# Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
# Clase 12 - Determinante 1

FAMAF / UNC

26 de abril de 2021

En este archivo

- Definiremos el determinante de un matriz,
- Explicaremos como calcularlo y
- Daremos algunas propiedades del mismo.

Este archivo se basa en Sección 2.8 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

El determinante es una función que le asigna a cada matriz cuadrada un escalar.

$$
\begin{aligned}
\det : \mathbb{K}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{K} \\
A &\longmapsto \det(A)
\end{aligned}
$$

El determinante se define de forma recursiva.

Es decir, el determinante de una matriz $n \times n$ se calcula en base de los determinantes de submatrices $n-1 \times n-1$.

Así que primero introduciremos estas submatrices.

**Definición 2.8.1**

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean $i, j$ tales que $1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$\underline{A(i|j)} \in \mathbb{K}^{n-1\times n-1}$$

es la matriz que se obtiene eliminando la fila $i$ y la columna $j$ de $A$.

$A(i|j)$

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\
j &
\end{array}$$

## Definición 2.8.1

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y sean $i, j$ tales que $1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$A(i|j) \in \mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$$

es la matriz que se obtiene eliminando la fila $i$ y la columna $j$ de $A$.

## Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, entonces $A(1|2) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$$
A(i|j) = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

## Definición 2.8.2

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces el determinante de $A$, denotado $\det(A)$ ó $|A|$, se define como

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$   $A = (a_{11})$

2. Si $n > 1$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i}\, a_{i1} \det A(i|1)$

$$= a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

Este es el cálculo del determinante por desarrollo por la primera columna porque estamos usando los coeficientes de la primera columna $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{31}$, ..., $a_{n1}$

Para $n = 2$ y $n = 3$, podemos escribir fórmulas más concretas.

Calcelemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $-$ $+$

$\det A = a_{11} \cdot \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1)$

$\det A = \underbrace{a_{11}\ a_{22}} - \underline{a_{21}\ a_{12}}$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

## Observación

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Podemos visualizar esta fórmula así:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + a_{31} \det A(3|1)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$

$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - \cdots\cdots$$

# Ejemplo

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \end{array}$$

$$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6$$
$$- 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9$$
$$= -24$$

## Observación 2.8.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Se puede visualizar esta fórmula así

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

− − − A

+ ← Fila 1

+ ← FiLA 2

+

Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} - 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 13 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4$$

$$\boxed{\det A = 4}$$

**Observación**

Para $n \geq 4$ no hay fórmulas sencillas del determinante como en el caso $2$ y $3$.

Como podemos apreciar, si procedemos de igual manera para $n = 5$ nos perderíamos y/o cansaríamos de hacer cuenta.

Para $n$ muy grandes no nos alcanzaría la cuarentena.

Debemos buscar una forma más fácil de calcular el determinante. Es lo que haremos usando operaciones elementales por fila.

## Observación

Las fórmulas para $n = 2$ y $n = 3$ es un caso particular de la fórmula

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

válida para todo $n$, la cual tiene $n!$ terminos.

($\mathbb{S}_n$ es el conjunto de permutación de $\{1, ..., n\}$ y
$\operatorname{sgn} : \mathbb{S}_n \to \{1, -1\}$ es una función)

## Observación

Del modo que lo presentamos, el determinante no es más que una fórmula que le aplicamos a una matriz. Pero aquí sólo estamos viendo el producto final de años y años de estudio.
De hecho, el determinante existió antes que las matrices y se lo utilizaba para "determinar" cuando un sistema de ecuación tiene solución única (si y sólo si el determinante es no nulo). También tiene otras aplicaciones.
Pueden googlear "determinate" (o "determinant" en inglés) para saber más o leer la página de Wikipedia.
Un dato de color es que Charles Lutwidge Dodgson, más conocido como Lewis Carroll y por ser el autor de "Alicia en el país de las maravillas", era matemático y escribió "An Elementary Theory of Determinants" en 1867.

## Teorema 2.8.9

Sean $A$ y $B$ matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $A$ es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

## Corolario 2.8.10

Sean $A$ y $B$ matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(BA)$
2. Si $A$ es invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Viendo la fórmula del determinate

$$\det(A) = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

notamos que mientras más ceros tenga la primera columna (o sea, más $a_{i1}$'s iguales a $0$), menos cuentas deberemos hacer.

Por ejemplo, si $A$ es triangular superior o una MERF.

## Proposición 2.8.3

El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(esto aplica también a las matrices diagonal)

## Corolario 2.8.4

$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1$$

## Corolario 2.8.5

Si $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una MERF, entonces

$$\det(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \text{ no tiene filas nulas} \Leftrightarrow R = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{si } R \text{ tiene filas nulas} \end{cases}$$

Demostración: toda MERF es una triangular superior con $1$ y/o $0$ en la diagonal y por lo tanto podemos aplicar los resultados anteriores. Si no tiene filas nulas, entonces $R = \mathrm{Id}$ y $\det(R) = 1$. Si tiene filas nulas, entonces el último elemento de la diagonal es cero y $\det(R) = 0$.

Volvamos a la fórmula del determinate

$$\det(A) = a_{11}\det A(1|1) - a_{21}\det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1}\det A(n|1)$$

y a la observación de que con más ceros en la primera columna menos cuentas deberemos hacer.

Con las operaciones elementales por filas podemos anular las entradas no nulas como lo haciamos para transformar una matriz en MERF.

Entonces deberíamos analizar como estas operaciones afectan en el cálculo del determinate. Esto es el Teorema 2.8.6

## Teorema 2.8.6 (1)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{K}$ no nulo.
Si $B$ es la matriz que se obtiene de $A$ multiplicando la fila $i$ por $c$, entonces $\det(B) = c\det(A)$

## Ejemplo

Verifiquemos el teorema en $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{10F_1}{\rightarrow} B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = -2$

$\det B = -20 = 10 \cdot \det A$

## Teorema 2.8.6 (2)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $t \in \mathbb{K}$.
Si $B$ es la matriz que se obtiene de $A$ sumando a la fila $r$ la fila $s$ multiplicada por $t$, entonces $\det(B) = \det(A)$

## Ejemplo

Verifiquemos el teorema en $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_2+10F_1}{\rightarrow} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{pmatrix}$

$\det A = -2$

$\det B = -2 = \det A$

## Teorema 2.8.6 (3)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Si $B$ es la matriz que se obtiene de $A$ intercambiando las filas $r$ y $s$, entonces $\det(B) = -\det(A)$

## Ejemplo

Verifiquemos el teorema en $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = -2$

$\det B = 2 = -\det A$

**Observación**

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Si $B$ se obtiene de $A$ mediante operaciones elementales por filas entonces $\det(B) = k\det(A)$ para algún $k \in \mathbb{K}$ no nulo.

En consecuencia, si conocemos el determinante de $B$ entonces podemos deducir el determinante de $A$.

A partir de lo anterior podemos plantear una estrategia general para calcular el determinante

$$A \xrightarrow{e_1} \cdots\cdots \xrightarrow{e_L} B$$

$$\Rightarrow \det B = k \cdot \det A$$

$$\Rightarrow \det A = \frac{1}{k} \det B$$

## Estrategia para calcular el determinante de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1. Usamos operaciones elementales por filas para transformar la matriz $A$ en una matriz triangular superior $C$.
2. Por el Teorema 2.8.4, existen escalares no nulos tales que

$$\det(C) = k_\ell \cdots k_1 \det(A)$$

3. El determinante de $C$ es el producto de la diagonal (Proposición 2.8.1)
4. Entonces podemos despejar

$$\det(A) = \frac{1}{k_\ell \cdots k_1} \det(C)$$

(espero que con el ejemplo que sigue quede clara la estrategia)

Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ usando esta estrategia.

Primero, reducimos $A$ hasta una triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\cancel{0}1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\cancel{0}1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

SP FILAS

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\cancel{0}1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{3}4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\cancel{0}1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{3}4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cancel{0}\,{-1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \xrightarrow{F_4 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cancel{0}\,{-1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = D$$

Op de Fila

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cancel{0}\,{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{3}\,4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{C} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{3}\,4 \end{pmatrix}} = B$$

Luego, usamos el Teorema 2.8.6 para deducir el determinante

$$\det B = -\det C = -\det D = -\det M = -\det A$$

$$\| \quad -4$$

$$\Rightarrow -4 = -\det A$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = 4}$$