
$(x,y,z) \in \pi_2 \iff x = -9 + 3y - 2z$
$(x,y,z) \in \pi_2 \iff (x,y,z) = (-9+3y-2z, y, z) = (-9,0,0) + y(3,1,0) + z(-2,1,0)$
$\therefore \boxed{\pi_2 = \{(-9,0,0) + s(3,1,0) + t(-2,1,0) \mid s,t, \in \mathbb{R}\}}$

c) El plano ya viene dado en forma paramétrica, por lo que sólo resta expresarlo en forma normal. Para ello es necesario encontrar un vector (x,y,z) que sea perpendicular a $(1,2,0)$ y a $(2,0,1)$. Como en este caso no es obvio, podemos plantear ambos productos escalares y despejar:

$$\left\{\begin{array}{ll} x + 2y & = 0 \\ 2x + z & = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = -2x = -2(-2y) = 4y \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = 4y \end{array}\right.$$

Es decir que el vector buscado es de la pinta $(-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$ o, lo que es lo mismo, cualquier múltplo de $(-2, 1, 4)$ será perpendicular al plano. La forma normal es entonces:
$\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4)\rangle = \langle (1, 0, 0), (-2, 1 -4)\rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4)\rangle = -2}$

20. ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio $(19c)$? Describir la intersección en cada caso.

(*a*) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (*b*) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
(*c*) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (*d*) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

Solución: La manera más directa de chequear si una recta interseca a un plano es con la forma normal del plano. Si la dirección de la recta es perpendicular a la dirección normal del plano, la recta es paralela al plano. Luego, o bien toda la recta está contenida en el plano, o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

Si una recta no es paralela a un plano, lo corta en un único punto. La manera más fácil de hallar ese punto es reemplazar la parametrización de la recta en la ecuación normal y despejar t. Luego, reemplazando t en la parametrización de la recta se encuentra el punto.

a) Como $\langle (1, 1, 1), (-2, 1, 4)\rangle = 3 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(3+t) + (2+t) + 4(1+t) &= -2 \\ -6 - 2t + 2 + t + 4 + 4t &= -2 \\ 3t &= -2 \implies \boxed{t = -\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(3, 2, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \boxed{\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

b) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+t) + (-1+2t) + 4(1-t) &= -2 \\ -2 - 2t - 1 + 2t + 4 - 4t &= -2 \\ 3 &= 4t \implies \boxed{t = \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1, -1, 1) + \frac{3}{4}(1, 2, -1) = \boxed{\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$

c) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(-1+t) + (2t) + 4(-1-t) &= -2 \\ 2 - 2t + 2t - 4 - 4t &= -2 \\ -4t &= 0 \implies \boxed{t = 0} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(-1, 0, -1) + 0 \cdot (1, 2, -1) = \boxed{(-1, 0, -1)}$

d) Como $\langle (2, -1, 1), (-2, 1, 4)\rangle = -1 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+2t) + (-2-t) + 4(1+t) &= -2 \\ -2 - 4t - 2 - t + 4 + 4t &= -2 \\ -t &= -2 \implies \boxed{t = 2} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1,-2,1)+2(2,-1,1)=\boxed{(5,-4,3)}$