El algoritmo de Dinitz o Dinic (y Even)

Daniel Penazzi

28 de abril de 2021

Tabla de Contenidos

Edmonds y Karp

- Vimos que Edmonds-Karp funciona y termina en tiempo polinomial $O(nm^2)$.
- Para networks ralos ($n \simeq m$), esto da una complejidad de $O(n^3)$.
- Esa es la complejidad de los algoritmos mas rápidos conocidos.
- Pero para networks densos ($m \simeq n(n-1)/2$), da una complejidad $O(n^5)$, no tan buena.
- Veremos otros algoritmos que permiten reducir esa complejidad..

Edmonds y Karp

- El problema con E-K es que usa BFS (y, como vimos, esto es clave para que termine)
- Con lo cual se puede producir mucho cálculo que no se usa.
- BFS busca todos los caminos posibles en paralelo, hasta llegar a t y de todos esos caminos, sólo nos quedamos con uno.
- En la siguiente iteración, es muy posible que repitamos muchos de los mismos cálculos que ya hicimos.
- ¿Podriamos usar una estructura para ir “guardando”estos cálculos y no tener que repetirlos?

Dinitz

- Esta idea se le ocurrió a un ruso, Yefim Dinitz.
- Dinitz, independientemente de Edmonds y Karp, “mejoró” Edmonds-Karp.
- Es decir, mejoró un algoritmo que no conocía.
- De hecho, el algoritmo de Dinitz fue publicado ANTES que el de Edmonds-Karp.
- Pero obviamente en el occidente el de Edmonds-Karp se conoció antes.

Dinitz

- De hecho, la historia es mas curiosa: Dinitz no sólo no conocia el algoritmo de Edmonds-Karp: TAMPOCO conocia (al principio) a Ford-Fulkerson!
- Mas aún: Dinitz inventó su algoritmo para resolver un EJERCICIO DE UNA CLASE de la cual era alumno. !
- Pero como no habian visto Ford-Fulkerson, el creia que con el algoritmo Greedy bastaba.
- Lo que hizo fue mejorar la complejidad de Greedy.
- Luego, al enterarse como era Ford-Fulkerson en la clase, aplicó su idea con las ideas de Ford-Fulkerson.
- Años despues, Dinitz dijo que si hubiera conocido Ford-Fulkerson de entrada, la idea de su algoritmo quizás no se le hubiera ocurrido.

Dinitz o Dinics o Dinic

- La idea clave de ir guardado trabajo hecho en una estructura especial para ser usada en futuras iteraciones resultó ser muy fructifera y luego surgieron numerosos otros algoritmos, primero en Rusia y luego en otros lados, usando esa idea de Dinitz.
- Dinitz publicó su algoritmo (en ruso, obvio) en un paper sumamente denso de sólo 4 paginas. pues ese era el límite del journal donde lo publicó.
- Luego algunos refinamientos fueron hechos por otro ruso, Karzanov, tambien publicados en un paper denso de 4 páginas.
- En occidente casi nadie les prestó atención y los pocos que lo hicieron no podian entender esos papers.

Dinitz o Dinic

- Esos papers fueron leidos por un israelí , Shimon Even, quien tardó un buen tiempo en entenderlos pero perseveró y luego de entenderlos popularizó el concepto en el occidente.
- Al parecer Even, al cambiar del alfabeto cirílico al latino, lo escribió como “Dinic” en vez de el correcto “Dinitz”, asi que es mas conocido de esa forma en occidente.
- Mas aún, Even no entendió del todo una parte del algoritmo de Dinitz, pero mientras trataba de entenderla, se dió cuenta que podia simplificar el algoritmo para no tener que usar esa parte.
- Y como el lo popularizó en el occidente, la versión que se conoce en el occidente es esa.

Dinitz o Dinic

- Para terminar esta parte historica, luego de algunos años Dinitz decidió emigrar desde Rusia a Israel.
- Pero como no habia publicado mucho, no obtuvo un buen trabajo.
- Hasta que Even se enteró que Dinitz estaba en Israel y casi le explota la cabeza!
- Asi que movió cielo y tierra para conseguirle un buen trabajo a Dinitz.

- La idea básica de Dinitz es “guardar” todos los posibles caminos aumentantes de la misma longitud (mínima) en una estructura auxiliar.
- Ignoro porqué se le ocurrió usar caminos de longitud mínima que es justo también la característica de Edmonds-Karp.
- Como queremos guardar todos los caminos aumentantes (entre s y t) de longitud mínima, esta primera parte se hace, al igual que con Edmonds-Karp, con BFS, pero guardamos toda la información y no sólo la necesaria para construir un camino.

Network auxiliar

- Ahora bien, por mas que tengamos guardados "todos" los caminos de longitud mínima, no podemos usarlos a todos para aumentar el flujo, porque algunos de esos compartiran lados, y si usamos un camino A pej, es posible que luego no podamos usar un camino B.
- Entonces el problema queda, luego de tener toda la información guardada sobre todos los posibles caminos aumentantes, ¿cómo seleccionar de entre ellos los que efectivamente vamos a usar?
- Esa estructura auxiliar puede tomar varias formas, pero en la forma original de Dinitz, y la mas fácil de explicar, esos datos se guardan en un network, que llamaremos "network auxiliar".

Network auxiliar

- En breve daremos la definición precisa de network auxiliar y como construirlo, pero por ahora basta con asumir que hay un network auxiliar que guarda mucha información.
- La idea clave y la belleza de Dinitz es que una vez construido el network auxiliar usando BFS, encontramos los caminos aumentantes que vamos a usar.... corriendo Greedy en ese network auxiliar usando DFS !
- (usar BFS dentro del network auxiliar seria una idiotez, porque justamente queremos evitar el desperdicio de trabajo de usar BFS).
- Se usa el network auxiliar hasta que no se puede usar mas, y luego se contruye otro a partir del nuevo flujo.

Esquema básico de Dinitz

- La estrategia de Dinitz entonces es:
  1. Construir un network auxiliar (usando BFS).
  2. Correr Greedy con DFS en el network auxiliar hasta no poder seguir.
  3. Usar el flujo obtenido en el network auxiliar para modificar el flujo en el network original.
  4. Repetir [1] con el nuevo flujo, hasta que, al querer construir un network auxiliar, no llegamos a t.

Un par de detalles

- En realidad, ese esquema es la forma en que uno lo plantea teóricamente para poder hacer análisis.
- En la práctica, cuando encontramos un camino dirigido en el network auxiliar, como ese camino estará representando un camino aumentante de Ford-Fulkerson en el network original, se puede directamente cambiar el flujo original en el network original.
- En el network auxiliar, como se usa Greedy, nunca se des-satura un lado. en el network auxiliar
- Obviamente como algunos de los lados del network auxiliar van a estar representando lados backwards en el network original, al mandar flujo POR el lado en el network auxiliar, estariamos DEVOLVIENDO flujo en el original.
- Asi que los lados siguen pudiendo des-saturarse, es sólo en el network auxiliar que no se des-saturan.

- ¿Pero qué pasa si sólo hay un camino de longitud mínima?
- En ese caso habremos malgastado esfuerzo, pero en general hay múltiples caminos de longitud mínima.
- Si siempre tenemos un sólo camino de longitud mínima entonces es fácil ver que Edmonds-Karp termina en $O(nm)$ en vez de $O(nm^2)$.
- La complejidad de Dinic en este caso de que en cada etapa sólo hay un camino de longitud mínima tambien es $O(nm)$, el esfuerzo “extra”de crear el network auxiliar queda oculto en la notacion“O” .

Flujos bloqueantes

- Luego de las idea original de Dinitz, algunas partes fueron refinadas, en particular Alexander Karzanov introdujo el concepto de "flujo bloqueante" que facilita algunas presentaciones y análisis del algoritmo.

Definición:

Llamaremos a un flujo en un network bloqueante o saturante si todo camino DIRIGIDO desde s a t tiene al menos un lado saturado. (es decir con $c(\overrightarrow{xy}) = f(\overrightarrow{xy})$).

- En otras palabras, si cuando queremos usar Greedy en el network, no llegamos a t.

Algoritmos tipo Dinic

- Asi, podemos resumir la idea básica de Dinitz reformulada por Karzanov como:
  1. Construir un network auxiliar (usando BFS).
  2. Encontrar un flujo bloqueante en el network auxiliar.
  3. Usar ese flujo bloqueante del network auxiliar para modificar el flujo en el network original.
  4. Repetir [1] con el nuevo flujo, hasta que, al querer construir un network auxiliar, no llegamos a t.

Algoritmos tipo Dinic

- Luego de esta idea de Dinitz, surgieron muchos otros otros algoritmos, “tipo”Dinic.
- Tambien usan un network auxiliar pero cambian la forma de hacer [2], es decir, cambian la forma de encontrar un flujo bloqueante, usando un método distinto del Greedy original de Dinitz.
- De hecho hay algoritmos que encuentran un flujo bloqueante sin necesidad de ir encontrando caminos dirigidos desde s a t.
- Veremos uno de esos mas adelante.

Actualización del network auxiliar

- Si bien teóricamente estamos diciendo que vamos a buscar un flujo bloqueante en el network auxiliar, ese es el refinamiento de Karzanov.
- Dinitz originalmente hacia otra cosa, que es lo que haremos en la práctica porque es mas fácil de implementar.
- Observemos que, luego de cada camino, queda al menos un lado saturado en ese camino, el cual no es mas utilizable en el network auxiliar.
- Dinitz toma ventaja de esto cambiando el network auxiliar luego de cada camino, borrando esos lados.
- Asi, en realidad el algoritmo se detiene cuando se borraron tantos lados que s quedó desconectado de t. (lo cual es equivalente a tener un flujo bloqueante en el network auxiliar inicial).

Diferencia entre la version rusa y la occidental de Dinitz

- Luego de borrar los lados saturados en un camino, se puede actualizar aun mas el network auxiliar, buscando lados o vértices que ya no se pueden usar debido a haber borrado esos lados.
- Dinitz original hace esto inmediatamente luego de cada camino, mientras que la versión de Evens es mas “lazy” y sólo los borra mientras está haciendo la busqueda DFS y llega a uno de ellos.
- Mas adelante discutiremos esto mas en detalle.

Layered Networks

- Vamos a los detalles técnicos.
- El network auxiliar tiene una estructura particular: es un network "por niveles".

Definición:

Un Network por niveles es un network tal que el conjunto de vértices esta dividido en subconjuntos V_i (los "niveles") tales que sólo existen lados entre un nivel y el siguiente.
Es decir, $\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow \exists i : x \in V_i,\ y \in V_{i+1}$

Network auxiliar, vértices

- Cómo se define el network auxiliar, usando el network original y un flujo f:
- Vértices: el conjunto de vértices es $V = \cup_{i=0}^{r} V_i$, donde los V_i son:
  - Sea $r = d_f(s, t)$ donde d_f es la función definida en la prueba de Edmonds-Karp.
    - Es decir, r es la distancia entre s y t usando caminos aumentantes.
  - Para $i = 0, 1, ..., r - 1$, definimos $V_i = \{x : d_f(s, x) = i\}$.
    - Observar que entonces $V_0 = \{s\}$.
  - Definimos $V_r = \{t\}$

Network auxiliar

- Observar que $\{x : d_f(s,x) = r\}$ puede tener mas vértices que sólo t, pero V_r se define como $\{t\}$.
- Lados y capacidades: $\overrightarrow{xy}$ es un lado del network auxiliar si:
  - $x \in V_i, \; y \in V_{i+1}$
  - y:
    1. $\overrightarrow{xy}$ es un lado del network original con $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$.
       o:
    2. $\overrightarrow{yx}$ es un lado del network original con $f(\overrightarrow{yx}) > 0$.
- En el caso de [1], la capacidad de $\overrightarrow{xy}$ en el network auxiliar será $c(\overrightarrow{xy}) - f(\overrightarrow{xy})$, y en el caso de [2], la capacidad del lado $\overrightarrow{xy}$ en el network auxiliar será $f(\overrightarrow{yx})$.

Network auxiliar

- Otra forma de pensar esto es que construimos primero un "network residual"
- Cuyos lados son:
  - los lados originales, con capacidad igual a $c - f$
  - Y los reversos de los lados originales, con capacidad f.
- Y luego, de ese network residual nos quedamos con los lados que unan vertices de distancia i con vértices de distancia $i + 1$.
- Esta idea es útil desde un punto de vista teórico pero obvio que no se construye asi, sino con BFS directo sobre el network original.

Construcción del Network auxiliar

- Es decir, la forma de construirla es tomar como V_0 a $\{s\}$.
- Y luego ir construyendo una cola a partir de s al estilo Edmonds-Karp.
- Y si x agrega a z y x está en V_i, entonces z está en V_{i+1}.
- Excepto que en Edmonds-Karp si un vértice x va a agregar a un vértice z a la cola, pero z ya estaba en la cola, no se hace nada.
- En cambio aca, si z ya está agregado, si bien z no se vuelve a agregar, el lado $\overrightarrow{xz}$ si se agrega al network auxilir, siempre y cuando la distancia de z a s sea uno mas que la distancia de x a s.

Construcción del Network auxiliar

- Si en algún momento llegamos a t, no paramos inmediatamente, pues podria haber mas lados que lleguen a t.
- Pero borramos todos los vértices que ya hubieramos incluido en el mismo V_r en el cual estamos poniendo a t (y los lados que terminaban en ellos).
- Y de ahi en mas no agregamos mas vértices, sólo lados entre vértices de V_{r-1} y t.

Ejemplo

- Veamos un ejemplo.
- Antes de darlo, hay que aclarar que en realidad no lo vamos a dar exactamente como se implementaría el algoritmo en la versión original de Dinitz, o en la versión "occidental" de Ever.
- Luego explicaremos esos detalles, pero para dar un ejemplo pequeño como el que veremos, no hacen falta meterse con ciertos detalles de implementación, los cuales discutiremos luego.

Ejemplo

- Vértices $s, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, t$
- flujo 0.
- Lados y capacidades:
- $\overrightarrow{sA}: 8, \overrightarrow{sB}: 7, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 9, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4$ $\overrightarrow{BH}: 9, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 8, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9$ $\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 7, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

NA1

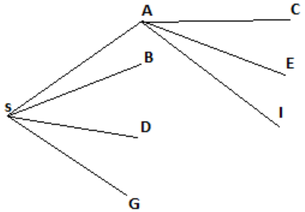
$\overrightarrow{sA}:8, \overrightarrow{sB}:7, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9, \overrightarrow{AC}:9, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4$ .....

- Como es el primer network auxiliar y el flujo inicial es 0, las capacidades de todos los lados del network auxiliar coinciden con las capacidades en el network original, asi que no las escribo.
- Network auxiliar empieza con $V_0 = \{s\}$.
- s agrega a sus vecinos A, B, D y G, que forman V_1 y se agregan al network auxiliar los lados $\overrightarrow{sA}, \overrightarrow{sB}, \overrightarrow{sD}, \overrightarrow{sG}$.

NA1

$\overrightarrow{sA}:8, \overrightarrow{sB}:7, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9, \overrightarrow{AC}:9, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4$
$\overrightarrow{BH}:9, \overrightarrow{BJ}:9,$ ......

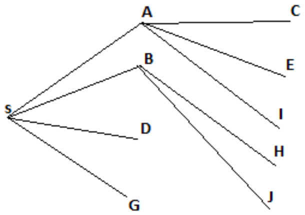
- A agrega a C, E e I, creando el conjunto V_2 con ellos, y se agregan los lados $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI}$.



- Sigue en la cola B, con vecinos H, J

NA1

- A agrega a C, E e I, creando el conjunto V_2 con ellos, y se agregan los lados $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$.

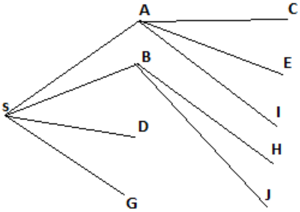


- Sigue en la cola B, con vecinos H, J los cuales son agregados a V_2 y los lados $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BJ}$ al conjunto de lados.

NA1

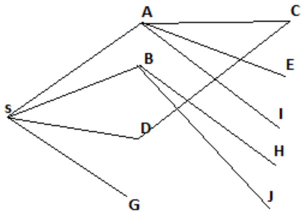
.... $\overrightarrow{DA}$: 2, $\overrightarrow{DC}$: 9, $\overrightarrow{DG}$: 9....

- Sigue D, que tiene vecinos A, C y G. Los tres ya están, pero:



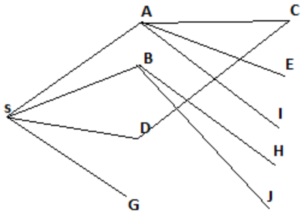
NA1

- Sigue D, que tiene vecinos A, C y G. Los tres ya están, pero:
  - $D \in V_1$, $C \in V_2$, asi que es "legal" agregar el lado $\overrightarrow{DC}$ al network auxiliar.
  - $D, A, G \in V_1$, entonces NO agregamos los lados $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DG}$, pues sólo agregamos lados de un nivel V_i a un nivel V_{i+1}.



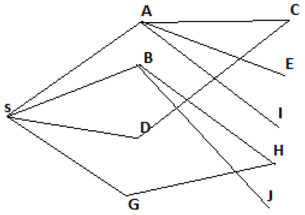
NA1

.... $\overrightarrow{GA}:1, \overrightarrow{GH}:9,$ .....



- Sigue G en la cola, con vecinos A, H.

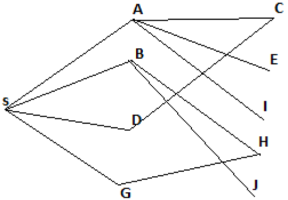
NA1



- Sigue G en la cola, con vecinos A, H.
  - $A, G \in V_1 \Rightarrow$ NO agregamos $\overrightarrow{GA}$.
  - $G \in V_1, H \in V_2 \Rightarrow$ agregamos $\overrightarrow{GH}$.

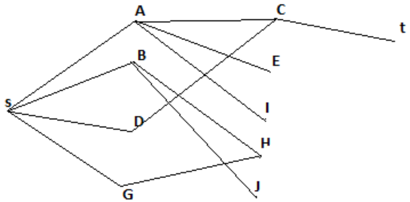
NA1

$\overrightarrow{Ct} : 8, \overrightarrow{CE} : 1, \overrightarrow{CG} : 9,$



- Terminamos V_1, vamos con el primer vértice de V_2: C.
- C tiene vecinos a t, E, G.

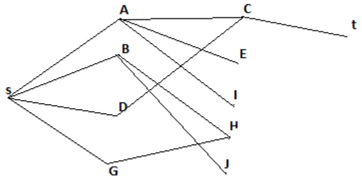
NA1



- Terminamos V_1, vamos con el primer vértice de V_2: C.
- C tiene vecinos a t, E, G.
- E esta en el mismo nivel que C y G esta en un nivel anterior, asi que los lados $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ no van.
- Creamos $V_3 = \{t\}$ y agregamos $\overrightarrow{Ct}$.

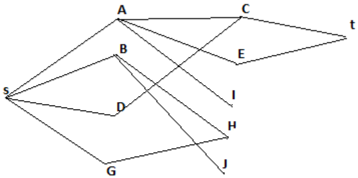
NA1

$\overrightarrow{Et} : 9, \overrightarrow{EF} : 9,$



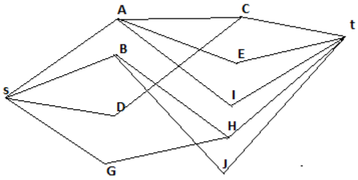
- Sigue E que tiene vecinos t, F.

NA1



- Sigue E que tiene vecinos t, F.
  - Agregamos $\overrightarrow{Et}$ al network.
  - Deberiamos agregar F a V_3 y $\overrightarrow{EF}$ al network,
  - pero el último nivel es siempre $\{t\}$, porque cualquier otro vértice que estuviese en ese mismo nivel, ya no podria llegar a t en ese network auxiliar, asi que directamente no se incluye.

NA1



- Finalmente agregamos los lados $\overrightarrow{It}$, $\overrightarrow{Ht}$, $\overrightarrow{Jt}$ al network auxiliar.
- $V_0 = \{s\}$, $V_1 = \{A, B, D, G\}$, $V_2 = \{C, E, I, H, J\}$, $V_3 = \{t\}$.
- Lados $\overrightarrow{sA}$, $\overrightarrow{sB}$, $\overrightarrow{sD}$, $\overrightarrow{sG}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{Ct}$, $\overrightarrow{Et}$, $\overrightarrow{It}$, $\overrightarrow{Ht}$, $\overrightarrow{Jt}$.

NA1-1er camino

- Buscamos caminos dirigidos entre s y t.
- $sACt$ es un tal camino.
- Recordemos que en Edmonds-Karp podiamos ir calculando los $\varepsilon(x)$ a medida que construiamos la cola, tomando el minimo de lo que podiamos transportar por el lado y el ε del vértice que ponia a x en la cola.
- Pero aca, como estamos codificando en realidad múltiplos posibles caminos, no podemos asignarle ningun $\varepsilon(x)$ a los vértices.
- Asi que el ε del camino hay que calcularlo luego de haberlo construido.

NA1-1er camino

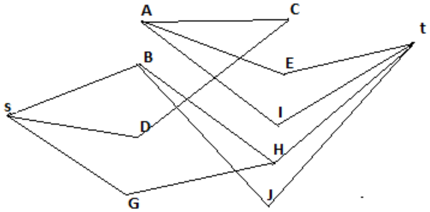
$\overrightarrow{sA} : 8, \overrightarrow{sB} : 7, \overrightarrow{sD} : 9, \overrightarrow{sG} : 9, \overrightarrow{AC} : 9, \overrightarrow{AE} : 1, \overrightarrow{AI} : 4$
$\overrightarrow{BH} : 9, \overrightarrow{BJ} : 9, \overrightarrow{Ct} : 8, \overrightarrow{CE} : 1, \overrightarrow{CG} : 9, \overrightarrow{DA} : 2, \overrightarrow{DC} : 9, \overrightarrow{DG} : 9$
$\overrightarrow{Et} : 9, \overrightarrow{EF} : 9, \overrightarrow{Ft} : 9, \overrightarrow{GA} : 1, \overrightarrow{GH} : 9, \overrightarrow{Ht} : 7, \overrightarrow{It} : 9, \overrightarrow{Jt} : 9$

- En este caso, como $\overrightarrow{sA}$ y $\overrightarrow{Ct}$ tienen capacidad 8 y $\overrightarrow{AC}$ capacidad 9, podemos mandar 8 unidades de flujo por el camino $sACt$.
- Mandando 8 unidades de flujo por el camino $sACt$, actualizamos directamente sobre el network original, quedando:

NA1-1er camino

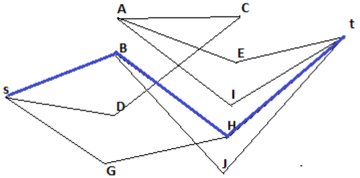
- En este caso, como $\overrightarrow{sA}$ y $\overrightarrow{Ct}$ tienen capacidad 8 y $\overrightarrow{AC}$ capacidad 9, podemos mandar 8 unidades de flujo por el camino $sACt$.
- Mandando 8 unidades de flujo por el camino $sACt$, actualizamos directamente sobre el network original, quedando:
- $\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 7, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4$ $\overrightarrow{BH}: 9, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9$ $\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 7, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

NA1-1er camino



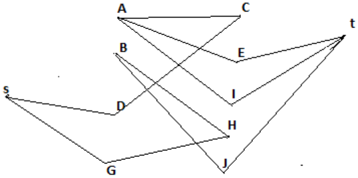
- En el network auxiliar, borrariamos los lados saturados.
- Podemos tacharlos (a mano)
- O aca, puedo efectivamente borrarlos.

NA1-2do camino



- Si hubieramos hecho Edmonds-Karp tendriamos que repetir buena parte del trabajo hecho antes, construyendo una cola, etc.
- En cambio aca simplemente miramos el network y buscamos un camino:
- saliendo por $\overrightarrow{sB}$, obtenemos el camino $sBHt$.

NA1-2do camino



- Podemos mandar 7 unidades por ahi.
- Luego de ese aumento se saturan los lados $\overrightarrow{sB}$ y $\overrightarrow{Ht}$ asi que los tachamos (a mano) y borramos (aqui).

NA1

- Network original, queda:
- $\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9, \overrightarrow{AC}:1, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4$
  $\overrightarrow{BH}:2, \overrightarrow{BJ}:9, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:1, \overrightarrow{CG}:9, \overrightarrow{DA}:2, \overrightarrow{DC}:9, \overrightarrow{DG}:9$
  $\overrightarrow{Et}:9, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9, \overrightarrow{GA}:1, \overrightarrow{GH}:9, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:9, \overrightarrow{Jt}:9.$

NA1

- En el network auxiliar, no podemos salir mas por ni por A ni por B.
- Saliendo por D podemos llegar hasta C pero luego no podemos seguir.
- Saliendo por G, podemos llegar hasta H pero luego no podemos seguir.
- Se termina la utilidad del network auxiliar 1, y hay que construir el 2do network auxiliar.

NA2

- Para tenerlo a mano, los lados con $c - f$ en cada lado:
- $\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 0, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4$
  $\overrightarrow{BH}: 2, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9$
  $\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 0, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9$.
- Las capacidades de los lados del network auxiliar serán esas, salvo en un lado del cual hablaré luego.
- Network auxiliar empieza con $V_0 = \{s\}$.
- s agrega a D y G, (pues $\overrightarrow{sA}, \overrightarrow{sB}$ estan saturados) que forman V_1 y se agregan al network auxiliar los lados $\overrightarrow{sD}, \overrightarrow{sG}$.

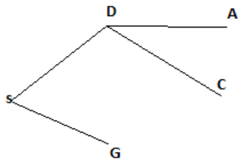
NA2

$\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9, \overrightarrow{AC}:1, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4$
$\overrightarrow{BH}:2, \overrightarrow{BJ}:9, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:1, \overrightarrow{CG}:9, \overrightarrow{DA}:2, \overrightarrow{DC}:9, \overrightarrow{DG}:9$
$\overrightarrow{Et}:9, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9, \overrightarrow{GA}:1, \overrightarrow{GH}:9, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:9, \overrightarrow{Jt}:9.$

- Sigue D que tiene vecinos a A, C, G.
- D agrega a A y C, creando el conjunto V_2 con ellos, y se agregan los lados $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$.

NA2

- Sigue D que tiene vecinos a A, C, G.
- D agrega a A y C, creando el conjunto V_2 con ellos, y se agregan los lados $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$.



- El lado $\overrightarrow{DG}$ no se agrega pues ambos vertices están en el mismo nivel.

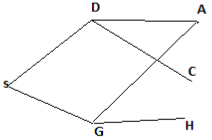
NA2

$\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 0, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4$
$\overrightarrow{BH}: 2, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9,$
$\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 0, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

- G tiene vecinos a A, que ya está, y a H, que no.

NA2

- G tiene vecinos a A, que ya está, y a H, que no.



- Como $G \in V_1, A \in V_2$, podemos agregar el lado $\overrightarrow{GA}$.
- Como H no está, lo agregamos a V_2 y agregamos el lado $\overrightarrow{GH}$ al network.

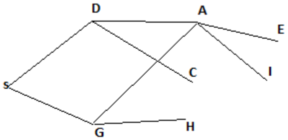
NA2

$\overrightarrow{sA} : 0, \overrightarrow{sB} : 0, \overrightarrow{sD} : 9, \overrightarrow{sG} : 9, \overrightarrow{AC} : 1, \overrightarrow{AE} : 1, \overrightarrow{AI} : 4,$
$\overrightarrow{BH} : 2, \overrightarrow{BJ} : 9, \overrightarrow{Ct} : 0, \overrightarrow{CE} : 1, \overrightarrow{CG} : 9, \overrightarrow{DA} : 2, \overrightarrow{DC} : 9, \overrightarrow{DG} : 9,$
$\overrightarrow{Et} : 9, \overrightarrow{EF} : 9, \overrightarrow{Ft} : 9, \overrightarrow{GA} : 1, \overrightarrow{GH} : 9, \overrightarrow{Ht} : 0, \overrightarrow{It} : 9, \overrightarrow{Jt} : 9.$

- Sigue A en la cola, con vecinos C, E, I.

NA2

- Sigue A en la cola, con vecinos C, E, I.



- C está en el mismo nivel que A (V_2) asi que no se agrega $\overrightarrow{AC}$.
- E, I no están, asi que se crea V_3 con ellos y se agregan los lados $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$.

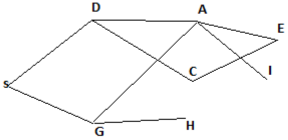
NA2

$\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 0, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4,$
$\overrightarrow{BH}: 2, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9,$
$\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 0, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

- El que sigue en la cola es C. Sus vecinos son E, G....y uno mas, que ya hablaremos. (No es t, $\overrightarrow{Ct}$ está saturado).

NA2

- El que sigue en la cola es C. Sus vecinos son E, G....y uno mas, que ya hablaremos. (No es t, $\overrightarrow{Ct}$ está saturado).



  - $C \in V_2$, $E \in V_3$ se agrega el lado $\overrightarrow{CE}$.
  - $C \in V_2$, $G \in V_1$ por lo tanto el lado $\overrightarrow{CG}$ NO se agrega.
- Parece que terminamos con los vecinos de C, pero yo dije que habia “uno mas”

NA2

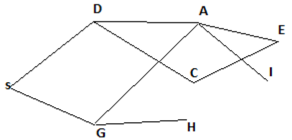
- Es A!
- Pues enviamos flujo por el lado $\overrightarrow{AC}$ en el primer NA.

NA2

- Es A!
- Pues enviamos flujo por el lado $\overrightarrow{AC}$ en el primer NA.
- Podemos ver que la capacidad sobrante actual es 1 mientras que la original era 9, asi que hay flujo de 8 por ese lado. $\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9,$ $\overrightarrow{AC}:1, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4, \overrightarrow{BH}:2, \overrightarrow{BJ}:9, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:1, \overrightarrow{CG}:9,$ $\overrightarrow{DA}:2, \overrightarrow{DC}:9, \overrightarrow{DG}:9, \overrightarrow{Et}:9, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9,$ $\overrightarrow{GA}:1, \overrightarrow{GH}:9, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:9, \overrightarrow{Jt}:9.$

NA2

- Es A!
- Pues enviamos flujo por el lado $\overrightarrow{AC}$ en el primer NA.
- Podemos ver que la capacidad sobrante actual es 1 mientras que la original era 9, asi que hay flujo de 8 por ese lado.
- asi que ahora C puede devolverle flujo a A.
- Sólo que, como A, C estan ambos en V_2, no hacemos nada.



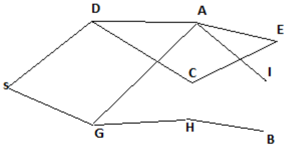
NA2

$\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 0, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4,$
$\overrightarrow{BH}: 2, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9,$
$\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 0, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

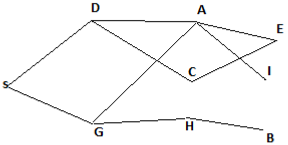
- Sigue H, pero su único vecino es t y $\overrightarrow{Ht}$ esta saturado.

NA2

- Sigue H, pero su único vecino es t y $\overrightarrow{Ht}$ esta saturado.
- Pero en realidad t no es su único vecino. Es su único vecino hacia adelante.
- Como B le mandó flujo a H en el primer NA, ahora H le puede devolver.
- Agregamos B a V_3 y el lado $\overrightarrow{HB}$ al network auxiliar.



NA2



- Observemos que $\overrightarrow{HB}$ no existe en el network original, pero si en el auxiliar.
- ¿Y cual es su capacidad?
- Lo que puede devolver, en este caso 7.

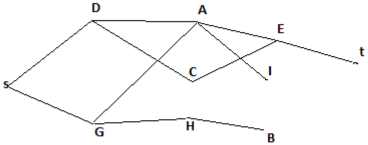
NA2

$\overrightarrow{sA} : 0, \overrightarrow{sB} : 0, \overrightarrow{sD} : 9, \overrightarrow{sG} : 9, \overrightarrow{AC} : 1, \overrightarrow{AE} : 1, \overrightarrow{AI} : 4,$
$\overrightarrow{BH} : 2, \overrightarrow{BJ} : 9, \overrightarrow{Ct} : 0, \overrightarrow{CE} : 1, \overrightarrow{CG} : 9, \overrightarrow{DA} : 2, \overrightarrow{DC} : 9, \overrightarrow{DG} : 9,$
$\overrightarrow{Et} : 9, \overrightarrow{EF} : 9, \overrightarrow{Ft} : 9, \overrightarrow{GA} : 1, \overrightarrow{GH} : 9, \overrightarrow{Ht} : 0, \overrightarrow{It} : 9, \overrightarrow{Jt} : 9.$

- E tiene vecinos t, F. Se crea $V_4 = \{t\}$, el lado $\overrightarrow{Et}$ y F se ignora pues tendria que estar en el mismo nivel que t.

NA2

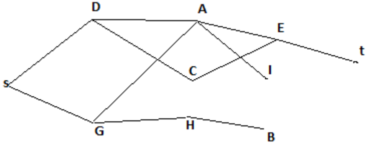
- E tiene vecinos t, F. Se crea $V_4 = \{t\}$, el lado $\overrightarrow{Et}$ y F se ignora pues tendria que estar en el mismo nivel que t.



NA2

$\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:9, \overrightarrow{sG}:9, \overrightarrow{AC}:1, \overrightarrow{AE}:1, \overrightarrow{AI}:4,$
$\overrightarrow{BH}:2, \overrightarrow{BJ}:9, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:1, \overrightarrow{CG}:9, \overrightarrow{DA}:2, \overrightarrow{DC}:9, \overrightarrow{DG}:9,$
$\overrightarrow{Et}:9, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9, \overrightarrow{GA}:1, \overrightarrow{GH}:9, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:9, \overrightarrow{Jt}:9.$

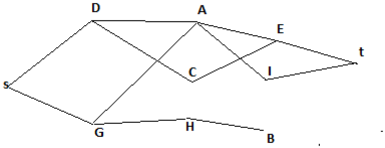
- E tiene vecinos t, F. Se crea $V_4 = \{t\}$, el lado $\overrightarrow{Et}$ y F se ignora pues tendria que estar en el mismo nivel que t.



- Sigue I, se agrega $\overrightarrow{It}$.

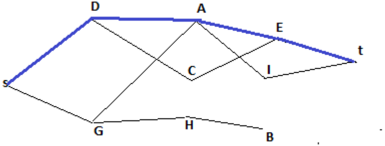
NA2

- E tiene vecinos t, F. Se crea $V_4 = \{t\}$, el lado $\overrightarrow{Et}$ y F se ignora pues tendria que estar en el mismo nivel que t.



- Sigue I, se agrega $\overrightarrow{It}$.
- Sigue B con vécinos H (nivel anterior) y J, que no está.
- Pero como J tendria que ponerse en el mismo nivel que t, se ignora, asi que terminamos la construcción.

Ejemplo (cont.)



- En el algoritmo original de Dinitz en realidad ahora habria que hacer algo extra, pero hablaré de eso luego.
- Buscando caminos, encontramos *sDAEt*.

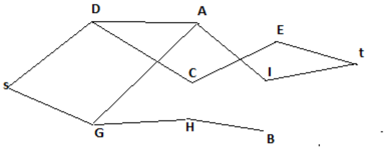
Ejemplo (cont.)

$\overrightarrow{sA}: 0, \overrightarrow{sB}: 0, \overrightarrow{sD}: 9, \overrightarrow{sG}: 9, \overrightarrow{AC}: 1, \overrightarrow{AE}: 1, \overrightarrow{AI}: 4,$
$\overrightarrow{BH}: 2, \overrightarrow{BJ}: 9, \overrightarrow{Ct}: 0, \overrightarrow{CE}: 1, \overrightarrow{CG}: 9, \overrightarrow{DA}: 2, \overrightarrow{DC}: 9, \overrightarrow{DG}: 9,$
$\overrightarrow{Et}: 9, \overrightarrow{EF}: 9, \overrightarrow{Ft}: 9, \overrightarrow{GA}: 1, \overrightarrow{GH}: 9, \overrightarrow{Ht}: 0, \overrightarrow{It}: 9, \overrightarrow{Jt}: 9.$

- En el algoritmo original de Dinitz en realidad ahora habria que hacer algo extra, pero hablaré de eso luego.
- Buscando caminos, encontramos $sDAEt$.
- Podemos mandar 1 una unidad de flujo, saturando $\overrightarrow{AE}$.

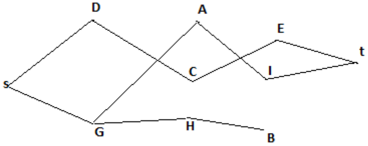
Ejemplo (cont.)

- En el algoritmo original de Dinitz en realidad ahora habria que hacer algo extra, pero hablaré de eso luego.
- Buscando caminos, encontramos *sDAEt*.
- Podemos mandar 1 una unidad de flujo, saturando $\overrightarrow{AE}$.



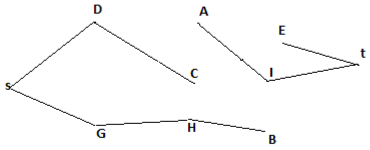
Ejemplo (cont.)

- Deberia actualizar las capacidades sobrantes del network, pero para no escribir tanto, se los dejo como ejercicio. (lo haré al final del network auxiliar).
- Luego encontramos *sDAIt*



- Se puede mandar 1, se satura $\overrightarrow{DA}$.

Ejemplo (cont.)

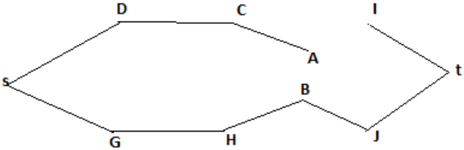


- Seguimos con *sDCEt*.
- Podemos mandar tambien 1, saturando $\overrightarrow{CE}$.
- Siguiente camino es *sGAIt*, tambien mandamos 1 y se satura *GA*.
- No quedan mas caminos entre *s* y *t*.

Ejemplo (cont.)

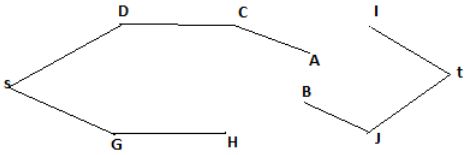
- Luego de todos esos caminos $c - f$ queda:(en azul todos los que cambiaron)
- $\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:6, \overrightarrow{sG}:8, \overrightarrow{AC}:1, \overrightarrow{AE}:0, \overrightarrow{AI}:2$
  $\overrightarrow{BH}:2, \overrightarrow{BJ}:9, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:0, \overrightarrow{CG}:9, \overrightarrow{DA}:0, \overrightarrow{DC}:8, \overrightarrow{DG}:9$
  $\overrightarrow{Et}:7, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9, \overrightarrow{GA}:0, \overrightarrow{GH}:9, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:7, \overrightarrow{Jt}:9$.
- La construcción del tercer network auxiliar no la voy a describir tan en detalle como hice con esta.
- Ademas de que es mucho mas facil. Si uno mira la tabla anterior y construye el tercer network auxiliar, obtiene:

NA3



- Tenemos dos caminos:
  1. $sDCAIt$: 2, que corresponde al camino $sD\overleftarrow{CA}It$: 2 del network original.
     - Se satura el lado $\overrightarrow{AI}$.
  2. y $sGHBJt$: 7 que corresponde en el network original a $sG\overleftarrow{HB}Jt$: 7

NA3



- Sólo podemos mandar 7 pues H sólo le puede devolver 7 a B.
- Es decir, el lado $\overrightarrow{HB}$ en el network auxiliar se satura.
- Corresponde a que el lado $\overrightarrow{BH}$ en el network original se vacia completamente.

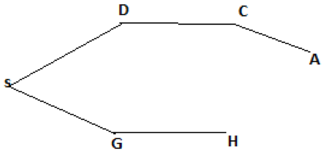
NA3

- s queda desconectado de t, terminamos con el tercer network auxiliar
- Ahora doy la actualización completa del flujo luego de los dos caminos de este network auxiliar.
- Al igual que en EK, en los lados backward $c - f$ aumenta.
- Esos los voy a marcar en rojo, los otros que cambiaron en azul.
- $\overrightarrow{sA}: 0$, $\overrightarrow{sB}: 0$, $\overrightarrow{sD}: 4$, $\overrightarrow{sG}: 1$, $\overrightarrow{AC}: 3$, $\overrightarrow{AE}: 0$, $\overrightarrow{AI}: 0$
  $\overrightarrow{BH}: 9$, $\overrightarrow{BJ}: 2$, $\overrightarrow{Ct}: 0$, $\overrightarrow{CE}: 0$, $\overrightarrow{CG}: 9$, $\overrightarrow{DA}: 0$, $\overrightarrow{DC}: 6$, $\overrightarrow{DG}: 9$
  $\overrightarrow{Et}: 7$, $\overrightarrow{EF}: 9$, $\overrightarrow{Ft}: 9$, $\overrightarrow{GA}: 0$, $\overrightarrow{GH}: 2$, $\overrightarrow{Ht}: 0$, $\overrightarrow{It}: 5$, $\overrightarrow{Jt}: 2$.

NA4

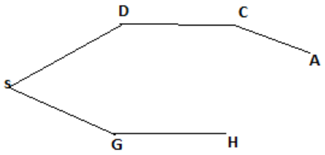
$\overrightarrow{sA}:0, \overrightarrow{sB}:0, \overrightarrow{sD}:4, \overrightarrow{sG}:1, \overrightarrow{AC}:3, \overrightarrow{AE}:0, \overrightarrow{AI}:0$
$\overrightarrow{BH}:9, \overrightarrow{BJ}:2, \overrightarrow{Ct}:0, \overrightarrow{CE}:0, \overrightarrow{CG}:9, \overrightarrow{DA}:0, \overrightarrow{DC}:6, \overrightarrow{DG}:9$
$\overrightarrow{Et}:7, \overrightarrow{EF}:9, \overrightarrow{Ft}:9, \overrightarrow{GA}:0, \overrightarrow{GH}:2, \overrightarrow{Ht}:0, \overrightarrow{It}:5, \overrightarrow{Jt}:2.$

- Si ahora construimos el cuarto network auxiliar, obtenemos:



NA4

- Si ahora construimos el cuarto network auxiliar, obtenemos:



- No pudimos llegar a t.
- El flujo es maximal. Un corte minimal es:
- $S =$vértices del último network auxiliar $= \{s, D, G, C, H, A\}$.

Ejemplo

- Valor del flujo: $f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sB}) + f(\overrightarrow{sD}) + f(\overrightarrow{sG}) = 8 + 7 + (9 - 4) + (9 - 1) = 15 + 5 + 8 = 28$.
- Capacidad del corte $\{s, D, G, C, H, A\}$
- $c(\overrightarrow{sB}) + c(\overrightarrow{Ct}) + c(\overrightarrow{CE}) + c(\overrightarrow{Ht}) + c(\overrightarrow{AE}) + c(\overrightarrow{AI})$
- $= 7 + 8 + 1 + 7 + 1 + 4 = 28$.
- Hemos chequeado que f es maximal y S minimal.

Observaciones

- Como el network auxiliar es un network por niveles, todos los caminos de un mismo network auxiliar deben tener la misma longitud.
- Si obtienen dos caminos de distinta longitud dentro de un mismo NA, lo tienen mal. (lo mas probable es que hayan construido mal el NA).
- Esto es algo fácil de verificar, asi que es una ayuda para ver si no cometieron un error muy grande.
- Por otro lado, como justamente esto es algo fácil de verificar, si no lo hacen y lo tienen mal les descontaremos muchisimos puntos.

Observaciones

- Podemos ver en el ejemplo que el primer NA tenia 4 niveles, el 2do NA tenia 5 y el tercero 6.
- (el cuarto tenia sólo 4, pero no llegabamos a t).
- Esto pasa siempre: un network auxiliar “codifica” TODOS los caminos de una longitud dada.
- Cuando terminemos con ese NA, todos los demas caminos que encontremos van a tener longitud estrictamente mayor.
- Esto es algo que probaremos y es clave para la complejidad de todos los algoritmos “tipo” Dinic.

Observaciones

- Al igual que el punto anterior, esto tambien les sirve cuando lo corran a mano para darse cuenta si hicieron algo espantosamente mal.
- Si al correr el algoritmo su network auxiliar (que no sea el último, el que no llega a t) tiene menos o incluso la misma cantidad de niveles que alguno anterior, entonces hicieron algo mal.
- Al igual que con el punto anterior, como esto es algo fácil de verificar, si no lo hacen les descontaremos muchos puntos.