TAREA 9 RESUELTA

Ejercicios.

(1) Sea $\mathcal{B}$ la siguiente base ordenada de $\mathbb{R}^{2x2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Calcular las coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$

(b) Encontrar la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que su vector de coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ es $(2, 1, 5, 7)$

(2) Considere en $\mathbb{R}^3$ las siguientes bases ordenadas: $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 3), (1, -1, 0)\}$. Sea T la transformación lineal definida por

$$T(x, y, x) = (x + y, -y + z, x + y + z)$$

(a) Calcular $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, o sea la matriz T de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$

(b) Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 2)$. Calcular $T(v)$.

1. Solución

(1) (a) Escribimos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

los escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son las coordenadas de la matriz respecto a la base $\mathcal{B}$. De la combinación lineal anterior, nos queda el sistema

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \\ \gamma + \delta = 4(*) \\ \gamma - \delta = 3(**) \end{cases}$$

Despejamos γ de $(**)$ y obtenemos $\gamma = 3 + \delta$. Reemplazando ésta última expresión en $(*)$ obtenemos que $3 + 2\delta = 4 \Rightarrow 2\delta = 1 \Rightarrow \delta = 1/2$

Además $\gamma = 3 + \delta = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Por lo tanto las coordenadas de la matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ son $(2, 3, \frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

b) Escribimos la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ como combinación lineal de las matrices de la base $\mathcal{B}$ (los escalares de esta combinación lineal están dados por las componentes del vector de coordenadas).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 5 + 7 = 12 \\ d = 5 - 7 = -2 (**) \end{cases}$$

Luego la matriz cuyo vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ es $(2, 1, 5, 7)$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

2)a) Para calcular $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, en primer lugar calculamos las imagenes de los elementos de la base $\mathcal{B}$ mediante la transformación lineal T.
$T(1, 0, -1) = (1, -1, 0)$

$T(0, 1, 3) = (1, 2, 4)$

$T(1, -1, 0) = (0, 1, 0)$

El paso siguiente es determinar las coordenadas de esos vectores respecto de la base canónica.
$(1, -1, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$

$(1, 2, 4) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$

$(0, 1, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$

Es claro que las coordenadas de un vector respecto de la base canónica coinciden con las componentes del vector dado.
Entonces, colocando cada vector $T(v)$ de los elementos de la base $\mathcal{B}$ como columnas, obtenemos la matriz

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De la Proposición 4.6.2 vista en la teoría tenemos que $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}$

En el punto anterio obtuvimos la matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Entonces

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$