PNP2

Daniel

NP completit

Reducción
Polinomial
NP completo

NP completo Teorema de Cool

Teoremas de

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

B sat

P vs NP 2da parte

Daniel Penazzi

9 de mayo de 2021

Tabla de Contenidos

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sa}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$

3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $egin{aligned} extit{B} ext{ sat} \ &\Rightarrow \chi(extit{G}) = 3 \ \chi(extit{G}) = 3 \ &\Rightarrow extit{E} \ ext{sat} \end{aligned}$

- 1 NP completitud
 - Reducción Polinomial
 - NP completo
 - Teorema de Cook
- 2 Teoremas de Karp
- 3SAT
 - Construcción
 - $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$
 - \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat
 - 3COLOR
 - Onstrucción de G
 - $B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$
 - $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

PNP2

Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Feorema de Cook

Karp

Construcción $B \text{ sat } \Rightarrow \overline{B} \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow B \text{ sat }$ 3COLOR Construcción de G $B \text{ sat } \Rightarrow X(G) = 3$

■ La clase pasada dimos la definición y ejemplos de problemas en *NP* (y co-*NP*).

PNP2

Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Feorema de Cook

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- La clase pasada dimos la definición y ejemplos de problemas en NP (y co-NP).
- En esta clase introduciremos las nociones de NP-hard y NP-completo, y similar para co-NP.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema Karp

 $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- La clase pasada dimos la definición y ejemplos de problemas en NP (y co-NP).
- En esta clase introduciremos las nociones de NP-hard y NP-completo, y similar para co-NP.
- Estos saldrán de una herramienta que se usa para "comparar" problemas de decisión.

PNP2

Daniel

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- La clase pasada dimos la definición y ejemplos de problemas en NP (y co-NP).
- En esta clase introduciremos las nociones de NP-hard y NP-completo, y similar para co-NP.
- Estos saldrán de una herramienta que se usa para "comparar" problemas de decisión.
- Es decir, dados dos problemas de decisión queremos poder decir cual de los dos es "mas facil" de resolver.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp
3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $3\operatorname{COLOR}$ Construcción de $G \operatorname{B} \operatorname{sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Obviamente si supieramos cuál es la mejor complejidad de algoritmos que resuelven cada uno de ellos, ya estaría, pero como vimos, no se conoce la complejidad de muchos problemas en NP, ni siquiera si son o no polinomiales.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

RAI ϕ 3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de B sat $\Rightarrow \gamma(G) = 3$

Obviamente si supieramos cuál es la mejor complejidad de algoritmos que resuelven cada uno de ellos, ya estaría, pero como vimos, no se conoce la complejidad de muchos problemas en NP, ni siquiera si son o no polinomiales.

■ El concepto clave para comparar problemas es el de "Reducción Polinomial"

PNP2

Daniel Penazzi

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

 \mathcal{B} sat $\Rightarrow \mathcal{B}$ sat COLOR
Construcción de \mathcal{G} \mathcal{B} sat $\Rightarrow \chi(\mathcal{G}) = 3$ $\chi(\mathcal{G}) = 3 \Rightarrow \mathcal{B}$ sat

- Obviamente si supieramos cuál es la mejor complejidad de algoritmos que resuelven cada uno de ellos, ya estaría, pero como vimos, no se conoce la complejidad de muchos problemas en NP, ni siquiera si son o no polinomiales.
- El concepto clave para comparar problemas es el de "Reducción Polinomial"
- La idea básica es definir "Reducción Polinomial" de forma tal que si "reducimos polinomialmente" un problema de decisión τ a un problema de decisión ρ , entonces si podemos resolver ρ , podamos resolver τ con sólo un esfuerzo extra polinomial.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

De esa forma si podemos "reducir polinomialmente" un problema de decisión τ a un problema de decisión ρ , entonces τ es "mas fácil" de resolver que ρ , porque si pudieramos resolver ρ , entonces automáticamente podriamos resolver τ usando la forma de resolver ρ mas un esfuerzo extra polinomial para "transformar" τ en ρ .

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sa

B̃ sat ⇒ B sa

3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

De esa forma si podemos "reducir polinomialmente" un problema de decisión τ a un problema de decisión ρ , entonces τ es "mas fácil" de resolver que ρ , porque si pudieramos resolver ρ , entonces automáticamente podriamos resolver τ usando la forma de resolver ρ mas un esfuerzo extra polinomial para "transformar" τ en ρ .

Ahora bien, hay varios conceptos distintos de "Reducción Polinomial" en la literatura.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitue

Reducción Polinomial NP completo

Teoremas de

Karp

3SAI
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Las dos mas conocidas son:

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

as B sat B sat B sat B sat

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Las dos mas conocidas son:
 - La reducción polinomial de Cook (tambien llamada reducción de Cook-Turing o a veces reducción polinomial de Turing)

PNP2

Daniel Penazz

completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de of B sat $B \text{ sat} \Rightarrow \gamma(G) = 3$

Las dos mas conocidas son:

- La reducción polinomial de Cook (tambien llamada reducción de Cook-Turing o a veces reducción polinomial de Turing)
- 2 La reducción polinomial de Karp. (el de Edmonds-Karp)

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teorema Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de C B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Las dos mas conocidas son:

- La reducción polinomial de Cook (tambien llamada reducción de Cook-Turing o a veces reducción polinomial de Turing)
- 2 La reducción polinomial de Karp. (el de Edmonds-Karp)
- Si bien la primera fue la de Cook, la que casi todo el mundo usa es la de Karp.

PNP2

Danie Penazz

NP completitue

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cook

Karp

 $\begin{array}{l} {\rm 3SAT} \\ {\rm Construcción} \\ {\it B} \ {\rm sat} \Rightarrow \ {\it B} \ {\rm sat} \\ {\it \overline{B}} \ {\rm sat} \Rightarrow \ {\it B} \ {\rm sat} \\ {\rm 3COLOR} \\ {\rm Construcción} \ {\rm de} \ {\it G} \\ {\it B} \ {\rm sat} \\ \Rightarrow \ \chi({\it G}) = 3 \end{array}$

Hay varios motivos para eso.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp

3SAT Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Hay varios motivos para eso.
- Si un problema se reduce a otro por medio de una reducción de Karp, entonces tambien se reduce por medio de una reducción de Cook.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coo
Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Hay varios motivos para eso.
- Si un problema se reduce a otro por medio de una reducción de Karp, entonces tambien se reduce por medio de una reducción de Cook.
- Al revés no se sabe si siempre es cierto. (se sospecha que no, pero no se sabe. De hecho si fuera cierto entonce NP =co-NP).

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo Teoremas d

Teoremas de Karp 3SAT Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \overline{B} \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR Construcción de $B \operatorname{sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Hay varios motivos para eso.

- Si un problema se reduce a otro por medio de una reducción de Karp, entonces tambien se reduce por medio de una reducción de Cook.
- Al revés no se sabe si siempre es cierto. (se sospecha que no, pero no se sabe. De hecho si fuera cierto entonce NP =co-NP).
- Ambas nociones dan origen a distintos conjuntos NP-hard y co-NP-hard, y en realidad bajo reducción de Karp esos dos conjuntos son distintos pero bajo Cook son iguales.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de

Karp

3SAT

Construcción B sat \Rightarrow \overline{B} sat \overline{B} sat \Rightarrow 8 sat

3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Como la reducción de Karp es mas "granular" y permite diferenciar mas clases de complejidad, es la que mas se usa.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Como la reducción de Karp es mas "granular" y permite diferenciar mas clases de complejidad, es la que mas se usa.
- Aún si les gusta mas la de Cook, si les enseñara todo usando reducciones de Cook despues no entenderían mucha parte de la literatura de esta area, que usa Karp.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Co

Teoremas Karp

3SAT Construcción B sat $\Rightarrow \tilde{B}$ sat $\Rightarrow \tilde{B}$ sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3$ $\Rightarrow B$

- Como la reducción de Karp es mas "granular" y permite diferenciar mas clases de complejidad, es la que mas se usa.
- Aún si les gusta mas la de Cook, si les enseñara todo usando reducciones de Cook despues no entenderían mucha parte de la literatura de esta area, que usa Karp.
- Asi que daremos una idea de ambas, pero luego daremos la definición formal y todas las pruebas usando la de Karp.

Reducción Polinomial de Cook

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

■ En ambas, como dije, la idea es que si reducimos polinomialmente τ a ρ , deberiamos poder resolver τ con sólo esfuerzo polinomial extra sabiendo resolver ρ .

Reducción Polinomial de Cook

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de «

- En ambas, como dije, la idea es que si reducimos polinomialmente τ a ρ , deberiamos poder resolver τ con sólo esfuerzo polinomial extra sabiendo resolver ρ .
- Cook (basandose en una noción similar de Turing, pero donde no requeria la parte "polinomial") define que τ se reduce polinomialmente a ρ si:

Reducción Polinomial de Cook

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc
Teoremas d
Karp
3SAT

- En ambas, como dije, la idea es que si reducimos polinomialmente τ a ρ , deberiamos poder resolver τ con sólo esfuerzo polinomial extra sabiendo resolver ρ .
- Cook (basandose en una noción similar de Turing, pero donde no requeria la parte "polinomial") define que τ se reduce polinomialmente a ρ si:
 - dado un oraculo que resuelve instancias de ρ en tiempo O(1), podemos construir un programa que tome una instancia de τ y haciendo una cantidad polinomial de llamadas al oraculo de ρ , resolver τ en tiempo polinomial.

PNP₂

Entonces en la reducción de Cook, podemos resolver muchas veces (mientras sea una cantidad polinomial de veces) distintas instancias de ρ para resolver una instancia de τ .

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coo
Teoremas d
Karp
3SAT

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow$

- Entonces en la reducción de Cook, podemos resolver muchas veces (mientras sea una cantidad polinomial de veces) distintas instancias de ρ para resolver una instancia de τ .
- Tambien tiene el "poder" de que aunque se llame al oraculo una sola vez, luego se pueden hacer "cosas" con el resultado del oraculo.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Co

Karp

3SAT Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Entonces en la reducción de Cook, podemos resolver muchas veces (mientras sea una cantidad polinomial de veces) distintas instancias de ρ para resolver una instancia de τ .
- Tambien tiene el "poder" de que aunque se llame al oraculo una sola vez, luego se pueden hacer "cosas" con el resultado del oraculo.
- Karp restringe mucho mas lo que se puede hacer.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

COLOR

Construcción de G $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Entonces en la reducción de Cook, podemos resolver muchas veces (mientras sea una cantidad polinomial de veces) distintas instancias de ρ para resolver una instancia de τ .
- Tambien tiene el "poder" de que aunque se llame al oraculo una sola vez, luego se pueden hacer "cosas" con el resultado del oraculo.
- Karp restringe mucho mas lo que se puede hacer.
- Sólo permite una llamada al oraculo y ademas hay que usar directamente el resultado.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

Reducción Polinomial (de Karp)

Dados dos problemas de decisión ρ y τ , se dice que τ es reducible polinomialmente a ρ ($\tau \leq_{\rho} \rho$) si existe un algoritmo A polinomial que dadas instancias x de τ , produce instancias A(x) de ρ , de forma tal que para toda instancia x de τ se cumple que $\tau(x) = \rho(A(x))$.

PNP₂

Reducción Polinomial

 Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, asi que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, asi que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:
 - 1 Se da el algoritmo A y se muestra que es polinomial.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teoremas (

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de \overline{G} \overline{G} \overline{G} \overline{G} \overline{G}

Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, asi que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:

- 1 Se da el algoritmo A y se muestra que es polinomial.
- 2 Se prueba que $\tau(x) = \text{"SI"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"SI"}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp 3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\operatorname{3COLOR}$ $\operatorname{Construcción} \operatorname{de} G$ $\operatorname{B} \operatorname{sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, asi que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:

- 1 Se da el algoritmo A y se muestra que es polinomial.
- 2 Se prueba que $\tau(x) = \text{"SI"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"SI"}$
- 3 Se prueba que $\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}$

PNP2

Danie Penazz

NP complete

Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, asi que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:
 - 1 Se da el algoritmo A y se muestra que es polinomial.
 - 2 Se prueba que $\tau(x) = \text{"SI"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"SI"}$
 - 3 Se prueba que $\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}$
- (o bien sus equivalentes lógicos, pej [3] es lo mismo que probar $\tau(x) = \text{"NO"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"NO"}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas di Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \overline{B} \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\operatorname{3COLOR}$ $\operatorname{Construcción de } G$ $\operatorname{B \operatorname{sat}} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo A.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Karp

3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sat

B sat ⇒ B sat

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo *A*.
- O peor, intentan probar $[\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}]$ usando en el medio de la prueba....que $\tau(x) = \text{"SI"}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo *A*.
- O peor, intentan probar $[\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}]$ usando en el medio de la prueba....que $\tau(x) = \text{"SI"}$.
- Esto suele pasar porque memorizan sin entender las partes [2] y [3] y en el medio de la prueba de pej [3] ponen un fragmento de la prueba de [2].

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B}$ $\tilde{B} \text{ sat} \rightarrow B$

 $B \text{ sat } \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo A.

- O peor, intentan probar $[\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}]$ usando en el medio de la prueba....que $\tau(x) = \text{"SI"}$.
- Esto suele pasar porque memorizan sin entender las partes [2] y [3] y en el medio de la prueba de pej [3] ponen un fragmento de la prueba de [2].
- Veremos algunas pruebas de reducción y en todo examen final se requerirá una de estas pruebas.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{si}$

- Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo A.
- O peor, intentan probar $[\rho(A(x)) = \text{``SI''} \Rightarrow \tau(x) = \text{``SI''}]$ usando en el medio de la prueba....que $\tau(x) = \text{``SI''}$.
- Esto suele pasar porque memorizan sin entender las partes [2] y [3] y en el medio de la prueba de pej [3] ponen un fragmento de la prueba de [2].
- Veremos algunas pruebas de reducción y en todo examen final se requerirá una de estas pruebas.
- Por mas que tengan el 90% de la prueba "bien" si cometene un error lógico grave como los indicados arriba el descuento de puntos será masivo.

PNP2

NP completo

PNP2

Penazz

NP completitu

Polinomial

NP completo

Teorema de Cool

Teoremas Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3 \Rightarrow 6$

Definición

1 Un problema de decisión ρ se dice *NP*-hard si $\tau \in NP$ implica $\tau \leq_{P} \rho$.

PNP2

Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo

NP completo
Teorema de Cool

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B̃ sat

3COLOR Construcción de *G B* sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- 1 Un problema de decisión ρ se dice *NP*-hard si $\tau \in \mathsf{NP}$ implica $\tau \leq_{\mathsf{P}} \rho$.
- 2 ρ se dice *NP*-completo si es NP-hard y está en *NP*.

PNP2

Daniel Penazz

Completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Co

Teoremas de Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\operatorname{3COLOR}$ Construcción de C $B \operatorname{sat}$

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- 1 Un problema de decisión ρ se dice *NP*-hard si $\tau \in \mathsf{NP}$ implica $\tau \leq_{\mathsf{P}} \rho$.
- ρ se dice *NP*-completo si es *NP*-hard y está en *NP*.
 - Es decir, los problemas *NP*-hard son problemas que son "mas dificiles" que cualquier problema en *NP*.

PNP₂

NP completo

- **1** Un problema de decisión ρ se dice *NP*-hard si $\tau \in NP$ implica $\tau \leq_{\scriptscriptstyle P} \rho$.
- ρ se dice NP-completo si es NP-hard v está en NP.
 - Es decir, los problemas NP-hard son problemas que son "mas dificiles" que cualquier problema en NP.
- No es extraño pensar que existan problemas asi, pero para el caso de NP completo, pedimos que ademas el problema tambien este en NP.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teoremas de Co
Teo

En principio podria suceder que no exista ningún problema NP completo sino que tuvieramos dentro de NP problemas cada vez mas dificiles, o problemas incomparables entre si, pero de hecho se conocen miles de problemas NP completos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Co

Teoremas d Karp

En principio podria suceder que no exista ningún problema NP completo sino que tuvieramos dentro de NP problemas cada vez mas dificiles, o problemas incomparables entre si, pero de hecho se conocen miles de problemas NP completos.

Son todos "igualmente" dificiles entre si, y todos ellos son los mas dificiles de los problemas NP.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teorema de Cook

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G $\overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat}$

Para probar P = NP no hace falta dar un algoritmo polinomial PARA CADA problema NP.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Representation of the following set of the followi

- Para probar P = NP no hace falta dar un algoritmo polinomial PARA CADA problema NP.
- Basta darlo para UNO cualquiera de los problemas NP completos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sa}$

3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Para probar P = NP no hace falta dar un algoritmo polinomial PARA CADA problema NP.
- Basta darlo para UNO cualquiera de los problemas NP completos.
- Pues si ρ es NP completo y se prueba que ρ está en P, entonces dado cualquier otro problema τ ∈NP, podemos probar que τ ∈P reduciendolo a π, como se explicó antes.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teorema de Cook
Karp
SSAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat

Por otro lado, si se quiere probar P ≠ NP, entonces en vez de buscar algún problema cualquiera, lo lógico es buscar uno de entre la lista de problemas NP completos, ya que siendo los mas dificiles, si algun problema NP no está en P, ellos tampoco lo estarán.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cool

Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat } \Rightarrow \overline{B} \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow B \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow B \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sol } \Rightarrow B \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow X(G) = 3$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow X(G) = 3$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow X(G) = 3$

Por otro lado, si se quiere probar P ≠ NP, entonces en vez de buscar algún problema cualquiera, lo lógico es buscar uno de entre la lista de problemas NP completos, ya que siendo los mas dificiles, si algun problema NP no está en P, ellos tampoco lo estarán.

Veamos cual fue el primer problema que se demostró que era NP completo.

Cook

PNP2

Penazz

NP sampleti

Roducción

Polinomial

Teorema de Cook

Teorema de Coc

SAT Construcción

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ Teorema (de Cook, 1971)

(CNF)SAT es NP-completo.

Cook

PNP2

Danie Penazz

NP completi

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Coo

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de B sat

Teorema (de Cook, 1971)

(CNF)SAT es NP-completo.

Cook probó este teorema usando su reducción y luego Karp probó que tambien valia para la suya.

Cook

PNP2

Danie Penazz

NP completi

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow$

Teorema (de Cook, 1971)

(CNF)SAT es NP-completo.

- Cook probó este teorema usando su reducción y luego Karp probó que tambien valia para la suya.
- El ruso Levin probó en forma independiente un teorema similar pero no era sobre problemas de decisión, asi que a veces es llamado el teorema de Cook-Levin.

PNP2

Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de

3SATConstrucción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Prueba: no la daremos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

leoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de to $\overline{B} \text{ sat}$

- Prueba: no la daremos.
- En gral requiere estar familiarizado con maquinas de Turing, aunque sospecho que debe haber alguna prueba mas informal dando vuelta.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de (

COLOH
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Prueba: no la daremos.
- En gral requiere estar familiarizado con maquinas de Turing, aunque sospecho que debe haber alguna prueba mas informal dando vuelta.
- Esencialmente hay que ver que se puede codificar cualquier máquina de Turing no determinística como una expresión booleana en CNF.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$ 3COLOR

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Prueba: no la daremos.
- En gral requiere estar familiarizado con maquinas de Turing, aunque sospecho que debe haber alguna prueba mas informal dando vuelta.
- Esencialmente hay que ver que se puede codificar cualquier máquina de Turing no determinística como una expresión booleana en CNF.
- Algunas veces la han dado en 4to año, pero por lo que me comentaron la prueba les ha llevado de 2 a 4 clases, y entiendo que no la dan mas.

PNP2

Daniel Penazz

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo
Teorema de Cook

Teoremas de Karp

Construction $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstruction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teorema de Cook
Teoremas de
Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

- Karp probó no sólo que el teorema de Cook valia para su noción de reducción polinomial, sino que probó que otros 21 problemas eran NP completos. (según SU noción de reducibilidad, y por lo tanto, tambien para la de Cook).
- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción DE SAT(o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados NP completos) a ese problema.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas de Karp

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Karp probó no sólo que el teorema de Cook valia para su noción de reducción polinomial, sino que probó que otros 21 problemas eran NP completos. (según SU noción de reducibilidad, y por lo tanto, tambien para la de Cook).
- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción DE SAT(o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados NP completos) a ese problema.
- Esto es asi pues si σ es *NP* completo y $\sigma \leq_P \rho$ entonces ρ también es *NP* completo, pues dado $\tau \in \mathit{NP}$ tenemos:

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc

Teoremas de Karp

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \hat{B} \text{ sat}$ $\hat{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de C C sat C sat C sat C sat C sat C sat

- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción DE SAT(o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados NP completos) a ese problema.
- Esto es asi pues si σ es NP completo y $\sigma \leq_P \rho$ entonces ρ también es NP completo, pues dado $\tau \in NP$ tenemos:
 - $\blacksquare \ \tau \leq_{\mathit{P}} \sigma \leq_{\mathit{P}} \rho$

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coo

Teoremas de Karp

3SAT Construcción B sat $\Rightarrow B$ sat B sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR Construcción de C B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción DE SAT(o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados NP completos) a ese problema.
- Esto es asi pues si σ es *NP* completo y $\sigma \leq_P \rho$ entonces ρ también es *NP* completo, pues dado $\tau \in \mathit{NP}$ tenemos:
 - $\tau \leq_{P} \sigma \leq_{P} \rho$
 - \blacksquare y es fácil ver que \leq_P es transitiva

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Teoremas de Karp

- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción DE SAT(o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados NP completos) a ese problema.
- Esto es asi pues si σ es NP completo y $\sigma \leq_P \rho$ entonces ρ también es NP completo, pues dado $\tau \in NP$ tenemos:
 - $\blacksquare \ \tau \leq_{\mathit{P}} \sigma \leq_{\mathit{P}} \rho$
 - y es fácil ver que \leq_{P} es transitiva
 - **asi** que $\tau \leq_P \rho$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cook
Teoremas de

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

 \blacksquare Pej, Karp tomó un problema ρ_1 y probó que SAT $\leq_{\scriptscriptstyle P} \rho_1$

PNP2

Danie Penazz

NP completitu

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de Karp

 $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Pej, Karp tomó un problema ρ_1 y probó que SAT $\leq_{P} \rho_1$
- y luego vio que $\rho_1 \leq_P \rho_2$ y luego que $\rho_2 \leq_P \rho_3$,etc,

PNP2

Danie Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas de Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Pej, Karp tomó un problema ρ_1 y probó que SAT $\leq_{P} \rho_1$
- y luego vio que $\rho_1 \leq_P \rho_2$ y luego que $\rho_2 \leq_P \rho_3$,etc,
- lo cual prueba que ρ_1, ρ_2, ρ_3 , etc, son todos *NP*-completos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completituo Reducción Polinomial NP completo Teorema de Co

Teoremas de Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de B sat

Pej, Karp tomó un problema ρ_1 y probó que SAT $\leq_P \rho_1$

- y luego vio que $\rho_1 \leq_P \rho_2$ y luego que $\rho_2 \leq_P \rho_3$,etc,
- lo cual prueba que ρ_1, ρ_2, ρ_3 , etc, son todos *NP*-completos.
- A la lista inicial de Karp se le han agregado miles de problemas, de todo tipo, y pocas personas creen que pueda ser que todos ellos sean polinomiales, asi que esta es otra razón por la que se cree que P ≠ NP aunque nadie lo ha podido probar.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teoremas de Karp

Muchos de esos problemas tienen que ver con problemas sobre grafos, otros sobre otras partes de la matemática, varios sobre areas de programación, incluso problemas de biologia computacional como algunos casos de protein folding.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teorema de Cook

Teoremas de

Karp

Gonstrucción B sat $\Rightarrow \overline{B}$ sat $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\Rightarrow B$

- Muchos de esos problemas tienen que ver con problemas sobre grafos, otros sobre otras partes de la matemática, varios sobre areas de programación, incluso problemas de biologia computacional como algunos casos de protein folding.
- Algunos juegos, pej, Sudoku, Buscaminas, Tetris y MagicTheGathering son NP-completos.

PNP2

Danie Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas de Karp

- Muchos de esos problemas tienen que ver con problemas sobre grafos, otros sobre otras partes de la matemática, varios sobre areas de programación, incluso problemas de biologia computacional como algunos casos de protein folding.
- Algunos juegos, pej, Sudoku, Buscaminas, Tetris y MagicTheGathering son NP-completos.
- (hay que buscar la definición técnica de qué significa que esos juegos sean NP completos, es decir, cual es el problema de decisión asociados a cada uno de esos juegos)

Karp

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas de Karp

- Muchos de esos problemas tienen que ver con problemas sobre grafos, otros sobre otras partes de la matemática, varios sobre areas de programación, incluso problemas de biologia computacional como algunos casos de protein folding.
- Algunos juegos, pej, Sudoku, Buscaminas, Tetris y MagicTheGathering son NP-completos.
- (hay que buscar la definición técnica de qué significa que esos juegos sean NP completos, es decir, cual es el problema de decisión asociados a cada uno de esos juegos)
- Veamos algunos de los 21 problemas originales de Karp.

PNP2

Penaz:

NP completiti

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

SSAT

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

Definición

El problema 3SAT es como CNF-SAT excepto que se requiere ademas que cada disjunción sea disjunción de exactamente tres literales.

PNP2

Danie Penaz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp 3SAT Construcción

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ source}$

Construcción de B sat

eta sat $\Rightarrow \chi(\mathit{G}) = 3$ $\chi(\mathit{G}) = 3 \Rightarrow \mathit{L}$ sat

Definición

El problema 3SAT es como CNF-SAT excepto que se requiere ademas que cada disjunción sea disjunción de exactamente tres literales.

Teorema (Karp)

3SAT es NP completo.

PNP₂

3SAT

Definición

El problema 3SAT es como CNF-SAT excepto que se requiere ademas que cada disjunción sea disjunción de exactamente tres literales.

Teorema (Karp)

3SAT es NP completo.

Prueba: La idea, como dije, es probar que (CNF-)SAT≤_P 3*SAT*

PNP2

3SAT

■ Sea $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$ una booleana instancia de (CNF)SAT, es decir una expresión booleana en CNF, con variables $x_1, ..., x_n$ y cada D_i una disjunción de literales.

PNP2

Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

- Sea $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$ una booleana instancia de (CNF)SAT, es decir una expresión booleana en CNF, con variables $x_1, ..., x_n$ y cada D_j una disjunción de literales.
- Tenemos que construir polinomialmente una \tilde{B} que sea instancia de 3SAT y tal que B sea satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $G \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ G sat

- Sea $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$ una booleana instancia de (CNF)SAT, es decir una expresión booleana en CNF, con variables $x_1, ..., x_n$ y cada D_j una disjunción de literales.
- Tenemos que construir polinomialmente una \tilde{B} que sea instancia de 3SAT y tal que B sea satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Lo de polinomial es clave, porque si no podriamos simplemente definir \tilde{B} como 1 si B es satisfacible y 0 si no,

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR Construcción de G $\Rightarrow X(G) = 3$ $\Rightarrow X(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$ una booleana instancia de (CNF)SAT, es decir una expresión booleana en CNF, con variables $x_1, ..., x_n$ y cada D_j una disjunción de literales.
- Tenemos que construir polinomialmente una \tilde{B} que sea instancia de 3SAT y tal que B sea satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Lo de polinomial es clave, porque si no podriamos simplemente definir \tilde{B} como 1 si B es satisfacible y 0 si no,
- pero para HACER la construcción, deberiamos primero resolver si B es o no satisfacible, y eso no se sabe como hacerlo en tiempo polinomial.

PNP2

Construcción

■ La idea de Karp es construir $A(B) = \tilde{B} = E_1 \wedge ... \wedge E_m$ donde cada E_i se construye a partir de cada D_i y es tal que es conjunción de disjunciones de 3 literales.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

ASAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C B sat $\Rightarrow y(G) = 3$

- La idea de Karp es construir $A(B) = \tilde{B} = E_1 \wedge ... \wedge E_m$ donde cada E_j se construye a partir de cada D_j y es tal que es conjunción de disjunciones de 3 literales.
- Si D_j tiene exactamente 3 literales, se toma $E_j = D_j$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- La idea de Karp es construir $A(B) = \tilde{B} = E_1 \wedge ... \wedge E_m$ donde cada E_j se construye a partir de cada D_j y es tal que es conjunción de disjunciones de 3 literales.
- Si D_j tiene exactamente 3 literales, se toma $E_j = D_j$.
- Si tiene menos de 3 literales, se agregan variables extras que basicamente no hacen nada mas que "rellenar" espacio para completar los 3 literales.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc

Karp

3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sat

B sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- La idea de Karp es construir $A(B) = \tilde{B} = E_1 \wedge ... \wedge E_m$ donde cada E_j se construye a partir de cada D_j y es tal que es conjunción de disjunciones de 3 literales.
- Si D_j tiene exactamente 3 literales, se toma $E_j = D_j$.
- Si tiene menos de 3 literales, se agregan variables extras que basicamente no hacen nada mas que "rellenar" espacio para completar los 3 literales.
- Para distinguir las variables nuevas de las originales x_i, usaremos las letras "y".

PNP2

Danie Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo

Teoremas d Karp

Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $3\operatorname{COLOR}$ Construcción de

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat ■ Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$

PNP2

Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d

3SAT Construcción

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor y_j) \land (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \overline{y}_j)$

PNP2

Penazz

NP completiti

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de B sat

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor y_j) \land (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \overline{y}_j)$
 - $lue{}$ donde y_j es una variable nueva.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor y_j) \land (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \overline{y}_j)$
 - \blacksquare donde y_j es una variable nueva.
- Si D_i tiene un sólo literal: $D_i = \ell_i$, se toma:

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G
B sat

 $egin{aligned} & \mathcal{B} ext{ sat} \ & \Rightarrow \ \chi(\mathit{G}) = 3 \ & \chi(\mathit{G}) = 3 \Rightarrow \mathit{E} \end{aligned}$ sat

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor y_j) \land (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \overline{y}_j)$
 - \blacksquare donde y_j es una variable nueva.
- Si D_i tiene un sólo literal: $D_i = \ell_i$, se toma:
 - $E_j = (\ell_j \vee y_{1,j} \vee y_{2,j}) \wedge (\ell_j \vee \overline{y}_{1,j} \vee y_{2,j}) \wedge (\ell \vee y_{1,j} \vee \overline{y}_{2,j}) \wedge (\ell_j \vee \overline{y}_{1,j} \vee \overline{y}_{2,j})$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\operatorname{3COLOR}$

Construcción de *G B* sat

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor y_j) \land (\ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \overline{y}_j)$
 - lacktriangle donde y_j es una variable nueva.
- Si D_i tiene un sólo literal: $D_i = \ell_i$, se toma:
 - $E_j = (\ell_j \lor y_{1,j} \lor y_{2,j}) \land (\ell_j \lor \overline{y}_{1,j} \lor y_{2,j}) \land (\ell \lor y_{1,j} \lor \overline{y}_{2,j}) \land (\ell_j \lor \overline{y}_{1,j} \lor \overline{y}_{2,j})$
 - $lue{}$ con $y_{1,j}, y_{2,j}$ las variables nuevas.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

3SAT Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G = B sat $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

■ La dificultad es cuando D_j tiene mas de 3 literales.

PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

 $\begin{array}{l} \textbf{Construcción} \\ \textbf{B} \ \text{sat} \implies \vec{B} \ \text{sat} \\ \vec{B} \ \text{sat} \implies \textbf{B} \ \text{sat} \\ \textbf{3COLOR} \\ \textbf{Construcción de } \textbf{G} \\ \vec{B} \ \text{sat} \\ \implies \chi(\textbf{G}) = 3 \end{array}$

- La dificultad es cuando D_i tiene mas de 3 literales.
- Supongamos $D_j = \ell_{1,j} \vee ... \vee \ell_{k,j}$ con $k \geq 4$.

PNP₂

Construcción

- La dificultad es cuando D_i tiene mas de 3 literales.
- Supongamos $D_i = \ell_{1,i} \vee ... \vee \ell_{k,i}$ con $k \geq 4$.
- \blacksquare Definimos E_i de la siguiente forma, introduciendo nuevas variables $y_{1,i},...,y_{k-3,i}$

$$E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \wedge F_{k-3,j}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR

3COLOR Construcción de *G B* sat ⇒ √(G) = 3

eta sat $\Rightarrow \chi(\mathit{G}) = 3$ $\chi(\mathit{G}) = 3 \Rightarrow \mathit{B}$ sat

- La dificultad es cuando D_i tiene mas de 3 literales.
- Supongamos $D_j = \ell_{1,j} \vee ... \vee \ell_{k,j}$ con $k \geq 4$.
- Definimos E_j de la siguiente forma, introduciendo nuevas variables $y_{1,j},...,y_{k-3,j}$

$$E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \wedge F_{k-3,j}$$

donde los $F_{i,j}$ son disjunciones de 3 literales, definidos en la página siguiente.

completitu

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas d Karp

Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$$

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Coo

Karp

Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$\textit{F}_{0,j} = \qquad \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \textit{y}_{1,j}$$

si
$$1 \le i < k - 3$$

PNP2

Construcción

$$\begin{aligned} F_{0,j} &= & \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j} \\ F_{i,j} &= & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee \ell_{i+2,j} \end{aligned} \quad \text{si } 1 \leq i < k-3 \end{aligned}$$

completit

Reducción Polinomial

NP completo

Teorema de Coo

3SAT Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$\begin{array}{ll} F_{0,j} = & \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j} \\ F_{i,j} = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee \ell_{i+2,j} \\ F_{k-3,j} = & \overline{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j} \end{array} \quad \text{si } 1 \leq i < k-3$$

PNP2

Danie Penazz

NP completitude Reducción Polinomial

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sot} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3$

$$\begin{aligned} F_{0,j} &= & \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j} \\ F_{i,j} &= & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee \ell_{i+2,j} \\ F_{k-3,j} &= & \overline{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j} \end{aligned} \quad \text{si } 1 \leq i < k-3$$

Observar que si k=4 entonces la condición $1 \le i < k-3$ nunca se cumple, es decir, para k=4 solo tenemos $F_{0,j}$ y $F_{1,j} = \overline{y}_{1,j} \lor \ell_{3,j} \lor \ell_{4,j}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp
3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de B sat $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

■ La construcción $B \mapsto A(B) = \tilde{B}$ es claramente polinomial, de hecho lineal, pues sólo agregamos un número lineal de nuevas variables y nuevas disjunciones.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

 $\begin{array}{ll} \operatorname{3SAT} & & \\ & \operatorname{\textbf{Construcción}} \\ B\operatorname{sat} \Rightarrow & \bar{B}\operatorname{sat} \\ \bar{B}\operatorname{sat} \Rightarrow & B\operatorname{sat} \\ \operatorname{3COLOR} \\ \operatorname{Construcción de } G \\ B\operatorname{sat} \\ \Rightarrow & \chi(G) = 3 \end{array}$

- La construcción $B \mapsto A(B) = \tilde{B}$ es claramente polinomial, de hecho lineal, pues sólo agregamos un número lineal de nuevas variables y nuevas disjunciones.
- Tenemos que probar ahora que $SAT(B) = 3SAT(\tilde{B})$ es decir que B es satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

Karp 3SAT Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat} \\ \bar{B} \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat} \\ \bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat} \\ 3COLOR \\ \text{Construcción de } B \text{ sat} \\ \Rightarrow \chi(G) = 3$

■ La construcción $B \mapsto A(B) = \tilde{B}$ es claramente polinomial, de hecho lineal, pues sólo agregamos un número lineal de nuevas variables y nuevas disjunciones.

- Tenemos que probar ahora que $SAT(B) = 3SAT(\tilde{B})$ es decir que B es satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Recalquemos que B tiene las mismas variables de B mas otras variables extras asi que hay que ser cuidadoso.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C $\overline{B} \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 0$

■ La construcción $B \mapsto A(B) = \tilde{B}$ es claramente polinomial, de hecho lineal, pues sólo agregamos un número lineal de nuevas variables y nuevas disjunciones.

- Tenemos que probar ahora que $SAT(B) = 3SAT(\tilde{B})$ es decir que B es satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Recalquemos que B tiene las mismas variables de B mas otras variables extras asi que hay que ser cuidadoso.
- Hagamos cada implicación por separado empezando por B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp

Construcción

B sat ⇒ B sat

B̃ sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de 6

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

■ Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a $x_1, x_2, ..., x_n$) que la vuelve verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat \Rightarrow B sat B sat \Rightarrow Sat 3COLOR Construcción de B sat \Rightarrow $\chi(G) = 3$

- Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a $x_1, x_2, ..., x_n$) que la vuelve verdadera.
- Entre las variables de \tilde{B} tambien estan las x_i asi que les damos este mismo asignamiento a ellas.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de

- Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a $x_1, x_2, ..., x_n$) que la vuelve verdadera.
- Entre las variables de \tilde{B} tambien estan las x_i asi que les damos este mismo asignamiento a ellas.
- Pero \tilde{B} tiene ademas varias variables extras "y" a las cuales tenemos que darle un valor.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de o

- Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a $x_1, x_2, ..., x_n$) que la vuelve verdadera.
- Entre las variables de \tilde{B} tambien estan las x_i asi que les damos este mismo asignamiento a ellas.
- Pero \tilde{B} tiene ademas varias variables extras "y" a las cuales tenemos que darle un valor.
- Estas variables extras aparecen asociadas a cada D_j dependiendo de cuantos literales tenga, asi que analicemos cada caso por separado.

PNP2

Daniel Penazzi

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de
B sat

- Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a $x_1, x_2, ..., x_n$) que la vuelve verdadera.
- Entre las variables de \tilde{B} tambien estan las x_i asi que les damos este mismo asignamiento a ellas.
- Pero \tilde{B} tiene ademas varias variables extras "y" a las cuales tenemos que darle un valor.
- Estas variables extras aparecen asociadas a cada D_j dependiendo de cuantos literales tenga, asi que analicemos cada caso por separado.
- Como el asignamiento hace verdadera a B, entonces hace verdadero a todos los D_j pues B es conjunción de los D_j.

PNP2

Daniel Penazz

Lo que queremos ver es cada E_j se puede volver verdadero, con el asignamiento que vuelve verdadero a D_j , mas valores adecuadamente elegidos para las variables extras que aparecen en E_j pero no en D_j .

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Lo que queremos ver es cada E_j se puede volver verdadero, con el asignamiento que vuelve verdadero a D_j , mas valores adecuadamente elegidos para las variables extras que aparecen en E_j pero no en D_j .
- Si D_j tiene exactamente 3 literales, no tiene asociado ninguna variable extra asi que no hay que hacer nada

PNP2

Danie Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coo

Ieoremas d Karp 3SAT Construcción B sat $\Rightarrow B$ sa B sat $\Rightarrow B$ sa

 $ilde{B}$ sat \Rightarrow B sat B scored Color Construcción de B sat B

- Lo que queremos ver es cada E_j se puede volver verdadero, con el asignamiento que vuelve verdadero a D_j , mas valores adecuadamente elegidos para las variables extras que aparecen en E_i pero no en D_j .
- \blacksquare Si D_j tiene exactamente 3 literales, no tiene asociado ninguna variable extra asi que no hay que hacer nada
- Para los D_j con 1 o 2 literales, le podemos dar los valores que queramos a las variables extras "y": con cualquiera de ellos E_j se volverá verdadero. (ejercicio).

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Potinomial
NP completo
Tecrema de Cook
Teoremas de
Karp
Construcción
B sat ⇒ B sat
SouloR
Construcción de C
B sat
⇒ S (g) = 3

■ Para el caso de *D_j* con 4 o mas literales, como el asignamiento de valores a las *x* lo vuelve verdadero y es una disjunción de literales, entonces al menos uno de sus literales debe haberse vuelto verdadero.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc
Teoremas d
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sa

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\Rightarrow B \text{ sat}$

- Para el caso de D_j con 4 o mas literales, como el asignamiento de valores a las x lo vuelve verdadero y es una disjunción de literales, entonces al menos uno de sus literales debe haberse vuelto verdadero.
- Sea r tal que $\ell_{r,j}$ es verdadero con el asignamiento de valores dado. (si hay mas de uno, tomo alguno).

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sa
B sat ⇒ B sa
3COLOR
Construcción d

COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Para el caso de D_j con 4 o mas literales, como el asignamiento de valores a las x lo vuelve verdadero y es una disjunción de literales, entonces al menos uno de sus literales debe haberse vuelto verdadero.
- Sea r tal que $\ell_{r,j}$ es verdadero con el asignamiento de valores dado. (si hay mas de uno, tomo alguno).
- Demos valores a las y que haga que $y_{i,j}$ sea verdadera para $i \le r 2$ y falsa para $i \ge r 1$.

PNP2

Danie Penazz

NP completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc

Representation of the following set of the followi

- Para el caso de *D_j* con 4 o mas literales, como el asignamiento de valores a las *x* lo vuelve verdadero y es una disjunción de literales, entonces al menos uno de sus literales debe haberse vuelto verdadero.
- Sea r tal que $\ell_{r,j}$ es verdadero con el asignamiento de valores dado. (si hay mas de uno, tomo alguno).
- Demos valores a las y que haga que $y_{i,j}$ sea verdadera para $i \le r 2$ y falsa para $i \ge r 1$.
- Analicemos los distintos $F_{i,j}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

Construcción

B sat ⇒ B̃ sat

B̃ sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

■ Primero supongamos que $3 \le r \le k-2$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp
3SAT
Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR
Construcción de B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Primero supongamos que $3 \le r \le k-2$.
- En particular $1 \le r 2$ y como estamos especificando que $y_{i,j}$ es verdadera para $i \le r 2$, tenemos que $y_{1,j}$ es verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sat

B sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de C

B sat

(CO) → CO

- Primero supongamos que $3 \le r \le k-2$.
- En particular $1 \le r 2$ y como estamos especificando que $y_{i,j}$ es verdadera para $i \le r 2$, tenemos que $y_{1,j}$ es verdadera.
- Asi que $F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$ es verdadero.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Primero supongamos que $3 \le r \le k-2$.
- En particular $1 \le r 2$ y como estamos especificando que $y_{i,j}$ es verdadera para $i \le r 2$, tenemos que $y_{1,j}$ es verdadera.
- Asi que $F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$ es verdadero.
- Y para $1 \le i < k-3$, como $F_{i,j} = \overline{y}_{i,j} \lor y_{i+1,j} \lor \ell_{i+2,j}$ tiene la variable $y_{i+1,j}$ entonces $F_{i,j}$ es verdadero mientras i+1 sea $\le r-2$, es decir, $i \le r-3$.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teorema de Sant
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de C
B sat
⇒ X(G) = 3

■ Por otro lado, como $F_{i,j}$ tiene el literal $\overline{y}_{i,j}$, y la variable $y_{i,j}$ es FALSA si $i \ge r-1$, con lo cual el literal $\overline{y}_{i,j}$ es verdadero en ese caso, tenemos que $F_{i,j}$ tambien es verdadero si i > r-1.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Por otro lado, como $F_{i,j}$ tiene el literal $\overline{y}_{i,j}$, y la variable $y_{i,j}$ es FALSA si $i \ge r-1$, con lo cual el literal $\overline{y}_{i,j}$ es verdadero en ese caso, tenemos que $F_{i,j}$ tambien es verdadero si i > r-1.
- Esto tambien vale para i=k-3 pues $F_{k-3,j}=\overline{y}_{k-3,j}\vee\ell_{k-1,j}\vee\ell_{k,j}$ tiene el literal $\overline{y}_{k-3,j}$ que esta evaluado a verdadero, pues $k-3\geq r-1$ dado que estamos suponiendo que $r\leq k-2$.

PNP₂

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Coc

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat \Rightarrow B sat B sat B sat 3COLOR Construcción de B sat B sat

Por otro lado, como $F_{i,j}$ tiene el literal $\overline{y}_{i,j}$, y la variable $y_{i,j}$ es FALSA si $i \ge r-1$, con lo cual el literal $\overline{y}_{i,j}$ es verdadero en ese caso, tenemos que $F_{i,j}$ tambien es verdadero si $i \ge r-1$.

- Esto tambien vale para i=k-3 pues $F_{k-3,j}=\overline{y}_{k-3,j}\vee\ell_{k-1,j}\vee\ell_{k,j}$ tiene el literal $\overline{y}_{k-3,j}$ que esta evaluado a verdadero, pues $k-3\geq r-1$ dado que estamos suponiendo que $r\leq k-2$.
- Concluimos que $F_{i,j}$ es verdadero para $i \le r 3$ y para $i \ge r 1$, asi que queda por ver el caso i = r 2.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

completitud

Polinomial

NP completo

Teorema de Cool

Karp

Construcción

B sat ⇒ B̃ sat

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat $\blacksquare \text{ Pero } F_{r-2,j} = \overline{y}_{r-2,j} \lor y_{r-1,j} \lor \ell_{r,j}$

\overline{B} satisfacible $\Rightarrow \widetilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Danie Penazz

NP completite

Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teoremas d Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \overline{B} \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{Sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ SCOLOR Construcción de $G \operatorname{SSSS}$ $B \operatorname{Sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Pero $F_{r-2,j} = \overline{y}_{r-2,j} \lor y_{r-1,j} \lor \ell_{r,j}$

■ y $\ell_{r,j}$ es verdadero asi que $F_{r-2,j}$ es verdadero.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR
Construcción de G
B sat

- Pero $F_{r-2,j} = \overline{y}_{r-2,j} \vee y_{r-1,j} \vee \ell_{r,j}$
- y $\ell_{r,j}$ es verdadero asi que $F_{r-2,j}$ es verdadero.
- Como todos los $F_{i,j}$ son verdaderos y $E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \wedge F_{k-3,j}$ concluimos que E_j es verdadero en el caso 3 < r < k-2.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat \Rightarrow \Rightarrow B sat \Rightarrow B

- Pero $F_{r-2,j} = \overline{y}_{r-2,j} \vee y_{r-1,j} \vee \ell_{r,j}$
- y $\ell_{r,j}$ es verdadero asi que $F_{r-2,j}$ es verdadero.
- Como todos los $F_{i,j}$ son verdaderos y $E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \wedge F_{k-3,j}$ concluimos que E_j es verdadero en el caso $3 \le r \le k-2$.
- Quedan entonces los casos r = 1, 2, k 3, k 4 que dejamos como ejercicio.

PNP₂

completitud

- Pero $F_{r-2,j} = \overline{y}_{r-2,j} \vee y_{r-1,j} \vee \ell_{r,j}$
- y $\ell_{r,i}$ es verdadero asi que $F_{r-2,i}$ es verdadero.
- Como todos los F_{i,i} son verdaderos y $E_i = F_{0,i} \wedge F_{1,i} \wedge \dots \wedge F_{k-3,i}$ concluimos que E_i es verdadero en el caso $3 \le r \le k - 2$.
- Quedan entonces los casos r = 1, 2, k 3, k 4 que dejamos como ejercicio.
- Veamos ahora la vuelta, es decir. \tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \overline{B} \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR
Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

■ Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
COLOR
Construcción Construcción

- Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.
- Las variables de B incluyen a las x que son las variables de B, asi que les asignamos a esas variables los valores que se les asignan para que B sea verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teoremas de Cook
Teoremas de Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
3COLOR

- Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.
- Las variables de \tilde{B} incluyen a las x que son las variables de B, asi que les asignamos a esas variables los valores que se les asignan para que \tilde{B} sea verdadera.
- Queremos ver que con ese asignamiento, B es verdadera, asi que supongamos que no.

PNP2

Daniel Penazz

completitud Reducción Polinomia! NP completo Teorema de Cook Teorema de Cook Seoremas de Karp SSAT Construcción B sat $\Rightarrow B$ sat B sat $\Rightarrow B$ sat B sat $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow A$ (B) $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow B$ sat $\Rightarrow A$ (B) $\Rightarrow B$ sat \Rightarrow

- Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.
- Las variables de \tilde{B} incluyen a las x que son las variables de B, asi que les asignamos a esas variables los valores que se les asignan para que \tilde{B} sea verdadera.
- Queremos ver que con ese asignamiento, B es verdadera, asi que supongamos que no.
- Entonces algun D_j no es verdadero, pues $B = D_1 \wedge \wedge D_m$.

PNP2

Daniel Penazz

completitud Reducción Polinomial NP completo Teoremas de Cook Teoremas de Karp 3SAT Construcción \mathcal{B} sat $\Rightarrow \mathcal{B}$ sat

- Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.
- Las variables de \tilde{B} incluyen a las x que son las variables de B, asi que les asignamos a esas variables los valores que se les asignan para que \tilde{B} sea verdadera.
- Queremos ver que con ese asignamiento, B es verdadera, asi que supongamos que no.
- Entonces algun D_j no es verdadero, pues $B = D_1 \wedge \wedge D_m$.
- Es fácil ver que no puede ser uno de los que tiene 3 o menos literales. (ejercicio)

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp

Representation of the following states of the followi

Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.

PNP2

Daniel Penazz

completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sol ⇒ B sat
⇒ Construcción
Construcción
Construcción
B sat ⇒ B sat
Sol ⇒ B sat
⇒ Construcción de C
B sat
⇒ √(c) = 3

- Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.
- Esto significa que el asignamiento de valores a las variables vuelve a todos los $\ell_{r,j}$, r=1,2,...,k igual a 0 pues D_j es la disjunción de ellos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.
- Esto significa que el asignamiento de valores a las variables vuelve a todos los $\ell_{r,j}$, r=1,2,...,k igual a 0 pues D_j es la disjunción de ellos.
- Pero estamos suponiendo que \tilde{B} evalua a verdadero, con lo cual E_i debe evaluar a verdadero.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool Teoremas de

- Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.
- Esto significa que el asignamiento de valores a las variables vuelve a todos los $\ell_{r,j}$, r=1,2,...,k igual a 0 pues D_j es la disjunción de ellos.
- Pero estamos suponiendo que \tilde{B} evalua a verdadero, con lo cual E_j debe evaluar a verdadero.
- Como E_j es la conjunción de los $F_{i,j}$ concluimos que todos los $F_{i,j}$ evaluan a verdadero.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool Teoremas de Karp

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat $\Rightarrow \overline{B}$ sat $\Rightarrow \overline{B}$ sat 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3$

- Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.
- Esto significa que el asignamiento de valores a las variables vuelve a todos los $\ell_{r,j}$, r=1,2,...,k igual a 0 pues D_j es la disjunción de ellos.
- Pero estamos suponiendo que \tilde{B} evalua a verdadero, con lo cual E_j debe evaluar a verdadero.
- Como E_j es la conjunción de los $F_{i,j}$ concluimos que todos los $F_{i,j}$ evaluan a verdadero.
- Pero si evaluamos $F_{i,j}$ teniendo en cuenta que todos los $\ell_{r,j}$ evaluan a 0, obtenemos:

PNP2

Daniel Penazz

NP

completitud

Reducción Polinomial

NP completo

Teoremas de

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sa}$

B̃ sat ⇒ B sat

Construcción de 6

B sat

 $F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$

PNP2

Daniel Penazz

NP

completitud

Reducción Polinomial

NP completo

Teoremas de

Karp

Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de (

Construcción de 6

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$$

PNP2

 \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat

$$F_{0,j} = 0 \lor 0 \lor y_{1,j}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP

completitud

Reducción Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Karp

Construcció

B sat $\Rightarrow \tilde{B}$

 $\tilde{\mathit{B}}$ sat $\Rightarrow \mathit{B}$ sat

Construcción do a

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$F_{0,j} = y_{1,j}$$

PNP2

Danie Penazz

NP

Reducción Polinomial

NP completo

Teorema de Cool

3SAT

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ eat

$$F_{0,j} = y_{1,j}$$

 $(1 \le i < k-3) \rightarrow F_{i,j} = \overline{y}_{i,j} \lor y_{i+1,j} \lor \ell_{i+2,j}$

PNP2

Daniel Penazz

NP

Reducción Polinomial

Polinomial NP completo

Teorema de Cool

Karp 3SAT

Construction $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR Construcción de *G*

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$F_{0,j} = y_{1,j}$$

 $(1 \le i < k-3) \rightarrow F_{i,j} = \overline{y}_{i,j} \lor y_{i+1,j} \lor \ell_{i+2,j}$

PNP2

Daniel Penazz

NP

completitu

Polinomial
NP completo

NP completo
Teorema de Cook

Teoremas de

3SAT Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \rightarrow & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee 0 \end{array}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP completite

completitu

Reducción Polinomial NP completo

NP completo Teorema de Cook

Teoremas de

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$

 \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \rightarrow & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \end{array}$

PNP2

Daniel Penazz

NP

Reducción Polinomial NP completo

NP completo Teorema de Cook

Teoremas o Karp

3SAT Construcción

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$F_{0,j} = y_{1,j}$$

 $(1 \le i < k-3) \rightarrow F_{i,j} = \overline{y}_{i,j} \lor y_{i+1,j}$
 $= (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j})$

PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cook

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \to & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \\ & = & (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}) \\ F_{k-3,j} & = & \overline{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j} \end{array}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP

Reducción Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Karp 3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$

 \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \rightarrow & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \\ & = & (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}) \\ F_{k-3,j} & = & \overline{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j} \end{array}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP ...

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Cool

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

3COLOR Construcción de *G*

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

$$\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \rightarrow & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \\ & = & (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}) \\ F_{k-3,j} & = & \overline{y}_{k-3,j} \vee 0 \vee 0 \end{array}$$

PNP2

Danie Penazz

NP

Reducción Polinomial

NP completo
Teorema de Cook

Karp

Construcción

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR Construcción de G

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$\begin{array}{rcl} F_{0,j} & = & y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \to & F_{i,j} & = & \overline{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \\ & = & (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}) \\ F_{k-3,j} & = & \overline{y}_{k-3,j} \end{array}$$

PNP2

Daniel Penazz

NP
Completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
SSAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat
B sat
Construcción
Construcción
Construcción de

■ En definitiva, como $y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}$ es verdad para $1 \le i < k-3$ y la primera $y_{1,j} = F_{0,j}$ es verdadera, entonces todas las $y_{i,j}$ evaluan a verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook Teoremas de Karp

3SATConstrucción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- En definitiva, como $y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}$ es verdad para $1 \le i < k-3$ y la primera $y_{1,j} = F_{0,j}$ es verdadera, entonces todas las $y_{i,j}$ evaluan a verdadera.
- Esto es un absurdo pues $\overline{y}_{k-3,j} = F_{k-3,j}$ tambien evalua como verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp 3SAT Construcción \mathcal{B} sat \Rightarrow \mathcal{B} sat \Rightarrow \mathcal{B} sat 3COLOR Construcción de \mathcal{C} \mathcal{B} sat \Rightarrow \mathcal{C} \mathcal{C}

- En definitiva, como $y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}$ es verdad para $1 \le i < k-3$ y la primera $y_{1,j} = F_{0,j}$ es verdadera, entonces todas las $y_{i,j}$ evaluan a verdadera.
- Esto es un absurdo pues $\overline{y}_{k-3,j} = F_{k-3,j}$ tambien evalua como verdadera.
- Fin.

PNP2

Danie Penazz

NP completitu

completitud

Polinomial NP completo

Teoremas de

Karp

23SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Teorema (Karp)

PNP2

Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Cool

3SAT Construcción R sat ⇒ Ãs

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$ 3COLOR

Construcción de G

eta sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

Teorema (Karp)

3COLOR es NP completo.

Prueba:

PNP2

Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Coo

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ si}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ si}$

3COLOR Construcción de 0

 $B ext{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT $\leq_p 3$ -COLOR.

PNP2

Penazz

NP completite

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Cool

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B̃ sa

B sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT \leq_p 3-COLOR.
- Para ello, dada una instancia *B* de 3-SAT,

PNP₂

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT \leq_{P} 3-COLOR.
- Para ello, dada una instancia B de 3-SAT,
 - i.e., una expresion booleana en CNF con exactamente 3 literales en cada disjunción

PNP₂

completitud

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT≤_p3-COLOR.
- Para ello, dada una instancia B de 3-SAT,
 - i.e., una expresion booleana en CNF con exactamente 3 literales en cada disjunción
- \blacksquare crearemos polinomialmente una instancia A(B) = G de 3-COLOR.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B̃ sat ⇒ B sat

Construcción de G $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT \leq_p 3-COLOR.
- Para ello, dada una instancia B de 3-SAT,
 - i.e., una expresion booleana en CNF con exactamente 3 literales en cada disjunción
- $lue{}$ crearemos polinomialmente una instancia A(B) = G de 3-COLOR.
 - i.e., un grafo G

PNP2

Danie Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Teorema (Karp)

- Prueba:
- Veremos que 3-SAT $\leq_p 3$ -COLOR.
- Para ello, dada una instancia B de 3-SAT,
 - i.e., una expresion booleana en CNF con exactamente 3 literales en cada disjunción
- \blacksquare crearemos polinomialmente una instancia A(B) = G de 3-COLOR.
 - i.e., un grafo G
- tal que B sea satisfacible si y solo si $\chi(G) \leq 3$.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp
3SAT

B sat ⇒ B sa
B sat ⇒ B sa

3COLOR

Construcción de

Construcción de G
B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat ■ Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos *G* como un triangulo si *B* es satisfacible y como *K*₄ si no.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas (Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de (

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K₄ si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teorema Karp

> $B \text{ sat } \Rightarrow \overline{B} \text{ sat }$ $\overline{B} \text{ sat } \Rightarrow B \text{ sat }$ **3COLOR** Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 3$

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K₄ si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son $x_1, ..., x_n$

PNP₂

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K_4 si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son $x_1, ..., x_n$
- \blacksquare y que $B=D_1\wedge\ldots\wedge D_m$,

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Con

Teoremas de Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K₄ si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son $x_1, ..., x_n$
- \blacksquare y que $B=D_1\wedge...\wedge D_m$,
- con las disjunciones $D_j = \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \ell_{3,j}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K₄ si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son $x_1, ..., x_n$
- \blacksquare y que $B=D_1\wedge...\wedge D_m$,
- $lue{}$ con las disjunciones $D_j = \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \ell_{3,j}$
 - $\ell_{k,j}$ literales

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Con

Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow$ sat

- Lo de polinomial es clave, pues si no seria trivial: definiriamos G como un triangulo si B es satisfacible y como K₄ si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son $x_1, ..., x_n$
- \blacksquare y que $B=D_1\wedge...\wedge D_m$,
- con las disjunciones $D_j = \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \ell_{3,j}$
 - lacksquare $\ell_{k,j}$ literales
- Construiremos el grafo *G* dando sus vértices y sus lados.

PNP2

Construcción de G

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

 $\beta \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Los vértices son:
 - 1 2*n* vértices v_{ℓ} , uno por cada literal ℓ

PNP2

Construcción de G

- Los vértices son:
 - 1 2*n* vértices v_{ℓ} , uno por cada literal ℓ
 - (es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\overline{x}_i}$)

PNP2

Daniel Penazz

completitud

Reducción
Polinomial

Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sa}$

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

- Los vértices son:
 - 1 2*n* vértices v_ℓ , uno por cada literal ℓ
 - es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\overline{x_i}}$)
 - 2 6*m* vértices $\{e_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}} \cup \{a_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $A \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $A \text{ sat} \Rightarrow B \text{$

- 1 2*n* vértices v_ℓ , uno por cada literal ℓ
 - (es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\overline{x_i}}$)
- 2 6*m* vértices $\{e_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}} \cup \{a_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}}$
 - Es decir, para cada j = 1, 2, ..., m, seis vértices $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

COLOR Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- 1 2*n* vértices v_ℓ , uno por cada literal ℓ
 - (es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\overline{x_i}}$)
- 2 6*m* vértices $\{e_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}} \cup \{a_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}}$
 - Es decir, para cada j = 1, 2, ..., m, seis vértices $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$
- 3 Dos vértices especiales, s y t

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Reoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- 1 2*n* vértices v_ℓ , uno por cada literal ℓ
 - (es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\overline{x_i}}$)
- 2 6*m* vértices $\{e_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}} \cup \{a_{k,j}\}_{\substack{k=1,2,3\\j=1,...,m}}$
 - Es decir, para cada j = 1, 2, ..., m, seis vértices $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$
- 3 Dos vértices especiales, s y t
- Observar que los vértices se construyen en tiempo polinomial, porque simplemente los listamos siguiendo los nombres de las variables, el número de las disjunciones y son 2 + 2n + 6m.

PNP2

Construcción de G

Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.

PNP2

Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

leoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

- Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.
- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.
- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.



PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de C

Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.

- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.
- La otra es una serie de "garras" disjuntas.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

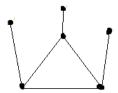
3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de

Construcción de 6
B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.
- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.
- La otra es una serie de "garras" disjuntas.



PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
COLOR
Construcción de

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.
- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.
- La otra es una serie de "garras" disjuntas.
- Estas estructuras se unirán por medio del vértice s y con lados directos entre los extremos de las garras y algunos extremos del abanico.

PNP2

Construcción de G

PNP2

Daniel Penazz

completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas o

Construction $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sa}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sa}$

Construcción de G

 $\beta \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Los lados son:
 - 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas di Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.

PNP2

Daniel Penazz

completitud Reducción Polinomial

Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sa}$

 \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices a_{1,j} a_{2,j}, a_{3,j}.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

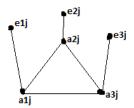
3SAT

Construction $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2,, m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".



PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teoremas de Karp 3SAT

 $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices a_{1,j} a_{2,j}, a_{3,j}.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .

PNP2

Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

Teoremas o Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$ $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 0$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .
- 4 *n* lados $v_x v_{\overline{x}}$, uno por cada variable x.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .
- 4 *n* lados $v_x v_{\overline{x}}$, uno por cada variable x.
 - Es decir, para cada variable x tenemos un triangulo con los vértices t, v_x , $v_{\overline{x}}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .
- 4 *n* lados $v_x v_{\overline{x}}$, uno por cada variable x.
 - Es decir, para cada variable x tenemos un triangulo con los vértices t, v_x , $v_{\overline{x}}$.
- 5 El lado st

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp
3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sat

B sat ⇒ B sat

3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .
- 4 *n* lados $v_x v_{\overline{x}}$, uno por cada variable x.
 - Es decir, para cada variable x tenemos un triangulo con los vértices t, v_x , $v_{\overline{x}}$.
- 5 El lado st
- 6 3*m* lados $se_{k,j}$ (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G

Construction de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow$

- 1 3*m* lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. (j = 1, 2,, m)
 - Es decir, para cada j tenemos un triangulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.
- 2 3*m* lados $e_{k,j}a_{k,j}$, (k = 1, 2, 3, j = 1, 2,, m.)
 - Por lo tanto los e son como "uñas" que salen de los a. Para cada j los a y los e forman una especie de "garra".
- 3 2*n* lados tv_{ℓ} , uno por cada literal ℓ .
- 4 *n* lados $v_x v_{\overline{x}}$, uno por cada variable x.
 - Es decir, para cada variable x tenemos un triangulo con los vértices t, v_x , $v_{\overline{x}}$.
- 5 El lado st
- 6 3*m* lados $se_{k,j}$ (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)
- 7 3*m* lados $e_{k,j}v_{\ell_{k,j}}$ (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, ..., m.)

PNP2

Daniel Penazz

NP completitue

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas c Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat Los hemos construido simplemente leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y son 1 + 3n + 12m asi que la construcción de G es polinomial.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool
Teoremas de
Karp

SSAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Los hemos construido simplemente leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y son 1 + 3n + 12m asi que la construcción de G es polinomial.
- (aunque el número fuese polinomial en n, m, si para decidir donde va cada lado tuviera que hacer un calculo no polinomial, la construcción no seria polinomial, pero aca esta especificado en forma simple donde va cada uno).

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Los hemos construido simplemente leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y son 1 + 3n + 12m asi que la construcción de G es polinomial.
- (aunque el número fuese polinomial en n, m, si para decidir donde va cada lado tuviera que hacer un calculo no polinomial, la construcción no seria polinomial, pero aca esta especificado en forma simple donde va cada uno).
- Para que se entienda un poco mas como es la construcción, damos un ejemplo.

- Los hemos construido simplemente leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y son 1 + 3n + 12m asi que la construcción de G es polinomial.
- (aunque el número fuese polinomial en n, m, si para decidir donde va cada lado tuviera que hacer un calculo no polinomial, la construcción no seria polinomial, pero aca esta especificado en forma simple donde va cada uno).
- Para que se entienda un poco mas como es la construcción, damos un ejemplo.
- Supongamos que

$$B = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)$$

PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

Entonces tenemos n=4 variables y m=3 disjunciones, cada una, como corresponde, con 3 literales.

PNP2

Daniel Penazz

Las m = 3 garras:

Polinomial

NP completo

NP completo Teorema de Cook

Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\stackrel{B \text{ sat}}{\Rightarrow} \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$







PNP2

Construcción de G

Y el abanico correspondiente a las n = 4 variables:









PNP2

Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d

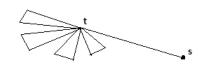
3SAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow$

Unimos t con s









PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

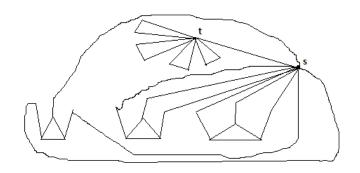
Teoremas de Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $3\operatorname{COLOB}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

Y s con todos los extremos de las garras:



PNP2

Danie Penaz:

completiti

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

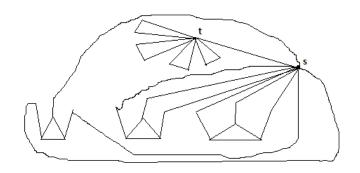
Teoremas de Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $3\operatorname{COLOR}$

Construcción de G

 $egin{aligned} extit{B} ext{ sat} \ &\Rightarrow \ \chi(extit{G}) = 3 \ & ext{} \chi(extit{G}) = 3 \Rightarrow ext{} ext{B} \end{aligned}$

Ahora debemos dibujar todos los lados $e_{k,j} v_{\ell_{k,j}}$



PNP2

Penaz:

NP completit

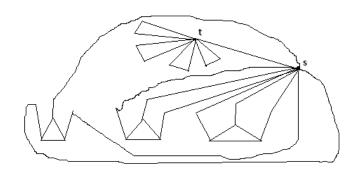
> Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat Veamos primero $D_1 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4$.



PNP2

Penazz

NP completit

> Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

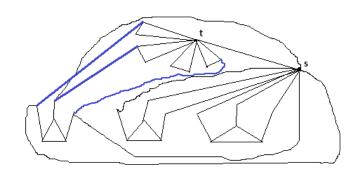
Teoremas de

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
R sat ⇒ B sat

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

Veamos primero $D_1 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4$.



PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo

NP completo Teorema de Cook

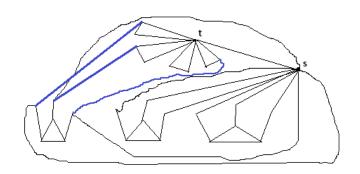
Teoremas d Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

eta sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$D_2 = \overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4.$$



PNP2

Daniel Penazz

NP completi

Reducción

Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d

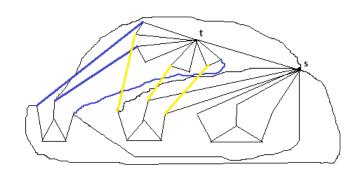
Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

 $D_2 = \overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4$.



PNP2

Daniel Penazz

NP completi

Reducción Polinomial NP completo

NP completo Teorema de Cook

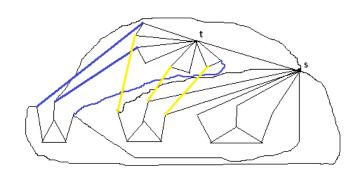
Teoremas d Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3001 OR

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

$$D_3 = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$$



PNP2

Daniel Penazz

NP completi

Reducción

Polinomial
NP completo
Teorema de Coo

Teoremas de

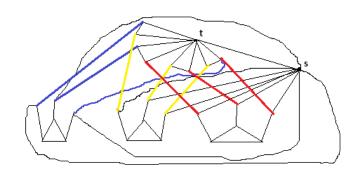
Karp

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = \chi(G) = 3 \Rightarrow \chi(G) = \chi(G) = 3 \Rightarrow \chi(G) = \chi(G) = 3 \Rightarrow \chi(G) = \chi$

 $D_3 = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$



PNP2

Danie Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Co

 $\begin{array}{c} \text{3SAI} \\ \text{Construcción} \\ \text{B sat} \Rightarrow \text{\tilde{B} sat} \\ \tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow \text{B sat} \end{array}$

3COLOR Construcción de G

eta sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

■ Volviendo a la prueba general, como G tiene triangulos, entonces $\chi(G) \geq 3$.

PNP2

Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

NP completo
Teorema de Cor
Teoremas o

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Volviendo a la prueba general, como G tiene triangulos, entonces $\chi(G) \geq 3$.
- Asi que $\chi(G) \le 3$ si y solo si $\chi(G) = 3$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp 3SAT Construcción

 $ar{B}$ sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR Construction de $m{G}$ $m{B}$ sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Volviendo a la prueba general, como G tiene triangulos, entonces $\chi(G) \geq 3$.
- Asi que $\chi(G) \le 3$ si y solo si $\chi(G) = 3$.
- Entonces lo que hay que probar que: B es satisfacible si y solo si $\chi(G) = 3$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat $\Rightarrow \overline{B}$ sat \overline{B} sat $\Rightarrow B$ sat 3COLOR Construcción de G

Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat \Rightarrow B sat \Rightarrow B sat \Rightarrow 3COLOR Construcción de C \Rightarrow C \Rightarrow

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Construcción

B sat ⇒ B

Sat

B

Sat

B

Sat

Construcción de C

Construcción de C

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.
- Por lo tanto un asignamiento de valores es un vector de bits en $\{0,1\}^n$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

 $\begin{array}{l} \mathsf{Karp} \\ \mathsf{3SAT} \\ \mathsf{Construcción} \\ \mathsf{B} \ \mathsf{sat} \Rightarrow \ \mathsf{B} \ \mathsf{sat} \\ \mathsf{B} \ \mathsf{sat} \Rightarrow \ \mathsf{B} \ \mathsf{sat} \\ \mathsf{3COLOR} \\ \textbf{\textit{Construcción de } G} \\ \mathsf{B} \ \mathsf{sat} \\ \Rightarrow \ \chi(\mathsf{G}) = 3 \end{array}$

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.
- Por lo tanto un asignamiento de valores es un vector de bits en $\{0,1\}^n$.
- Asi que lo denotaremos por \vec{b} .

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\Rightarrow \chi(G) = 3 \Rightarrow 0$

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.
- Por lo tanto un asignamiento de valores es un vector de bits en $\{0,1\}^n$.
- Asi que lo denotaremos por \vec{b} .
- Y $x(\vec{b})$ es el valor que asume la variable x en ese asignamiento.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G $\overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat}$

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.
- Por lo tanto un asignamiento de valores es un vector de bits en $\{0,1\}^n$.
- Asi que lo denotaremos por \vec{b} .
- Y $x(\vec{b})$ es el valor que asume la variable x en ese asignamiento.
- Por ejemplo si n = 4, $x_2(1, 0, 1, 1) = 0$, pero $x_4(1, 0, 1, 1) = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G

 $B ext{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Similarmente denotaremos por $\ell(\vec{b})$ el valor que asume el literal ℓ

PNP2

Daniel Penazz

NP completi

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Similarmente denotaremos por $\ell(\vec{b})$ el valor que asume el literal ℓ
- Asi por ejemplo $\overline{x}_3(1,0,1,1) = 1 x_3(1,0,1,1) = 1 1 = 0.$

PNP₂

- Similarmente denotaremos por $\ell(\vec{b})$ el valor que asume el literal ℓ
- Asi por ejemplo $\overline{x}_3(1,0,1,1) = 1 - x_3(1,0,1,1) = 1 - 1 = 0.$
- Y $D_i(\vec{b})$ el valor que asume toda la disjunción y $B(\vec{b})$ el valor que asume toda la expresión booleana.

PNP₂

completitud

Similarmente denotaremos por $\ell(\vec{b})$ el valor que asume el literal ℓ

- Asi por ejemplo $\overline{x}_3(1,0,1,1) = 1 - x_3(1,0,1,1) = 1 - 1 = 0.$
- Y $D_i(\vec{b})$ el valor que asume toda la disjunción y $B(\vec{b})$ el valor que asume toda la expresión booleana.
- Veamos primero la implicación B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3.$

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teorema de Sax
E Sax
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
Sacolo R

■ Esta es fácil pero engorrosa: debemos dar un coloreo propio con 3 colores de *G*, así que debemos colorear todos los vértices de *G*, uno por uno.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karo

Karp

3SAT

Construcción

B sat ⇒ B sa

B̃ sat ⇒ B sa

3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Esta es fácil pero engorrosa: debemos dar un coloreo propio con 3 colores de *G*, asi que debemos colorear todos los vértices de *G*, uno por uno.
- Tenemos que usar que hay un asignamiento de valores a las variables de B que la vuelve verdadera.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sa}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$ 3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Esta es fácil pero engorrosa: debemos dar un coloreo propio con 3 colores de *G*, asi que debemos colorear todos los vértices de *G*, uno por uno.
- Tenemos que usar que hay un asignamiento de valores a las variables de B que la vuelve verdadera.
- Es decir, existe un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Esta es fácil pero engorrosa: debemos dar un coloreo propio con 3 colores de *G*, asi que debemos colorear todos los vértices de *G*, uno por uno.
- Tenemos que usar que hay un asignamiento de valores a las variables de *B* que la vuelve verdadera.
- Es decir, existe un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- IMPORTANTE por algún motivo, posiblemente por memorizar sin entender, muchos en el final hacen todo el coloreo sin usar nunca que existe un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$. Una prueba de ese tipo, aunque ocupe muchas lineas, está mal y no suma puntos.

PNP2

Daniel Penazz

NP

Reducción Polinomial NP completo

NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Coloreamos los vértices v_ℓ por medio de $c(v_\ell) = \ell(\vec{b})$

PNP2

Daniel Penazz

NP completit

Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

3SAT

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 \Rightarrow $\chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- lacktriangle Coloreamos los vértices v_ℓ por medio de $c(v_\ell)=\ell(ec b)$
- Al ir coloreando los vértices, iremos chequeando que el coloreo sea propio.

PNP₂

- Coloreamos los vértices v_{ℓ} por medio de $c(v_{\ell}) = \ell(\vec{b})$
- Al ir coloreando los vértices, iremos chequeando que el coloreo sea propio.
- Para ello, chequearemos que en cada lado donde los dos vértices ya hayan sido coloreados, los extremos tengan colores distintos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

SAT
Construcción

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de C

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- lacksquare Coloreamos los vértices v_ℓ por medio de $c(v_\ell)=\ell(ec b)$
- Al ir coloreando los vértices, iremos chequeando que el coloreo sea propio.
- Para ello, chequearemos que en cada lado donde los dos vértices ya hayan sido coloreados, los extremos tengan colores distintos.
- Al chequearlo, diremos que el lado "no crea problemas".

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

■ Ya tenemos coloreados los vértices v_ℓ y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

 $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow l$ sat

- Ya tenemos coloreados los vértices v_{ℓ} y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.
- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{x}}$ no crea problemas

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

SAT Construcción B sat ⇒ B sat B̃ sat ⇒ B sat

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

■ Ya tenemos coloreados los vértices v_ℓ y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.

- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{x}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora c(s) = 1 y c(t) = 2.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sa}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$

3COLOR
Construcción de 6

 $B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$ sat

- Ya tenemos coloreados los vértices v_{ℓ} y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.
- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{x}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora c(s) = 1 y c(t) = 2.
- Como $c(s) \neq c(t)$ entonces st no crea problemas

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP₂

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Ya tenemos coloreados los vértices v_{ℓ} y $v_{x}v_{\overline{x}}$ forman lado, así que tenemos que chequearlos.

- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{y}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora c(s) = 1 y c(t) = 2.
- Como $c(s) \neq c(t)$ entonces st no crea problemas
- Como c(t) = 2 y $c(v_\ell) \in \{0, 1\}$, entonces tv_ℓ no crea problemas

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sa}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Ya tenemos coloreados los vértices v_{ℓ} y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.

- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{x}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora c(s) = 1 y c(t) = 2.
- Como $c(s) \neq c(t)$ entonces st no crea problemas
- Como c(t) = 2 y $c(v_{\ell}) \in \{0, 1\}$, entonces tv_{ℓ} no crea problemas
- Ahora debemos colorear las garras, es decir los e y a.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sa}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sa}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

Ya tenemos coloreados los vértices v_{ℓ} y $v_x v_{\overline{x}}$ forman lado, asi que tenemos que chequearlos.

- Pero $c(v_{\overline{x}}) = \overline{x}(\vec{b}) = 1 x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ asi que $v_x v_{\overline{x}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora c(s) = 1 y c(t) = 2.
- Como $c(s) \neq c(t)$ entonces st no crea problemas
- Como c(t) = 2 y $c(v_{\ell}) \in \{0, 1\}$, entonces tv_{ℓ} no crea problemas
- Ahora debemos colorear las garras, es decir los *e* y *a*.
- Aca tenemos que usar que $B(\vec{b}) = 1$ (hasta ahora no lo hicimos)

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

■ Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_i(\vec{b}) = 1 \ \forall j.$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ si}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_i(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cool

3SAT
Gonstrucción

Construction $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_j(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.

- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)
- Si hay mas de un tal k_j , elegimos uno sólo, pej el primero.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teorema Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_j(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)
- Si hay mas de un tal k_j, elegimos uno sólo, pej el primero.
- Coloreamos, para cada j:

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

completitud

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_i(\vec{b}) = 1 \ \forall i.$
- Como $D_i = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_i tal que $\ell_{k_i,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)
- \blacksquare Si hay mas de un tal k_i , elegimos uno sólo, pej el primero.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(a_{k_i,i}) = 2$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

■ Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_i(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.

- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)
- Si hay mas de un tal k_j, elegimos uno sólo, pej el primero.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(a_{k_i,j}) = 2$
 - Para los $a_{r,j}$ con $r \neq k_j$, que son los dos que quedan, coloreamos uno de ellos con 1, y el otro con 0.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coc

Teorem: Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLORConstrucción de G

Construction de G

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 3$ sat

- Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, entonces $D_j(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (‡)
- Si hay mas de un tal k_j, elegimos uno sólo, pej el primero.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(a_{k_i,j}) = 2$
 - Para los $a_{r,j}$ con $r \neq k_j$, que son los dos que quedan, coloreamos uno de ellos con 1, y el otro con 0.
- Esto significa que el triangulo formado por los $a_{k,j}$ tiene los tres vértices de distinto color, por lo tanto no crea problemas

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de

 $\beta \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

■ Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo

Teoremas d

Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

a.■ Coloreamos, para cada j:

■ Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp 3SAT Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teorema de Coo

3SAT
Construcción

R sat → Ř sa

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de G

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.
- Como para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(a_{r,j}) \in \{0,1\}$ entonces $e_{r,j}a_{r,j}$ no crea problemas para esos r.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B̃ sat ⇒ B sat
3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.
- Como para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(a_{r,j}) \in \{0,1\}$ entonces $e_{r,j}a_{r,j}$ no crea problemas para esos r.
- Como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(a_{k_j,j}) = 2$ entonces $e_{k_j,j}a_{k_j,j}$ no crea problemas

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ s}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ s}$ 3COLOR

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
- Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.
- Como para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(a_{r,j}) \in \{0,1\}$ entonces $e_{r,j}a_{r,j}$ no crea problemas para esos r.
- Como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(a_{k_j,j}) = 2$ entonces $e_{k_j,j}a_{k_j,j}$ no crea problemas
- Por lo tanto las "garras" estan coloreadas de forma tal de no tener problemas internos.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

SAT
Construcción
B sat ⇒ B s
B sat ⇒ B s

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$ sat

- Quedan los e, que estan unidos con s, algunos v_{ℓ} y los a.
 - Coloreamos, para cada j:
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.
- Como para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(a_{r,j}) \in \{0,1\}$ entonces $e_{r,j}a_{r,j}$ no crea problemas para esos r.
- Como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(a_{k_j,j}) = 2$ entonces $e_{k_j,j}a_{k_j,j}$ no crea problemas
- Por lo tanto las "garras" estan coloreadas de forma tal de no tener problemas internos.
- Hay que ver que pasa con los lados que las conectan con el resto del grafo.

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

B sat

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

■ Primero, veamos s, que esta conectado con todos los e:

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teorema de Cool Teoremas de Karp 3SAT Construcción

 $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sat}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR
Construction de

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Primero, veamos s, que esta conectado con todos los e:
- Pero $se_{i,j}$ no crea problemas pues c(s)=1 y $c(e_{i,j}) \in \{2,0\}.$

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Primero, veamos s, que esta conectado con todos los e:
- Pero $se_{i,i}$ no crea problemas pues c(s) = 1 y $c(e_{i,j}) \in \{2,0\}.$
- Sólo nos queda ver los lados $e_{r,i}v_{\ell_{r,i}}$.

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow E$

Primero, veamos s, que esta conectado con todos los e:

- Pero $se_{i,j}$ no crea problemas pues c(s) = 1 y $c(e_{i,j}) \in \{2,0\}.$
- Sólo nos queda ver los lados $e_{r,j}v_{\ell_{r,j}}$.
- El caso $r \neq k_j$ es facil: tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(v_{\ell_{r,j}}) \in \{0,1\}$ asi que $e_{r,j}v_{\ell_{r,j}}$ no crea problemas para esos r.

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Penazz

completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

Construcción

B sat ⇒ B sa

B sat ⇒ B sa

3COLOR
Construcción d

 $\begin{array}{l}
B \text{ sat} \\
\Rightarrow \chi(G) = 3 \\
& \chi(G) = 3 \Rightarrow 6
\end{array}$

Queda el caso k_j.

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Queda el caso k_i.

■ Tenemos $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = \ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$ (por ‡)

$B \operatorname{sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp _{3SAT}

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \widetilde{B} \operatorname{sat}$ $\widetilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $3\operatorname{COLOR}$

Construcción de G

B sat

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Queda el caso k_i.
- Tenemos $c(v_{\ell_{k_i,j}}) = \ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$ (por ‡)
- Por lo tanto, como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = 1$, entonces $e_{k_j,j}v_{\ell_{k_i,j}}$ no crea problemas

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP₂

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Queda el caso k_i.

- Tenemos $c(v_{\ell_{k_i,j}}) = \ell_{k_i,j}(\vec{b}) = 1$ (por ‡)
- Por lo tanto, como $c(e_{k_i,j}) = 0$ y $c(v_{\ell_{k_i,j}}) = 1$, entonces $e_{k_i,j}v_{\ell_{k_i,j}}$ no crea problemas
- Hemos terminado de colorear todos los vértices con 3 colores y chequeado que el coloreo es propio.

$B \operatorname{sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

 \blacksquare Queda el caso k_i .

- Tenemos $c(v_{\ell_{k_i,j}}) = \ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$ (por ‡)
- Por lo tanto, como $c(e_{k_j,j})=0$ y $c(v_{\ell_{k_j,j}})=1$, entonces $e_{k_j,j}v_{\ell_{k_i,j}}$ no crea problemas
- Hemos terminado de colorear todos los vértices con 3 colores y chequeado que el coloreo es propio.
- Por lo tanto, hemos completado la implicación B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3$.

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud

Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

3SAT
Construcción
B sat ⇒ B̃ sa
B̃ sat ⇒ B sa

Construcción de GB sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

 \blacksquare Queda el caso k_i .

- Tenemos $c(v_{\ell_{k_i,j}}) = \ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$ (por ‡)
- Por lo tanto, como $c(e_{k_j,j})=0$ y $c(v_{\ell_{k_j,j}})=1$, entonces $e_{k_j,j}v_{\ell_{k_i,j}}$ no crea problemas
- Hemos terminado de colorear todos los vértices con 3 colores y chequeado que el coloreo es propio.
- Por lo tanto, hemos completado la implicación B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3$.
- Veamos la vuelta.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitu

Reducción Polinomial NP completo

Teoremas d

Carly

SSAT

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \overline{B} \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ $\overline{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sat}$ 3COLOR

Construcción de G $B \operatorname{sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.

PNP₂

Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.

■ A partir de c debemos definir un $\vec{b} \in \{0, 1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1.$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

- Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.
- A partir de c debemos definir un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- Otra vez, si nunca lo definen, o no usan el coloreo c, la prueba de esta parte no vale nada.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

- Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.
- A partir de c debemos definir un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- Otra vez, si nunca lo definen, o no usan el coloreo c, la prueba de esta parte no vale nada.
- Definimos \vec{b} usando el coloreo c de la siguiente forma, con la notación [] que vimos en la parte de flujos:

$$b_i = [c(v_{x_i}) = c(s)]$$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

SSAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.

- A partir de c debemos definir un $\vec{b} \in \{0,1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- Otra vez, si nunca lo definen, o no usan el coloreo c, la prueba de esta parte no vale nada.
- Definimos \vec{b} usando el coloreo c de la siguiente forma, con la notación [] que vimos en la parte de flujos:

$$b_i = [c(v_{x_i}) = c(s)]$$

■ Es decir $b_i = 1$ si $c(v_{x_i}) = c(s)$ y $b_i = 0$ si $c(v_{x_i}) \neq c(s)$

PNP2

■ Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.

PNP2

Daniel Penazz

completitu

Completitud Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Coo

Teoremas o

Construcción $B \operatorname{sat} \Rightarrow \tilde{B} \operatorname{sa}$ $\tilde{B} \operatorname{sat} \Rightarrow B \operatorname{sa}$

3COLOR Construcción de

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas d Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_\ell) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G $\overline{B} \text{ sat}$

Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.

■ Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$

■ Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.

Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teorema de Cook
Teoremas de Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_\ell) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.

PNP2

completitud

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s).$
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$

PNP2

completitud

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s).$
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{x}_s}) = c(s).$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

NP completo
Teorema de Coo
Teoremas de

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construction de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{y_{\ell}}}) = c(s)$.
 - **2** Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Coo
Teoremas d

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{v}}) = c(s)$.
 - 2 Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$.
 - 3 Juntando [1] y [2] concluimos que $c(v_{x_i}) \neq c(s)$.

PNP2

completitud

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s).$
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{x}_i}) = c(s).$
 - 2 Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$.
 - 3 Juntando [1] y [2] concluimos que $c(v_x) \neq c(s)$.
 - 4 El punto [3] implica que $b_i = 0$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

Polinomial

NP completo

Teorema de Cool

Teoremas de

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{k}_{\ell}}) = c(s)$.
 - 2 Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$.
 - 3 Juntando [1] y [2] concluimos que $c(v_{x_i}) \neq c(s)$.
 - 4 El punto [3] implica que $b_i = 0$.
 - 5 Entonces $\ell(\vec{b}) = \overline{x}_i(\vec{b}) = 1 x_i(\vec{b}) = 1 b_i = 1 0 = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo

NP completo
Teorema de Coo

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\chi(G) = 3 =$

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_{\ell}) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \overline{x}_i$
 - Entonces decir $c(v_{\ell}) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\overline{x_i}}) = c(s)$.
 - 2 Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$.
 - 3 Juntando [1] y [2] concluimos que $c(v_{x_i}) \neq c(s)$.
 - 4 El punto [3] implica que $b_i = 0$.
 - 5 Entonces $\ell(\vec{b}) = \overline{x}_i(\vec{b}) = 1 x_i(\vec{b}) = 1 b_i = 1 0 = 1$.
- En cualquiera de los casos hemos probado que $c(v_{\ell}) = c(s) \Rightarrow \ell(\vec{b}) = 1$.

PNP2

■ Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

■ Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

Como los a_{k,j} forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$ $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- Como los $a_{k,j}$ forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,j}) = c(t)$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teorem Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \widetilde{B} \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $\widetilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- Como los a_{k,j} forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,i}) = c(t)$.
- Analicemos el color posible del $e_{q,j}$ asociado a $a_{q,j}$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teorem Karp

 $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ som} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ som} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ $B \text{ sat} \Rightarrow X(G) = 3$

■ Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

- Como los $a_{k,j}$ forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,j}) = c(t)$.
- Analicemos el color posible del $e_{q,j}$ asociado a $a_{q,j}$.
 - 1 $e_{q,j}a_{q,j} \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(a_{q,j}) = c(t)$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Karp

 $\beta \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

- Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- Como los $a_{k,j}$ forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,j}) = c(t)$.
- Analicemos el color posible del $e_{q,j}$ asociado a $a_{q,j}$.
 - 1 $e_{q,j}a_{q,j} \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(a_{q,j}) = c(t)$.
 - $2 e_{q,j}s \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(s).$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Coo

Teorem Karp

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Sea ahora $j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- Como los $a_{k,j}$ forman un triangulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triangulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,j}) = c(t)$.
- Analicemos el color posible del $e_{q,j}$ asociado a $a_{q,j}$.

 - $2 e_{q,j}s \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(s).$
- Por lo tanto $e_{q,j}$ debe tener el "tercer" color, es decir, el color que no es el color de s ni el color de t.

PNP2

Daniel Penazz

Completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción B sat $\Rightarrow B$ sat B sat $\Rightarrow B$ sat
SOOLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

• (Como $st \in E$, entonces necesariamente $c(s) \neq c(t)$ asi que efectivamente sólo queda un color libre para $e_{a,i}$)

PNP₂

 $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

■ (Como $st \in E$, entonces necesariamente $c(s) \neq c(t)$ asi que efectivamente sólo queda un color libre para $e_{q,i}$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Teoremas de Karp

3SAT

Construcción B sat $\Rightarrow B$ sat B sat

3COLOR

Construcción de C B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

• (Como $st \in E$, entonces necesariamente $c(s) \neq c(t)$ asi que efectivamente sólo queda un color libre para $e_{q,j}$)

 $1 v_{\ell_{q,j}}e_{q,j} \in E \Rightarrow c(v_{\ell_{q,j}}) \neq c(e_{q,j}).$

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Reoremas de Karp

3SAT

Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR

Construcción de $\overline{B} \text{ sat}$

 \tilde{B} sat $\Rightarrow B$ sat COLOR
Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ sat

• (Como $st \in E$, entonces necesariamente $c(s) \neq c(t)$ asi que efectivamente sólo queda un color libre para $e_{g,j}$)

$$v_{\ell_{q,j}}t \in E \Rightarrow c(v_{\ell_{q,j}}) \neq c(t).$$

■ Como $e_{q,j}$ tiene el tercer color, los dos puntos anteriores implican que $v_{\ell_{q,j}}$ no puede tener ni el tercer color ni el color de t.

PNP2

Daniel Penazz

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción
B sat ⇒ B sat
B sat ⇒ B sat
Construcción de
Construcción

 $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

■ Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s: $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Teoremas de Karp 3SAT Construcción B sat \Rightarrow \bar{B} sat \bar{B} sat \Rightarrow 3COLOR Construcción de G B sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

- Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s: $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.
- Probamos antes que eso implica que $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cool

Karp

3SAT

Construcción B sat \Rightarrow \overline{B} sat \overline{B} sat \Rightarrow B sat

3COLOR

Construcción de \overline{B} sat $\Rightarrow \chi(G) = 3$

 $\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

- Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s: $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.
- Probamos antes que eso implica que $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \ell_{3,j}$ entonces $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$ implica que $D_j(\vec{b}) = 1$.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

- Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s: $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.
- Probamos antes que eso implica que $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \lor \ell_{2,j} \lor \ell_{3,j}$ entonces $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$ implica que $D_i(\vec{b}) = 1$.
- El j era cualquiera en $\{1, 2, ..., m\}$, es decir, hemos probado que $D_j(\vec{b}) = 1$ para todo j.

PNP2

Daniel Penazz

NP completitud Reducción Polinomial NP completo Teorema de Cook

Karp
3SAT
Construcción $B \text{ sat} \Rightarrow \overline{B} \text{ sat}$ $\overline{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$ 3COLOR
Construcción de G $\overline{B} \text{ sat}$ $\Rightarrow \chi(G) = 3$ $\chi(G) = 3 \Rightarrow 1$

- Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s: $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.
- Probamos antes que eso implica que $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$ implica que $D_j(\vec{b}) = 1$.
- El j era cualquiera en $\{1, 2, ..., m\}$, es decir, hemos probado que $D_j(\vec{b}) = 1$ para todo j.
- Como $B = D_1 \wedge ... \wedge D_m$, lo anterior implica que $B(\vec{b}) = 1$ asi que B es satisfacible y hemos concluido la prueba.