Práctico 1

(a) Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$ *b)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ *d)* $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

(b) Decir cuáles de los siguientes conjuntos X son inductivos. Justificar.

a) $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.

b) $X \subset \mathbb{N}, X \neq \mathbb{N}$, X infinito tal que $1 \in X$.

c) $X \subset \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$ y X infinito.

d) $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 4$ es múltiplo de $5\}$.

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Demostrar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

a) $2n - 1 \leq n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $n^2 \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$.

c) $3^n \geq 1 + 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

d) $n^4 \leq 4^n; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2^n$.

(d) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, \; n \in \mathbb{N}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2, \; n \in \mathbb{N}_0$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \; n \in \mathbb{N}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, \; 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

f) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1, \; n \in \mathbb{N}$.

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}, \; n \in \mathbb{N}$.

h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2n+1}{3}, \; n \in \mathbb{N}$.

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i+1)(i+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$.

j) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \; n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

(e) Demostrar que $n! \geq 2^n + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

(f) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ *b*) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ *c*) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(g) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones, para n, $k \in \mathbb{N}$:

a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$ *b*) $(2^n)^2 = 4^n$

(h) Calcular/transformar en una expresión equivalente con menos términos:

a) $2^5 - 2^4$, *b*) $2^{n+1} - 2^n$ *c*) $(2^2)^n + (2^n)^2$ *d*) $(2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1)$

(i) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

a) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)^2$.

(j) Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia, escribir explícitamente sus primeros 10 términos.

a) $a_n = 3 + a_{n-1}$ y $a_1 = \pi$. *b*) $b_n = 4b_{n-1} + 1$ y $b_0 = 0$.

(k) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$.

(l) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Probar que $u_n = 2^n + 1$.

(m) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definita recursivamente como sigue:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1 \quad \text{y} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} \quad \text{para} \quad n \geq 4.$$

Demostrar que $u_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(n) *a*) Probar que los ángulos interiores de todo polígono convexo de n lados suman $(n-2)\pi$.

b) Probar que todo polígono convexo de n lados tiene $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

(ñ) Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i a_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

ii) $a - 1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(o) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

i) Probar que $a_n \le \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}}\binom{2n}{n}$ para todo $n \ge 3$.

(p) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$u_1 = 9, \quad u_2 = 33, \quad u_k = 7u_{k-1} - 10u_{k-2},\ \forall k \ge 3.$$

Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(q) En un salón hay n personas y todas se saludan entre sí con un apretón de manos. Llamemmos a_n a la cantidad de apretones de mano.

a) ¿Cuántos apretones de mano adicionales se efectúan si entra al salón una persona más?

b) Obtener una fórmula recursiva para a_{n+1} en términos de a_n.

c) Deducir una fórmula para a_n y demostrarla por inducción.

(r) La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente de la siguiente manera:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n \ge 2.$$

Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Demostrar por inducción que el término general de esta sucesión se puede calcular como:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(*Ayuda:* usar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$)