Resolucion Segundo Medio examen practico de prueba de Matemática DiscretaII

1): La matriz representa el costo de asignar los trabajadores $A, B, ...$ a los trabajos I, II,..., etc. x es algún número real mayor a 4 y menor a 6, pero no se sabe cual es. Se desea asignar cada trabajo a un trabajador distinto de forma tal de minimizar el costo total (la suma de los costos) Hallar un matching que haga esto y decir cual es la suma de costos mínima. Observar que la respuesta, tanto del matching como de la suma, puede depender de x. Ud. debe dar todas las respuestas posibles para x en el intervalo dado.

	I	II	III	IV
A	x	7	8	9
B	2	4	x	5
C	1	x	9	8
D	2	9	9	x

Solución: Restamos mínimo de cada fila. Sabemos que $4 < x < 6$ asi que:
en la primera fila, con elementos x,7,8,9 el mas chico es x.
En la segunda fila, con elementos 2,4,x,5, el mas chico es 2.
En la tercera fila, con elementos 1,x,8,9 el mas chico es 1.
En la cuarta fila, con elementos 2,x,9, el mas chico es 2.

	I	II	III	IV
A	0	$7-x$	$8-x$	$9-x$
B	0	2	$x-2$	3
C	0	$x-1$	8	7
D	0	7	7	$x-2$

Ahora hay que restar el mínimo de cada columna. La primera el mínimo es 0, no cambia. En la segunda hay que encontrar el mínimo de $7-x, 2, x-1, 7$. Como $4 < x$ entonces $x-1 > 3 > 2$ asi que sólo hay que comparar 2 con $7-x$. Y $2 > 7-x$ si y solo si $x > 5$. Asi que tenemos que considerar varios casos.

Caso $4 < x < 5$

Como dijimos arriba, en este caso el mínimo de la segunda columna será 2.
En la tercera hay que encontrar el mínimo de $8-x, x-2, 8, 7$. Como $x < 5$ entonces $x-2 < 3$ y $3 < 8-x$ asi que el mínimo es $x-2$
En la cuarta los números son $9-x, 3, 7, x-2$ y por el cálculo de arriba, el mínimo es $x-2$.

	I	II	III	IV
A	0	$5-x$	$10-2x$	$11-2x$
B	0	0	0	$5-x$
C	0	$x-3$	$10-x$	$9-x$
D	0	5	$9-x$	0

Matching inicial

$$
\begin{array}{ccccc}
 & I & II & III & IV \\
A & [0] & 5-x & 10-2x & 11-2x \\
B & 0 & [0] & 0 & 5-x \\
C & 0 & x-3 & 10-x & 9-x \\
D & 0 & 5 & 9-x & [0]
\end{array}
$$

C queda sin matchear. Buscando extender el matching:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & I & II & III & IV & \\
A & [0] & 5-x & 10-2x & 11-2x & I \\
B & 0 & [0] & 0 & 5-x & \\
C & 0 & x-3 & 10-x & 9-x & s \\
D & 0 & 5 & 9-x & [0] & \\
 & C & & & &
\end{array}
$$

y es claro que $S = \{A, C\}$ con $\Gamma(S) = \{I\}$.
El mínimo de $S \times \overline{\Gamma(S)}$ es $m = 5 - x$
Cambiando la matriz:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & I & II & III & IV & \\
A & [0] & 0 & 5-x & 6-x & I \\
B & 5-x & [0] & 0 & 5-x & \\
C & 0 & 2x-8 & 5 & 4 & s \\
D & 5-x & 5 & 9-x & [0] & \\
 & C & & & &
\end{array}
$$

seguimos extendiendo el matching a partir del nuevo cero en AII:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & I & II & III & IV & \\
A & [0] & 0 & 5-x & 6-x & I \\
B & 5-x & [0] & 0 & 5-x & II \\
C & 0 & 2x-8 & 5 & 4 & s \\
D & 5-x & 5 & 9-x & [0] & \\
 & C & A & B & &
\end{array}
$$

arribamos a la columna libre III, y podemos extender el matching siguiendo las etiquetas

$$
\begin{array}{cccccc}
 & I & II & III & IV & \\
A & 0 & [0] & 5-x & 6-x & I \\
B & 5-x & 0 & [0] & 5-x & II \\
C & [0] & 2x-8 & 5 & 4 & s \\
D & 5-x & 5 & 9-x & [0] & \\
 & C & A & B & &
\end{array}
$$

Matching: $AII, BIII, CI, DIV$, costo total $7 + x + 1 + x = 8 + 2x$.

Caso $x = 5$

La matriz donde tenemos que restar mínimos de columnas es, en este caso

$$\begin{array}{ccccc} & I & II & III & IV \\ A & 0 & 2 & 3 & 4 \\ B & 0 & 2 & 3 & 3 \\ C & 0 & 4 & 8 & 7 \\ D & 0 & 7 & 7 & 3 \end{array}$$

Restando:

$$\begin{array}{ccccc} & I & II & III & IV \\ A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 2 & 5 & 4 \\ D & 0 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

No necesitamos cambiar la matriz en este caso y esta claro que $AII, BIII, CI, DIV$ es un matching, de costo 7+5+1+5=18, o bien $AIII, BII, CI, DIV$ tambien de costo 8+4+1+5=18.

Caso $5 < x$ (y $x < 6$ de la hip. inicial)

Habia que restar el mínimo de las columnas en

$$\begin{array}{ccccc} & I & II & III & IV \\ A & 0 & 7-x & 8-x & 9-x \\ B & 0 & 2 & x-2 & 3 \\ C & 0 & x-1 & 8 & 7 \\ D & 0 & 7 & 7 & x-2 \end{array}$$

que es $7-x$ en la 2da, 8-x en la tercera y 3 en la cuarta

$$\begin{array}{ccccc} & I & II & III & IV \\ A & 0 & 0 & 0 & 6-x \\ B & 0 & x-5 & 2x-10 & 0 \\ C & 0 & 2x-8 & x & 4 \\ D & 0 & x & x-1 & x-5 \end{array}$$

(como check, podemos verificar que efectivamente todos esos números son no negativos)
Matching inicial seria AI,BIV y C,D no se podrian matchear, y haciendo el algoritmo veriamos que podemos extender el matching a AII,BIV,CI, D sin matchear, asi que busquemos desde ahi:

$$\begin{array}{cccccc} & I & II & III & IV & \\ A & 0 & [0] & 0 & 6-x & \\ B & 0 & x-5 & 2x-10 & [0] & \\ C & [0] & 2x-8 & x & 4 & I \\ D & 0 & x & x-1 & x-5 & s \\ & D & & & & \end{array}$$

$S = \{C, D\}$, $\Gamma(S) = \{I\}$, $m = minS \times \Gamma(S) = min\{2x-8, x, 4, x-1, x-5\} = x-5$ pues $5 < x < 6$.

Cambiando la matriz y siguiendo con la busqueda:

$$\begin{array}{cccccc} & I & II & III & IV & \\ A & x-5 & [0] & 0 & 6-x & \\ B & x-5 & x-5 & 2x-10 & [0] & IV \\ C & [0] & x-3 & 5 & 9-x & I \\ D & 0 & 5 & 4 & 0 & s \\ & D & & & D & \end{array}$$

tampoco podemos extender el matching. El nuevo S es $\{C, D, B\}$ (podemos comprobar el teorema que dimos: no pudimos extender el matching, pero el S ha crecido).
$\Gamma(S) = \{I, IV\}$ $m = min\{x-5, 2x-10, x-3, 5, 4\} = x-5$.

$$\begin{array}{cccccc} & I & II & III & IV & \\ A & 2x-10 & [0] & 0 & 11 & \\ B & x-5 & 0 & x-5 & [0] & IV \\ C & [0] & 2 & 10-x & 14-2x & I \\ D & 0 & 10-x & 9-x & 0 & s \\ & D & & & D & \end{array}$$

extendiendo a partir del nuevo cero en BII:

$$\begin{array}{cccccc} & I & II & III & IV & \\ A & 2x-10 & [0] & 0 & 11 & II \\ B & x-5 & 0 & x-5 & [0] & IV \\ C & [0] & 2 & 10-x & 14-2x & I \\ D & 0 & 10-x & 9-x & 0 & s \\ & D & B & A & D & \end{array}$$

llegamos a la columna libre III y podemos extender el matching mirando las etiquetas:

$$\begin{array}{cccccc} & I & II & III & IV & \\ A & 2x-10 & 0 & [0] & 11 & II \\ B & x-5 & [0] & x-5 & 0 & IV \\ C & [0] & 2 & 10-x & 14-2x & I \\ D & 0 & 10-x & 9-x & [0] & s \\ & D & B & A & D & \end{array}$$

matching $AIII, BII, CI, DIV$
suma minima: $8+4+1+x = 13+x$.

Resumen: para $4 < x < 5$ el matching mínimo es $AII, BIII, CI, DIV$, de costo $8+2x$, para $5 < x < 6$ el matching mínimo es $AIII, BII, CI, DIV$ de costo $13+x$ y en el caso frontera $x = 5$ cualquiera de esos dos matchings es mínimo de costo $18 = 8+10 = 13+5$.

2):

Sea C el código con matriz de chequeo:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & c & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & d & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Las respuestas a las siguientes preguntas pueden depender de los valores de a, b, c, d , si es asi, ud. debe indicarlo y dar todas las respuestas posibles.
a) Escribir dos palabras no nulas que esten en C.
b) Decir cuantas palabras tiene en total C, justificando.
c) Calcular $\delta(C)$, justificando.
d) Si se recibe la palabra 10001010010001, y se asume que se produjo a lo sumo un error de transmisión, determinar la palabra enviada si esto es posible o indicar porqué no si no se puede.

Respuestas:
a) H es de la forma $[I_5|A]$ con A matriz 5×9 asi que una generadora será $[A^t|I_9]$.
Como no nos piden toda la generadora sino solo dos palabras, podemos mirar simplemente las dos primeras filas de la generadora, que por lo anterior serán:
11100100000000
y
$0ab11010000000$
y podemos dar esas dos palabras, o si no queremos dar una que tenga variables, podemos tomar la primera de esas palabras y la tercera fila de la generadora
10101001000000

b) La dimensión de C es el número de columnas menos el número de filas de H asi que es igual a $14 - 5 = 9$. La cantidad de palabras es entonces $2^9 = 512$.

c) Contando desde la izquierda como columna 1, las columnas $3, 8, 9$ de H suman 0, asi que son LD. Por lo tanto $\delta(C) \leq 3$ en todos los casos.
Como no tiene la columna 0, si vemos que todas las columnas son distintas entre si, tendriamos $\delta(C) \geq 3$ y por lo anterior seria $\delta(C) = 3$, y si hay dos columnas iguales, entonces sería $\delta(C) = 2$.
Es claro que todas las columnas distintas de la 7 y 10 (es decir, las que no tienen a, b, c, d) son distintas entre si y la 7 y la 10 son distintas entre si pues la 10 tiene un 1 arriba y la 7 un 0.
Pero hay que ver si esas dos columnas son distintas de las otras, dependiendo de los valores de a, b, c, d.
La 10 tiene un 1 arriba, y abajo de todo tiene 1,0 en ese orden, asi que no es igual a ninguna otra columna.
La 7 empieza con 0 arriba y tiene dos 1s abajo, asi que sólo podria ser igual a la 12....y puede serlo, si $a = b = 1$.
Entonces, si no es cierto que $a = b = 1$, tenemos que $\delta(G) = 3$ y si $a = b = 1$, como la 7ma y la 12da columna son iguales en ese caso, $\delta(G) = 2$.

d) Como la palabra recibida es 10001010010001 debemos sumar (modulo 2) las columnas 1,5,7,10 y 14 de H. Obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+a+c \\ 1+b+d \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las únicas columnas de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son la 8,9,13,14.

y mirando las componentes 2,3 de cada una de esas columnas concluimos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+a+c \\ 1+b+d \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es igual a la columna 8, si $1+a+c=0, 1+b+d=1$, igual a la columna 9 si $1+a+c=0, 1+b+d=0$, igual a la columna 13 si $1+a+c=1, 1+b+d=0$ e igual a la columna 14 si $1+a+c=1, 1+b+d=1$ Entonces la palabra enviada fue:

10001011010001 si $a \neq c$, $b = d$.

10001010110001 si $a \neq c$, $b \neq d$.

10001010010011 si $a = c$, $b \neq d$.

10001010010000 si $a = c$, $b = d$.

NOTA: en los casos anteriores cuando $a = b = 1$ se podria argumentar que como $\delta = 2$, no podemos corregir un error, pero SI PODEMOS en este caso.

$\delta = 2$ sólo dice que habrá ALGÚN error que no podremos corregir, no que no podamos corregir ningún error.

Si al recibir una palabra y hacer el calculo anterior nos hubiera dado la columna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces ahi si no hubieramos podido corregir porque no sabriamos si hay que corregir el bit 7 o el 12.