Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2018

Guía de Ejercicios N°6

Derivadas - 2° Parte

1. Haga corresponder el gráfico de cada función en (a)-(d) de la Figura 1 con el de su derivada en (i)-(iv). Justifique la correspondencia. Discuta lo que ve, prestando especial atención a lo que le pasa a $f(x)$ cuando $f'(x)$ es positiva y cuando $f'(x)$ es negativa. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando $f'(x)$ se acerca a 0? ¿Está de acuerdo con la siguiente afirmación? *Mientras más grande es* $|f'(x)|$*, más rápido cambia* $f(x)$.

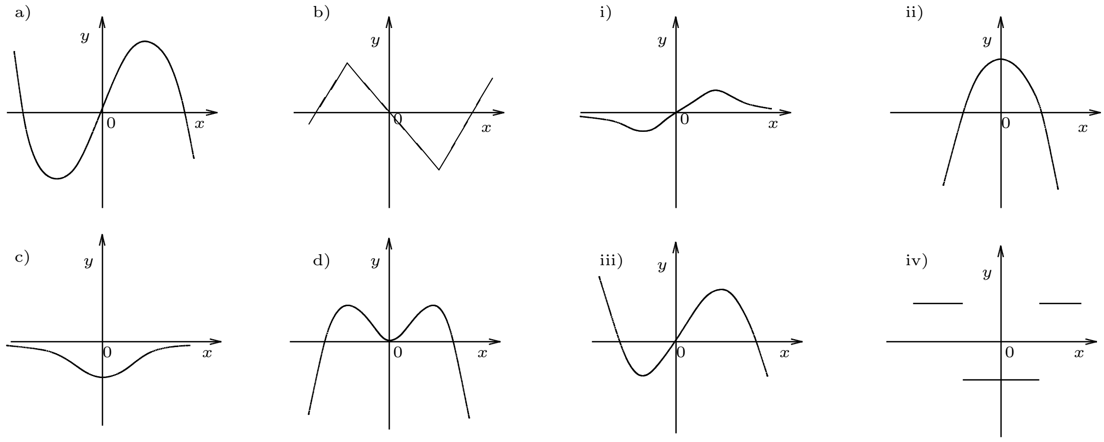

Figura 1

2. La Figura 2 muestra la gráfica de la función g en el intervalo $[-4, 7]$.

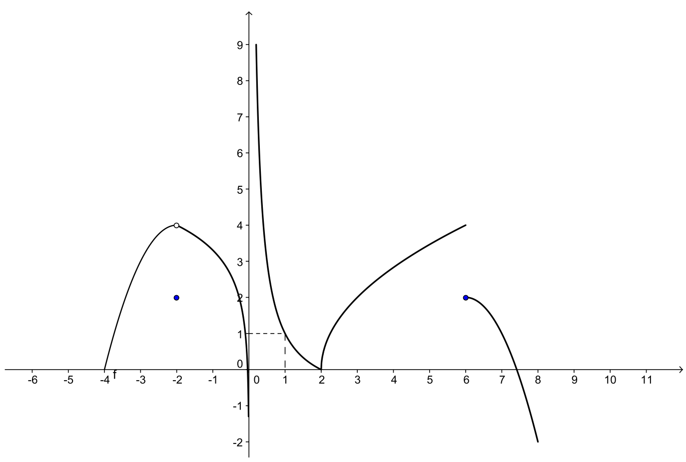

Figura 2: Función g

a) ¿Qué puntos están excluídos del dominio de g?

b) ¿En qué puntos del dominio g es discontinua?

c) ¿En qué puntos del dominio g no es diferenciable?

d) Especifique un intervalo donde g crece más rápidamente.

e) Especifique un intervalo donde g decrece más rápidamente.

f) Esboce a grandes rasgos el gráfico de $f'(x)$.

Extremos locales y absolutos. Gráfica de funciones.

3. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x + 3, \qquad x \in [-1, 1]$

   b) $f(x) = |x^2 - x - 2|, \qquad x \in [-3, 3]$

   c) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad -1 \leq x \leq 1$

   d) $f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad -3 \leq x \leq 10$

   e) $f(x) = (x^2 - x - 1)\ \mathrm{e}^x, \quad |x| \leq 3$

4. Encuentre los extremos locales y absolutos de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = x - x^{2/3}$

   b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1} + 3 \arctan x.$

5. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ es monótona.

6. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 - |2x - 1|$.

7. Esboce la gráfica de las siguientes funciones y determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

   a) $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$

   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

   c) $f(x) = x^2\ \mathrm{e}^{-2x^2}$

   d) $f(x) = x \ln x$

8. Esboce la gráfica de las siguientes funciones. Previamente determine dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y comportamiento de la función cuando x se acerca a los bordes del dominio.

   a) $f(x) = x^2 + 2x$

   b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   c) $f(x) = x - 2 \arctan x$

   d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

   e) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-3}$

   f) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

   g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

   h) $f(x) = \dfrac{1}{3+x^2}$

9. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una y solo una raíz.

Formas Indeterminadas y la Regla de L'Hôpital.

10. Calcule los límites indicados

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{x(x-7)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1+x^6+x^{12}}{e^x}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}(x)}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

f) $\lim_{h\to 0^+} h\ln(h)$

g) $\lim_{r\to 0^+} r^{\operatorname{sen}(r)}$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{6^x-2^x}{x}$

j) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

k) $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

l) $\lim_{x\to\infty} (1+\operatorname{sen}(4x))^{\cot(x)}$

11. Compruebe que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^p} = 0$ para cualquier número $p > 0$. Esto hace ver que la función logarítmica tiende a ∞ con mayor lentitud que cualquier potencia de x.

12. Compruebe que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ para cualquier entero n. Esto significa que la función exponencial tiende tiende a ∞ con mayor rapidez que cualquier potencia de x

Linealización y aplicaciones

13. Sea f una función tal que $f(1) = 2$, cuya función derivada es $f'(x) = \sqrt{x^3+1}$

a) Estime el valor de $f(1{,}1)$ con una aproximación lineal.

b) ¿Cree que el valor exacto de $f(1{,}1)$ es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?

14. Usando aproximaciones lineales, encuentre valores aproximados de

a) $\sqrt{36{,}1}$

b) $\dfrac{1}{10{,}1}$

c) $\operatorname{sen} 59^\circ$

Material Extra

15. El lado de un cubo mide 30 cm, con un posible error de medición de 0.1 cm. Usando aproximaciones lineales, estime el error máximo posible en el cálculo de

a) el volumen del cubo,

b) su área.

16. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, donde el valor de x depende de t, calcule dV/dt en función de dx/dt.

17. Si $xy = 1$ y $dx/dt = 4$, calcule dy/dt cuando $x = 2$.