Álgebra/Álgebra II
Clase 10 - Álgebra de Matrices 2

FAMAF / UNC

20 de abril de 2021

En esta clase introduciremos y presentaremos

- Las matrices invertibles.
- Las matrices elementales

El tema de esta clase está contenido en las secciones 2.6 y 2.7 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

Axiomas de $\mathbb{R}$	Álgebra de matrices
suma conmutativa	✓
suma asociativa	✓
elemento neutro $+$	✓
opuesto	✓
multiplicación conmutativa	NO
multiplicación asociativa	✓
elemento neutro $\cdot$	✓
inverso	?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots \\ -a_{n1} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.7.1

elemento neutro.

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversa de A si $BA = AB = \mathrm{Id}_n$.

En ese caso, diremos que A es invertible.

Ejemplo $(\star)$

$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ es inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pues

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{3}{7} + \frac{1}{7} & 2\frac{1}{7} - \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} - 3\frac{1}{7} & \frac{1}{7} + 3\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tarea: verificar la multiplicación $B \cdot A = \mathrm{Id}$

Definición 2.7.1

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversa de A si $BA = AB = \mathrm{Id}_n$.

En ese caso, diremos que A es invertible.

No toda matriz en invertible

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Demostración: supongamos que A es invertible con inversa $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{A \text{ NO ES INVER}}$$

Observación

Para decidir si una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene inversa o no y calcularla podemos aplicar el siguiente método.

1. Armamos la matriz ampliada ("grande")
$$(A|\operatorname{Id}_n)$$
2. Aplicamos operaciones elementales por filas hasta obtener una matriz de la forma
$$(B|Z)$$
donde B es MERF y Z es una matriz cuadrada $n \times n$.
3. Si $B = \operatorname{Id}$, entonces A es invertible y $A^{-1} = Z$.
4. Si $B \neq \operatorname{Id}$, entonces A no es invertible.

Observación

Para demostrar las dos últimas afirmaciones debemos trabajar un poco...

A   Id

$$[A|\,\mathrm{Id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-7F_2]{F_1+3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-3F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

es la inversa de A porq

MERF Id

Proposición 2.7.2

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Si $B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ satisfacen que $BA = \mathrm{Id}_n$ y $AC = \mathrm{Id}_n$, entonces $B = C$.
2. si A invertible la inversa es única.

Demostración:

(1) $\underbrace{B = B \cdot Id = B(AC) \overset{\text{ASOC}}{=} (BA)C = Id \cdot C = C}_{=}$

(2) Si B y C son dos inversas de A

$\Rightarrow BA = Id = AC$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} B = C. \Rightarrow$ LA INVERSA ES ÚNICA.

Gracias a la proposición anterior podemos introducir la siguiente definición y notación.

Definición 2.7.3

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible. A la única matriz inversa de A la llamamos la matriz inversa de A y la denotamos A^{-1}.

Ejemplo $(\star)$

Antes vimos que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible con inversa. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sim\sim & & \\ & \sim\sim & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \sim\sim & & & \\ & & \sim\sim & & & \end{pmatrix} \neq \mathrm{Id}$

Definición 2.7.2

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible. A la única matriz inversa de A la llamamos la matriz inversa de A y la denotamos A^{-1}.

Ejemplo

Id_n es invertible con $(\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$ pues $\mathrm{Id}_n \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n$

Observación

La matriz Id_n es como el 1 de los números reales.
La matriz A^{-1} es como el inverso de un ńumero real no nulo.

LAS MATRICES PUEDEN TENER CEROS.

Si A tiene una fila nula $\Rightarrow$ NO ES invertible

$(A|\mathrm{Id}) \longrightarrow (B|A)$ B es MERF con una fila nula $B \neq \mathrm{Id}$

Teorema 2.7.4

Sean A y B matrices $n \times n$.

1. Si A invertible, entonces A^{-1} es invertible y su inversa es A, es decir $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración:

1. Debemos comprobar que A satisface la propiedad de ser la inversa de A^{-1}. Es decir, que muliplicar a ambos lados nos da la indentidad. Esto será directo.
2. Debemos comprobar que multiplicar a AB por $B^{-1}A^{-1}$ (tanto a derecha como a izquierda) nos da la identidad. Aquí deberemos usar la asociatividad de la multiplicación.

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = Id = (B^{-1}A^{-1})(AB)$

La verficación del item 1:

Por hipotesis $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n \quad \Rightarrow \quad$ la inversa a izquierda de A^{-1} es A,

Por hipotesis $A^{-1}A = \mathrm{Id}_n \quad \Rightarrow \quad$ la inversa a derecha de A^{-1} es A,

Verificación del item 2:

$$(B^{-1}A^{-1})AB \underset{\text{Asoc}}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,\mathrm{Id}_n\,B = B^{-1}B = \mathrm{Id}_n,$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,\mathrm{Id}_n\,A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{Id}_n\,.$$

$\square$

Observación

Haciendo inducción, se puede ver que si $A_1, \ldots, A_k$ son invertibles, entonces el producto $A_1 \cdots A_k$ es invertible y su inversa es

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Observación

La suma de matrices invertibles no es necesariamente invertible (Ejercicio 9 del Práctico 3)

Definición 2.6.1

Una matriz $n \times n$ se dice **elemental** si fue obtenida por medio de una única operación elemental a partir de la matriz identidad Id_n

Como hay tres tipos de operaciones elementales, hay tres tipos de matrices elementales.

ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las matrices elementales 2×2 son:

1. Hay dos operaciones del primer tipo. Multiplicar por $c \neq 0$ la primera fila y multiplicar $c \neq 0$. Las matrices elementales correspondiente son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{cF_1} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \xleftarrow{cF_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Del 2do tipo también hay dos. Sumar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por c y sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + cF_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \xleftarrow{F_1 + cF_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Finalmente, la única permutación que podemos hacer es intercambiar la fila 1 por la fila 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A continuación vemos como lucen las matrices elementales de tamaño arbitrario.

El primer tipo de matriz elemental se obtiene tras multiplicar la fila k de Id_n por un número real $c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{cF_k} E = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Es una matriz diagonal con todos 1 excepto una c en el lugar k, k. Las entradas de E se pueden definir así

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq k \\ c & \text{si } i = j = k \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El segundo tipo de matriz elemental se obtiene tras sumar a la fila r de Id_n la fila s multpilicada por t:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r+tF_s} E = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & s & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 1 & & t & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Es la matriz identidad con una t en el lugar r, s.
Las entradas de E se pueden definir así

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ t & \text{si } i = r \text{ y } j = s \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Aquí $r < s$. Si $r > s$, la t aparecerá debajo de la diagonal principal.

El tercer tipo de matriz elemental se obtiene tras intercambiar las filas r y s de Id_n:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} E = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} & & & r & \end{array} & \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ s \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ s \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} & s & & & \end{array} & \end{array}$$

Las entradas de E se pueden definir así

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } r \neq i = j \neq s \text{ ó } i = r, j = s \text{ ó } i = s, j = r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Teorema 2.6.2

Sea e una operación elemental por fila y $E = e(\mathrm{Id}_m)$ la matriz elemental que se obtiene tras aplicar e a la matriz Id_m.
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

$$e(A) = EA,$$

es decir, la matriz que se obtiene tras aplicarle e a A es igual a la multiplicación EA.

Ejemplo 2×2

Veamos el teorema en el caso particular en que e es la operación "Intercambiar la fila 1 y la fila 2" y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{e\,:\,F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = e(\mathrm{Id})$$

$$e(A) = EA \longrightarrow \text{VERIFICACIÓN}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e(A)$$

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Demostración del Teorema 2.6.2

La prueba se divide en 3 casos, uno por cada tipo de operación elemental.

Si e es multiplicar la fila k por un número real $c \neq 0$, entonces ya vimos que $e(\mathrm{Id}_m)$ es una matriz diagonal con todos 1 excepto una c en el lugar k, k.

Por [Observación 2.5.1], multiplicar por una matriz diagonal a izquierda es multiplicar cada fila por el elemento correspondiente de la diagonal.
En este caso, multiplicamos todas las filas por 1 excepto la fila k por c.
Como queríamos.

OPERACIÓN: $\xrightarrow{c \cdot F_k}$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ ca_{k1} & \cdots & ca_{kj} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = e(A)$$

Demostración del Teorema 2.6.2

La prueba para las otras 2 operaciones usa las fórmulas de la multiplicación y de las entradas de las matrices elementales.
Hay que manipular las sumas y los subíndices. No vale la pena hacerlo ahora. Si alguien no sabe que hacer durante esta larga cuarentena le recomiendo hacerlo :)
En el libro esta hecha la prueba para las matrices elementales 2×2.

Recordemos que decimos que B es equivalente por filas a A si B se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales por fila.

Coroloario 2.6.3

Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces

- B equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$ donde P es producto de matrices elementales.

Más aún, si $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son operaciones elementales por fila tales que

$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_k} B$

$$B = e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots)).$$

Entonces $E_i = e_i(\mathrm{Id})$ son matrices elementales y

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A.$$

Demostración ($\Rightarrow$)

Si B equivalente por filas a A existen operaciones elementales $e_1, \ldots, e_k$ tales que

B

$$A \xrightarrow{e_1} e_1(A) \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}} e_{k-1}(\cdots e_1(A) \cdots) \xrightarrow{e_k} e_k(e_{k-1}(\cdots e_1(A) \cdots))$$

Escrito de otra forma

$$\begin{aligned}
B &= e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots)) \\
&= e_k(\mathrm{Id}) \cdot e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots) \\
&= e_k(\mathrm{Id}) \cdot e_{k-1}(\mathrm{Id}) \cdots (\cdots(e_1(A))\cdots) \\
&\vdots \\
&= E_k E_{k-1} \cdots E_1 A
\end{aligned}$$

donde $E_k = e_k(\mathrm{Id})$, $E_{k-1} = e_{k-1}(\mathrm{Id})$, ... y $E_1 = e_1(\mathrm{Id})$.

Demostración ($\Leftarrow$) Si $B = PA$, con $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ donde $E_i = e_i(\mathrm{Id}_m)$ es una matriz elemental, entonces (razonamiento similar al anterior)

$$\begin{aligned} B = PA &= E_k E_{k-1} \cdots E_1 A \\ &= E_k E_{k-1} \cdots e_1(A) \\ &\vdots \\ &= E_k \cdot e_{k-1}(\cdots (e_1(A)) \cdots) \\ &= e_k(e_{k-1}(\cdots (e_1(A)) \cdots)). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.7.5

Las matrices elementales son invertibles y la inversa es una matriz elemental

Demostración: Sea $E = e(\mathrm{Id})$ la matriz elemental correspondiente a la operación elemental e. Por Teorema 2.3.3, existe una operación elemental e' inversa a e. Entonces

$$A \underset{e'}{\overset{e}{\rightleftarrows}} B$$

Teorema
OP ELEM = MULT MATRIZ ELEM

$$\begin{aligned} e'(e(\mathrm{Id})) &= \mathrm{Id} \\ \underbrace{e'(\mathrm{Id})}_{E'}\underbrace{(e(\mathrm{Id}))}_{E} &= \mathrm{Id} \\ \boxed{E'E = \mathrm{Id}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Id} \underset{e'}{\overset{e}{\rightleftarrows}} E$$

y también al revés

$$\begin{aligned} e(e'(\mathrm{Id})) &= \mathrm{Id} \\ e(\mathrm{Id})(e'(\mathrm{Id})) &= \mathrm{Id} \\ \boxed{EE' = \mathrm{Id}} \end{aligned}$$

$$E^{-1} = E'$$

Por lo tanto E es invertible y su inversa también es una matriz elemental.

$\square$

1. Objetivos
2. Matrices invertibles
   - Definición
   - Propiedades
3. Matrices elementales
   - Definición
   - Propiedades
   - Las matrices elementales son invertibles
4. ¿Es A invertible?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 = e} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\tfrac{1}{2} F_1 = e'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} F_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E'$$

$$E E' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Teorema 2.7.6

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) A es invertible,

ii) A es equivalente por filas a Id_n,

iii) A es producto de matrices elementales.

Demostración: queremos demostra que *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*) para lo cual es suficiente probar las siguietes implicancias

$$\begin{tikzcd} i) \arrow[rr, Rightarrow] & & ii) \arrow[dl, Rightarrow] \\ & iii) \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

pues a partir de estas podemos deducir todos los "$\Leftrightarrow$". Por ejemplo, "*iii*) $\Rightarrow$ *ii*)" = "*iii*) $\Rightarrow$ *i*) $\Rightarrow$ *ii*)"

$A \xrightarrow{e_1} \cdots\cdots \xrightarrow{e_k} R = \text{MERF}$

A es inv

i) $\Rightarrow$ *ii*) Sea R una MERF que se obtiene de A.

- Existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tal que $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$ ~~$E_1, \ldots, E_k A = R$.~~
- Como $E_1, \ldots, E_k$, A invertibles $\Rightarrow$ ~~$E_1, \ldots, E_k A = R$ invertible~~. es invertible
- R es MERF e invertible $\Rightarrow$ $\boxed{R = \mathrm{Id}_n}$. Pues, si no fuera Id tendría una fila nula y una matriz con fila nula no puede ser invertible dado que al multiplicarla por cualquier otra matriz obtendremos nuevamente una fila nula.
- A es equivalente por filas a $R = I_n$ Id_n

$A \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_r} Id$

ii) $\Rightarrow$ *iii)*

teo

- A es equivalente por filas a Id_n $\Rightarrow$ existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tal que $E_1 \cdots E_k A = \mathrm{Id}_n$.
- Sean $F_1, \ldots, F_k$ las inversas de $E_1, \ldots, E_k$ respectivamente. Entonces

$F_1^{-1} = E_1$

mult $\quad F_k - F_1$

$$\boxed{E_1 \cdots E_k A = \mathrm{Id}_n}$$
$$\underbrace{F_k \cdots F_1 E_1 \cdots E_k}_{Id} A = F_k \cdots F_1 \, \mathrm{Id}_n$$
$$\boxed{A = F_k \cdots F_1}$$

iii)

iii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $A = E_1 E_2, \ldots, E_k$ donde E_i es una matriz elemental $(i = 1, \ldots, k)$. Como cada E_i es invertible, el producto de ellos es invertible, por lo tanto A es invertible. $\square$

Recordemos que

Corolario 2.6.3

Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces

- B equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$ donde P es producto de matrices elementales.

Pegando los teoremas anteriores podemos reescribir el corolario de la siguiente manera

Corolario 2.7.7

Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces

- B equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$ donde P es una matriz invertible.

$$A \xrightarrow{e_k} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}} \cdots \xrightarrow{e_1} \mathrm{Id}$$

Corolario 2.7.8

Sea A matriz $n \times n$. Sean $e_1, \ldots, e_k$ operaciones elementales por filas tal que

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(A))\cdots)) = \mathrm{Id}_n \, .$$

Entonces, A invertible y

$$\mathrm{Id} \xrightarrow{e_k} \cdots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(\mathrm{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}.$$

Demostración: A es invertible porque la hipotesis dice que A es equivalente por filas a Id.
Si escribimos la hipotesis usando las correspondientes matrices elementales tenemos que $(E_1 \cdots E_k)A = \mathrm{Id}$.
Como la inversa es la única con esta propiedades, resulta que

$$A^{-1} = E_1 \cdots E_k = e_1(e_2(\cdots(e_k(I_n))\cdots)).$$

$$(A \mid I) \xrightarrow{e_k} \cdots \xrightarrow{e_1} (B \mid E)$$

Observación

El Teorema 2.7.6 y el Corolario 2.7.8 demuestran las afirmaciones 3 y 4 del método enunciado al principio para encontrar la inversa.