MATEMATICA DISCRETA II-2019, Práctico 1

Coloreo

Recordatorio: si Ud. dice que $\chi(G) = k$, entonces debe dar un coloreo propio con k colores y probar que no hay uno con $k-1$. Esto ultimo puede ser facil, pej viendo que hay un subgrafo que requiere k colores, pero en algunos casos requiere suponer que hay un coloreo con $k-1$ colores y llegar a un absurdo. En este caso debe quedar claro que al suponer que hay un coloreo con $k-1$ colores, uds NO TIENEN CONTROL sobre cómo es el coloreo, y deben ir deduciendo propiedades del mismo. Una cantidad grande de alumnos suponen que hay un coloreo con $k-1$ colores....construido por ellos, y prueban que ese coloreo no es propio. Esto no es una prueba sino una idiotez.

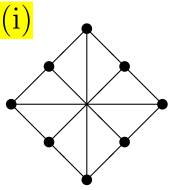
(1) El grafo de Petersen viene dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

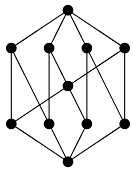
a) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden afcegdbhij.
b) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden alfabetico.
c) Calcular el numero cromatico del grafo de Petersen.

(2) Hallar el número cromático de los siguientes grafos.

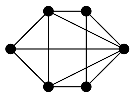
(i)



(ii)



(iii)



(3) Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices opuestos. (i.e., i con $r+i$ para $i = 1, 2, ..., r$). Un ejemplo se puede ver en el ejercicio anterior, item (i), donde se tiene M_4. Calcular $\chi(M_r)$. (Deberá distinguir entre los casos r impar, $r = 2$ y r par > 2).

(4) Dar el algoritmo MAS RÁPIDO POSIBLE que resuelva el siguiente problema:

Input: (T, n, m), donde T es un árbol, n es el número de vertices y m es el número de lados.

Output: $\chi(G)$

(5) En el teórico vimos un ejemplo de un grafo bipartito con n vertices de forma tal que Greedy usa $n/2$ colores. (con n par).

a) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $(n+1)/2$ colores (con n impar).

b) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $(n+2)/2$ colores (con n par).

(6) Dado r natural, sea G el grafo formado por vertices $\{x_i, y_i, z_i, w_i : i = 0, 1, 2, ..., 2r\} \cup \{p\}$ y lados: $\{x_i x_{(i+1)\mathrm{mod}2r+1} : i = 0, ..., 2r\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i p : i = 0, ..., 2r\}$. Es decir, es un C_{2r+1} con unos triangulos de vertices x_i, y_i, z_i mas otros triangulos y_i, z_i, w_i mas los lados $w_i p$. Probar que $\chi(G) = 4$.

(7) Dado n natural, sea G_n el grafo cuyos vertices son los números $1, 2, ..., n$ y cuyos lados son los $\{i, j\}$ tales que $mcd(i, j) = 1$. Calcular $\chi(G_{100})$.

(8) El "queen graph" Q_n es el grafo cuyos vertices son los n^2 casilleros de un tablero cuadrado con n filas y n columnas. Dos vertices son vecinos si poniendo una reina de ajedrez en cada uno de los casilleros las reinas se atacan mutuamente. (es decir, si los casilleros estan en una misma fila, columna o diagonal, donde diagonal no es necesariamente una de las diagonales principales). Probar que si n es coprimo con 6, entonces $\chi(G) = n$.

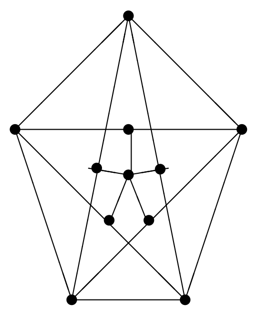
(9) Decidir si lo siguientes son verdaderos o falsos. Probar los que sean verdadero (si hay alguno) y dar un contraejemplo para los falsos. (si hay alguno). Para todos los casos, sea G un grafo coloreado POR GREEDY a partir del color 0, en algún orden, con t colores y sean V_i los vertices coloreados con i.

a) Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-1}, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden obtenemos de vuelta exactamente t colores.

b) Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc, hasta V_{t-3} luego los de V_{t-1} y al final los vértices de V_{t-2}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

c)Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-4} luego los de V_{t-2}, luego los de V_{t-3} y al final los vértices de V_{t-1}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

(10) Probar que el número cromático del siguiente grafo es 4.



(11) Similar al anterior pero ahora con un C_7:

El grafo G tiene vertices $x_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{x_i x_{(i+1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ (i.e., un C_7) y ademas vértices $y_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{y_i x_{(i\pm1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ y un vértice extra p con lados py_i, $i = 0, ..., 6$.

(12) Sea G un grafo tal que $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo H propio de G. (un grafo asi se llama k-crítico, si $\chi(G) = k$). Probar que $\chi(G) \leq \delta + 1$.

(13) Dar un algoritmo polinomial que resuelva el siguiente problema:

Input: Un grafo G que se garantiza que es conexo no regular con $\Delta \leq 3$.

Output: $\chi(G)$ y un coloreo propio con $\chi(G)$ colores.

(nota: para probar que es polinomial debe probar su complejidad).