07/07/2021

Examen final parte teórica Matemática Discreta II

Alumno: Airasca, Esteban

DNI: 39024258

DNI: 39 021.258

Airasca, Esteban

Hoja: 1/4 frente

Final teórico Mat. Discreta 2

HOJA N°

FECHA 07/07/2021

Ejercicio 2: Reducir 4-SAT a 4-color

Para ésto, dada una instancia B de 4SAT, crearemos polinomialmente una instancia de 4-Color tal que B satisfacible $\iff \chi(G) \leq 4$

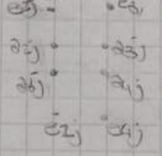
Suponemos que las variables de B son $x_1, \dots, x_n$ y que $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ con $D_j = l_{1j} \vee l_{2j} \vee l_{3j} \vee l_{4j}$.

Construiremos el grafo dando vértices y lados.

Vértices:

1) $2n$ vértices v_l uno por literal l (uno para x y otro para $\bar{x}$)

2) $8m$ vértices para las garras $\{e_{kj}\}_{\substack{k=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,m}}$ $\{a_{kj}\}_{\substack{k=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,m}}$



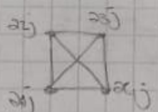
$j = 1, \dots, m$

3) Trés vértices especiales s, t, r.

Ésto se construye polinomialmente, pues es sólo mirar variables y disjunciones de B. Pues es $2n + 8m + 3$.

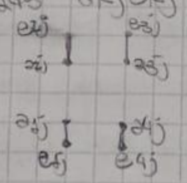
Lados:

1) $6m$ lados $a_{1j}a_{2j}$, $a_{2j}a_{3j}$, $a_{3j}a_{4j}$, $a_{4j}a_{1j}$, $a_{1j}a_{3j}$, y $a_{2j}a_{4j}$ formando un K_4.

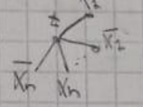


Para $j = 1, \dots, m$.

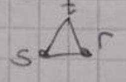
2) $4m$ lados $a_{kj}e_{kj}$ ($k = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, \dots, m$) Unen la base con els.



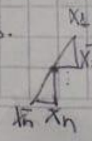
3) $2n$ lados tv_l, uno por cada literal l



4) 3 lados st, sr, tr formando K_3.



5) n lados $v_x v_{\bar{x}}$ uno por cada variable x. Forma



NOTA

6) $4m$ lados $s\,e_{kj}$ $(k=1,2,3,4 \;\; j=1,\dots,m)$

6) $4m$ lados $r\,e_{kj}$ $(k=1,2,3,4 \;\; j=1,\dots,m)$

7) $4m$ lados $e_{kj}\,v_{l_{kj}}$ $(k=1,2,3,4 \;\; j=1,\dots,m)$ Acá vemos B para saber cómo unirlos

8) $2n$ lados $v_l r$.

Luego ésta también es polinomial pues es $22m+3+5n$

y también se construyen mirando las variables, disjunciones y uno polinómic.

Como G tiene a K_4, entonces $\chi(G) \geq 4$ y como queremos ver $\chi(G) \leq 4$, debemos ver $\chi(G)=4$

Veamos B satisfacible $\Rightarrow \chi(G)=4$ color.

Debemos dar un coloreo propio con 4 colores de G, iremos coloreando y chequeando viendo si se generan problemas.

Usaremos que hay un asignamiento de valores a las variables de B que lo hacen verdadero, esto es $\exists$ un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tq $B(\vec{b})=1$, que implica que $\forall j=1,\dots,m$ $D_j(\vec{b})=1$.

Colorearemos a los v_l como $c(v_l)=l(\vec{b})$, ésto no genera problema pues, $v_x v_{\bar{x}}$ es lado pero $c(v_{\bar{x}})=\bar{x}(\vec{b})=1-x(\vec{b}) \neq x(\vec{b})=c(v_x)$ Luego no hay problema.

Coloreamos $c(s)=1$ $c(t)=2$ y $c(r)=3$. Como s,t,r forman un triángulo y cada vértice tiene distinto color, el K_3 no forma problemas.

Además $t v_l$ forma lado, pero $c(v_l) \in \{0,1\}$ y $c(t)=2$ luego no hay problema.

También $r v_l$ forma lado, pero $c(r)=3$ y $c(v_l) \in \{0,1\}$ no problema.

Luego el abanico, junto con s y r no forma problemas

Ahora pintemos las garras. Acá usamos que, dado que el asignamiento $\vec{b}$ vuelve verdadero a B, ésto implica que $D_j(\vec{b})=1$ $\forall j$, lo que dice que $\forall j$ $D_j = l_{1j} \vee l_{2j} \vee l_{3j} \vee l_{4j}$ es verdadero, entonces para todo j existe un k_j tal que $l_{k_j j}(\vec{b})=1$. ⊛ Si hay más de uno, elegimos uno.

Pinto $c(l_{k_j j})=1$

Para cada j: Coloreamos $c(a_{k_j j})=2$ a los a_{rj} con $r \neq k_j$ (los que fueron) los coloreamos de manera que siga siendo coloreo propio en el K_4.

DNI:
39029258

Hoja: 2/4 fronte

HOJA N°

FECHA 07/07/2024

Airasca, Esteban

Final Teórico Mat. Discreta II

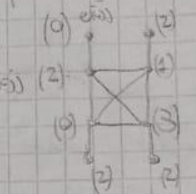
Luego cada K4 con las a's no genera problema pues tiene todos los vértices de distinto color.

Para cada j: $c(e_{rj}) = 2$ con $r \neq k_j$
$c(e_{k_j j}) = 0$.

Como para $r \neq k_j$ $c(e_r) = 2$ y $c(a_{rj}) \in \{0,1,3\}$ los lados $e_{rj} a_{rj}$ no generan problema.

Como $c(e_{k_j j}) = 0$ y $c(a_{k_j j}) = 2$ $e_{k_j j} a_{k_j j}$ no serán problemas

Luego las garras no tienen problemas internos. Doy un ejemplo por si no se entendió



Veamos $s e_{ij}$: $s e_{ij}$ no crea problemas pues $c(s) = 1$ y $c(e_{ij}) \in \{0,2\}$

Veamos $r e_{ij}$: $r e_{ij}$ no crea problema pues $c(r) = 3$ y $c(e_{ij}) \in \{0,2\}$.

Queda ver $v_{l_{rj}} e_{rj}$. Si $r \neq k_j$ es trivial, $c(e_{rj}) = 2$ y $c(v_{l_{rj}}) \in \{0,1\}$. NP

Si tenemos $v_{l_{k_j j}}$ $c(v_{l_{k_j j}}) = l_{k_j j}(\vec{b}) = 1$ por ⊛ y como $c(e_{k_j j}) = 0$, luego no hay problema, chequeamos todos los lados y el coloreo es propio con 4 colores. Por lo tanto B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 4$.

Ahora la vuelta $\chi(G) = 4 \Rightarrow B$ satisfacible.

Suponemos existe c, un coloreo propio de G con 4 colores. A partir de éste definimos un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b})$ sea satisfacible.

Definimos el $\vec{b}$ usando el coloreo c, usando

$$b_i = 1 \quad \text{si} \quad c(v_{x_i}) = c(s)$$

$$b_i = 2 \quad \text{si} \quad c\,v(x_i) \neq c\,s$$

Atrás sigue.

Sea l un literal tq $C(v_l) = C(s)$

- Si l es una variable: $\exists\, i$ tq $l = x_i$

Decir $C(v_l) = C(s)$ es decir $C(v_{x_i}) = C(s)$, lo que indica que, por la def. de $\vec{b}$ $b_i = 1$ Luego $l(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.

- Si l es negación de variable. $\exists\, i$ tq $l = \overline{x_i}$

Ésto es $C(v_{\overline{x_i}}) = C(s)$

Como $v_{x_i} v_{\overline{x_i}}$ es lado y el coloreo es propio $C(v_{x_i}) \neq C(v_{\overline{x_i}})$

Luego $C(v_{x_i}) \neq s$ por lo anterior. Ésto dice que $b_i = 0$.

Luego $l(\vec{b}) = \overline{x_i}(\vec{b}) = 1 - x_i(\vec{b}) = 1 - b_i = 1 - 0 = 1$

Ambos casos dicen que si $C(v_l) = C(s) \Rightarrow l(\vec{b}) = 1$

Sea ahora $j \in \{1, 2, .., m\}$ como los a_{ij} forman un K_4, y C es un coloreo propio con 4 colores, éstos 4 colores están en el K_4, en particular existe l tq: $C(a_{lj}) = C(t)$

Veamos el posible color del e_{lj} asociado a a_{lj}:

1) $e_{lj} a_{lj} \in E \Rightarrow C(e_{lj}) \neq C(a_{lj}) = C(t)$ Por ser C propio.

2) $e_{lj} s \in E \Rightarrow C(e_{lj}) \neq C(s)$

3) $e_{lj} r \in E \Rightarrow C(e_{lj}) \neq C(r)$.

Entonces e_{lj} debe tener el "cuarto" color, porque no puede ser el de r, ni de s, ni de t además s, t, r forman K_3 y tienen 3 colores dist. entonces queda sólo un color para e_{lj}.

1) $v_{l_{ej}} e_{lj} \in E \Rightarrow C(v_{l_{ej}}) \neq C(e_{lj})$

2) $v_{l_{ej}} t \in E \Rightarrow C(v_{l_{ej}}) \neq C(t)$ ver

3) $v_{l_{ej}} r \in E \Rightarrow C(v_{l_{ej}}) \neq C(r)$

Como e_{lj} tiene el "cuarto color", $v_{l_{ej}}$ por lo anterior, no puede tener ni el "cuarto" color, ni el de t, ni el de r.

Sólo le queda el de s, y como vimos. $C(v_{l_{ej}}) = C(s) \Rightarrow l_{lj}(\vec{b}) = 1$ y

Como $D_j = l_{1j} \vee l_{2j} \vee l_{3j} \vee l_{4j}$ entonces $l_{lj}(\vec{b}) = 1$ lo hace verdadero y como j es cualquiera $D_j(\vec{b}) = 1\ \forall j$, luego $B(\vec{b}) = 1$ es satisfacible. Fin ⊠

DNI: 39.024.258 | Hoja: 3/4 frente | HOJA N°
Ainsua Esteban | Final teórico mat Discreto II | FECHA 07/07/2024

Ejercicio 8:

a) Probar que si H es mat. de chequeo de C, entonces:

$$\delta(C) = \min\{j : \exists \text{ un cjto de } j \text{ columnas LD de } H\}$$

Prueba

Sea $s = \min\{j : \exists$ un conjunto j de columnas LD$\}$.

Probamos $\delta(C) \leq s$ y $s \leq \delta(C)$.

Por la def de s, $\exists$ un conjunto de j columnas LD de H: $\{H^{(j_1)}, \ldots, H^{(j_s)}\}$.

Luego existen $c_1, \ldots, c_s \in \{0,1,2\}$ no todos nulos tq:

$$c_1 H^{(j_1)} + \ldots + c_s H^{(j_s)} = 0.$$

Sea $w = c_1 . e_{j_1} + \ldots + c_s . e_{j_s}$. Siendo e_j el vector con 1 en la posición j y los demás son cero.

Como no todos los c_i son nulos a la vez, $w \neq 0$.

$$H . w^t = H\,(c_1 e_{j_1} + \ldots + c_s . e_{j_s})^t$$
$$= H . c_1 e_{j_1}^t + \ldots + H . c_s . e_{j_s}^t$$
$$= c_1 . H . e_{j_1}^t + \ldots + c_s H . e_{j_s}^t$$
$$= c_1 . H^{(j_1)} + \ldots + c_s . H^{(j_s)} = 0$$

Luego $w \in C$, pues $C = Nu(H)$ pero el peso es $\leq s$, pues son a lo sumo s e_j.

Acá hay una diferencia y es que para códigos no binarios, necesito saber que la distancia de Hamming es ahora $d_H(v,w) = \#\{$coordenadas distintas entre v y $w\}$.

Y el peso de Hamming es igual $(d_H(v,0))$ pero ahora $d_H(v,w) = |v - w|$. (Pues $a + a \neq 0$)

Como $w \neq 0$ y $\delta(C) = \min\{|v - w| : w, v \in C, v \neq 0, w \neq 0\}$. Como $w \in C$ y $w \neq 0$, luego

$$\delta(C) \leq |w| \leq s.$$

Veamos ahora $s \leq \delta(C)$

Sea $v \in C$ tq $\delta(C) = |v - w|$, esto dice que existen $i_1, \ldots, i_{\delta(C)}$ con

$v = c_1 e_{i_1} + \ldots + c_{\delta(C)} . e_{i_{\delta(C)}}$, como $v \in C$, $H v^t = 0$

NOTA

Hoja 3/4 atrás

$H \cdot v^t = H \cdot \begin{bmatrix} c_1 e_{i_1} \\ \vdots \\ c_{f(c)} e_{i_{f(c)}} \end{bmatrix} = c_1 \cdot H^{(i_1)} + \dots + c_{f(c)} \cdot H^{(i_{f(c)})} = 0$

Pero $c_1 \cdot H^{(i_1)} + \dots + c_{f(c)} \cdot H^{(i_{f(c)})} = 0$ indica que son un cjto de columnas LD de H. Por lo tanto

$s = \min\{ j : \exists$ cjto de columnas LD de $H \} \leq f(c)$.

Vimos $f(c) \leq s$ y $f(c) \geq s$. Luego $f(c) = s$.

b) Sea la sig. matriz de chequeo H de un código no binario con alfabeto $\{0, 1, 2\}$: $H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ ésta no tiene columnas repetidas, tampoco la columna nula.

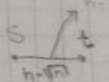
Pero podemos ver que $H^{(4)} = 2 \cdot H^{(2)}$. Luego $0 = 2 \cdot H^{(2)} + H^{(4)}$

Que indica un cjto de 2 columnas LD, Luego $f(c) = 2$. y $\left\lfloor \frac{f(c)-1}{2} \right\rfloor = 0$

Luego no corrige ningún error.

El teorema debería ser: Si H, matriz de chequeo no tiene la columna 0 ni columnas repetidas y además ninguna es combinación lineal de ninguna de las demás, entonces $C = Nu(H)$ corrige al menos un error.

Ejercicio 4: Complejidad de E-K si la dist. inicial entre s y t es $n - \sqrt{n}$.



Sabemos que se usa BFS para búsqueda y construcción de caminos, por lo que ésto es $O(m)$. Además en EK, en cada camino al menos un lado se satura por lo que tenemos otro $O(m)$ que hace $O(m^2)$. Debemos ver entonces, asumiendo que las distancias no disminuyen, debemos ver las veces en las que un lado puede volverse crítico.

Supongamos que un lado se vuelve crítico en un paso k y luego en un paso r. Con $r > k$. Veamos los casos.

Caso en el que se saturó en el paso k: Sabemos que sea el lado que sea el que exista, $(xy$ ó $yx)$ se usan caminos de la forma $s \dots xy \dots t$ y como son de longitud mínima por EK tenemos que $d_k(y) = d_k(x) + 1$. (1)

Ahora bien, como para volver a saturarse en el paso r ó vaciarse debe disminuir el flujo, entonces $\exists l$ tq $r \geq l > k$ en donde de f_l a f_{l+1}

DNI:
39 029.258
Airasca, Esteban

Final teórico Mat. Discreta II

el flujo disminuye, es decir usamos un camino de long. mínima por E_k, de la forma $s \ldots \overleftarrow{yx} \ldots t$.

Luego $d_\ell(x) = d_\ell(y) + 1$ (i)

Tenemos $d_\ell(t) = d_\ell(x) + b_\ell(x)$

$= (d_\ell(y) + 1) + b_\ell(x)$ Por (i)

$\geq d_k(y) + 1 + b_k(x)$ pues las dist. no disminuyen.

$= ((d_k(x) + 1) + 1) + b_k(x)$ Por (1)

$= d_k(t) + 2 \Rightarrow d_\ell(t) \geq d_k(t) + 2$

Caso en el que se vacía en el paso r. Sabemos que si se vacía se usó un camino de long. mínima de la forma $s \ldots \overleftarrow{yx} \ldots t$ por E_k, luego $d_k(x) = d_k(y) + 1$ (a). Pero para saturarse o volver a vaciarse en el paso r debe llenarse completamente o al menos un poco, ésto es $\exists\, \ell$ tq $r \geq \ell > k$ tal que de f_ℓ a $f_{\ell+1}$ debe llenarse (al menos un poco). Se usa entonces el camino de long. mínima por E_ℓ. $s \ldots xy \ldots t$ entonces $d_\ell(y) = d_\ell(x) + 1$ (b)

Luego $d_\ell(t) = d_\ell(y) + b_\ell(y)$

$= (d_\ell(x) + 1) + b_\ell(y)$ Por (ii)

$\geq (d_k(x) + 1) + b_k(y)$ Pues no disminuyen las dist.

$= ((d_k(y) + 1) + 1) + b_k(y)$ Por (b)

$= d_k(t) + 2$ Luego $d_\ell(t) \geq d_k(t) + 2$.

Para ambos casos las dist. deben aumentar en al menos dos unidades.

Como las distancias van desde $n - \sqrt{n}$ a $n - 1$, ésto es $n - 1 - (n - \sqrt{n}) = \sqrt{n} - 1$ entonces ésto es $O\left(\frac{\sqrt{n} - 1}{2}\right) = O\left(\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}\right) = O(\sqrt{n})$

NOTA Como dijimos que teníamos $O(m^2)$, luego la complejidad es $O(\sqrt{n}\, m^2)$.