Guido Ivetta

Ejercicio 1

Teo: La complejidad de EK en KK-Networks es $O(\log(n)\cdot m^2)$

Dem: Supongo que si en el network está el lado $\overrightarrow{xy}$, entonces no está el lado $\overrightarrow{yx}$. No es restrictivo.

Como la búsqueda y construcción de cada camino aumentante se hace con BFS, cada incremento del flujo tiene complejidad $O(m)$. Para acotar la complejidad de EK con los K-K-Networks, necesitamos dar una cota de cuantos incrementos hacemos.

Sean $f_0, f_1, \ldots$ etc los flujos parciales producidos por EK.

En cada construcción de un camino aumentante al menos un lado se vuelve crítico. Supongo que un lado puede volverse crítico B veces como máximo. Por lo tanto la cantidad de flujos intermedios está acotada por mB. Porque hay m lados que pueden volverse críticos hasta B veces.

$\therefore$ complejidad de EK en KK-Networks es $O(m)\cdot O(mB) = O(Bm^2)$

Supongamos que un lado xy se vuelve crítico en el paso k y luego en el paso r con $r > k$.

Caso crítico en k porque se saturó

Para que xy se vuelva crítico de nuevo en el paso r

Guido Iveta

debe pasar alguna de las siguientes dos cosas.
1- se vació en el paso r
2- se saturó en el paso r
Para ② se tiene que haber vaciado un poco entre el paso k y r.
∴ En cualquiera de los dos casos se deduce que hay un paso $l > k$ tq el flujo disminuye en $\overrightarrow{xy}$ al pasar de f_l a f_{l+1}

En el paso k se saturó, por lo tanto en f_{k+1} se usa un camino de la forma $s \ldots xy \ldots t$.
Como estamos viendo EK, ese camino es de longitud mínima.
$\therefore d_k(y) = d_k(x) + 1$ (i)
En el paso l el flujo disminuye, por lo tanto se usa un camino de la forma $s \ldots yx \ldots t$ en f_{l+1}.
Como estamos usando EK, este camino es de longitud mínima
$\therefore d_l(x) = d_l(y) + 1$ (ii)

Entonces
$$
\begin{aligned}
d_l(t) &= d_l(x) + b_l(x) \\
&= d_l(y) + 1 + b_l(x) \quad \text{por (ii)} \\
&\geq 2 \cdot d_k(y) + 1 + 2 \cdot b_k(x) \quad \text{por KK-Xbeture k} \\
&= 2(d_k(x)+1) + 1 + 2 \cdot b_k(x) \quad \text{por (i)} \\
&= 2 \cdot d_k(x) + 2 + 1 + 2 \cdot b_k(x) \\
&= 2(d_k(x) + b_k(x)) + 3 \\
&= 2(d_k(t)) + 3 \\
&> 2\, d_k(t)
\end{aligned}
$$

Gorda vuelta

Caso crítico es k porque se vació

Para que se vuelva crítico otra vez en r.
Si se satura en r entonces aumentó en r.
Si se vacía en r entonces tuvo que llenarse un poco entre k y r. En ambos casos hay un $l > k$ donde aumenta el flujo en $\overrightarrow{xy}$

Se vació en k así que se usó el camino $s \dots yx \dots t$.
Como estamos en EK $\Rightarrow d_k(x) = d_k(y) + 1$ (iii)

Se aumentó el flujo en l, se usó el camino $s \dots xy \dots t$ para pasar de f_l a f_{l+1} $\Rightarrow d_l(y) = d_l(x) + 1$ (iv)

$$
\begin{aligned}
\therefore d_l(t) &= d_l(y) + b_l(y) \\
&= d_l(x) + 1 + b_l(y) && \text{por (iv)} \\
&\geq 2 \cdot d_k(x) + 1 + 2 \cdot b_k(y) && \text{por KK-Network} \\
&= 2(d_k(y) + 1) + 1 + 2 \cdot b_k(y) && \text{por (iii)} \\
&= 2 d_k(y) + 2 + 1 + 2 b_k(y) \\
&= 2(d_k(y) + b_k(y)) + 2 + 1 \\
&= 2 d_k(t) + 3 > 2 d_k(t)
\end{aligned}
$$

Entonces $d_r(t) \geq d_l(t) > 2 d_k(t)$

Concluimos que para que un lado vuelva a volverse crítico, la distancia entre s y t debe duplicarse por lo menos.
Como la distancia entre s y t puede ir desde 1 a $n-1$, concluimos que un lado puede volverse crítico un máximo

Guido Iuelta

de $\log_2(n)$ veces. Es decir $O(\log(n))$ veces

Así que $B = \log(n)$

$\therefore$ complejidad de E-K en kk-networks es $O(\log(n) \cdot m^2)$

Pablo Ilvetta

Ejercicio 2

Sea C un código de longitud n, $\delta = \delta(C)$ y $t = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Entonces:

$$\#C \leq \frac{3^n}{\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} \cdot 2^r}$$

Dem

Sea $A = \bigcup_{v \in C} D_t(v)$.

Como C corrige t errores $\Rightarrow D_t(v) \cap D_t(w) = \emptyset$

Por lo tanto la unión de A es disjunta. $\therefore \#A = \sum_{v \in C} \#D_t(v)$

Para calcular la cardinalidad de los D_ts, definimos:

$$S_r(v) = \{w \in \{0,1,2\}^n : d_H(v,w) = r\}$$

Como $D_t(v) = \{w \in \{0,1,2\}^n : d_H(v,w) \leq r\}$, entonces D_t es la unión de los $S_r(v)$

$$D_t(v) = \bigcup_{r=0}^{t} S_r(v)$$

Como no podemos tener $d_H(v,w) = r$ y al mismo tiempo $d_H(v,w) = r'$ para $r \neq r'$, entonces la unión de los D_t es disjunta.

Guido Iveltta

$$\therefore \# D_t(v) = \sum_{r=0}^{t} \# S_r(v)$$

Un $w \in S_r(v)$ es una palabra que difiere de v en exactamente r de los n lugares posibles. Como no estamos en $\{0,1\}^n$ entonces con saber donde está el error no es suficiente. Debemos saber donde está y a qué corregirlo.

Así que podemos asociar cada $w \in S_r(v)$ a una dupla (H, B) donde H es un subconjunto de cardinalidad r de $\{1, 2, \dots n\}$ con los índices de donde están los errores entre v y w, y B es un vector binario de largo r tq si $B_i = 1$ debemos corregirlo con el siguiente elemento de $\{0,1,2\}$ y si $B_i = 0$ debemos corregirlo con el elemento anterior de $\{0,1,2\}$. Notar que "siguiente" de 2 es 0. "Anterior" de 0 es 2.
De la misma forma, si tenemos a V y una dupla (H, B) de la forma previamente descripta, podemos construir $w \in S_r(v)$ cambiando los números indicados por los índices de H por la cantidad descripta por el vector B.

Es decir sea, $X_r = \{(H, B) : H \subseteq \{1, 2, \dots n\} \wedge \# H = r \wedge B \in \{0,1\}^r\}$

Sea F una función que asocia el error i-ésimo con el índice original de v.
Sea $\Psi : S_r(v) \to X_r$ por medio de

$$\Psi(w) = \{(H, B) \text{ tq } H = \{i = w_i \neq v_i\},\ B \in \{0,1\}^r \text{ tq } \begin{array}{l} B_i = 1 \text{ si } W_{F(i)} = V_{F(i)} - 1 \bmod 3 \quad \forall i \in \{1..r\} \\ B_i = 0 \text{ si } W_{F(i)} = V_{F(i)} + 1 \bmod 3 \quad \forall i \in \{1..r\} \end{array} \}$$

Punto hecha

y sea $\phi : X_r \to S_r(V)$ por medio de:

$$\phi((H,B)) = w \text{ tq } \begin{cases} w_i = v_i & \text{si } i \notin H \\ w_i = v_i - 1 \mod 3 & \text{si } B_{f^{-1}(i)} = 1 \wedge i \in H \\ w_i = v_i + 1 \mod 3 & \text{si } B_{f^{-1}(i)} = 0 \wedge i \in H \end{cases}$$

Entonces ψ, ϕ son inversas una de la otra.
Por lo tanto $\# S_r(V) = \# X_r$

Vemos que $X_r = (H, B)$. La cardinalidad de H son todos los posibles subconjuntos de largo r de $\{0,1\}^n$. $\therefore \# H = \binom{n}{r}$.
B es todo posible vector binario de largo $r \Rightarrow \# B = 2^r$

$$\# X_r = \# H \cdot \# B = \binom{n}{r} \cdot 2^r$$

$$\# D_t(V) = \sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} \cdot 2^r$$

$$\# A = \sum_{V \in C} \left(\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} \cdot 2^r \right)$$

La suma interior no depende de V.

$$\therefore \# A = \left(\sum_{r=0}^{t} \left(\binom{n}{r} \cdot 2^r \right) \right) \# C$$

$$\therefore \# C = \frac{\# A}{\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} \cdot 2^r}$$

Como A es subconjunto de $\{0,1,2\}^n \Rightarrow \# A \leq 3^n \Rightarrow \# C \leq \dfrac{3^n}{\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} 2^r}$

Grub Ivelta

Ejercicio 3

Teorema 7-Color es NP-Completo

Queremos ver que 7-SAT $\le_p$ 7-Color
Crearemos polinomial/mente G tq B satisfacible $\iff \chi(G) \le 7$

Las variables de B son $x_1 \dots x_n$
y que $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$

Donde cada $D_j = l_{1j} \vee l_{2j} \vee \dots \vee l_{7j}$.

Sea G compuesto por:
Vértices:
- $2n$ vértices V_l, uno por cada literal l
- $14m$ vértices $\{e_{kj}\}_{\substack{k=1..7\\ j=1..m}} \cup \{A_{kj}\}_{\substack{k=1..7\\ j=1..m}}$
- 6 vértices especiales s, t, U_1, U_2, U_3, U_4

$\Big\}$ $2n + 14m + 6$ vértices

Lados:
- todos los 15 lados entre los especiales formando un K_6
- $2n$ lados entre t y V_l para cada literal l
- n lados entre V_x y $V_{\overline{x}}$, uno por cada variable x
- $7m$ lados entre e_{kj} a_{kj} ($k = 1..7$, $j = 1..m$)
- $21m$ lados entre todos los a_{ij} para todos los i del mismo j
- $7m$ lados entre s y e_{kj} $k = 1..7$ $j = 1..m$
- $7m$ lados entre e_{kj} $V_{l_{kj}}$ $k = 1..7$ $j = 1..m$
- $28m$ lados entre todos los U y todos los e

Guido Ivetta

- Bn lados entre todos los u y todos los V_ℓ

Vemos que construir consiste en leer B y crear una cantidad de vértices y lados cuyas cantidades están en función de n y m lineal de grado 1. ∴ la construcción de G es polinomial.

Como G contiene K_7 entonces $\chi(G) \geq 7$. Así que $\chi(G) \leq 7$ sii $\chi(G) = 7$.

Probemos que B es satisfacible $\iff \chi(G) = 7$

Empecemos por $\Rightarrow$)

Por Hip. existe un $b \in \{0,1\}^n$ tq $B(b) = 1$

Coloreamos los vértices V_ℓ por medio de $c(V_\ell) = \ell(b)$

V_x y $V_{\bar{x}}$ forman lado pero $c(V_{\bar{x}}) = \bar{x}(b) = 1 - x(b) \neq x(b) = c(V_x)$

Así que los lados $V_x V_{\bar{x}}$ no crean problemas.

Coloreamos $c(s) = 1$; $c(t) = 2$; $c(U_1) = 3$, $c(U_2) = 4$, $c(U_3) = 5$, $c(U_4) = 6$

Como estos lados especiales forman un K_6 y todos tienen distinto color entonces ninguno de estos lados genera problemas.

Como $c(t) = 2$ y $c(V_\ell) \in \{0,1\}$ entonces los tV_ℓ no generan problemas

Guido Luetta

Como $B(b)=1$ y $B = D_1 \dots D_m$ entonces $D_j(b)=1 \ \forall j$

Como $D_j = V_{1j} \vee \dots \vee V_{3j}$ entonces para todo j existe al menos un k_j tq $\ell_{k_j,j}(b) = 1$ (i)

Si hay más de uno elegimos el primero.

Coloreemos $c(a_{k_j,j}) = 2$

Para los $a_{r,j}$ con $r \neq k_j$ los coloreamos con el resto de los 7 colores.

Esto significa que el K_3 formado por los a está coloreado todo con colores distintos así que no genera problemas.

Coloreemos para cada j: $c(e_{k_j,j}) = 0$

$c(e_{i,j}) = 2 \quad \forall i \neq k_j$

Como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(a_{k_j,j}) = 2$ entonces ese lado no genera problemas

Como $c(e_{r,j}) = 2 \ \forall r \neq k_j$ y $c(a_{r,j}) \in \{0,1,3,4,5,6\}$ esos lados no generan problemas

Como $c(e_{i,j}) \in \{2,0\}$, $c(s) = 1$, $c(u) \in \{3,4,5,6\}$, entonces los lados se_{ij} y los lados que unen los u con los e_{ij} no causan problemas

Para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(v_{\ell_{r,j}}) \in \{0,1\}$ así que los lados $e_{r,j} v_{\ell_{r,j}}$ no causan problemas

Para $r = k_j$ tenemos $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = \ell_{k_j,j}(b) = 1$ por (i)

Por lo tanto como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = 1$ entonces estos lados no causan problemas

Guido Welta

Como $c(U) \in \{3,4,5,6\}$ y $c(V_e) \in \{0,1\}$ entonces los lados entre U y V_e no causan problemas.

$\therefore$ Dimos un coloreo propio con 7 colores entonces el $\Rightarrow$ vale

Veamos el $\Leftarrow$

Ahora por hipótesis tenemos un coloreo c propio que colorea a G con 7 colores.
Queremos definir un $b \in \{0,1\}^n$ tq $B(b) = 1$.

Definamos b: $b_i = 1$ si $c(v_{x_i}) = c(s)$
$b_i = 0$ si $c(v_{x_i}) \neq c(s)$

Sea ahora $j \in \{1, 2 \dots m\}$

Como los a_{kj} forman un K_7 entonces todos los 7 colores disponibles deben estar distribuidos entre los a.
En particular existe un q tq $c(a_{q,j}) = c(t)$
Analicemos el posible color de $e_{q,j}$:

1_ $e_{q_j} a_{q_j} \in E \Rightarrow c(e_{q_j}) \neq c(a_{q,j}) = c(t)$

2_ $e_{q_j} s \in E \Rightarrow c(e_{q_j}) \neq c(s)$

3_ $e_{q_j} u_i \ \forall i \in E \Rightarrow c(e_{q_j}) \neq c(u_i) \ \forall i$

Queda tratado

Como los vértices especiales forman un K_6 entonces todos deben tener color distinto. Como $e_{q,j}$ está unido a todos ellos, debe tener el 7^{mo} color.

$$\forall e_{q,j} \; e_{q,j} \in E \Rightarrow c(V_{e_{q,j}}) \neq c(e_{q,j})$$

$$\forall e_{q,j} \; t \in E \Rightarrow c(V_{e_{q,j}}) \neq c(t)$$

Como $e_{q,j}$ tiene el 7^{mo} color, vemos que $V_{e_{q,j}}$ no puede tener ni el 7^{mo} color ni el color de t. Tampoco puede tener el color de ninguna U porque está unida a todos ellos.

Por lo tanto sólo queda disponible el color de s: $c(V_{e_{q,j}}) = c(s)$

Caso $l_{q,j}$ es una variable

Por lo tanto existe i tq $l_{q,j} = x_i$

$c(V_{e_{q,j}}) = c(s) \Rightarrow c(V_{x_i}) = c(s)$

Por definición de b $\Rightarrow b_i = 1$

Entonces $l_{q,j}(b) = x_i(b) = b_i = 1$

Caso $l_{q,j}$ es una negación de una variable

Por lo tanto existe i tq $l_{q,j} = \overline{x}_i$

$c(V_{e_{q,j}}) = c(s) \Rightarrow c(V_{\overline{x}_i}) = c(s)$

como $V_{x_i} V_{\overline{x}_i} \in E$ entonces no pueden tener el mismo color

$\therefore c(V_{x_i}) \neq c(s) \Rightarrow b_i = 0$

Entonces $l_{q,j}(b) = \overline{x}_i(b) = 1 - x_i(b) = 1 - b_i = 1 - 0 = 1$

En ambos casos $l_{q,j}(b) = 1$

Guido Vella

Como $D_j = \ell_{1j} \vee \dots \vee \ell_{7j}$ entonces $\ell_{qj}(b)=1 \Rightarrow D_j(b)=1$

Como el j era cualquiera en $\{1 \dots m\}$ hemos probado que $D_j(b)=1 \ \forall j$

Como $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m \Rightarrow B(b)=1$

$\therefore$ B es satisfacible

$\therefore$ Completamos $\Leftarrow$

$\therefore$ B satisfacible $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 7$

$\therefore$ 7-SAT $\leq_p$ 7-Color

Como 7-SAT es NP completo, entonces 7-Color también lo es