1	2	3	4	5	6	7	8

Calif.

Matemática Discreta I

Examen Final 18/12/2018

Apellido y Nombre: **DNI:** **Condición:**

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de celulares.
Si se usa un resultado teórico debe enunciarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 12 pts. en la parte teórica y 28 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. Sea m un número natural y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Demostrar que
   (a) (5 pts.) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
   (b) (5 pts.) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
2. (10 pts.) Si m, n son números naturales o cero, con $m \geq n$, denotemos por $\binom{m}{n}$ el número combinatorio. Probar que si $1 \leq n \leq m$ entonces $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$.
3. (10 pts.) Sea $G = (V, E)$ un grafo.
   (a) (3 pts.) Dado $v \in V$ un vértice, definir $\delta(v)$, la valencia de v.
   (b) (7 pts.) Probar la fórmula
   $$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#(E),$$
   la suma de las valencias de todos los vértices es igual al doble del número de aristas.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts.) Determinar para cada $n \in \mathbb{Z}$ el valor de $mcd(n^2 - 1, 21)$.
5. (a) (7 pts.) Sean a, b, c números enteros. Probar que si $a \mid c$, $b \mid c$ y $mcd(a, b) = 1$ entonces $ab \mid c$.
   (b) (7 pts.) Probar que el producto de 4 números consecutivos es divisible por 8.
6. (11 pts.) Enunciar y demostrar el criterio de divisibilidad por 11.
7. (15 pts.) Hallar todos los números enteros a que satisfacen $a^{62} \equiv 2 \pmod{7}$.
8. (a) (7 pts.) Determinar si los siguientes grafos son isomorfos

   (b) (8 pts.) Dar todos los árboles conexos de 4 vértices (salvo isomorfismos).

Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

1. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ hay que contienen al menos dos números impares?

2. (a) Calcular el resto de dividir 11^{146} por 37.

   (b) Encontrar todas las soluciones módulo 35 de la ecuación $14x \equiv 21 \pmod{35}$.

$\boxed{\text{Justificar todas las respuestas}}$