Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 07 - Sistemas de ecuaciones lineales 2

FAMAF / UNC

8 de abril de 2021

En este archivo presentaremos las nociones de:

- Matriz
- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)
- Operaciones elementales por fila

y veremos como se relacionan con los sistemas de ecuaciones lineales.

Estas filminas estan basadas en las Secciones 2.3 y 2.4 del *Apunte* disponibles en classroom , siguiendo la misma numeración.

1. Objetivos
2. Matriz
   - La matriz de un sistema de ecuaciones
3. MERF
4. Operaciones elementales por fila
5. Matriz ampliada y sistemas equivalentes
6. Conclusiones

Al final de las imágenes interactivas sobre el Método de eliminación de variables nos preguntabamos

- Para escribir menos ¿Se podría evitar escribir explícitamente las incógnitas?

Las matrices responden afirmativamente a esta pregunta.

En efecto, cuando sumamos ecuaciones lo que hacemos es sumar "coeficiente a coeficiente". Entonces si lo hacemos ordenadamente no hace falta que escribamos cada vez las incógnitas.

Definición 2.3.1

Una matriz $m \times n$ es un arreglo de números reales (o complejos) de m filas y n columnas.

A cada número de la matriz lo llamamos entrada o coeficiente.

El conjunto de todas las matrices $m \times n$ es denotado

$$\mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{o} \quad M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

(si las entradas son número complejos usamos $\mathbb{C}^{m\times n}$ o $M_{m\times n}(\mathbb{C})$)

Ejemplo 2×3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1×3

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3×1

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Convenciones

La notación $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ quiere decir que A es una matriz $m \times n$ de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Convenciones

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz. Escribiremos $[A]_{ij}$ para denotar la entrada a_{ij} de A.

- Dos matrices del mismo tamaño $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son iguales si cada una de sus entradas lo son:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \, \forall i, j$$

Un sistema de ecuaciones lineales queda determinado por los coeficiente de las incógnitas y los valores a los que igualamos las ecuaciones.

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Definición

Llamaremos matriz asociada del sistema a la matriz de coeficientes $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Si además $Y = (y_j) \in \mathbb{R}^m$, entonces escribiremos

$$AX = Y$$

para representar el sistema de ecuaciones.

(Esta notación cobrará sentido cuando definamos la multiplicación de matrices)

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n & = & y_1\\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n & = & y_2\\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

$AX=Y$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$(E)\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = 3 \end{cases}$$

es representado de la forma $AX = Y$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observación

- Si una incognita no aparece en una ecuación, el correspondiente coeficiente de la matriz es 0.
- La cantidad de incognita queda determinada por la cantidad de columnas de la matriz A.

Observación

Recíprocamente, el sistema asociado a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y un vector $Y \in \mathbb{R}^n$ es el sistema representado por

$$AX = Y.$$

Ejemplo

El sistema asociado a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

es

$$(E)\begin{cases} 1\,x_1 + 4\,x_2 = -1 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 = 7 \end{cases}$$

Pregunta

¿Cuáles matrices determinan los sistemas más fácil de resolver?

Una con muchos ceros y unos

Una Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF) es una matriz de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de MERF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.4.1

Una matriz A es MERF si satisface lo siguiente:

1. La primera entrada no nula de una fila es 1. Este 1 es llamado 1 principal.
2. Cada columna con un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a cero.
3. Todas las filas nulas estan al final de la matriz.
4. En dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior ("los 1 principales estan de forma escalonada").

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación

Los sistemas de ecuaciones más faciles de resolver son los representados por una MERF.

Porque podemos despejar todas las incógnitas correspondientes a los 1 principales en función de las otras incógnitas.

A continuación vemos ejemplos de las 2 situaciones típicas...

Ejemplo (solución única)

La solución del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

Pues el sistema asociado es:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ejemplo (solución única)

La solución del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

En efecto, si escribimos explícitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Este es el sistema al que llegamos en el ejemplo con solución única de las imágenes interactivas.

Ejemplo (infinitas soluciones)

El conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{ \left(-2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3\right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

sistema asoc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ejemplo (infinitas soluciones)

El conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{ \left(-2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3\right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema, la solución queda determinada automáticamente:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + 1 \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Este es el sistema al que llegamos en el ejemplo con infinitas soluciones de las imágenes interactivas.

Motivación

Las Operaciones elementales por fila son la traducción al lenguaje de matrices de las combinaciones lineales de ecuaciones.

En otras palabras, son las maneras en que podemos modificar una matriz de manera tal que los correspondientes sistemas de ecuaciones tengan las mismas soluciones. Ampliaremos esto en la próxima sección.

A continuación definiremos los tres tipos de operaciones elementales [Definición 2.3.2].

El primer tipo de operación elemental es:

multiplicar la fila i por un número real $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{c \cdot F_i} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c\,a_{i1} & c\,a_{i2} & \cdots & c\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Multiplicar la primer fila por -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot F_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El segundo tipo de operación elemental es:

sumar a la fila r un múltiplo de la fila $s \neq r$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r + t \cdot F_s} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ta_{s1} & a_{r2} + ta_{s2} & \cdots & a_{rn} + ta_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sumar a la segunda fila la primer fila multiplicada por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 3 \cdot 1 & 4 + 3 \cdot 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El tercer tipo de operación elemental es:

intercambiar las fila r y s

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Intercambiar la segunda y tercer fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Convenciones

- Si A es una matriz, $e(A)$ denotará la matriz que obtenemos despues de modificar a A por cierta operación elemental e.

Ejemplo

Si e es la operación intercambiar la segunda y tercer fila y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $e(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como hicimos en los ejemplos, cuando le apliquemos una operación elemental a una matriz especificaremos arriba de una flecha que operación aplicamos:

$$A \quad \xrightarrow{e} \quad e(A)$$

Así podemos recordar que operación aplicamos y además es oblilgatorio hacerlo en las tareas y exámenes.

Pensando en que las operaciones elementales son funciones en el conjunto de matrices resulta que son biyectiva y más aún:

Teorema 2.3.3

Todo operación elemental es inversible y la inversa es también una operación elemental.

Dicho informalmente "podemos deshacer el cambio introducido por una operación elemental usando otra operación elemental"

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "e"] & & e(A) \arrow[ll, bend left, "e^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Teorema 2.3.3

Todo operación elemental es inversible y la inversa es también una operación elemental.

La demostración es caso por caso:

- La inversa de "multiplicar por $c \neq 0$ la fila i" es

$A \xrightarrow{cF_i} B \xrightarrow{\frac{1}{c}F_i} A$ "multiplicar la por $\frac{1}{c}$ la fila i"

- La inversa de "sumar a la fila r la fila s multiplicada por t" es

"sumar a la fila r la fila s multiplicada por $-t$".

- La inversa de "intercambiar las filas r y s" es

"intercambiar las filas r y s".

Definición 2.3.4

Sean A y B dos matrices del mismo tamaño. Diremos que B es equivalente por filas a A, y denotaremos $A \sim B$, si B se puede obtener de A por un número finito de operaciones elementales por fila.

Observación

La equivalencia por filas es una relación de equivalencia.

Ejemplo

Las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$ son equivalentes por fila pues

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7} \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

En las imágenes interactivas mencionamos que los sistemas equivalentes [Definición 2.2.2] tienen iguales soluciones [Teorema 2.2.3].

Ahora traduciremos esto al lenguaje de matrices.

Definición 2.3.5

Sea $AX = Y$ un sistema de ecuaciones lineales asociado a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y un vector $Y \in \mathbb{R}^{n}$. La matriz ampliada del sistema es

$$(A|Y)\,,$$

es decir, a la matriz A le agregamos una columna igual a Y.

Notación

Usamos una línea vertical para separar en la matriz ampliada la matriz A de la columna Y.

Ejemplo

La matriz ampliada del sistema de ecuaciones

$$(E)\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = 3 \end{cases}$$

es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \_\_\_\_ = 0 \\ \_\_\_\_ = 0 \\ \quad \vdots \\ \_\_\_\_ = 0 \end{cases}$$ SISTEMA HOMOGENEO $\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Teorema 2.3.6

Sea $AX = Y$ un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $(B|Z)$ una matriz que se obtiene a partir de la matriz ampliada $(A|Y)$ por medio de operaciones elementales.

$$(A|Y) \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} (B|Z)$$

Entonces los sistemas $AX = Y$ y $BX = Z$ tienen las mismas soluciones.

Si B es MERF $\Rightarrow$ $BX=Z$ es FÁCIL DE RESOLVER

PARA RESOLVER $AX=Y$ VAMOS A USAR OP ELEM PARA TRANSFORMAR A en MERF

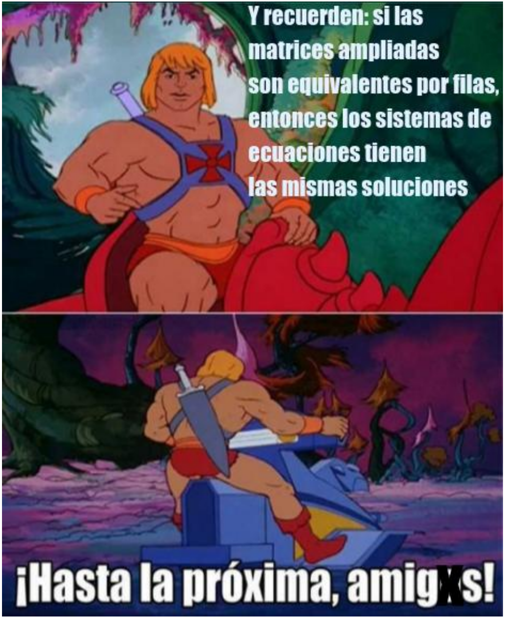
- Teorema 2.2.3: Sistemas equivalentes tienen las mismas soluciones. Estos son sistemas cuyas ecuaciones se escriben como combinaciones lineales unas de otras. Como las ecuaciones son lineales, si hacemos combinaciones lineales entre ellas siguen manteniéndose las igualdades. Por eso tienen iguales soluciones.
- Las operaciones elementales por filas son la traducción al lenguaje de matrices de las combinaciones lineales de ecuaciones.
- Teorema 2.3.3: Las operaciones elementales son inversibles. Es decir, si la matriz B' se obtiene de A' por operaciones elementales, entonces podemos volver de B' a A' usando operaciones elementales.
- Los dos item anteriores nos dicen que los sistemas correspondientes a A' y B' son equivalentes. Entonces podemos aplicar el Teorema 2.2.3 para concluir que tienen las mismas soluciones.

En estas filminas vimos cómo traducir al lenguaje de matrices todo lo referido a sistemas de ecuaciones lineales.

En la próxima clase sistematizaremos y analizaremos el Método de Gauss.

Para afianzar ideas

- Entender la prueba del Teorema 2.2.3


Y recuerden: si las
matrices ampliadas
son equivalentes por filas,
entonces los sistemas de
ecuaciones tienen
las mismas soluciones
¡Hasta la próxima, amigXs!