8

Matemática Discreta I
Primer Parcial - 1 de octubre de 2014

Apellido y Nombre: Ledesma Christian

Nota: (a) No puede usar calculadora o celular. Justifique sus respuestas.

1. (*20 puntos*)
   (i) Enunciar y demostrar la fórmula del binomio de Newton.
   (ii) Definir conjunto inductivo y probar que la intersección arbitraria de conjuntos inductivos es inductivo.

2. (*30 puntos*) Demostrar las siguientes afirmaciones.
   (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface que $2^n \geq n^2$.
   (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$
   $$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
   (iii) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente por
   $$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$
   Demostrar que $a_n = 2^n + (-1)^n$ para todo $n \geq 0$.

3. (*30 puntos*) Dado un mazo de 52 cartas de poker (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K con 4 palos, diamantes rojos, corazones rojos, picas negras y tréboles negros), se reparten 5 cartas a un jugador. Calcular de cuantas formas un jugador puede recibir sus cartas si:
   (i) al menos una carta es roja;
   (ii) recibe al menos una Q pero ningún as;
   (iii) todas sus cartas son de trébol;

4. (*20 puntos*)
   (i) ¿Cuántos números distintos de 10 dígitos pueden hacerse con 5,5,5,2,2,7,7,4,6,8?
   (ii) ¿Cuántos números distintos de 10 dígitos pueden hacerse con 5,5,5,2,2,7,7,4,6,8 si se pide que los dígitos impares se alternen con los pares?

1(i)	1(ii)	2(i)	2(ii)	2(iii)	3(i)	3(ii)	3(iii)	4(i)	4(ii)
10	4	8	10	10	10	0	10	10	9

81

Christian Ledesma

1 i) Teorema binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

i) $P(1): (a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^i b^{1-i}$ verdadero

ii) $P(n): (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \Longrightarrow P(n+1) = (a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$

por lo tanto

$$(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n = a.(a+b)^n + b.(a+b)^n$$

por HI $= a.\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right) + b.\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right)$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}$$

$$* = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i}}_{\text{Tomamos este miembro y hacemos cambio de variable}} + \binom{n}{n} a^{i+1} + \binom{n}{0} b^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}$$

por cambio de variable $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i}$

$$* = \binom{n}{n} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{0} b^{n-i}$$

$$= \binom{n}{n} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a^i b^{n+1-i} \right) + \binom{n}{0} b^{n-i}$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{\left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right)}_{=\binom{n+1}{i}} a^i b^{n+1-i} + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} b^{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

B

1 ii) Conjunto inductivo: sea H un conjunto en $\mathbb{R}$ si $1 \in H$ y $K \in H$ implica que $K+1 \in H$ $\quad X = \bigcap_{i \in I} X_i$

2 i) para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface que $2^n \geq n^2$ para $n > 3$

por principio de inducción

i) $P(4): 2^4 \geq 4^2$

$16 \geq 16$ verdadero

bien
Hacer por separado

ii) $P(K): 2^K \geq K^2 \Longrightarrow 2^{K+1} \geq (K+1)^2$

por lo tanto podemos partir de la verdad absoluta

$K^2 \geq 2K+1$ → Falta justificar

sumamos K^2 a ambos miembros $\Rightarrow K^2 + K^2 \geq K^2 + 2K + 1$

por propiedad de potencia $\Rightarrow 2 . K^2 \geq K^2 + 2K + 1$

por HI $\quad 2 . 2^K \geq K^2 + 2K + 1$

por prop. de potencia $\Rightarrow 2^{K+1} \geq K^2 + 2K + 1$

$2^{K+1} \geq (K+1).(K+1)$

$2^{K+1} \geq (K+1)^2$

P

$2/3$

Christian Ledesma

2 ii) para todo $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

por principio de inducción

$$P(1): \sum_{j=1}^{1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

$$\frac{1}{2^1} = 2 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{verdadero}$$

Bien
Hacer por separado

Bien plant.

$$P(k): \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \Rightarrow P(k+1): \sum_{j=1}^{k+1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

por HI $= 2 - \dfrac{k+2}{2^k} + \dfrac{k+1}{2^{k+1}}$

$$= 2 + \frac{(-2).(k+2)+k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 + \frac{(-2k-4+k+1)}{2^{k+1}}$$

$$= 2 + \frac{(-k-3)}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

B

(2 iii) se $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente por

$a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para todo $n \geq 3$

Demostrar que $a_n = 2^n + (-1)^n$ para todo $n \geq 0$

por principio de inducción fuerte

i) $a_0 = 2^0 + (-1)^0$; $a_1 = 2^1 + (-1)^1$

$= 1 + 1$; $= 2 + (-1)$

$= 2$; $= 1$

} p(1)m Hach por Sep

ii) $P(k)$ y $P(k-1)$: $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} \Rightarrow a_k = 2^k + (-1)^k \wedge a_{k-1} = 2^{k-1} + (-1)^{k-1}$

$P(k+1)$: $a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1} \Rightarrow a_{k+1} = \underline{2^{k+1} + (-1)^{k+1}}$

por lo tanto

$P(k+1)$: $a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1}$

por HIF $= 2^k + (-1)^k + 2.(2^{k-1} + (-1)^{k-1})$

$= 2^k + (-1)^k + 2.2^{k-1} + 2.(-1)^{k-1}$

$= 2^k + (-1)^k + 2^k + 2.(-1)^{k-1}$

$= 2^k + 2^k + (-1)^k + 2.(-1)^{k-1}$

$= 2.2^k + (-1)^k + 2.(-1)^{k-1}$

$= 2^{k+1} + (-1)^k.(1-2)$

$= 2^{k+1} + (-1)^k.(-1)$

$= 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$

Christian Ledesma

3 i) al menos una carta es roja

para que el jugador pueda recibir almenos una carta roja podemos calcular el total de cartas o sea $\binom{52}{5}$ y le restamos aquellas que no son rojas osea el complemento $\binom{26}{5}$ en donde 26 = a las 13 cartas de picas negras y 13 treboles negros. Por lo tanto

$\binom{52}{5} - \binom{26}{5}$ ✓

3 ii) ~~podemos dividir el problema en 5 casos~~

las Q

Muel

el resto de las cartas sin las Q ni los as

$\binom{4}{1} * \binom{44}{4}$

tomo 4 cartas

tomo 1 Q

⟹ tenemos 52 cartas ~~m~~ sacamos todos los as que son 4 entonces 52 − 4 = 48 y contamos aparte las Q por lo tanto tambien las sacamos, entonces 48 − 4 = 44 y calculamos $\binom{4}{1} * \binom{44}{4}$

3 iii) $\binom{13}{5}$ 13 es el numero de cantidad de cartas que son trebol

✓

4 i) ¿ Cuantos numeros distintos de 10 digitos pueden hacerse con

$\underbrace{5,5,5}_{3}, \underbrace{2,2}_{2}, \underbrace{7,7}_{2}, \underbrace{4}_{1}, \underbrace{6}_{1}, \underbrace{8}_{1}$

$$\frac{(3+2+2+1+1+1)!}{3!\,2!\,2!} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$ ← repeticiones

4 ii) tenemos 2 casos

P I P I P I P I P I

I P I P I P I P I P

y tenemos 5 impares → 5 repetido 3 veces
→ 7 repetido 3 veces
2

y 5 pares con 2 repetido 2 veces

por lo tanto tenemos

$$\frac{5!}{2!} \times \frac{5!}{3!\,3!} + \frac{5!}{3!\,3!} \times \frac{5!}{2!}$$

Ejercicios resueltos del parcial

Probar por inducción las siguientes afirmaciones

i) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Para $n=1$

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \; ; \; 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

así $$\sum_{j=1}^{1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

Suponemos el resultado para $n=k$

es decir $$\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \; ;$$ queremos ver para $k+1$

$k+1)$ $$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

por hipótesis $\longleftarrow = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$

$$= 2 - \left(\frac{k+2}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}}\right) = 2 - \left(\frac{2k+4-(k+1)}{2^{k+1}}\right)$$

$$= 2 - \left(\frac{k+3}{2^{k+1}}\right) = 2 - \left(\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}\right)$$

ii sea a_n dada por: $a_1 = 1$; $a_2 = 9$; $a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2}$ $(n \geq 3)$

probar que $a_n = 5^n - 4^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dem

1° $P(1)$ $a_1 = 5^1 - 4^1 = 1$

2° $\underset{\text{HI}}{P(k)} \Rightarrow \underset{\text{Tesis}}{P(k+1)}$

HI $a_k = 5^k - 4^k$ $P(k+1) = a_{k+1} = 5^{k+1} - 4^{k+1}$

por def
- 1° $k+1 = 3 \leftrightarrow k \geq 2$
- 2° $k = 2$
- 3° $k+1 \geq 3$

$a_{k+1} = 9a_k - 20a_{k-1}$

Tenemos que usar induccion fuerte

2° $\underbrace{P(1), P(2), \ldots, P(k)}_{\text{HI}} \Rightarrow P(k+1)$

HI $a_1 = 5^1 - 4^1$ $n=1$ $a_k = 5^k - 4^k$ $n = k$

$a_{k-1} = 5^{k-1} - 4^{k-1}$ $n = k-1$

en (I) tenemos

$$a_{k+1} \overset{HI}{=} 9(5^k - 4^k) - 20(5^{k-1} - 4^{k-1})$$

$$= (4+5).(5^k - 4^k) - 4.5(5^{k-1} - 4^{k-1})$$

$$= \cancel{4.5^k} - 4^{k+1} + 5^{k+1} - \cancel{5.4^k} - \cancel{4.5^k} + \cancel{5.4^k}$$

$$= 5^{k+1} - 4^{k+1}$$

Finalmente $k+1 = 3$; $k = 2$; $a_2 = 5^2 - 4^2 = 9$ ✓

Ejercicios resueltos del parcial

Dadas las letras: A, A, A, P, P, I, I, Z, L, M

i ¿De cuantas maneras distintas se pueden ordenar?

ii ¿De cuantas maneras distintas se pueden ordenar si consonantes y vocales deben alternarse?

i Como tenemos 10 letras las posibles combinaciones son 10!, pero A se repite 3 veces, P se repite 2 veces al igual que I.

$3! \to A$

$2! \to P$ $$\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$

$2! \to I$

ii Numero de consonantes $5 \to$ P se repite 2 veces

Numero de vocales $5 \to$ A se repite 3 veces
$\searrow$ I se repite 2 veces

$$\frac{C}{V}\ \frac{V}{C}\ \frac{C}{V}\ \frac{V}{C}\ \frac{C}{V}\ \frac{V}{C}\ \frac{C}{V}\ \frac{V}{C}\ \frac{C}{V}\ \frac{V}{C}$$

$$\frac{5!}{2!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{5!}{2!}$$

se tiene un juego de 20 cartas formado por

- 10 cartas numeradas del 1 al 10
- 10 cartas con las letras de la A a la J

¿De cuantas maneras distintas se pueden repartir 5 cartas a un jugador de forma tal que:

- el jugador recibe mas letras que numeros?

$$3L \cdot 2N + 4L \cdot 1N + 5L$$

$$\binom{10}{3}\binom{10}{2} + \binom{10}{4}\binom{10}{1} + \binom{10}{5}$$

- el jugador recibe solo consonantes?

  7 consonantes $\binom{7}{5}$

- el jugador no recibe ningun numero impar?

  {10L, 5P} 15 posibles cartas $\binom{15}{5}$

- el jugador recibe al menos una vocal y ningun numero par?

  3 vocales, 7 consonantes y 5 impares

  $$\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{4} + \binom{3}{2}\cdot\binom{12}{3} + \binom{3}{3}\binom{12}{2}$$

50

Recursado de Matemática Discreta I
Segundo Parcial - 14 de noviembre de 2014

Apellido y Nombre: Ledesma Christian

Nota: No puede usar calculadora o celular. Justifique sus respuestas.

1. (*15 puntos*)
   (i) Enunciar la unicidad del Teorema fundamental de la aritmética.
   (ii) Sean $a, b, n, z \in \mathbb{N}$ tales que $az \equiv b \ (n)$, demostrar que $(a, n) \mid b$.
   (iii) Si $m \equiv n \ (a)$ $c \equiv b \ (a)$ demostrar que $mc \equiv nb \ (a)$.
2. (*10 puntos*) Demostrar que $(n^3, 7n+1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. (*30 puntos*) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique apropiadamente.
   (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumple que $a^2 \equiv b^2 \ (n)$ entonces $a \equiv b \ (n)$.
   (ii) $17^{16} \equiv 3 \ (10)$.
   (iii) La cifra de las decenas de 7^{50} es 7.
4. (*10 puntos*) Demostrar que $10 \mid 9^{2n} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. (*20 puntos*) Encontrar todos los x que satisfacen la ecuación
$$264\,x \equiv 2 \quad (175).$$
   Dar aquellas soluciones que además verifiquen que $-100 < x < 200$.
6. (*15 puntos*) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 9 divide a $4^n + 15n - 1$.

1(i)	1(ii)	1(iii)	2	3(i)	3(ii)	3(iii)	4	5	6
5	5	5	0	0	10	10	10	3	3

51

$\boxed{\text{vale 10}}$

Ledesma Christian

1) i) unicidad del Teorema fundamental de la aritmética

Si $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ entonces m se factoriza como producto de primos positivos de manera única salvo el orden. Si $m < -1$ entonces $-m \in \mathbb{N}$ y $m = -\prod_{j=1}^{r} p_j$ donde la factorización es única salvo en el orden de los factores.

ii) sean $a, b, n, z \in \mathbb{N}$ tales que $az \equiv b\ (n)$, demostrar que $(a,n) | b$

Dem: si z_0 es una solución, entonces toda solución es de la forma

$$z_0 + \frac{n}{(a,n)} \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \longleftarrow \text{solución general}$$

Observación: esto nos dice que existe una única solución $\tilde{z}$ tal que

$$0 \leq \tilde{z} < \frac{n}{(a,n)}$$

por lo tanto si $az \equiv b\ (n)$ tiene solución, entonces $\exists z \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$n | az - b \Rightarrow (a,n) | az - b \Rightarrow (a,n) | -b \text{ (pues } (a,n) | a \text{ y } \therefore (a,n) | az)$$
$$\Rightarrow (a,n) | b$$

Como $(a,n) | b \Rightarrow b = (a,n) \cdot h$, con $h \in \mathbb{Z}$

por otro lado, $\exists s, t \in \mathbb{Z} \mid (a,n) = a \cdot s + n \cdot t$

multiplicando por h se tiene que

$$\underbrace{(a,n) \cdot h}_{b} = \underbrace{a \cdot s \cdot h + n \cdot t \cdot h}_{\equiv\ a\underbrace{sh}_{z}\ (n)} \quad \equiv \longleftarrow \text{pues } nth \equiv 0\ (n)$$

$\therefore z_0 = s \cdot h$ es una solución

iii) $m \equiv n\ (a) \wedge c \equiv b\ (a) \Longrightarrow m.c \equiv n.b\ (a)$

$m \equiv n\ (a) \Rightarrow a \mid m-n \Rightarrow m-n = a.k_1 \Rightarrow m = n + ak_1$
$c \equiv b\ (a) \Rightarrow a \mid c-b \Rightarrow c-b = a.k_2 \Rightarrow c = b + ak_2$ $\Big\}(*)$

$m.c \equiv n.b\ (a) \quad a \mid m.c - n.b \Rightarrow m.c - n.b = a.k_3$

$(*) \Rightarrow m.c = (n + ak_1).(b + ak_2)$

$m.c = nb + nak_2 + ak_1b + ak_1ak_2$

$m.c = nb + a(nK_2 + K_1b + K_1K_2)$

$mc - n.b = a.\underbrace{(nK_2 + K_1b + K_1K_2)}_{K_3} \Longrightarrow n \mid mc - nb$

$\Rightarrow mc \equiv nb\ (a)$

2) demostrar que $(n^3, 7n+1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

podemos decir que $(n^3, 7n+1) = d$ con $d = 1$

si $d \neq 1 \Longrightarrow \exists p$ primo tal que $p \mid d \Rightarrow p \mid n^3$ y $p \mid 7n+1$

3)

i) para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumple que $a^2 \equiv b^2\ (n) \Longrightarrow a \equiv b\ (n)$

$a^2 \equiv b^2\ (n) \Longrightarrow a.a \equiv b.b\ (n)$

por ejercicio 1 iii sabemos que $m \equiv n\ (a) \wedge c \equiv b\ (a) \Longrightarrow mc \equiv nb\ (a)$

por lo tanto si decimos que $a \equiv b\ (n) \wedge a \equiv b\ (n) \Rightarrow a.a \equiv b.b\ (n)$

$\Rightarrow a^2 \equiv b^2\ (n)$

por esto se sigue que 3 i es <u>verdadero</u>

falso, esta es la recíproca

Ledesma Christian $\quad$ 2/3

3 ii) $17^{16} \equiv 3\ (10)$ <u>Falso</u> ya que $17^{16} \equiv 1\ (10)$

$17 \equiv 7\ (10)$

$17^2 \equiv 7^2 \equiv 9\ (10)$

$17^3 \equiv 17^2.7 \equiv 9.7 \equiv 63 \equiv 3\ (10)$

$17^4 \equiv (17^2)^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 1\ (10)$

$17^5 \equiv 17^4.17 \equiv 1.7 \equiv 7\ (10)$

$17^{16} \equiv (17^4)^4 \equiv 1^4 \equiv 1\ (10)$

3 iii) la cifra de la decena de 7^{50} es 7

$7 \equiv 7\ (100)$	7
$7^2 \equiv 49\ (100)$	49
$7^3 \equiv 49.7 \equiv 343 \equiv 43\ (100)$	43
$7^4 \equiv 7^3.7 \equiv 43.7 \equiv 301 \equiv 1\ (100)$	1
$7^5 \equiv 7^4.7 \equiv 1.7 \equiv 7\ (100)$	7
$7^6 \equiv 7^5.7 \equiv 7.7 \equiv 49\ (100)$	49 $\leftarrow 7^{50}$
$7^7 \equiv 7^6.7 \equiv 49.7 \equiv 343 \equiv 43\ (10)$	43
$7^{10} \equiv (7^5)^2 \equiv 7^2 \equiv 49\ (100)$	1
$7^{11} \equiv 7^{10}.7 \equiv 49.7 \equiv 43\ (100)$	7
$7^{50} \equiv (7^5)^{10} \equiv 7^{10} \equiv 49\ (100)$	49

3 iii es <u>Falso</u> ya que la cifra de la decena de 7^{50} es 4

4) probar que $9^{2n} - 1$ es multiplo de 10

eso quiere decir que $10 \mid 9^{2n} - 1$

por lo tanto $9^{2n} - 1 = 10.K$

$$9^{2n} = 10.K + 1 \quad (HI)$$

planteamos $(n+1)$

$$9^{2(n+1)} - 1 = 9^{2n+2} - 1$$
$$= 9^{2n} . 9^2 - 1$$
$$= 9^{2n} . 81 - 1$$
$$= 9^{2n} . (80 + 1) - 1$$
$$= 9^{2n} . 80 + 9^{2n} - 1$$
por HI $$= 9^{2n} . 80 + 10K \cancel{+1} \cancel{-1}$$
$$= 9^{2n} . 8 . 10 + 10K$$
$$= 10 . \underbrace{(9^{2n} . 8 + K)}_{K'}$$

6) probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ $9 \mid 4^n + 15n - 1$

eso quiere decir que $4^n + 15n - 1 = 9.k$

$$4^n = 9.k - 15n + 1 \quad (HI)$$

planteamos $(n+1)$

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4^n . 4 + 15n + 15 - 1$$
$$= 4^n . (3+1) + 15n + 15 - 1$$
$$= 4^n . 3 + 4^n + 15n + 15 + 1$$
$$= 4^n . 3 + 9k \cancel{- 15n} \cancel{+1} \cancel{+15n} + 15 \cancel{-1}$$
$$= 4^n . 3 + 9k + 15$$

k'

5) $\overset{a}{264}x \equiv \overset{b}{2} \ (\overset{n}{175})$

$(264, 175) = 1$

$264 = 175.1 + 89$

$175 = 89.1 + 86$

$89 = 86.1 + 3$

$86 = 3.25 + \boxed{1} \longrightarrow CL \Rightarrow 1 = a.r + n.s$

$25 = 1.25 + 0$

$1 = 86 + (-25).3$

$1 = 86 + (-25).(89 + (-1).86)$

$1 = 86 + (-25).89 + 25.86$

$1 = (-25).89 + 86.(1 + 25)$

$1 = (-25).89 + 86.26$

$1 = (-25).89 + (175 + (-1).89).26$

$1 = (-25).89 + 175.26 + (-26).89$

$1 = 89.(-25 + (-26)) + 175.26$

$1 = 89.(-51) + 175.26$

$1 = (264 + (-1).175).(-51) + 175.26$

$1 = 264.(-51) + 51.175 + 175.26$

$1 = 264.(-51) + 175(51 + 26)$

$1 = \overset{a}{264}.(\overset{r}{-51}) + \overset{n}{175}.(\overset{s}{77})$

$264x \equiv 2 \ (175)$

$(-51).264x \equiv 2.(-51) \ (175)$

$x \equiv 2.(-51) \ (175)$

$x \equiv -102 \equiv 73 \ (175)$

$x \equiv 73 \ (175)$

$\Rightarrow 175 \mid x - 73$

$\Rightarrow x - 73 = 175.k$

$x = 175.k + 73$

con $k = 0$

Ejercicios del segundo parcial

Asumimos que $(n^3, 7n+1) = d$ y $d \neq 1$

$\Rightarrow \exists p$ primo tq $p \mid d$

por lo tanto $d \mid n^3$, $d \mid 7n+1 \Longrightarrow p \mid n^3$ y $p \mid 7n+1$

$\Longrightarrow p \mid n \Rightarrow p \mid 7n$

$\Longrightarrow p \mid 1$ (abs)

$\therefore d = 1$

$a^2 \equiv b^2 \ (n) \not\Rightarrow a \equiv b \ (n)$

ya que $(-1)^2 \equiv (1)^2 \ (3) \Longrightarrow -1 \not\equiv 1 \ (3)$

$7^{50} \equiv ? \ (100)$

$7^2 \equiv 49 \ (100)$

$7^3 \equiv 43 \ (100)$

$7^4 \equiv 1 \ (100)$

$(7^4)^{12} \equiv 1^{12} \equiv 1 \ (100)$

$7^{48} \equiv (7^{12})^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \ (100)$

$7^{49} \equiv 7^{48} . 7 \equiv 1 . 7 \equiv 7 \ (100)$

$7^{50} \equiv 7^{49} . 7 \equiv 7 . 7 \equiv 49 \ (100)$

Demostrar $10 \mid 9^{2n} - 1$

$9^2 \equiv 81 \equiv 1 \ (10)$

$\Longrightarrow 9^{2n} \equiv 1^n \equiv 1 \ (10)$

$\Longrightarrow 10 \ \ 9^{2n} - 1 \ \square$

$9 | 4^n + 15n - 1$ Demostrar

por induccion en n asumamos que vale para n

es decir

$9 | 4^n + 15n - 1$

$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 . 4^n + 15n + 15 - 1$

$= 4.(4^n + 15n - 1) + 15n - 60n + 14 + 4$

por HI $= 4.9.K - 45n + 18$

como $9 | 4.9.K \wedge 9 | 45n \wedge 9 | 18$

$\Rightarrow 9 | 4^{n+1} + 15(n+1) - 1$