## 0.1. Números complejos

La ecuación polinómica $x^2+1=0$ (¿cuál es el número que elevado al cuadrado y adicionado 1 da 0?) no tiene solución dentro del cuerpo de los números reales, pues todos sabemos que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $x^2+1>0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Podemos extender $\mathbb{R}$ a otro cuerpo, de tal forma que *toda* ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{R}$ tenga solución.

Definición 0.1.1. Los *números complejos* es el conjunto $\mathbb{C}$ de los pares ordendados $(a,b)$, denotados $a+ib$, con $a,b$ en $\mathbb{R}$, con las operaciones '+' y '$\cdot$', definidas

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(c+d), \tag{1}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc). \tag{2}$$

Al número complejo $i = 0+i\cdot 1$ lo llamamos el *imaginario puro.* Si $z=a+ib$ es un número complejo, diremos que $a$ es la *parte real* de $z$ y la denotamos $a=\operatorname{Re} z$. Por otro lado, $b$ es la *parte imaginaria* de $z$ que es denotada $b=\operatorname{Im} z$.

Es claro que $z=a+ib$ es igual a $w=c+id$ si coinciden su parte real e imaginaria, es decir

$$a+bi=c+di \quad\Leftrightarrow\quad a=c \;\wedge\; b=d.$$

Podemos ver a $\mathbb{R}$ contenido en $\mathbb{C}$, con la correspondencia $a \to a+i\cdot 0$ y observamos que si nos restringimos a $\mathbb{R}$, tenemos las reglas de adición y multiplicación usuales.

La definición de la suma de dos números complejos no debería sorprendernos, pues es la suma "coordenada a coordenada". La definición del producto se basa en que deseamos que $i^2=-1$ y que el producto sea distributivo.

Primero, comprobemos que $i^2=-1$. Esto es debido a que

$$i^2 = (0+i\cdot 1)(0+i\cdot 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0) = -1.$$

Este resultado nos dice que $i^2+1=-1+1=0$, es decir $i$ es una solución de la ecuación polinómica $x^2+1=0$, o, dicho de otra forma, una raíz del polinomio $x^2+1$ es el número complejo $i$.

Más generalmente:

Teorema 0.1.1 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio en una variable de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz (real o compleja).*

La demostración de este teorema excede los contenidos de este curso y usa herramientas de análisis matemático.

Sean $0=0+i\cdot 0, 1=1+i\cdot 0 \in \mathbb{C}$, es fácil comprobar que son los elementos neutros de la suma y el producto, respectivamente. Por otro lado, si $z=a+ib$, entonces $-z=-a-ib$ es el opuesto aditivo de $z$. El inverso multiplicativo es un poco más complicado. Primero observemos que dado $a + ib \in \mathbb{C}$,

$$(a + ib)(a - ib) = aa - b(-b) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que $a + ib \neq 0$, encontremos a partir de las reglas de adición y multiplicación la inversa de $z$. Sea $c + id$ tal que $(a + ib)(c + id) = 1$, luego

$$c + id = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib}\,\frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

(observar que como $a + ib \neq 0$, entonces $a^2 + b^2 > 0$.)

Podemos resumir lo anterior en lo siguiente: sea $a + ib \in \mathbb{C}$, entonces

- Si $0 = 0 + i \cdot 0, \in \mathbb{C}$, entonces $0 + (a + bi) = a + bi$,
- Si $1 = 1 + i \cdot 0, \in \mathbb{C}$, entonces $1 \cdot (a + bi) = a + bi$,
- $-(a + ib) = -a - ib$,
- $(a + ib)^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ para $a + ib \neq 0$.

Hemos definido los números complejos como pares ordenados y como tales es posible representarlos en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

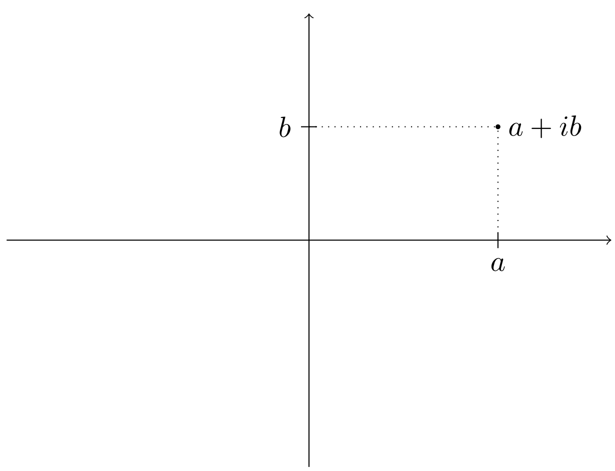


Figura 1. Representación gráfica de los números complejos.

Por el teorema de Pitágoras, la distancia del número complejo $a + ib$ al 0 es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Definición 0.1.2. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. El *módulo* de $z$ es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

El *conjugado* de $z$ es

$$\bar{z} = a - ib.$$

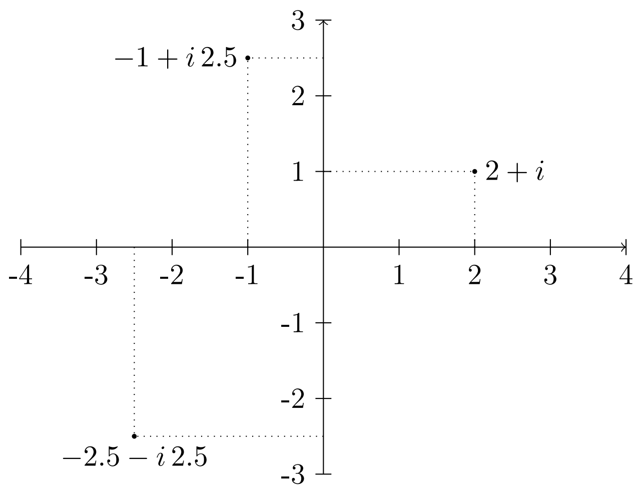


FIGURA 2. Ejemplos de la representación gráfica de los números complejos.

EJEMPLO 0.1.1. $|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$, $\overline{4+3i} = 4-3i$.

PROPOSICIÓN 0.1.2. *Sean $z$ y $w$ números complejos.*

*(1)* $z\bar{z} = |z|^2$.
*(2) Si* $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
*(3)* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
*(4)* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

DEMOSTRACIÓN. Son comprobaciones rutinarias. Para ejemplificar, hagamos la demostración de (4).

Si $z = a+bi$ y $w = c+di$, entonces $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Por lo tanto,

$$\overline{zw} = (ac-bd)-(ad+bc)i.$$

Como $\overline{z} = a-bi$ y $\overline{w} = c-di$,

$$\overline{z}\,\overline{w} = (ac-(-b)(-d)) + (a(-d)+b(-c))i = (ac-bd)-(ad+bc)i.$$

Por lo tanto $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. □

EJERCICIO 0.1.1. Determinar el número complejo $2-3i+\dfrac{i}{1-i}$.

SOLUCIÓN. El ejercicio nos pide que escribamos el número en el formato $a+bi$. En general, para eliminar un cociente donde el divisor tiene parte imaginaria no nula, multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del divisor, como $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, obtenemos un divisor real. En el ejemplo:

$$\begin{aligned} 2+3i+\frac{i}{1-i} &= 2+3i+\frac{i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i} = 2+3i+\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= 2+3i+\frac{i-1}{2} = 2+3i+\frac{i}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}+i\frac{7}{2} \end{aligned}$$

□

**Un poco de trigonometría**. Recordemos que dado un punto $p = (x, y)$ en el plano, la recta que une el origen con $p$ determina un ángulo $\theta$ con el eje $x$ y entonces

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

donde $r$ es la longitud del segmento determinado por $(0, 0)$ y $(x, y)$. En el lenguaje de los números complejos, si $z = a + bi$ y $\theta$ el ángulo determinado por $z$ y el eje horizontal, entonces

$$a = |z|\cos(\theta), \qquad b = |z|\,\mathrm{sen}(\theta),$$

es decir

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)). \tag{3}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la fórmula (3) e llamada la *forma polar* de $z$ y $\theta$ es llamado el *argumento de* $z$.

**Notación exponencial.** Otra notación para representar a los números complejos es la *notación exponencial*, en la cual se denota

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Por lo tanto si $z \in \mathbb{C}$ y $\theta$ es el argumento de $z$,

$$z = re^{i\theta}$$

donde $r = |z|$. No perder de vista, que la notación exponencial no es más que una notación (por ahora).

Proposición 0.1.3. *Sean* $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, *entonces*

$$z_1z_2 = r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Demostración. $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))$, luego

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos(\theta_1)+i\,\mathrm{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_2)+i\,\mathrm{sen}(\theta_2)) \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+i\cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)+i\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)+i^2\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)) \\ &= r_1r_2((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2))+i(\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2))) \\ &\overset{(*)}{=} r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

La igualdad $(*)$ se debe a las tradicionales fórmulas trigonométrica del coseno y seno de la suma de ángulos. $\square$