

**Práctico 3**  
**Matemática Discreta I – Año 2019/2**  
**FAMAF**

**Ejercicios resueltos**

1. Hallar el cociente y el resto de la división de:
  - a) 135 por 23, *Rta:*  $135 = 23 \times 5 + 20$   $q = 5, r = 20$
  - b) -135 por 23, *Rta:*  $-135 = 23 \times (-6) + 3$   $q = -6, r = 3$
  - c) 135 por -23, *Rta:*  $-135 = 23 \times (-6) + 3$   $q = -6, r = 3$
  - d) -135 por -23, *Rta:*  $135 = 23 \times 5 + 20$   $q = 5, r = 20$
  - e) 127 por 99, *Rta:*  $127 = 99 \times 1 + 28$ ,  $q = 1, r = 28$
  - f) -98 por -73. *Rta:*  $98 = 73 \times 1 + 25$ ,  $q = 1, r = 25$
2. a) Si  $a = b \cdot q + r$ , con  $b \leq r < 2b$ , hallar el cociente y el resto de la división de  $a$  por  $b$ .  
*Rta:*  $a = b \cdot (q + 1) + r - b$ , con  $0 \leq r - b < b$  por lo tanto el cociente es  $q + 1$  y el resto  $r - b$ .  
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que  $-b \leq r < 0$ .  
*Rta:*  $a = b \cdot (q - 1) + r + b$ , con  $0 \leq r + b < b$  por lo tanto el cociente es  $q - 1$  y el resto  $r + b$ .
3. Dado  $m \in \mathbb{N}$  hallar los restos posibles de  $m^2$  y  $m^3$  en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.  
*Rta:* El resto del cuadrado (cubo) de  $m$  es el resto del cuadrado (cubo) del resto de  $m$ . Por lo tanto hay que calcular los restos de  $r^2$  con  $0 \leq r \leq m$ . Así tenemos para  $m = 3, r \in \{0, 1\}$ ;  $m = 4, r \in \{0, 1\}$ ;  $m = 5, r \in \{0, 1, 4\}$ ;  $m = 7, r \in \{0, 1, 4, 2\}$ ;  $m = 8, r \in \{0, 1, 4\}$ ;  $m = 11, r \in \{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$ .
4. Expresar en base 10 los siguientes enteros:
  - a)  $(1503)_6$  *Rta:*  $1 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 0 \times 6^1 + 3 \times 6^0 = 1 \times 216 + 5 \times 36 + 3 = 399$
  - b)  $(1111)_2$  *Rta:*  $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$
  - c)  $(1111)_{12}$  *Rta:* En este ejercicio (y en otro más abajo) usaremos que

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{serie geométrica}).$$

1

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 12^3 + 12^2 + 12^1 + 1 &= \frac{12^4 - 1}{11} = \frac{144^2 - 1}{11} = \frac{143 \times 145}{11} \\ &= \frac{143}{11} \times 145 = 13 \times 145. \end{aligned}$$

d)  $(123)_4$  *Rta:*  $1 \times 16 + 2 \times 4 + 3 = 27$ .

e)  $(12121)_3$  *Rta:*  $3^4 + 2 \times 3^3 + 3^2 + 2 \times 3^1 + 3 = 81 + 54 + 9 + 6 + 3 = 153$ .

f)  $(1111)_5$  *Rta:*  $=(5^4 - 1)/4 = 624/4 = 156$ .

## 5. Convertir

a)  $(133)_4$  a base 8,

*Rta:* Debemos primero calcular cuanto vale  $(133)_4$  en base 10 (la base usual) y luego pasarlo a base 8. Ahora bien,  $(133)_4 = 4^2 + 3 \times 4 + 3 = 31$  y  $31 = 3 \times 8 + 7$ , por lo tanto  $(133)_4 = (37)_8$ .

b)  $(B38)_{16}$  a base 8,

*Rta:* Aquí usaremos que  $16 = 2 \times 8$ . Entonces,  $(B38)_{16} = 12 \times (16)^2 + 3 \times 16 + 8 = 6(8)^3 + 6 \times 8 + 8 = 6 \times 8^3 + 7 \times 8 = (6010)_8$ .

c)  $(3506)_7$  a base 2,

*Rta:*  $(3506)_7 = 3 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 = 1280$ . Ahora debemos escribir 1280 en base 2

$$1280 = 2 \times 640 + 0$$

$$640 = 2 \times 320 + 0$$

$$320 = 2 \times 160 + 0$$

$$160 = 2 \times 80 + 0$$

$$80 = 2 \times 40 + 0$$

$$40 = 2 \times 20 + 0$$

$$20 = 2 \times 10 + 0$$

$$10 = 2 \times 5 + 0$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$1 = 2 \times 0 + 1.$$

Luego  $(3506)_7 = (10100000000)_2$ .

Hay una forma de hacer este ejercicio más corta: observar que  $1280 = 2^7 \times 10 = 2^8 \times 5 = 2^8 \times (2^2 + 1) = 2^{10} + 2^8$ .

d)  $(1541)_6$  a base 4.

*Rta:*  $6^3 + 5 \times 6^2 + 4 \times 6 + 1 = 54 \times 4 + 45 \times 4 + 6 \times 4 = 105 \times 4 = 420$ . Luego,

$$420 = 4 \times 105 + 0$$

$$105 = 4 \times 26 + 1$$

$$26 = 4 \times 6 + 2$$

$$6 = 4 \times 1 + 2$$

$$1 = 4 \times 0 + 1.$$

Entonces,  $(1541)_6 = (12210)_4$ .

6. Calcular:

a)  $(2234)_5 + (2310)_5$

*Rta:* La suma entre números escritos en la misma base se hace de la misma forma que la suma usual, teniendo en cuenta que en base 5 tenemos,  $2+3 = 10$ ,  $3+3 = 11$ , etc.

$$\begin{array}{r} (2234)_5 \\ + (2310)_5 \\ \hline (10044)_5 \end{array}$$

b)  $(10101101)_2 + (10011)_2$  *Rta:*  $(11000000)_2$ .

7. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si  $ab = 1$ , entonces  $a = b = 1$  ó  $a = b = -1$ .

*Rta:*  $a$  y  $b$  no pueden ser nulos y si tienen distinto signo su producto es negativo, podemos suponer que son ambos positivos o negativos. Si  $a > 1$  entonces  $1 = ab > b > 0$  es absurdo. Igualmente si  $a < -1$  entonces  $1 = ab > -b > 0$ . Luego  $a = \pm 1$  y entonces  $b = \pm 1$ .

b) Si  $a, b \neq 0$ ,  $a|b$  y  $b|a$ , entonces  $a = b$  ó  $a = -b$ .

*Rta:* Tenemos  $b|a \Rightarrow a = bq$  y  $a|b \Rightarrow b = ap$  luego  $a = apq$  y  $a \neq 0 \Rightarrow pq = 1$ . El inciso a) dice que  $p = q = 1$  o  $p = q = -1$  de donde se sigue el resultado buscado.

c) Si  $a|1$ , entonces  $a = 1$  ó  $a = -1$ .

*Rta:* Este es un corolario del inciso b) tomando  $b = 1$  ya que  $1|a, \forall a \in \mathbb{Z}$ .

d) Si  $a \neq 0, a|b$  y  $a|c$ , entonces  $a|(b+c)$  y  $a|(b-c)$ .

*Rta:* Como  $b = aq$  y  $c = ap$ ,  $b \pm c = a(q \pm p)$ .

e) Si  $a \neq 0, a|b$  y  $a|(b+c)$ , entonces  $a|c$ .

*Rta:* Se puede usar el inciso anterior con  $b = 0$ .

f) Si  $a \neq 0$  y  $a|b$ , entonces  $a|b \cdot c$ .

*Rta:* Si  $b = aq$  entonces  $b \cdot c = aqc \Rightarrow a|b \cdot c$ .

8. Dados  $b, c$  enteros, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.

*Rta:*  $0 = 2 \times 0$  y  $1 = 2 \times 0 + 1$ .

b) Si  $b$  es par y  $b|c$ , entonces  $c$  es par. (Por lo tanto, si  $b$  es par, también lo es  $-b$ ).

*Rta:*  $b = 2q, c = bp \Rightarrow c = 2qp \Rightarrow c$  es par. ( $b|-b$ ).

c) Si  $b$  y  $c$  son pares, entonces  $b+c$  también lo es.

*Rta:*  $2|b, 2|c \Rightarrow 2|b+c$ .

d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó  $-2$ .

*Rta:* Dicho número  $a$  no puede ser 0 y por el ejercicio 7 b)  $2|a$  y  $a|2$  entonces  $a = \pm 2$ .

e) La suma de un número par y uno impar es impar.

*Rta:*  $a = 2q, b = 2p + 1 \Rightarrow a + b = 2(q + p) + 1$ .

f)  $b+c$  es par si y sólo si  $b$  y  $c$  son ambos pares o ambos impares.

*Rta:*  $b = 2q, c = 2p \Rightarrow b + c = 2(q + p); b = 2q + 1, c = 2p + 1 \Rightarrow b + c = 2q + 1 + 2p + 1 = 2(q + p + 1)$ .

9. Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $n$  es par si y sólo si  $n^2$  es par.

*Rta:*  $n = 2q \Rightarrow n^2 = 2(2q^2)$ .  $n = 2q + 1 \Rightarrow n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1$ .

10. Probar que  $n(n+1)$  es par para todo  $n$  entero.

*Rta:* Si  $n = 2q, n(n+1) = 2q(2q+1)$  es par. Si  $n = 2q + 1, n(n+1) = (2q+1)(2q+1+1) = 2(q+1)(2q+1)$ .

11. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a)  $a|b \cdot c \Rightarrow a|b$  ó  $a|c$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo:  $6|12 = 4 \times 3$  pero 6 no divide a 4 ni divide a 3.

b)  $a | (b + c) \Rightarrow a | b \text{ ó } a | c$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo:  $6|5 = 1$  per 6 no divide a 5 ni a 1.

c)  $a | c \text{ y } b | c \Rightarrow a \cdot b | c$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo:  $6|12$  y  $4|12$  pero 24 no divide a 12.

d)  $a | c \text{ y } b | c \Rightarrow (a + b) | c$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo:  $2|6$  y  $3|6$  pero  $5=2+3$  no divide a 6.

e)  $a, b, c > 0$  y  $a = b \cdot c$ , entonces  $a \geq b$  y  $a \geq c$ .

*Rta:* Verdadero,  $b \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq c$  y  $c \geq 1 \Rightarrow bc \geq b$ .

12. Probar que cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ :

a)  $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  es múltiplo de 11.

*Rta:*  $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$ . Como el resto de dividir 64 por 11 es 9, tenemos que  $9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$  es divisible por 11 si  $9^n \cdot 9 + 9^n \cdot 2$  lo es y este último es  $9^n(9 + 2)$  que claramente es divisible por 11.

*Rta Alternativa:* podemos probar por inducción. Si  $n = 0$  es claro. Supongamos  $11|3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  (HI). Debemos probar que

$$11|3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 11|3^{2n+4} + 2^{6n+7}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} 3^{2n+4} + 2^{6n+7} &= 3^2 3^{2n+2} + 2^6 2^{6n+1} \\ &= 9 \cdot 3^{2n+2} + 64 \cdot 2^{6n+1} \\ &= 9(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}. \end{aligned}$$

Es claro que el primer término es divisible por 11 por HI. El segundo término es  $55 \cdot 2^{6n+1}$  que es divisible por 11, pues 55 lo es. Concluyendo  $9(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}$  es divisible por 11 y por lo tanto  $11|3^{2n+4} + 2^{6n+7}$  lo es.

b)  $3^{2n+2} - 8n - 9$  es divisible por 64.

*Rta:* Lo haremos por inducción. El caso base es  $n = 1$  y en ese caso debemos ver que  $64|3^{2 \cdot 1+2} - 8 \cdot 1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64$ , lo cual está bien.

Supongamos que  $64|3^{2n+2} - 8n - 9$  (HI), entonces debemos probar que  $64|3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 = 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17$ .

Ahora bien

$$\begin{aligned}
 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9 + 8n + 9) - 8n - 17 \\
 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 9 \cdot (8n + 9) - 8n - 17 \\
 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 72n + 81 - 8n - 17 \\
 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n + 1).
 \end{aligned}$$

El primer término es múltiplo de 64 por HI y el segundo es  $64(n + 1)$  que claramente es múltiplo de 64.

13. Decir si es verdadero o falso justificando:

a)  $3^n + 1$  es múltiplo de  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo  $n = 3$ .

b)  $3n^2 + 1$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Rta:* Falso, contraejemplo  $n = 2$ .

c)  $(n + 1) \cdot (5n + 2)$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Rta:* Verdadero, si  $n$  es par,  $5n + 2$  es par y por lo tanto  $(n + 1) \cdot (5n + 2)$  es múltiplo de 2. Si  $n$  es impar  $n + 1$  es par y  $2|(n + 1) \cdot (5n + 2)$ .

14. Probar que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n^2 + 2$  no es divisible por 4.

*Rta:* Si  $n$  es impar  $n^2 + 2$  es impar y por lo tanto no es divisible por 4. Si  $n$  es par  $n^2$  es divisible por 4 y como 4 no divide a 2 entonces no divide a  $n^2 + 2$ .

15. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma  $6m \pm 1$ , con  $m$  entero.

*Rta:* Como  $n$  no es divisible por 3, debe ser  $n = 3q \pm 1$ . Si  $q$  fuese impar entonces  $n$  sería par, por lo tanto  $q = 2m$  y tenemos el resultado.

16. a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

*Rta:* Como los pares e impares se alternan dados dos consecutivos uno de ellos debe ser par. Similarmente cada tres consecutivos habrá uno que es divisible por 3 (ya que al dividirlos por 3 sus restos son tres números distintos entre 0 y 2, o sea que uno de los restos debe ser 0). Entonces  $n(n + 1)(n + 2)$  tiene que ser divisible por 2 y por 3 y como estos son coprimos debe ser divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

*Rta:* Como en el ejercicio anterior, ahora tenemos que uno de los números es divisible por 4 y otro de los restantes es divisible por 2. Entonces el producto es

divisible por 8 y también hay uno que es múltiplo de 3 por lo cual el producto es divisible por  $24 = 3 \times 8$ .

*Rta Alternativa:* el producto de cuatro enteros consecutivos es de la forma  $n(n-1)(n-2)(n-3)$ . Ahora bien,

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

Por un teorema de la teórica sabemos que  $\binom{n}{4}$  es un número entero, por lo tanto  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$  es entero, lo cual quiere decir que

$$4! | n(n-1)(n-2)(n-3)$$

(y  $4! = 24$ ).

17. Probar que si  $a$  y  $b$  son enteros entonces  $a^2 + b^2$  es divisible por 7 si y sólo si  $a$  y  $b$  son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

*Rta:* Los restos posibles de dividir por 7 son 0,1,2,3,4,5,6. Los restos de sus cuadrados son 0,1,4,2. La única suma de dos de ellos que da un múltiplo de 7 es  $0+0=0$ . Luego  $a^2 + b^2$  sólo puede ser divisible por 7 si  $a$  y  $b$  lo son. En el caso de 3 tenemos que los restos de cuadrados posibles son 0 y 1 y para que la suma de 0 solo puede ser  $0+0$  como en el caso anterior. Para el caso 5 tenemos  $1^2 + 2^2$  es divisible por 5 pero 1 y 2 no lo son.

18. Encontrar  $(7469, 2464)$ ,  $(2689, 4001)$ ,  $(2447, -3997)$ ,  $(-1109, -4999)$ .

*Rta 1:*  $7469 = 3 \cdot 2464 + 77$ ,  $2464 = 32 \cdot 77$  Por lo tanto  $(7469, 2464) = 77$ .

*Rta 2:*  $4001 = 2689 + 1312$ ,  $2689 = 2 \cdot 1312 + 65$ ,  $1312 = 20 \cdot 65 + 12$ ,  $65 = 5 \cdot 12 + 5$ ,  $12 = 2 \cdot 5 + 2$ ,  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ . Por lo tanto  $(2689, 4001) = 1$ .

*Rta 3:*  $-3997 = (-2)2447 + 897$ ,  $2447 = 2 \cdot 897 + 653$ ,  $897 = 653 + 244$ ,  $653 = 2 \cdot 244 + 165$ ,  $244 = 165 + 79$ ,  $165 = 2 \cdot 79 + 7$ ,  $79 = 11 \cdot 7 + 2$ ,  $7 = 3 \cdot 2 + 1$ . Por lo tanto  $(2447, -3997) = 1$ .

*Rta 4:*  $4999 = 4 \cdot 1109 + 563$ ;  $1109 = 2 \cdot 563 - 17$ ;  $563 = 33 \cdot 17 + 2$ ;  $17 = 8 \cdot 2 + 1$ . Por lo tanto  $(-1109, -4999) = 1$ .

19. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35, *Rta:*  $35 = 2 \cdot 14 + 7$ ;  $14 = 2 \cdot 7$ ;  $(14, 35) = -2 \cdot 14 + 35$ .

$$b) \text{ 11 y 15, Rta: } 15 = 11 + 4; 11 = 2 \cdot 4 + 3; 4 = 3 + 1; 1 = 4 - 3 = \\ = 15 - 11 - (11 - 2 \cdot (15 - 11)) = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11.$$

$$c) \text{ 12 y 52, Rta: } (12, 52) = 4 = 52 - 4 \cdot 12.$$

$$d) \text{ 12 y -52, Rta: } (12, -52) = 4 = -4 \cdot 12 + (-52).$$

$$e) \text{ 12 y 532, Rta: } (12, 532) = 4 = -44 \cdot 12 + 532.$$

$$f) \text{ 725 y 441,}$$

*Rta:*

$$725 = 441 \cdot 1 + 284 \quad \Rightarrow \quad 284 = 725 - 441$$

$$441 = 284 \cdot 1 + 157 \quad \Rightarrow \quad 157 = 441 - 284$$

$$284 = 157 \cdot 1 + 127 \quad \Rightarrow \quad 127 = 284 - 157$$

$$157 = 127 \cdot 1 + 30 \quad \Rightarrow \quad 30 = 157 - 127$$

$$127 = 30 \cdot 4 + 7 \quad \Rightarrow \quad 7 = 127 - 30 \cdot 4$$

$$30 = 7 \cdot 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 30 - 7 \cdot 4$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

Luego  $(725, 441) = 1$  y

$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$= 7 - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 = 7 \cdot 13 - 30 \cdot 3$$

$$= (127 - 30 \cdot 4) \cdot 13 - 30 \cdot 3 = 127 \cdot 13 - 55 \cdot 30$$

$$= 127 \cdot 13 - 55 \cdot (157 - 127) = 68 \cdot 127 - 55 \cdot 157$$

$$= 68 \cdot (284 - 157) - 55 \cdot 157 = 68 \cdot 284 - 123 \cdot 157$$

$$= 68 \cdot 284 - 123 \cdot (441 - 284) = 191 \cdot 284 - 123 \cdot 441$$

$$= 191 \cdot (725 - 441) - 123 \cdot 441 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441.$$

Es decir,  $1 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441$ .

$$g) \text{ 606 y 108.}$$



*Rta:*

$$\begin{array}{lll}
 606 = 108 \cdot 5 + 66 & \Rightarrow & 66 = 606 - 108 \cdot 5 \\
 108 = 66 \cdot 1 + 42 & \Rightarrow & 42 = 108 - 66 \\
 66 = 42 \cdot 1 + 24 & \Rightarrow & 24 = 66 - 42 \\
 42 = 24 \cdot 1 + 18 & \Rightarrow & 18 = 42 - 24 \\
 24 = 18 \cdot 1 + 6 & \Rightarrow & 6 = 24 - 18 \\
 18 = 6 \cdot 3 + 0 & & 
 \end{array}$$

Luego  $(606, 108) = 6$  y

$$\begin{aligned}
 6 &= 24 - 18 \\
 &= 24 - (42 - 24) = 2 \cdot 24 - 42 \\
 &= 2 \cdot (66 - 42) - 42 = 2 \cdot 66 - 3 \cdot 42 \\
 &= 2 \cdot 66 - 3 \cdot (108 - 66) = 5 \cdot 66 - 3 \cdot 108 \\
 &= 5 \cdot (606 - 108 \cdot 5) - 3 \cdot 108 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108.
 \end{aligned}$$

Es decir,  $6 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108$ .

20. Probar que no existen enteros  $x$  e  $y$  que satisfagan  $x + y = 100$  y  $(x, y) = 3$ .

*Rta:* Si  $(x, y) = 3$  entonces  $3|x, 3|y$  y por lo tanto  $3|x + y = 100$ , absurdo.

21. a) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid b \cdot c$  entonces  $a \mid c$ .

*Rta:* Como  $a$  y  $b$  son coprimos existen  $r$  y  $s$  tales que  $1 = ra + sb$  por lo tanto  $c = rac + sbc$  y como  $a$  divide ambos sumandos,  $a|c$ .

- b) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid c$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \cdot b \mid c$ .

*Rta:* Como  $a$  y  $b$  son coprimos existen  $r$  y  $s$  tales que  $1 = ra + sb$ . Además  $ap = c = bq$ , entonces  $c = rac + sbc = rabq + sbap = (rq + sp)ab$ . Por lo tanto  $ab|c$ .

22. Probar que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces los números  $2n + 1$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  son coprimos.

*Rta:* Si  $a$  es coprimo con  $b$  y con  $c$  entonces  $a$  es coprimo con  $bc$ , ya que un primo que divida a  $b \cdot c$  debe dividir a  $b$  o a  $c$  y entonces no puede dividir a  $a$ . Como  $2n + 1$  es coprimo con  $n$  y con  $n + 1$  entonces es coprimo con  $n(n + 1)$  y por lo tanto es coprimo con  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Más explícitamente:  $1 = 2n + 1 - 2 \cdot n$ ;  $1 = 2(n + 1) - (2n + 1) \Rightarrow (2n + 1, n) = 1 = (2n + 1, n + 1)$ . Entonces  $1 = (2n + 1 - 2 \cdot n)(2(n + 1) - (2n + 1)) = (2n + 1)(1 + 2n) - 4n(n + 1) = (2n + 1)(1 + 2n) - 8 \frac{n(n+1)}{2}$  y esto implica  $2n + 1$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  son coprimos.

*Rta Alternativa:* si  $p$  es un primo que divide a  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $p$  debe dividir a  $n(n + 1)$  y por ser primo debe dividir a  $n$  o a  $n + 1$ . Si además se pide que  $p|2n + 1$  que es coprimo con  $n$  y  $n + 1$ , entonces  $p|1$  absurdo.

23. Encontrar todos los enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que  $(a, b) = 10$  y  $[a, b] = 100$ .

*Rta:* Es claro que  $(a/10, b/10) = 1$  y  $[a/10, b/10] = 10$ . Como  $[a/10, b/10] = \frac{(a/10)(b/10)}{(a/10, b/10)} = (a/10)(b/10)$ , tenemos que  $(a/10)(b/10) = 10$ , por lo tanto  $\{a/10, b/10\} \in \{\{1, 10\}, \{2, 5\}\}$ . Es decir,  $a = 10, b = 100$  ó  $a = 20, b = 50$  ó al revés.

24. a) Probar que si  $d$  es divisor común de  $a$  y  $b$ , entonces  $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ .

*Rta:*  $d|a, d|b \Rightarrow d|(a, b) \Rightarrow (a, b) = dq$ . Como  $a = (a, b)r; b = (a, b)s$  con  $(r, s) = 1$ , se tiene  $a/d = qr; b/d = qs$  con  $(r, s) = 1$ . Por lo tanto  $(a/d, b/d) = q = (a, b)/d$ .

- b) Probar que si  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos, entonces  $\frac{a}{(a, b)}$  y  $\frac{b}{(a, b)}$  son coprimos.

*Rta:* usar el inciso anterior con  $d = (a, b)$ .

25. Probar que 3 y 5 son números primos.

*Rta:* 3 no es divisible por 2 y 5 no es divisible por 2 ni por 3.

26. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

*Rta:* 2, 3, 5, 7, están en la lista. Por el criterio de la raíz debemos ver cuales números del 8 al 100 no son divisibles por 2, 3, 5 ni 7. Estos son: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

27. Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

*Rta:*  $\sqrt{113} < 11$  y 113 no es divisible por 2, 3, 5 y 7, por lo tanto es primo.  $123 = 3 \cdot 41$  luego no es primo. 131 es primo, pues  $\sqrt{131} < 12$  y 131 no es divisible por 2, 3, 7 y 11. 151 es primo, pues  $\sqrt{151} < 13$  y 151 no es divisible por 2, 3, 7 y 11. 199 es primo, pues  $\sqrt{199} < 14$  y 199 no es divisible por 2, 3, 7, 11 y 13. 503 es primo, pues  $\sqrt{503} \sim 22,42... < 23$  y 503 no es divisible por 2, 3, 7, 11, 13, 17 y 19.

28. Si  $a \cdot b$  es un cuadrado y  $a$  y  $b$  son coprimos, probar que  $a$  y  $b$  son cuadrados.

*Rta:* Si un primo  $p$  divide a  $a$  entonces divide a  $ab$  y por ser este un cuadrado  $p^2 | ab$ , por ser coprimos  $p$  no divide a  $b$  y entonces  $p^2$  debe dividir a  $a$ . El resultado se sigue por el principio de buen orden tomando el  $ab$  más chico que contradice la proposición y considerando  $ab/p^2, a/p^2, b$ .

29. Probar que si  $p_k$  es el  $k$ -ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

*Rta:* el miembro de la derecha no es divisible por ninguno de los primeros  $k$  primos luego o es el  $k + 1$ -ésimo primo, o es divisible por un primo mayor que este. Por lo tanto debe ser un número mayor o igual que el  $k + 1$ -ésimo primo.

30. a) Probar que  $\sqrt{5}$  no es un número racional. *Rta:* Supongamos que  $\sqrt{5}$  es racional, es decir  $\sqrt{5} = \frac{n}{m}$ , luego  $5 = \sqrt{5}^2 = \frac{n^2}{m^2}$  y haciendo pasaje de término obtenemos  $5m^2 = n^2$ . Sea  $m = 5^r m_1$  y  $n = 5^s n_1$  donde  $m_1, n_1$  no tienen el primo 5 en su descomposición en factores primos (es decir  $(5, m_1) = (5, n_1) = 1$ ). Luego  $5m^2 = 5 \cdot 5^{2r} m_1^2 = 5^{2r+1} m_1^2$  y  $n^2 = 5^{2s} n_1^2$ , y por lo tanto  $5^{2r+1} m_1^2 = 5^{2s} n_1^2$ . Por la unicidad de la escritura en la descomposición prima, tenemos que  $5^{2r+1} = 5^{2s}$  y por lo tanto  $2r + 1 = 2s$ , lo cual es absurdo. El absurdo vino de suponer que  $\sqrt{5}$  es un número racional.

b) Probar que  $\sqrt{15}$  no es un número racional. *Rta:* Como en el ejercicio anterior debemos ver que  $15m^2 = n^2$  nos lleva a un absurdo. Ahora bien si  $m = 5^r m_1$  y  $n = 5^s n_1$  con 5 coprimo con  $m_1$  y  $n_1$ , tenemos que  $5^{2r+1} 3m_1^2 = 5^{2s} n_1^2 \Rightarrow 2r + 1 = 2s$ , absurdo.

c) Probar que  $\sqrt{8}$  no es un número racional. *Rta:* En este caso suponemos que  $\sqrt{8} = n/m$ , luego  $8m^2 = n^2$ . Si  $m = 2^r m_1$  y  $n = 2^s n_1$  con  $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$ , tenemos que  $2^3 \cdot 2^{2r} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$ , por lo tanto  $2^{2r+3} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$ . Luego  $2r+3 = 2s$  lo cual es absurdo pues un impar no puede ser igual a un par.

d) Probar que  $\sqrt[3]{4}$  no es un número racional. *Rta:* Si fuera racional tendríamos  $\sqrt[3]{4} = n/m$  y por lo tanto (elevando al cubo)  $4 = n^3/m^3$ , o equivalentemente,  $2^2 m^3 = n^3$ . Si  $m = 2^r m_1$  y  $n = 2^s n_1$  con  $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$ , tenemos  $2^2 m^3 = 2^2 \cdot 2^{3r} m_1^3 = 2^{3r+2} m_1^3$  y  $n^3 = 2^{3s} n_1^3$ . Por lo tanto  $3r + 2 = 3s$  lo cual es absurdo, pues  $3r + 2$  no es múltiplo de 3 y  $3s$  sí lo es.

31. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a)  $a = 12$  y  $b = 15$ . Rta:  $a = 2^2 \cdot 3$ ,  $b = 3 \cdot 5$ ,  $(a, b) = 3$ ,  $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .

b)  $a = 11$  y  $b = 13$ . Rta:  $(a, b) = 1$ ,  $[a, b] = 11 \cdot 13 = 143$ .

c)  $a = 140$  y  $b = 150$ . Rta:  $a = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $b = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ ,  $(a, b) = 2 \cdot 5 = 10$ ,  
 $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$

d)  $a = 3^2 \cdot 5^2$  y  $b = 2^2 \cdot 11$ . Rta:  $(a, b) = 1$ ,  $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$

e)  $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  y  $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$ . Rta:  $(a, b) = 2 \cdot 5$ ,  $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ .