Parte teórica del examen final de Matemática DiscretaII-10 de marzo de 2021.

Escriba su nombre EN CADA HOJA y numere cada hoja de la forma n/N donde n es el número de la hoja y N el número total de hojas que entrega (sin contar esta).ESCRIBA CON LAPICERA NEGRA O AZUL O LAPIZ TRAZO GRUESO.

(1) (4 puntos) Probar que si, dados vértices x, z y flujo f definimos a la distancia entre x y z relativa a f como la longitud del menor f-camino aumentante entre x y z, si es que existe tal camino, o infinito si no existe o 0 si $x = z$, denotandola por $d_f(x, z)$, y definimos $b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$, donde f_k es el k-ésimo flujo en una corrida de Edmonds-Karp, entonces $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$. (nota: en el teórico se probó esto para las distancias $d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$ y se dejó la prueba de las b's como ejercicio. Eso es lo que estamos pidiendo ahora, la prueba es similar a la de las d's pero no exactamente igual, asi que presten atención a lo que escriben)

(2) (3 puntos). k-SAT es como 3-SAT pero ahora se pide que en cada disjunción haya exactamente k literales. Reducir polinomialmente k-SAT a k-COLOR, siguiendo el modelo de la prueba dada en el teórico de la reducción de 3-SAT a 3-COLOR.

AYUDA: deberan hacer algunos cambios menores en la prueba. Una posibilidad (puede haber otras) es:

(a) Primer cambio obvio es que las "garras" formadas por los e's y a's (en la notación del teórico) que consistían en un triángulo formado por los a's mas "uñas" dadas por los e's, ahora en vez de ser triángulos deben ser grafos completos mas grandes.

(b) Segundo cambio para nada obvio, que se les podría ocurrir pensando un poco pero para ayudarlos se los doy, es que los 2 vértices especiales s y t, que estaban unidos entre sí (formando un K2) eran especiales pues t estaba unido a los literales y s a los "e" de las "garras".

Si se fijan en la prueba, los roles de s y t son cruciales para dos cosas:

(i) en una parte es crucial que si un "e" no tiene el color de t, entonces solo tiene una posibilidad entre los colores posibles. (ese es el "rol" de s). Para poder reproducir eso en esta prueba, ademas de s y t necesitaran mas vertices extras, que fuerzen esto.

(ii) Ademas t cumple el rol que fuerza a todos los vertices de los literales a tener solo dos colores posibles. Tambien necesitaran vertices extras para forzar esto en este caso.

Pueden tomar un conjunto de vertices extras que logren forzar i) y otro conjunto que fuerze ii), o bien tomar un conjunto que fuerze ambas cosas al mismo tiempo.

(3) (3 puntos) Supongamos que tenemos un network donde ademas de las capacidades en cada lado que ya conocemos, tenemos unas "capacidades inferiores" $b(x, y) \geq 0$ y que se define un flujo en un network asi, agregando a los requerimientos usuales que $b(x, y) \leq f(x, y)$.

Como se vió en un ejercicio en el práctico, con estas condiciones no siempre existe un flujo en un network asi. Asumimos de ahora en mas que el network es tal que existen flujos en el mismo.

El valor de un flujo sigue definido como antes, y sigue siendo cierto que si S es un corte entonces $v(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S)$ pero la capacidad de un corte ahora se define como $cap(S) = c(S, \overline{S}) - b(\overline{S}, S)$. Con esas definiciones sigue siendo cierto que el valor de todo flujo es menor o igual que la capacidad de todo corte y ud. puede usar esto sin necesidad de probarlo.

La definición de f-camino aumentante debe cambiar apropiadamente para reflejar la nueva situación y el algoritmo de Ford-Fulkerson dado en clase debe cambiar apropiadamente la definición de los ϵ_i en el caso de los lados backwards. Si se hacen los cambios adecuados, el teorema de que si se aumenta un flujo f por un f-camino aumentante con ϵ apropiado entonces lo que queda sigue siendo flujo con valor igual a $v(f) + \epsilon$ sigue siendo cierto y ud. puede usar esto sin necesidad de probarlo.

Ud. debe decir cuales son los cambios apropiados que hay que hacer y probar que con esos cambios, si f es un flujo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es maximal.
(b) Existe un corte S tal que $v(f) = cap(S)$.
(c) No existen f-caminos aumentantes. (entre s y t).