Álgebra/Álgebra II
Clase 1 - Números complejos

FAMAF / UNC

25 de agosto de 2020

En este archivo introduciremos el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos junto a sus operaciones de suma y multiplicación. Además,

- Definiremos los conceptos de "conjugado", "argumento" y "módulo" de un número complejo;
- Aprenderemos a calcular el inverso de un número complejo;
- Veremos como representar gráficamente los números complejos;

Estas diapositivas estan basadas en la Sección A.2 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Motivación

Pregunta

¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución?

Motivación

Pregunta

¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución?

En $\mathbb{R}$ no: $x^2 \geq 0$ y por lo tanto $x^2 + 1 > 0$.

Motivación

Pregunta

¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución?

En $\mathbb{R}$ no: $x^2 \geq 0$ y por lo tanto $x^2 + 1 > 0$.

Solución

Agregar a $\mathbb{R}$ "números" de manera coherente y de tal forma que esta ecuación tenga solución.

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (2)$$

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (2)$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (2)$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4, $\sqrt{2} + i8$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d), \tag{1}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4, $\sqrt{2} + i8$, $\pi + i10$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4, $\sqrt{2} + i8$, $\pi + i10$, $331 + i111010$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4, $\sqrt{2} + i8$, $\pi + i10$, $331 + i111010$, $5 + i\sqrt{3}$,

Definición A.2.1

Los números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ formado por las expresiones

$$a + ib$$

donde i es un símbolo nuevo y a y b son números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones '$+$' y '$\cdot$' definidas por

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

Ejemplo

$1 + i1$, $i\pi$, 4, $\sqrt{2} + i8$, $\pi + i10$, $331 + i111010$, $5 + i\sqrt{3}$, $0 + i0$

Ejemplo

Consideremos los números complejas $z = 1 + i5$ y $w = 2 + i3$ y calculemos su suma y multiplicación.

Ejemplo

Consideremos los números complejas $z = 1 + i5$ y $w = 2 + i3$ y calculemos su suma y multiplicación.

$$z + w = (1 + i5) + (2 + i3) = (1 + 2) + i(5 + 3) = 3 + i8$$

Ejemplo

Consideremos los números complejas $z = 1 + i5$ y $w = 2 + i3$ y calculemos su suma y multiplicación.

$$z + w = (1 + i5) + (2 + i3) = (1 + 2) + i(5 + 3) = 3 + i8$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (1 + i5) \cdot (2 + i3) \\ &= (1 \cdot 2 - 5 \cdot 3) + i(1 \cdot 3 + 5 \cdot 2) \\ &= -13 + i13 \end{aligned}$$

Veamos que los números complejos son los “números” que buscabamos...

... que en los números complejos la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución y ...

... que las operaciones son coherentes en el sentido que satisfacen las mismas propiedades que los números reales, lo en matemática llamamos cuerpo.

Definición

Al número complejo $i = 0 + i \cdot 1$ lo llamamos el imaginario puro.

Definición

Al número complejo $i = 0 + i \cdot 1$ lo llamamos el imaginario puro.

Observación

i es una solución de $x^2 + 1 = 0$

Definición

Al número complejo $i = 0 + i \cdot 1$ lo llamamos el imaginario puro.

Observación

i es una solución de $x^2 + 1 = 0$

En efecto, por la definición del producto tenemos que:

$$i^2 = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

Escrito de otro modo, $i^2 + 1 = 0$.

Definición

Al número complejo $i = 0 + i \cdot 1$ lo llamamos el imaginario puro.

Observación

i es una solución de $x^2 + 1 = 0$

En efecto, por la definición del producto tenemos que:

$$i^2 = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

Escrito de otro modo, $i^2 + 1 = 0$.

Pregunta

$x^2 + 1 = 0$ tiene otra solución?

Proposición A.2.1

$\mathbb{C}$ es un cuerpo. Esto quiere decir que las operaciones '$+$' y '$\cdot$' satisfacen:

1. Son conmutativas.
2. Son asociativas.
3. $0 = 0 + i0$ es el elemento neutro de la suma.
4. $1 = 1 + i0$ es el elemento neutro de la multiplicación.
5. Distributividad.
6. $-(a+ib) = -a - ib = -a + i(-b)$ es el opuesto aditivo de $a+ib$.
7. $(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ es el inverso multiplicativo de $a + ib \neq 0$.

Demostración

La demostración consiste en verificar cada una de las propiedades tal como se hace en Álgebra I/Matemática Discreta con los números reales.

Por ejemplo,

- $0 = 0 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$, es el elemento neutro de la suma.
$$(a + ib) + (0 + i \cdot 0) = (a + 0) + i \cdot (b + 0) = a + i \cdot b.$$
- Si $z = a + ib$, entonces $-z = -a - ib$ es el opuesto aditivo de z.
$$(a + ib) + (-a - i \cdot b) = (a - a) + i \cdot (b - b) = 0 + i \cdot 0.$$

El resto las dejamos de ejercicio. $\square$

Haremos la demostración del inverso usando el módulo y el conjugado unas filminas más adelante.

Convenciones

- También se suele escribir $a + bi$ en vez de $a + ib$. Ambas expresiones no son otra cosa que operaciones entre los números a, b, i.
- Si $z = a + ib$ es un número complejo, diremos que a es la parte real de z y la denotamos $a = \mathfrak{Re}\, z$. Por otro lado, b es la parte imaginaria de z que es denotada $b = \mathfrak{Im}\, z$.
- No escribimos la parte real o la imaginaria si es igual a cero. Por ejemplo, $4 = 4 + i0$ ó $i\pi = 0 + i\pi$.
- La expresión $a - ib$ es el número complejo $a + i(-b)$.
- Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias lo son:

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

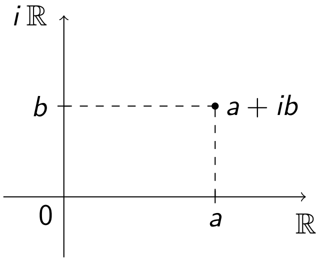
Observaciones

- La definición de la suma de dos números complejos es "coordenada a coordenada".
- Sabiendo que $i^2 = -1$ y la propiedad distributiva, no necesitamos memorizar la fórmula del producto:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

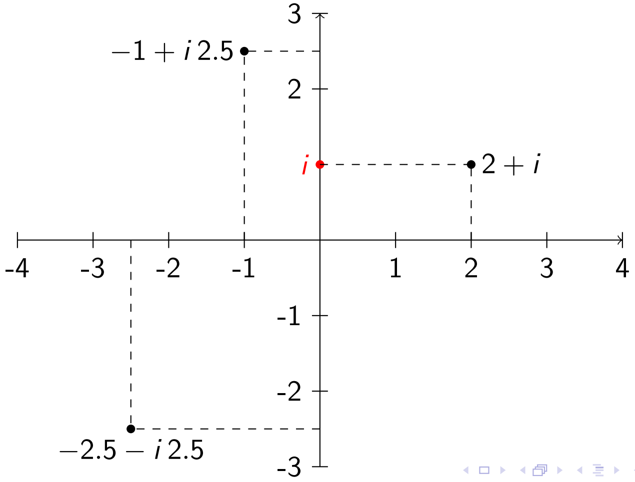
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, con la correspondencia $a \to a + i \cdot 0$ y observamos que si nos restringimos a $\mathbb{R}$, tenemos las reglas de adición y multiplicación usuales.

Dado que todo número complejo queda determinado por dos números reales podemos representarlos gráficamente en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:



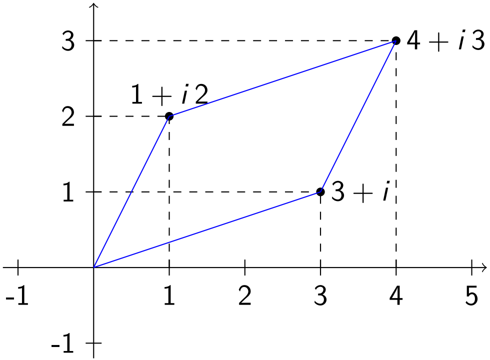
Ejemplo

Representemos gráficamente los números i, $2+i$, $-1+i\,2.5$ y $-2.5-i\,2.5$:



Ejemplo

Con esta representación la definición de la suma de dos números complejos coincide con la suma "coordenada a coordenada".



Definición A.2.2

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. El módulo de z es

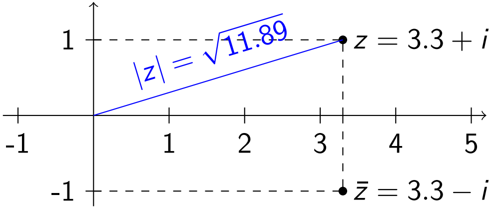
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

El conjugado de z es $\bar{z} = a - ib$.

Si z=a es un número real, entonces el módulo de z es igual al valor absoluto de a:

$$|z|=|a|$$

Ejemplo



-z

Observación

El módulo de z coincide con la distancia del 0 a z por el Teorema de Pitagoras.

El conjugado de z se obtiene cambiandole el signo a la parte imaginaria.

Proposición A.2.2

Sean z y w números complejos. Entonces,

1. $z\bar{z} = |z|^2$. Además, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. Si $z \neq 0$, su inverso multiplicativo es $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
4. $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$.

Demostración

1. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z}$

Demostración

1. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib)$$

Demostración

1. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+iab-iba-i^2b^2 = a^2-(-1)b^2 = a^2+b^2.$$

Demostración

1. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iba - i^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

Además,

elevar al cuadrado

los cuadrados
son positiviios

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \wedge b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Demostración

1. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iba - i^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$

Además,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \wedge b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

2. Como $z \neq 0$, existe el número real $|z|^{-1} = \frac{1}{|z|}$ y entonces

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Dado que el inverso de z es el único elemento tal que cuando lo multiplicamos por z nos da 1 (el elemento neutro de la multiplicación) deducimos que $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ tiene que ser z^{-1}.

Demostración

Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, la verificación de los items 3 y 4 es directa.

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d),$$

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = (a + c) - i(b + d).$$

Por lo tanto $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Demostración

Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, la verificación de los items 3 y 4 es directa.

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d),$$

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = (a + c) - i(b + d).$$

Por lo tanto $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc), \end{aligned}$$

$$\overline{z}\ \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

Por lo tanto $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$.

Observaciones sobre el inverso

Multiplicar por un número real es “coordenada a coordenada”, luego si $z = a + ib$, tenemos que $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\,\overline{z}$, es decir

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Por lo tanto las fórmulas del inverso de z de las Proposición A.2.1 y A.2.2 coinciden.

Ejemplo

Problema

Escribir el inverso de $-1+2i$ en la forma $a+bi$.

Respuesta

$(-1+2i)^{-1} = -\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$.

En efecto, primero averiguamos el módulo al cuadrado:

$$|-1+2i|^2 = (-1)^2 + 2^2 = 1+4 = 5.$$

Como $\overline{-1+2i} = -1-2i$,

$$(-1+2i)^{-1} = -\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

Nunca está demás comprobar el resultado:
$(-1+2i)(-\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$

Observación

Extendiendo los números reales a los complejos, encontramos un conjunto de números en donde la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución.

Pregunta

¿Tendremos que extender $\mathbb{R}$ aún más para encontrar soluciones a ecuaciones polinomiales más complejas?

Le respuesta nos las da el Teorema fundamental del álgebra el cual afirma que toda ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

con coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$ tiene solución en $\mathbb{C}$. Pero esto es tema de estudio de otra asignatura...

$\mathbb{N}$: no podemos restar

$\cap$ por ejemplo, $x + 1 = 0$ no tiene solución

$\mathbb{Z}$: no podemos dividir

$\cap$ por ejemplo, $2x = 1$ no tiene solución

$\mathbb{Q}$: no podemos calcular $\sqrt{2}$

$\cap$ por ejemplo, $x^2 = 2$ no tiene solución

$\mathbb{R}$: no podemos calcular $\sqrt{-1}$

$\cap$ por ejemplo, $x^2 = -1$ no tiene solución

$\mathbb{C}$: es álgebraicamente cerrado

Teorema Fundamental del Álgebra