Práctico 2

Sistemas de ecuaciones

Objetivos.

- Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo @ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Encontrar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no nulo que sea ortogonal a los vectores
$$u = (4, -1, 1), \quad u = (2, 1, 1) \quad \text{y} \quad w = (1, 2, 1).$$
¿Hay un único vector con esta propiedad? ¿Cómo describiría a todos los vectores que satisfacen dicha propiedad?

(2) Dar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no nulo que pertenezca a la intersección de los planos
$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + z = 0\},$$
$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\},$$
$$P_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$
¿Hay un único vector con esta propiedad? ¿Cómo describiría a todos los vectores que satisfacen dicha propiedad?

(3) Sean $u = (4, 2, 1)$, $v = (-1, 1, 2)$ y $w = (1, 1, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Decidir si existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que
$$xu + yv + zw = (0, 0, 0).$$
Observación. Más adelante, en el contexto de espacios vectoriales, veremos que este problema nos pregunta sobre la (in)dependencia lineal de los vectores u, v y w.

Observación. Es de resaltar el hecho de que un mismo sistema de ecuaciones puede representar tres problemas distintos como en el caso de los ejercicios anteriores.

(4) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(5) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,

(a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema eventualmente no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema, cuando existan.

(7) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir paramétricamente el conjunto de soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

(a) $\begin{cases} -x-y+4z=0 \\ x+3y+8z=0 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x-z+2t=0 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x-y+4z=1 \\ x+3y+8z=3 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-3y+5z=1 \\ 2x-3y+z=3 \\ -y+3z=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x-z+2t=1 \\ -x+2y-z+2t=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

Observación. En estos ejemplos vemos que para describir el conjunto de soluciones de un sistema podemos necesitar distintas cantidades de parámetros, dependiendo del sistema. ¿Encuentra alguna relación entre la cantidad de parámetros, incógnitas y unos principales de la MERF asociada?

Cuando estudiemos espacios vectoriales veremos que la cantidad de parámteros se corresponde con lo que llamaremos *dimensión* del conjunto de soluciones.

Observación. Como se habrán dado cuenta los sistemas (a) y (d) tienen la misma matriz asociada ¿Encuentran alguna similaridad entre los conjuntos de soluciones de estos sistema? Lo mismo sucede con los pares de sistemas (b)-(e) y (c)-(f).

(8) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x-3y+5z=b_1 \\ 2x-3y+z=b_2 \\ -y+3z=b_3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-z+2t=b_1 \\ -x+2y-z+2t=b_2 \\ -x+y=b_3 \\ y-z+2t=b_4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -x-y+4z=b_1 \\ x+3y+8z=b_2 \\ x+2y+5z=b_3 \end{cases}$

Observación. En estos ejemplos vemos que para describir implícitamente el conjunto de vectores para los cuales el sistema tiene soluciones podemos necesitar distintas cantidades de ecuaciones, dependiendo del sistema.

También se habrán dado cuenta que la matriz asociada al sistema (a) es la misma de los sistemas (7b) y (7e) del ejercicio anterior, y la matriz asociada al sistema (b) es la misma de los sistemas (7c) y (7f). Idem para los sistemas (c), (7a) y (7d) ¿Encuentran alguna relación entre la cantidad de ecuaciones necesarias para describir implícitamente los conjuntos de este ejercicio y la cantidad de incógnitas y unos principales de la MERF asociada?

(9) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

(b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

(10) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

(a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

(b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones dependiendo de que $m > n$, $m = n$ ó $m < n$? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

(12) ⓐ Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n-1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

(b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

(c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n?

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(13) En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

(14) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes estudiando sus soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

(15) Probar que si dos sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas homogéneos tienen las mismas soluciones entonces son equivalentes.

(16) Demostrar que las siguientes matrices no son equivalentes por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(17) Dar todas las posibles matrices 2×2 escalón reducidas por filas.

(18) Como el ejercicio (7) pero con el sistema: $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

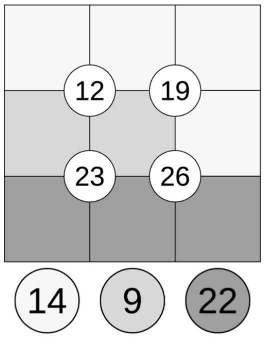
(19) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) o (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x+y=b_1 \\ 2x+2y=b_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=b_1 \\ 2x-2y=b_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x-y+z=b_1 \\ 3x+y+4z=b_2 \\ -x+3y+2z=b_3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-y+2z+w=b_1 \\ 2x+2y+z-w=b_2 \\ 3x+y+3z=b_3 \end{cases}$

(20) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar para cuales a, el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ admite solución. Para esos valores de a, calcular todas las soluciones del sistema.

(21) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



(22) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(23) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Ayudas

(12) El ejercicio (4) es un caso particular del item (a). Para el item (c) googlear.