1. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

(b) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

(c) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces para todo x, y enteros $a|(bx + cy)$.

(d) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

2. Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:

(a) 0 es par y 1 es impar.

(b) Si $b \neq 0$ es par y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

(c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.

(d) Si $b \neq 0$ es par y $b \mid 2$, entonces $b = 2$ ó $b = -2$.

(e) La suma de un número par y uno impar es impar.

(f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

(g) Probar que el producto de un número entero por su siguiente es un número par.

(h) Dado un número entero probar que es par si y sólo si su cuadrado lo es.

3. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$:

(a) $a \cdot b \,|\, c \Rightarrow a \,|\, c$ y $b \,|\, c$

(b) $a \cdot b \,|\, c \Rightarrow a \,|\, c$ y $b \,|\, c$

(c) $9 \,|\, a \cdot b \Rightarrow 9 \,|\, a$ ó $9 \,|\, b$

(d) $a \,|\, b + a^2 \Rightarrow a \,|\, b$

(e) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

(f) $2 \,|\, a \cdot b \Rightarrow 2 \,|\, a$ ó $2 \,|\, b$

(g) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

(h) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.

(i) $a \,|\, b \Rightarrow |a| \leq |b|$

(j) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a{+}b) \mid c$.

(k) $a \,|\, b \Rightarrow a \leq b$

(l) $a \,|\, b \Rightarrow a^n \,|\, b^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

4. (a) Demostrar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

(b) Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

5. Hallar el cociente y el resto de la división de:

(a) 127 por 99. (b) -135 por 23. (c) 135 por -23. (d) -135 por -23.

6. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demostrar que n es par si y sólo si n^2 es par.

7. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

8. Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3 y11.

9. Demostrar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

10. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $8^n - 1$ es múltiplo de 7.

(b) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

(c) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

11. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando apropiadamente:

(a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $(n+1)(5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Demostrar que $a - b | a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Demostrar que si n es un número natural impar, entonces $a + b | a^n + b^n$.

iii) Demostrar que si n es un número natural par, entonces $a + b | a^n - b^n$.

13. Demostrar que $n(n+1)$ es par para todo $n \in \mathbb{Z}$.

14. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.

ii) $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2.

iii) $2^n \prod_{i=1}^{n} (2i - 1)$ es divisible por $n!$.

iv) $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$ (sugerencia: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$).

15. Expresar 1810 y 1816 en las bases 2 y 11.

16. Expresar en base 10 los siguientes enteros: $(1111)_2$ y $(1111)_{12}$.

17. Convertir

(a) $(133)_4$ a base 8,

(b) $(\alpha 38)_{16}$ a base 8,

(c) $(3506)_7$ a base 2,

(d) $(1541)_6$ a base 4.

Aquí α es el dígito que reemplaza al 11.

18. Encontrar los siguientes m.c.d. $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.

19. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

(a) 14 y 35,

(b) 11 y 15,

(c) 12 y 52,

(d) 12 y -52

(e) 12 y 532.

20. Mostrar que 725 y 441 son coprimos y encontrar enteros m, n tales que $m \cdot 725 + n \cdot 441 = 7$.

21. Dado un entero a, $a \neq 0$, hallar $(0, a)$.

22. Demsotrar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.

23. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ enteros coprimos. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.

(b) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.

24. Demostrar que 3 y 5 son números primos.

25. Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

26. Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

27. Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n+1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

28. Demostrar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

29. Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números

(a) $a = 12$ y $b = 15$.
(b) $a = 11$ y $b = 13$.
(c) $a = 140$ y $b = 150$.
(d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$.
(e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

30. Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

31. (a) Demostrar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a,b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.

(b) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces $\dfrac{a}{(a,b)}$ y $\dfrac{b}{(a,b)}$ son coprimos.

32. Determinar, cuando existan, todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfacen:

(a) $5x + 8y = 3$,
(b) $7x + 11y = 10$,
(c) $24x + 14y = 7$,
(d) $20x + 16y = 36$,
(e) $39x - 24y = 6$,
(f) $1555x - 300y = 11$.

33. Demostrar que si para cada $j \in \mathbb{N}$, p_j es el j-ésimo primo positivo, entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1.$$