Álgebra/Álgebra II
Clase 09 - Álgebra de Matrices 1

FAMAF / UNC

29 de septiembre de 2020

Los objetivos de esta unidad son:

- Aprender a operar con matrices (sumar, multiplicar, cálcular inversas).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices.
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones.

En este primer archivo definiremos

- la suma y multiplicación de matrices y
- la multiplicación de una matriz por un escalar.

Al final, daremos un glosario de matrices.

Estas filminas estan basadas en las Secciones 2.5 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Todo lo que haremos es válido sobre los números reales y sobre los complejos

Notación

$\mathbb{K}$ denotará tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$.

Más generalmente, todo vale sobre cualquier cuerpo pero con que pensemos y entandamos todo sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ esta bien para esta materia.

Definición (subsección 2.5.2)

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrices del mismos orden.
La suma $A + B$ es la matriz que resulta de sumar "coordenada a coordena" las matrices A y B. En símbolos,

$$A + B \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \text{con} \quad [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$

entrada i j

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & \boxed{20} & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$ entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & \boxed{22} & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}$$

En este caso: $\boxed{[A+B]_{12}} = \boxed{[A]_{12}} + \boxed{[B]_{12}} = \boxed{2} + \boxed{20} = \boxed{22.}$

Definición (subsección 2.5.2)

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrices del mismos orden.
La suma $A + B$ es la matriz que resulta de sumar "coordenada a coordena" las matrices A y B. En símbolos,

$$A + B \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \text{con} \quad [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$

Ejemplo

Siendo los vectores un caso particular de matrices, esta es la misma suma que definimos para vectores en $\mathbb{K}^n$:

$$(v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n) = (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$$

Podemos visualizar la suma de matrices así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades

La suma de matrices satisface las mismas propiedades que la suma de números reales.

Proposición

Si A, B, C son matrices $m \times n$, entonces

- $A + B = B + A$ (conmutativa)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativa)
- $A + 0 = A$ (elemento neutro)
- $A + (-A) = 0$ (opuesto)

donde $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

Demostración

Resumidamente, estas propiedades valen porque valen en $\mathbb{K}$ y estamos sumando coordenada a coordenada números reales tal como sucede en la suma de vectores en $\mathbb{K}^n$.

Veamos a continuación la demostración explicitamente.

Empecemos por ver que las matrices $A+B$ y $B+A$ son iguales. O sea, que cada una de sus coordenadas son iguales. Esto es cierto por lo siguiente:

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B+A]_{ij}$$

definición

conmutatividad de K

definición

Demostración

Comprovemos ahora la asociatividad.
Queremos ver que las matrices $A + (B + C)$ y $(A + B) + C$ son iguales. O sea, que cada una de sus coordenadas son iguales. Esto es cierto por lo siguiente:

$$[A + (B + C)]_{ij} = [A]_{ij} + [B + C]_{ij} = [A]_{ij} + \Big([B]_{ij} + [C]_{ij}\Big)$$

definición

$$= \Big([A]_{ij} + [B]_{ij}\Big) + [C]_{ij} = [A + B]_{ij} + [C]_{ij} = [(A + B) + C]_{ij}$$

asociatividad de K

Demostración

Ahora verificamos la propiedad del neutro

$$A + 0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{definición}}{=} \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} + 0} & \cdots & a_{1n} + 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + 0 & \cdots & a_{mn} + 0 \end{pmatrix} \underset{\text{neutro de K}}{=} \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Por último verificamos la propiedad del opuesto

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

definición $$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} - a_{11}} & \cdots & a_{1n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - a_{m1} & \cdots & a_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix}$$

opuesto en K $$= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Notación

- Gracias a la asociatividad podemos obviar los parentesis en la suma:

$$A + B + C := A + (B + C) = (A + B) + C$$

- Usualemente escribimos:

$$\begin{aligned} A - B &:= A + (-B) \\ -A + B &:= (-A) + B \end{aligned}$$

Definición (subsección 2.5.3)

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$.
El producto $A \cdot B$ es una matriz de orden $m \times p$ cuyas entradas son definidas por la siguiente fórmula.

$$A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times p} \quad \text{con} \quad [A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kj}.$$

Podemos visualizar la multiplicación así:

$$\text{fila i} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

entrada i j

columna j

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & \boxed{28} \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} \boxed{[A\cdot B]_{12}} &= \sum_{k=1}^{3} [A]_{1k} \cdot [B]_{k2} \\ &= [A]_{11}\cdot[B]_{12} + [A]_{12}\cdot[B]_{22} + [A]_{13}\cdot[B]_{32} \\ &= 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ &= \boxed{28} \end{aligned}$$

Observación

En el caso particular que A sea un vector fila y B un vector columna obtenemos un número real o complejo

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

La multiplicación de matrices satisface algunas de las propiedades que satisface la multiplicación de números reales.

Otras no.

Y pueden pasar cosas raras, distintas a las que estamos acostumbradxs cuando multiplicamos números reales.

Las propiedades similares son:

Proposición

Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ y $C \in \mathbb{K}^{p\times q}$ entonces

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (asociativa)
- $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_m \cdot A = A$ (elemento neutro)

donde $\mathrm{Id}_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}$ (todas las entradas son 0 salvo en la digonal que son todos 1).

10
01

100
010
001

Proposición

Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
(distributiva)

Demostración

Vamos a demostrar la primera proposición.

La segunda la dejamos de ejercicio.

Ambas se demuestran de la misma manera que la proposición referida a la suma.

Demostración

Para probar ver la asociatividad tenemos que verificar que todas las entradas de $A \cdot (B \cdot C)$ y $(A \cdot B) \cdot C$ son iguales.

definición

$$[A \cdot (B \cdot C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B \cdot C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1}^{p} [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} \right)$$

distributividad
y asoc de K

conmutatividad de suma en K

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \right) \cdot [C]_{lj} = \sum_{l=1}^{n} [A \cdot B]_{il} \cdot [C]_{lj} = [(A \cdot B) \cdot C]_{ij}$$

definición

Demostración

Veamos ahora la propiedad del elemento neutro. Notemos que las entradas de la matriz Id_k son determinadas de la siguiente manera

$$[\mathrm{Id}_k]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

porque son todas ceros salvo en la diagonal (donde el número de fila y columna coinciden). Entonces

Ai1 Id1j + Ai2 Id2j + ... + Aij Idjj....

$$[A \cdot \mathrm{Id}_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [\mathrm{Id}_n]_{kj} = [A]_{ij} \cdot 1 = [A]_{ij}$$

definición

$$[\mathrm{Id}_m \cdot A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [\mathrm{Id}_n]_{ik} \cdot [A]_{kj} = 1 \cdot [A]_{ij} = [A]_{ij}$$

m

Notación

Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ podemos multiplicar $A \cdot A$, $A \cdot A \cdot A$,....

Es decir, podemos calcular la potencias de matrices cuadradas:

$$A^k := \underbrace{A \cdot \cdots \cdots \cdot A}_{k \text{ veces}}$$

donde $k \in \mathbb{N}$.

Cosas raras

Veamos ahora algunas propiedades que no valen cuando multiplicamos matrices. Es decir, daremos contraejemplos.

No es conmutativa

19=1*5+2*7 entrada 11

23=5*1+6*3 entrada 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicar por algo no nulo puede dar cero

1*(-1)+1*1=0 es la entrada 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elevar al cuadrado u otra potencia puede dar cero

Buscar ejemplos es un ejercicio del práctico.

Casos particulares

Multiplicar por la matriz nula

$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$ para toda matriz A.

$$[0 \cdot A]_{ij} = \sum_k [0]_{ik} \cdot [A]_{kj} = \sum_k 0 \cdot [A]_{kj} = 0$$

$$[A \cdot 0]_{ij} = \sum_k [A]_{ik} \cdot [0]_{kj} = \sum_k [A]_{ik} \cdot 0 = 0$$

Casos particulares

Multiplicar por una diagonal por la izquierda (Observación 2.5.1)

Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entonces

$$[DA]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [D]_{ik} \cdot [A]_{kj} = [D]_{ii}[A]_{ij} = d_i a_{ij}$$

y por lo tanto $DA = (d_i a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

$$\Rightarrow DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

Casos particulares

Tarea

Verificar la igualdad anterior para $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En palabras, multiplicar a izquierda por una diagonal es multiplicar cada fila por el elemento correspondiente de la diagonal.

Algo similar pasa cuando multiplicamos a derecha como lo verificaran en la práctica.

Definición (subsección 2.5.4)

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $c \in \mathbb{K}$. La matriz cA es la matriz que se obtiene multiplicando todas las entradas de A por c. En símbolos,

$$cA \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \text{con} \quad [cA]_{ij} = c[A]_{ij}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $c = 10$ entonces

$$10A = \begin{pmatrix} 10 & \boxed{20} & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

En este caso: $\boxed{[cA]_{12}} = 10\boxed{[A]_{12}} = \boxed{20.}$

La operación de multiplicar una matriz por un escalar satisface las mismas propiedades que cuando multiplicamos vectores por escalares:

1. Asociatividad $c(dA) = (cd)A$
2. Elemento neutro: $1A = A$
3. Opuesto: $-A = (-1)A$
4. Distirbutividad: $c(A + B) = cA + cB$ y $(c + d)A = cA + dA$

Además es asociativa con la multiplicación entre matrices:

$$c(AB) = (cA)B.$$

Si nos restringimos a las matrices cuadradas podemos hacer todas las operaciones que querramos entre ellas.

Podemos sumar, multiplicar y multiplicar por un escalar.

Y estas operaciones satisfacen ciertas propiedades.

En matemática, los conjuntos con este tipo de operaciones se los llama álgebras.

Es por eso que esta sección se llama Álgebra de Matrices.

Matriz cuadrada

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice cuadrada de orden n porque tiene igual cantidad de filas que de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son a_{ii} con $1 \leq i \leq n$

Matriz diagonal

Una matriz cuadrada D de orden n se dice diagonal si todas las entradas fuera de la diagonal son nulas.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Las entradas de D se pueden describir como sigue

$$[D]_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Matriz identidad

La matriz diagonal de orden n con todos unos en la diagonal se llama matriz identidad de orden n y se denota Id_n.

$$\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Las entradas de Id_n se pueden describir como sigue

$$[\mathrm{Id}_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A veces escribiremos simplemente Id, omitiendo el subíndice n.

Matriz nula

La matriz nula de orden $m \times n$ es la matriz cuyas entradas son todas ceros. Se la denota 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Las entradas de 0 se pueden describir como sigue

$$[0]_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Matriz triangular superior

Una matriz cuadrada cuyas entradas por debajo de la diagonal principal son cero se llama matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En fórmula, A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada cuyas entradas por encima de la diagonal principal son cero se llama matriz triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En fórmula, A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Vector columna

Un vector columna es una matriz formada por una sóla columna.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

El conjunto de vectores columna es denotado $\mathbb{K}^m$ en vez de $\mathbb{K}^{m\times 1}$.

Usamos un sólo subíndice para identificar las coordenadas de un vector columna.

Vector fila

Un vector fila es una matriz formada por una sóla fila.

$$v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

El conjunto de vectores fila es denotado $\mathbb{K}^n$ en vez de $\mathbb{K}^{1\times n}$.

Usamos un sólo subíndice para identificar las coordenadas de un vector fila.

Si es necesario usamos comas para separar las coordenadas.