7

MATEMÁTICA DISCRETA I
Examen Final - 05/02/2015

Apellido y Nombre: Ledesma Christian Condición: Regular

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de calculadoras ni celulares. Para aprobar deberá tener como mínimo 12 pts. en la parte teórica y 28 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (*10 pts.*) Enunciar y demostrar el principio de inducción.
2. (*10 pts.*) ~~Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, demostrar que a y b son coprimos si y sólo si $(a, b) = 1$.~~ Demostrar que existen infinitos numeros primos
3. (*10 pts.*) Dar la definición de grafo.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (*21 pts.*)
   a) Probar que
   $$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$
   b) Sea $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que
   $$u_n = 2^n + 1$$
   c) Sean a y b enteros. Probar que si existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = sa + tb$, entonces $1 = \mathrm{mcd}(a, b)$.
5. (*15 pts.*)
   a) Usando el método de la demostración de la ecuación lineal en congruencia, encontrar todas las soluciones de
   $$32\,x \equiv 5\,(47).$$
   Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 150$.
6. (*10 pts.*) ¿Cuantas aristas tiene un grafo que tiene cuatro vértices de valencia 3, dos vértices de valencia 5, dos de valencia 6 y uno de valencia 8?
7. (*24 pts.*)
   a) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse permutando los dígitos de 11122333450?
   b) De un grupo de 6 abogados, 7 ingenieros y 4 doctores, ¿cuántos comités pueden formarse? i) de 5 personas que contengan por lo menos dos personas de la misma especialidad; ii) de 5 personas que contenga al menos uno de cada especialidad.
   c) ¿Cuántas señales pueden enviarse con 5 banderas, 3 rojas y 2 blancas, dispuestas en un mástil?

Christian Ledesma

1) Principio de inducción

Sea H un subconjunto de $\mathbb{N}$, decimos que

i) $1 \in H$

ii) si $h \in H$, entonces $h+1 \in H$

por lo tanto $H = \mathbb{N}$

Otra forma de escribir el principio de inducción sería:

1) $P(1)$ verdadera

2) si para todo $K \in \mathbb{N}$, $P(K)$ es verdadera, implica $P(K+1)$ verdadera

se sigue que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

Demostración

Sea H un subconjunto de los naturales, y como cumple la condición 1) y 2) diremos que es inductivo. Por el teorema del principio de inducción $H = \mathbb{N}$ esto quiere decir que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. R $\square$

~~Dados a y b $\in \mathbb{Z}$ diremos que son coprimos (que no tienen factores primos en común) si y solo si MCD $(a,b) = 1$~~

~~Demostración~~

3) Definición de grafo: Un grafo es un conjunto de vértices V y aristas A en donde el conjunto A está formado por un par de vértices $\in P_2(V)$. B

Ejercicio 2 en hoja 4/4

4a) probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Demostración:
caso base

i) $\sum_{i=1}^{1} i(i+2) = 1(1+2) = 3 \quad \wedge \quad \frac{1(1+1)(2.1+7)}{6} = \frac{2.9}{6} = \frac{18}{6} = 3$ ✓

ii) caso inductivo

$$P(K): \underbrace{\sum_{i=1}^{K} i(i+2) = \frac{K(K+1)(2K+7)}{6}}_{HI} \Rightarrow P(K+1): \sum_{i=1}^{K+1} i(i+2) = \frac{(K+1).(K+2)(2K+9)}{6}$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{K+1} i(i+2) = \sum_{i=1}^{K} i(i+2) + (K+1).(K+3)$$

$$\text{por HI} = \frac{K(K+1)(2K+7)}{6} + (K+1).(K+3)$$

$$= \frac{(K^2+K)(2K+7)}{6} + K^2+4K+3$$

$$= \frac{2K^3+7K^2+2K^2+7K+6.(K^2+4K+3)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9K^2+7k+6K^2+24K+18}{6}$$

$$= \frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$$

$$= \frac{(K^2+2K+K+2)(2K+9)}{6}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)(2K+9)}{6}$$

Christian Ledesma

concluimos que

$$\sum_{i=1}^{K+1} i(i+2) = \frac{(K+1)(k+2)(2k+9)}{6} \quad \text{Verdadero}$$

por lo tanto $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ $\square$

4 b) sea $U_1 = 3$, $U_2 = 5$ y $U_n = 3U_{n-1} - 2U_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ probar que $U_n = 2^n + 1$

Demostracion

i) caso base

$P(1): U_1 = 2^1 + 1 = 3 \wedge P(2): U_2 = 2^2 + 1 = 5$

ii) paso inductivo

$P(K): U_K = 3U_{K-1} - 2U_{K-2} \Rightarrow U_K = 2^K + 1 \wedge U_{K-1} = 2^{K-1} + 1$ (HIF)

$P(K+1): U_{K+1} = 3U_K - 2U_{K-1} \Rightarrow U_{K+1} = 2^{K+1} + 1$

por lo tanto

$U_{K+1} = 3U_K - 2U_{K-1}$

por (HIF) $= 3.(2^K + 1) - 2.(2^{K-1} + 1)$

$= 3.2^K + 3 - 2.2^{K-1} - 2$

$= 3.2^K + 3 - 2^K - 2$

$= 3.2^K - 2^K + 2 + 3$

$= 2^K.(3-1) + 1$

$= 2^K.2 + 1$

$= 2^{K+1} + 1$

entonces $U_{K+1} = 3U_K - 2U_{K-1} \Rightarrow U_{K+1} = 2^{K+1} + 1$ verdadero $\square$

5 a) encontrar todas las soluciones

$32x \equiv 5 \ (47)$

① calculamos el MCD $(32,47)$

$32 = 47.0 + 32$

$47 = 32.1 + 15$

$32 = 15.2 + 2$

$15 = 2.7 + 1$

$2 = 1.2 + 0$

② Como el MCD $(32,47) = 1$ entonces calculamos la combinación lineal ($1 = a.s + n.t$ con $s, t \in \mathbb{Z}$)

por lo tanto

$1 = 15 + 2.(-7)$

$1 = 15 + (32 + 15.(-2)).(-7)$

$1 = 15 + 32.(-7) + 15.14$

$1 = 32.(-7) + 15.(1 + 14)$

$1 = 32.(-7) + (47 + 32.(-1)).(15)$

$1 = 32.(-7) + 47.(15) + 32.(-15)$

$1 = 32.(-15 - 7) + 47.(15)$

$1 = \underset{a}{32}.(\underset{s}{-22}) + \underset{n}{47}.(\underset{t}{15})$

Continua en la hoja 3/4

3/4

Christian Lederma

(3) metodo a)

multiplicamos por 5 en ambos miembros de la comb. lineal

$5 = 5.32.(-22) + 5.47.15$

luego tenemos $b.s = 5.(-22)$ y reemplazamos por x en la ecuacion

$22 \times 5 = 110$ $-110 + 141 = 31$

$47 \times 3 = 141$

$32.5.(-22) \equiv 5\ (47)$

entonces la solucion expresion general seria

$$x = 47.k + 31$$

y las soluciones de x tal que $0 \leq x < 150$ son:

31, 78 y 125 $\square$

B

metodo b)

multiplicamos por 5 en ambos miembros de la ecuacion en congruencia:

$(-22).32\ x \equiv 5.(-22)\ (47)$

$(-22).32 \equiv 1\ (47) \wedge 5.(-22) \equiv 31\ (47)$

por lo tanto

$$x \equiv 31\ (47)$$

por definicion

$$x \equiv 31\ (47) \Leftrightarrow 47 \mid 31 - x$$

$$\Leftrightarrow 31 - x = 47.k$$

$$\Leftrightarrow x = 47.k + 31$$

B

y todas las soluciones tal que $0 \leq x < 150$ son:

31, 78 y 125 o sea para $k = \{0, 1, 2\}$ $\square$

6) ¿cuantas aristas tiene un grafo que tien cuatro vertices de valencia tres, dos vertices de valencia 5 dos de valencia y uno de valencia 8?

Por el teorema

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|A|$$

entonces

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 3+3+3+3+5+5+6+6+8 = 42 = 2.21$$

por lo tanto el grafo tiene 21 aristas

7 a) ¿cuantos numeros diferentes pueden formarce permutando 11122 333 4 5 0?

tenemos

$|\{1,1,1\}| = 3$

$|\{2,2\}| = 2$

$|\{3,3,3\}| = 3$

$|\{4\}| = 1$

$|\{5\}| = 1$

$|\{0\}| = 1$

por lo tanto la permutacion es

$$\frac{(3+2+3+1+1+1)!}{3!\ 2!\ 3!} = \frac{11!}{3!\,2!\,3!}$$

repeticiones

7 c) ¿cuantas señales se pueden enviar con 5 banderas 3 rojas y 2 blancas dispuestas en un mastil?

Respuesta $5!$

Mal

es $\frac{5!}{3!\,2!}$

Christian Ledema

4/4

7 b) de un grupo de 6 abogados 7 ingenieros y 4 doctores, ¿cuantos comites pueden formarce?

i) de 5 personas que contengan por lo menos dos personas de la misma especialidad.

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{7+4}{3}+\binom{7}{2}\cdot\binom{6+4}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{6+7}{3}$$

ii) de 5 personas que contenga al menos 1 de cada especialidad

mal $\binom{6}{1}\binom{7}{1}\cdot\binom{4}{1}+\binom{5+6+3}{2}$ No, es [illegible] en vez de suma $6.7.4.\binom{5+6+3}{2}$

2) Colorario existen infinitos numeros primos

Demostración por absurdo

Supongamos que existe una cantidad finita de numeros primos que será: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$

Luego suponemos un numero N tal que $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ con $N>1$ observemos qué si $p_i | N$ y $p_i \neq p_j$ con $1 \leq j \leq k$ entonces tendriamos que p_i divide a algun p_j

$p_i | p_1 p_2 p_3 \cdots p_k \Rightarrow p_i | 1$ que un absurdo que surgio de suponer que existe una cantidad finita de primos

Se sigue que los primos son infinitos $\square$ R