Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2018
FAMAF

1. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1 \vee a = b = -1$.
   b) Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b \vee a = -b$.
   c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.
   d) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b+c)$ y $a|(b-c)$.
   e) Si $a|b$ y $a|(b+c)$, entonces $a|c$.
   f) Si $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
2. Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:
   a) 0 es par y 1 es impar.
   b) Si b es par y $b \mid c$, entonces c es par.
   c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.
   d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 o -2.
   e) La suma de un número par y uno impar es impar.
   f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
3. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? En caso de ser ciertas demostrarlas y en caso contrario dar un contraejemplo.
   a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$.
   b) Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a \mid 0$.
   c) $a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$.
   d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
   e) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a+b) \mid c$.
   f) a, b, $c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.
   g) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b$ y $a \mid c$. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces $a \mid m \cdot b + n \cdot c$.
4. Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}_0$:
   a) $8^n - 1$ es múltiplo de 7.
   b) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
   c) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.
5. Decir si es verdadero o falso justificando:
   a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   c) $(n+1)(5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Hallar el cociente y el resto de la división de:

   a) 135 por 23,
   b) -135 por 23,
   c) 135 por -23,
   d) -135 por -23,
   e) 127 por 99,
   f) -98 por -73.

7. a) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.

   b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

8. Probar que $n(n+1)$ es par para todo n entero.

9. Determinar los enteros positivos n tales que $(n-2)(n^2-n-2)$ es divisible por $2n-1$.

10. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

11. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, n^2+2 no es divisible por 4.

12. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

13. Expresar en base 10 los siguientes enteros:

   a) $(1503)_6$
   b) $(1111)_2$
   c) $(1111)_{12}$
   d) $(123)_4$
   e) $(12121)_3$
   f) $(1111)_5$

14. Convertir

   a) $(133)_4$ a base 8,
   b) $(B38)_{16}$ a base 8,
   c) $(3506)_7$ a base 2,
   d) $(1541)_6$ a base 4.

15. Calcular las siguientes sumas y expresarlas en las bases originales:

   a) $(2234)_5 + (2310)_5$,
   b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.

16. Calcular los siguientes productos y expresarlos en las bases originales:

   a) $(223)_5 \times (31)_5$,
   b) $(10101)_2 \times (10011)_2$.

17. Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.

18. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35,
b) 11 y 15,
c) 12 y 52,
d) 12 y -52
e) 12 y 532.

19. Mostrar que 725 y 441 son coprimos y encontrar enteros m, n tales que $m \cdot 725 + n \cdot 441 = 1$.
20. Dado un entero a, $a \neq 0$, hallar $(0, a)$.
21. Calcular el máximo común divisor entre 606 y 108 y expresarlo como combinación lineal de esos números.
22. Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
23. *a*) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
    b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
24. Determinar todos los valores de n tales que $n^4 - n$ es un múltiplo de 4.
25. *a*) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
    b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.
26. Probar que 3 y 5 son números primos.
27. Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
28. Dar todos los números primos positivos menores que 100.
29. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.
30. Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.
31. Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?
32. Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números

    a) $a = 12$ y $b = 15$.
    b) $a = 11$ y $b = 13$.
    c) $a = 140$ y $b = 150$.
    d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$.
    e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

33. Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
34. *a*) Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a,b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.
    b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces $\dfrac{a}{(a,b)}$ y $\dfrac{b}{(a,b)}$ son coprimos.
35. Determinar, cuando existan, todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfacen:

a) $5x + 8y = 3$,	*c*) $24x + 14y = 7$,	*e*) $39x - 24y = 6$,
b) $7x + 11y = 10$,	*d*) $20x + 16y = 36$,	*f*) $1555x - 300y = 11$.

36. Probar que si para cada $j \in \mathbb{N}$, p_j es el j-ésimo primo positivo, entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1.$$