1. La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos.

(a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?

(b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?

(c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?

(d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?

(e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

2. ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

3. ¿Cuántos números múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

4. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

5. En los boletos viejos de ómnibus, aparecía un *número* de 5 cifras (en este caso podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.

(a) ¿Cuántos boletos capicúas había?

(b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?

6. Las antiguas patentes de auto tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Las nuevas patentes tienen 3 letras y luego 3 dígitos. ¿Con cuál de los dos criterios pueden formarse más patentes?

7. Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos,

(a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?

(b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?

(c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

8. Mostrar que si uno arroja un dado n veces y suma todos los resultados obtenidos, hay $\dfrac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

9. ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?

10. El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho, o tener 33?

11. ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

12. En un grupo de n estudiantes, ¿de cuántas formas se puede hacer un comité de tamaño k que contiene un subcomité de tamaño m.

13. (a) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA

(b) Ídem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.

(c) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?

14. Para enteros $0 \leq k \leq n$ demostrar que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

15. Demostrar que si $m, n \geq 0$ son enteros y $k \leq m+n$ entonces

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

16. En un salón de n estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité donde uno de los miembros es designado como el presidente y el comité puede ser de cualquier tamaño?

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

18. Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

19. Demostrar que para todo i, j, $k \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

20. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

(a) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(b) $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

21. Deducir una fórmula para las sumas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$$

y

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

22. Demostrar las siguientes identidades

(a) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$, $n \geq 1$.

(b) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$, $1 \leq r \leq n$.

(c) $\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.

(d) $\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{2n}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$, $n \geq 2$.

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$, $n \geq 1$.

(f) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \geq 1$.

(g) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}$, $n \geq 4$.

¿De cuáles identidades puede dar una situación o interpretación combinatoria que las justifique?

23. ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:

(a) No hay restricciones en la selección?

(b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?

(c) El comité debe tener al menos 3 profesores?

(d) El profesor Xavier y el estudiante Havok no pueden estar juntos en el comité?

24. En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.

25. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

26. ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

27. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

28. Con 20 socios de un club se desea formar 5 listas electorales (disjuntas). Cada lista consta de 1 Presidente, 1 Tesorero y 2 vocales. ¿De cuántas formas puede hacerse?

29. ¿De cuántas formas se pueden fotografiar 7 matrimonios en una hilera, de tal forma que cada hombre aparezca al lado de su esposa?

30. Un grupo de 25 personas, formado por 5 docentes y 20 estudiantes, tienen que ir desde la FAMAF al Observatorio de Bosque Alegre. Para ello disponen de 5 autos IGUALES con una capacidad de 5 personas cada uno.

(a) ¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse las 25 personas en los 5 autos?

(b) ¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse las 25 personas si tiene que haber un docente por cada auto?

(c) Ana y Bruno son dos estudiantes en el grupo que no se llevan muy bien ¿De cuántas formas distintas puede lograrse la distribución en (b) si Ana y Bruno van en autos distintos?

Aclaración: No importa cómo se acomodan 5 personas dentro de un auto.

31. (a) ¿Cuántos números entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

(b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 10?

(c) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 3?

32. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 14 libros distintos entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 libros?

33. Queremos formar una contraseña de 8 dígitos con los símbolos: A, B, C, D, E, F, G, 1, 2, 3, 4, 5. De cuántas formas puedo hacerla si:

(a) No hay ninguna restricción.

(b) La letra B no puede estar en la misma contraseña que el número 4.

(c) La contraseña debe contener al menos 3 números.

34. Tiramos 3 monedas al aire. Cual es la probabilidad de sacar al menos una cara?

35. En el aula hay 30 alumnos. Cuál es la probabilidad de que haya dos alumnos que tengan su cumpleaños el mismodía?

36. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 7 bolitas indistinguibles en 4 cajas numeradas?

37. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 10 bolitas blancas y 13 bolitas negras en 8 cajas numeradas?

38. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya exactamente 3 cajas vacías?

39. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya a lo sumo 3 cajas vacías?

40. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya por lo menos 3 cajas vacías?