Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 16 - Espacios vectoriales 2

FAMAF / UNC

13 de mayo de 2021

En esta clase nos vamos a concentrar en los subespacios vectoriales. Introduciremos el concepto de generadores y de subespacio generado por conjunto de vectores.

Este archivo se basa en la Sección 3.2 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

Repaso

Espacios Vectoriales: V , $+$, $\cdot$, $\mathbb{K}$

cuerpo

conjunto, operaciones, Escalares

axiomas

Subesp Vect: $W \subset V$, cerrado por oper.

$v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$

$t \in \mathbb{K} \Rightarrow tv \in W$

Ejemplo 1: $V = \mathbb{K}[x]$ polinomios

$W = \mathbb{K}_n[x]$ polinomios de grado $< n$

$$= \{ a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K} \}$$

$V = \mathbb{R}_3[x] = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 2: $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivables}\}$

Ejemplo 3: V cualquier Esp Vect

$W = \{0\}$ ~~prop~~ $0+0=0$, $t\cdot 0 = 0$ $\in W$

Ejemplo 4: $V = \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ - Esp. Vect.

$W = \mathbb{R}$ NO ES SUBESPACIO

Porque si $1 \in W = \mathbb{R}$ y $i \in \mathbb{C}$ (escalar)

$\longrightarrow i \cdot 1 = i \notin W = \mathbb{R}$

Es decir $W = \mathbb{R}$ no es cerrado por la mult por escalares $\mathbb{C}$

Ejemplos $V = \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-Esp Vect

$W = \mathbb{R}$ si es un subesp

Porque si $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$
$ \overset{''}{W} \qquad\qquad \overset{''}{W}$

Def subesp

$t \in \mathbb{R} \Rightarrow t \cdot a \in W = \mathbb{R}$

Teorema 3.2.4

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalares de V.

Consecuencia

Todos los resultados que probemos para espacios vectoriales valen también para subespacios vectoriales.

Teorema 3.2.8

Sea V un espacio vectorial. La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial

Demostración: Queremos ver que si $\{W_i\}_{i\in I}$ flia de subesp de V

$\Rightarrow W=\bigcap_{i\in I} W_i$ es SUBESP

1) $W\neq\emptyset$ pues $0\in W_i\ \forall i\in I \Rightarrow 0\in\bigcap_{i\in I} W_i$

2) Sea $v,w\in\bigcap_i W_i \Rightarrow v,w\in W_i\ \forall i\in I$

W_i es subesp $\Rightarrow v+w\in W_i\ \forall i\in I$

$\Rightarrow v+w\in\bigcap_{i\in I} W_i\ \forall i\in$

3) Si $v\in\bigcap_{i\in I} W_i$

CASO PARTICULAR $v, w \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} v, w \in W_1 \Rightarrow v+w \in W_1 \\ v, w \in W_2 \Rightarrow v+w \in W_2 \end{cases}$

$\Downarrow$

$v+w \in W_1 \cap W_2$

$t \in \mathbb{K}$ y $v \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow v \in W_1$ y $v \in W_2 \Rightarrow \begin{matrix} tv \in W_1 \\ tv \in W_2 \end{matrix} \Rightarrow tv \in W_1 \cap W_2$

Observación

La unión de subespacios (*) NO es necesariamente un subespacio.

En la Práctica 6 hay ejercicios en lo que van a ver esto.

$I = \{1, 2\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \bigcap_{i \in I} W_i = \bigcap_{i=1}^{2} W_i$

NOTACIÓN

(*) W_1 y W_2 subesp puede ser que $W_1 \cup W_2$ NO ES SUBESP

EJEMPLO Ej 1 Practica 6

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

b) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_3 = 0\}$

c) $A \cup D$ NO ES SUBESP

HAY QUE ENCONTRAR $v \in A$ y $w \in D$ tq $v + w \notin A \cup D$.

Analicemos el sistema homogéneo del Ejercicio 1 de la Tarea 2.

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2w = 0 \\ -x - 2y - 5z - 5w = 0 \end{cases}$$

La descripción paramétrica del conjunto de soluciones es

$$\{(-z + w, -2z - 3w, z, w) : \cancel{y}\, z, w \in \mathbb{K}\}.$$

Podemos escribir una sol así:

$$(-z+w, -2z-3w, z, w) =$$

$$= (-z, -2z, z, 0) + (w, -3w, 0, w)$$

$$= z\underbrace{(-1, -2, 1, 0)}_{= v_1} + w\underbrace{(1, -3, 0, 1)}_{= v_2}$$

$$= \{ z v_1 + w v_2 \,/\, z, w \in \mathbb{R} \}$$

$z = 1, \quad w = 2$

$(-1,-2,1,0) + 2(1,-3,2,1)$

es una combi lineal de v_1 y w_2

Observación

La descripción paramétrica del conjunto de soluciones nos dice que toda solución se puede "generar" (escribir) como combinación lineal de algunas soluciones particulares.

Para estudiar el fenómeno anterior en general es que introducimos el concepto de generadores y subespacio generado.

Definición 3.2.5

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Ejemplo

Todo $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ es combinación lineal de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$

Demostración:

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x,0) + (0,y) \\ &= x(1,0) + y(0,1) \\ &= x\,e_1 + y\,e_2 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} (3,5) &= 3\cdot(1,0) + 5(0,1) \\ &= 3e_1 + 5e_2 \end{aligned}$$

Definición 3.2.5

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Observación

La expresión $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$ se llama combinación lineal.

Definición 3.2.7

Al subconjunto de V formado por todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, ..., v_k$ lo llamaremos el subespacio generado por $v_1, ..., v_k$.
El conjunto $S = \{v_1, ..., v_k\}$ se llama conjunto de generadores.

Luego veremos que este subconjunto es efectivamente un subespacio vectorial de V.

Sean $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,1,2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.
El subespacio generado por v_1, v_2 y v_3 es

$\{v_1, v_2, v_3\}$ es el conj generador

$$W = \{x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(1,1,2) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x+z,\ y+z,\ x+y+2z) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Pregunta

Sea $b = (2,3,5) \in \mathbb{R}^4$. ¿Es b combinación lineal de v_1, v_2 y v_3? Sí

¿ $b = xv_1 + yv_2 + zv_3$? para algunos $x, y, z \in \mathbb{R}$

¿ $(2,3,5) = (x+z,\ y+z,\ x+y+2z)$?

$$¿\begin{cases} x+z=2 \\ y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$$ tiene sol?

Resolvamos este sistema!

Todas las sol son $(2-z, 3-z, z)$

$$b \underset{z=0}{=} 2v_1 + 3v_2 \underset{z=1}{=} v_1 + 2v_2 + v_3$$

Nos interesa tener una manera de decidir rápidamente si un vector esta en el subespacio generado o no.

Una forma de esto es tener el subespacio descripto por ecuaciones que sólo satisfacen los vectores que a este pertenecen.

Problema (similar a los Ejercicios 7 y 9 del Práctico 6)

Caracterizar mediante ecuaciones el subespacio generado por v_1, v_2 v_3.

En otras palabras, queremos describir implícitamente el conjunto de los $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

para algunos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2.7

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. El subconjunto formado por todas las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_k$ se llama subespacio generado por $v_1, ..., v_k$ y lo denotamos

$$\langle v_1, ..., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

El conjunto $S = \{v_1, ..., v_k\}$ se llama conjunto de generadores.

Observación

Los generadores pertencen al subespacio que generan:

$$v_i \in \langle v_1, ..., v_k \rangle$$

para todo $1 \leq i \leq k$. En efecto,

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

Teorema 3.2.6

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces

$$W = \langle v_1, ..., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

es efectivamente un subespacio vectorial de V.

Demostración: 1) $W \neq \emptyset$ porque $v_1, v_2, \ldots, v_k \in W$

2) $v, w \in W$ queremos ver que $v + w \in W$

$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

$w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$ para ciertos $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow v + w = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k)$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k) v_k$$

$\Rightarrow v+w$ es comb lineal de $v_1, \ldots, v_k$

$\Rightarrow v+w \in W$ $\square$

3) $v \in W$, $t \in \mathbb{K}$ ¿$\Rightarrow$ $t \cdot v \in W$?

$\hookrightarrow v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow tv = (t\lambda_1)v_1 + \ldots + (t\lambda_k)v_k$

$\Rightarrow tv$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_k$

$\Rightarrow t v \in W$ $\square$

Ejemplo

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + 3z + 2w &= 0 \\ -x - 2y - 5z - 5w &= 0 \end{aligned} \right.$$

es generado por $v_1 = (-1, -2, 1, 0)$ y $v_2 = (1, -3, 0, 1)$.

Esto se deduce de la descripción paramétrica del conjunto de soluciones:

$$\begin{aligned} &\{(-z + w, -2z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{K}\} = \\ &= \{z(-1, -2, 1, 0) + w(1, -3, 0, 1) : z, w \in \mathbb{K}\} \\ &= \{zv_1 + wv_2 : z, w \in \mathbb{K}\} \\ &= \boxed{\langle v_1, v_2 \rangle} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $v \in \mathbb{K}^2$ no nulo. Entonces el subespacio generado por v es la recta que pasa por $(0,0)$ con dirección v

$$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Ejemplo

El subespacio vectorial de V generado por el vector cero es el cero

$$\langle 0 \rangle = \{\lambda \cdot 0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{0\}$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n \in V$. Si $W \subset V$ es un subespacio que contiene a los vectores $v_1, ..., v_n$, entonces

$$\langle v_1, ..., v_n \rangle \subset W.$$

Teorema 3.2.9

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es igual a la intersección de todos los subespacios vectorial que contienen a $\{v_1, ..., v_k\}$.

Demostración:

Definición 3.2.10

Sea V un espacio vectorial y $S_1, ..., S_k$ subconjunto de V. El conjunto suma es

$$S_1 + \cdots + S_k = \{s_1 + \cdots + s_k \mid s_1 \in S_1, ..., s_k \in S_k\},$$

en palabras, es el conjunto formado por todas las sumas que podemos hacer entre vectores de los conjuntos $S_1, ..., S_k$

Ejemplo

Si $S_1 = \{(1,0),(2,0)\}$ y $S_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$S_1 + S_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Teorema 3.2.11

Sea V un espacio vectorial y $W_1, ..., W_k$ subespacios de V. Entonces $W_1 + \cdots + W_k$ es un subespacio de V.

Observación

$$W_1 \cup \cdots \cup W_k \subset W_1 + \cdots + W_k.$$

Demostración: si $w_i \in W_i$, entonces $w_i = 0 + \cdots + w_i + \cdots + 0$ pertenece a $W_1 + \cdots + W_k$.

Proposición 3.2.12

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces

$$\langle v_1, ..., v_k \rangle = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_k \rangle$$