

1	2	3	4	5	6	7	8

CALIF.

**Matemática Discreta I**  
**Examen Final 05/07/2017**

**Apellido y Nombre:**

**DNI:**

**Condición:**

**Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de celulares.**

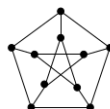
**Si se usa un resultado teórico debe enunciarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 12 pts. en la parte teórica y 28 pts. en la parte práctica.**

**Parte Teórica (30 pts.)**

1. (10 pts.) Sea  $m$  un número natural. Dar la definición de congruencia módulo  $m$  entre enteros, y demostrar que dicha relación es una relación de equivalencia (o sea es reflexiva, simétrica y transitiva).
2. (10 pts.) Enunciar y demostrar el principio de inducción.
3. (a) (5 pts.) Definir isomorfismo de grafos.  
(b) (5 pts.) Dar un ejemplo de 2 grafos isomorfos y un ejemplo de 2 grafos no isomorfos.

**Parte Práctica (70 pts.)**

4. (15 pts.) Sea  $p$  un número primo, y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n < p \leq 2n$ . Probar que  $p \mid \binom{2n}{n}$ .
5. (15 pts.) Encontrar todos los enteros  $0 \leq a \leq 2400$  que son divisibles por 8 y tales que su desarrollo en base 7 tiene al menos 3 dígitos iguales.
6. (a) (7 pts.) Sean  $a, b, c$  números enteros. Probar que si  $a \mid bc$  y  $\text{mcd}(a, b) = 1$  entonces  $a \mid c$ .  
(b) (7 pts.) Probar que si  $m$  es un número natural, entonces todo número entero  $a$  no divisible por  $m$  tiene inverso multiplicativo módulo  $m$  (o sea existe  $b$  entero tal que  $ab \equiv 1 \pmod{m}$ ) si y sólo si  $m$  es primo.
7. (11 pts.) Calcular las raíces cúbicas del número complejo  $-5 + 5i$ .
8. Calcular, justificando correctamente, el número cromático de los siguientes grafos:
  - (a) (7 pts.)  $K_n$  (el grafo completo de  $n$ -vértices).



- (b) (8 pts.) el grafo dado por

**Ejercicios para alumnos libres**

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

1. Luis dibujó dos rectas paralelas en una hoja y las llamó  $L$  y  $S$ . En la recta  $L$  marcó  $n$  puntos y en la recta  $S$ ,  $m$  puntos. Melina, la hermana de Luis, comenzó a dibujar cuadriláteros con vértices en dichos puntos.
  - (a) ¿Cuántos cuadriláteros puede dibujar?
  - (b) Si  $r$  de los  $n$  puntos de la recta  $L$  son de color azul, los  $n - r$  restantes son verdes y los puntos de la recta  $S$  son rojos ¿cuántos cuadriláteros tienen por lo menos un vértice azul?
2. Sea  $n$  un número entero tal que  $3^n \equiv 5 \pmod{7}$ . Calcular el resto de dividir  $n$  por 6.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS