Práctico 0

Números complejos
Soluciones

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

   a) $(-1+i)(3-2i)$ *b)* $i^{131}-i^9+1$ *c)* $\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}$

   Solución:

   a) $(-1+i)(3-2i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = \boxed{-1+5i}$

   $|(-1+i)(3-2i)| = |-1+5i| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$

   $\overline{(-1+i)(3-2i)} = \overline{-1+5i} = \boxed{-1-5i}$

   b) $i^{131}-i^9+1 = i^{4\cdot 32+3}-i^{4\cdot 2+1}+1 = (i^4)^{32}\cdot i^3-(i^4)^2\cdot i^1+1 = i^3-i+1 = -i-i+1 = \boxed{1-2i}$

   $|i^{131}-i^9+1| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$

   $\overline{i^{131}-i^9+1} = \overline{1-2i} = \boxed{1+2i}$

   c) $$\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1-2i)+(1-i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{2Re(1-2i+i-2i^2)}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

   $$\left|\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}\right| = \left|\frac{6}{5}\right| = \boxed{\frac{6}{5}}$$

   $$\overline{\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}} = \overline{\frac{6}{5}} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

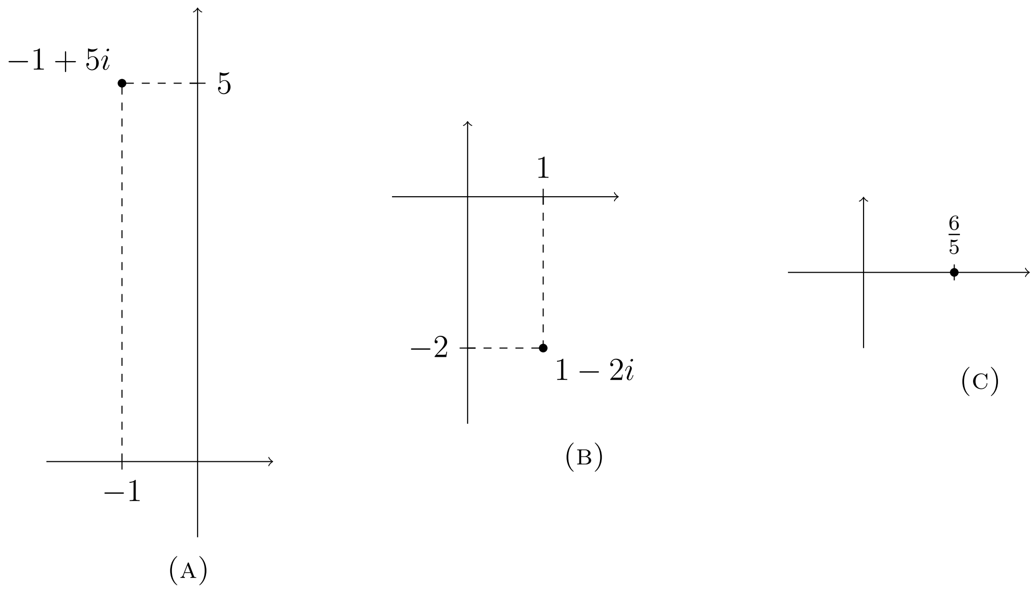

Figura 1. Ejercicio 1

2. Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$.

   SOLUCIÓN: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, separo las partes real e imaginaria de la ecuación y planteo un sistema de ecuaciones:

$$3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i \quad \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(3x + 2yi - xi + 5y) & = \mathrm{Re}(7 + 5i) \\ \mathrm{Im}(3x + 2yi - xi + 5y) & = \mathrm{Im}(7 + 5i) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x + 5y & = 7 \\ 2y - x & = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl|rl|l} 3(2y-5) + 5y & = 7 & 2 \cdot 2 - 5 & = x & \\ 6y - 15 + 5y & = 7 & -1 & = x & \boxed{\begin{array}{ll} y & = 2 \\ x & = -1 \end{array}} \\ 11y & = 22 & & & \\ y & = 2 & & & \end{array}$$

3. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

   SOLUCIÓN: Sabemos que el inverso de z se puede escribir $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Como por hipótesis tenemos que $|z| = 1$, resulta $z^{-1} = \overline{z}$. Luego:
   $z + z^{-1} = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ $\square$

4. Probar que si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

   SOLUCIÓN: Se iguala a 0 el polinomio:

$$0 = x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x + ai)(x - ai) \quad \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = ai \\ x_2 & = -ai \end{cases}$$

   Se tendrá $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a \neq 0$.