Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2018

Guía de Ejercicios N°3: Límites

Límite de funciones

1. A partir de una tabla de valores, estime $\lim_{x\to a} f(x)$ tomando valores cercanos a a, por derecha y por izquierda. (Sugerencia: utilice calculadora).

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2. Calcule los siguientes límites utilizando las propiedades de cálculo de límite.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

   b) $\displaystyle\lim_{s\to 2}(s^2+1)(s^2+4s)$

   c) $\displaystyle\lim_{t\to -1}\frac{\sqrt{t^3+3t^2+7}}{t+2}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x+1}$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3. Utilizando las propiedades de límites, conteste los siguientes interrogantes:

   a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ o $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?

   b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, y son ambos finitos, ¿existe necesariamente $\lim_{x\to a} g(x)$?

   c) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, finito, y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

   d) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ambos finitos, ¿se puede concluir que existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

4. Dada la siguiente función $f(x)$, calcule los límites laterales e indique si los límites indicados existen:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 9-(x-3)^2 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ -1 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x)$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x)$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$

5. Dada la siguiente función $g(x)$, calcule los límites laterales y decida si los límites indicados existen:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad |x| > 1 \\ -x & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 2 & \text{si} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

6. Calcule los siguientes límites, si existen. Si no existen explique por qué:

a) $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{h^2}}{h}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

7. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ sabiendo que $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ sabiendo que $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ cerca de 1.

8. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x}{1+3x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x+1}{2+2x^2+9x^4}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{18x^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)$

9. Determine las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{x}{x+4}$

b) $y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

c) $y = \frac{x^3+1}{x^3+x}$

10. Observe el gráfico de la función g de la Figura 1 y determine, aproximadamente, los siguientes valores, en caso que existan.

a) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

d) $g(1)$

e) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

h) $g(2)$

i) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 6^+} g(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 6^-} g(x)$

l) $g(6)$

m) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

n) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$

ñ) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$

o) $g(-2)$

p) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

r) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

s) $g(0)$

11. Calcule los límites indicados:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x^2-9)}{x^2-5x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 5x}\right)^2$

d) $\lim\limits_{r\to \infty} r \operatorname{sen} \dfrac{1}{r}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

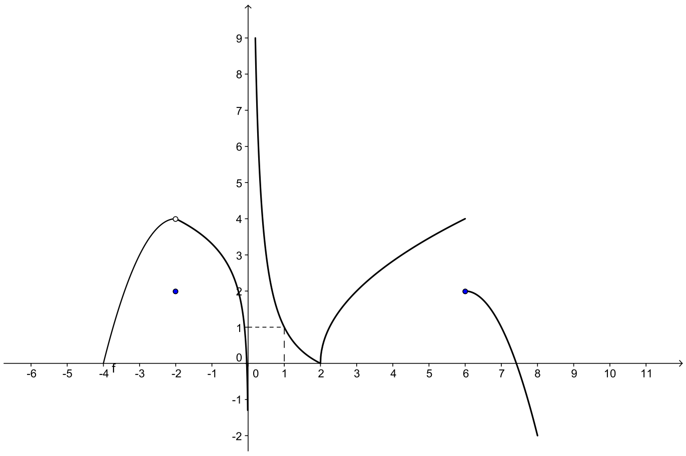

Figura 1: Función $g(x)$ del ejercicio 10

Problemas extras:

12. Se sabe que una pileta de natación se vacía según la función $V(t) = 1000\dfrac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$, donde V es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en horas. ¿A qué valor se aproxima el volumen cuando el tiempo se aproxima a 1 hora?

13. La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \dfrac{10t}{t^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

14. En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y(x) = \dfrac{4}{2+8\mathrm{e}^{-2x}}$.

    a) ¿Cuál es la poblacioń inicial de la colonia de bacterias?

    b) Determine si la población crece indefinidamente con el tiempo o tiene a estabilizarse en algún valor fijo.