

**Práctico 3**  
**Matemática Discreta I – Año 2019/2**  
**FAMAF**

1. Hallar el cociente y el resto de la división de:

- |                   |                       |                |
|-------------------|-----------------------|----------------|
| a) 135 por 23,    | c) 135 por $-23$ ,    | e) 127 por 99, |
| b) $-135$ por 23, | d) $-135$ por $-23$ , | f) 98 por 73.  |

2. a) Si  $a = b \cdot q + r$ , con  $b \leq r < 2b$ , hallar el cociente y el resto de la división de  $a$  por  $b$ .

b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que  $-b \leq r < 0$ .

3. Dado  $m \in \mathbb{N}$  hallar los restos posibles de  $m^2$  y  $m^3$  en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.

4. Expresar en base 10 los siguientes enteros:

- |               |                  |                |
|---------------|------------------|----------------|
| a) $(1503)_6$ | c) $(1111)_{12}$ | e) $(12121)_3$ |
| b) $(1111)_2$ | d) $(123)_4$     | f) $(1111)_5$  |

5. Convertir

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $(133)_4$ a base 8,    | c) $(3506)_7$ a base 2, |
| b) $(B38)_{16}$ a base 8, | d) $(1541)_6$ a base 4. |

6. Calcular: a)  $(2234)_5 + (2310)_5$       b)  $(10101101)_2 + (10011)_2$ .

7. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $ab = 1$ , entonces  $a = b = 1$  ó  $a = b = -1$ .
- b) Si  $a, b \neq 0$ ,  $a|b$  y  $b|a$ , entonces  $a = b$  ó  $a = -b$ .
- c) Si  $a|1$ , entonces  $a = 1$  ó  $a = -1$ .
- d) Si  $a \neq 0$ ,  $a|b$  y  $a|c$ , entonces  $a|(b+c)$  y  $a|(b-c)$ .
- e) Si  $a \neq 0$ ,  $a|b$  y  $a|(b+c)$ , entonces  $a|c$ .
- f) Si  $a \neq 0$  y  $a|b$ , entonces  $a|b \cdot c$ .

8. Dados  $b, c$  enteros, probar las siguientes propiedades:

- a) 0 es par y 1 es impar.

- b) Si  $b$  es par y  $b \mid c$ , entonces  $c$  es par. (Por lo tanto, si  $b$  es par, también lo es  $-b$ ).
- c) Si  $b$  y  $c$  son pares, entonces  $b + c$  también lo es.
- d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó  $-2$ .
- e) La suma de un número par y uno impar es impar.
- f)  $b + c$  es par si y sólo si  $b$  y  $c$  son ambos pares o ambos impares.
9. Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $n$  es par si y sólo si  $n^2$  es par.
10. Probar que  $n(n + 1)$  es par para todo  $n$  entero.
11. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.
- a)  $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .
- b)  $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .
- c)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$ .
- d)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$ .
- e)  $a, b, c > 0$  y  $a = b \cdot c$ , entonces  $a \geq b$  y  $a \geq c$ .
12. Probar que cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ :
- a)  $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  es múltiplo de 11.
- b)  $3^{2n+2} - 8n - 9$  es divisible por 64.
13. Decir si es verdadero o falso justificando:
- a)  $3^n + 1$  es múltiplo de  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $3n^2 + 1$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- c)  $(n + 1) \cdot (5n + 2)$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
14. Probar que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n^2 + 2$  no es divisible por 4.
15. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma  $6m \pm 1$ , con  $m$  entero.
16. a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
- b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio  $\binom{n}{4}$  es entero).
17. Probar que si  $a$  y  $b$  son enteros entonces  $a^2 + b^2$  es divisible por 7 si y sólo si  $a$  y  $b$  son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?
18. Encontrar  $(7469, 2464)$ ,  $(2689, 4001)$ ,  $(2447, -3997)$ ,  $(-1109, -4999)$ .

19. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

- |             |               |               |
|-------------|---------------|---------------|
| a) 14 y 35, | d) 12 y -52,  | g) 606 y 108. |
| b) 11 y 15, | e) 12 y 532,  |               |
| c) 12 y 52, | f) 725 y 441, |               |

20. Probar que no existen enteros  $x$  e  $y$  que satisfagan  $x + y = 100$  y  $(x, y) = 3$ .

21. a) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid b \cdot c$  entonces  $a \mid c$ .

b) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid c$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \cdot b \mid c$ .

22. Probar que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces los números  $2n + 1$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  son coprimos.

23. Encontrar todos los enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que  $(a, b) = 10$  y  $[a, b] = 100$ .

24. a) Probar que si  $d$  es divisor común de  $a$  y  $b$ , entonces  $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ .

b) Probar que si  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos, entonces  $\frac{a}{(a, b)}$  y  $\frac{b}{(a, b)}$  son coprimos.

25. Probar que 3 y 5 son números primos.

26. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

27. Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

28. Si  $a \cdot b$  es un cuadrado y  $a$  y  $b$  son coprimos, probar que  $a$  y  $b$  son cuadrados.

29. a) Probar que  $\sqrt{5}$  no es un número racional.

b) Probar que  $\sqrt{15}$  no es un número racional.

c) Probar que  $\sqrt{8}$  no es un número racional.

d) Probar que  $\sqrt[3]{4}$  no es un número racional.

30. Probar que si  $p_k$  es el  $k$ -ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

31. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

- |                          |   |  |
|--------------------------|---|--|
| a) $a = 12$ y $b = 15$ . | c) $a = 140$ y $b = 150$ .                    | e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$ . |
| b) $a = 11$ y $b = 13$ . | d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$ . |  |