Guido Ivetta

Ejercicio 1

Vemos que en G los únicos lados que faltan son los $x_i x_{i+1}$ $\forall i$ tq $0 \leq i < 80$.
Es decir que todo vértice x_i tiene de vecino a todos los otros vertices excepto $x_{i-1 (mod\ 81)}$ y a $x_{i+1 (mod\ 81)}$
Es decir que todos los vértices tienen $80-2=78$ vecinos
Por lo tanto $\delta = \Delta = 78 \Rightarrow G$ es regular.

No hace falta pero es verdad { Por el teorema de Brooks, como G es conexo, no completo y no cíclico impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta = 78$

Sea $A = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{78}\}$, es decir todos los vertices x_i tq $0 \leq i \leq 78$ tq i es par.
$|A| = 40$.
El lado $x_{80} x_0$ es el único faltante que une $x_i x_{i+1 (mod\ 81)}$ tq i y $i+1$ mod 81 son pares. ∴ En el conjunto A no falta ninguna arista.
∴ El subgrafo M compuesto por los vértices de A es un K_{40}
∴ $\chi(G) \geq 40$

Asumo que $\chi(G) = 40$
Sin pérdida de generalidad puedo pintar a x_0 con el color 0 y como $M = K_{40}$, todos los elementos de A deben tener un color distinto.
Sin pérdida de generalidad puedo establecer que el color del vertice $x_i = i/2$ $\forall x_i \in A$. Ya usamos todos los colores.

Guido Vuelta

El vértice X_{80} no está coloreado, veamos qué puede ser: 0 puede ser porque no está conectado con X_0.
$1 \leq k \leq 39$ no puede ser porque X_{80} tiene de vecinos a todos los miembros de A excepto X_0.
Como no tengo más colores y el único que X_{80} puede tener es el color 0, lo pinto así sin pérdida de generalidad.

El vértice X_1 no está coloreado, vemos que es vecino de todos excepto X_0 y X_2. Por lo tanto puede tener el color de X_0 o X_2. NO! Porque también es vecino de X_{80} que acabamos de pintar con el color de X_0.
$\therefore$ Solo podemos pintarlo del color de X_2 sin pérdida de generalidad.

El vértice X_3 no está coloreado, es vecino de todos excepto X_2 y X_4 como a X_1 lo pintamos del mismo color que X_2 entonces estamos obligados a pintar a X_3 del color de X_4.

Este proceso seguirá ocurriendo, porque cuando queramos pintar el X_5 no podré tomar el de X_4 y tendrá que tomar el de X_6.

Repetimos hasta llegar a X_{79}. Es vecino de todos excepto X_{80} y X_{78}. No podemos pintarlo con el color de X_{78} porque por lo que dijimos recién, X_{77} ya tiene ese color. Así que estamos obligados a pintarlo del color de X_{80}. Pero X_0 es vecino de X_{79} y $c(X_0)=c(X_{80})$.

$\therefore$ No quedan colores para colorear a X_{79}.

$\therefore$ Pero $\chi(G)=40$. Absurdo! provino de asumir que $\chi(G)=40$.

Como sabemos que $\chi(G)\geq 40$ y $\chi(G)\neq 40$ entonces $\chi(G)\geq 41$

Demos un coloreo en ese caso.

$$c(X_i)=\begin{cases} i/2 & \text{si } i \text{ par y } i\neq 80 \\ (i+1)/2 & \text{si } i \text{ impar} \\ 2 & \text{si } i=80 \end{cases}$$

Habíamos dicho que el lado $X_{80}X_0$ es el único lado de los que faltan donde se une un vértice par con otro par.

Caso i par; $i\neq 80$

El único vértice que tiene el mismo color de X_i es X_{i-1}. Como no están unidos entonces no causa problemas.

Caso i impar

El único vértice que tiene el mismo color de X_i es X_{i+1}. No están unidos así que no causan problemas.

Guido Iwetta

Caso $i = 80$

Nadie tiene su mismo color así que no puede causar problemas.

$\therefore$ Ningún lado causa problemas

$\therefore$ Es un coloreo propio.

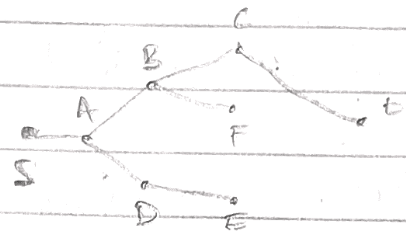
$\therefore$ Como $\chi(G) \geq 41$ y damos un coloreo con 41 colores $\Rightarrow \underline{\chi(G) = 41}$

Guido Ivetta

Ejercicio 2

Uso el algoritmo de Dinic.

Creo el primer NA:



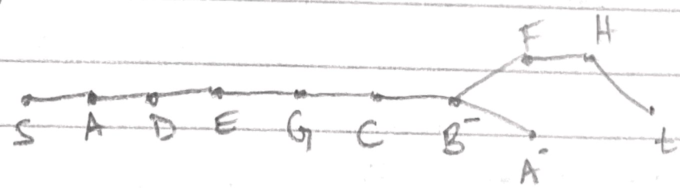
Encuentro camino aumentante: ~~s A B D~~ C F E t
S A A B B D C

el camino es: sABCt: min(a, b, c, b) = b

las capacidades nuevas con el nuevo flujo quedan:

sA: a-b AD: d BF: d DE: d FH: d Ht: d
AB: 0 BC: c-d Ct: 0 EG: d GC: d

Creo el segundo NA:



Encuentro camino aumentante: s A ~~D E G C B~~ F A H t
S A D E G C B B F H

El camino es: SADEG$\overleftarrow{C}$BFHt: min(a-b, d, d, d, d, d, d, d, d)

Sabemos que d < a y d < b, pero no podemos asegurar que d < a-b.

No es la capacidad de BC sino el flujo que se puede devolver

Guido Ivetta
G

Por lo tanto hay que dividir en casos:

Caso $d = a-b$

Entonces el camino es: $sADEG\overleftarrow{C}BFHt : d = a-b$

Las nuevas capacidades quedan:

$sA: \cancel{a-b}\ 0 \quad AD: \cancel{d}\ 0 \quad BF: \cancel{d}\ 0 \quad DE: \cancel{d}\ 0 \quad FH: \cancel{d}\ 0 \quad Ht: \cancel{d}\ 0$

$AB: 0 \quad BC: \cancel{c-d}\ c \quad Ct: 0 \quad EG: \cancel{d}\ 0 \quad GC: \cancel{d}\ 0$

Intento hacer nuevo camino aumentante: s //

s no puede agregar a nadie y el corte minimal es $S = \{s\}$.

Vemos que $v(f) = b + (a-b) = a$

Vemos que $cap(S) = c(sA) = a = v(f)$

$\therefore$ Es flujo maximal

Caso $d < a-b$

Entonces el nuevo camino es: $sADEG\overleftarrow{C}BFHt : d$

Las nuevas capacidades quedan:

$sA: \cancel{a-b}\ a-b-d \quad AD: \cancel{d}\ 0 \quad BF: \cancel{d}\ 0 \quad DE: \cancel{d}\ 0 \quad FH: \cancel{d}\ 0 \quad Ht: \cancel{d}\ 0$

$AB: 0 \quad BC: \cancel{c-d}\ c \quad Ct: 0 \quad EG: \cancel{d}\ 0 \quad GC: \cancel{d}\ 0$

Guido Ivetta

Intento buscar nuevo camino aumentante: $\underset{s}{s}\ A$ //

A no puede agregar a nadie y el corte minimal es $S = \{s, A\}$

Vemos que $v(f) = b + d$

Vemos que $cap(S) = c(AB) + c(AD) = b + d = v(f)$

$\therefore$ Es flujo maximal

Caso $a - b \leq d$

Entonces el camino es: $sADEG\overleftarrow{CB}FHt : a-b$

Las nuevas capacidades quedan:

$sA: \overset{0}{\cancel{a-b}}$ $\quad AD: \overset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$ $\quad BF: \overset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$ $\quad DE: \overset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$ $\quad FH: \overset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$ $\quad Ht: \overset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$

$AB: 0$ $\quad BC: \underset{c-d+(a-b)}{\cancel{c-d}}$ $\quad Ct: 0$ $\quad EG: \underset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$ $\quad GC: \underset{d-(a-b)}{\cancel{d}}$

Intento buscar nuevo camino aumentante: s //

s no puede agregar a nadie y el corte minimal es $S = \{s\}$

Vemos que $v(f) = b + (a-b) = a$

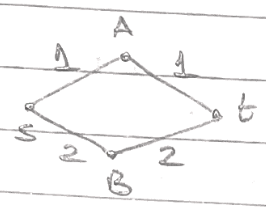
Vemos que $cap(S) = c(sA) = a = v(f)$

$\therefore$ Es flujo maximal

Guido Ivetta

2b) Falso.

Sea N:



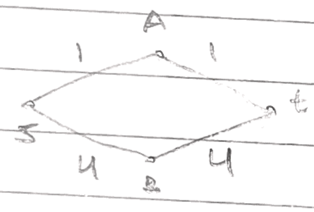
El flujo f: $sA = At = 1$

$sB = Bt = 2$

es maximal porque es flujo y $Out(s) = \sum_{sy \in E} f(sy)$

Aquí $v(f) = 3$

Sea M:



El flujo g: $sA = At = 1$

$sB = Bt = 4$

es maximal porque es flujo y $Out(s) = \sum_{sy \in E} f(sy)$

Aquí $v(g) = 5$

Vemos que $(v(f))^2 = 3^2 = 9 \neq 5 = v(g)$

Guido Lietta

Ejercicio 3

Como busco minimizar la suma, uso el algoritmo Húngaro.

Primero resto el mínimo de la fila i a sí misma

	1	2	3	4	
A	x-2	7	7	0	← min = 2
B	3	x-2	2	0	
C	7	3	x-1	0	← min = 1
D	9-x	8-x	7-x	0	← min = x

Ahora resto el mínimo de la columna i a sí misma:
Pero ahora no se quien es el mínimo de algunas columnas
Sé que $2 < x-2 < 4$; $3 < 9-x < 5$; min constante en 1ª columna = 3

Divido en casos:

Caso $\underline{x-2 \leq 3} \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow 4 < x \leq 5$

	1	2	3	4
A	0	7-(x-2)	5	0
B	3-(x-2)	0	0	0
C	7-(x-2)	3-(x-2)	x-1-2	0
D	9-x-(x-2)	8-x-(x-2)	7-x-2	0

Aquí $3 < 8-x \leq 4$
Pero $x-2 \leq 3 \Rightarrow x-2 < 8-x$

Aquí similar

Guido Ivetta

Limpiando las cuentas queda:

	1	2	3	4
A	0	9-x	5	0
B	5-x	0	0	0
C	9-x	10-x	x-3	0
D	11-2x	10-2x	5-x	0

S = {C, D}; $T^+(S)$ = columna 4

Empiezo por este matching eligiendo el primer 0 disponible de cada fila.

Veo que no es perfecto así que veo si encuentro camino aumentante.

~~s~~ ~~D~~ ~~4~~ C
s D 4

El corte minimal $C = \{s; D; 4; C\}$ me dice que $S = \{D; C\}$.
Veo que $T^+(S) = \{4\}$ y que $\#S > T^+(S)$ rompiendo la condición de Hall.

Debo crear más ceros.
Encuentro $\epsilon = \min$ valor en $S \cap \overline{T^+(S)}$

$= \min(9-x, 11-2x, 10-x, 10-2x, x-3, 5-x)$

Veo que $4 \leq 9-x \leq 5$; $1 \leq 11-2x \leq 3$; $5 \leq 10-x \leq 6$;
$0 \leq 5-x \leq 1$; $2 \leq x-3 \leq 3$; $0 \leq 10-2x \leq 2$

Pero $5-x$ y $10-2x$ son lineales tq $10-2x \geq 5-x \ \forall\ 4 \leq x \leq 5$
$\therefore 5-x$ es el mínimo.

Resto $5-x$ a las filas de S y sumo a las columnas de $T^+(S)$

Guido Ivetta

	1	2	3	4
A	0	$9-x$	5	$5-x$
B	$5-x$	0	0	$5-x$
C	4	5	$2x-8$	0
D	$6-x$	$5-x$	0	0

Perdemos ceros. pero no importa

El matching que encontré simplemente asignando el primer 0 de cada fila ya es perfecto. Terminamos

Matching: 1:A ; 2:B ; 4:C ; 3:D

La suma de los costos es: $X+X+1+7$

$= 2x+8$

$\Rightarrow 16 < \text{costo\_total} \leq 18$

Caso $\underline{x-2>3} \Rightarrow x>5 \Rightarrow 5<x<6$

	1	2	3	4
A	$x-5$	$7-(8-x)$	$7-(7-x)$	0
B	0	$x-2-(8-x)$	$2-(7-x)$	0
C	4	$8-(8-x)$	$x-1-(7-x)$	0
D	$6-x$	0	0	0

Aquí $3<x-2<4$

pero $2<8-x<3 \Rightarrow 8-x<x-2$

Aquí

$1<7-x<2$

pero $4<x-1<5$

$\Rightarrow 7-x<x-1$

Guido Ivetta

Limpiando las cuentas queda:

	1	2	3	4
A	$x-5$	$x-1$	x	0
B	0	$2x-10$	$x-5$	0
C	4	x	$2x-8$	0
D	$6-x$	0	0	0

S = {A, C}; $\Gamma^+(S)$ = columna 4

Intento encontrar camino aumentante

~~s C 4 A~~
~~s C 4~~

$S = \{A, C\}$
$\Gamma^+(S) = \{4\}$

$\# S \nleq \Gamma^+(S)$

$\therefore$ No cumple condición de Hall

Debo crear más ceros.

Encuentro ϵ = min valor en $S \cap \overline{\Gamma^+(S)}$

$= \min(x-5, x-1, x, 4, x, 2x-8)$

Veo que $0 < x-5 < 1$; $4 < x-1 < 5$; $5 < x < 6$;

$2 < 2x-8 < 4$

Como $x-5 < 1 < 4$, tenemos nuestro $\epsilon = x-5$

Resto $x-5$ a las filas de S y sumo a las columnas de $\Gamma^+(S)$

Guido Iurletta

$\Gamma^{+}(S)$

	1	2	3	4
A	0	4	5	0
B	0	$2x-10$	$x-5$	$x-5$
C	$9-x$	5	$x-3$	0
D	$6-x$	0	0	$x-5$

$\left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} S$

Busco camino aumentante: = B A A H C
s B 1 A 4 //

$S = \{A; B; C\}$; $\Gamma^{+}(S) = \{1; 4\}$ No cumple condición de Hall

Debo crear más ceros. Igual que antes.

Encuentro $\epsilon = \min(4, 5, x-5, x-5, 5, x-3)$

Veo que: $0 < 2x-10 < 2$; $0 < x-5 < 1$;
$2 < x-3 < 3$

Pero $2x-10$ y $x-5$ son lineales tq $2x-10 > x-5$
$\forall 5 < x < 6$

$\therefore \epsilon = x-5$

resto $x-5$ a las filas de S y sumo a las columnas de $\Gamma^{+}(S)$

	1	2	3	4
A	0	$9-x$	$10-x$	0
B	0	$x-5$	0	$x-5$
C	$9-x$	$10-x$	2	0
D	1	0	0	$2x-10$

Guido Ivetta

6

El matching que encuentro eligiendo el 1er cero de cada fila ya es perfecto. Terminemos

Matching: 1-A ; 2-D ; 3-B ; 4-C

La suma de los costos es: $x + 8 + 4 + 1$

$= x + 13$

$\Rightarrow 18 \leq \text{costo total} \leq 19$

Guida Ivetta

Ejercicio 4

$Nu(H) = C$ así que queremos dos v tq $Hv^t = 0^t$
Como estamos en $\mathbb{Z}_2$, multiplicar H por v^t es simplemente sumar las columnas i de H donde $v_i = 1$.
Por lo tanto si elegimos un conjunto de columnas que sumadas den 0, y establecemos que v sea un vector de n bits con los índices de esas columnas, $v \in C$.

Vemos que $H^3 + H^4 + H^5 + H^6 + H^{12} = 0$
Por lo que dijimos antes, $v_1 = (0011110000010000) \in C$

Vemos que $H^1 + H^2 + H^3 + H^4 + H^7 = 0$
$\therefore\ v_2 = (1111001000000000) \in C$

Las dimensiones de H son $(n-k) \times n$
Vemos que H tiene 16 columnas y 6 filas así que
$n = 16$
$n - k = 16 - k = 6 \implies \boxed{k = 10}$

Como C es lineal, $\#C = 2^k = 2^{10} = 1024$

Hay un teorema que dice que si en la H no está la columna 0 ni columnas repetidas $\implies \delta(C) \geq 3$
Vemos que la columna 0 no puede estar y la única forma en la que puede haber repetidas es que ambos a y c sean 0.
En ese caso $H^{14} = H^{15}$ y $\delta = 2$. En todos los otros casos se cumple el teo.

Guido Ivelta

G

Hay otro teorema que dice que $\delta(C)$ es el tamaño del mínimo conjunto LD de columnas de H.

Vemos que $H^3 + H^8 = H^9$

Como estamos en $\mathbb{Z}_2 \Rightarrow H^3 + H^8 = H^9$

$\Rightarrow H^3 + H^8 + H^9 = 0$

Por lo que $\{H^3, H^8, H^9\}$ es LD.

Como sabíamos que $\delta \geq 3$ y este conjunto implica que $\delta \leq 3 \Rightarrow \boxed{\delta = 3}$

Cuando se recibe una palabra, debemos multiplicarla por H para ver si podemos detectar o corregir errores o determinar que lo más probable es que no haya tenido ninguno.

Como vimos al principio Hv^t es sumar columnas de H.

$$\therefore H(1000000000000111)^t = H^1 + H^{14} + H^{15} + H^{16} = \begin{pmatrix} 1+1+0+1 \\ 0+1+0+0 \\ 0+0+1+1 \\ 0+1+1+1 \\ 0+0+a+b \\ 0+0+c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

Como $Hv^t \neq 0$ entonces hubo errores. Como la hipótesis del problema dice que hubo a lo sumo 1 error, entonces

Giulio Iuvetta

podemos concluir que hubo exactamente un error. Por lo tanto debe haber una columna de $H = Hv^t$

Vemos que en H hay 4 columnas que empiezan con 1101. Así que depende de los valores de a, b, c, d para encontrar cual es.

Caso $a+b=0$

Subcaso $c+d=0$

$H^{14} = Hv^t$

$\therefore$ Hubo un error en el bit 14

$\Rightarrow$ la palabra enviada fue (1000000000000011)

Subcaso $c+d=1$

$H^{11} = Hv^t$

$\therefore$ Hubo un error en el bit 11

$\Rightarrow$ la palabra enviada fue (1000000000100111)

Caso $a+b=1$

Subcaso $c+d=0$

$H^{9} = Hv^t$

$\therefore$ Hubo un error en el bit 9

$\Rightarrow$ la palabra enviada fue (1000000010000111).

Subcaso $c+d=1$

$H^{10} = Hv^t$

$\therefore$ Hubo un error en el bit 10

$\Rightarrow$ la palabra enviada fue (1000000001000111)