Clase 3: Teorema de Brooks en el caso regular

Daniel Penazzi

26 de marzo de 2021

Tabla de Contenidos

Brooks en el caso regular

- La clase pasada probamos el teorema de Brooks para el caso G no regular.
- Es decir que si G es conexo entonce $\chi(G) \leq \Delta$ salvo en los casos $G =$ ciclo impar o completo.
- Aca continuaremos con la prueba para el caso G regular.
- Recordemos que habiamos visto que podiamos colorear todos los vértices salvo posiblemente uno con Δ colores.
- Tenemos que dividir la prueba en varios casos

Brooks regular.

Caso 1 : $\Delta \leq 1$:

- Entonces $G = K_2$ o $G = K_1$, lo cual contradice la hipotesis.

Caso 2 : $\Delta = 2$

- Como G es regular y conexo, si tiene $\Delta = 2$ debe ser un ciclo.
- Como no puede ser un ciclo impar, debe ser un ciclo par.
- Por lo tanto $\chi(G) = 2 = \Delta$.

Caso 3 : $\Delta \geq 3$

- Como observamos la clase anterior podemos colorear todos los vértices salvo uno, al cual llamaremos x, con Δ colores.
- Sea $H = G - \{x\}$ es decir, H es el subgrafo de G que se obtiene al remover x y todos los lados entre x y sus vecinos..

Continuacion prueba Brooks regular caso $\Delta \geq 3$

- En la clase anterior tomabamos un x con $d(x) = \delta$ pero como ahora estamos en el caso G regular, todos los vértices cumplen que su grado es igual a $\delta = \Delta$
- Denotemos a los Δ vecinos de x como $\{x_0, x_1, \ldots, x_{\Delta-1}\}$.

Caso 3A : En $\{x_0, ..., x_{\Delta-1}\}$ hay menos de Δ colores.

- En este caso, coloreamos x con el color que "falta" en $\{x_0, ..., x_{\Delta-1}\}$ y tenemos un coloreo con Δ colores de G.

Caso 3B : En $\{x_0, ..., x_{\Delta-1}\}$ hay Δ colores, es decir, cada x_i es coloreado con un color distinto.

- Sin perdida de generalidad, (cambiamos los nombres ya sea de los vertices o de los colores si no) podemos suponer que el color de x_i es i.

Continuacion prueba Brooks regular caso 3B.

- Cada unos de esos vecinos tiene a su vez Δ vecinos, pues estamos en el caso G regular.
- Uno de esos vecinos es x, que no está coloreado, pero los otros $\Delta - 1$ vecinos estan coloreados con algún color.
- ¿Cuantos colores hay entre los $\Delta - 1$ vecinos coloreados de x_i?

Caso 3B1 Existe i tal que x_i tiene dos vecinos del mismo color.

  - En este caso, entre los $\Delta - 1$ vecinos coloreados de x_i hay a lo sumo $\Delta - 2$ colores, pues al menos un color está repetido.
  - Asi que de entre los Δ colores que estamos usando, hay uno que no es i ni está entre los colores de los vecinos de i.

Continuacion prueba Brooks regular caso 3B1.

- Sea r un color $\neq i$ que no es color de ninguno de los vecinos de x_i.
- Entonces, podriamos darle el color r a x_i sin causar ningún problema.
- Si hacemos eso, entonces ahora el color i no es color de ningún vecino de x.
- Y por lo tanto podemos colorear a x con el color i.
- Fin caso 3B1. Ahora veamos la negación del caso 3B1.

Caso 3B2 $\forall i\ x_i$ tiene a todos sus vecinos coloreados, coloreados con distintos colores.

- Otra forma de decir esto es que $\forall i, j$ con $i \neq j$, x_i tiene exactamente un vécino de color j.
- Una idea natural seria tratar de extender la idea con la cual fuimos de 3B a 3B1, y mirar los vecinos de los vecinos de x_i, luego los vecinos de los vecinos de los vecinos de x_i, etc hasta encontrar un vértice al cual le podamos cambiar el color y luego hacer backtrack.
- La idea es esa pero ese camino en concreto lleva a alguna dificultades, pej, como saber que en algún momento debemos encontrar un vértice asi.
- Asi que la prueba requiere algunas herramientas técnicas.

Continuacion prueba Brooks regular caso 3B2.

- Usaremos una notación muy común en teoria de grafos:
- Dado $W \subseteq V$ definimos el subgrafo generado por W como aquel subgrafo de G que tiene:
  - como conjunto de vertices a W
  - y como lados aquellos lados de G cuyos extremos estan en W.
- El subgrafo generado por W se denota por $G[W]$.
- Es decir:

$$G[W] = (W, \{xy : x, y \in W, xy \in E(G)\})$$

- El teorema de Brooks usa este concepto de subgrafo generado extensivamente, eligiendo diversos W cuidadosamente.
- Algunos de estos subgrafos se llaman cadenas de Kempe.

Cadenas de Kempe

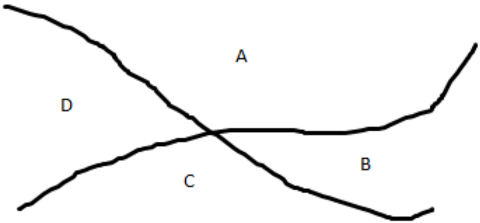
- De hecho, si bien el teorema de Brooks es importante en si mismo, el objetivo de darlo en este curso es que vean al menos una prueba donde se usan estas cadenas de Kempe, que se han usado en numerosos teoremas.
- ¿Porqué se llaman cadenas de Kempe?
- Kempe (1849-1922) fue un matemático inglés que hizo varias cosas. (entre ellas, fue el "inventor"de los multiconjuntos, tambien llamados "bags" que uds probablemente ya vieron).
- En 1879 dió una prueba de un teorema que resolvia una conjetura planteada a la mitad del s.XIX.
- En esa prueba uso sus ahora famosas cadenas, y por eso llevan el nombre de cadenas de Kempe.
- ¿Cual fue el teorema del cual Kempe dió una prueba?

Mapas y grafos

- Supongamos que tenemos un mapa de, pej, paises. (o regiones, porque se asume que cada pais es contiguo, no como pej EEUU)
- Supongamos que queremos colorear los paises de forma tal que si dos paises tienen una frontera en común, tengan colores distintos, para poder diferenciarlos claramente.
- La conjetura que hicieron a mediados del s. XIX era que con 4 colores bastaba para hacer esto.

Mapas y grafos

- Podemos asociar un grafo a un mapa poniendo un vértice en cada pais, y uniendo dos vértices si tienen frontera en común.
- (para esto se considera que deben tener un fragmento de frontera en común: dos paises que se toquen sólo en un punto no se consideran vecinos).
- Pej, ¿cuál seria el grafo asociado a este mapa?



Mapas y grafos

- A es vecino de B y D, y ellos son vecinos de C, pero A y C no son vecinos y B y D tampoco.
- Asi que el grafo es C_4.
- Claramente como solo dibujamos lados a traves de fronteras en común, el grafo que dibujemos queda dibujado en el plano sin que se crucen los lados.
- Un grafo asi se llama planar
- La conjetura original, traducida a grafos, dice que cualquier grafo planar G tiene $\chi(G) \leq 4$.
- Esto es tambien llamado el “teorema de los 4 colores”

Teorema de los 4 colores

- en 1879 Kempe dió una prueba del teorema de los 4 colores, y en su prueba uso lo que ahora se llaman cadenas de Kempe.
- Un año despues alguien mas (Tait [1831-1901]) dió otra prueba.
- En 1890, 11 años despues de la prueba de Kempe, Heawood (1861-1955) encontró un error en esa prueba.
- En 1891, 11 años despues de la prueba de Tait, Petersen (1839-1910) encontró un error en esa prueba.
- Heawood, logró salvar lo suficiente de la prueba de Kempe para demostrar el teorema de los CINCO colores: G planar implica $\chi(G) \leq 5$.
- y para demostrarlo uso cadenas de Kempe.

Teorema de los 4 colores

- El teorema de los 4 colores recien fue probado en 1976 por Appel (1932-2014) y Haken (1928-todavia vive)
- La prueba involucró una parte muy complicada de verificar ciertas condiciones para 1834 grafos, la cual fue hecha por computadora y en 1976 demandó 1000 horas.
- Esta parte, que era controversial en 1976, ha sido independientemente verificada ahora con diferentes programas y computadoras.
- Hay sin embargo otra parte donde habia que chequear a mano 400 paginas de grafos en microfichas.
- La prueba ha sido luego reducida en complejidad, y la segunda parte tambien ha sido ahora verificada en computadoras.

Cadenas de Kempe

- Volviendo a las cadenas de Kempe, si bien no sirvieron para probar el teorema en 1879, si sirvieron para la demostración en 1890 del teorema de los 5 colores.
- Y la prueba moderna del teorema de los 4 colores usa entre un montón de otras cosas, una ligera variación de la idea original de cadenas de Kempe.
- Brooks las usó en su teorema en 1941.
- Y aparece en otros teoremas.
- Bien, ¿qué es una cadena de Kempe, al menos en el contexto del teorema de Brooks?
- Teniamos los vértices x_i, cada uno de color i, y el grafo $H = G - \{x\}$ está coloreado con esos Δ colores.
- Definimos $H_{i,j}$ = el subgrafo de $H = G - \{x\}$ generado por los vertices de color i o j.

Cadenas de Kempe

- Por mas que G sea conexo, no sabemos ni siquiera si H lo es, y mucho menos sabemos si $H_{i,j}$ lo es.
- Asi que miraremos a sus componentes conexas. (obviamente si $H_{i,j}$ es conexo habrá una sola, pero podria haber varias).
- Concretamente, definimos, si $i \neq j$:

$$\mathrm{CC}_{i,j} = \text{componente conexa de } H_{i,j} \text{ que tiene a } x_i$$

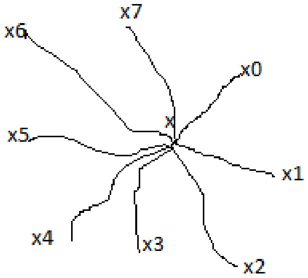
- Estas son las cadenas de Kempe.

Cadenas de Kempe

- Observemos que las cadenas de Kempe tienen una propiedad estructural básica:
- Dentro de una cadena de Kempe, dado que los únicos vértices tienen color i o j, y el coloreo es propio, tenemos que:
  - Todos los vecinos en la cadena de un vértice coloreado con color i tendrán que tener color j
  - Todos los vecinos en la cadena de un vértice coloreado con un color j tendrán que tener el color i.

Cadenas de Kempe

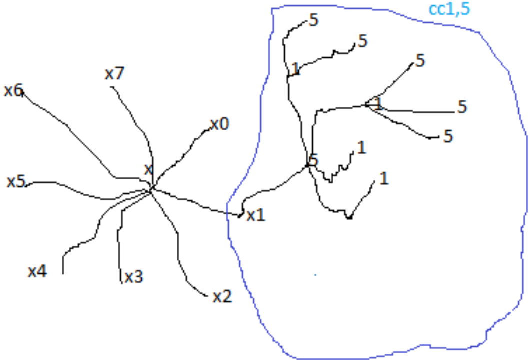
- Pej, supongamos que tenemos $\Delta = 8$:



- $\mathrm{CC}_{1,5}$ podria ser algo asi:

Cadenas de Kempe

- En realidad, eso seria en general. Pero si estamos dentro del caso 3B2, sabemos que x_1 tiene un solo vecino de color 5, asi que no seria como esta en el dibujo (donde x_1 tiene 3 vecinos de color 5) sino algo como:



Cadenas de Kempe

- Esa es una posibilidad pero veremos que si eso pasa, podremos terminar la prueba facilmente.
- Dado que $H_{1,5}$ no es necesariamente conexo, x_5, que tiene el color 5, no necesariamente va a estar en la componente conexa de $H_{1,5}$ que tiene a x_1, y asi lo hemos dibujado en el ejemplo.
- Es decir, en principio podriamos tener $x_5 \notin \mathrm{CC}_{1,5}$, y por lo tanto, tendriamos $\mathrm{CC}_{1,5} \neq \mathrm{CC}_{5,1}$.
- Analicemos ese caso primero

Caso 3B2A: existen $i \neq j$ tales que $\mathrm{CC}_{i,j} \neq \mathrm{CC}_{j,i}$

Cont. caso 3B2A

- Observemos que en una cadena de Kempe $\mathrm{CC}_{i,j}$, por definición, los únicos colores de sus vertices son *i* o *j*.
- Cualquier otro vértice con el cual esten unidos (en *G*) debe tener color distinto de *i* o *j*.
- Por lo tanto si en $\mathrm{CC}_{i,j}$ intercambiamos los colores *i*, *j*, el coloreo sigue siendo propio.
- (intercambiar significa que a todos los vértices que originalmente tenian el color *i*, les damos el *j*, y a los que originalmente tenian el *j*, les damos el *i*).
- Al intercambiar los colores i, j, los vertices antiguamente coloreados con i, j no tienen problemas entre ellos.
- Y el resto de los vértices tampoco, porque tienen todos colores distintos.

Cont. caso 3B2A

- Ahora bien, como por hipotesis (el caso 3B2A) tenemos que $\mathrm{CC}_{i,j} \neq \mathrm{CC}_{j,i}$, entonces $x_j \notin \mathrm{CC}_{i,j}$.
- Entonces si intercambiamos los colores solamente de $\mathrm{CC}_{i,j}$, el color de x_j no se verá afectado.
- Pero el color de x_i si: como antes era i, ahora será j.
- Pero entonces el color i no es mas un color de algún vecino de x, y podemos colorear a x con el color i. Fin caso 3B2A.

$\mathrm{CC}_{i,j} = \mathrm{CC}_{j,i}$

- El caso 3B2B es obviamente la negación, dentro de 3B2, del caso 3B2A:

Caso 3B2B $\mathrm{CC}_{i,j} = \mathrm{CC}_{j,i}$ $\forall i, j$ con $i \neq j$

- En este caso no nos sirve intercambiar los colores i, j porque x_i tendria el color j, pero x_j tendria el color i y seguiriamos sin tener un color "libre" para x.
- El primer subcaso que vamos a analizar es que sucediera que $\mathrm{CC}_{i,j}$ no tuviera ningún vértice ademas de x_i, x_j:

Caso 3B2B1: $\mathrm{CC}_{i,j} = \{x_i, x_j\} \forall i, j$ $i \neq j$.

- Pero $\mathrm{CC}_{i,j}$ es una componente conexa, asi que si $\mathrm{CC}_{i,j} = \{x_i, x_j\}$ entonces tenemos que $x_i x_j$ es un lado, para todo $i \neq j$.

$\mathrm{CC}_{i,j} = \{x_i, x_j\}$

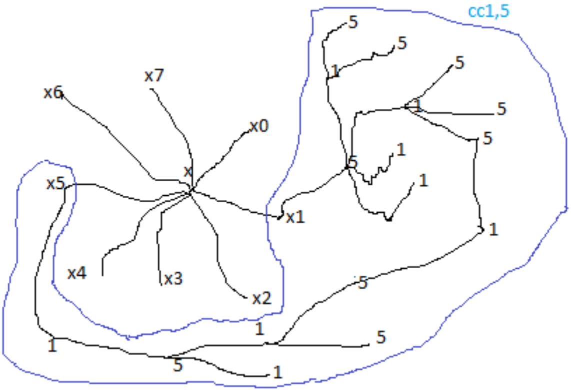
- Si $x_i x_j \in E \forall i \neq j$ entonces $\tilde{G} = G[x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\Delta-1}]$ es un grafo completo.
- Como $\tilde{G}$ es un completo y tiene $\Delta + 1$ vertices, todos sus vertices tienen grado Δ en $\tilde{G}$.
- Pero como tienen grado Δ en G, resulta que ninguno de los vértices de $\tilde{G}$ tiene un vecino (en G) fuera de $\tilde{G}$.
- Por lo tanto $\tilde{G}$ es una componente conexa de G.
- Pero G es conexo, asi que concluimos que $\tilde{G} = G$.
- Como $\tilde{G}$ es completo, esto implica que G es un grafo completo, absurdo por hipotesis.

3B2B2

Caso 3B2B2: Existen $i \neq j$ con al menos un vértice en $\mathrm{CC}_{i,j}$ distinto de x_i, x_j, con al menos tres vecinos en $\mathrm{CC}_{i,j}$

- Como estamos dentro del caso 3B2, sabemos que x_i tiene un sólo vecino de color j y x_j tiene un sólo vecino de color i.
- Entonces $\mathrm{CC}_{1,5} = \mathrm{CC}_{5,1}$ podria lucir algo asi:

ejemplo

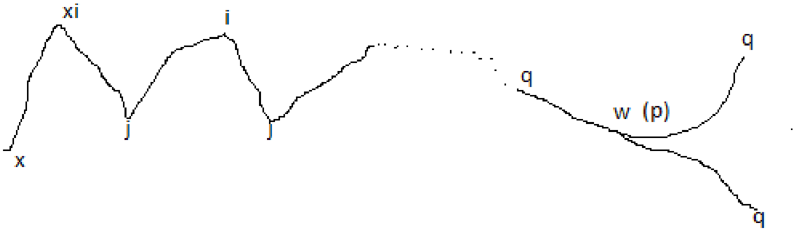


$\mathrm{CC}_{i,j} = \mathrm{CC}_{j,i}$

- La idea en este caso es que si al ir de x_i a x_j tenemos una bifurcación, como en el ejemplo el vecino de x_1, que tiene 4 vecinos de color 1 (x_1 y tres mas), entonces seguramente podriamos cambiarle el color a ese vecino, y luego cambiarle el color a x_1, y luego a x.
- Hagamos esto en forma formal
- Sea w el primer vértice cuando vamos desde x_i hasta x_j en $\mathrm{CC}_{i,j}$ tal que w tenga al menos 3 vecinos.
- Como solo hay dos colores en $\mathrm{CC}_{i,j}$ todos los vecinos de w en $\mathrm{CC}_{i,j}$ tienen el mismo color (i si el color de w es j, y j si el color de w es i)
- Entonces w tiene al menos 3 vecinos del mismo color.

3B2B2

- Sea $p \in \{i, j\}$ el color de w y $q \in \{i, j\}$ distinto de p (es decir, q es el color de los vecinos de w en $\mathrm{CC}_{i,j}$).



3B2B2

- Como $w \neq x_i, x_j$ entonces x no es vecino de w
- Por lo tanto w tiene Δ vecinos en $H = G - \{x\}$
- Como tiene 3 vecinos del mismo color, entonces $\Gamma(w)$ tiene a lo sumo $\Delta - 2$ colores.
- Uno de esos $\Delta - 2$ colores es q, y p NO ES uno de esos colores, pues p es el color de w.
- Entonces si tomamos los colores de los vecinos de w y le agregamos el color p nos quedan $\Delta - 2 + 1 = \Delta - 1$ colores, entre los cuales estan p y q. (es decir, i y j).
- Por lo tanto tenemos al menos un color, distinto de i, j que no es color ni de los vecinos de w ni de w.
- Entonces le podemos dar a w ese color y el coloreo sigue siendo propio

3B2B2

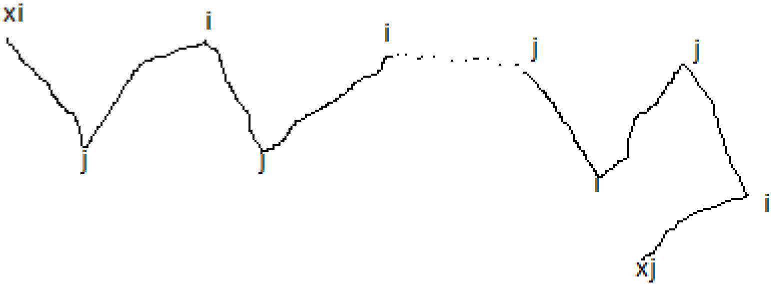
- Como w era el primer vértice en $\mathrm{CC}_{i,j}$ con tres vecinos, entre x_i y w tenemos que $\mathrm{CC}_{i,j}$ forma un camino.
- Al darle a w un color distinto de i, j esto hace que la nueva $\mathrm{CC}_{i,j}$ consista sólo de esos vértices entre x_i y antes de w.
- Como consecuencia la nueva $\mathrm{CC}_{i,j}$ es distinta de la nueva $\mathrm{CC}_{j,i}$.
- Podemos proceder como en el caso 3B2A.
- Fin caso 3B2B2

3B2B3

- En el caso 3B2B1 analizamos que pasaba si $\mathrm{CC}_{i,j}$ era igual a $\{i,j\}$ para todo i,j, y en el 3B2B2 que pasaba si existia algún $i \neq j$ con algún vértice en $\mathrm{CC}_{i,j}$ distinto de x_i, x_j pero tal que tuviera al menos 3 vecinos.
- Entonces tendriamos un nuevo caso que seria el 3B2B3 en el cual tendriamos que no siempre es $\mathrm{CC}_{i,j}$ igual a $\{i,j\}$ pero en aquellos casos en donde $\mathrm{CC}_{i,j} \neq \{x_i, x_j\}$, todos los vertices de $\mathrm{CC}_{i,j}$ distintos de $\{x_i, x_j\}$ tienen solo DOS vecinos en $\mathrm{CC}_{i,j}$.
- Pero esto significa que el caso 2B2B3 es:

Caso 2B2B3: Existe $i \neq j$ tal que $\mathrm{CC}_{i,j} \neq \{x_i, x_j\}$ y para todo par i,j asi, $\mathrm{CC}_{i,j}$ es un CAMINO entre x_i y x_j.

$CC_{i,j}$ camino.



3B2B3

- Hasta ahora no usamos que estamos en el caso 3... es decir, que $\Delta \geq 3$.
- Como $\Delta \geq 3$, entonces x tiene al menos 3 vecinos.
- Sea $x_k \neq x_i, x_j$ un tercer vecino de x.
- Tenemos entonces las componentes conexas $\mathrm{CC}_{i,k}$ y $\mathrm{CC}_{j,k}$ (que son iguales a $\mathrm{CC}_{k,i}$ y $\mathrm{CC}_{k,j}$ respectivamente porque estamos dentro del caso 3B2B).
- En particular, x_i es un elemento tanto de $\mathrm{CC}_{i,j}$ como de $\mathrm{CC}_{i,k}$.
- Podria haber mas elementos en común, o no, asi que analizaremos los dos casos

$\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} \neq \{x_i\}$

- Caso 3B2B3A: $\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} \neq \{x_i\}$.
- Entonces existe $u \in \mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k}$ con $u \neq x_i$
  1. $u \in \mathrm{CC}_{i,j} \Rightarrow$ el color de u es i o j.
  2. $u \in \mathrm{CC}_{i,k} \Rightarrow$ el color de u es i o k.
- Entonces [1] y [2] implican que el color de u debe ser i.
- Como el color de u es i, entonces $u \neq x_j, x_k$ y por hipotesis sabemos que $u \neq x_i$
- Asi que u es un vértice en $\mathrm{CC}_{i,j}$ distinto de x_i, x_j y un vértice en $\mathrm{CC}_{i,k}$ distinto de x_i, x_k (y tiene el color i).

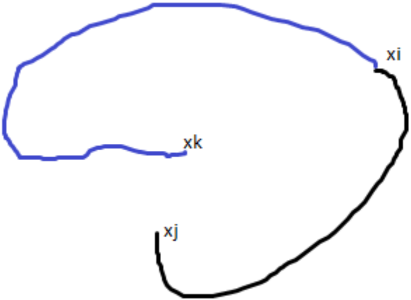
u

$\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} \neq \{x_i\}$

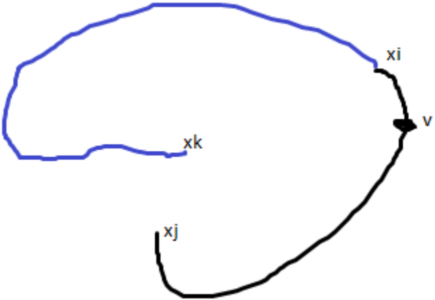
- Como $u \in \mathrm{CC}_{i,j}$, es de color i y no es x_i, entonces tiene 2 vecinos de color j.
- Como $u \in \mathrm{CC}_{i,k}$, es de color i y no es x_i, entonces tiene 2 vecinos de color k.
- Tenemos entonces que entre los vecinos de u hay dos vertices con el mismo color y otros dos vertices con el mismo color (distinto al primero).
- Por lo tanto entre los vecinos de u hay a lo sumo $\Delta - 2$ colores. (entre los cuales estan j y k).
- Asi que podemos hacer con u lo mismo que hicimos con w en el caso 2B2B2: entre los $\Delta - 2$ colores de sus vecinos y el color i de u, suman solo $\Delta - 1$ colores, asi que hay un color faltante en esa lista, y ese color es distinto de j, k, i.

- Si le damos a u ese color, el coloreo que queda es propio, pero ahora x_i queda desconectado de x_j, intercambiamos los colores i, j en la nueva $\mathrm{CC}_{i,j}$ y le damos el color i a x.
- Nos queda entonces un sólo caso:

Caso 3B2B3B: $\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} = \{x_i\}$



- Sea v el (único) vecino de x_i en $\mathrm{CC}_{i,j}$.
- Al ser vecino de x_i no puede tener su color, asi que el color de v es j.
- Ademas, como $\mathrm{CC}_{i,j}$ es un camino pero no es igual a $\{x_i, x_j\}$, tenemos que $v \neq x_j$.



- Intercambiemos los colores en $\mathrm{CC}_{i,k}$
- Entonces, el nuevo color de x_i es k.
- (como explicamos antes, esto todavia no nos sirve, pues el nuevo color de x_k es i, asi que todavia no liberamos ningún color para poder colorear a x)
- Al intercambiar estos colores, la componente $\mathrm{CC}_{i,k}$ no cambia....pero las otras componentes conexas pueden cambiar.

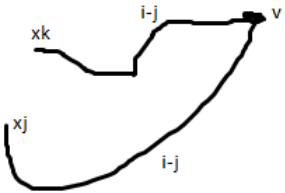
$\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} = \{x_i\}$

- Como el color de x_i es ahora k, entonces ahora podria fijarme en la componente conexa de G que tiene colores j y el nuevo k y que tiene a x_i.
- Llamemos $\mathrm{CC}^*_{k,j}$ a esa componente conexa.
- De la misma forma, llamaremos $\mathrm{CC}^*_{j,k}$ a la componente conexa con los colores j y el nuevo k a la cual pertenece x_j
- y $\mathrm{CC}^*_{j,i}$ la componente conexa con colores j y el nuevo i que tiene a x_j y $\mathrm{CC}^*_{i,j}$ la que tiene a j y el nuevo i y tiene a x_k (porque x_k ahora tiene color i).
- Si $\mathrm{CC}^*_{k,j} \neq \mathrm{CC}^*_{j,k}$ o $\mathrm{CC}^*_{i,j} \neq \mathrm{CC}^*_{j,i}$ o alguna no es un camino, podemos repetir los razonamientos anteriores para intercambiar colores y dejar un color libre para colorear a x

$\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} = \{x_i\}$

- Asi que podemos suponer $\mathrm{CC}^*_{k,j} = \mathrm{CC}^*_{j,k}$, $\mathrm{CC}^*_{i,j} = \mathrm{CC}^*_{j,i}$ y que ambas son caminos.
- Ahora bien:
  - Sólo cambiamos colores en $\mathrm{CC}_{i,k}$
  - Estamos suponiendo que $\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} = \{x_i\}$
- Por lo tanto los colores de $\mathrm{CC}_{i,j} - \{x_i\}$ no cambian.
- En particular, sigue habiendo un camino de colores i, j entre v y x_j.
- Es decir, $v \in \mathrm{CC}^*_{j,i}$.

v



Como estamos suponiendo $\mathrm{CC}^*_{j,i} = \mathrm{CC}^*_{i,j}$, este fragmento de $\mathrm{CC}^*_{j,i}$ debe extenderse hasta x_k, que es el vertice que ahora tiene el color i.

$\mathrm{CC}_{i,j} \cap \mathrm{CC}_{i,k} = \{x_i\}$

- Por otro lado, v sigue siendo un vécino de color j de x_i
- Solo que x_i tiene ahora el color k.
- Asi pues, $v \in \mathrm{CC}^*_{k,j}$
- Pero dijimos que $v \in \mathrm{CC}^*_{j,i}$.
- Entonces $v \in \mathrm{CC}^*_{j,i} \cap \mathrm{CC}^*_{k,j}$ y v no es x_j
- Podemos hacer lo mismo que en el caso 3B2B3A, usando v en vez de u.
- Fin Brooks.