Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2018
FAMAF

1. Demostrar las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.
   a) Si un número es distinto de cero entonces su opuesto también lo es.
   b) Todo número es igual al opuesto de su opuesto.
   c) Si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.
   d) El producto de dos números positivos es positivo.
   e) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$.
   f) Si $a + a = 0$, entonces $a = 0$.
   g) Si a es tal que $1 \leq a \leq 2$ entonces $a = 1$ ó $a = 2$.
   h) No existe a tal que $a^2 = 2$.
2. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y dar la negación de cada una de ellas.
   a) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid x(x + 4) = x^2 - 4$,
   b) $\forall x \in \mathbb{Z}$, tal que $x \geq 1$, $\exists y \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq y \leq 2x$,
   c) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $x + y = 0$.
3. Analizar la validez de la siguiente demostración.

   TEOREMA. *Si* $a \in \mathbb{Z}$, *entonces* $0 < a$.

   DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $0 < 1$, entonces

   $$0 < 1 \implies 0 \cdot a < 1 \cdot a \implies 0 < a.$$

   Esto es lo que queríamos demostrar. □

4. Dadas las siguientes afirmaciones decir si son verdaderas o falsas y dar la negación de cada una de ellas.

   a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$,
   b) $a \in \mathbb{Z}, a^2 \leq 2 \implies -2 \leq a \leq 2$.
   c) $\forall a \in \mathbb{Z}, (a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$,

5. Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$ *b)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ *d)* $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

6. Sea $n \in \mathbb{N}$, demostrar por inducción las siguientes igualdades:

   a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$,

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$,

   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

   e) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$,

   f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1}$,

   g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2n+1}{3}$,

   h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$, tal que $a \neq 0$, $a \neq 1$, y $n \in \mathbb{N}_0$.

   j) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

7. Dados dos naturales n y m, probar que $\forall\ x,\ y \in \mathbb{Q}$, se cumple:

   a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, *b)* $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, *c)* $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

8. Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:
   a) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.
   b) $n^3 \leq 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.
9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, valen las siguientes propiedades:
   a) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
   b) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.
10. Considere las propiedades de los números reales de ser un cuerpo ordenado y demuestre por inducción las siguientes desigualdades:
    a) Si $a \in \mathbb{Q}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
    b) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Dado un natural n, si $a_1, \ldots, a_n \in (0,1)$, entonces $(1-a_1)\cdots(1-a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$.

11. Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11\,n + 3$.
12. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

    a) $n = n^2$, b) $n = n+1$, c) $3^n = 3^{n+2}$, d) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

13. Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

    a) Demostraremos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
    Supongamos que $5k+3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k+3 = 5p$. Probemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5: Como

    $$5(k+1)+3 = (5k+5)+3 = (5k+3)+5 = 5p+5 = 5(p+1),$$

    entonces obtenemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

    b) Sea $a \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo n, $a^n = 1$.
    Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces $a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Sean $u_1 = 3$ y $u_2 = 5$. Definimos $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^n + 1$.
15. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_k = 7u_{k-1} - 10u_{k-2}$, $\forall k \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
16. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por: $u_1 = 2$, $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \ \ \forall\, n > 1$.

    a) Calcule u_2 y u_3.

    b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.