

Casi de la misma manera que el intento para resolver el problema de área condujo a la definición de una integral definida, ahora se busca determinar el volumen de un sólido, y en el proceso se llega a la definición de integral doble.

REVISIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Primero se recordarán los hechos básicos relacionados con integrales definidas de una sola variable. Si $f(x)$ se define para $a \leq x \leq b$, se empieza por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud $\Delta x = (b - a)/n$ y se eligen puntos de muestra x_i^* en estos subintervalos. Entonces se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Si se toma el límite de las sumas cuando $n \rightarrow \infty$ para obtener la integral definida de f de a a b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

En el caso especial donde $f(x) \geq 0$, la suma de Riemann se puede interpretar como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación en la figura 1, y $\int_a^b f(x) dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b .

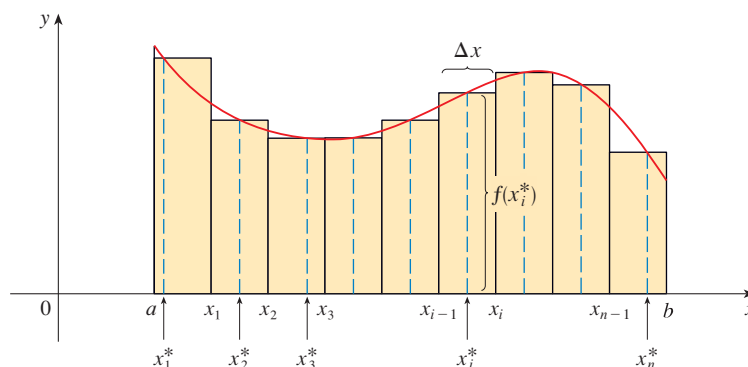


FIGURA 1

VOLÚMENES E INTEGRALES DOBLES

De una manera similar se considera una función f de dos variables definidas en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

y se supone primero que $f(x, y) \geq 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que yace arriba de R y debajo de la gráfica de f , es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Véase la figura 2.) El objetivo es hallar el volumen de S .

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual amplitud $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar líneas

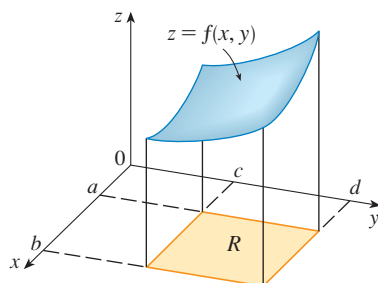


FIGURA 2

paralelas a los ejes coordenados por los puntos finales de estos subintervalos como en la figura 3, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada uno con área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

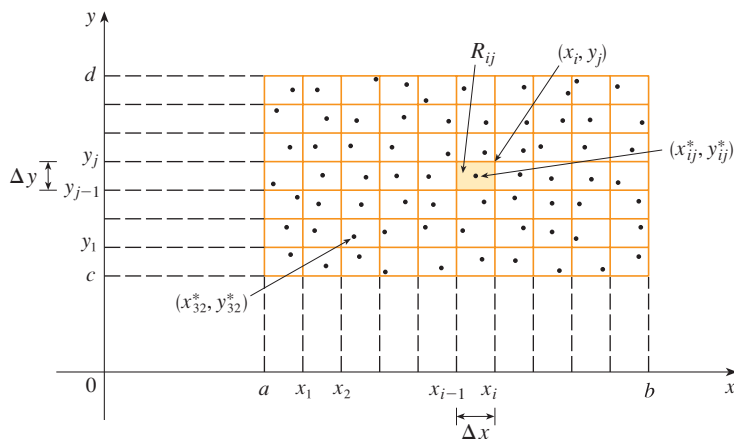


FIGURA 3
División de R en subrectángulos

Si se elige el **punto muestral** (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada R_{ij} , entonces se puede aproximar la parte de S que yace arriba de cada R_{ij} mediante una caja rectangular (o “columna”) con base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ como se muestra en la figura 4. (Compare con la figura 1.) El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área de la base del rectángulo:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtiene una aproximación del volumen total de S :

3

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

(Véase fig. 5.) Esta suma doble significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y luego se suman los resultados.

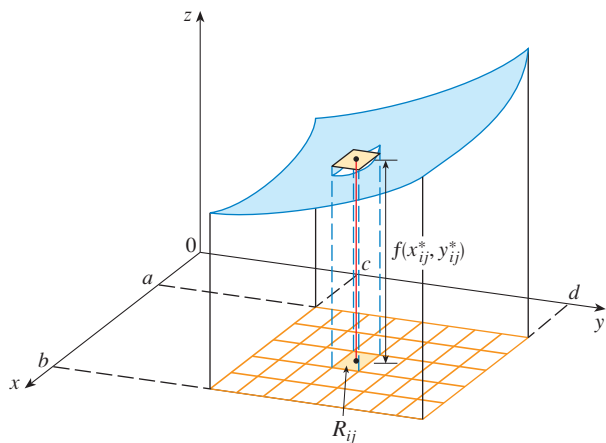


FIGURA 4

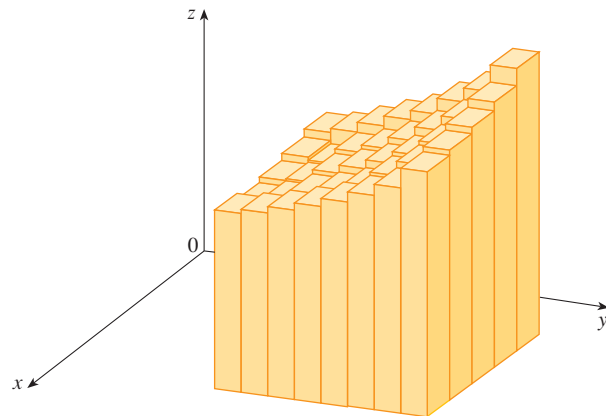


FIGURA 5

■ El significado del límite doble en la ecuación 4 es que la suma doble se puede hacer tan cercana como se desee al número V [para cualquier elección de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}] al tomar m y n suficientemente grandes.

La intuición dice que la aproximación dada en (3) es mejor cuando m y n crecen y, por lo tanto, se esperaría que

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Se usa la expresión de la ecuación 4 para definir el **volumen** del sólido S que yace debajo de la gráfica de f y arriba del rectángulo R . (Se puede demostrar que esta definición es congruente con la fórmula para el volumen de la sección 6.2.)

Los límites del tipo que aparece en la ecuación 4 ocurren con frecuencia, no sólo para hallar volúmenes, sino también en diversas situaciones, como se verá en la sección 15.5, incluso cuando f no es una función positiva. Así, se hace la siguiente definición.

5 DEFINICIÓN La **integral doble** de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

si existe el límite.

■ Observe la similitud entre la definición 5 y la definición de una integral simple en la ecuación 2.

■ Aun cuando ha definido la integral doble al dividir R en subrectángulos de igual tamaño, podría haber empleado subrectángulos R_{ij} de tamaño desigual. Pero entonces hubiéramos tenido que asegurar que todas sus dimensiones se aproximaran a 0 en el proceso de establecer límites.

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para los enteros m y n mayores que N y para cualquier elección de puntos muestrales (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} .

Una función f se denomina **integrable** si existe el límite en la definición 5. En cursos de cálculo avanzado se demuestra que todas las funciones continuas son integrables. De hecho, la integral doble de f existe siempre que f “no sea demasiado discontinua”. En particular, si f está acotada [esto es, hay una constante M tal que $|f(x, y)| \leq M$ para toda (x, y) en R], y f es continua ahí, excepto en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable sobre R .

Se puede elegir que el punto muestral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) sea cualquier punto en el subrectángulo R_{ij} , pero si se elige que sea la esquina superior derecha de R_{ij} [a saber, (x_i, y_j)], véase figura 3], entonces la expresión para la integral doble se simplifica:

$$6 \quad \iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Al comparar las definiciones 4 y 5, es obvio que un volumen puede expresarse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que yace arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

La suma de la definición 5,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se llama **suma de Riemann doble** y se emplea como una aproximación del valor de la integral doble. [Observe la similitud con la suma de Riemann en (1) para una función de una sola variable.] Si sucede que f es una función *positiva*, entonces la suma de Riemann doble representa la suma de volúmenes de columnas, como en la figura 5, y es una aproximación del volumen bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R .

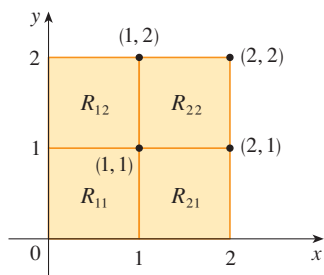


FIGURA 6

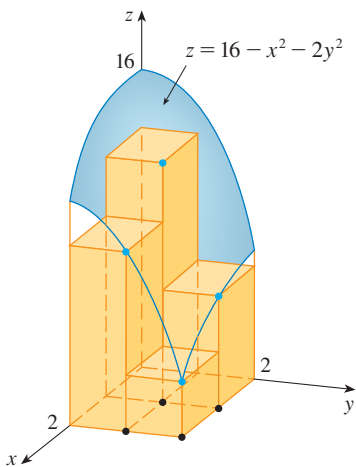


FIGURA 7

EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que yace arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y debajo del paraboloides elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija el punto muestral como la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij} . Bosqueje el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloides es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es 1. Al aproximar el volumen mediante la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Éste es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación mostradas en la figura 7. □

Se obtienen mejores aproximaciones para el volumen del ejemplo 1 si se incrementa el número de cuadrados. En la figura 8 se muestra cómo las columnas comienzan a verse más como sólidos reales y las aproximaciones correspondientes se vuelven más exactas cuando se usan 16, 64 y 256 cuadrados. En la siguiente sección se podrá mostrar que el volumen exacto es 48.

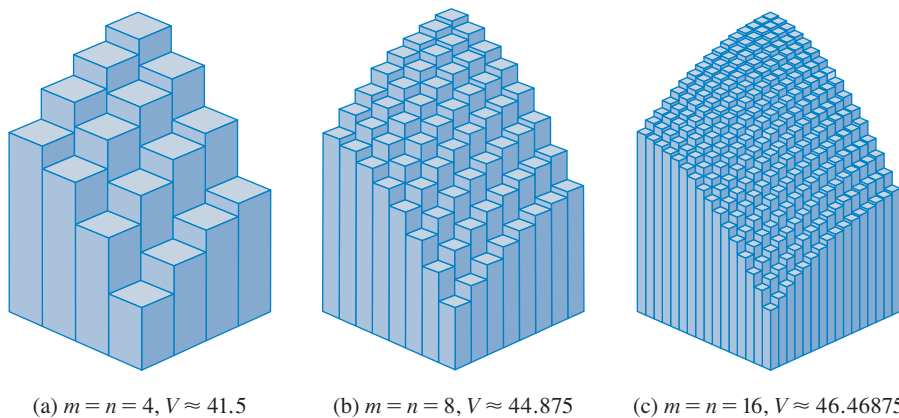


FIGURA 8

Las aproximaciones de suma de Riemann al volumen debajo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ se vuelven más exactas cuando se incrementan m y n .

EJEMPLO 2 Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, evalúe la integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA$$

PROPIEDADES DE INTEGRALES DOBLES

Se listan aquí tres propiedades de integrales dobles que se pueden probar de la misma manera que en la sección 5.2. Se supone que todas las integrales existen. Las propiedades 7 y 8 se conocen como *linealidad* de la integral.

■ Las integrales dobles se comportan de esta manera debido a que las sumas dobles que las originan se comportan de esa forma.

$$\boxed{7} \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

$$\boxed{8} \quad \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA \quad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para toda (x, y) en R , entonces

$$\boxed{9} \quad \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

15.1 EJERCICIOS

- 1.** (a) Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

Use una suma de Riemann con $m = 3$, $n = 2$ y tome el punto muestral como la esquina superior derecha de cada cuadrado.

- (b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del sólido del inciso (a).

- 2.** Si $R = [-1, 3] \times [0, 2]$, use una suma de Riemann con $m = 4$, $n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R (y^2 - 2x^2) dA$. Tome las esquinas superiores izquierdas de los cuadrados como los puntos muestrales.

- 3.** (a) Use una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R \sin(x + y) dA$, donde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Tome las esquinas inferiores izquierdas como los puntos muestrales.

- (b) Use la regla del punto medio para estimar la integral del inciso (a).

- 4.** (a) Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = x + 2y^2$ y arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$. Use una suma de Riemann con $m = n = 2$ y elija a las esquinas inferiores derechas como los puntos muestrales.

- (b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del inciso (a).

- 5.** Se da una tabla de valores para una función $f(x, y)$ definida en $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

- (a) Estime $\iint_R f(x, y) dA$ por medio de la regla del punto medio con $m = n = 2$.

- (b) Estime la integral doble con $m = n = 4$ y elija los puntos más alejados del origen como los puntos muestrales.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
1.0	2	0	-3	-6	-5
1.5	3	1	-4	-8	-6
2.0	4	3	0	-5	-8
2.5	5	5	3	-1	-4
3.0	7	8	6	3	0

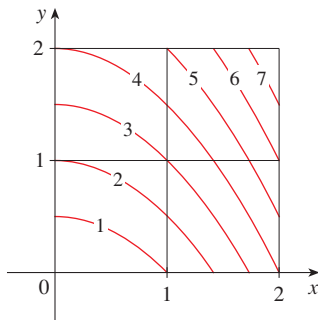
- 6.** Una alberca de 20 pies por 30 pies se llena con agua. La profundidad se mide a intervalos de 5 pies, empezando en una esquina de la alberca, y se registran los valores en una tabla. Estime el volumen de agua en la alberca.

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

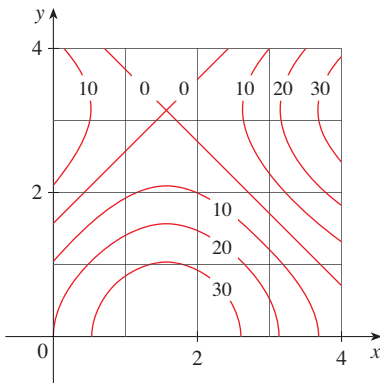
- 7.** Sea V el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ y arriba del rectángulo dado por $2 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 6$. Use las líneas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir

a R en subrectángulos. Sean L y U las sumas de Riemann calculadas por medio de las esquinas inferiores izquierdas y las esquinas superiores derechas, respectivamente. Sin calcular los números V , L y U , dispóngalos en orden creciente y explique su razonamiento.

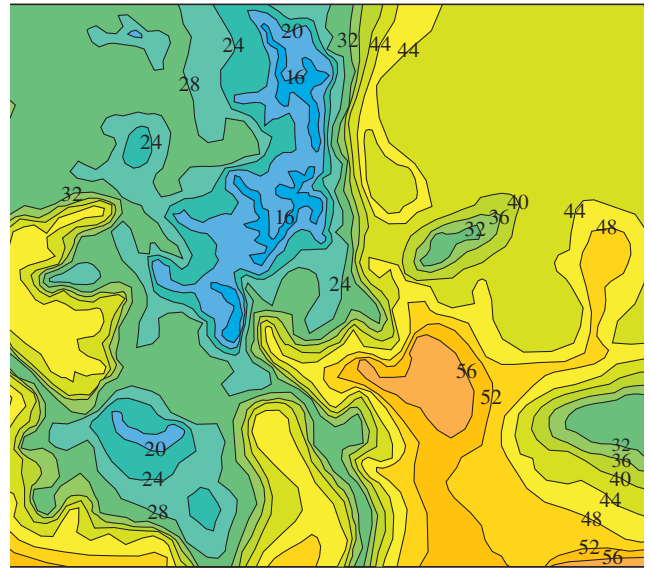
8. En la figura se muestran las curvas de nivel de una función f en el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar $\iint_R f(x, y) dA$. ¿Cómo podría mejorar su estimación?



9. Se muestra un mapa de contornos para una función f en el cuadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.
- Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y) dA$.
 - Estime el valor promedio de f .



10. En el mapa de contornos se muestra la temperatura, en grados Fahrenheit, a las 4:00 P.M. del 26 de febrero de 2007, en Colorado. (El estado mide 388 millas de este a oeste y 276 millas de norte a sur.) Use la regla del punto medio con $m = n = 4$ para estimar la temperatura promedio en Colorado a esa hora.



11–13 Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

- $\iint_R 3 dA$, $R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$
- $\iint_R (5 - x) dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$
- $\iint_R (4 - 2y) dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. La integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2} dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.
15. Use una calculadora programable o computadora (o el comando sum en un CAS) para estimar

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}} dA$$

donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use la regla del punto medio con los siguientes números de cuadrados de igual tamaño: 1, 4, 16, 64, 256 y 1 024.

16. Repita el ejercicio 15 para la integral $\iint_R \sin(x + \sqrt{y}) dA$.
17. Si f es una función constante, $f(x, y) = k$, y $R = [a, b] \times [c, d]$, demuestre que $\iint_R k dA = k(b - a)(d - c)$.
18. Utilice el resultado del ejercicio 17 para demostrar que

$$0 \leq \iint_R \sin \pi x \cos \pi y dA \leq \frac{1}{32}$$

donde $R = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

15.2 INTEGRALES ITERADAS

Recuerde que por lo común es difícil evaluar integrales simples directamente de la definición de una integral, pero el teorema fundamental del cálculo provee un método mucho más fácil. La evaluación de integrales dobles a partir de primeros principios es incluso más

difícil, pero en esta sección se ve cómo expresar una integral doble como una integral iterada, que se puede evaluar entonces calculando dos integrales simples.

Suponga que f es una función de dos variables que es integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y) dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto a y* . (Observe su similitud con la derivación parcial.) Ahora $\int_c^d f(x, y) dy$ es un número que depende del valor de x , así que define una función de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Si ahora se integra la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

$$\boxed{1} \quad \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

La integral del lado derecho de la ecuación 1 se llama **integral iterada**. Por lo común, se omiten los corchetes. Así,

$$\boxed{2} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

indica que primero se integra con respecto a y de c a d , y luego con respecto a x de a a b .

De manera similar, la integral iterada

$$\boxed{3} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fija a y) de $x = a$ a $x = b$ y después se integra la función resultante de y con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que en las ecuaciones 2 y 3 se trabaja *de dentro hacia fuera*.

EJEMPLO 1 Evalúe las integrales iteradas.

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

$$(b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

SOLUCIÓN

(a) Si se considera a x constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2$$

Así, la función A en la explicación anterior está dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ en este ejemplo. Ahora integrará esta función de x de 0 a 3:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b) Aquí se integra primero con respecto a x :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

□

Observe que en el ejemplo 1 se obtiene la misma respuesta si se integra primero con respecto a y o x . En general, resulta (véase teorema 4) que las dos integrales iteradas de las ecuaciones 2 y 3 son siempre iguales; es decir, no importa el orden de integración. (Esto es similar al teorema de Clairaut en la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

En el siguiente teorema se da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

■ El nombre del teorema 4 es en honor al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), quien demostró una versión muy general de este teorema en 1907. Pero casi un siglo antes, el matemático francés Augustin-Louis Cauchy tenía conocimiento de la versión para funciones continuas.

4 TEOREMA DE FUBINI Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R , f es discontinua sólo en un número finito de curvas uniformes y existen integrales iteradas.

La demostración del teorema de Fubini es muy difícil para incluirla en este libro, pero al menos se puede dar una indicación intuitiva de por qué se cumple para el caso donde $f(x, y) \geq 0$. Recuerde que f es positiva, entonces se puede interpretar la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ como el volumen V del sólido S que yace arriba de R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$. Pero se tiene otra fórmula que se usó para el volumen en el capítulo 6, a saber,

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal de S en el plano que pasa por x y es perpendicular al eje x . De la figura 1 se puede ver que $A(x)$ es el área bajo la curva C cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde x se mantiene constante y $c \leq y \leq d$. Por lo tanto

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

y tiene

$$\iint_R f(x, y) \, dA = V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

Un argumento similar, con secciones transversales perpendiculares al eje y como en la figura 2, muestra que

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

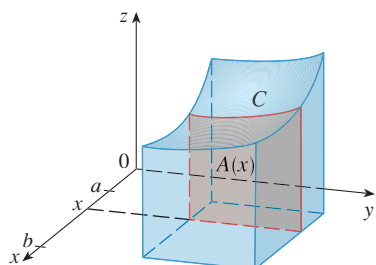


FIGURA 1

TEC Visual 15.2 ilustra el teorema de Fubini mostrando una animación de las figuras 1 y 2.

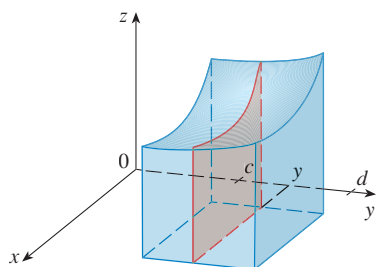


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2) dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare con el ejemplo 3 de la sección 15.1.)

SOLUCIÓN 1 El teorema de Fubini da

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx = \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Al aplicar de nuevo el teorema de Fubini, pero esta vez integrando primero con respecto a x , se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = [2y - 2y^3]_1^2 = -12\end{aligned}$$

□

■ Observe la respuesta negativa del ejemplo 2; no hay nada malo con eso. La función f en ese ejemplo no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. De la figura 3 se ve que f es siempre negativa en R , así que el volumen de la integral es el negativo del volumen que yace arriba de la gráfica de f y abajo de R .

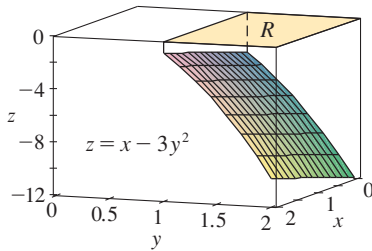


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_R y \sin(xy) dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUCIÓN 1 Si se integra primero con respecto a x , se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si se invierte el orden de integración, se obtiene

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx$$

Para evaluar la integral interna se emplea la integración por partes con

$$u = y \quad dv = \sin(xy) dy$$

$$du = dy \quad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

$$\begin{aligned}\text{y, por lo tanto, } \int_0^\pi y \sin(xy) dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(xy) dy \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}\end{aligned}$$

■ Para una función f que toma valores positivos y negativos, $\iint_R f(x, y) dA$ es una diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen arriba de R y abajo de la gráfica de f , y V_2 es el volumen debajo de R y arriba de la gráfica. El hecho de que la integral del ejemplo 3 sea 0 significa que estos dos volúmenes son iguales (véase figura 4).

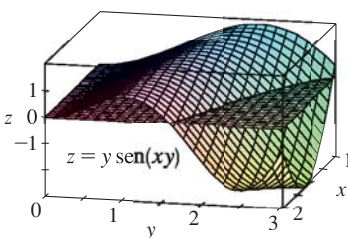


FIGURA 4

Si ahora se integra el primer término por partes con $u = -1/x$ y $dv = \pi \cos \pi x \, dx$, se obtiene $du = dx/x^2$, $v = \sin \pi x$, y

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x} - \int \frac{\sin \pi x}{x^2} dx$$

Por lo tanto,
$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x}$$

y entonces
$$\int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) \, dy \, dx = \left[-\frac{\sin \pi x}{x} \right]_1^2$$

$$= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0$$

□

■ En el ejemplo 2, las soluciones 1 y 2 son igualmente directas, pero en el ejemplo 3, la primera solución es mucho más fácil que la segunda. Por lo tanto, cuando se evalúan integrales dobles, es sabio elegir el orden de integración que da integrales más simples.

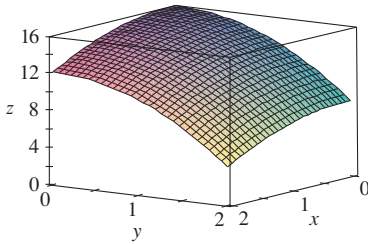


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

SOLUCIÓN Primero se observa que S es el sólido que yace debajo de la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase figura 5.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1 de la sección 15.1, pero ahora se está en posición de evaluar la integral doble por medio del teorema de Fubini. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) \, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

□

En el caso especial donde $f(x, y)$ se puede factorizar como el producto de una función de x y una función de y , la integral doble de f se puede escribir en una forma particularmente simple. Para ser específicos, suponga que $f(x, y) = g(x)h(y)$ y $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces el teorema de Fubini da

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy$$

En la integral interna y es una constante, así que $h(y)$ es una constante y se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy &= \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \right] dy \\ &= \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy \end{aligned}$$

puesto que $\int_a^b g(x) \, dx$ es una constante. Por lo tanto, en este caso, la integral doble de f se puede escribir como el producto de dos integrales simples:

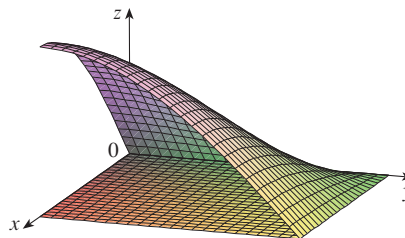
$$\boxed{5} \quad \iint_R g(x)h(y) \, dA = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy \quad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EJEMPLO 5 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces, mediante la ecuación 5

$$\begin{aligned} \iint_R \sin x \cos y \, dA &= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \\ &= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned} \quad \square$$

■ La función $f(x, y) = \sin x \cos y$ en el ejemplo 5 es positiva en R , así que la integral representa el volumen del sólido que yace arriba de R y abajo de la gráfica de f mostrada en la figura 6.

FIGURA 6



15.2 EJERCICIOS

1-2 Determine $\int_0^5 f(x, y) \, dx$ y $\int_0^1 f(x, y) \, dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$ 2. $f(x, y) = y + xe^y$

3-14 Calcule la integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) \, dx \, dy$ 4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2) \, dy \, dx$
5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx$ 6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y \, dy \, dx$
7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8 \, dx \, dy$ 8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} \, dy \, dx$
9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \, dy \, dx$ 10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y} \, dx \, dy$
11. $\int_0^1 \int_0^1 (u - v)^5 \, du \, dv$ 12. $\int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$
13. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \sin^2 \theta \, d\theta \, dr$ 14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t} \, ds \, dt$

15-22 Calcule la integral doble.

15. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$
16. $\iint_R \cos(x + 2y) \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

18. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2} \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

19. $\iint_R x \sin(x + y) \, dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1 + xy} \, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R xye^{x^2y} \, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 2]$

22. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} \, dA$, $R = [1, 2] \times [0, 1]$

23-24 Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) \, dx \, dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx$

25. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del plano $3x + 2y + z = 12$ y arriba del rectángulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$.

26. Determine el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide hiperbólico $z = 4 + x^2 - y^2$ y arriba del cuadrado $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

- 27.** Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.
- 28.** Encuentre el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x \sin y$ y los planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ y $z = 0$.
- 29.** Determine el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x \sec^2 y$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = \pi/2$.
- 30.** Encuentre el volumen del sólido del primer octante limitado por el cilindro $z = 16 - x^2$ y el plano $y = 5$.
- 31.** Encuentre el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ y los planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, $y = 4$.
- 32.** Grafique el sólido que se encuentra entre la superficie $z = 2xy/(x^2 + 1)$ y el plano $z = x + 2y$ y está acotado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$. A continuación encuentre su volumen.
- CAS 33.** Use un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy} dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Después use el CAS para dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral.
- CAS 34.** Dibuje el sólido que yace entre las superficies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Use un sistema algebraico computacional para aproximar el volumen de este sólido correcto hasta cuatro decimales.
- 35–36.** Encuentre el valor promedio de f sobre el rectángulo dado.
- 35.** $f(x, y) = x^2 y$, R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$
- 36.** $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $R = [0, 4] \times [0, 1]$
- CAS 37.** Use un CAS para calcular las integrales iteradas
- $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$$
- ¿Las respuestas contradicen al teorema de Fubini? Explique lo que sucede.
- 38.** (a) ¿En qué forma los teoremas de Fubini y Clairaut son similares?
 (b) Si $f(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ y
- $$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) dt ds$$
- para $a < x < b$, $c < y < d$, demuestre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Para integrales simples, la región sobre la que se integra es siempre un intervalo. Pero para integrales dobles, se desea poder integrar una función f no sólo sobre rectángulos, sino también sobre regiones D de forma más general, como la que se ilustra en la figura 1. Se supone que D es una región acotada, lo que significa que D puede ser encerrada en una región rectangular R como en la figura 2. Entonces se define una nueva función F con dominio R mediante

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

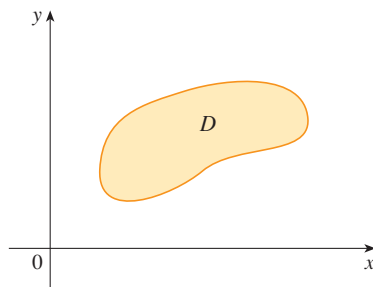


FIGURA 1

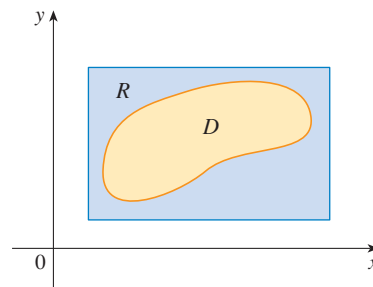


FIGURA 2

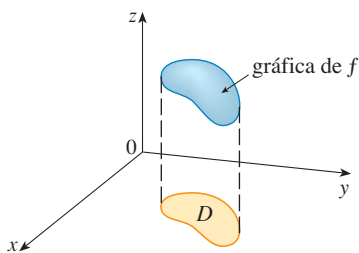


FIGURA 3

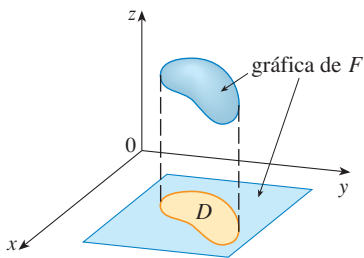


FIGURA 4

Si la integral doble de F existe sobre R , entonces se define la **integral doble de f sobre D** mediante

$$\boxed{2} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA \quad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

La definición 2 tiene sentido porque R es un rectángulo y, por lo tanto, $\iint_R F(x, y) \, dA$ ha sido definida previamente en la sección 15.1. El procedimiento que se usó es razonable, porque los valores de $F(x, y)$ son 0 cuando (x, y) está fuera de D y, por consiguiente, no contribuyen con la integral. Esto significa que no importa qué rectángulo R se use, siempre y cuando contenga a D .

En el caso que $f(x, y) \geq 0$ aún se puede interpretar a $\iint_D f(x, y) \, dA$ como el volumen del sólido que yace arriba de D y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ (la gráfica de f). Se puede ver que esto es razonable si se comparan las gráficas de f y F en las figuras 3 y 4 y se recuerda que $\iint_R F(x, y) \, dA$ es el volumen debajo de la gráfica de F .

En la figura 4 se muestra también que es probable que F tenga discontinuidades en los puntos límite de D . Sin embargo, si f es continua en D y la curva límite de D tiene un “buen comportamiento” (en un sentido fuera del alcance de este libro), entonces se puede demostrar que $\iint_R F(x, y) \, dA$ existe y, por lo tanto, $\iint_D f(x, y) \, dA$ existe. En particular, éste es el caso para los siguientes tipos de regiones.

Se dice que una región plana es de **tipo I** si yace entre las gráficas de dos funciones continuas de x , es decir,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones tipo I se muestran en la figura 5.

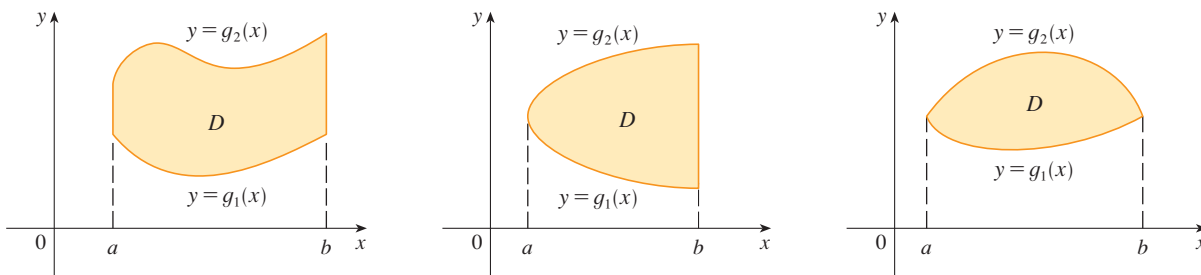


FIGURA 5 Algunas regiones tipo I

A fin de evaluar $\iint_D f(x, y) \, dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contiene a D , como en la figura 6, y sea F la función dada por la ecuación 1; es decir, F concuerda con f en D y F es 0 fuera de D . Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) \, dy \, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque entonces (x, y) está fuera de D . Por lo tanto

$$\int_c^d F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$$

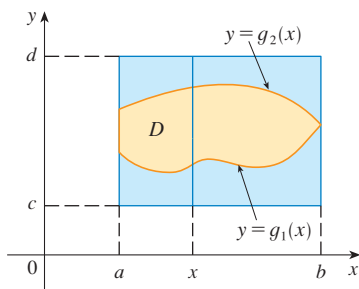


FIGURA 6

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Así, se tiene la siguiente fórmula que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

3 Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

La integral del lado derecho de (3) es una integral iterada que es similar a las consideradas en la sección anterior, excepto que en la integral interna se considera a x como una constante no sólo en $f(x, y)$ sino también en los límites de integración, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

Se consideran también las regiones planas de **tipo II**, que se pueden expresar como

4
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas. En la figura 7 se ilustran dos regiones de este tipo.

Si se usan los métodos que se emplearon para establecer (3), se puede demostrar que

5
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

donde D es una región de tipo II dada por la ecuación 4.

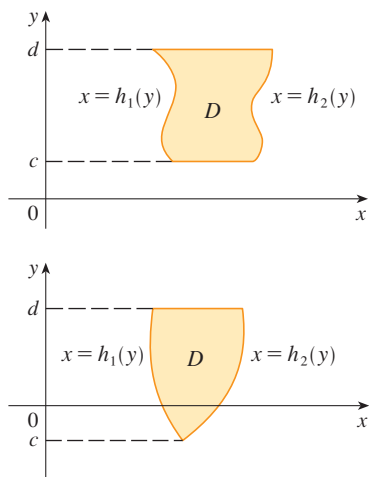


FIGURA 7

Algunas regiones de tipo II

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y) dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

SOLUCIÓN Las parábolas se cortan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir, $x^2 = 1$, por lo tanto $x = \pm 1$. Se nota que la región D , bosquejada en la figura 8, es una región de tipo I, pero no una región de tipo II y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Puesto que el límite inferior es $y = 2x^2$ y el límite superior es $y = 1 + x^2$, la ecuación 3 da

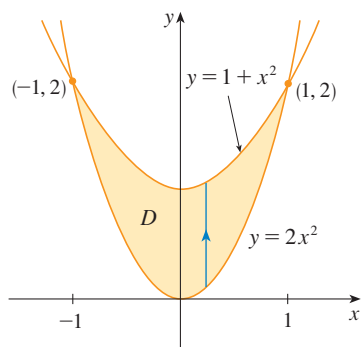


FIGURA 8

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 [x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx \\ &= -3 \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

□

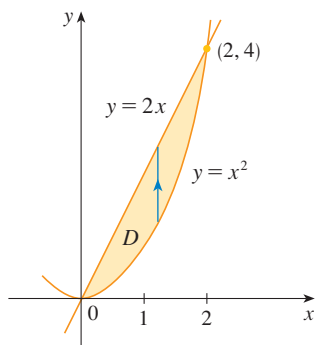


FIGURA 9

D es una región de tipo I

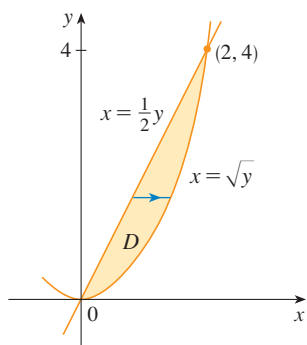


FIGURA 10

D como una región tipo II

■ En la figura 11 se muestra el sólido cuyo volumen se calculó en el ejemplo 2. Yace arriba del plano xy , debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

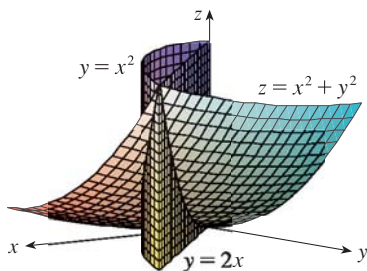


FIGURA 11

NOTA Cuando se establece una integral doble como en el ejemplo 1, es esencial dibujar un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical como en la figura 8. Entonces los límites de integración de la integral *interna* se leen del diagrama como sigue: la flecha comienza en el límite inferior $y = g_1(x)$, que da el límite inferior en la integral, y la flecha termina en el límite superior $y = g_2(x)$, que da el límite superior de integración. Para una región tipo II, la flecha se traza horizontalmente del límite izquierdo al derecho.

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotado por la línea $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN 1 En la figura 9 se ve que D es una región de tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Por lo tanto, el volumen debajo de $z = x^2 + y^2$ y arriba de D es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \bigg|_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 De la figura 10 se ve que D se puede escribir también como una región tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Por lo tanto, otra expresión para V es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\ &= \frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^4 \bigg|_0^4 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy dA$, donde D es la región acotada por la línea $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. De nuevo D es tipo I y tipo II, pero la descripción de D como una región de tipo I es más complicada porque el límite inferior consta de dos partes. Por lo tanto, se prefiere expresar a D como una región tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$

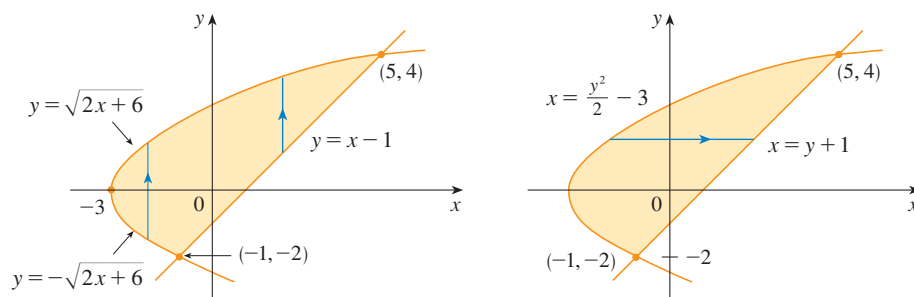


FIGURA 12

(a) D como una región de tipo I(b) D como una región de tipo II

Entonces (5) da

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36
 \end{aligned}$$

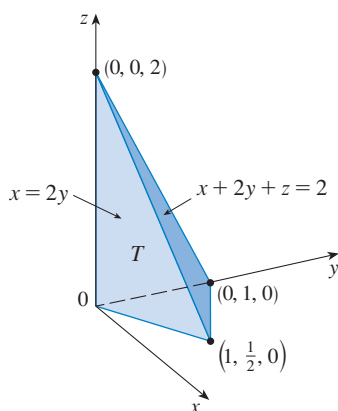


FIGURA 13

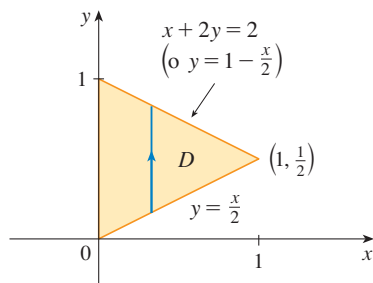


FIGURA 14

Si se hubiera expresado a D como una región de tipo I por medio de la figura 12(a), entonces se habría obtenido

$$\iint_D xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

pero esto habría requerido más trabajo que el otro método. □

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN En una pregunta tal como ésta, es aconsejable dibujar dos diagramas: una del sólido tridimensional y otra de la región plana D sobre la cual yace. En la figura 13 se muestra el tetraedro T acotado por los planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Puesto que el plano $x + 2y + z = 2$ corta al plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la línea $x + 2y = 2$, se ve que T está arriba de la región triangular D en el plano xy acotado por las líneas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase figura 14.)

El plano $x + 2y + z = 2$ se puede escribir como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=x/2}^{y=1-x/2} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

□

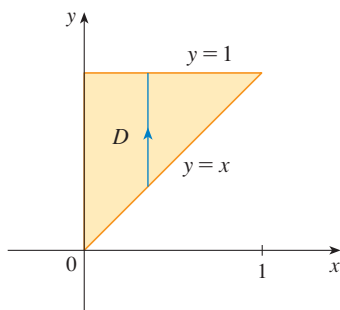


FIGURA 15
D como una región de tipo I

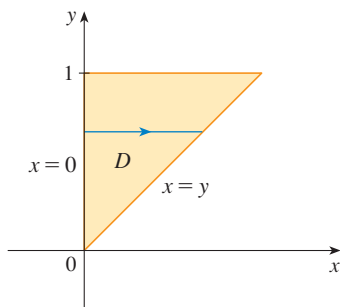


FIGURA 16
D como una región de tipo II

EJEMPLO 5 Evalúe la integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx$.

SOLUCIÓN Si se intenta evaluar la integral como está, se enfrenta la tarea de evaluar primero $\int \sin(y^2) \, dy$. Pero es imposible hacerlo en términos finitos, puesto que $\int \sin(y^2) \, dy$ no es una función elemental. (Véase el fin de la sección 7.5.) Así que se debe cambiar el orden de integración. Esto se lleva a cabo al expresar primero la integral iterada dada como una integral doble. Si se usa (3) hacia atrás, se tiene

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx = \iint_D \sin(y^2) \, dA$$

donde

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

Se bosqueja esta región D en la figura 15. Después, de la figura 16 se ve que una descripción alternativa de D es

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

Esto permite usar (5) para expresar la integral doble como una integral iterada en el orden inverso:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx &= \iint_D \sin(y^2) \, dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 [x \sin(y^2)]_{x=0}^{x=y} \, dy \\
 &= \int_0^1 y \sin(y^2) \, dy = \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1)
 \end{aligned}$$

□

PROPIEDADES DE INTEGRALES DOBLES

Se supone que todas las siguientes integrales existen. Las tres primeras propiedades de las integrales dobles sobre una región D se deducen de inmediato de la definición 2 y las propiedades 7, 8 y 9 en la sección 15.1.

$$\boxed{6} \quad \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA + \iint_D g(x, y) \, dA$$

$$\boxed{7} \quad \iint_D c f(x, y) \, dA = c \iint_D f(x, y) \, dA$$

Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para toda (x, y) en D , entonces

$$\boxed{8} \quad \iint_D f(x, y) \, dA \geq \iint_D g(x, y) \, dA$$

La siguiente propiedad de las integrales dobles es similar a la propiedad de las integrales simples dada por la ecuación $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se traslapan excepto quizá en sus límites (véase figura 17), entonces

$$\boxed{9} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA$$

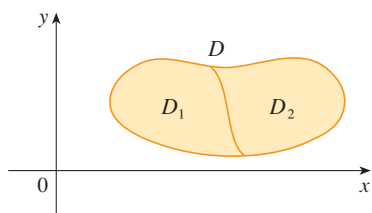


FIGURA 17

La propiedad 9 se puede usar para evaluar las integrales dobles en las regiones D que no son ni tipo I ni II, pero se pueden expresar como una unión de regiones de tipo I o tipo II. En la figura 18 se ilustra este procedimiento. (Véase los ejercicios 51 y 52.)

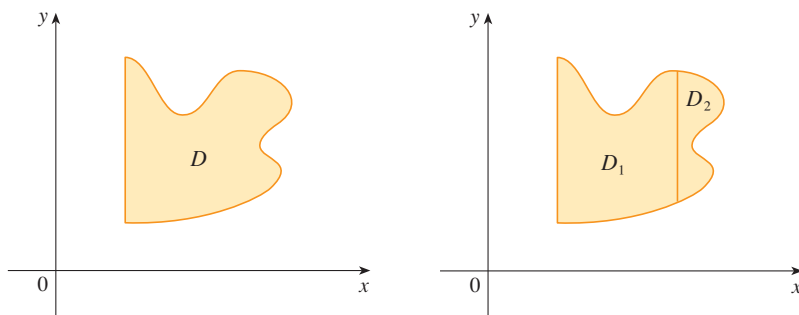


FIGURA 18

(a) D no es tipo I ni tipo II.

(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 es tipo I, D_2 es tipo II.

La siguiente propiedad de las integrales establece que si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ sobre una región D , se obtiene el área de D :

$$\boxed{10} \quad \iint_D 1 \, dA = A(D)$$

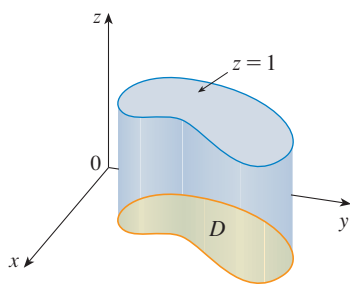


FIGURA 19

Cilindro con base D y altura 1

En la figura 19 se ilustra por qué es cierta la ecuación 10: un cilindro sólido cuya base es D y cuya altura es 1 tiene un volumen $A(D) \cdot 1 = A(D)$, pero se sabe que su volumen se puede escribir también como $\iint_D 1 \, dA$.

Por último, se pueden combinar las propiedades 7, 8 y 10 para probar la siguiente propiedad. (Véase el ejercicio 57.)

$\boxed{11}$ Si $m \leq f(x, y) \leq M$ para toda (x, y) en D , entonces

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq MA(D)$$

EJEMPLO 6 Use la propiedad 11 para estimar la integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

SOLUCIÓN Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ y $-1 \leq \cos y \leq 1$, se tiene $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ y, por lo tanto,

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Así, con $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ y $A(D) = \pi(2)^2$ en la propiedad 11, se obtiene

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e$$

□

15.3 EJERCICIOS

1-6 Evalúe la integral iterada.

1. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy$

2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y) dy dx$

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 + 2y) dy dx$

4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy dx dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2} du dv$

17. $\iint_D (2x - y) dA$,

D está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2.

18. $\iint_D 2xy dA$, D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 3)$.

7-18 Evalúe la integral doble.

7. $\iint_D y^2 dA$, $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$

8. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

9. $\iint_D x dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

10. $\iint_D x^3 dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$

11. $\iint_D y^2 e^{xy} dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$

12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2} dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

13. $\iint_D x \cos y dA$, D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

14. $\iint_D (x + y) dA$, D está acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$

15. $\iint_D y^3 dA$,
 D es la región triangular con vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ y $(3, 2)$.

16. $\iint_D xy^2 dA$, D está encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

19-28 Encuentre el volumen del sólido dado.

19. Debajo del plano $x + 2y - z = 0$ y arriba de la región acotada por $y = x$ y $y = x^4$.

20. Debajo de la superficie $z = 2x + y^2$ y arriba de la región acotada por $x = y^2$ y $x = y^3$.

21. Debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo con vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ y $(1, 2)$.

22. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$.

23. Acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 2y + z = 6$.

24. Acotado por los planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ y $z = 0$.


25. Acotado por los cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 4$.

26. Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

27. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

28. Acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$.

29. Use una calculadora o computadora para estimar las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = x^4$ y $y = 3x - x^2$. Si D es la región acotada por estas curvas, estime $\iint_D x dA$.


-  **30.** Encuentre el volumen aproximado del sólido en el primer octante que está acotado por los planos $y = x$, $z = 0$ y $z = x$ y el cilindro $y = \cos x$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección.)

31–32 Encuentre el volumen del sólido restando dos volúmenes.

- 31.** El sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y los planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.
- 32.** El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$.

33–34 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

- 33.** $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$ **34.** $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x) dy dx$

 **35–38** Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen exacto del sólido.

- 35.** Debajo de la superficie $z = x^3y^4 + xy^2$ y arriba de la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ para $x \geq 0$.
- 36.** Entre los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - 2y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 37.** Encerrado por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.
- 38.** Encerrado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$.

39–44 Bosqueje la región de integración y cambie el orden de integración.

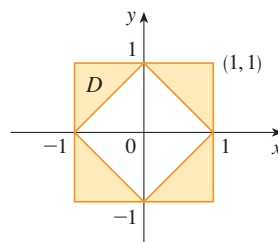
- 39.** $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$ **40.** $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y) dy dx$
- 41.** $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$ **42.** $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y) dx dy$
- 43.** $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$ **44.** $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$

45–50 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

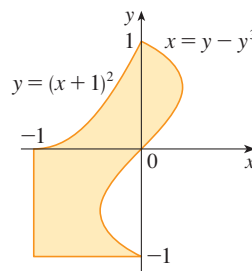
- 45.** $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ **46.** $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$
- 47.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$ **48.** $\int_0^1 \int_x^1 e^{xy} dy dx$
- 49.** $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$
- 50.** $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$

51–52 Expresar a D como una unión de regiones del tipo I o tipo II y evalúe la integral.

51. $\iint_D x^2 dA$



52. $\iint_D xy dA$



53–54 Use la propiedad 11 para estimar el valor de la integral.

- 53.** $\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2} dA$, Q es el cuarto de círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el primer cuadrante.
- 54.** $\iint_D \sin^4(x + y) dA$, T es el triángulo encerrado por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, y $x = 1$

55–56 Encuentre el valor promedio de f sobre la región D .

- 55.** $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(1, 3)$
- 56.** $f(x, y) = x \sin y$, D está encerrado por las curvas $y = 0$, $y = x^2$ y $x = 1$

57. Demuestre la Propiedad 11.

58. Al evaluar una integral doble sobre una región D , se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:


$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Bosqueje la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

- 59.** Evalúe $\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4) dA$, donde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

[Sugerencia: explote el hecho de que D es simétrica con respecto a ambos ejes.]

- 60.** Use simetría para evaluar $\iint_D (2 - 3x + 4y) dA$, donde D es la región acotada por el cuadrado con vértices $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 5)$.
- 61.** Calcule $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, identificando primero la integral como el volumen del sólido.

 **62.** Dibuje el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y encuentre su volumen exacto. (Use su CAS para construir la gráfica, hallar las ecuaciones de las curvas límite de la región de integración y evaluar la integral doble.)

15.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

Suponga que se desea evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y) dA$, donde R es una de las regiones mostradas en la figura 1. En cualquier caso, la descripción de R en términos de coordenadas rectangulares es bastante complicada, pero R se describe fácilmente por medio de coordenadas polares.

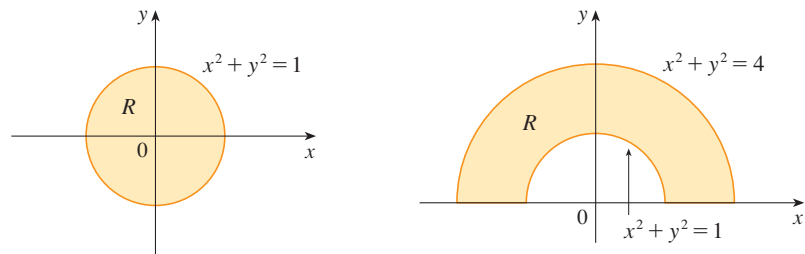


FIGURA 1

$$(a) R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$(b) R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

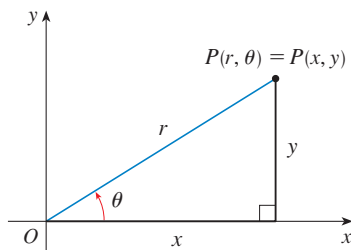


FIGURA 2

Recuerde de la figura 2 que las coordenadas polares (r, θ) de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

(Véase la sección 10.3.)

Las regiones de la figura 1 son casos especiales de un **rectángulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

que se muestra en la figura 3. A fin de calcular la integral doble $\iint_R f(x, y) dA$, donde R es un rectángulo polar, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de igual amplitud $\Delta r = (b - a)/m$ y se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de igual amplitud $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Entonces los círculos $r = r_i$ y los rayos $\theta = \theta_j$ dividen al rectángulo polar R en pequeños rectángulos polares mostrados en la figura 4.

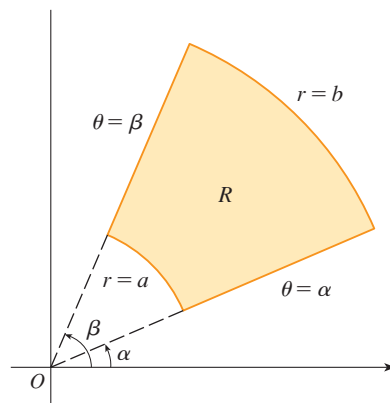
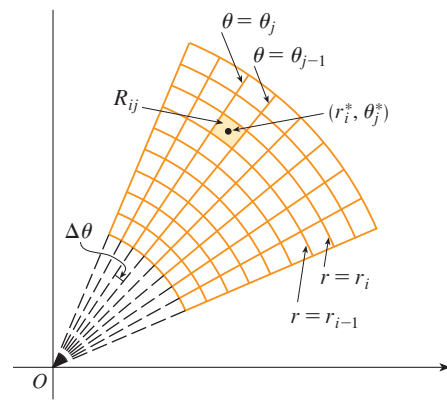


FIGURA 3 Rectángulo polar

FIGURA 4 División de R en subrectángulos

El “centro” del subrectángulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tiene coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Se calcula el área de R_{ij} usando el hecho de que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Al restar las áreas de dos sectores de esta clase, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se encuentra que el área de R_{ij} es

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned}$$

Aunque se ha definido la integral doble $\iint_R f(x, y) dA$ en términos de rectángulos ordinarios, se puede demostrar que, para funciones continuas f , se obtiene siempre la misma respuesta por medio de rectángulos polares. Las coordenadas rectangulares del centro de R_{ij} son $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, de modo que una suma de Riemann representativa es

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

Si se escribe $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \sin \theta)$, entonces la suma de Riemann en la ecuación 1 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta$$

que es una suma de Riemann para la integral doble

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

2 CAMBIO A COORDENADAS POLARES EN UNA INTEGRAL DOBLE Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

La fórmula en (2) dice que se convierte de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble si se escribe $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, al usar los límites de integración apropiados para r y θ , y reemplazar dA por $r dr d\theta$. **Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el lado derecho de la fórmula 2.** Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 5, donde el rectángulo polar “infinitesimal” se puede considerar como un rectángulo ordinario con dimensiones $r d\theta$ y dr , por lo tanto, tiene “área” $dA = r dr d\theta$.

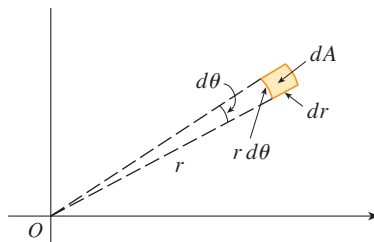


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La región R se puede describir como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Es la mitad de anillo mostrada en la figura 1(b), y en coordenadas polares está dada por $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. Por lo tanto, por la fórmula 2,

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta \right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \left[7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

■ Aquí se usa la identidad trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

Véase en la sección 7.2 una recomendación acerca de la integración de funciones trigonométricas.

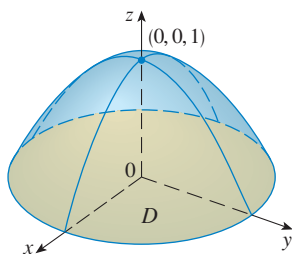


FIGURA 6

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN Si $z = 0$ en la ecuación del paraboloide, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el plano corta al paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, así que el sólido está debajo del paraboloide y arriba del disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ [véase las figuras 6 y 1(a)]. En coordenadas polares D está dada por $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Puesto que $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si se hubieran empleado coordenadas rectangulares en lugar de coordenadas polares, entonces se habría obtenido

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

que no es fácil evaluar, porque se requiere hallar la siguiente integral:

$$\int (1 - x^2)^{3/2} dx$$

□

Lo que se ha hecho hasta aquí se puede extender al tipo de región más complicada de la figura 7. Es similar a las regiones rectangulares tipo II consideradas en la sección 15.3. De hecho, al combinar la fórmula 2 de esta sección con la fórmula 15.3.5, se obtiene la siguiente fórmula.

3 Si f es continua en una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

En particular, si se toma $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ y $h_2(\theta) = h(\theta)$ en esta fórmula, se ve que el área de la región D acotada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y $r = h(\theta)$ es

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

y esto concuerda con la fórmula 10.4.3.

EJEMPLO 3 Use la integral doble para hallar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Del bosquejo de la curva en la figura 8 se ve que el pétalo está dado por la región

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Así que el área es

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

□

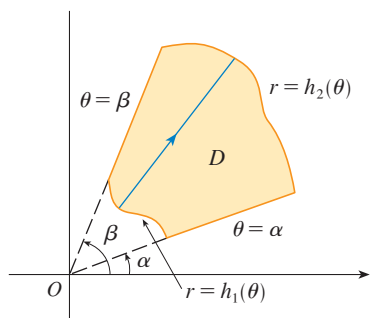


FIGURA 7

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

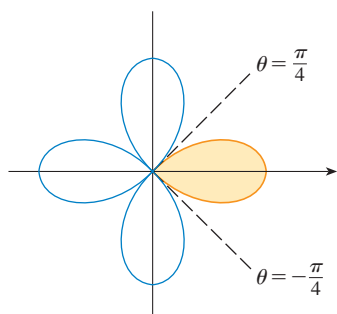


FIGURA 8

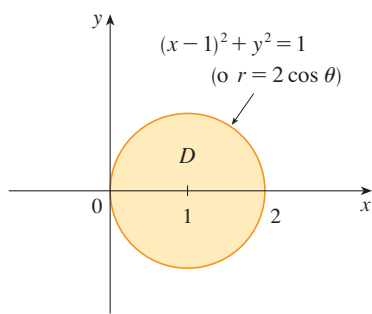


FIGURA 9

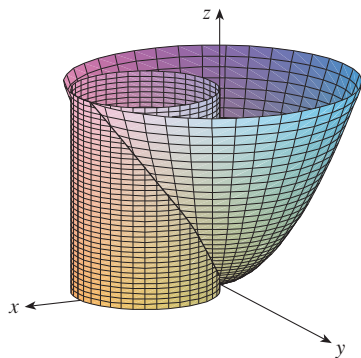


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloid $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN El sólido yace arriba del disco D cuyo círculo límite tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ o bien, después de completar el cuadrado,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(véanse las figuras 9 y 10). En coordenadas polares se tiene $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r \cos \theta$, por lo tanto el círculo límite se convierte en $r^2 = 2r \cos \theta$, o $r = 2 \cos \theta$. Así, el disco D está dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

y, por la fórmula 3, se tiene

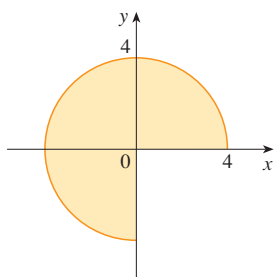
$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

□

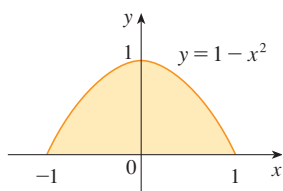
15.4 EJERCICIOS

1-4 Se muestra una región R . Decida si emplea coordenadas polares o rectangulares y escriba $\iint_R f(x, y) dA$ como una integral iterada, donde f es una función continua arbitraria en R .

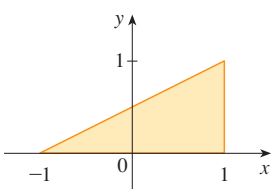
1.



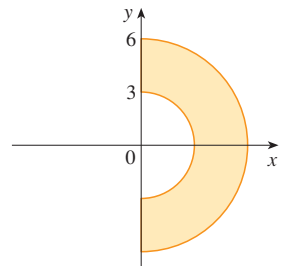
2.



3.



4.



5-6 Bosqueje la región cuya área está dada por la integral y evalúe la integral.

5. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_4^7 r dr d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r dr d\theta$

7-14 Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

7. $\iint_D xy dA$,

donde D es el disco con centro en el origen y radio 3.

8. $\iint_R (x + y) dA$, donde R es la región que yace a la izquierda del eje y entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

9. $\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA$, donde R es la región localizada arriba del eje x dentro del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

10. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA$, donde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y .

12. $\iint_R ye^x dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrado por el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

13. $\iint_R \arctan(y/x) dA$,
donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
14. $\iint_D x dA$, donde D es la región en el primer cuadrante localizada entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

15–18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

15. Un pétalo de la rosa $r = \cos \theta$.
16. La región encerrada por la curva $r = 4 + 3 \cos \theta$.
17. La región dentro de los círculos $r = \cos \theta$ y $r = \sin \theta$.
18. La región dentro del cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$

19–27 Use coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

19. Debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$.
20. Abajo del paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy
21. Encerrada por el hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 2$
22. Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
23. Una esfera de radio a .
24. Acotado por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante.
25. Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
26. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.
27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

28. (a) Se usa una broca cilíndrica con radio r_1 para hacer una perforación por el centro de una esfera de radio r_2 . Encuentre el volumen del sólido en forma de anillo que queda.
(b) Exprese el volumen del inciso (a) en términos de la altura h del anillo. Observe que el volumen depende sólo de h , no de r_1 o r_2 .

29–32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy dx$ 30. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y dx dy$
31. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y) dx dy$ 32. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

33. Una alberca es circular con un diámetro de 40 pies. La profundidad es constante a lo largo de las líneas este-oeste y se incrementa de forma lineal desde 2 pies en el extremo sur hasta 7 pies en el extremo norte. Determine el volumen del agua en la alberca.
34. Un aspersor agrícola distribuye agua en un patrón circular de radio 100 pies. Suministra agua a una profundidad de e^{-r} pies por hora a una distancia de r pies desde el aspersor.
(a) $0 < R \leq 100$ ¿Cuál es la cantidad total de agua suministrada por hora a la región dentro del círculo de radio R centrado en el rociador?
(b) Determine una expresión para la cantidad promedio de agua por hora por pie cuadrado suministrada a la región dentro del círculo de radio R .

35. Use las coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$$

en una integral doble. Después evalúe la integral doble.

36. (a) Se define la integral impropia (sobre el plano \mathbb{R}^2 completo)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA \end{aligned}$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi$$

(b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso (a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$$

(c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Mediante el cambio de variable $t = \sqrt{2}x$, demuestre que

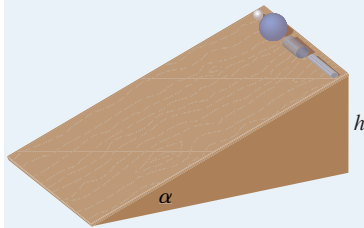
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(Éste es un resultado fundamental para probabilidad y estadística.)

37. Use el resultado del ejercicio 36 inciso (c) para evaluar las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad (b) \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

PROYECTO DE APLICACIÓN



CARRERA DE OBJETOS CIRCULARES

Suponga que una bola sólida (una canica), una bola hueca (una pelota de squash), un cilindro sólido (una barra de acero) y un cilindro hueco (una tubería de plomo) ruedan por una pendiente. ¿Cuál de estos objetos llega primero al fondo? (Haga una inferencia antes de proceder.)

Para contestar esta pregunta se considera una bola o cilindro con masa m , radio r y momento de inercia I (respecto al eje de rotación). Si la caída vertical es h , entonces la energía potencial en la parte superior es mgh . Suponga que el objeto llega al fondo con velocidad v y velocidad angular w , de modo que $v = \omega r$. La energía cinética en el fondo consiste en dos partes: $\frac{1}{2}mv^2$ de la traslación (al bajar la pendiente) y $\frac{1}{2}I\omega^2$ de la rotación. Si se supone que la pérdida de energía de la fricción de rodamiento es insignificante, entonces la conservación de energía da

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

1. Demuestre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \quad \text{donde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Si $y(t)$ es la distancia vertical recorrida en el tiempo t , entonces con el mismo razonamiento usado en el problema 1 se muestra que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ en cualquier tiempo t . Use este resultado para mostrar que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}} (\sin \alpha) \sqrt{y}$$

donde α es el ángulo de inclinación del plano.

3. Resuelva la ecuación diferencial del problema 2 y demuestre que el tiempo de viaje total es

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g \sin^2 \alpha}}$$

Esto demuestra que el objeto con el valor más pequeño de I^* gana la carrera.

4. Demuestre que $I^* = \frac{1}{2}$ para un cilindro sólido e $I^* = 1$ para un cilindro hueco.
5. Calcule I^* para una bola parcialmente hueca con radio interno a y radio externo r . Exprese su respuesta en términos de $b = a/r$. ¿Qué sucede cuando $a \rightarrow 0$ y cuando $a \rightarrow r$?
6. Demuestre que $I^* = \frac{2}{5}$ para una bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para una bola hueca. Así, los objetos terminan en el siguiente orden: bola sólida, cilindro sólido, bola hueca, cilindro hueco.

15.9 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES

En cálculo unidimensional se emplea con frecuencia un cambio de variable (una sustitución) para simplificar una integral. Si se invierten los papeles de x y u , se puede escribir la regla de sustitución (5.5.6) como

$$\boxed{1} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du$$

donde $x = g(u)$ y $a = g(c)$, $b = g(d)$. Otra forma de escribir la fórmula 1 es como sigue:

$$\boxed{2} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du$$

Un cambio de variables puede ser útil también en las integrales dobles. Ya se ha visto un ejemplo de esto: conversión a coordenadas polares. Las nuevas variables r y θ se relacionan con las variables impares x y y mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

y la fórmula de cambio de variables (15.4.2) se puede escribir como

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy .

De manera más general, se considera un cambio de variables que está dado por una **transformación** T del plano uv al plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

donde x y y se relacionan con u y v mediante las ecuaciones

$$\boxed{3} \quad x = g(u, v) \quad y = h(u, v)$$

o, como algunas veces se escribe,

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

Por lo común, se supone que T es una **transformación** C^1 , lo que significa que g y h tienen derivadas parciales continuas de primer orden.

Una transformación T es en realidad una función cuyo dominio y rango son subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Si $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, entonces el punto (x_1, y_1) se llama **imagen** del punto (u_1, v_1) . Si no hay dos puntos que tengan la misma imagen, T se llama **uno a uno**. En la figura 1 se muestra el efecto de una transformación T en una región S en el plano uv . T transforma a S en una región R en el plano xy llamada **imagen de S** , que consta de las imágenes de los puntos en S .

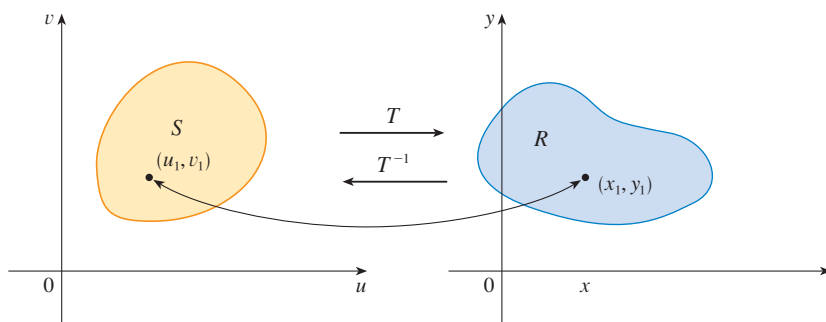


FIGURA 1

Si T es una transformación uno a uno, entonces tiene una **transformación inversa** T^{-1} del plano xy al plano uv y podría ser posible resolver las ecuaciones 3 para u y v en términos de x y y :

$$u = G(x, y) \quad v = H(x, y)$$

EJEMPLO 1 Una transformación se define por las ecuaciones

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

Encuentre la imagen del cuadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUCIÓN La transformación hace corresponder el límite de S con el límite de la imagen. Así que se comienza por hallar las imágenes de los lados de S . El primer lado, S_1 , está dado

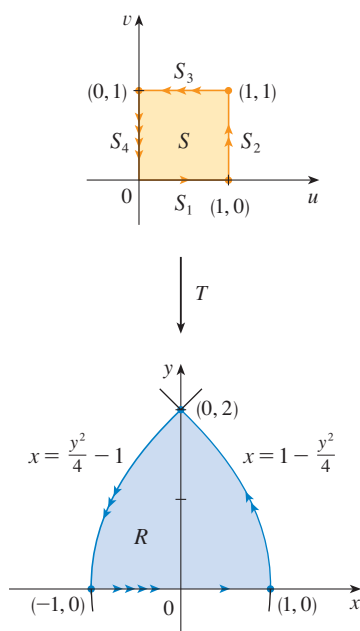


FIGURA 2

por $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$). (Véase fig. 2.) De las ecuaciones dadas se tiene $x = u^2$, $y = 0$ y, por lo tanto, $0 \leq x \leq 1$. Así, S_1 se hace corresponder con el segmento de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ en el plano xy . El segundo lado, S_2 , es $u = 1$ ($0 \leq v \leq 1$) y, si $u = 1$ en las ecuaciones dadas, se obtiene

$$x = 1 - v^2 \quad y = 2v$$

Al eliminar v se obtiene

$$\boxed{4} \quad x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad 0 \leq x \leq 1$$

que es la parte de una parábola. De manera similar, S_3 está dada por $v = 1$ ($0 \leq u \leq 1$), cuya imagen es el arco parabólico

$$\boxed{5} \quad x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad -1 \leq x \leq 0$$

Por último, S_4 está dado por $u = 0$ ($0 \leq v \leq 1$) cuya imagen es $x = -v^2$, $y = 0$, es decir, $-1 \leq x \leq 0$. (Observe que cuando se va alrededor del cuadrado en el sentido contrario a las manecillas del reloj, también se recorre la región parabólica en dirección contraria a las manecillas del reloj). La imagen de S es la región R (mostrada en la figura 2) acotada por el eje x y las parábolas dadas por las ecuaciones 4 y 5. \square

Ahora se verá cómo un cambio de variables afecta a la integral doble. Se empieza con un rectángulo pequeño S en el plano uv cuya esquina inferior izquierda es el punto (u_0, v_0) y cuyas dimensiones son Δu y Δv . (Véase fig. 3.)

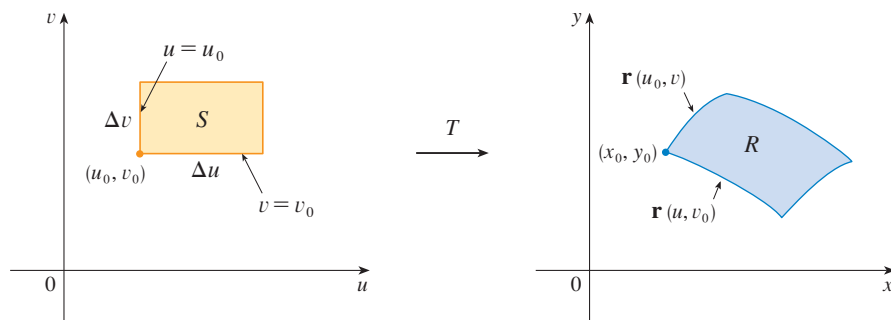


FIGURA 3

La imagen de S es una región R en el plano xy , uno de cuyos límites es $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. El vector

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

es el vector de posición de la imagen del punto (u, v) . La ecuación del lado inferior de S es $v = v_0$, cuya curva imagen está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. El vector tangente en (x_0, y_0) a esta curva imagen es

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}$$

De manera similar, el vector tangente en (x_0, y_0) a la curva imagen del lado izquierdo de S (a saber, $u = u_0$) es

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

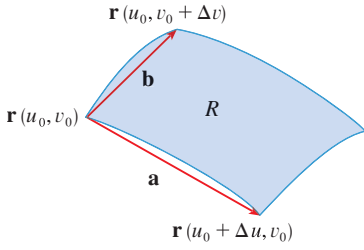


FIGURA 4

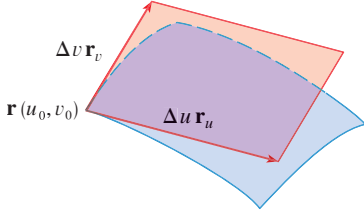


FIGURA 5

Se puede aproximar la región imagen $R = T(S)$ por el paralelogramo determinado por los vectores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados en la figura 4. Pero

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u$$

De manera similar,

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$$

Esto significa que se puede aproximar R mediante un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u \mathbf{r}_u$ y $\Delta v \mathbf{r}_v$. (Véase fig. 5.) Por lo tanto, se puede aproximar el área de R mediante el área de este paralelogramo, el cual, de la sección 12.4, es

$$\boxed{6} \quad |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

Al calcular el producto punto, se obtiene

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

El determinante que surge en este cálculo se llama *jacobiano* de la transformación y se le da una notación especial.

■ Recibe el nombre de jacobiano en honor al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero que usó estos determinantes especiales relacionados con derivadas parciales, Jacobi desarrolló con ellos un método para evaluar integrales múltiples.

7 DEFINICIÓN El **jacobiano** de la transformación T dado por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Con esta notación se puede usar la ecuación 6 para dar una aproximación del área ΔA de R :

$$\boxed{8} \quad \Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_0, v_0) .

A continuación se divide una región S en el plano uv en rectángulos S_{ij} y a las imágenes en el plano xy se les llama R_{ij} . (Véase fig. 6.)

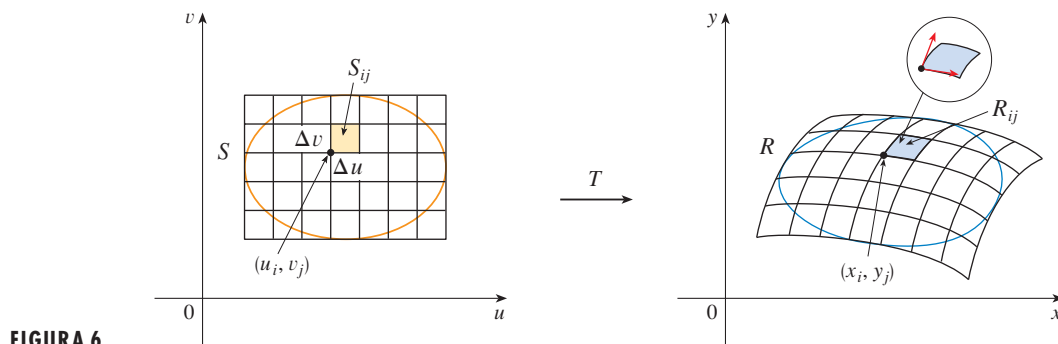


FIGURA 6

Al aplicar la aproximación (8) a cada R_{ij} , se aproxima la integral doble de f sobre R como sigue:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \, \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \, \Delta v \end{aligned}$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_i, v_j) . Observe que esta suma doble es una suma de Riemann para la integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

El argumento anterior hace pensar que el siguiente teorema es cierto. (En libros de cálculo avanzados se da una demostración completa.)

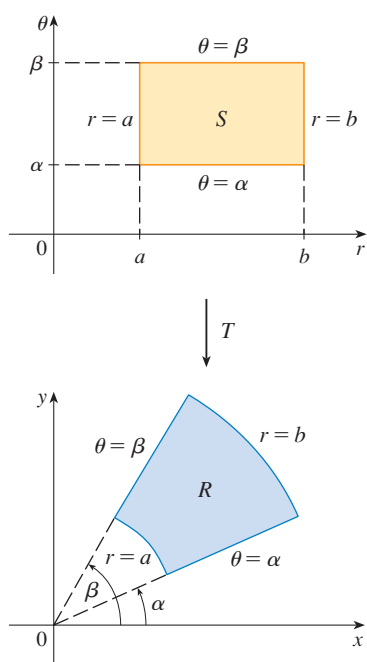
9 CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S en el plano uv con una región R en el plano xy . Suponga que f es continua en R , y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es uno a uno, excepto quizá en el límite de S . Entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

El Teorema 9 dice que se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v al expresar a x y y en términos de u y v y escribir

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

Observe la similitud entre el Teorema 9 y la fórmula unidimensional en la ecuación 2. En lugar de la derivada dx/du , se tiene el valor absoluto del jacobiano, es decir, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

**FIGURA 7**

Transformación en coordenadas polares

Como una primera ilustración del Teorema 9, se muestra que la fórmula para integración en coordenadas polares es sólo un caso especial. Aquí la transformación T del plano $r\theta$ al plano xy está dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta$$

y la representación geométrica de la transformación se muestra en la figura 7. T establece una correspondencia entre un rectángulo ordinario en el plano $r\theta$ y el rectángulo polar en el plano xy . El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

Así, el Teorema 9 da

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

que es lo mismo que la fórmula 15.4.2.

EJEMPLO 2 Use el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral $\iint_R y \, dA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$ y $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

SOLUCIÓN La región R se ilustra en la figura 2. En el ejemplo 1 se descubrió que $T(S) = R$, donde S es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De hecho, la razón para hacer el cambio de variables para evaluar la integral es que S es una región mucho más simple que R . Primero se necesita evaluar el jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Por lo tanto, por el Teorema 9,

$$\begin{aligned} \iint_R y \, dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2) \, du \, dv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3) \, du \, dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{4}u^4 v + \frac{1}{2}u^2 v^3 \right]_{u=0}^{u=1} dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) \, dv = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

□

NOTA El ejemplo 2 no fue un problema muy difícil de resolver, porque se tenía un cambio de variables adecuado. Si no se tuviera una transformación, entonces el primer paso es considerar un cambio de variables apropiado. Si (x, y) es difícil de integrar, entonces la forma de $f(x, y)$ puede hacer pensar en una transformación. Si la región de integración R es difícil, entonces la transformación debe ser elegida de modo que la región correspondiente en S en el plano uv tenga una descripción conveniente.

EJEMPLO 3 Evalúe la integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, -1)$.

SOLUCIÓN Puesto que no es fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, se hace un cambio de variables sugerido por la forma de esta función:

$$\boxed{10} \quad u = x + y \quad v = x - y$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv . El Teorema 9 habla acerca de una transformación T del plano uv al plano xy . Se obtiene al despejar x y y de las ecuaciones 10:

$$\boxed{11} \quad x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Para hallar la región S en el plano uv correspondiente a R , se nota que los lados de R están sobre las líneas

$$y = 0 \quad x - y = 2 \quad x = 0 \quad x - y = 1$$

y, de las ecuaciones 10 u 11, las líneas imagen en el plano uv son

$$u = v \quad v = 2 \quad u = -v \quad v = 1$$

Así, la región S es la región trapezoidal con vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ y $(-1, 1)$ mostrada en la figura 8. Puesto que

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$

El Teorema 9 da

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1})v dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$

□

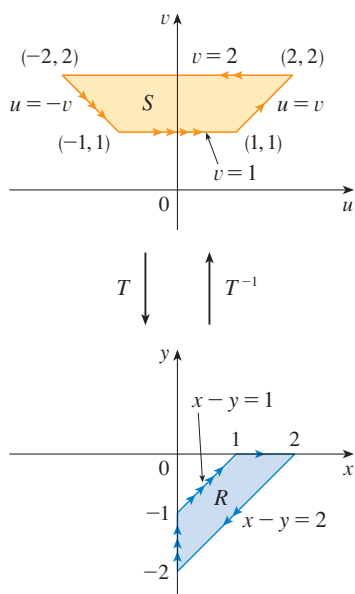


FIGURA 8