Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 13 - Determinante 2

FAMAF / UNC

29 de abril de 2021

En este archivo demostraremos algunas de los resultados del archivo anterior.

También definiremos la matriz transpuesta y analizaremos su determinante.

El tema de esta clase está contenido en las Sección 2.8 y el Ápendice C de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Proposición 2.8.3

El determinante de una matriz triangular superior $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es el producto de los elementos de la diagonal

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Demostración: Haremos inducción en el tamaño de la matriz.

Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ y $\det(A) = a_{11}$ por definición. Y ya esta.

(HI): El determinante de una matriz triangular superior de tamaño $n - 1$ es el producto de la diagonal.

Ahora calculamos el determinante de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ siguiendo la definición:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1)$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1) \\
&= a_{11} \boxed{\det A(1|1)} - 0 \det A(2|1) \cdots + (-1)^{1+n} 0 \det A(n|1) \\
&= a_{11} \det A(1|1) \quad \text{n (HI)} \\
&= a_{11} (a_{22} \cdots a_{nn})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\
\vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & \vdots & & & \\
 & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

TRIANG SUP $n-1 \times n-1$

entonces vale para n y por el Principio de inducción $\forall n \in \mathbb{N}$ ∎

Corolario 2.8.4

$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1$$

Corolario 2.8.5

Si $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una MERF, entonces

$$\det(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \text{ no tiene filas nulas} \\ 0 & \text{si } R \text{ tiene filas nulas} \end{cases}$$

Como Id y MERF son Triang Sup

Probemos lo de la Prop

Teorema 2.8.6

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. Si $A \xrightarrow{cF_r} B$ con $c \neq 0$, entonces $\det(B) = c\det(A)$
2. Si $A \xrightarrow{F_r+tF_s} B$ con $t \in \mathbb{K}$ y $r \neq s$, entonces $\det(B) = \det(A)$
3. Si $A \xrightarrow{F_r\leftrightarrow F_s} B$ con $r \neq s$, entonces $\det(B) = -\det(A)$

No haremos la demostración (tampoco es evaluable) porque necesitaríamos una clase extra. Pueden verla en el apéndice del *Apunte*.

$\frac{1}{c}$ = "Dividir"

$Id \xrightarrow{cF_r} E \rightarrow \det E = c \det Id = c$

dem del corol 2.8.7 (1)

Corolario 2.8.7

Sea E una matriz elemental.

1. Si E corresponde a la operación que multiplica una fila por c, entonces
$$\det E = c$$
2. Si E corresponde a la operación que suma filas, entonces
$$\det E = 1$$
3. Si E corresponde a la operación que intercambia filas, entonces
$$\det E = -1$$

Demsotración: es una consecuencia directa del Teorema 2.8.6 dado que las matrices elementales se obtienen a partir de aplicarle una operación elemental a Id cuyo determinante es 1.

$\det E =$ algo $\det Id =$ algo $1 =$ algo

Corolario 2.8.8

1. Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$
2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$

Demostración:

1) Supongamos que $F_r = F_s$ y

Sea B la matriz $\underbrace{A \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} B}$

$\Rightarrow B = A$

$\Rightarrow \det A = \det B \stackrel{\downarrow}{=} -\det A$

Teo 2.8.6(3)

$\Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \boxed{\det A = 0}$

2) Supongamos $F_r = 0$ y

Sea B la matriz $A \xrightarrow{-F_r} B$

$\Rightarrow B = A \Rightarrow \det A = \det B \stackrel{\downarrow}{=} -\det A$

Teo 2.8.6 (1)

$\Rightarrow \boxed{\det A = 0}$

Teorema 2.8.9

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

Observación

El teorema dice que "el determinante respeta el producto de matrices"

En esta sección demostraremos este teorema.

La demostración se divide en varios casos.

Pero antes veamos un corolario.

Corolario 2.8.10

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(BA)$
2. Si A es invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ $\left(= \frac{1}{\det A}\right)$

Demostración:

1) $\det(AB) \overset{\text{Teo}}{=} \det(A)\det(B)$ ← en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ mult es conmut.

$= \det(B)\det(A)$

$\det(AB) \overset{\text{Teo}}{=} \det(BA)$

2) $A \cdot A^{-1} = I_d$

Teo $\det(A A^{-1}) = \det(I_d)$ // cond

$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$ to

Observación

La Regla de Cramer es un método para calcular la inversa de una matriz y las soluciones del sistema asociado usando el determinante. Pueden encontrarla en el apéndice C.2 del Apunte.

Caso 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (\det A)\, Id$$

$$\det A = ad - bc$$

Teorema C.1.6

Sea E una matriz elemental. Entonces

$$\boxed{\det(EA) = \det(E)\det(A)}$$

Demostración: En todos los casos $EA = e(A)$ donde e es una operación elemental por fila.

- Si $c \neq 0$ y $\mathrm{Id}_n \xrightarrow{cF_r} E$, tenemos $\det(E) = c$ y

Teo 2.9.1(4)

$$\det(EA) = \det(e(A)) = c \cdot \det(A) = \det(E)\det(A).$$

- Si $\mathrm{Id}_n \xrightarrow{F_r + cF_s} E$, luego $\det(E) = 1$ y

$$\det(EA) = \det(e(A)) = \det(A) = \det(E)\det(A).$$

- Si $\mathrm{Id}_n \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} E$, luego $\det(E) = -1$ y

$$\det(EA) = \det(e(A)) = -\det(A) = \det(E)\det(A).$$

Corolario C.1.7

Sea $A = E_1E_2\cdots E_kB$ donde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son matrices elementales. Entonces,

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(B).$$

Demostración: sigue por inducción o aplicando varias veces el Teorema anterior:

$$\det(A) = \det(E_1(E_2\cdots E_kB)) = \det(E_1)\det(E_2\cdots E_kB),$$

$\square$

Corolario

Si $A = E_1E_2\cdots E_k$ producto de matrices elementales. Entonces,

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k).$$

Tomar $B = Id$ en Cor C.1.7

Teorema 2.8.9 (2)

A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

Demostración (ver página 238): Sea R MERF equiv a A

$\Rightarrow A \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} R \qquad E_i = e_i(Id)$

$\Rightarrow E_k \cdots E_1 A = R$

$\Rightarrow \det(E_k \cdots E_1 A) = \det R$

$\Rightarrow \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det A = \det R$

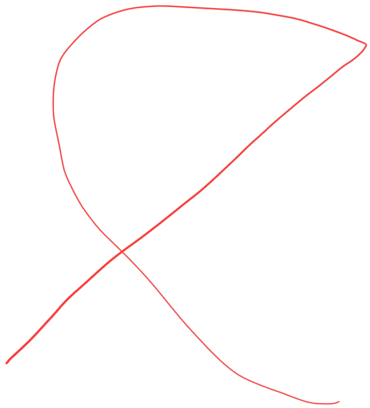
$\Rightarrow \det A = \dfrac{\det R}{\det E_k \cdots \det E_1}$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det R \neq 0 \Leftrightarrow R = Id$

$\Leftrightarrow$ A es invertible

Teo

$\therefore \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A es invertible



Observación

Sean M y B matrices $n \times n$. Si M es no invertible, entonces MB tampoco es invertible. En particular, $\det(MB) = 0$.

Demostración: Supongamos que MB es invertible y sea C la inversa.

$$\Rightarrow (MB)C = Id$$

$$\Rightarrow M(BC) = Id$$

$\Rightarrow$ BC es la inversa de M

Lo cual contradice *

$\Rightarrow$ MB es NO invertible

Teorema 2.8.9 (1)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Demostración (ver página 238): Sea R MERF equiv A

$\Rightarrow \quad R = E_k \cdots E_1 A \qquad E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$

$\Rightarrow \quad A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R$

$\Rightarrow \quad \det(AB) = \det(E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R B)$

E_i^{-1} matriz elem $\Rightarrow \; = \underbrace{\det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1})}_{\neq 0} \det(RB)$ (*)

Analizaremos dos casos

1) $R = Id$

2) $R \neq Id$

1) Si $R = Id \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$; $RB = B$

(*) $\Rightarrow \det(AB) = \underline{\det E_1^{-1} \cdots \det E_k^{-1}} \det B$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \det B}$$

2)

$R \neq Id \Rightarrow A$ es No inv

$\Rightarrow \det A = 0$

$\Rightarrow \det A \det B = 0$

$\Rightarrow AB$ es No inv

$\Rightarrow \det(AB) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

Definición 2.8.12

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. La transpuesta de A es la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n \times m}$ cuyas entradas son definidas por

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$$

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$([A^t]_{12} = [A]_{21} = 4$, $[A^t]_{13} = [A]_{31} = 3$, etc.$)$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EJEMPLO}} v^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.8.10

El determinate de una matriz es igual al determinate de su transpuesta

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Proposición 2.8.11

El determinante de una matriz triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Demsotración: la transpuesta de una una matriz triangular inferior es una matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A = \det A^t$

Entonces la proposición es una consecuencia del teorema anterior y la proposición referida al determinate de una triangular superior.

Observación

La transpuesta transforma filas en columnas y columnas en filas

Gracias a esta observación podemos deducir como cambia el determinante de una matriz al aplicarle "operaciones elementales por columna".

Teorema 2.8.16

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean $1 \leq r, s \leq n$.

1. Sea $c \in \mathbb{K}$ y B la matriz que se obtiene de A multiplicando la columna r por c, entonces $\det B = c \det A$.
2. Sea $c \in \mathbb{K}$ y B la matriz que se obtiene de A sumando a la columna r la columna s multiplicada por c, entonces $\det B = \det A$.
3. Sea B la matriz que se obtiene de A permutando la columna r con la fila s, entonces $\det B = -\det A$.

Este es un análogo del Teorema 2.8.6 y lo podemos utilizar de igual manera para calcular determinantes

Ejemplo

Si una matriz tiene una columna con muchos ceros, podemos intercambiarla con la primera columna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = -\det(B) = -5 \det B(1|1)$$

Ejemplo

Si una matriz tiene una fila con muchos ceros, entonces intercambio esta con la primer fila, luego transpongo y calculo el determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B^t = \left(\begin{matrix} 5 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{matrix} \right.$$

Entonces

$$\det(A) = -\det(B) = -\det(B^t) = -5 \det B^t(1|1)$$

Observación

Esta sección es de cultura general

Cuando definimos el determinante dijimos que estabamos dando el cálculo del determinante por desarrollo por la primera columna

Esta sección es para que sepan que podemos desarrollar el determinante por cualquier fila o columna

Y si les sirve que lo use para calcular.

Teorema 2.8.18

- Se puede calcular el determinante por la columna j así:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j)$$

- Se puede calcular el determinante por la fila i así:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j)$$

(la diferencia entre ambas fórmulas es la variable de la sumatoria)