

1b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

Por propiedad de las integrales impropias sabemos que esto es igual a:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

① Resolvemos la izquierda ② Primero

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^0 \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

Por criterio de la comparación de integrales impropias, si encontramos una $f(x) \leq g(x)$ que converge, siendo $g(x)$ nuestra función, entonces podemos afirmar que esta última también converge.

$$\left| \frac{\cos(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{veamos ahora si converge}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \xrightarrow{\text{Integral Standard}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(x) \Big|_t^0$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}} \neq \infty, \text{ converge.}$$

Como $f(x) \leq g(x)$ y $g(x)$ converge, por criterio de comparación de integrales impropias, $f(x)$ converge

$$\textcircled{2} |\cos(x)| \leq 1$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

Nuevamente aplicamos criterio de comparación de integrales impropias.

$$\left| \frac{\cos(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Tomamos el límite de la integral}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) - \arctan(0)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2} \quad \exists \text{ límite y es } \neq \infty, \text{ converge.}$$

Nuevamente nuestra función $g(x)$ converge por lo que $f(x)$ converge.

Por propiedad de las integrales impropias, como la suma de sus integrales convergen, podemos afirmar que nuestra integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ converge!