Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 11 - Álgebra de matrices 3

FAMAF / UNC

22 de abril 2021

1. Objetivos
2. La notación $AX = Y$ para sistemas de ecuaciones
3. Sistemas de ecuaciones $AX = Y$ con A invertible

En este archivo analizaremos las relaciones entre el álgebra de matrices y los sistemas de ecuaciones lineales.

El tema de esta clase está contenido en las secciones 2.6 y 2.7 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

Ejemplo

Calculemos x_1, x_2 y x_3 t.q. $AX = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es equivalente a resolver

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

En general, hemos identificado a un sistema de ecuaciones con la matriz de coeficientes y el vector de las y's

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

A X = Y

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ahora podemos apreciar que esta notación se corresponde con las operaciones del álgebra de matrices: multiplicar la matriz A por la columna de incógnitas e igualar el resultado al vector de las y's.

Conlcusión

La notación $AX = Y$ para sistema de ecuaciones es consistente con la multiplicación de matrices

A su vez, podemos reinterpretar las soluciones en el lenguaje del álgebra de matrices.

Por ejemplo, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

porque si hacemos la multiplicación Av obtenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 2 \\ -1 + 0 + 3 \\ -2 + 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusión

En el lenguaje matricial, para saber si $v \in \mathbb{K}^n$ es solución del sistema $AX = Y$ debemos verificar que ~~vale~~ al hacer la multiplicación Av obtenemos Y.

$v \in \mathbb{K}^n$ es sol del sist $AX = Y$

$\iff Av = Y$

$$\text{sol} = \{ v \in \mathbb{K}^n \, / \, Av = Y \}$$

Esta observación es útil para probar propiedades como que el conjunto de soluciones es invariantes por la suma y la multiplicación por escalares.

$AX = Y \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean v y w soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Entonces $v + tw$ también es solución del sistema $AX = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$Av = 0$

$Aw = 0$

¿$v+w$ es sol? Si!

$t=1$

Esto es el Ejercicio 11 del Práctico 3. Este y los ejercicios 11, 12, 13 y 14 se pueden demostrar usando la observación anterior.

DEBEMOS HACER

$A(v+w) = Av + Aw$

$+Y = 2Y$

$+0 = 0$

$A(v+w) = Y \neq Y$

También podemos reinterpretar el Método de Gauss en el lenguaje de matrices.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{———} = y_1 \\ \text{———} \\ \quad \vdots \\ \text{———} \\ \text{———} = y_m \end{array}\right. \rightsquigarrow AX = Y \rightsquigarrow (A \mid Y)$$

$$(A \mid Y) \xrightarrow{e_1} \left[e_1(A) \mid e_1(Y) \right] \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_r} \left[B \mid Z \right]$$

$$e_1(A) = E_1 \cdot A \quad \text{con} \quad E_1 = e_1(Id)$$

$$AX = Y \xrightarrow{E_1 \cdot} E_1 A X = E_1 Y \xrightarrow{E_2} \cdots \to BX = Z$$

$$e_1(A) X = e_1(Y)$$

$$E_1^{-1} \cdot$$

$$\Rightarrow Sol(AX = Y) = Sol(E_1 AX = E_1 Y).$$

Y lo mismo sucede con el método para encontrar la inversa

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

¿A es invertible?

$\equiv$ ¿$\exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tq

$AX = Id$?

$$(A|Id) \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_k} (B|Z)$$

$$|||$$

$$AX = Id \xrightarrow{E_1} E_1 AX = E_1 \to \cdots \to$$

$$\underbrace{E_k E_{k-1} \cdots E_1 A}_{B} X = \underbrace{E_k \cdots E_1}_{Z}$$

$$B = Id \qquad Z = A^{-1}$$

Encontrar $x \in \mathbb{R}$ t.q.

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} = 2^{-1} 3$$

$$2^{-1} \quad 2x = y \quad \text{con } y \in \mathbb{R}$$

$$x = 2^{-1} y$$

$$\boxed{2^{-1} \cdot 2 = 1}$$

Teorema 2.7.9

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i ⇒ ii

iii ⇐

i) A es invertible.

ii) El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, la cuál es $A^{-1}Y$.

iii) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución, la trivial. $\equiv$ nula $\equiv (0, \ldots, 0)$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = \\ \quad\quad y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DEM

$i \Rightarrow ii)$ Por Hip. A es invertible, $\exists A^{-1}$

Sea $v \in \mathbb{K}^n$ sol de $AX = Y$.

$$\rightarrow \quad Av = Y \xrightarrow{A^{-1}} A^{-1}Av = A^{-1}Y$$

$$Id\, v = A^{-1}Y$$

$$\boxed{v = A^{-1}Y}$$

$\Rightarrow$ La sol es única

Siempre $A^{-1}Y$ es Sol: Pues

$$A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = Id\, Y = Y$$

$(ii \Rightarrow iii)$ Si en (ii) ponemos $Y = 0$ deducimos (iii) ya que $(0, \ldots, 0)$ siempre es sol $AX = 0$

$(A|0) \to \cdots \to (R|0)$

iii) $\Rightarrow$ *i*)

- Sea R la MERF equivalente a A. tiene variables libres
- Si R tiene una fila nula, entonces el sistema $AX = 0$ tiene más de una solución, contradiciendo la hipótesis.
- Por lo tanto, R no tiene filas nulas.
- Como R es una matriz cuadrada y es MERF, tenemos que $R = I_n$. $= \mathrm{Id}_n$
- Luego A es equivalente por filas a Id_n $\Rightarrow$ A es invertible.

Por teorema de la clase pasada □

Corolario 2.7.10

Sea ~~A~~ C una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

1. Si existe ~~B~~ A matriz $n \times n$ tal que ~~BA~~ AC $= \mathrm{Id}_n$, entonces ~~AB~~ CA $= \mathrm{Id}_n$.
   (A tiene inversa a izquierda $\Rightarrow$ es invertible).

$$\boxed{\text{Recordar: } A \text{ es invertible si } \exists B \text{ tq } AB = BA = \mathrm{Id}}$$

Dem Consideremos el sist $AX = 0$

$$\xrightarrow{B\cdot} \quad BAX = B \cdot 0$$

$$\xrightarrow{\text{HIPO}} \quad \mathrm{Id}\, X = 0$$

$$X = 0$$

$\Rightarrow X = 0$ es la única sol $\xRightarrow{\text{Teo 2.7.9}}$ A es inv

Como la inversa es única $A^{-1} = B$ y $AB = \mathrm{Id}$

Corolario 2.7.10

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

2. Si existe C matriz $n \times n$ tal que $AC = \mathrm{Id}_n$, entonces $CA = \mathrm{Id}_n$.
   (A tiene inversa a derecha $\Rightarrow$ es invertible).

Dem: $AC = Id$ podemos aplicar el corolario anterior a la matriz C.

Entonces $AC = Id$ implica $CA = Id$


Y recuerden:
si A es invertible
entonces AX=Y tiene
una única solución
¡Hasta la próxima, amigxs!