Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2018

Guía de Ejercicios N°5

Derivadas

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 5x + 3$ *b*) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ *c*) $f(x) = \sqrt{6 - x}$

2. Determine si la siguiente función es derivable en $x = 0$. En caso afirmativo obtenga $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Definición: se definen la **derivada a izquierda** y la **derivada a derecha** de f en a respectivamente, mediante

$$f'^{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad f'^{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si es que los límites existen. En este caso, $f'(a)$ existe si y sólo si existen ambas derivadas laterales y son iguales. La derivada a izquierda y la derivada a derecha son también llamadas **derivadas laterales**.

3. Sea f la función dada por $f(x) = |5x - 3|$.
   a) Determine $f'^{-}(3/5)$ y $f'^{+}(3/5)$.
   b) Demuestre que no existe $f'(3/5)$.

4. *a*) Use las definiciones de las derivadas laterales para calcular $f'^{-}(4)$ y $f'^{+}(4)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 5 - x & 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & x \geq 4 \end{cases}$$

   b) Determine el dominio de f.
   c) Trace la gráfica de f.
   d) ¿En qué puntos del dominio f es discontinua?
   e) ¿Dónde f no es derivable?

Cálculo de derivadas

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

   a) $f(x) = x^7 - 5x^3 + 1$
   b) $f(x) = (x^2 - x)^4$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$
   e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
   f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
   g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
   h) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
   i) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$
   j) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   k) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
   l) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$
   m) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc\,tg} x$
   n) $f(x) = x\ln(x)$
   ñ) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$
   o) $f(x) = (x^2 - x)\ \mathrm{e}^{-x}$
   p) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
   q) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$
   r) $f(x) = \ \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x^2}$
   s) $f(x) = x^x$
   t) $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$
   u) $f(x) = \log_x\ \mathrm{e}$

6. Calcule la derivada segunda de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$
   b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = \sqrt{3-x}$ en los puntos (-1,2), (2,1) y (-6,3).

8. ¿Para qué valores de x son paralelas las tangentes de $y = x^2$ e $y = x^3$?

9. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$. ¿Ocurre lo mismo con la tangente a $g(x) = 1/x^2$ en $(a, 1/a^2)$?

10. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

    a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad (-5, \dfrac{9}{4})$ (hipérbola)
    b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \quad (-1, 4\sqrt{2})$ (elipse)

Material Extra

11. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

a) $f(x) = (1 + 3x^4)^5$

b) $f(x) = (1 + x + x^2)^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)^5}$

d) $f(x) = (3x^2 + 3)(2x^2 + 1)$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5}{4x^2 + 7}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{(x - 1)^2} + \dfrac{3}{(x - 1)^3}$

g) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

h) $f(x) = (2 + 5x^2)^{\frac{1}{3}}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 2)}}$

j) $f(x) = (5 - 3\cos x)^4$

k) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$

m) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$

n) $f(x) = \dfrac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$

ñ) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

o) $f(x) = \sqrt[3]{2^x + x}$

p) $f(x) = \ln(\ln x)$

q) $f(x) = \arccos \sqrt{x}$

r) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

s) $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x}$

t) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

u) $f(x) = 7\ln\left(x^{\frac{2}{5}}\right)$

v) $f(x) = 4\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)$

w) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arc\,tg}(x)\right)$