Notas de
Análisis Matemático I
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Marta Urciuolo
Patricia Kisbye

8 de agosto de 2016

Índice general

Introducción

Estas notas tienen como objetivo introducir los conceptos básicos del cálculo diferencial en una variable.

Las notas acompañan al curso Análisis Matemático I de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, durante el cual se espera que el alumno no sólo desarrolle habilidades de cálculo, sino que también sea capaz de reconocer los conceptos involucrados en los teoremas y sus demostraciones, y comprender el alcance de sus enunciados.

A lo largo de los capítulos se abordan contenidos de funciones, límite, continuidad, derivada e integrales, incluyendo definiciones, teoremas, y gran cantidad de ejemplos ilustrativos.

Esperamos que estas notas sean accesibles y útiles para el lector, y son bienvenidos los aportes que permitan enriquecerlas en el futuro.

Marta Urciuolo
Patricia Kisbye

Capítulo 1

Números

1.1. Números enteros, números racionales y números reales

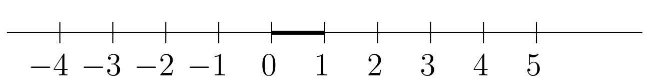
Los números **naturales**, o **enteros positivos**, son 1, 2, 3, 4, $\dots$. Suponemos conocidas las propiedades de las operaciones de suma, resta, producto y cociente entre ellos. Los números -1, -2, -3, -4, $\dots$, se llaman **enteros negativos**. El conjunto de **números enteros** consiste de los enteros positivos, los enteros negativos y el cero. Además de los enteros tenemos las fracciones $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{234}{17}$, etc. que pueden ser positivas o negativas y que se escriben como cociente $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y n es distinto de cero. Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{a}{b}$ se dicen equivalentes si $mb = an$. Por ejemplo, $\frac{9}{15}$ es equivalente a $\frac{6}{10}$.

La suma y producto de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{m}{n}$, con b y n distintos de cero, vienen dadas por las conocidas fórmulas

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}.$$

A las fracciones se las llama **números racionales**, pero considerando a las fracciones equivalentes como un mismo número racional. Todo número entero es un número racional porque $m = \frac{m}{1}$, pero no es cierta la recíproca.

Representamos estos números en una recta. Primero elegimos una unidad de longitud, a la derecha de cero dibujamos los positivos y a la izquierda, los negativos.



Todos las fracciones equivalentes se representan en un mismo punto de la recta.

A su vez, todos los números racionales tienen una representación decimal finita, o infinita periódica. Por ejemplo, $\frac{2}{4} = 0{,}5$, y $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$.

Finalmente tenemos los números que pueden representarse por infinitos decimales no periódicos, como $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ o $\pi = 3{,}14159\ldots$, a los cuales llamamos **números irracionales**, que junto con los racionales constituyen los **números reales**, o simplemente **números**.

La suma y el producto de dos números es otro número. Si $a \neq 0$ hay un único número b tal que $ab = ba = 1$ y escribimos $b = \frac{1}{a}$ ó $b = a^{-1}$. Decimos en este caso que b es el inverso de a. La expresión $\frac{1}{0}$ ó 0^{-1} NO está definida. Sin embargo, si a es cualquier número, $a \cdot 0 = 0$. Todo número racional es real (podemos realizar el cociente y obtenemos un decimal) pero no vale la recíproca.

1.2. Desigualdades

Tenemos los **números positivos,** representados a la derecha del cero en la recta real. Si a es uno de ellos, escribimos $a > 0$. Las dos propiedades siguientes son básicas.

P1) Si a y b son números positivos, también lo son su producto ab y su suma $a + b$.

P2) Si a es un número, entonces ó a es positivo, ó a es cero ó $-a$ es positivo y estas posibilidades son mutuamente excluyentes.

Aunque ya sabemos que $1 > 0$ podemos demostrar este hecho a partir de las dos propiedades de arriba. En efecto, si -1 fuera positivo, $1 = (-1)(-1)$ sería positivo por P1). Luego el positivo es 1.

La expresión $a > 0$ se lee a es mayor que cero, mientras que $a \geq 0$ significa que a es mayor o igual que cero.

Dados dos números a y b diremos que a es mayor que b y escribimos $a > b$ si $a - b > 0$. Escribimos $a < 0$ si $-a > 0$ y $a < b$ si $b > a$. Tambièn $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b. Usando solamente las propiedades P1) y P2) se pueden demostrar las siguientes:

Regla 1 *Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.*

Regla 2 *Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$.*

Regla 3 *Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.*

Por ejemplo $3 > 2$ y $-3 < -2$.

Sea a un número positivo. Entonces existe un número b cuyo cuadrado es a, o sea $b^2 = a$. También $(-b)^2 = a$. Así, b ó $-b$ es positivo. A ese número **positivo** lo llamamos la raíz cuadrada de a y lo denotamos $\sqrt{a}$. Para el caso de $a = 0$, escribimos $\sqrt{0} = 0$.

En particular, existe un número positivo b tal que $b^2 = 2$, es decir que $b = \sqrt{2}$. Este número, $\sqrt{2}$, *no es un número racional.* Demostremos esta afirmación. Recordamos que los números **pares** son los enteros 2, -2, 4, -4, 6, -6,..., que pueden escribirse en la forma $2n$ para algún entero n. Un número **impar** es de la forma $2n + 1$ para algún entero n ($5 = 2 \cdot 2 + 1$, $-7 = 2 \cdot (-4) + 1$).

Observamos que el cuadrado de un número par es par. En efecto

$$(2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2),$$

veamos ahora que el cuadrado de un número impar es impar,

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Esto dice que existe un racional a tal que $a^2 = 2$. Podemos escribir $a = \frac{m}{n}$, con n y m enteros distintos de cero. Podemos suponer m y n no son ambos pares, simplificando previamente la fracción. Como $a^2 = 2$ tenemos

$$\frac{m^2}{n^2} = 2,$$

o sea $m^2 = 2n^2$ y el segundo miembro es par y entonces m^2 y por lo tanto m es par.

Suponemos $m = 2k$. Volviendo a lo anterior, $(2k)^2 = 2n^2$, o sea $4k^2 = 2n^2$ entonces $2k^2 = n^2$ de lo que resulta que n sería par y eso es una contradicción.

1.3. Valor absoluto

Si a es un número entonces definimos el **valor absoluto** de a (que escribimos $|a|$) como

$$|a| = \begin{cases} \text{el mismo } a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Así, $|7| = 7$, y también $|-7| = -(-7) = 7$. En general, para cualquier número x, vale que $|a| = |-a|$ podemos pensar que el valor absoluto de a es la de distancia de a al cero.

Valen los siguientes resultados.

Teorema 1.3.1. *Si a es un número, entonces $|a|^2 = a^2$ y $|a| = \sqrt{a^2}$.*

Teorema 1.3.2. *Si a y b son números, entonces* $|ab| = |a|\,|b|$.

Teorema 1.3.3. *Si a y b son números, entonces* $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Ejemplo 1.3.1. Determinar todos los números x que satisfacen la igualdad

$$|x+3| = 4.$$

Esta igualdad significa que $x+3=4$ ó $-(x+3)=4$, o sea $x=1$ ó $x=-7$.

Sean a y b dos números y supongamos $a<b$. Al conjunto de números x que satisfacen $a<x<b$ lo llamamos **intervalo abierto** entre a y b y lo denotamos (a,b). Al conjunto de números x que satisfacen $a \leq x \leq b$ lo llamamos **intervalo cerrado** entre a y b y lo denotamos $[a,b]$. Al conjunto de números x que satisfacen $a \leq x < b$ lo llamamos **intervalo semiabierto** (o semicerrado) entre a y b y lo denotamos $[a,b)$.

Al conjunto de números x que satisfacen $a<x$ lo llamamos **intervalo infinito** y lo denotamos (a,∞) y al conjunto de números x que satisfacen $x<b$ lo llamamos también **intervalo infinito** y lo denotamos $(-\infty,b)$.

Ejemplo 1.3.2. Determinar todos los intervalos de números que satisfacen $|x| \leq 6$.

Solución. Distinguimos dos casos. El primero es $x \geq 0$. En ese caso $|x| = x$ y entonces debe ser $0 \leq x \leq 6$.

En el segundo caso, $x<0$ y $|x| = -x$ Por lo tanto debe ser $-x \leq 6$ lo que equivale a $x \geq -6$, y por lo tanto en este caso es $-6 \leq x < 0$. Considerando ambos casos conjuntamente llegamos a que el intervalo buscado es $[-6,6]$. $\square$

1.4. Ejercicios resueltos de números

En esta parte damos un poco más de ejercitación, del tipo de la desarrollada en las guías de práctico correspondientes.

Ejercicio 1.4.1. Sea a un número real positivo. Expresar el conjunto de números reales x que cumplen que $x^2 > a$ como una unión de intervalos.

Solución. Observamos que $x^2 > a$ si y sólo si $x^2 - a > 0$ Como

$$x^2 - a = \left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right),$$

para que este producto sea positivo, deben ser ambos factores positivos o ambos negativos. Entonces o bien $x - \sqrt{a} > 0$ y $x + \sqrt{a} > 0$ o en caso contrario, $x - \sqrt{a} < 0$ y $x + \sqrt{a} < 0$. la primera opción se cumple si y sólo si $x > \sqrt{a}$ o sea $x \in (\sqrt{a}, \infty)$ y la segunda se cumple si y sólo si $x < -\sqrt{a}$ o sea $x \in (\infty, -\sqrt{a})$. En definitiva el conjunto buscado es

$$(\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty).$$

□

Ejercicio 1.4.2. Determinar los números reales x que satisfacen $|2x - 1| > 5$.

Solución. Por la definición de valor absoluto,

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 2x - 1 < 0 \end{cases}.$$

Como $2x - 1 \geq 0$ si y sólo si $x \geq \frac{1}{2}$, separamos el conjunto solución en dos subconjuntos:

$$\begin{aligned}
& \{x \in (-\infty, \infty) : |2x - 1| > 5\} \\
= \;& \left\{x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) : |2x - 1| > 5\right\} \cup \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) : |2x - 1| > 5\right\} \\
= \;& \left\{x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) : 1 - 2x > 5\right\} \cup \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) : 2x - 1 > 5\right\} \\
= \;& \left\{x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) : x < -2\right\} \cup \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) : x > 3\right\} \\
= \;& \left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap (-\infty, -2)\right) \cup \left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cap (3, \infty)\right) \\
= \;& (-\infty, -2) \cup (3, \infty).
\end{aligned}$$

□

Nota 1.4.1. Como $|2x - 1| > 5$ si y sólo si $\left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{5}{2}$. el conjunto que buscamos es el de los puntos cuya distancia al $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{5}{2}$ y entonces un x de ese conjunto debe estar $\frac{5}{2}$ unidades a la derecha de $\frac{1}{2}$ (o sea $x > \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$) o $\frac{5}{2}$ unidades a la izquierda de $\frac{1}{2}$ (o sea $x < \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$) y este es efectivamente el conjunto que encontramos.

Ejercicio 1.4.3. Resolver

$$\frac{1}{x-1} < \frac{3}{x+2}.$$

Solución. Como primer paso, debemos excluir los puntos donde se anula algún denominador, que son $x = 1$ y $x = -2$. La recta real menos esos dos puntos queda dividida en tres intervalo, $I_1 = (-\infty, -2)$, $I_2 = (-2, 1)$ y $I_3 = (1, \infty)$. Para poder eliminar los denominadores, multiplicamos esta desigualdad por $(x-1)(x+2)$ y como el signo de una desigualdad se invierte si multiplicamos por un número negativo, observamos que $(x-1)(x+2) > 0$ en I_1, $(x-1)(x+2) < 0$ en I_2 y en I_3 nuevamente $(x-1)(x+2) > 0$.El conjunto buscado será entonces

$$\left\{x \in I_1 : \frac{1}{x-1} < \frac{3}{x+2}\right\} \cup \left\{x \in I_2 : \frac{1}{x-1} < \frac{3}{x+2}\right\} \cup \left\{x \in I_3 : \frac{1}{x-1} < \frac{3}{x+2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x \in I_1 : x+2 < 3(x-1)\} \cup \{x \in I_2 : x+2 > 3(x-1)\} \cup \{x \in I_3 : x+2 < 3(x-1)\} \\
&= \left\{x \in I_1 : x > \frac{5}{2}\right\} \cup \left\{x \in I_2 : x < \frac{5}{2})\right\} \cup \left\{x \in I_3 : x > \frac{5}{2}\right\} \\
&= \emptyset \cup \left[(-2, 1) \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)\right] \cup \left[(1, \infty) \cap \left(\frac{5}{2}, \infty\right)\right] \\
&= (-2, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Funciones

2.1. Definición y ejemplos

El área A de un cuadrado en el plano depende de la longitud l de su lado. La regla que relaciona l con A está dada por $A = l^2$. La distancia d recorrida por un móvil que se desplaza a $60km/h$ depende del tiempo t transcurrido desde su largada. Esto se expresa mediante la fórmula $d = 60t$. La densidad δ de un sólido de volumen dado depende de su masa m, etc.

Cada uno de estos ejemplos describe una relación mediante la cual a un determinado número (l, t, m) se la asigna otro número (A, d, δ). Se dice que el segundo número es función del primero o que el segundo número depende del primero.

Definición 2.1.1. Una *función* f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto X un **único** elemento $f(x)$ de un conjunto Y.

Casi siempre X e Y serán conjuntos de números reales por lo tanto una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x, y entonces escribimos $y = f(x)$. La asignación esta a veces se representa con una flecha

$$x \to f(x).$$

Usaremos las letras f, g, h, etc. para denotar las funciones. Frecuentemente esta regla se expresa mediante una ecuación, por ejemplo

$$f(x) = x^2$$

Tabla 2.1:

x	$y = x^2$
0	0
2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
1	1
-4	16

y se lee "f de x igual a x^2."

En este caso X son todos los números reales e Y son los reales no negativos. La Tabla 2.1 muestra algunos de estos valores

Al conjunto X lo llamamos el *dominio* de f y al conjunto Y el *espacio de llegada*. Suelen expresarse usando la notación de intervalos de la recta.

Dada una función f el valor $f(x)$ se llama la *imagen* de x por f. Al conjunto formado por las imágenes del dominio de f se lo denomina *contradominio* o *imagen* de f.

Si la función se define mediante una fórmula y no se especifica el dominio explícitamente, se adopta la convención de que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales tiene sentido la fórmula y da como resultado un número real.

Si f es una función de X en Y, se usa la notación $f : X \to Y$. Si $y = f(x)$, y depende de x en el sentido que los valores de la variable y cambian cuando cambiamos la variable x, por lo tanto el símbolo que representa un número cualquiera en el dominio de f se llama *variable independiente* y el que representa un número del contradominio, *variable dependiente*.

Ejemplo 2.1.1. El dominio de la función dada por $f(x) = x^2$ es $(-\infty, \infty)$ y su contradominio es $[0, \infty)$.

Ejemplo 2.1.2. Sea f la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x-2}$ o sea

$$f(x) = \sqrt{x-2}.$$

Para que la raíz cuadrada de un número real dé como resultado otro número real, el primero debe ser mayor o igual que cero. Por lo tanto para que esta fórmula esté bien definida, debe ser $x - 2 \geq 0$ o sea $x \geq 2$. Entonces el dominio de f es el intervalo $[2, \infty)$. Como ya dijimos que el símbolo $\sqrt{\ }$ indica la raíz positiva, el contradominio de f es $[0, \infty)$.

Ejemplo 2.1.3. Sea g la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x^2 - 9}$ o sea

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Como en el Ejemplo 2.1.2, debe ser $x^2 - 9 \geq 0$ o sea $(x-3)(x+3) \geq 0$ por lo tanto $x \geq 3$ o $x \leq -3$ entonces el dominio de g es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ y el contradominio es $[0, \infty)$.

Ejemplo 2.1.4. Sea r la función definida por la ecuación

$$r(x) = \frac{5x}{3x-7}.$$

Esta fórmula está bien definida si y sólo si el denominador no se anula o sea si $3x - 7 \neq 0$, o sea $x \neq \frac{7}{3}$. El dominio de r es entonces $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, \infty\right)$.

Ejemplo 2.1.5. Sea h la función definida por la ecuación

$$h(x) = \frac{x+2}{x^3 - x^2}.$$

Esta fórmula está bien definida si y sólo si el denominador no se anula o sea si $x^3 - x^2 \neq 0$. Factorizamos $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ entonces debe ser $x \neq 0$ y $x \neq 1$. El dominio de h es entonces $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

2.2. Gráficas de funciones

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. En este parágrafo trabajaremos con funciones f con dominio en un subconjunto X de $\mathbb{R}$. Un método muy útil para estudiar funciones es realizar un dibujo en el plano coordenado $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (conjunto de pares ordenados de números reales). El *gráfico* de f es el conjunto $G(f)$ de pares ordenados (x, y) con x en X e $y = f(x)$, o sea

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

Para tener una idea aproximada del gráfico de una función es conveniente hallar algunos puntos mediante una tabla y después trasladar esos pares a un sistema coordenado de dos ejes perpendiculares, dibujando x en el eje horizontal y $f(x)$ en el vertical.

Ejemplo 2.2.1. Sea $f(x) = 3x + 1$. Un par (x, y) pertenece al gráfico de f si y sólo si satisface la ecuación

$$y = 3x + 1 \tag{2.1}$$

o sea si y sólo si (x, y) pertenece a la recta dada por la ecuación (2.1). Como ya sabemos que una recta queda determinada por dos puntos, para dibujar la recta alcanza con dar un par de puntos sobre ella. Si hacemos la tabla

x	$f(x)$
0	1
1	4

obtenemos los puntos de la recta $(0, 1)$ y $(1, 4)$. Ver Figura 2.1.

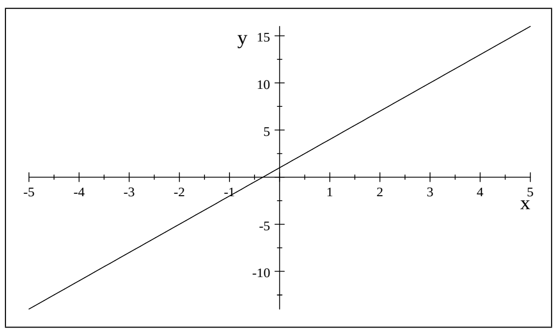


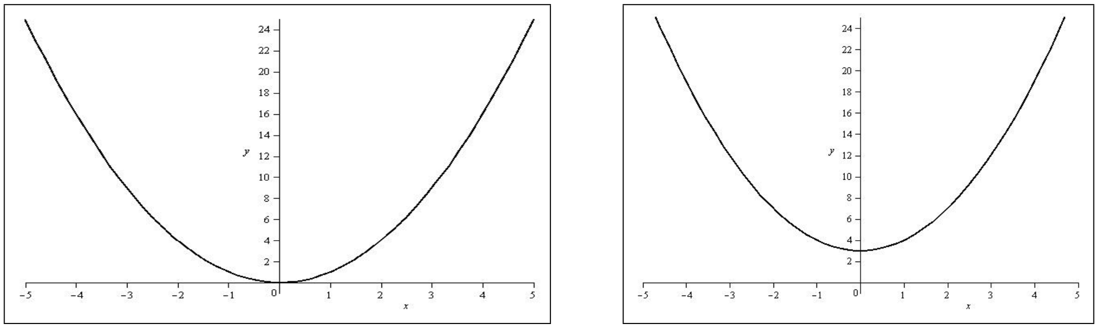
Figura 2.1: Gráfico de la recta $y = 3x + 1$

Ejemplo 2.2.2. Sea $g(x) = x^2$. Su gráfico es la parábola que pasa por el origen. Nuevamente hacemos una tabla

x	$g(x) = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4

y obtenemos el gráfico aproximado como muestra la Figura 2.2 (a).

Ejemplo 2.2.3. Sea $f(x) = x^2 + 3$. Observamos que el valor de la función f en un punto dado es tres unidades mayor que el valor que toma la función g del ejemplo anterior, por lo tanto su gráfica aproximada es la que se muestra en la Figura 2.2 (b).



(a) $y = x^2$ (b) $y = x^2 + 3$

Figura 2.2: Gráfico de las parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 + 3$.

Ejemplo 2.2.4. Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$. Su dominio es $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$. Damos algunos valores de la función, para algunos de estos x.

x	$f(x)$
0	1
1	$\sqrt{2}$
-1	0
3	2

Ver Figura 2.3.

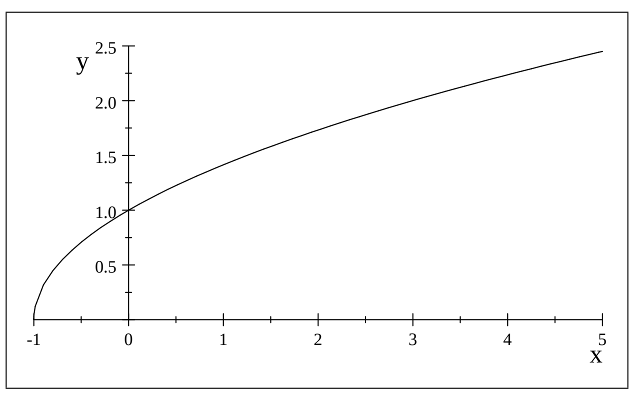


Figura 2.3: $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Prueba de la recta vertical: Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical interseca a la curva más de una vez.

También se pueden definir funciones mediante distintas fórmulas en distintos intervalos de su dominio

Ejemplo 2.2.5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Observamos que si $x \leq 2$ la gráfica de f coincide con la recta $y = x + 1$, de pendiente 1 y ordenada al origen 1. A la derecha de la recta $x = 2$, tenemos la parábola, bajada en 3 unidades. (Ver Figura 2.4).

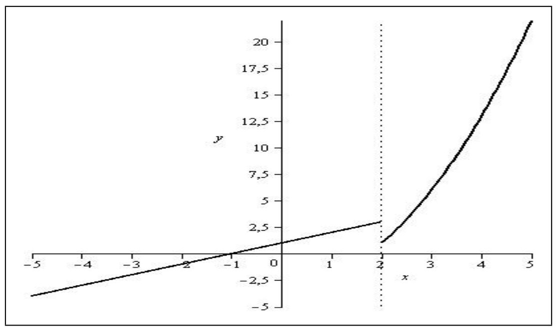


Figura 2.4: $f(x) = x^2 - 3$ si $x > 2$, y $f(x) = x + 1$ si $x \leq 2$.

Ejemplo 2.2.6. Sea $h(x) = |x|$, esto es

$$h(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

(recuerde que si $x < 0$ entonces $-x > 0$).

Su gráfica se muestra en la Figura 2.5:

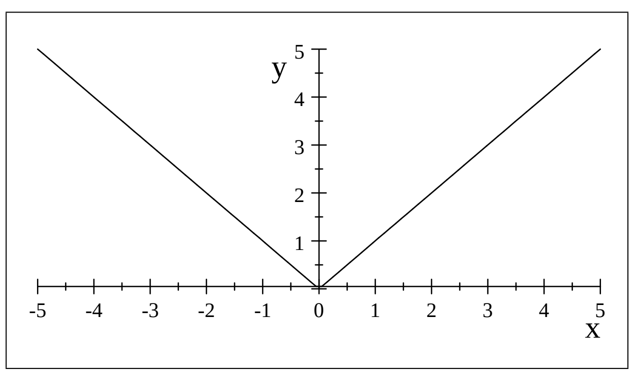


Figura 2.5: $f(x) = |x|$

Si una función f satisfce $f(x) = f(-x)$ para todo x de su dominio, se dice que f es una función *par.* Por ejemplo, $f(x) = x^2$. Geométricamente esto manifiesta que la gráfica es simétrica con respecto al eje y, o sea que podemos trazar la gráfica a la derecha del eje y y después reflejarla.

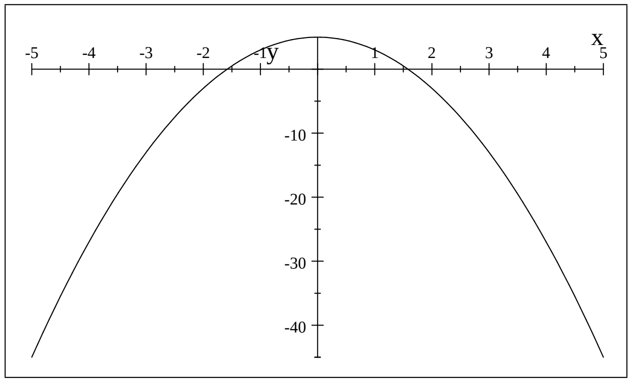


Figura 2.6: La función par $f(x) = -2x^2 + 5$

Si f satisface $f(x) = -f(-x)$ para todo x de su dominio, se dice que f es una función *impar.* Estas funciones son simétricas respecto del origen. Se dibujan a la derecha del eje y y después se completa la gráfica girando la anterior en 180 grados. Por ejemplo, $f(x) = x^5 + x$ es impar, en efecto

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -\left(x^5 + x\right) = -f(x).$$

Su gráfica se muestra en la Figura 2.7.

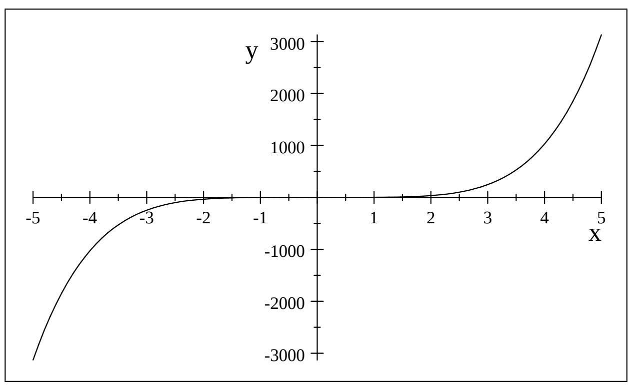


Figura 2.7: La función impar $f(x) = x^5 + x$

Ejemplo 2.2.7. Analicemos para cada una de las siguientes funciones si es par, impar o de ninguno de estos tipos.

$$a) f(x) = 3 - x^6 \qquad b) g(x) = x^3 + 2x^2 \qquad c) h(x) = x^{33}$$

La función f es par, pues $x^6 = (-x)^6$ (esto porque el exponente es par). Por análoga razón resulta que $h(x)$ es impar. Veamos g. Observamos que $g(1) = 3$ y $g(-1) = 1$ por lo tanto g no es par ni impar.

Definición 2.2.1. Una función $f : X \to Y$ se dice *inyectiva* si no hay dos elementos de X con igual imagen (o sea si x_1 y x_2 son puntos de X tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$). La función f se dice *suryectiva* si todo $y \in Y$ es imagen de algún $x \in X$. La función f se dice *biyectiva s*i es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo 2.2.8. La función $f(x) = x^3$ es biyectiva. En efecto, es inyectiva pues si $x_1^3 = x_2^3$ entonces $\sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$ o sea $x_1 = x_2$. Además, cualquier número real y es imagen de su raíz cúbica o sea $y = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3$ por lo tanto f es suryectiva.

Ejemplo 2.2.9. $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es inyectiva ni suryectiva. No es inyectiva porque cualquier número tiene la misma imagen que su opuesto y no es suryectiva porque los $y < 0$ no provienen (no son imágenes) de ningún $x \in \mathbb{R}$.

Si $f : X \to Y$ es biyectiva, podemos asociar a cada $y \in Y$ un número $x \in X$, a saber aquél único número que cumple que tiene por imagen a y.

Definición 2.2.2. Si $f : X \to Y$ es biyectiva, definimos la *función inversa* de f y la llamamos f^{-1} por

$$f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y.$$

Observamos que el dominio de f^{-1} es el contradominio de f y viceversa. También valen las fórmulas $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$.

¿Cómo hacemos para calcular la inversa de una f dada? Tratamos de “despejar” x en la fórmula que define a f.

Ejemplo 2.2.10. Sea $f(x) = x^3 - 1$. Calculemos f^{-1}.

Primero observamos que f es biyectiva. Planteamos la igualdad $y = x^3 - 1$, que equivale a $x = \sqrt[3]{y+1}$, entonces $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1}$.

Sean f y g funciones con dominios respectivos A y B. Definimos

a) $f + g$ como la función con dominio $A \cap B$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) fg como la función con dominio $A \cap B$ dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

c) $\frac{f}{g}$ como la función con dominio $(A \cap B) - \{x \in B : g(x) = 0\}$ dada por $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Composición de funciones Si $g\,(x) \in A$ para todo $x \in B$, definimos la *composición* de f con g, denotada $f \circ g$ como la función con dominio B dada por $(f \circ g)\,(x) = f(g\,(x))$.

Ejemplo 2.2.11. Sea $f(x) = x^4 - 1$, y sea $g(x) = 3\sqrt{x}$, describir $f + g$, $\frac{f}{g}$ y $f \circ g$.

El dominio de f es el conjunto $A = \mathbb{R}$.

El dominio de g es el conjunto $B = [0, \infty)$. Por lo tanto $(f + g)\,(x) = x^4 - 1 + 3\sqrt{x}$, con dominio $A \cap B = B$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^4-1}{3\sqrt{x}}$ con dominio $B - \{0\} = (0, \infty)$.

$(f \circ g)\,(x) = g(x)^4 - 1 = (3\sqrt{x})^4 - 1 = 81x^2 - 1$.

Una función se llama *polinomial* si es de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

con $a_0, \ldots, a_n$ números reales. Una función se llama *racional* si es de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son funciones polinomiales. Notamos que el dominio de una función polinomial es $\mathbb{R}$ mientras que el dominio de una función racional es el conjunto de números reales para los cuales el denominador no se anula. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene como dominio los números reales distintos de cero y su gráfica se muestra en la Figura 2.8.

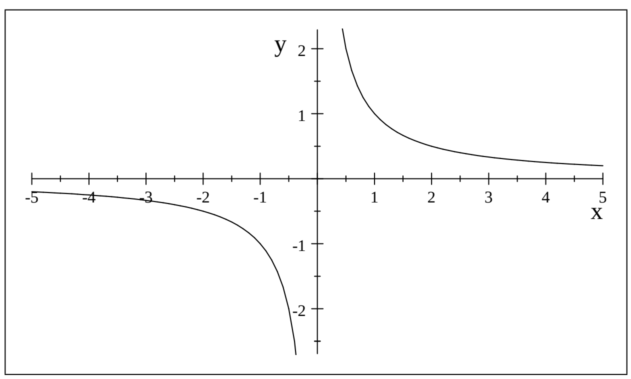


Figura 2.8: $f(x) = \frac{1}{x}$

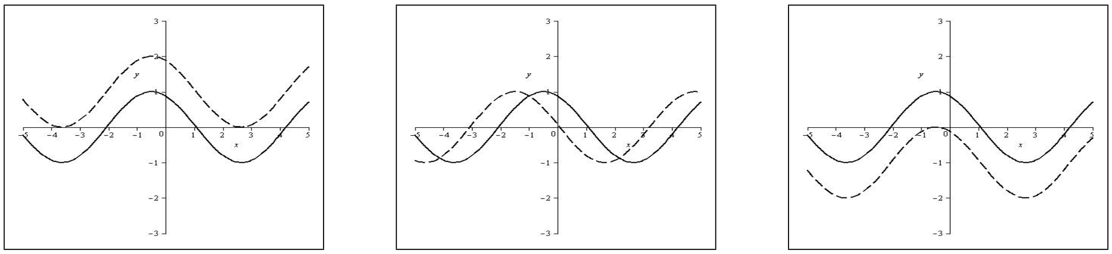
2.2.1. Desplazamientos, estiramientos y reflexiones

A la hora de graficar funciones es importante entender cómo se traducen en el dibujo los desplazamientos y las multiplicaciones por constantes, tanto de los valores de la función como de la variable.

a) Si a los valores de f le sumamos una constante positiva c, el gráfico se corre c unidades hacia arriba. Estamos pensando en la función $g = f + c$.

b) Si a los valores de la variable le sumamos una constante positiva c, el gráfico se corre c unidades hacia la izquierda. Estamos pensando en la función g definida por $g(x) = f(x + c)$.

Si la constante c que sumamos es negativa, en $a)$ debemos correr la gráfica para abajo y en $b)$ para la derecha.



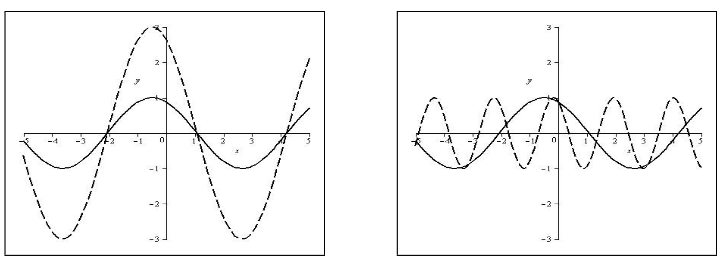
(a) $f(x)$ y $f(x) + c$ (b) $f(x)$ y $f(x + c)$ (c) $f(x)$ y $f(x) - c$

Figura 2.9: Desplazamientos con $c > 0$

Suponemos ahora $c \geq 1$.

c) Para dibujar $g = cf$ a la gráfica de f hay que estirarla c veces en dirección vertical.

d) Para dibujar la función g definida por $g\,(x) = f\,(cx)$ a la gráfica de f hay que comprimirla c veces en dirección horizontal.

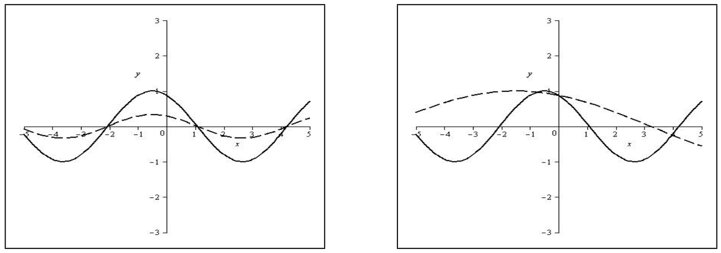


(a) $f(x)$ y $c \cdot f(x)$ (b) $f(x)$ y $f(c \cdot x)$

Figura 2.10: Estiramientos con $c \geq 1$

e) Para dibujar $g = \frac{1}{c}f$ a la gráfica de f hay que comprimirla c veces en dirección vertical.

f) Para dibujar la función g definida por $g\,(x) = f\left(\frac{1}{c}x\right)$ a la gráfica de f hay que estirarla c veces en dirección horizontal.



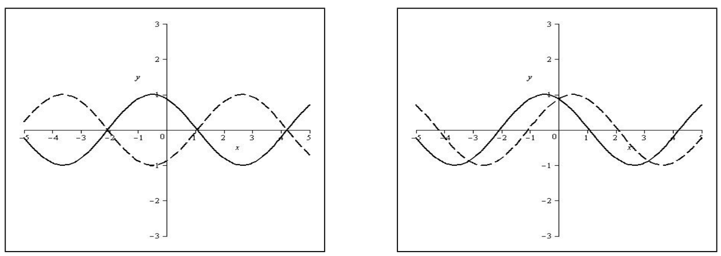
(a) $f(x)$ y $\frac{1}{c} \cdot f(x)$ (b) $f(x)$ y $f(\frac{x}{c})$

Figura 2.11: Estiramientos con $c \geq 1$

Finalmente,

g) para dibujar la función $-f$ la gráfica de f se refleja respecto del eje x.

h) para dibujar la función g dada por $g(x) = f(-x)$, la gráfica de f se refleja respecto del eje y.



(a) $f(x)$ y $-f(x)$ (b) $f(x)$ y $f(-x)$

Figura 2.12: Reflexiones

2.2.2. Rectas

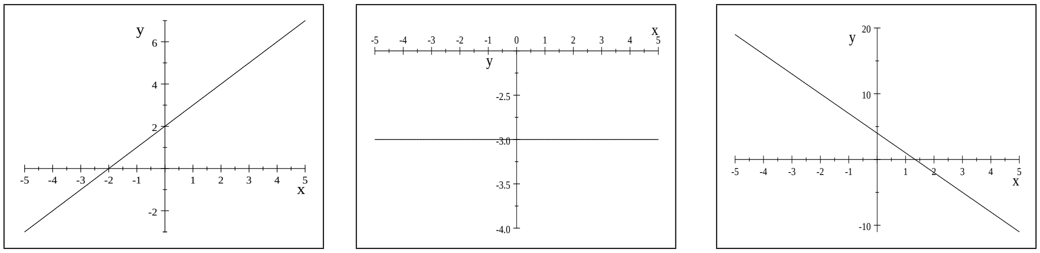
Dados a y b números reales, recordemos que una ecuación de la forma

$$y = ax + b$$

representa una línea recta, esto significa que los pares (x, y) del plano que satisfacen dicha ecuación forman una línea recta. Este conjunto es la gráfica de la función $x \to ax + b$ ó $f(x) = ax + b$. Llamamos b *ordenada al origen* y a la *pendiente*. Si $a > 0$, obtenemos rectas que pasan por $(0, b)$, cada vez más empinadas, a medida que a crece.

Si a es cero obtenemos una recta horizontal como muestra la Figura 2.13(b) y si $a < 0$ el gráfico es como se muestra en la Figura 2.13(c).

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos de la recta, entonces $y_1 = ax_1 + b$ y también $y_2 = ax_2 + b$. Ahora despejamos b en ambas ecuaciones e igualamos $y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$ ó $y_1 - y_2 =$



(a) $f(x) = x + 2$ (b) $f(x) = -3$ (c) $f(x) = -3x + 4$

Figura 2.13: Gráficos de rectas

$a\left(x_1 - x_2\right)$, entonces

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si queremos encontrar la ecuación de la recta que para por un punto dado (x_0, y_0) y tiene pendiente dada a, como debe cumplirse que $y_0 = ax_0 + b$, resulta $b = y_0 - ax_0$ y entonces la ecuación será $y = ax + y_0 - ax_0$ o dicho de otro modo,

$$y - y_0 = a(x - x_0).$$

2.2.3. Circunferencia

Dados dos puntos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el teorema de Pitágoras nos dice que la distancia d entre ellos está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}.$$

Recordemos que la circunferencia C de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro (x_0, y_0) es igual a r. Expresamos esto usando la fórmula para la distancia que acabamos de describir y obtenemos que

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2\right\}$$

Ejemplo 2.2.12. La ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 3)$ y radio 3 es

$$\left(x + 1\right)^2 + \left(y - 3\right)^2 = 9.$$

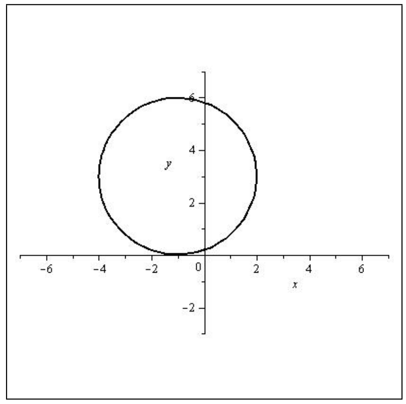
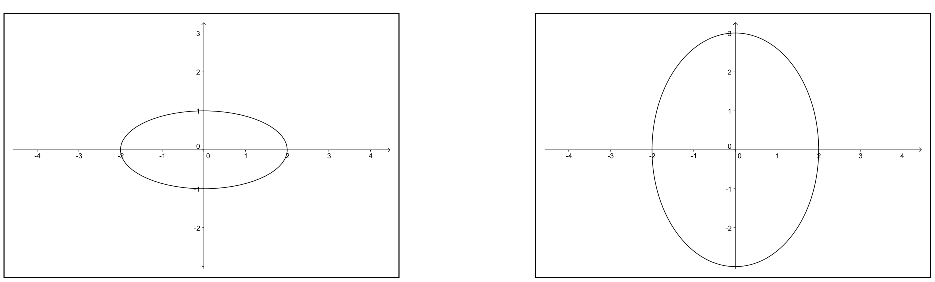


Figura 2.14: Circunferencia $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$

Ejemplo 2.2.13. La ecuación $3x^2 + 6x + 3y^2 = 1$ equivale a $x^2 + 2x + y^2 = \frac{1}{3}$ que puede llevarse, completando cuadrados, a $(x+1)^2 - 1 + y^2 = \frac{1}{3}$ ó $(x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ que es la ecuación de la circunferencia con centro $(-1, 0)$ y radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Dada una circunferencia con ecuación $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ nos preguntamos si describe el gráfico de alguna función , o sea si podemos "despejar"y como función de x. lo intentamos y encontramos que $(y-y_0)^2 = r^2 - (x-x_0)^2$ y de acá obtenemos dos posibles valores para y, a saber $y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$ y también $y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$ por lo tanto no podemos globalmente describir a la circunferencia como gráfica de alguna función. Hay dos funciones involucradas. Una dá el sector superior de la circunferencia y la otra el inferior .

Nota 2.2.1. Al conjunto de puntos del plano que satisfacen una ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se lo llama *elipse.* Su gráfica se muestra en la Figura 2.15.



(a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Figura 2.15: Gráficos de elipses

Nota 2.2.2. Al conjunto de puntos del plano que satisfacen una ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ó una ecuación de la forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ó lo llama *hipérbola.* Su gráfica es de la forma

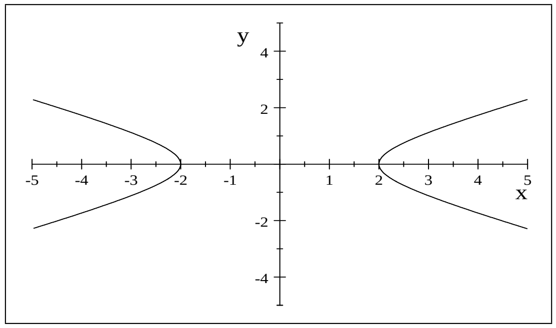


Figura 2.16: Hipérbola: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

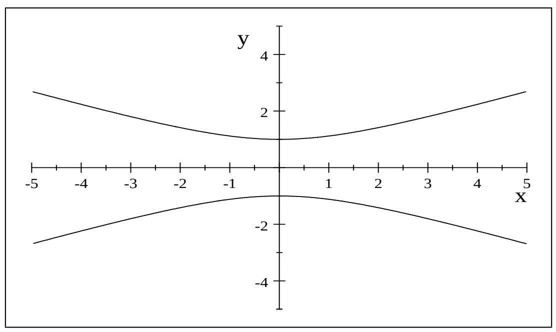


Figura 2.17: Hipérbola: $\frac{x^2}{4} - y^2 = -1$

2.2.4. Parábolas

Ya sabemos cual es la forma de la gráfica de $y = x^2$. La curva $y - 1 = (x + 3)^2$ tendrá el mismo aspecto. pero con el origen trasladado al punto $(-3, 1)$

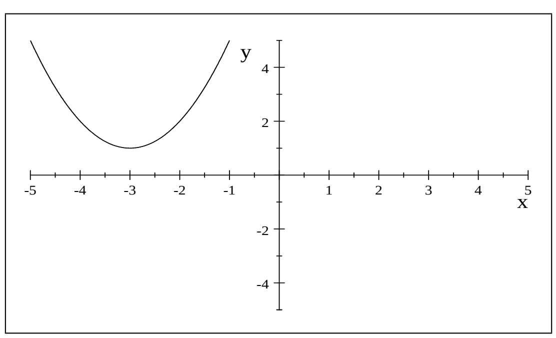


Figura 2.18: Parábola: $y - 1 = (x + 3)^2$

en cambio si graficamos $y-1=10\,(x+3)^2$, obtenemos

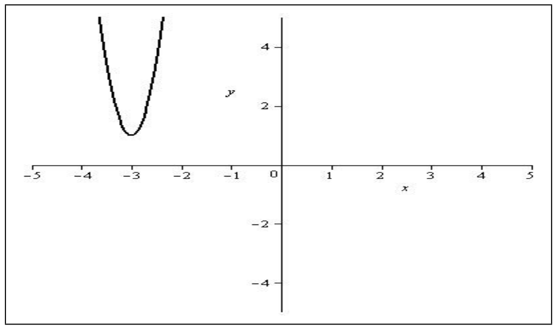


Figura 2.19: Parábola: $y-1=10\,(x+3)^2$

Pero si dibujamos la curva dada por $x=(y-1)^2$ obtenemos

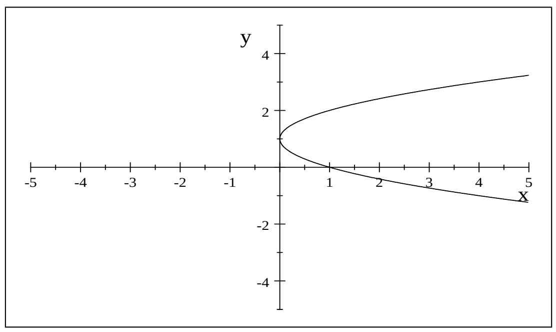


Figura 2.20: Parábola: $x-(y-1)^2=0$

En este caso x es función de y, no al revés.

A este tipo de curvas se las llama *parábolas* y muchas veces, para reconocerlas, usamos la técnica de completar cuadrados.

Ejemplo 2.2.14. Para graficar la curva de ecuación $y-x^2+2x=1$, completamos cuadrados observando que $x^2-2x=(x-1)^2-1$, entonces la ecuación original equivale a $y=(x-1)^2$, que es la parábola de centro $(1,0)$ como muestra la Figura 2.21.

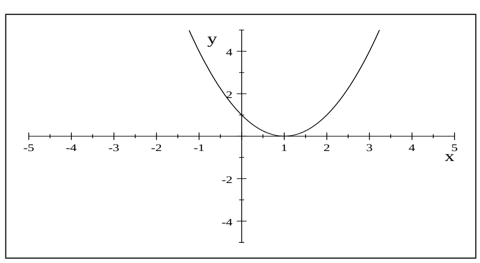


Figura 2.21: $y-(x-1)^2=0$

2.3. Funciones trigonométricas

Empezamos esta sección con un breve repaso de las nociones de trigonometría.

Los ángulos se pueden medir en grados o radianes (rad.). Una vuelta completa corresponde a un ángulo de $360°$ o equivalentemente de 2π rad. Por lo tanto

$$\boxed{\pi \text{ rad.} \sim 180°}.$$

Hacemos una tabla de equivalencia de algunos ángulos

Grados	0	30	60	45	90	150	270
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

Como la longitud del arco es proporcional al ángulo y la longitud total de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, la longitud a de un arco de dicha circunferencia con ángulo central que mide θ rad. debe obedecer a la fórmula

$$\theta = \frac{a}{r} \text{ o sea } a = r\theta.$$

Para un ángulo agudo θ las seis funciones trigonométricas se definen como cocientes de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Ver Tabla 2.2.

Tabla 2.2:

$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{op}{hip}$	$\cos(\theta) = \frac{ady}{hip}$	$\tan(\theta) = \frac{op}{ady}$
$\csc(\theta) = \frac{hip}{op}$	$\sec(\theta) = \frac{hip}{ady}$	$\cot(\theta) = \frac{ady}{op}$

Como dos triángulos rectángulos diferentes con el mismo ángulo agudo θ son semejantes, estamos definiendo realmente seis funciones. Estas definiciones no se aplican en principio a ángulos obtusos o negativos pero se extienden para un θ genérico del siguiente modo. Pensamos en el círculo unitario y ubicamos, en la circunferencia, el punto que se obtiene partiendo desde el semieje de las x positivas, recorriendo un arco de longitud θ rad. Si el punto tiene coordenadas (x, y), definimos

$$\operatorname{sen}(\theta) = y, \ \cos(\theta) = x, \text{ y si } x \neq 0, \tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Las otras tres funciones ($\csc$, $\sec$, y $\cot$) se definen como las inversas de éstas, en los dominios correspondientes.

Hacemos una tabla de algunos valores de estas funciones

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Valen las siguientes identidades

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1. \tag{2.2}$$

Si dividimos por $\cos^2(\theta)$, (por supuesto, debe ser $\cos(\theta) \neq 0$)

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta). \tag{2.3}$$

Si ahora $\operatorname{sen}(\theta) \neq 0$ y dividimos en (2.2) por $\operatorname{sen}^2(\theta)$, obtenemos

$$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta).$$

También, por definición resulta $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$.

Valen además las siguientes fórmulas para la suma de ángulos

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \tag{2.4}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y). \tag{2.5}$$

Las gráficas de las funciones trigonométricas son

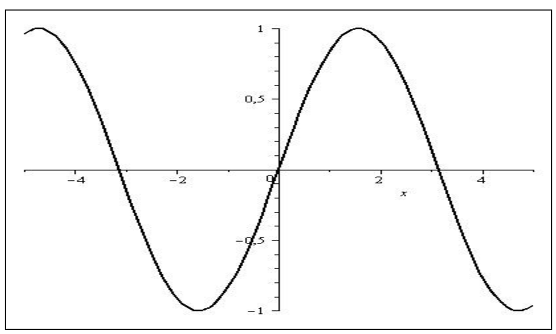


Figura 2.22: $y = sin(x)$

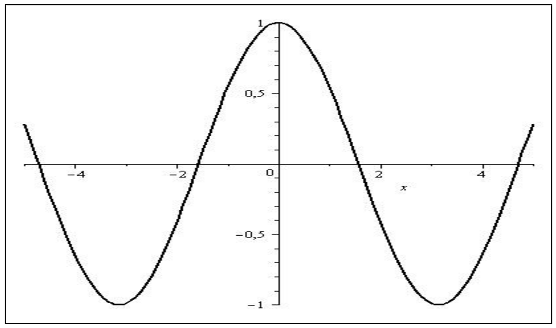


Figura 2.23: $y = cos(x)$

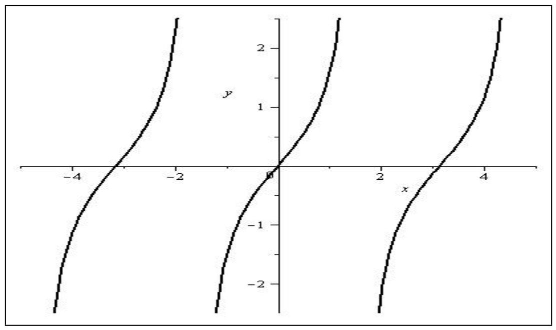


Figura 2.24: $y = tan(x)$

2.3.1. Inversas de funciones trigonométricas

Observamos la función seno es periódica de período 2π, o sea $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\operatorname{sen}(\theta)$ no es inyectiva. Pero si restringimos el dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, allí sí resulta inyectiva esta función, con contradominio el intervalo $[-1, 1]$. Definimos entonces su inversa

$$\operatorname{sen}^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

A esta función se la suele llamar también *arco seno*, y se escribe $\operatorname{arc\,sen}$ recordando que por definición de función inversa, $\operatorname{arc\,sen}(x)$ es el arco θ cuyo seno es x. Es decir,

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = \theta \qquad \text{si } \operatorname{sen}(\theta) = x.$$

Así, por ejemplo, $\operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,sen}(0) = 0$, $\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arc\,sen}(1) = \frac{\pi}{2}$.

La gráfica se muestra en la Figura 2.25.

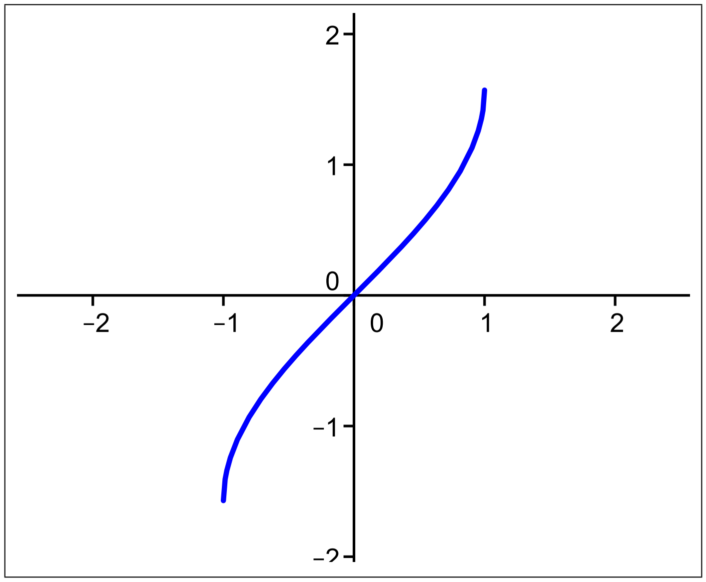


Figura 2.25: $\operatorname{sen}^{-1}(x) = \arcsin(x)$

Si ahora pensamos en la función $\cos(\theta)$, esta también es periódica, de período 2π, pero restringida al $[0, \pi]$ es inyectiva, con contradomonio el $[-1, 1]$. Entonces definimos

$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] .$$

Por la misma razón que antes, a esta función se la suele llamar también *arco coseno*, y se denota $\operatorname{arc}\cos$. Damos algunos valores: $\operatorname{arc}\cos(-1) = \pi$, $\operatorname{arc}\cos(-\frac{1}{2}) = \frac{7\pi}{6}$, $\operatorname{arc}\cos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc}\cos(1) = 0$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.26.

En lo que respecta a la tangente, tomamos el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y vemos que allí es inyectiva, con contradominio $\mathbb{R}$. Entonces definimos

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) .$$

A esta función se la llama *arco tangente*, y se denota $\arctan$ Algunos valores son $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(0) = 0$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.27.

2.4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Una función exponencial es de la forma

$$f(x) = a^x$$

en la que a es una constante positiva.

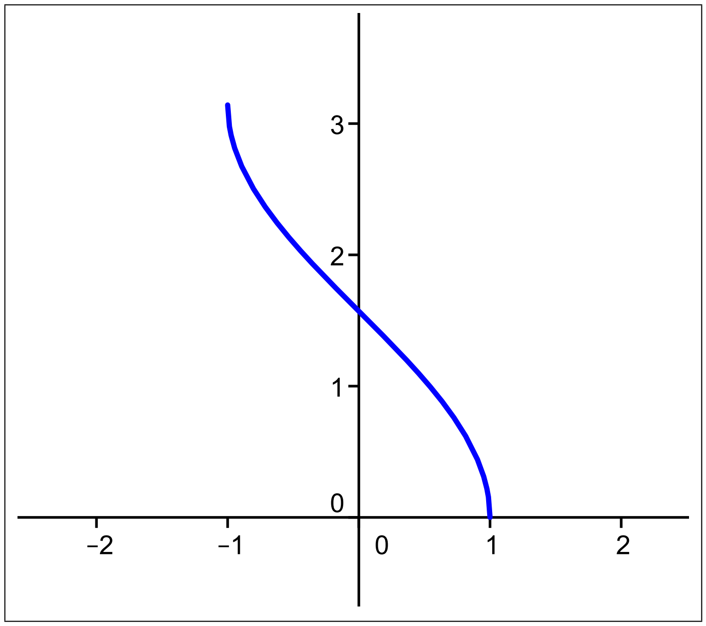


Figura 2.26: $\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$

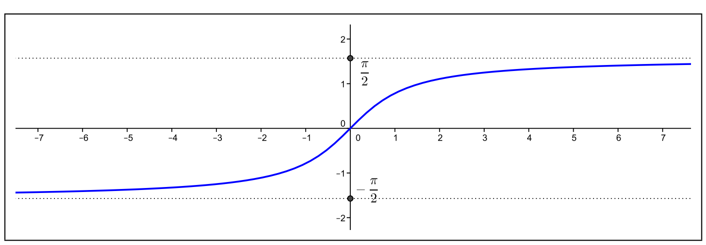


Figura 2.27: $\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$

1) Si $x = n$ es un natural,

$$a^x = \underbrace{a....a}_{n \text{ veces}},$$

2) si $x = 0$ $a^0 = 1$.

3) si $x = -n$ con n natural,

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

4) si x es un número racional, $x = \frac{p}{q}$ donde p y q son enteros y q es positivo,

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

5) Si x es irracional, definimos a^x de modo de completar la gráfica que hemos obtenido en los pasos anteriores. Como todo número irracional se puede aproximar por racionales, tomamos racionales $r_1, r_2, ..., r_n, ...$que aproximen a x. Se puede demostrar que las cantidades $a^{r_1}, a^{r_2}, ..., a^{r_n}, ...$ se aproximan (o tienden) a un valor que llamaremos a^x.

Entonces si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $f(x) = a^x$ tiene como dominio todos los números reales y como contradomonio el intervalo $(0, \infty)$. Para graficarlas observamos que si $a > 1$, obtenemos una función creciente (o sea $f(x) < f(y)$ si $x < y$), que pasa por el $(0, 1)$ y que se va a cero cuando x se va a $-\infty$.

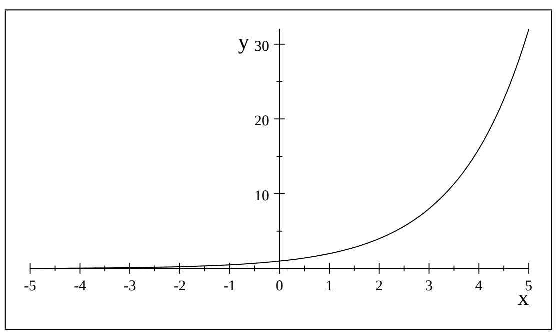


Figura 2.28: $f(x) = a^x$, $a > 0$

Por el contrario, si $a < 1$, la función es decreciente y se va a cero cuando x se va a ∞. También pasa por $(0, 1)$.

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Si $a = 1$, tenemos la función constante uno.

2.4.1. Propiedades de la exponenciación

Si a y $b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ entonces

1) $a^{x+y} = a^x a^y$,

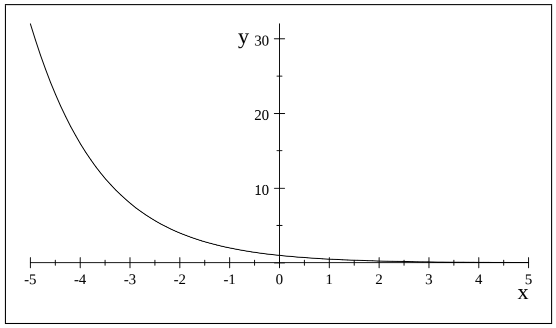


Figura 2.29: $f(x) = a^x$, $a < 0$

2) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Cuando estudiemos ”derivada”de esta funciones veremos que existe una base a privilegiada, que es la que tiene la propiedad de que la pendiente de la recta tangenta a la gráfica, en el punto $(0, 1)$ es igual a uno. Este número se denota por e, es irracional y se aproxima por $e = 2{,}7182818284$...En general diremos que $f(x) = a^x$ es la *función exponencial de base* a y que $f(x) = e^x$ es la *función exponencial*.

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $f(x) = a^x$ es creciente (si $a > 1$) o decreciente (si $a < 1$). En cualquier caso es inyectiva desde $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$. Por lo tanto tiene función inversa, $f^{-1}(y)$ llamada el *logaritmo en base* a de y y denotado $\log_a(y)$. El dominio de $\log_a$ es entonces el intervalo $(0, \infty)$ y su contradominio es $\mathbb{R}$. En el caso de estar con base e se llama logaritmo natural y en vez de escribir $\log_e$se usa la notación $\ln$. Por definición de función inversa, $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$ a sea

$$\log_a(y) = x \text{ si } a^x = y,$$

de ahí que se dice que el logaritmo en base a de un número y es el número x al que hay que elevar la base para obtener y. También de la definición se deduce que

$$\log_a(a^x) = x \text{ y que si } y > 0, a^{(\log_a(y))} = y.$$

Ejemplo 2.4.1.

- $\log_2(64) = 6$ pues $2^6 = 64$
- $\log_{10}(0{,}01) = -2$ pues $10^{-2} = 0{,}01$
- $\log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$.

Las funciones logarítmicas más importantes corresponden a base $a > 1$. Las gráficas de estas funciones son las reflejadas de las exponenciales por la recta $y = x$, entonces tienen la siguiente forma aproximada

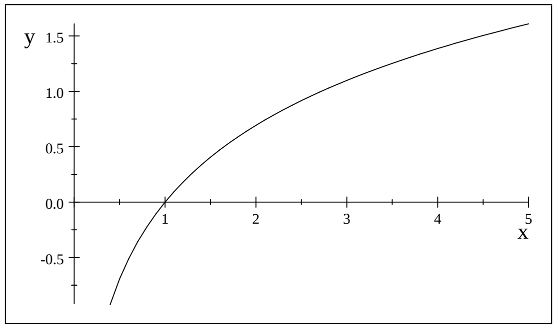


Figura 2.30: $f(x) = \ln(x)$

2.4.2. Propiedades del logaritmo

Si $a > 1$ entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

3. $\log_a((x)^y) = y \log_a(x)$.

Ejemplo 2.4.2. Para expresar $\log_a(x) + \frac{1}{3}\log_a(y)$ en la forma de un solo logaritmo escribimos:

$$\log_a(x) + \frac{1}{3}\log_a(y) = \log_a(x) + \log_a((y)^{\frac{1}{3}}) = \log_a(x\sqrt[3]{y}).$$

Vale el siguiente resultado: Para cualquier número positivo $a \neq 1$

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}.$$

Demostremos esto. Sea $x = \log_a(y)$. Entonces $a^x = y$. Tomamos logaritmo natural de ambas expresiones y queda

$$\ln(a^x) = \ln(y),$$

entonces

$$x\ln(a) = \ln(y),$$

o sea

$$x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}, \text{ ó } \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}.$$

En general las computadoras saben calcular aproximadamente el $\ln$.

2.5. Ejercicios resueltos de funciones

Ejercicio 2.5.1. Sean $f(x) = \sqrt{2x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, encuentre el dominio de f, de g, de $f+g$, de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

Solución.

$$\begin{aligned}
dom\,(f) &= \{x \in \mathbb{R} : 2x-1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \\
dom\,(g) &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\
dom(f+g) &= dom\,(f) \cap dom\,(g) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \\
dom\,(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in dom\,(g) \text{ y } g(x) \in dom\,(f)\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ y } \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ y } x \leq 2\} = (-\infty, 0) \cup [2, \infty) \\
dom\,(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in dom\,(f) \text{ y } f(x) \in dom\,(g)\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2} \text{ y } \sqrt{2x-1} \neq 0\right\} = \left(\frac{1}{2}, \infty\right).
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.5.2. Esbozar la gráfica de $f(x) = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

Solución. Sabemos que esta gráfica debe ser la del $\cos(x)$, corrida $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda y una unidad hacia arriba.Entonces es aproximadamente

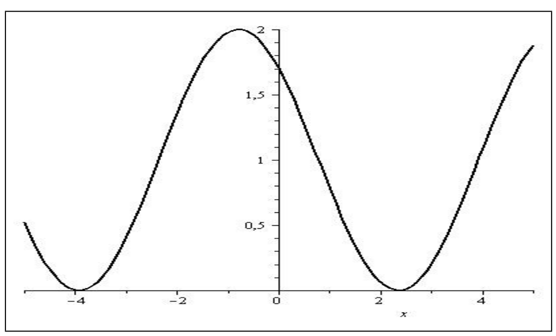


Figura 2.31: $y = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

□

Ejercicio 2.5.3. Hallar las soluciones de $\sqrt[3]{\ln x} = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$.

Solución. Obviamente x debe ser positivo. Además, $\ln\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\ln(x)$ entonces, elevando al cubo,

$$\ln x = \left(\frac{1}{3}\ln(x)\right)^3 = \frac{1}{27}\ln^3(x).$$

Si $\ln(x) = 0$ (o sea si $x = 1$), se cumple la igualdad. Si $\ln(x) \neq 0$, simplificamos y obtenemos $1 = \frac{1}{27} \ln^2(x)$, esto es

$\ln(x) = \sqrt{27}$ ó $\ln(x) = -\sqrt{27}$. Entonces las soluciones buscadas son $x_1 = 1$, $x_2 = e^{\sqrt{27}}$ y $x_3 = e^{-\sqrt{27}}$. $\square$

Capítulo 3

Límites

3.1. Noción de límite

En esta sección nos interesa estudiar el comportamiento de una función f cuando la variable x se encuentra cerca de un número real a fijo, que podría incluso no pertenecer al dominio de la función. La pregunta es si los valores $f(x)$ se aproximan o no a algún número cuando los x involucrados los tomamos muy cercanos a a. Este concepto de límite, que parece muy sencillo, no es tan fácil de describir analíticamente. En este primer curso vamos a trabajar con la idea intuitiva y también las definiciones precisas y algunas demostraciones rigurosas.

Ejemplo 3.1.1. Sea $f(x) = x^3 - 2$ y sea $a = 1$. Hacemos dos tablas de los valores de esta función para x cercanos a 1. En la primera tomamos x menores que uno y en la segunda mayores.

Cuadro 3.1: Valores de $f(x) = x^3 - 2$ para x cercanos a 1

x	$x^3 - 2$
$0{,}9$	$-1{,}271$
$0{,}995$	$-1{,}014$
$0{,}999$	$-1{,}003$
$0{,}9998$	$-1{,}0006$
$0{,}9999$	$-1{,}0003$

x	$x^3 - 2$
$1{,}1$	$-0{,}669$
$1{,}01$	$-0{,}969$
$1{,}001$	$-0{,}997$
$1{,}0001$	$-0{,}9997$
$1{,}00001$	$-0{,}9999$

Vemos que los valores de esta función se van acercando al valor -1 a medida que la variable x se acerca a $a = 1$, tanto por valores menores que uno, como por valores mayores que uno. En este caso a pertenece al dominio de f y -1 es exactamente el valor $f(a)$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, cuyo dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$ y sea $a = 0$. Nuevamente nos construimos una tabla de algunos valores de f para x cercanos a $a = 0$.

x	$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
$\frac{1}{10\pi}$	0
$\frac{2}{41\pi}$	1
$\frac{1}{100\pi}$	0
$\frac{2}{401\pi}$	1
$\frac{1}{500\pi}$	0

En general, si n es un número natural y x es de la forma $\dfrac{1}{2n\pi}$, entonces $f(x) = 0$; y si x es de la forma $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, entonces $f(x) = 1$ y a medida que la variable x se acerca a $a = 0$ los valores de la función f oscilan entre 1 y 0, sin acercarse a ningún número.

Si, como en el caso del Ejemplo 3.1.1, los valores que toma la función f se aproximan a un número l cuando x se aproxima a a, diremos que *l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a*. También se usa la notación $f(x) \to l$ cuando $x \to a$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

En la situación del Ejemplo 3.1.2, donde los valores $f(x)$ para x cercanos a a no se aproximan a un único número, se dice que no existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.

Precisamos un poco estas ideas. Supongamos que estamos con $f(x) = 3x - 1$. Tomamos $a = 2$.

x	$3x-1$
2,01	5,03
2,001	5,003
2,0001	5,0003
1,999	4,997
1,99	4,97

Si observamos la tabla, vemos que los valores de f se aproximan a $l = 5$ cuando x tiende a $a = 2$. Nos preguntamos lo siguiente. Si queremos que para ciertos x cerca de $a = 2$, $f(x)$ diste de $l = 5$ en menos de, por ejemplo $0{,}01$, o sea si pretendemos que $|f(x) - l| \leq 0{,}01$, ¿cuán cerca de $a = 2$ debemos tomar a la variable x? Como

$$|f(x) - l| = |3x - 1 - 5| = 3\,|x - 2|$$

entonces si $|x - 2| \leq \frac{0{,}01}{3}$, a sea si x pertenece al intervalo $[2 - \frac{0{,}01}{3}, 2 + \frac{0{,}01}{3}]$, obtenemos que $|f(x) - l| \leq 0{,}01$. Seguidamente tratamos de responder para qué valores de x podemos lograr que

$|f(x) - l| \leq 0{,}001$ y la respuesta es que para los x tales que $|x - 2| \leq \frac{0{,}001}{3}$ (o sea x en el intervalo $[2 - \frac{0{,}001}{3}, 2 + \frac{0{,}001}{3}]$) lo obtenemos. En general, para cualquier $\varepsilon > 0$ (que suponemos muy pequeño) si $|x - 2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (o sea si $x \in [2 - \frac{\varepsilon}{3}, 2 + \frac{\varepsilon}{3}]$) entonces $|f(x) - 5| \leq \varepsilon$. Este sencillo ejemplo motiva la siguiente definición rigurosa de límite.

Definición 3.1.1. Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Decimos que el *límite para x que tiende a a de $f(x)$ es el número l* y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

En el ejemplo anterior encontramos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. En general δ depende de ε. Se pide $0 < |x - a|$ porque no importa cuánto vale $f(a)$, lo importante son los valores de f cerca de a.

También se usa la notación $f(x) \to l$ cuando $x \to a$.

Proposición 3.1.2. *Sea $c, a \in R$.*

$a)$ *Si $f(x) = c$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$.*
$b)$ *Si $f(x) = cx$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = ca$.*

Demostración.

$a)$ Dado $\varepsilon > 0$, para cualquier x real vale que $|f(x) - c| = 0$, luego $|f(x) - c| < \varepsilon$.

$b)$ El caso $c = 0$ está demostrado en la parte $a)$. Sea ahora $c \neq 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|c|}$ y tomamos x tal que $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - ca| = |cx - ca| = |c|\,|x - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

$\square$

3.2. Propiedades de los límites

Teorema 3.2.1. *[Propiedades de los límites] Sean f y g definidas en un intervalo I que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = m$ entonces*

1) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + m$
2) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = lm$
3) *Si $m \neq 0$ $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{m}$.*
4) *Si $n \in N$ entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$, con la restricción de que si n es par, l debe ser positivo.*

De la Proposición 3.1.2 y el Teorema 3.2.1 se deduce que si $p(x)$ es una función polinomial entonces $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 4x + 1 = -2$. También si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomiales (o sea f es racional) y si $q(a) \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{1}{3}$. También $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1} = \sqrt[3]{-2}$.

Ejemplo 3.2.1.

a) Para calcular el límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

no podemos aplicar directamente la parte 3) del Teorema 3.2.1 anterior porque $m = \lim\limits_{x\to 3} x-3 = 0$. De todos modos, observamos que podemos factorizar el numerador como $(x-3)(x^2+3x+9)$. Por lo tanto si $(x-3) \neq 0$ (o sea si $x \neq 3$) podemos simplificar y resulta $\frac{x^3-27}{x-3} = x^2 + 3x + 9$. Como para tomar límite para x que tiende a 3 no importa el valor de la función en 3,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x\to 3} x^2 + 3x + 9 = 27.$$

b)

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 - \sqrt{4-t}}{t}.$$

Tampoco en este caso podemos aplicar directamente la parte 3) del Teorema 3.2.1. Hacemos el siguiente artificio algebraico. Multiplicamos y dividimos por $2 + \sqrt{4-t}$ y en el numerador obtenemos una diferencia de cuadrados,

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{4-t}}{t} &= \frac{\left(2 - \sqrt{4-t}\right)\left(2 + \sqrt{4-t}\right)}{t\left(2 + \sqrt{4-t}\right)} = \frac{4 - (4-t)}{t\left(2 + \sqrt{4-t}\right)} \\ &= \frac{t}{t\left(2 + \sqrt{4-t}\right)}, \end{aligned}$$

ahora si $t \neq 0$ podemos simplificar t, por lo tanto obtenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 - \sqrt{4-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-t}} = \frac{1}{4}.$$

Teorema 3.2.2. *[Unicidad del límite] Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ *y* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_2$ *entonces* $l_1 = l_2$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 tales que

$$|f(x) - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

y
$$|f(x)-l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si} \quad 0<|x-a|<\delta_2.$$
Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea x tal que $0<|x-a|<\delta$. Entonces
$$|l_1-l_2| \leq |f(x)-l_1| + |f(x)-l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
Como esto vale para todo ε positivo, debe ser $|l_1-l_2|=0$, o sea $l_1=l_2$. □

Valen también los siguientes resultados

Teorema 3.2.3. *Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto I que contiene a a, excepto quizás en $x=a$ y existen los límites de f y g cuando x tiende a a entonces*
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Teorema 3.2.4. *(del sandwich) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto I que contiene a a, excepto quizás en $x=a$ y*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l,$$
entonces $\lim_{x\to a} g(x)=l$.

Ejemplo 3.2.2. El límite
$$\lim_{x\to 0} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$
para cualquier potencia natural n.

En efecto, $\left|x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^n$, o sea $-|x|^n \leq x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|^n$. Como
$$\lim_{x\to 0} |x|^n = \lim_{x\to 0}(-|x|^n)=0,$$
(esto se deduce del teorema del límite del producto) el ejercicio sigue por el teorema del sandwich.

3.3. Límites laterales

Sea
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\geq 0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Nos preguntamos si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Claramente f tiene un comportamiento diferente a la derecha y a la izquierda de $a=0$. Entonces para saber si $f(x)$ se acerca a algún valor l cuando x se acerca a

$a = 0$ debemos estudiar separadamente los $x > 0$ y los $x < 0$. En este ejemplo vemos que para $x > 0$ los valores de $f(x)$ se acercan a $l_1 = 0$ y para $x < 0$ la función es constantemente igual a -1 por lo tanto se acerca a $l_2 = -1$. Resulta evidente entonces que f no tiene límite para x que tiende a $a = 0$. Estos valores l_1 y l_2 reciben el nombre de *límites laterales*. Precisamos esto para una f general.

Decimos que l *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *por la derecha* si los valores $f(x)$ se aproximan al número l cuando x se aproxima a a por valores mayores que a. En este caso escribimos

$$l = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Similarmente decimos que l *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *por la izquierda* si los valores $f(x)$ se aproximan al número l cuando x se aproxima a a por valores menores que a. En este caso escribimos

$$l = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Definición 3.3.1. Sea f definida en un intervalo (a, b).Decimos que el *límite para* x *que tiende a* a *por la derecha de* $f(x)$ *es el número* l y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definición 3.3.2. Sea f definida en un intervalo (c, a).Decimos que el *límite para* x *que tiende a* a *por la izquierda de* $f(x)$ *es el número* l y escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Observación. La afirmación $0 < x - a < \delta$ es equivalente a decir $x \in (a, a + \delta)$ y la afirmación $0 < a - x < \delta$ equivale a $x \in (a - \delta, a)$, o sea para la primera definición, sólo trabajamos a la derecha de a y en la segunda, a la izquierda.

Como sugiere nuestra intuición, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3. *Sea* f *una función definida en un intervalo abierto* I *que contiene a* a, *excepto quizás en* $x = a$. *Entonces el* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe y vale* l *si y sólo si existen ambos límites laterales* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *y son iguales a* l. *O sea* $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *si y sólo si* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$.

Ejemplo 3.3.1. El $\lim_{x \to 0} |x| = 0$. En efecto,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$. Como ambos límites laterales son cero, el límite es cero.

3.4. Límites infinitos

Si queremos analizar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en un intervalo alrededor de $a = 0$, vemos que a medida que le damos valores a x más cercanos al cero, los valores de la f se hacen más y más grandes. Diremos que el *límite de $f(x)$ para x que tiende a a es ∞* si los valores de f superan cualquier cota a medida que x se aproxima a a. Si $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, los valores se hacen grandes pero con signo negativo. Diremos que el *límite de $f(x)$ para x que tiende a a es $-\infty$* si los valores de f son menores que cualquier cota a medida que x se aproxima a a.

Definición 3.4.1. Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Entonces la expresión

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que para cada número M hay un correspondiente $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Ejemplo 3.4.1. Veamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \infty.$$

Dado $M > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que cada vez que $x \in (-\delta, \delta)$ y x sea distinta de cero (o sea $0 < |x| < \delta$) ocurra $f(x) > M$. Ahora, si $x \neq 0$, $f(x) > M$ (es decir $\frac{1}{x^4} > M$) es equivalente a $x^4 < \frac{1}{M}$. Por lo tanto si $0 < |x| < \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{4}}$, entonces $f(x) > M$.

Repasando: dado $M > 0$, si $x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{M}}, \sqrt[4]{\frac{1}{M}}\right)$, entonces $f(x) > M$.

También se definen los conceptos de $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ de manera análoga a la anterior.

Definición 3.4.2. La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$.
4. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 3.4.2. Para determinar la asíntota vertical de la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$

vemos que los valores de f crecen cuando x se acerca a $a = -2$ por la derecha, o sea $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \infty$. También, $\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = -\infty$. Ver Figura 3.1. Por lo tanto la recta $x = -2$ es la asíntota buscada.

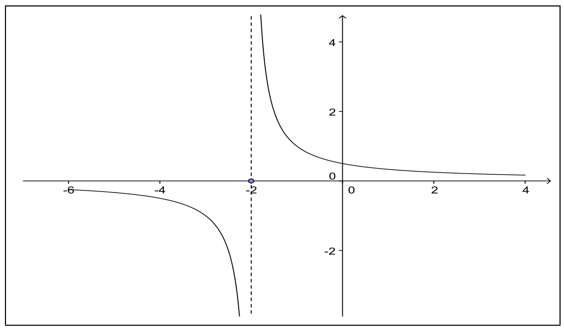


Figura 3.1: $f(x) = \frac{1}{x+2}$

3.5. Límite cuando la variable tiende a infinito

En este apartado nos interesa estudiar el comportamiento de una función f para valores de la variable x muy grandes en valor absoluto. Por ejemplo, si pensamos en $f(x) = \frac{1}{x}$, los valores de la función se acercan a cero tanto para x cerca de ∞ como para x cerca de $-\infty$. Decimos que l *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$ si los valores $f(x)$ se aproximan al número l cuando x crece superando cualquier cota. En este caso escribimos $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Análogamente decimos que l *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$ si los valores $f(x)$ se aproximan al número l cuando x decrece haciéndose menor que cualquier cota. En este caso escribimos $l = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Definición 3.5.1. Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Entonces el

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

significa que para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente $M > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.

Análogamente tenemos la siguiente

Definición 3.5.2. Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Entonces el

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

significa que para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente $N < 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

Nota 3.5.1. Vale el enunciado del Teorema sobre propiedades de los límites, para este caso (o sea reemplazando a por ∞) con las modificaciones adecuadas sobre el dominio de f.

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 3.5.1. Si $r > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to\infty} \dfrac{c}{x^r} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^r} = 0$.

Solución. Dado un $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $M > 0$ tal que si elegimos $x > M$ resulte $\left|\frac{c}{x^r}\right| < \varepsilon$. Como $\left|\frac{c}{x^r}\right| < \varepsilon$ equivale a $|x|^r > \frac{c}{\varepsilon}$, podemos tomar un $M > \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}}$. La demostración para el caso $x \to -\infty$ es análoga. □

Ejemplo 3.5.2. Para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3},$$

en el cociente $\frac{2x-1}{3x+4}$ dividimos numerador y denominador por x y obtenemos

$$\frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{4}{x}}.$$

Como tanto $\frac{1}{x}$ como $\frac{4}{x}$ tienen límite cero cuando x tiende a ∞ y como el límite de la suma es la suma de los límites y límite del cociente es el cociente de los límites, este límite debe ser $\frac{2}{3}$.

Ejemplo 3.5.3. Veamos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

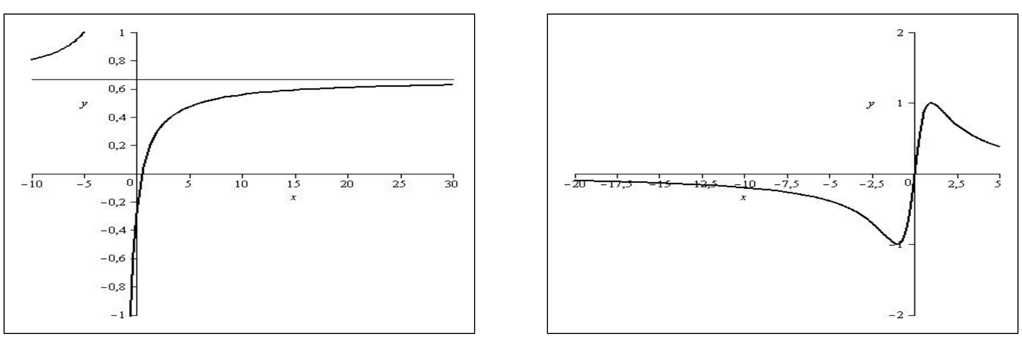
Nuevamente, en el cociente $\frac{2x}{x^2+1}$ dividimos numerador y denominador por x^2 y obtenemos

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Como ya sabemos que tanto $\frac{2}{x}$ como $\frac{1}{x^2}$ tienen límite cero cuando x tiende a $-\infty$ y como límite de la suma es la suma de los límites y límite del cociente es el cociente de los límites, este límite debe ser 0.

Definición 3.5.3. La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de una función f si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

En los dos ejemplos precedentes las rectas $y = \frac{2}{3}$ e $y = 0$ son las respectivas asíntotas horizontales .



(a) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$ (b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Figura 3.2: Asíntotas horizontales

3.6. Límites infinitos cuando la variable tiende a infinito

Por último, puede ocurrir que f crezca indefinidamente cuando x se hace grande, como pasa por ejemplo con $f(x) = x^2$. Estas situaciones dan origen a las siguientes definiciones

Definición 3.6.1. Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Entonces el

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para cada número $L > 0$ hay un correspondiente $M > 0$ tal que $f(x) > L$ siempre que $x > M$.

Definición 3.6.2. Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Entonces el

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

significa que para cada número $L > 0$ hay un correspondiente $M > 0$ tal que $f(x) < -L$ siempre que $x > M$.

Definición 3.6.3. Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Entonces el

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

significa que para cada número $L > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) > L$ siempre que $x < N$.

Definición 3.6.4. Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Entonces el

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

significa que para cada número $L > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) < -L$ siempre que $x < N$.

Ejemplo 3.6.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = -\infty$. En efecto,

$$\frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = \frac{x - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

El límite del denominador, para $x \to -\infty$ es uno y el del numerador es $-\infty$. Por lo tanto el ejercicio sigue.

3.7. Límites notables

En esta sección calcularemos algunos ejemplos de límite llamados *límites notables*, y que involucran cocientes entre una función trigonométrica y la función $f(x) = x$, cuando x tiende a 0.

Más precisamente, calcularemos los siguientes límites:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}, \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta)-1}{\theta}, \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan(\theta)}{\theta}.$$

Para calcular estos límites, demostraremos en primer lugar el siguiente teorema:

Teorema 3.7.1. *Valen los siguientes límites.*

1. $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0,$

2. $\lim_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1,$

Demostración. Para demostrar $1)$ tomamos un arco θ tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Observamos que si P es el punto sobre la circunferencia unitaria que corresponde a un arco de θ radianes, el arco θ es mayor que la longitud de la secante entre P y el punto $Q = (1, 0)$. Como a su vez esta secante es la hipotenusa del triángulo, con cateto $\operatorname{sen}\theta$, debe ser

$$0 < \operatorname{sen}\theta < \theta.$$

Si $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, obtenemos

$$0 < -\operatorname{sen}\theta < -\theta.$$

Por lo tanto, en cualquier caso tenemos que

$$-|\theta| < \operatorname{sen}(\theta) < |\theta|.$$

Como

$$\lim_{\theta\to 0} |\theta| = \lim_{\theta\to 0} (-|\theta|) = 0,$$

el Teorema del sandwich implica que $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta) = 0$.

Para demostrar $2)$ simplemente observamos que si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}$$

por lo tanto

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \lim_{\theta\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = 1.$$

□

Estamos en condiciones ahora de calcular los siguientes límites notables:

Teorema 3.7.2 (Límites notables)**.** *Valen los siguientes límites:*

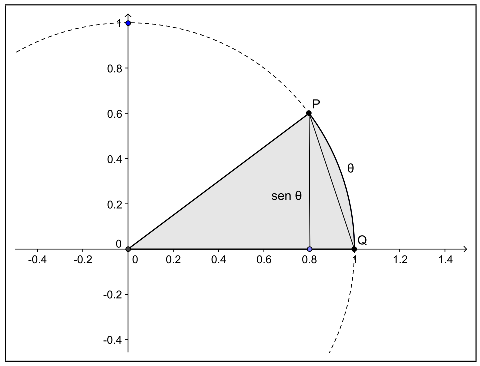


Figura 3.3: $|\operatorname{sen}(\theta)| < |\theta|$

1. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1,$ *2.* $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0.$ *3.* $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$

Demostración. Para demostrar 1), suponemos primero que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Sean P y Q como antes. Trazamos las tangentes por los puntos P y Q. Se intersecan en otro punto R. Tomamos el punto A de intersección de la tangente por Q con la recta que contiene al segmento $\overline{OP}$.

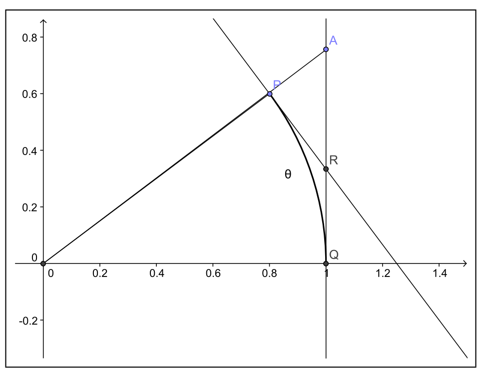


Figura 3.4: Caso 3)

Está claro que

$$\theta < \overline{PR} + \overline{QR} < \overline{AR} + \overline{QR} = \overline{AQ} = \overline{OQ}\tan\theta = \tan\theta.$$

La segunda desigualdad sigue por ser $\overline{PR}$ un cateto del triángulo rectángulo de vértices P, R, y A, con hipotenusa $\overline{AR}$. Por lo tanto,

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta},$$

como además ya vimos en la demostración del Teorema 3.7.1 que $\operatorname{sen}\theta < \theta$, obtenemos, en este caso,

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \tag{3.1}$$

Si $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, aplicamos estas desigualdades con $-\theta$. Obtenemos

$$\cos(-\theta) < \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1.$$

Recordamos que sen es una función impar y $\cos$ es una función par, entonces nuevamente (3.1) sigue también en este caso. Ahora, la afirmación $1.$ se deduce entonces de la ecuación (3.1), del Teorema 3.7.1, item $2.$ y del Teorema del sandwich.

Para probar $2.$ escribimos

$$\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} = \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta + 1)}.$$

Por $1.$, sabemos que el factor $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ tiende a 1 para θ que tiende a 0, y por Teorema 3.7.1, items $1.$ y $2.$, obtenemos que el segundo factor tiende a 0. Por lo tanto se deduce lo enunciado en el punto $4.$

Para probar $3.$, utilizamos que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Luego

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta\,\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\ \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta} = 1,$$

y queda demostrado el tercer límite notable. □

Ejemplo 3.7.1. Veamos que el

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

Escribimos

$$\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} = \frac{5}{2} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}.$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen5x}{5x} = 1$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} = \frac{5}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2. Para determinar el

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x,$$

observamos primero que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$, por lo tanto no podemos saber a priori el límite del producto. Como $\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y $\cos x = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que $\tan x = -\dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$. Por lo tanto

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Si llamamos $u = x - \frac{\pi}{2}$, decir que $x \to \frac{\pi}{2}$ equivale a decir que $u \to 0$, entonces el

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2} \right)} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \lim_{u \to 0} \left(-\frac{u}{\operatorname{sen} u} \cos u \right) = -1.$$

Capítulo 4

Continuidad

4.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos tratado el concepto de límite de una función f en un punto, que intuitivamente consiste en determinar si una función toma valores arbitrariamente cercanos a un número, llamado *límite*, para puntos del dominio muy cercanos a un punto a. Este punto a puede o no pertenecer al dominio f, por lo cual la noción de límite de una función en un punto no está relacionado con el valor de f en dicho punto.

La noción de *continuidad* de una función es la que relaciona el concepto de límite de la función en un punto con el valor de la función en el punto, y permite contextualizar formalmente a aquellas funciones cuya gráfica está dada por un trazo continuo, sin huecos ni saltos.

4.2. Continuidad en un punto

Definición 4.2.1. Una función f es *continua en un número* a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Notemos que esta definición anterior requiere tres características de la función f:

1. El número a debe pertenecer al dominio de f.

2. El límite de f para x que tiende a a debe existir, lo que en particular dice que f debe estar definida en algún intervalo abierto alrededor de a.

3. El límite de f para x que tiende a a debe ser igual al valor de f en a.

Ejemplo 4.2.1.

1. La función f dada por $f(x) = |x-2|$ es continua en $x = 2$, porque $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ y $f(2) = 0$.

2. La función g dada por
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
es continua en $x = 1$, porque $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$ y $g(1) = 1^2 = 1$.

Si f no es continua en un punto a se dice que f es *discontinua* en a.

Ejemplo 4.2.2.

1. La función $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ es discontinua en $a = -2$ pues ni siquiera está definida allí.

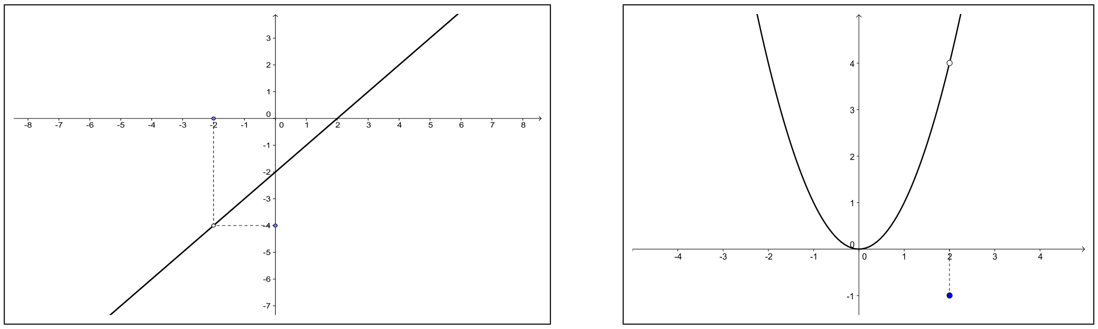
2. La función
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
es discontinua en $a = 1$ pues no existe el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. En efecto, el $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y el $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -3$.

3. La función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$
es discontinua en $a = 2$ pues aunque existe el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, este límite vale 4 que es distinto de $f(2) = -1$.

4. La función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$
es discontinua en $a = 0$, ya que no existe el límite de la función en $a = 0$.

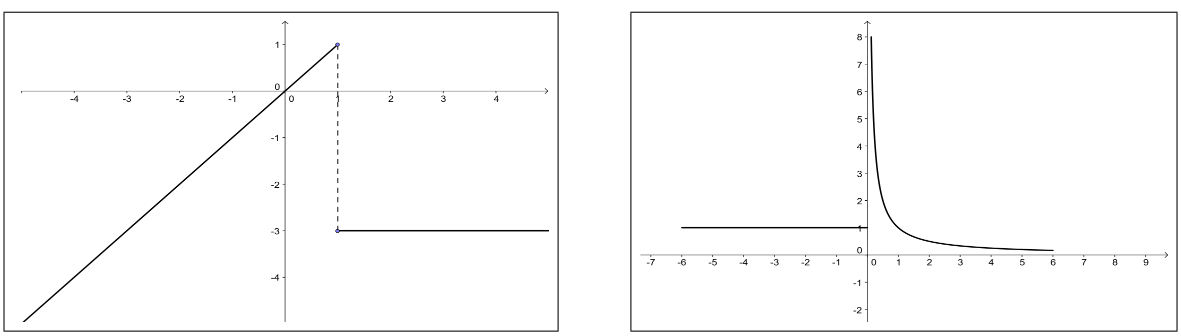
Los casos dados en el Ejemplo 4.2.2 ilustran los tres tipos de discontinuidades. En el caso de los ítems 1 y 3, se trata de *discontinuidades evitables o salvables*. Reciben este nombre porque existe el límite de la función en el punto, por lo cual, si redefiniéramos la función f tomando $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ la función resultaría continua en el punto a.

En el caso del ítem 2 existen los límites laterales pero son distintos. En este caso se dice que es una *discontinuidad de salto*.



(a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ (b) $f(x) = x^2$ si $x \neq 2, \quad f(2) = -1$

Figura 4.1: Discontinuidades evitables



(a) $f(x) = x,\ x \leq 1 \quad f(x) = -3,\ x > 1$ (b) $f(x) = 1,\ x \leq 0 \quad f(x) = 1/x,\ x > 0$

Figura 4.2: Discontinuidades de salto (a), y esencial (b)

Por último, la función dada en el ítem 4 tiene una *discontinuidad esencial* en 0, que significa que no existe al menos uno de los límites laterales en el punto.

Definición 4.2.2. Una función f es *continua por la derecha en un número* a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es *continua por la izquierda en un número* a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Ejemplo 4.2.3.

1. La función
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
es continua por derecha en $a = 0$.

2. La función
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
es continua por izquierda en $a = 1$.

Toda función continua en un punto a es continua por derecha y por izquierda en el punto a.

4.3. Continuidad en un intervalo

Definición 4.3.1. Una función f es *continua* en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todo número del intervalo. También f es *continua* en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) , continua por la derecha en a y continua por izquierda en b.

Nota 4.3.1. Se puede definir también la continuidad de f en intervalos de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$, con las modificaciones obvias.

Nos imaginamos una función continua en un intervalo como aquélla cuya gráfica se traza sin levantar el lápiz.

4.4. Propiedades de funciones continuas

Teorema 4.4.1 (Propiedades de las funciones continuas)**.** *Si f y g son continuas en a y $c \in R$ entonces las siguientes funciones son también continuas en a :*

1. $f+g$ *2.* fg *3.* cf *4.* $\dfrac{f}{g}$*, si* $g(a)\neq 0$*.*

De este teorema se deduce inmediatamente que todo polinomio es continuo en cualquier punto de $\mathbb{R}$ y que toda función racional es continua en cualquier punto de su dominio. También vale que si n es un natural par entonces $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $[0,\infty)$ y si n es un natural impar entonces f es continua en $(-\infty,\infty)$. En efecto, observamos que si escribimos $x = a+h$, decir que x tiende a a equivale a decir que h tiende a cero. Si $a = 0$, $\sqrt[n]{a+h} - \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{h}$ que tiende a cero cuando h tiende a cero (por derecha si n es par).

Sea ahora $a \neq 0$ en el dominio de f. Recordamos que si $u, v \in \mathbb{R}$, vale la factorización

$$u^n - v^n = (u-v)\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + ... + v^{n-1}\right).$$

Como $a \neq 0$, entonces $a+h \neq 0$ si h es suficientemente chico. Si tomamos $u = \sqrt[n]{a+h}$ y $v = \sqrt[n]{a}$, despejamos $u - v$ en la fórmula de arriba y obtenemos

$$\sqrt[n]{a+h} - \sqrt[n]{a} = \frac{h}{\left(\sqrt[n]{a+h}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{a+h}\right)^{n-2}\sqrt[n]{a} + ... + (\sqrt[n]{a})^{n-1}}.$$

Vemos que si a es positivo y $a+h$ también, (cosa que podemos suponer porque h es chico) el valor absoluto del denominador es mayor o igual que $\left|(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right|$, por lo tanto

$$\left|\sqrt[n]{a+h} - \sqrt[n]{a}\right| \leq \frac{|h|}{\left|(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right|},$$

ó

$$-\frac{|h|}{\left|(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right|} \leq \sqrt[n]{a+h} - \sqrt[n]{a} \leq \frac{|h|}{\left|(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right|}$$

y la afirmación sigue del teorema del sandwich. Si $a < 0$, si $a+h$ es negativo y si n es impar,

$$\left|\sqrt[n]{a+h} - \sqrt[n]{a}\right| = \left|\sqrt[n]{-a-h} - \sqrt[n]{-a}\right|,$$

y la afirmación sigue de lo anterior.

El Teorema 3.7.1.dice que las funciones seno y coseno son continuas en cero. Veamos que de esto se deduce que son continuas en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin(a) &= \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a) - \sin(a)\\ &= \sin(a)\left(\cos(h) - 1\right) + \sin(h)\cos(a),\end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a cero cuando h tiende a cero (porque $\cos(h) - 1$ y $\sin(h)$ tienden a cero cuando h tiende a cero) y entonces la función seno es continua en a. Similarmente,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos(a) &= \cos(a)\cos(h) - \sin(h)\sin(a) - \cos(a)\\ &= \cos(a)(\cos(h) - 1) - \sin(h)\sin(a)\end{aligned}$$

tiende a cero cuando h tiende a cero y por lo tanto el coseno resulta continua en a.

Teorema 4.4.2 (Continuidad de la composición)**.** *Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en a.*

Ejemplo 4.4.1. Las funciones $f(x) = \cos x^2$, $g(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$ son continuas en $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema establece que si una función es continua en un intervalo que contiene a dos puntos a y b, entonces la función toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo (a, b).

Teorema 4.4.3 (Teorema del valor intermedio). *Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y N es cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.*

Ejemplo 4.4.2. Veamos que la ecuación $x^5 + 3x^3 - 1$ tiene alguna raíz en el intervalo $(-1, 1)$.

En efecto, sabemos que $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$ es continua en todo punto. Como $f(-1) = -5$ y $f(1) = 3$ tomamos $N = 0$ que está estrictamente entre -5 y 3. Aplicamos el teorema anterior en el intervalo $[-1, 1]$ y obtenemos que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$, lo que equivale a decir que c es raíz de la ecuación original.

Ejemplo 4.4.3. Veamos que existe un número a en el intervalo $(0, 1)$ tal que $\cos a = a$.

Para ver esto, consideramos la función $f(x) = \cos(x) - x$. Esta función es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$, $f(0) = 1$ y $f(1) = \cos(1) - 1$. Por el Teorema del Valor Intermedio, f toma todos los valores entre $f(0)$ y $f(1)$.

Como $0 < f(0)$ y $0 > f(1)$, entonces existe un $a \in (0, 1)$ tal que $f(a) = 0$, es decir que $\cos a = a$.

El siguiente teorema establece que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor mínimo y un valor máximo en dicho intervalo.

Teorema 4.4.4 (Teorema de Weierstrass). *Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 pertenecientes al $[a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todos los x pertenecientes al intervalo $[a, b]$. (Dicho de otro modo, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en $[a, b]$).*

Observamos que la hipótesis de continuidad es esencial. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

está definida en el intervalo $[0,1]$ y no alcanza nunca su valor máximo. Esto no contradice el teorema porque f no es continua en $x = 0$.

Ejemplo 4.4.4.

1. Sea f la función constante dada por $f(x) = 2$ en el intervalo $[1, 3]$. Entonces f alcanza su valor máximo, 2, y su valor mínimo, también 2, en cada punto del intervalo.

2. La función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi]$ alcanza su valor mínimo -1 en $x_1 = \pi$ y su valor máximo 1 en $x_2 = 0$.

3. La función $h(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 3]$ alcanza su valor mínimo 0 en $x = 0$ y su valor máximo 9 en $x = 3$.

Si bien el Teorema de Weierstrass asegura que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo, no nos da herramientas para determinar cuáles son estos valores. Por ejemplo, para las funciones $f(x) = \cos x - x$ o $g(x) = x^5 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$,e no es obvio a priori cuáles son estos valores ni en qué punto del dominio se alcanzan.

El próximo capítulo nos permitirá resolver estos dilemas.

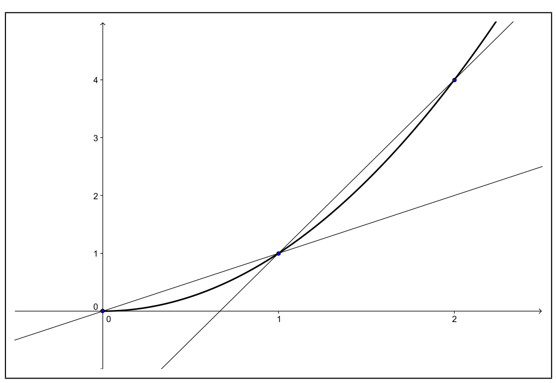
Capítulo 5

Derivada

5.1. Introducción

En este capítulo introduciremos el concepto de derivada de una función f. Este concepto está relacionado con la velocidad de crecimiento o decrecimiento de los valores $f(x)$ a medida que aumenta x. Así por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x^2$ y los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$, ambos de igual longitud, podemos ver que en el primero $f(x)$ crece una unidad ($f(1) - f(0) = 1$), mientras que en el segundo crece en tres unidades ($f(2) - f(1) = 3$). Esto nos dice que la función crece con mayor rapidez promedio en el intervalo $[1,2]$ que en el intervalo $[0,1]$, ambos con la misma longitud.

Gráficamente, esto puede verse comparando la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, f(0))$ y $(1, f(1)$ con la pendiente de la recta que pasa por $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$: la primera tiene pendiente 1, y la segunda pendiente 3.



La noción de derivada intenta describir la tasa de crecimiento de la función a medida que nos acercamos a un punto de la curva. Así por ejemplo, para encontrar la tasa de crecimiento de $f(x) = x^2$ en el punto $(1,1)$, calculamos la pendiente de las rectas secantes a la curva que pasan por el punto $(1, f(1)) = (1,1)$, y por otro punto cada vez más cercano a este.

Observemos la siguiente tabla, donde hemos calculado estas pendientes aproximándonos al punto $(1,1)$:

Puntos de la curva $f(x) = x^2$	Pendiente de la secante
$(1,1)$ y $(2,4)$	$\frac{2^2-1^2}{1} = 3$
$(1,1)$ y $(1{,}5,\ 2{,}25)$	$\frac{1{,}5^2-1^2}{0{,}5} = 2{,}5$
$(1,1)$ y $(1{,}25,\ 1{,}5625)$	$\frac{1{,}25^2-1^2}{0{,}25} = 2{,}25$
$(1,1)$ y $(1{,}01,\ 1{,}0201)$	$\frac{1{,}01^2-1^2}{0{,}01} = 2{,}01$
$(1,1)$ y $(0{,}99,\ 0{,}9801)$	$\frac{1^2-0{,}99^2}{0{,}01} = 1{,}99$
$(1,1)$ y $(0{,}9,\ 0{,}81)$	$\frac{1^2-0{,}9^2}{0{,}1} = 1{,}9$

Notemos que las pendientes se aproximan al valor 2, y esta es la pendiente de la recta que mejor aproxima a la curva alrededor del punto $(1,1)$. Esta recta se denomina *recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(1, f(1))$.

Generalicemos esto a una función f cualquiera. Consideremos la curva que determina el gráfico de una función f, y tomemos un punto $(a, f(a))$ sobre esta curva.

Si queremos definir la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $(a, f(a))$, comenzamos tomando puntos $(a+h, f(a+h)$ cercanos al anterior, o sea con $|h|$ chico y trazando las rectas secantes que unen ambos. Esta recta tiene pendiente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si estas pendientes se aproximan a algún número real m, este debería ser la pendiente de la recta buscada, por lo tanto si existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

definimos la *recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(a, f(a))$ como aquella que pasa por dicho punto y tiene a este límite como pendiente. Recordemos que la ecuación de la recta que pasa por un punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ejemplo 5.1.1. Para dar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en el punto $(2,1)$, observamos primero que para cualquier a en el dominio de f existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-2}{a^2},$$

en particular si $a = 2$ este límite es la pendiente buscada $m = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente pedida es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2),$$

o sea

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

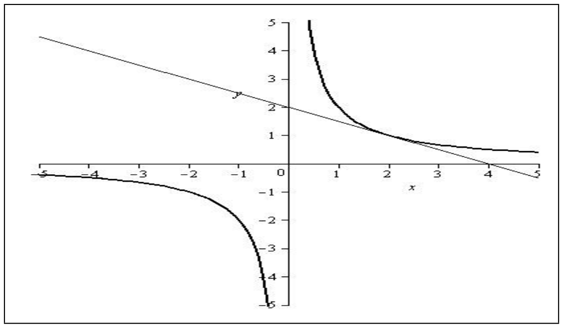


Figura 5.1: Recta tangente a $f(x) = \frac{2}{x}$ por el punto $(2, 1)$

Observamos que si escribimos $x = a + h$, decir que h tiende a cero equivale a decir que x tiende a a. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A la cantidad $x - a$ se la denota Δx y pensando que $y = f(x)$, a la cantidad $f(x) - f(a)$ se la llama Δy ó Δf. Entonces el cociente incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

mide la razón de cambio de f con respecto a x. Este tipo de límites aparecen también si queremos calcular la velocidad instantánea de un móvil que se mueve siguiendo una línea recta. Si $f(t)$, es la distancia recorrida en el instante de tiempo t, la velocidad promedio en el lapso de tiempo entre t_0 y $t_0 + h$ es

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

y por lo tanto la velocidad instantánea es

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

si este límite existe.

Hay muchos otros ejemplos donde hay que calcular esta razones instantáneas de cambio. En química, por ejemplo, puede interesar la razón de cambio de la concentración de algún reactivo con respecto al tiempo (tasa de reacción), en biología la razón de cambio de una población de bacterias con respecto al tiempo, etc.

5.2. Definición y ejemplos

Definición 5.2.1. Sea a un número tal que algún intervalo $(a-\delta, a+\delta) \subset dom f$. La *derivada de una función f en el número a*, denotada $f'(a)$ es el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

si este límite existe.

Si existe la derivada de una función f en un punto a se dice que f es *derivable o diferenciable en a*.

Ejemplo 5.2.1. Para determinar la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$, en el número $a = 5$, calculamos

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 1 - (a^2 - 3a + 1)}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2 - 3h}{h} = 2a - 3 + h,$$

por lo tanto

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 1 - (a^2 - 3a + 1)}{h} = 2a - 3$$

y $f'(5) = 7$.

Podemos pensar en una nueva función, $f'(x)$, llamada *función derivada* de f, cuyo dominio es el conjunto de puntos x tales que f es derivable en x.

Ejemplo 5.2.2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ (con dominio los números reales mayores o iguales que cero), entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ tiene como dominio los reales positivos.

En efecto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{h}{h\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}},$$

entonces el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Teorema 5.2.2. *Si f es diferenciable en a entonces f es continua en a.*

La recíproca de este teorema no vale. Hay funciones continuas en un punto que no son diferenciables en dicho punto. El ejemplo típico es $f(x) = |x|$. Esta función es continua en cero pues $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, pero no es derivable en cero. En efecto,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

pero

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1,$$

por lo tanto no existe el límite de los cocientes incrementales de f y eso dice que f no es derivable en cero. Esto está relacionado, en este caso particular, con que la gráfica de esta función tiene una punta o ángulo en el punto $(0,0)$.

5.3. Recta tangente

Retomamos en este punto la noción de recta tangente a la curva dada por la gráfica de una función derivable f. Hemos visto que la pendiente de esta recta en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$, y por otro lado esta pendiente está determinada por el cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos sobre la recta.

Por ende se cumple que

$$f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a},$$

y así concluimos que la ecuación de la recta tangente es

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ejemplo 5.3.1. Dada $f(x) = x^3 - x + 7$, para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto $(1,7)$, primero calculamos $f'(x) = 3x^2 - 1$. Entonces $f'(1) = 2$ y la ecuación resulta

$$y = 2\,(x-1) + 7 = 2x + 5.$$

5.4. Reglas de diferenciación

En esta sección daremos algunas reglas para derivar funciones, que facilitarán el cálculo.

$1)$ Si f es constante, su derivada es cero. O sea si $f(x) = c$ para todo x en un intervalo, entonces $f'(x) = 0$. En efecto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

2) Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n - x^n}{h} \\
&= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1},
\end{aligned}$$

que tiende a nx^{n-1} cuando h tiende a cero.

Teorema 5.4.1. *Si f y g son diferenciables en a y $c \in \mathbb{R}$ entonces $f+g$, cf y fg son diferenciables en a y valen las siguientes propiedades:*
$i)$ $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
$ii)$ $(cf)'(a) = cf'(a)$,
$iii)$ $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.

También, si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y vale
$iv)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

Ejemplo 5.4.1. Para derivar la función $h(t) = \sqrt{t}\,(1+t^2)$, podemos considerar a h como producto de dos funciones: $f(t) = \sqrt{t}$ y $g(t) = 1 + t^2$. Entonces hacemos

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\,(1+t^2)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)(1+t^2) + \frac{d}{dt}\left((1+t^2)\right)\sqrt{t} = \frac{1+t^2}{2\sqrt{t}} + 2t\sqrt{t}.$$

Del Teorema 5.4.1 deducimos que si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x^{-n}$ entonces $f'(x) = -nx^{-n-1}$. En efecto, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, por lo que

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Vale el siguiente resultado general
Regla de potencias (general) Sea r cualquier número real, si $f(x) = x^r$ entonces

$$f'(x) = rx^{r-1}.$$

Ejemplo 5.4.2. Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ entonces $f'(x) = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}$. En efecto, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-\frac{4}{5}}$ por lo tanto

$$f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1} = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}.$$

Ahora daremos una fórmula que permite calcular la derivada de una composición $f \circ g$ si conocemos las derivadas de f y de g.

Regla de la cadena. Sea $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Si existen $f'(g(x))$ y $g'(x)$ entonces existe $F'(x)$ y vale

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Uno puede acordarse de esta fórmula diciendo que la derivada de la composición es el producto de las derivadas, pero hay que evaluar cada una de ellas en el punto correspondiente.

¡¡ $F'(x)$ **no es** $f'(x))g'(x)$ **!!**

Ejemplo 5.4.3. Si $F(x) = (x^2 + 2x)^7$ entonces $F'(x) = 7(x^2 + 2x)^6 (2x + 2)$.

En efecto, a la función F la vemos como la composición de $f(x) = x^7$ con $g(x) = x^2 + 2x$. Si derivamos f y g obtenemos $f'(x) = 7x^6$ y $g'(x) = 2x + 2$, entonces $f'(g(x)) = 7(g(x))^6 = 7(x^2 + 2x)^6$, por lo tanto a regla de la cadena nos dice que

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = 7\left(x^2 + 2x\right)^6 (2x + 2).$$

5.5. Derivadas de orden superior

La derivada de una función f es una función f', que puede ser derivable en algunos puntos. Esto da origen a una nueva función, $(f')'$, que llamaremos *derivada segunda de* f y que denotaremos f'' o $f^{(2)}$. Este proceso se puede continuar, obteniendo las derivadas de orden n de f denotadas $f^{(n)}$.

Ejemplo 5.5.1. Si $f(x) = x^4 - 1$, queremos calcular las derivadas de orden n de f.

$f'(x) = 4x^3$,

$f''(x) = 12x^2$,

$f^{(3)}(x) = 24x$,

$f^{(4)}(x) = 24$

y si $n \geq 5$, $f^{(n)}(x) = 0$.

También se usa la notación $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, y la derivada segunda es $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$.

5.6. Derivadas de funciones trigonométricas

Ahora ya estamos en condiciones de calcular las derivadas de las funciones trigonométricas. Veamos primero que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{5.1}$$

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+t) - \operatorname{sen} x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos t + \cos x \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos t - 1) + \cos x \operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\operatorname{sen} x \frac{\cos t - 1}{t}\right) + \lim_{t\to 0}\left(\cos x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \\ &= \operatorname{sen} x \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) + \cos x \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad, usamos los límites notables vistos en el Teorema 3.7.2.

Con argumentos parecidos se obtiene que

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x. \tag{5.2}$$

También de (5.1), (5.2) y la fórmula para la derivada del cociente tenemos que

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Las otras se deducen en forma análoga.

Ejemplo 5.6.1. Para calcular la derivada de

$$f(x) = \frac{\cot x}{1 + \sec^2 x}.$$

primero calculamos las derivadas de las funciones incolucradas.

Como $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$,

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x.$$

también,

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x,$$

por lo que

$$\frac{d}{dx}\sec^2 x = 2\sec^2 x \tan x,$$

entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cot x}{1+\sec^2 x} = \frac{(-\csc^2 x)(1+\sec^2 x) - \cot x\,(2\sec^2 x \tan x)}{(1+\sec^2 x)^2}.$$

Nota 5.6.1. Como hemos demostrado que las funciones trigonométricas son derivables en todo punto de su dominio, esto da otra forma de demostrar que son continuas en todo punto de su dominio.

5.6.1. Derivada de funciones exponenciales

Ahora queremos estudiar la derivada de la función $f(x) = a^x$ con $a > 0$.

Vemos que el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Como el límite de arriba no es otra cosa que $f'(0)$, mostramos que si $f'(0)$ existe, entonces la derivada de una función exponencial de base a es la misma función multiplicada por una constante (su derivada evaluada en $x = 0$). O sea

$$\frac{d}{dx} a^x = c a^x,$$

con

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Se puede demostrar que este último límite existe y al a particular donde $c = 1$ lo llamamos e. Entonces

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Ejemplo 5.6.2. Calculemos la derivada de $f(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x$.

Por la regla de derivación del producto,

$$\left(e^{2x} \operatorname{sen} x\right)' = \left(e^{2x}\right)' \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)' \, e^{2x} = 2e^{2x} \operatorname{sen} x + e^{2x} \cos x.$$

5.7. Derivada de la función inversa

Recordemos que si tenemos una función f inyectiva, es posible definir su función inversa f^{-1} mediante $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$. Si una tal f es derivable en un punto a, resulta que su inversa es derivable en el punto $f(a)$. Concretamente, vale el siguiente

Teorema 5.7.1. *Si f es una función inyectiva, diferenciable en a con $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en $f(a)$ y vale*

$$\left(f^{-1}\right)' (f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Nota 5.7.1. Si f es inyectiva y derivable en todo punto x, y si la derivada de f es distinta de 0 en todo punto, entonces f^{-1} es derivable en todo punto y y la fórmula anterior se lee

$$\left(f^{-1}\right)' (y)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{5.3}$$

5.8. Derivada de funciones trigonométricas inversas

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ no es inyectiva, pero si restringimos su dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sí lo es. Recordemos que la función inversa del seno se denomina *función arco seno* y se la denota $\operatorname{arc\,sen} x$ Entonces el dominio de $\operatorname{arc\,sen}$ es $[-1, 1]$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Para calcular su derivada, usamos el teorema anterior (o mejor la fórmula (5.3)). Entonces

$$(\operatorname{arc\,sen})'(y) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arc\,sen} y)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} y)},$$

como $\operatorname{arc\,sen} y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\operatorname{arc\,sen} y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} y)} = \sqrt{1-y^2}$. Volviendo a la fórmula anterior, si $y \in (-1, 1)$,

$$(\operatorname{arc\,sen})'(y) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De manera análoga, es posible definir la función inversa del coseno restringido al intervalo $[0, \pi]$. Esta es la *función arco coseno,* que se la denota $\arccos$, tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$ y como imagen el $[0, \pi]$. Procediendo como antes obtenemos para $y \in (-1, 1)$,

$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

También vemos que la función tangente, restringida al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, resulta inyectiva. Su inversa es la *función arco tangente y* se la denota $\arctan$. Su dominio es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su imagen es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vale

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{(\tan)'(\arctan y)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2},$$

en la penúltima igualdad usamos la identidad $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Ejemplo 5.8.1. Para calcular la derivada de $f(x) = x \arccos(x^3)$ procedemos de la siguiente manera:

$$f'(x) = \arccos\left(x^3\right) - x\frac{3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \arccos\left(x^3\right) - \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^6}}.$$

5.9. Derivada de las funciones logarítmicas

Otra aplicación del teorema anterior es el cálculo de la derivada de la función $\log_a y$ para un $a > 0$. En el caso en que $a = e$, llamábamos $\ln$ a la inversa de e^x, y entonces

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\frac{d}{dx}(e^x)(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Para un logaritmo general, usamos la fórmula $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$ y entonces

$$\frac{d}{dy}\left(\log_a y\right)(y) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{y}. \tag{5.4}$$

Por otro lado, recordamos que $\frac{d}{dx}a^x = ca^x$. Si usáramos la fórmula de derivada de la función inversa directamente para $\log_a y$, obtenemos

$$\frac{d}{dy}\left(\log_a y\right)(y) = \frac{1}{ca^{(\log_a y)}} = \frac{1}{cy} \tag{5.5}$$

pero entonces de (5.4) y (5.5) resulta $c = \ln a$, o sea

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a.$$

Ejemplo 5.9.1. Si $f(x) = 3^x \ln\left(3x^2+5\right)$.

$$f'(x) = 3^x \ln 3 \ln\left(3x^2+5\right) + \frac{3^x}{3x^2+5}6x.$$

5.9.1. Diferenciación logarítmica

Para derivar funciones complicadas, muchas veces es útil tomar logaritmos en la fórmula que define f.

Ejemplo 5.9.2. Para determinar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x^2+4}}{\left(4x-2\right)^4}.$$

sacamos logaritmo en ambos lados de la ecuación obteniendo

$$\ln f(x) = \frac{5}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - 4\ln\left(4x-2\right),$$

ahora derivamos ambos miembros respecto de x

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{5}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} - \frac{16}{4x-2},$$

despejamos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} - \frac{16}{4x-2}\right)f(x) \\ \frac{1}{f(x)}f'(x) &= \left(\frac{5}{4x} + \frac{2x}{2x^2+8} - \frac{16}{4x-2}\right)\frac{x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x^2+4}}{\left(4x-2\right)^4}. \end{aligned}$$

Entonces los pasos para diferenciación logarítmica son:

1) Tomar logaritmos en ambos lados de la ecuación $y = f(x)$.

2) Derivar ambos lados de la ecuación resultante respecto de x.

3) Despejar $f'(x)$.

Ejemplo 5.9.3. Para determinar la derivada de la función

$$f(x) = x^{\sqrt[3]{x^5}}.$$

sacamos logaritmo en ambos lados de la ecuación obteniendo

$$\ln f(x) = \sqrt[3]{x^5} \ln x = x^{\frac{5}{3}} \ln x,$$

derivamos,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} \ln x + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{5}{3} \ln x + 1 \right)$$

y entonces

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{5}{3} \ln x + 1 \right) x^{\sqrt[3]{x^5}}.$$

5.10. Algo sobre el número e

Sabemos que $\ln$ es la función inversa de la función exponencial de base e y que si $f(x) = \ln x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

y por lo tanto $f'(1) = 1$. Por otra parte,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \ln \left((1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

$$= \ln \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} .$$

Entonces

$$\ln \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Podemos aproximar el valor de e tomando h chicos, de la forma $h = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces hacemos una tabla de los valores de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tomando n como algunas potencias de 10.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2,59374
1000	2,71692
10000	2,71814
1000000	2,718280
10000000	2,718281

y vemos que e es próximo a $2{,}7182$.

Capítulo 6

Valores máximos y mínimos y gráficas

6.1. Máximos, mínimos y puntos críticos

Definición 6.1.1. Una función f tiene un *máximo absoluto* en un número c perteneciente al dominio de f si $f(c) \geq f(x)$ para todo x del dominio de f. El número c se llama *punto de máximo* de f y $f(c)$ se llama el *valor máximo* de f. También una función f tiene un *mínimo absoluto* en un número c perteneciente al dominio de f si $f(c) \leq f(x)$ para todo x del dominio de f. El número c se llama *punto de mínimo* de f y $f(c)$ se llama el *valor mínimo* de f.

Ejemplo 6.1.1. $f(x) = x^2 + 2$ tiene un mínimo en $x = 0,$ con valor mínimo $f(0) = 2$, y no tiene máximo.

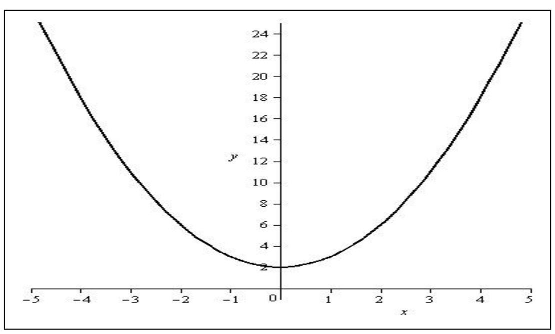


Figura 6.1: $f(x) = x^2 + 2$

Ejemplo 6.1.2. La función $f(x) = -|x|$ tiene un máximo en $x = 0$, con valor máximo $f(0) = 0$ y no tiene mínimo.

Ejemplo 6.1.3. La función $f(x) = (x-2)(x+1)^2$ no tiene máximo ni mínimo.

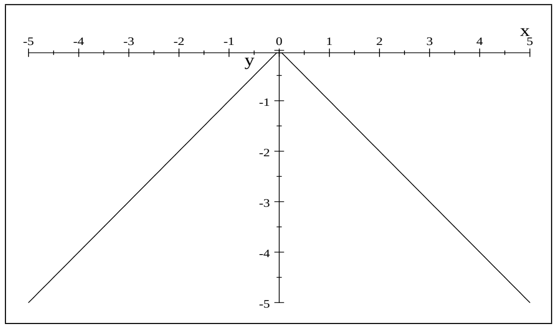


Figura 6.2: $f(x) = -|x|$

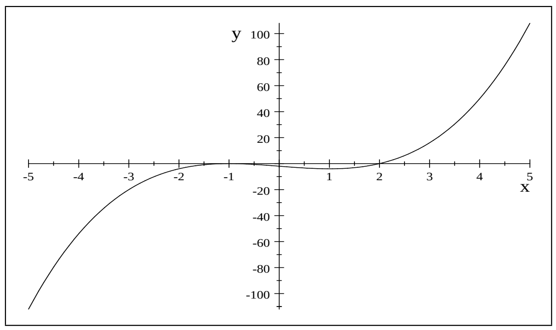


Figura 6.3: $f(x) = (x-2)(x+1)^2$

Definición 6.1.2. Una función f tiene un *máximo local* en un número c perteneciente al dominio de f si hay un intervalo abierto I que contiene a c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. El número c se llama *punto de máximo local* de f. También una función f tiene un *mínimo local* en un número c perteneciente al dominio de f si hay un intervalo abierto I que contiene a c tal que$f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. El número c se llama *punto de mínimo local* de f.

Si observamos la gráfica anterior, vemos que la función tiene un máximo local en el intervalo $(-2, 0)$ y un mínimo local en el intervalo $(0, 2)$. Ya veremos más adelante cómo encontrar esos puntos de máximo y mínimo local.

Teorema 6.1.3 (Teorema de Fermat). *Si f tiene un extremo (o sea un máximo o un mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$ entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Por definición,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

supongamos que c es un punto de máximo local de f. Esto dice que $f(c+h) \leq f(c)$ para h cercano a cero, y por lo $f(c+h) - f(c) \leq 0$ para esos valores de h. Entonces si $h > 0$,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

y por lo tanto el
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$
y si $h<0$,
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$
y por lo tanto el
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$
Como sabemos que el límite existe, ambos límites laterales deben ser iguales y entonces ambos deben ser cero y el límite también. □

Nota 6.1.1. No vale la recíproca del teorema anterior, como lo muestra la función $f(x)=x^3$, que no tiene máximos ni mínimos locales (es creciente) y sin embargo $f'(0)=0$.

Definición 6.1.4. Un *punto crítico* de una función f es un número c del dominio de f tal que $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 6.1.4. Si
$$f(x)=x^3-2x+1,$$
como f es derivable en todo punto, para buscar los puntos críticos planteamos $f'(c)=0$. Calculamos
$$f'(x)=3x^2-2$$
entonces $f'(c)=0$ si y sólo si $c=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ó $c=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ y estos son los dos puntos críticos de f. Sabemos que si f tiene un máximo o un mínimo local en algún punto, éste debe ser uno de los calculados. La gráfica es aproximadamente así.

6.2. Máximos y mínimos en intervalos cerrados

Recordemos que el teorema de Weierstrass dice que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces tiene puntos de máximo y de mínimo absoluto en dicho intervalo. Estos valores pueden ser estar asociados a puntos críticos de f o a los puntos extremos de f. Entonces para hallarlos hay que calcular los puntos críticos de f, comparar los valores que f toma en dichos puntos con $f(a)$ y con $f(b)$.

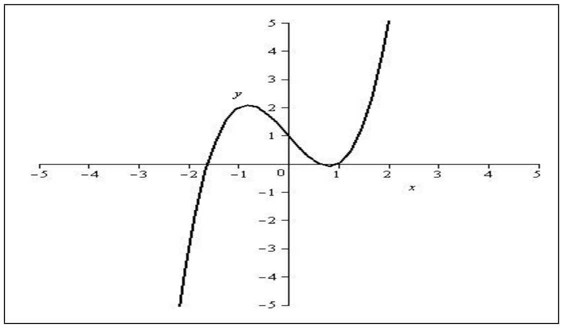


Figura 6.4: $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Ejemplo 6.2.1. $f(x) = x^2 + 2$, en el intervalo $[1, 3]$ tiene máximo en $x = 3$, con valor máximo $f(3) = 11$ y mínimo en $x = 1$ con valor mínimo $f(1) = 3$. Pero si tomamos f en el intervalo $[-1, 3]$, el valor máximo está en $x = 3$, pero el mínimo está en $x = 0$.

El Ejemplo 6.2.1 muestra que cuando consideramos los puntos de máximo y de mínimo de una función en un intervalo cerrado, puede suceder que éstos se encuentren en los extremos del intervalo. Aunque f sea derivable en estos puntos, esa derivada no tiene que ser necesariamente igual a cero. Esto no contradice el Teorema de Fermat, porque estos puntos no son extremos locales.

Ejemplo 6.2.2. Si $f(x) = |x - 1|$ y $[a, b] = [-1, 3]$ observamos que el único punto crítico es $x = 1$ donde f no es derivable. Comparamos $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$ y $f(3) = 2$. El valor máximo de f es entonces 2 y se alcanza en $x = 3$ y en $x = -1$ mientras que el valor mínimo es 0 que se alcanza en $x = 1$.

Ejemplo 6.2.3. Para analizar los máximos y mínimos de

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$$

en el intervalo $[-1, 2]$, primero calculamos los puntos críticos. Como f es derivable en todo el intervalo y

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2},$$

observamos que $f'(x) = 0$ cuando $x^2 + 4x = 0$, o sea si $x = 0$ ó $x = -4$. Sólo debemos considerar $x = 0$ porque -4 no pertenece al intervalo $[-1, 2]$. Comparamos ahora $f(-1) = 1$, $f(2) = 1$ y $f(0) = 0$. Concluimos entonces que f alcanza su valor máximo igual a 1 en los puntos extremos $x = -1$ y $x = 2$ y su valor mínimo 0 en el punto crítico $x = 0$.

Problema 6.2.4. De entre todos los rectángulos de perímetro fijo L, encontrar el de área máxima.

Solución. Si llamamos x de la base del rectángulo e y a su altura, sabemos que x puede variar desde 0 hasta $L/2$, o sea $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$. Además la longitud está dada por $L = 2x + 2y$, de donde podemos despejar y y obtenemos $y = \frac{L}{2} - x$. Pensamos entonces en el área $(A = xy)$ dada como función de x por la fórmula

$$A(x) = x\left(\frac{L}{2} - x\right),$$

con $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$. Como $A(0) = A(\frac{L}{2}) = 0$, el valor máximo buscado debe alcanzarse en un punto crítico. Calculamos

$$A'(x) = \frac{L}{2} - 2x$$

y vemos que $A'(x) = 0$ cuando $x = \frac{L}{4}$. Entonces el rectángulo que encierra área máxima es el cuadrado de lado $\frac{L}{4}$. $\square$

6.3. El Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio

El teorema de Rolle afirma que si una función es *buena* en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma el mismo valor en a y en b entonces dicha función debe tener recta tangente horizontal en algún punto intermedio de su gráfica. Recordemos que si f es derivable, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ es $f'(c)$, entonces decir que la recta tangente es horizontal es decir que $f'(c) = 0$.

Teorema 6.3.1 (Teorema de Rolle.). *Sea f una función tal que*

$i)$ *f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$;*

$ii)$ *f es derivable en el intervalo abierto (a, b);*

$iii)$ $f(a) = f(b)$.

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Llamemos k al valor que toma f en a y en b, o sea $k = f(a) = f(b)$.

Si $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y la conclusión del teorema es verdadera. Si f no es constante en $[a, b]$ entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(x) > k$ ó $f(x) < k$. Como f es continua en $[a, b]$, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en puntos de $[a, b]$. Si $f(x) > k$, entonces el valor máximo de f se alcanzará en algún punto c del intervalo abierto (a, b) y ese punto será entonces un punto de máximo local. El Teorema de Fermat asegura que $f'(c) = 0$. Análogamente, si $f(x) < k$, entonces el valor mínimo de f se alcanzará en algún punto c del intervalo abierto (a, b) y ese punto será entonces un punto de mínimo local y por lo tanto $f'(c) = 0$. $\square$

Nota 6.3.1. Aunque f no sea constante, puede haber más de un punto c en el intevalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Por ejemplo si $f(x) = 4x^3 - 9x$ y $[a, b] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, como $f(-\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) = 0$ y f es un polinomio, se verifican las hipótesis del Teorema de Rolle. Además $f'(x) = 12x^2 - 9 = \left(\sqrt{12}x - 3\right)\left(\sqrt{12}x + 3\right)$, entonces si $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vale $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

Nota 6.3.2. Si no se satisface la hipótesis $i)$, puede ser falsa la conclusión del teorema. Es el caso de

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

que no es continua en $x = 1$ y $f'(c) = 1$ para todo $c \in (0, 1)$.

Nota 6.3.3. Si no se satisface la hipótesis $ii)$ puede ser falsa la conclusión del teorema. Es el caso de

$$f(x) = \sqrt{|x|},$$

que no es derivable en $x = 0$. En efecto, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $f'(c) \neq 0$ si $c \neq 0$, y $f'(0)$ no existe.

Nota 6.3.4. Si no se satisface la hipótesis $iii)$ puede ser falsa la conclusión del teorema, por ejemplo $f(x) = x$, en cualquier intervalo.

Aplicamos ahora el Teorema de Rolle para demostrar el siguiente resultado, que afirma que si f es *buena* en algún punto intermedio de la gráfica, la pendiente de la recta tangente debe coincidir con la pendiente de la recta secante que une los extremos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

Teorema 6.3.2 (Teorema del valor medio (TVM)). *Sea f una función tal que*

$i)$ *f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$;*

$ii)$ *f es derivable en el intervalo abierto (a, b).*

Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. La ecuación de la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

o

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Sea $F(x)$ la función que mide la distancia entre un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f y el correspondiente punto sobre la recta secante dada arriba, o sea

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Vemos que F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) (porque f lo es y $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ también). Además $F(a) = F(b) = 0$, por lo tanto el Teorema de Rolle nos asegura que existe un número $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$, o sea

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

y esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Ejemplo 6.3.1. Sea

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 7},$$

en el intervalo $[2, 6]$. Se verifican en dicho intervalo las hipótesis del Teorema del valor medio. Encontremos el número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{4} = -\frac{72}{5}.$$

Calculemos

$$f'(x) = \frac{(2x + 4)(x - 7) - x^2 - 4x}{(x - 7)^2}$$

$$\frac{x^2 - 14x - 28}{(x-7)^2},$$

entonces $f'(c) = -\frac{72}{5}$ si y sólo si $c^2 - 14c - 28 + \frac{72}{5}(c-7)^2 = 0$, resolvemos esta ecuación de segundo grado y obtenemos $c_1 = \sqrt{5} + 7$ y $c_2 = 7 - \sqrt{5}$. Como c_1 no pertenece al intervalo $[2, 6]$, el número buscado es c_2.

Ahora enunciamos una generalización del Teorema del valor medio

Teorema 6.3.3 (Teorema del valor medio de Cauchy.). *Sean f y g dos funciones tales que*

$i)$ *f y g son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$;*

$ii)$ *f y g son derivables en el intervalo abierto (a, b);*

$iii)$ *Para todo $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$.*

Entonces existe un z en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Nota 6.3.5. El Teorema del valor medio se deduce de éste último, tomando $g(x) = x$.

6.4. La Regla de L'Hôpital

Sabemos que si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ entonces el $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y vale $\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, con la condición de que $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$, el cociente no es acotado cerca de a y por lo tanto no existe el límite. (Podría ser en este caso, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ó $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ o ninguno de ambos), pero si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, puede existir el $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. En este caso decimos que la función $\frac{f}{g}$ tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - x - 12$ y $g(x) = x^2 - 3x - 4$, el $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - x - 12) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$. Sin embargo, numerador y denominador pueden factorizarse y obtenemos

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - x - 4} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)},$$

si $x \neq 4$, podemos simplificar el factor $(x - 4)$ y obtener

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - x - 4} = \frac{x+3}{x+1}$$

por lo tanto el
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x+1}=\frac{7}{5}.$$

Otro ejemplo de este tipo de indeterminación el $\frac{\sin x}{x}$ o los cocientes incrementales de funciones derivables.

Ahora damos un método para encontrar, si existe, el límite de una función en un número donde tiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Regla de L'Hôpital (caso 1). Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto I excepto posiblemente en un número a en I. Supongamos que para todo $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$. Entonces si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y si
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,$$
se sigue que el
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$
El resultado también vale si todos los límites son límites por derecha o si todos los límites son límites por izquierda.

Ejemplo 6.4.1. Para calcular el
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2},$$
observamos primero que $\lim_{x\to 1}(1-x+\ln(x))=0$ y que $\lim_{x\to 1}(x^3-3x+2)=0$. Entonces aplicamos la regla de L'Hôpital,
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3}.$$
Como $\lim_{x\to 1}\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0$ y $\lim_{x\to 1}(3x^2-3)=0$, aplicamos nuevamente la regla de L'Hôpital y obtenemos
$$\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{6x}=-\frac{1}{6}.$$

La demostración de la Regla de L'Hôpital es una aplicación bastante directa del Teorema del valor medio generalizado.

Regla de L'Hôpital (caso 2). Sea $N>0$. Si f y g son funciones derivables para todo $x>N$ y tal que para todo $x>N$, $g'(x)\neq 0$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ y si
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Este resultado también es válido si reemplazamos “$x \to +\infty$” por “$x \to -\infty$”.

Ejemplo 6.4.2. El

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \cos(\frac{1}{x}) = 1.$$

Notamos que esto no es nuevo, ya que si llamamos $u = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0^-} \frac{\sin(u)}{u}$, y ya sabemos que este límita vale 1.

Otras formas indeterminadas

Supongamos ahora que queremos determinar si existe el

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(3x)}.$$

No podemos aplicar el teorema del límite del cociente porque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec^2(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec^2(3x) = +\infty$. En este caso decimos que la función tiene una indeterminación de la forma $(\frac{\pm\infty}{+\infty})$. También vale la regla de L'Hôpital para este tipo de indeterminaciones y también para indeterminaciones $(\frac{-\infty}{-\infty})$, $(\frac{\pm\infty}{-\infty})$, $(\frac{-\infty}{+\infty})$. Tenemos los dos resultados siguientes (también conocidos como regla de L'Hôpital).

Regla de L'Hôpital (caso 3). Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto I excepto posiblemente en un número a en I. Supongamos que para todo $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$. Entonces si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ y si

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

se sigue que el

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

El resultado también vale si todos los límites son límites por derecha o si todos los límites son límites por izquierda.

Ejemplo 6.4.3. El

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = -\infty.$$

Regla de L'Hôpital (caso 4). Sea $N > 0$. Si f y g son funciones derivables para todo $x > N$ y tal que para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$ y si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Este resultado también es válido si reemplazamos "$x \to +\infty$"por "$x \to -\infty$".

Ejemplo 6.4.4. El

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

6.5. Funciones crecientes y decrecientes

Definición 6.5.1. Una función f definida en un intervalo I se dice *creciente* sobre I si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ cada vez que $x_1 < x_2$ con x_1 y x_2 en I.

Por ejemplo, $f(x) = x$ es creciente en cualquier intervalo I, en cambio $f(x) = x^2$ es creciente en cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, pero no es creciente por ejemplo en $(-2, 1)$, en efecto $-1 < 0$ pero $f(-1) = 1 > f(0) = 0$. Las gráficas de este tipo de funciones ascienden a medida que nos movemos con la abscisa hacia la derecha.

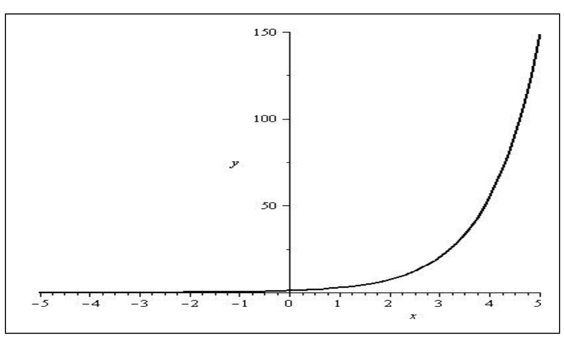


Figura 6.5: Función creciente

Análogamente tenemos la siguiente definición:

Definición 6.5.2. Una función f definida en un intervalo I se dice *decreciente* sobre I si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ cada vez que $x_1 < x_2$ con x_1 y x_2 en I.

Por ejemplo $f(x) = x^2$ es decreciente en cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Las gráficas de este tipo de funciones descienden a medida que nos movemos con la abscisa hacia la derecha.

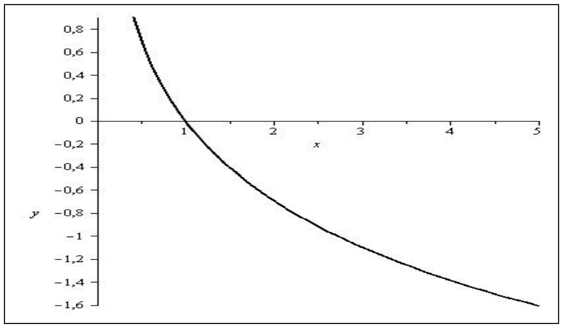


Figura 6.6: $f(x) = -\ln(x)$

Si una función f es o bien creciente o bien decreciente en un intervalo I, decimos que f es *monótona* en I.

Ya vimos que dada una función f, ella puede ser creciente en algunos intervalos y decreciente en otros. Por ejemplo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ tiene una gráfica aproximada así

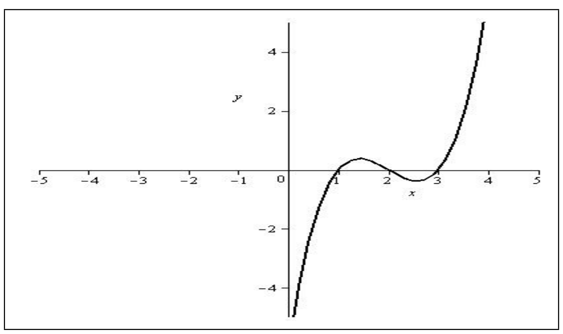


Figura 6.7: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Nos interesa determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de funciones. Si miramos las gráficas, vemos que en los intervalos de crecimiento, las pendientes de las curvas son positivas y en los de decrecimiento, son negativas.

Teorema 6.5.3. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b);*

i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$, *ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es decreciente en $[a,b]$.*

Demostración. Demostraremos la parte $i)$, la $ii)$ es análoga. Supongamos entonces que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, sean x_1 y x_2 dos números en $[a,b]$ con $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Del teorema del valor medio se deduce que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $x_1 < x_2$ resulta el denominador $x_2 - x_1 > 0$. También por hipótesis reulta $f'(c) > 0$. Entonces el numerador $f(x_2) - f(x_1)$ debe ser positivo, o sea $f(x_2) > f(x_1)$. Esto demuestra que f es creciente en $[a,b]$. $\square$

Nota 6.5.1. Sea f una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y sea c un punto con $a < c < b$ tal que $f'(x) > 0$ si x pertenece a algún intervalo de la forma $(d,c) \subset [a,b]$ y $f'(x) < 0$ si x pertenece a algún intervalo de la forma $(c,e) \subset [a,b]$. Del teorema anterior deducimos que f es creciente en $[d,c]$ y decreciente en $[c,e]$, por lo tanto f tiene un máximo local en el punto c. Por ejemplo,

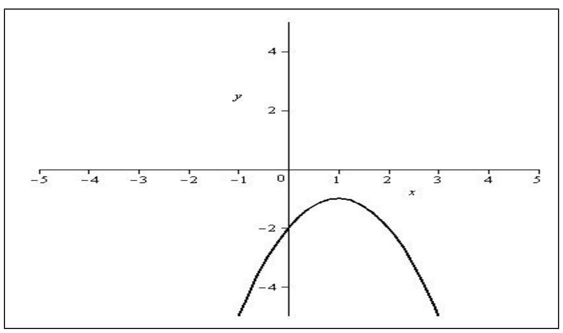


Figura 6.8: Máximo local

Si en cambio $f'(x) < 0$ si x pertenece a algún intervalo de la forma $(d,c) \subset [a,b]$ y $f'(x) > 0$ si x pertenece a algún intervalo de la forma $(c,e) \subset [a,b]$, deducimos que f es decreciente en $[d,c]$ y creciente en $[c,e]$, por lo tanto f tiene un mínimo local en el punto c. Por ejemplo,

Ejemplo 6.5.1. Sea

$$f(x) = 2x\sqrt{3-x},$$

El dominio de f es $(-\infty, 3]$, por otro lado, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ por lo tanto f no tiene puntos de mínimo absoluto. Buscamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los puntos de máximos y mínimos locales.

$$f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \frac{x}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}},$$

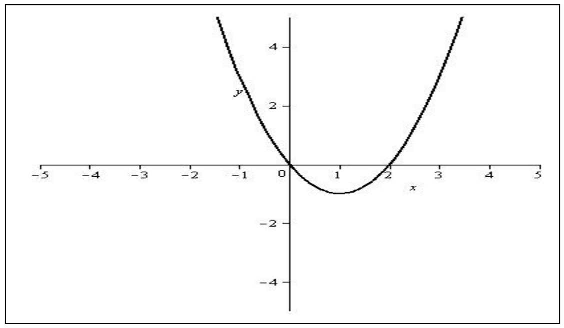


Figura 6.9: Mínimo local

entonces $f'(x) > 0$ si y sólo si $6 - 3x > 0$, o sea $x < 2$. Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 2]$ y decreciente en $[2, 3]$ lo que implica que $x = 2$ es un punto de máximo local de f, donde toma el valor $f(2) = 4$. Como $f(3) = 0$, resulta $x = 2$ un punto de máximo absoluto de f. La gráfica es aproximadamente,

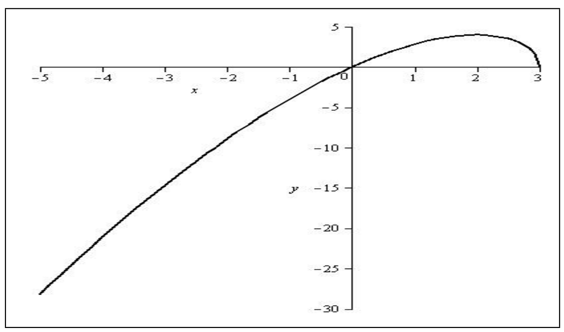


Figura 6.10: $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$

6.6. Concavidad y puntos de inflexión

Si una función es creciente en un intervalo puede tener esta forma

o esta forma

.

Para distinguir estos dos comportamientos, nos fijamos que en la primera, la gráfica de f queda por encima de las rectas tangentes en cada punto y en la segunda, queda por debajo.

Definición 6.6.1. Sea f derivable en un intervalo I. Si la gráfica de f está arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, se dice que f es *cóncava hacia arriba en I*. Si la gráfica queda por debajo de todas sus tangentes en un intervalo I, se dice que f es *cóncava hacia abajo en I*.

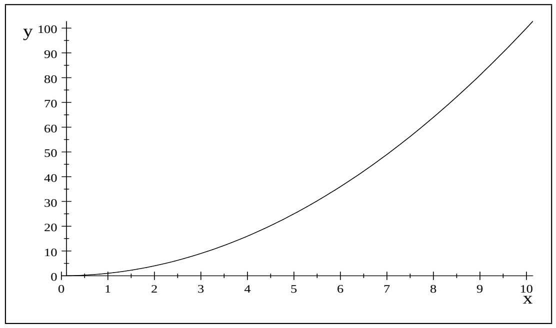


Figura 6.11: Función creciente

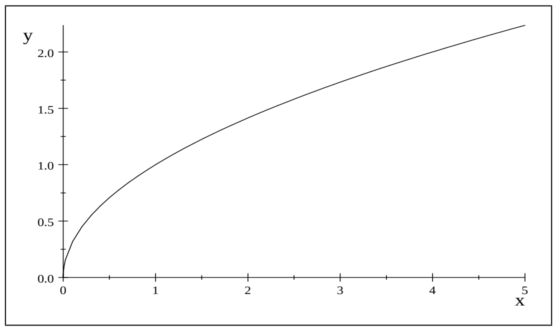


Figura 6.12: Función creciente

Veremos que la segunda derivada nos ayuda a determinar la concavidad en un intervalo.

Prueba de concavidad Sea f con derivadas segundas en un intervalo I.

a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es *cóncava hacia arriba en* I.

b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es *cóncava hacia abajo en* I.

Demostración. Queremos ver que dado cualquier punto x_0 en el intervalo I entonces la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ queda por debajo de la gráfica de f, o sea que

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x) \tag{6.1}$$

para todo x en I, $x \neq x_0$. Ahora, como $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f' es creciente en I. Tomemos primero $x > x_0$. El TVM aplicado al intervalo $[x_0, x]$ dice que existe c en (x_0, x) tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$$

(pues $(x - x_0) > 0$ y $f'(c) > f'(x_0)$). Por lo tanto, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Si $x < x_0$, aplicamos el TVM al intervalo $[x, x_0]$ y obtenemos nuevamente la desigualdad (6.1).

La demostración de la parte $b)$ es completamente análoga. $\square$

Definición 6.6.2. Sea f continua en un intervalo I, y derivable en I salvo quizás en un punto x_0 de I. El punto $P = (x_0, f(x_0))$ se llama punto de inflexión de f si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa.

Por ejemplo $f(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ pues $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$.

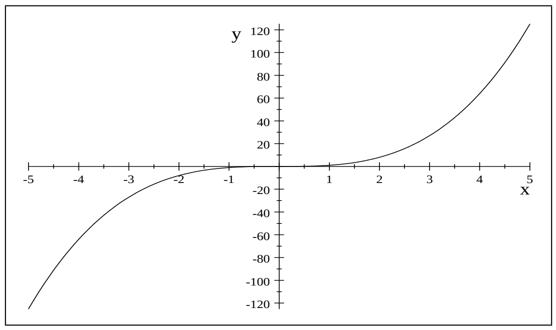


Figura 6.13: $f(x) = x^3$

Si una curva tiene una tangente en un punto de inflexión, la recta tangente cruza a la curva allí. De acuerdo con la prueba de la concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde f'' cambia de signo.

Ejemplo 6.6.1. Sea $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. Determinemos dónde es cóncava hacia abajo, dónde es cóncava hacia arriba y encontrar los puntos de inflexión.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x\left(x^2 - 2\right) = 4x\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) \tag{6.2}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8 = 12\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 4\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Entonces en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ f'' es positiva y por lo tanto f es cóncava hacia arriba, en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ f'' es negativa y entonces f es cóncava hacia abajo y en el intervalo $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$ f'' vuelve a ser positiva y por lo tanto f es cóncava hacia arriba. Entonces los puntos $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{9}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{9}\right)$ son puntos de inflexión.

Ya vimos que una forma de detectar si un punto crítico es máximo local o mínimo local es estudiar los signos de f' a la izquierda y a la dercha del punto. Ahora veremos otra forma, que involucra a la derivada segunda, f''.

Teorema 6.6.3 (Prueba de la derivada segunda)**.** *Si f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c.*

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ entonces c es un punto de mínimo local de f.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ entonces c es un punto de máximo local de f.

Demostración. a) Si $f''(c) > 0$, como f'' es continua en algún intervalo I que contiene a c, debe ser $f''(x) > 0$ para todo x de dicho intervalo. La prueba de concavidad nos dice que entonces f es cóncava hacia arriba en I, por lo tanto la gráfica de f está por encima de la recta tangente por el punto $(c, f(c))$, que es horizontal por hipótesis. Por lo tanto $f(x) > f(c)$ para todo x de I y entonces c es punto de mínimo local de f.

b) se demuestra de manera análoga. □

Ejemplo 6.6.2. Sea $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$, como en el 6.6.1. Encontremos los máximos y mínimos locales. De (6.2) obtenemos que los puntos críticos de f son $x = 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. Como $f''(0) = -8 < 0$ y $f''(\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) = 16 > 0$, resulta que $x = 0$ es un punto de máximo local y los puntos $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ son de mínimo local.

Si $f'(c) = f''(c) = 0$, hay que analizar la situación caso por caso. Podemos estar en presencia de un mínimo local, como es el caso de $f(x) = (x-2)^4$ y $c = 2$, de un máximo local como por ejemplo $f(x) = -x^4$ y $c = 0$, o ninguna de las dos situaciones anteriores, por ejemplo $f(x) = (x-1)^3$ y $c = 1$.

Ejemplo 6.6.3. Sea $f(x) = x(x-1)^3$. Para encontrar los extremos locales, primero calculamos

$$f'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1).$$

Los puntos críticos son entonces, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 1$. Para saber si son máximos o mínimos locales, aplicamos el test de la derivada segunda. Calculamos primero

$$f''(x) = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = (x-1)(12x-6),$$

como $f''(c_1) = -3$, sabemos que $c_1 = \frac{1}{4}$ es un punto de máximo local. Como $f''(c_2) = 0$, hay que analizarlo de otro modo. Observamos que $f(0) = 0$, además si $0 < x < 1$, $f(x) < 0$ y si $x > 1$, $f(x) > 0$. Entonces $c_2 = 0$ no es punto de máximo local ni de mínimo local.

La gráfica aproximada se muestra en la Figura 6.14.

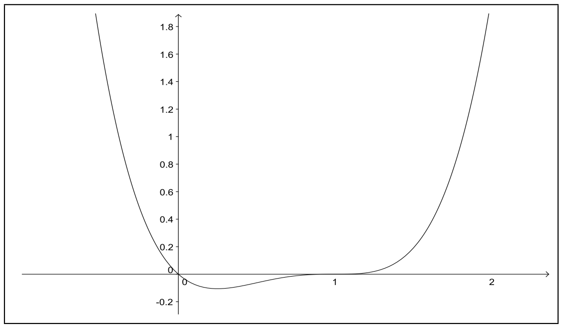


Figura 6.14: $f(x) = x(x-1)^3$.

Ejemplo 6.6.4. Dada $f(x) = x^{2/5}(4-x)^{\frac{1}{5}}$, queremos realizar una gráfica aproximada de f. En primer lugar, vemos que el dominio de f es $(0,4)$. Esto es porque los exponentes fraccionarios están definidos sólo si la base es positiva.

Observamos además que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0,$$

pero $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,4)$. Luego f no posee mínimos absolutos en su dominio.

Para $x \in (0,4)$, la derivada y la derivada segunda de f están dadas por

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}(4-x)^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{2/5}(4-x)^{-\frac{4}{5}} = \frac{8-3x}{5(4-x)^{\frac{4}{5}}x^{\frac{3}{5}}}$$

$$f''(x) = -\frac{2(3x^2-16x+48)}{25x^{\frac{8}{5}}(4-x)^{\frac{9}{5}}}$$

Se puede ver que la expresión $(3x^2 - 16x + 48)$ en el numerador de f'' es siempre positivo, por lo tanto el signo de f'' es negativo en $(0,4)$. Por otra parte, f' se anula en $x_0 = \frac{8}{3}$ por lo cual f tiene un máximo en x_0. Se ve además que $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha, por lo cual f es creciente en $(0, 8/3)$ y decreciente en $(8/3, 4)$.

Ya tenemos todos los componentes necesarios para dibujar la gráfica de una función f bastante aproximada.

En general, al graficar una función a partir de una fórmula debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

$A)$ El dominio de f y las asíntotas horizontales y verticales.

$B)$ La posible paridad o imparidad de f.

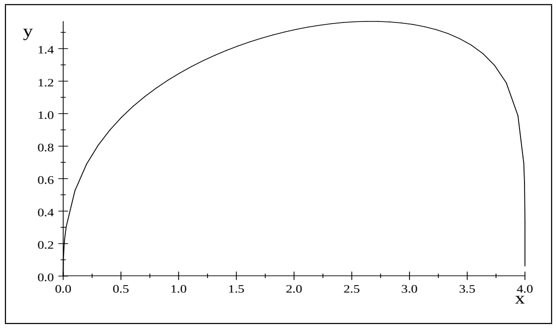


Figura 6.15: $f(x) = x^{2/5}\,(4-x)^{\frac{1}{5}}$

$C)$ La posible periodicidad de f.

$D)$ La intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados.

$E)$ Los puntos críticos de f.

$F)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$G)$ Los intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo de f.

$H)$ Los máximos y mínimos locales de f.

$I)$ Los puntos de inflexión de f.

Ejemplo 6.6.5. Sea
$$f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}.$$
Tracemos la gráfica aproximada de f. Observamos que f es par, el $domf = \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $f(0) = 1$ y la gráfica de f no corta al eje x.Además

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

por lo tanto las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Por otro lado

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1,$$

entonces la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

Calculamos ahora
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right) = -\frac{4}{(x^2-1)^3}\left(3x^2+1\right)$$

vemos que el único punto crítico es $x = 0$ y hacemos el cuadro de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Intervalo	f'	f
$(-\infty, -1)$	negativa	decrece
$(-1, 0)$	negativa	decrece
$(0, 1)$	positiva	crece
$(1, \infty)$	positiva	crece

entonces $x = 0$ es punto de mínimo local de f.

Para estudiar la concavidad, calculamos

$$f''(x) = \frac{4\,(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$$

entonces f no tiene puntos de inflexión y el signo de f'' es el del denominador

Intervalo	f''	f
$(-\infty, -1)$	negativa	cóncava hacia abajo
$(-1, 1)$	positiva	cóncava hacia arriba
$(1, \infty)$	negativa	cóncava hacia abajo

Vemos que efectivamente $f''(0) > 0$ y entonces $x = 0$ es punto de mínimo local de f.

Entonces la gráfica es aproximadamente (Ver Figura 6.16)

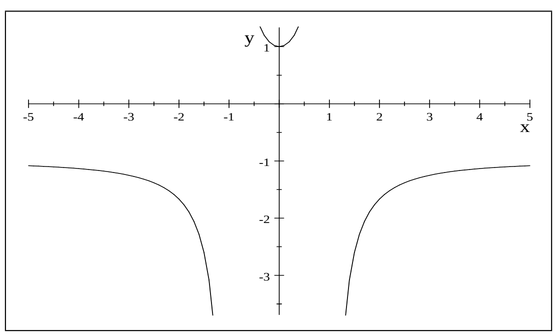


Figura 6.16: $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$

Ejemplo 6.6.6. Dada

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}.$$

tracemos la gráfica aproximada de f.

En este caso el dominio de f son todos los números reales, f es periódica, de período 2π, por lo tanto la dibujamos en el intervalo $[0, 2\pi]$ y después copiamos esta gráfica en los intervalos congruentes. Si $f(x) = 0$ entonces $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}$, además $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$.

Calculamos ahora las derivadas

$$f'(x) = -\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Entonces $f'(x) = 0$ si $x = x_1 = \pi + \frac{\pi}{6}$ o $x = x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$. Hacemos el cuadro de intervalos de crecimiento y decrecimiento

Intervalo	f'	f
$(0, x_1)$	negativa	decrece
(x_1, x_2)	positiva	crece
$(x_2, 2\pi)$	negativa	decrece

por lo tanto x_1 es punto de mínimo local y x_2 es punto de máximo.local de f.

Ahora

$$f''(x) = -\frac{2(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3},$$

que se anula en $x_3 = \frac{\pi}{2}$ y $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, entonces tenemos el siguiente cuadro

Intervalo	f''	f
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	negativa	cóncava hacia abajo
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	positiva	cóncava hacia arriba
$\left(\frac{2\pi}{2}, 2\pi\right)$	negativa	cóncava hacia abajo

por lo tanto x_3 y x_4 son puntos de inlexión y verificamos que como $f''(x_1) > 0$ x_1 es punto de mínimo local de f y como $f''(x_2) < 0$ x_2 es punto de máximo local de f.

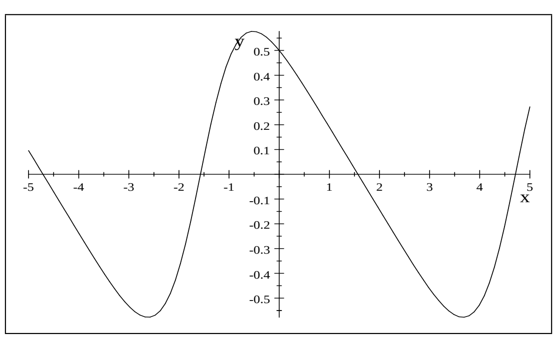


Figura 6.17: $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

También se usa esta ténica de encontrar máximos y minimos de funciones, para resolver diversos tipos de problemas.

Ejemplo 6.6.7. Se va a construir una ventana Norman (un rectángulo rematado con un semicírculo). Si el perímetro es de $3m.$, ¿qué dimensiones deberá tener la ventana para admitir máxima luz?

Se desea maximizar el área de dicha ventana. Si llamamos b a la base del rectángulo y h a su altura, entonces b es el diámetro del semicírculo, o sea $b = 2r$, donde con r denotamos el radio. Entonces el área

$$A = bh + \pi r^2 = bh + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

como sabemos que el perímetro es de $3m$, entonces

$$3 = b + 2h + \pi r = b + 2h + \pi\frac{b}{2}$$

de donde despejamos h y obtenemos

$$h = \frac{1}{2}\left(3 - b - \pi\frac{b}{2}\right),$$

reemplazamos ahora este valor de h en la fórmula del área

$$A\left(b\right) = b\frac{1}{2}\left(3 - b - \pi\frac{b}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -b^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}b.$$

Como queremos maximizar esta función de b, la derivamos

$$A'\left(b\right) = -2b\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

por lo tanto $A'(b) = 0$ si

$$b = \frac{6}{\pi + 4}.$$

Observamos que el b buscado debe estar en el intervalo $[0, 3]$, donde la función $A(b)$ es continua y por lo tanto tiene máximo y mínimo. Como $A(0) = 0$ $A(3) = -\frac{9\pi}{8} < 0$ y $A\left(\frac{6}{\pi+4}\right) = \frac{9}{2(\pi+4)}$, este último es el valor máximo del área buscado, por lo tanto la ventana debe tener una base de $\frac{6}{\pi+4}m$ y una altura de $\frac{3}{\pi+4}m$.

Capítulo 7

Integración

7.1. Introducción

Uno de los problemas que fueron objeto de estudio en la matemática desde los comienzos de la historia ha sido el cálculo de áreas. Determinar el área encerrada por un círculo, por una elipse, o por una curva cerrada en general ha sido motivo de numerosas investigaciones e invenciones de procedimientos de cálculo que sirvieron al avance de esta ciencia.

La forma natural de aproximar un área es descomponiendo la figura en formas geométricas más simples cuyas áreas sean conocidas yuxtaponiéndolas de forma de cubrir lo mejor posible la superficie a medir, y después *integrarlas* para determinar el área total o al menos tener una buena aproximación de la misma. Este método de cálculo fue utilizado para calcular el área encerrada entre el gráfico de una función positiva y el eje x y dio origen al llamado *cálculo integral*. Así, dada una curva $y = f(x)$ con f positiva, se trata de aproximar el área en cuestión por rectángulos de base cada vez menor con base sobre el eje x y altura próxima al valor de la función en ese intervalo. Esta definición puede extenderse a funciones más generales, dando lugar a lo que se conoce como *integral definida* de una función.

Pero uno de los descubrimientos más significativos de la matemática relativos al cálculo integral fue su íntima conexión con el cálculo diferencial, conexión que queda plasmada principalmente en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo: *si* $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *es una función cuya derivada es* f*, entonces la integral definida de* f *entre* a *y* b *es* $F(b) - F(a)$.

Iniciamos este capítulo definiendo la primitiva o antiderivada de una función, la integral indefinida, sus propiedades y algunas técnicas para el cálculo de primitivas. Esto servirá, juntamente con los teoremas fundamentales, al cálculo de integrales definidas y del área encerrada entre curvas.

7.2. Antiderivada o primitiva de una función

En los capítulos anteriores hemos tratado la noción de derivada de una función f. Así por ejemplo, sabemos que la derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ es la función $f'(x) = 6x$, y que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es la función $f'(x) = \cos(x)$.

Consideremos ahora el problema inverso: dada una función f, ¿es posible encontrar una función F tal que $F'(x) = f(x)$? Podemos encontrar varios ejemplos en que esto es posible:

- Si $f(x) = 6x$, entonces $F(x) = 3x^2$ verifica $F'(x) = f(x)$.
- Si $g(x) = \cos(x)$, entonces $G(x) = \operatorname{sen}(x)$ cumple $G'(x) = g(x)$.

La existencia de estos ejemplos nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 7.2.1. Sea f una función definida en un intervalo I. Decimos que F es una *antiderivada* o *primitiva* de f si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nota 7.2.1. En esta definición consideraremos la derivada a izquierda o derivada a derecha, según corresponda, en caso que el intervalo I sea cerrado en alguno de sus extremos.

Ahora bien, sabemos que la derivada de una función es única, lo cual se deduce de la unicidad del límite. Sin embargo la unicidad de la *antiderivada* o *primitiva* de una función no es válida, como lo demuestran los siguientes ejemplos:

- Si $f(x) = 6x$, entonces $F(x) = 3x^2$ y $G(x) = 3x^2 + 1$ son primitivas de f.
- Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $G(x) = \operatorname{sen}(x) - 3$ son primitivas de f.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $F(x) = e^x$ y $G(x) = e^x + e$ son primitivas de f.

Es fácil ver que si F es una primitiva de f, entonces $G(x) = F(x) + c$ también es primitiva de f cualquiera sea la constante c. Esto es porque la derivada de una función constante es 0, y por ende $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Los siguientes dos teoremas nos muestran la recíproca de esta propiedad.

Teorema 7.2.2. *Si h es una función diferenciable en un intervalo I, y $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = c$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Consideremos un punto x_0 en I, y sea c el valor de h en x_0. Es decir, $c = h(x_0)$. Queremos probar que $h(x) = c$ para todo x en I. Si esto no fuera cierto, existiría un punto $x_1 \in I$ tal que $h(x_1) \neq c$. A su vez, como h es diferenciable, por el Teorema del Valor Medio existe un punto x_2 en el intervalo $[x_0, x_1]$ tal que

$$h'(x_2) = \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como la expresión del miembro derecho de esta igualdad es distinto de cero, esto dice que $h'(x_2) \neq 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $h'(x) = 0$ en todo el intervalo.

Por lo tanto, para todo $x \in I$ se cumple que $h(x) = c$. □

El Teorema 7.2.2 muestra que si la derivada de una función es 0, entonces la función es constante. Este resultado es útil para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 7.2.3. *Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces toda antiderivada G de f en I es de la forma $G(x) = F(x) + c$, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. En efecto, consideremos F y G dos antiderivadas de f en I, es decir, $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Entonces la función $h(x) = G(x) - F(x)$ verifica $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$ y por lo tanto, por el Teorema 7.2.2 debe ser $h(x) = c$ para todo $x \in I$. Esto equivale a decir que $G(x) - F(x) = c$ para todo $x \in I$, y en consecuencia

$$G(x) = F(x) + c;$$

para todo $x \in I$. □

Ejemplo 7.2.1. Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una antiderivada de f y todas las antiderivadas de f son de la forma $G(x) = \operatorname{sen}(x) + c$ para alguna constante c.

Si $f(x) = 6x$, entonces $F(x) = 3x^2$ es una antiderivada de f, y todas las antiderivadas de f son de la forma $G(x) = 3x^2 + c$, para alguna constante c.

Definición 7.2.4 (Integral indefinida)**.** Sea f una función definida en un intervalo I. Se llama *integral indefinida* de f al conjunto de todas las antiderivadas de f, y se simboliza

$$\int f(x)\, dx.$$

Si F es una antiderivada de f, entonces $\int f(x)\, dx$ es el conjunto de todas las funciones de la forma $G(x) = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, y se denota

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c.$$

Notemos entonces que $\int f(x)\, dx$ no es una función sino un conjunto infinito de funciones primitivas de f de la forma $F(x) + c$. Particularmente, si $a \in I$ y queremos hallar la primitiva G tal que $G(a) = b$, planteamos $F(a) + c = b$ y concluimos

$$G(x) = F(x) + (b - F(a)).$$

Ejemplo 7.2.2. Sabemos que $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$. Para determinar la primitiva G de f tal que $G(1) = 3$, planteamos $F(1) + c = 3$:

$$1^2 + c = 3,$$

de donde resulta $c = 2$. Luego $G(x) = x^2 + 2$ es la primitiva de f tal que $G(1) = 3$.

7.2.1. Cálculo de integrales indefinidas

En la siguiente lista calculamos algunas integrales indefinidas para algunas funciones más conocidas.

1. $$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad \text{para } n \neq -1.}$$

   Esto se deduce de que para todo $n \neq -1$ la derivada de $F(x) = x^{n+1}$ es $F'(x) = (n+1)x^n$.

2. $$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c.}$$

   Esta propiedad se deduce de lo siguiente. Si consideramos la función $F(x) = \ln(|x|)$ para $x \neq 0$, entonces F está definida por la fórmula

   $$F(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Tenemos que F es derivable para todo $x \neq 0$ y además

   $$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

   es decir que $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Por lo tanto $F(x) = \ln(|x|)$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. Para las funciones exponenciales se cumple que:

   $$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + c} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0.}$$

4. Para las funciones trigonométricas seno y coseno:

   $$\boxed{\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c}$$

7.2.2. Propiedades de la integral indefinida

A partir de las propiedades de la derivada, podemos concluir varias propiedades de la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int 0\,dx = c$, ya que la derivada de una constante es 0.
2. $\displaystyle\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
   $\displaystyle\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$
3. Si k es una constante, entonces $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

Estas propiedades nos permiten calcular integrales indefinidas de otras funciones. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7.2.3. Por la propiedad de suma de integrales indefinidas, si tomamos $f(x) = e^x + x^2 + 3$, entonces

$$\int \left(e^x + x^2 + 3\right)\,dx = \int e^x dx + \int x^2 dx + \int 3\,dx = e^x + \frac{x^3}{3} + 3x + c.$$

Ejemplo 7.2.4. Dado que $\operatorname{sen}(x)$ es una primitiva de $\cos(x)$, entonces

$$\int 2\cos(x)\,dx = 2\int \cos(x)\,dx = 2\operatorname{sen}(x) + c.$$

Ejemplo 7.2.5. La integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{x} - 4x + e^x$ es

$$\int \left(\frac{1}{x} - 4x + e^x\right)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 4\int x\,dx + \int e^x\,dx = \ln(|x|) - 2x^2 + e^x + c.$$

7.2.3. Método de sustitución

Al derivar una composición de funciones aplicamos la *regla de la cadena*:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x).$$

Esta fórmula nos permite calcular la primitiva de una función que puede expresarse de la forma $h(x) = f'(g(x))\,g'(x)$.

Teorema 7.2.5. *Sean $f : (d,e) \mapsto \mathbb{R}$ y $g : (a,b) \mapsto (d,e)$ funciones tales que g es diferenciable. Si F una primitiva de f en (d,e), entonces $F\circ g$ es una primitiva de $h(x) = f(g(x))\,g'(x)$. Esto es*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

Demostración. Debemos demostrar que

$$\frac{d}{dx}\,(F(g(x))+c)=f(g(x))\,g'(x).$$

Pero esto se deduce de la regla de la cadena para la derivación, y del hecho que $F'(x)=f(x)$:

$$(F\circ g)'(x)=F'(g(x))\,g'(x)=f(g(x))\,g'(x).$$

□

De esta manera, para calcular la integral indefinida de una función del tipo $f(g(x))g'(x)$ es suficiente con conocer la antiderivada de f, digamos F, y calcular $F(g(x))$. Este método se denomina frecuentemente *método de sustitución*, ya que para calcular

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx,$$

se sustituye

$$u=g(x),\qquad\qquad du=g'(x)\,dx,$$

y resulta entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+c=F(g(x))+c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de este método.

Ejemplo 7.2.6. Para calcular

$$\int 2\operatorname{sen}(x^2)x\,dx$$

tomamos $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=x^2$. Vemos que $g'(x)=2x$, por lo cual se trata de calcular $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Así aplicamos la sustitución

$$u=x^2,\qquad\qquad du=2x\,dx,$$

y resulta

$$\int 2\operatorname{sen}(x^2)x\,dx=\int \operatorname{sen}(u)\,du=-\cos(u)+c=-\cos(x^2)+c.$$

Ejemplo 7.2.7. Para calcular la integral indefinida

$$\int e^{3x}\,dx,$$

tomamos $f(x)=e^x$ y $g(x)=3x$. Sustituimos

$$u=3x,\qquad\qquad du=3\,dx,$$

y multiplicamos y dividimos por 3:

$$\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}\,3\,dx=\frac{1}{3}\int e^{u}\,du=\frac{1}{3}e^{3x}+c.$$

Ejemplo 7.2.8. Para calcular $\int \cot(x)\,dx$, notamos que $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. Como $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$, hacemos la sustitución

$$u = \operatorname{sen}(x), \qquad du = \cos(x)\,dx,$$

y entonces

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + c = \ln(|\operatorname{sen}(x)|) + c.$$

7.2.4. Integración por partes

Si f y g son funciones diferenciables en un intervalo I, entonces el producto de ellas $f\,g$ es diferenciable en I y se cumple que

$$(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x). \tag{7.1}$$

Esta fórmula nos permite, en algunos casos, facilitar el cálculo de la integral indefinida de una función del tipo $f(x)\,g'(x)$.

Teorema 7.2.6. *Si f' y g' son continuas, entonces*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) + \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Demostración. En efecto, si f' y g' son continuas entonces f y g son diferenciables. Así, de la fórmula (7.1) tenemos que

$$\int (f\,g)'(x)\,dx = \int f(x)\,g'(x) + \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Como $f\,g$ es una primitiva de $(f\,g)'$, y de las propiedades de la integral indefinida para suma de funciones concluimos que

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

□

La fórmula (7.2) es conocida como *fórmula de integración por partes*, y se utiliza normalmente siguiendo la siguiente notación: Dada la integral

$$\int f(x)g'(x)\,dx,$$

llamamos

$$u = f(x), \qquad v = g(x), \qquad dv = g'(x)\,dx, \qquad du = f'(x)\,dx.$$

Así la fórmula (7.2) se traduce en

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

En caso que $\int v\,du$ sea una integral fácil de calcular, esta fórmula simplifica el cálculo de $\int u\,dv$.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación del método de integración por partes.

Ejemplo 7.2.9. Para calcular

$$\int x\cos(x)\,dx,$$

podemos tomar

$$u = x, \qquad v = \mathrm{sen}(x), \qquad dv = \cos(x)\,dx, \qquad du = dx.$$

Entonces

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = x\ \mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)\,dx$$

Dado que $-\cos(x)$ es una primitiva de $\mathrm{sen}(x)$, concluimos que

$$\int x\cos(x)\,dx = x\ \mathrm{sen}(x) + \cos(x) + c.$$

En efecto, si derivamos $F(x) = x\ \mathrm{sen}(x) + \cos(x)$, obtenemos

$$F'(x) = \mathrm{sen}(x) + x\cos(x) - \mathrm{sen}(x) = x\cos(x).$$

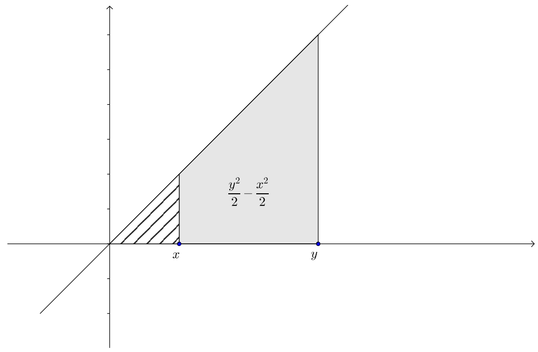
7.3. Integral definida

7.3.1. Introducción

En esta sección estudiaremos un método para calcular el área encerrada entre el gráfico de una función y el eje x.

Consideremos por ejemplo la función $f(x) = x$, y calculemos el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[0,3]$. De la fórmula del área de un triángulo, un medio de la base por la altura, obtenemos que este área es $\frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$. Si ahora consideramos un intervalo de la forma $[0,x]$, obtendremos que el área es $\frac{x^2}{2}$, y si es el intervalo $[x,y]$, con $0 < x < y$, el área es $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$.

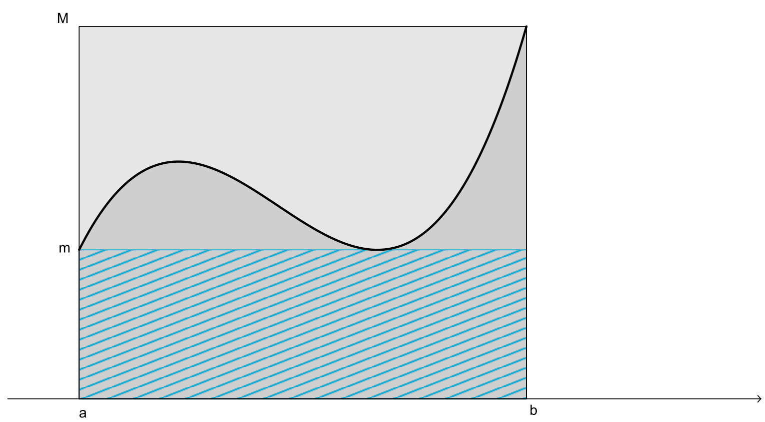
Ahora bien, si consideramos la función $g(x) = x^2 + 1$, y queremos calcular el área bajo la curva en el intervalo $[-2,2]$, el cálculo del área no es tan simple. Una forma de aproximar el valor de esta área es cubriendo la región lo mejor posible con rectángulos, y estimar el área como la suma de las áreas de dichos rectángulos.



7.3.2. Sumas de Riemann

Consideremos una función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Por el Teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M en dicho intervalo. Así, si A es el área bajo la curva de f es claro que

$$m\,(b - a) \leq A \leq M\,(b - a).$$



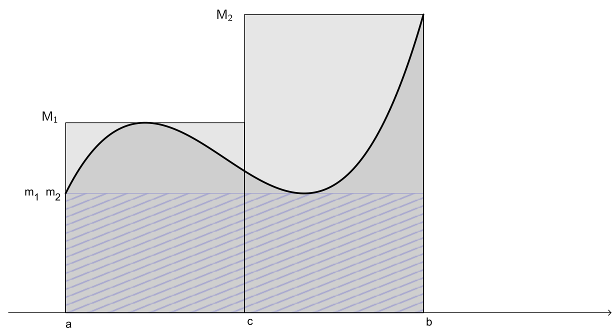
Si ahora subdividimos el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos, digamos $I_1 = [a, c]$, $I_2 = [c, d]$, nuevamente podemos asegurar que f alcanza valores mínimos m_1 y m_2 y valores máximos M_1 y M_2 en los intervalos I_1, I_2 respectivamente. Esto nos permite tener una mejor aproximación del área A,

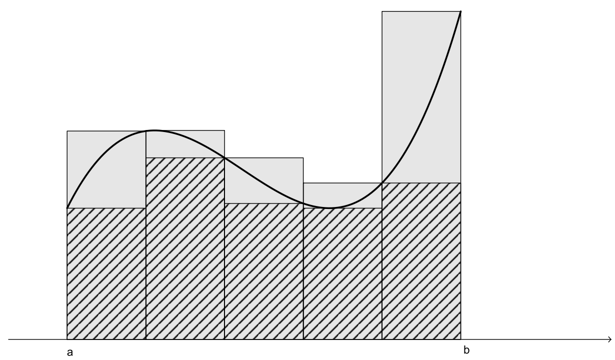
$$m_1\,(c - a) + m_2\,(b - c) \leq A \leq M_1\,(c - a) + M_2\,(b - c)$$

Este procedimiento puede repetirse subdividiendo el intervalo en varios intervalos yuxtapuestos, de manera de obtener aproximaciones al área A cada vez mejores.

Así, dado el intervalo $[a, b]$, consideramos puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b.$$





El conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se llama una *partición* de $[a, b]$. Denotamos con $\Delta_k(P)$ a la longitud del k-ésimo intervalo: $\Delta_k(P) = x_k - x_{k-1}$, y denotaremos $\Delta(P)$ al máximo de estas longitudes. El número $\Delta(P)$ se llama *longitud de la partición P*.

Si m_k denota el valor mínimo que alcanza f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y M_k denota al valor máximo en el mismo intervalo, llamamos *suma inferior de f con respecto a la partición P* a la cantidad

$$s(P) = m_1\Delta_1(P) + m_2\Delta_2(P) + \cdots + m_n\Delta_n(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k(P).$$

Análogamente, llamamos *suma superior de f con respecto a P* a la cantidad

$$S(P) = M_1\Delta_1(P) + M_2\Delta_2(P) + \cdots + M_n\Delta_n(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta_k(P).$$

De esta manera tenemos que, si A es el área debajo de la curva de f, entonces

$$s(P) \leq A \leq S(P).$$

Definición 7.3.1. Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, se define el *área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$* como

$$A = \lim_{\Delta(P)\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k(P) \right). \tag{7.3}$$

La fórmula (7.3) indica que el área bajo la curva está definida como un límite de sumas inferiores de la función f, entendiendo por límite que la longitud de la partición es cada vez menor. Así, diremos que A es el área bajo la curva f en el intervalo $[a,b]$, si cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$s(P) - \epsilon \leq A \leq s(P) + \epsilon.$$

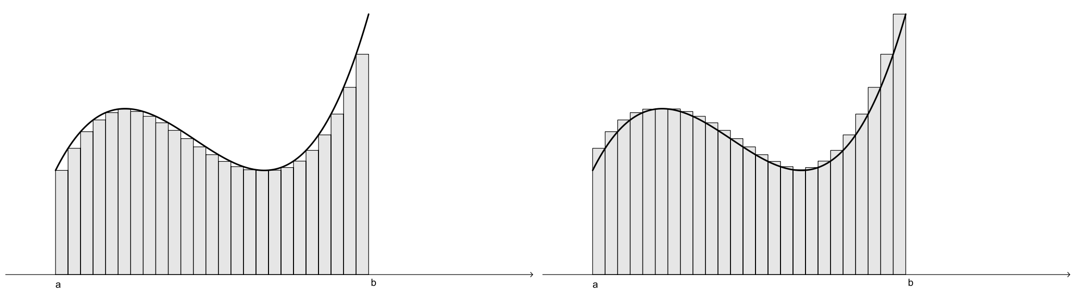


Figura 7.1: Suma inferior y suma superior de f

Se puede demostrar que si en la definición se utilizan sumas superiores en lugar de inferiores, el límite obtenido es el mismo número A.

Definición 7.3.2 (Integral definida)**.** Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. La *integral definida de f en $[a,b]$* se denota $\int_a^b f(x)\,dx$ y está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P) \right),$$

Los números a y b se llaman *límite inferior* y *límite superior* de integración.

Ejemplo 7.3.1. Sea $f : [-2,3] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2$. Entonces para cualquier partición P tendremos que $m_k = 2$. Por lo tanto,

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2)\,(x_k - x_{k-1}) = (2)\,(3 - (-2)) = 10.$$

Ejemplo 7.3.2. Para calcular la integral definida de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, podemos tomar particiones de la forma

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1,$$

es decir, $x_k = \frac{k}{n}$. Así tenemos que $\Delta(P) = \frac{1}{n}$, y dado que f es creciente entonces alcanza el mínimo en el extremo izquierdo de cada subintervalo:

$$m_k = \left(\frac{k-1}{n} \right)^2.$$

Luego se tiene que

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2.$$

Si ahora tomamos el límite para $\Delta(P) \to 0$, es decir para $n \to \infty$, y usamos la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6},$$

podemos concluir que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

La noción de integral definida puede extenderse a funciones que tienen un número finito de discontinuidades en un intervalo $[a,b]$ y son acotadas en dicho intervalo. La condición de ser *acotada* significa que existan números M y m tales que

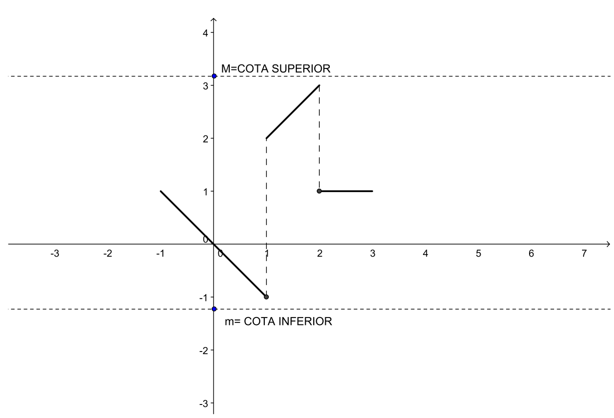
$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo $x \in [a,b]$, sin que necesariamente f alcance los valores m o M. En tal caso, decimos que M es una cota superior de f y m es una cota inferior. En particular, f puede tomar valores negativos.

Ejemplo 7.3.3. La función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases} ,$$

tiene dos puntos de discontinuidad, en $x = 1$ y en $x = 2$, y está acotada por $m = -1$ y $M = 3$. También podríamos decir que está acotada por los valores $m = -10$ y $M = 10$. Así -1 y -10 son cotas inferiores y 3 y 10 son cotas superiores.



Ejemplo 7.3.4. La función $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua sólo en $x = 0$, pero no está acotada superiormente ni inferiormente.

Es claro que si una función está acotada superiormente en $[a, b]$, entonces existe más de una cota superior. Sin embargo, se puede probar que existe una cota superior mínima, y a este valor mínimo se lo llama *supremo* de f en $[a, b]$. Análogamente, a la mayor de las cotas inferiores se la denomina *ínfimo* de f en $[a, b]$.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces el supremo y el ínfimo coinciden con el valor máximo y mínimo respectivamente. En cambio, si f tiene un número finito de discontinuidades y es acotada, puede ser que no alcance un valor máximo o un valor mínimo, aunque siempre es posible determinar un supremo y un ínfimo de f. Así, en el Ejemplo 7.3.3, el ínfimo de f es -1 y el supremo de f es 3. Notemos que f nunca alcanza el valor 3, aunque sí alcanza el valor -1.

Consideremos entonces una función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, acotada y con un número finito de discontinuidades. Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, sean m_k y M_k el ínfimo y el supremo de $f(x)$ en el subintervalo. Llamaremos suma inferior $s(P)$ y suma superior $S(P)$ de f con respecto a la partición P a las cantidades

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P), \qquad S(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P).$$

Con esta generalización de la definición de suma inferior y suma superior también es posible probar que

$$\lim_{\Delta(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P) = \lim_{\Delta(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k(P),$$

de donde tiene sentido dar la siguiente definición de integral definida.

Definición 7.3.3. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función acotada y con un número finito de discontinuidades. Llamamos *integral definida* de f en $[a, b]$ al número

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P).$$

7.3.3. Propiedades de la integral definida

La siguiente definición es conveniente para generalizar las propiedades de la integral definida:

Definición 7.3.4. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Entonces se define

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 7.3.5 (Propiedades de la integral definida)**.** *Sean f y g funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. Entonces se cumple que:*

1. *Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

2. *Si c es un número real, entonces*

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. $$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. *Si d es un número real, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$$

asumiendo que las dos integrales de la derecha existen.

5. *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

7.3.4. Teoremas Fundamentales del Cálculo

La definición de integral definida no da precisamente un método simple de calcularla, ya que sería necesario tomar particiones cada vez más finas y estimar el límite de las sumas inferiores.

Sin embargo, existe una interesante conexión entre la integral definida de una función f y las primitivas de f que permite hacer el cálculo de manera exacta. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3.5. Sea $f(x) = x$, y consideremos la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para $x > 0$. Esto es, F es la función que para cada x determina la integral definida de f en el intervalo $[0, x]$. Para esta f en particular, notemos que $F(x)$ mide el área de un triángulo con base x y altura x, por lo cual

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Una primera observación es que esta función F resulta ser una primitiva de f.

Por otra parte, el área bajo la curva f entre dos puntos a y b es la diferencia entre las áreas de los correspondientes triángulos, es decir

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Así, la integral definida resulta ser la diferencia entre los valores de la primitiva evaluada en los extremos del intervalo.

El Ejemplo 7.3.5 ilustra lo enunciado por los siguientes teoremas:

Teorema 7.3.6 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, y sea F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Entonces F es una antiderivada de f en $[a,b]$, esto es,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Teorema 7.3.7 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, y sea G una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a). \tag{7.4}$$

En el Teorema 7.3.6 entendemos que $F'(a)$ y $F'(b)$ corresponden a la derivada por derecha en a y por izquierda en b respectivamente. A la fórmula (7.4) se la denomina *Regla de Barrow*, y se utiliza la notación

$$G(x)|_a^b = G(b) - G(a).$$

Ejemplo 7.3.6. La función $G(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$. Por lo tanto,

$$\int_{-1}^2 t^2\,dt = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Ejemplo 7.3.7. La función $F(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$ es una primitiva de $f(x) = \cos(x)$. Luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,dt = (\operatorname{sen}(x)+1)|_{-\pi}^{\pi} = (\operatorname{sen}(\pi)+1) - (\operatorname{sen}(-\pi)+1) = 0.$$

Notemos que para aplicar la Regla de Barrow es requisito que f sea una función continua. En el caso más general en que f es acotada y con un número finito de discontinuidades, podemos aplicar el siguiente teorema:

Teorema 7.3.8. *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, y sea $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo x excepto quizás en un punto $c \in [a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Notemos que la función $h(x) = f(x) - g(x)$ cumple que $h(x) = 0$ excepto quizás en c. Además podemos suponer que $h(x) \geq 0$, o de lo contrario tomamos $-h$. Basta probar que entonces que $\int_a^b h(x)\,dx = 0$.

En efecto, en cualquier partición P de $[a,b]$ habrá a lo sumo dos subintervalos a los que pertenece c, y en cualquiera de ellos el valor ínfimo de $h(x)$ será 0. Luego

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta_k(P) = 0.$$

Luego, como $f(x) = g(x) + h(x)$ para todo $x \in [a,b]$ se sigue que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$, también se cumple que $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. En efecto, tomamos $c \in (a,b)$ y por el Teorema 7.3.8 y la propiedad de aditividad de la integral resulta

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, podemos tomar una partición $P = \{a = c_0, c_1, \ldots, c_N = b\}$ de modo que los puntos de discontinuidad sean elementos de P. Por la propiedad de aditividad de la integral definida tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{N-1}}^b f(x)\,dx.$$

Supongamos ahora que para cada subintervalo $[c_{k-1}, c_k]$ existe una función continua f_k que coincide con f en el intervalo abierto (c_{k-1}, c_k). Entonces, por el Teorema 7.3.8 tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{N-1}}^b f_N(x)\,dx.$$

La importancia de esta fórmula es que para cada subintervalo es posible aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y así facilitar el cálculo de la integral de f en $[a, b]$.

Ejemplo 7.3.8. Sea f la función del Ejemplo 7.3.3:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}.$$

Para calcular la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ tomamos los intervalos $[-1, 1]$, $[1, 2]$ y $[2, 3]$. Así f coincide con las funciones $f_1(x) = -x$ en $(-1, 1)$, con $f_2(x) = x + 1$ en $(1, 2)$ y con $f_3(x) = 1$ en $(2, 3)$. Como f_1, f_2 y f_3 son continuas en los respectivos subintervalos cerrados, tenemos que

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x)\,dx + \int_{1}^{2} x + 1\,dx + \int_{2}^{3} 1\,dx = 0 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Hemos visto los métodos de sustitución y de integración por partes para determinar la integral indefinida de determinadas funciones. Estos métodos, junto con lo enunciado por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo justifican los siguientes enunciados.

7.3.5. Método de sustitución

Teorema 7.3.9 (Método de sustitución para la integral definida)**.** *Sean* $f : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ *y* $g : [a, b] \mapsto [c, d]$ *tales que* f *y* g' *son continuas en su dominio. Entonces*

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F *es una primitiva de* f *entonces*

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Ejemplo 7.3.9. Calculemos la integral

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+2)^3}.$$

Haciendo la sustitución

$$u = x + 2, \qquad du = dx,$$

y teniendo en cuenta que $u : [-1, 3] \mapsto [1, 5]$, tenemos que

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+2)^3} = \int_{1}^{5} \frac{du}{u^3} = -\left.\frac{1}{2u^2}\right|_{1}^{5} = -\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{2}\right) = \frac{24}{50}$$

Ejemplo 7.3.10. Para calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx,$$

aplicamos la sustitución

$$u = x^2+1, \qquad du = 2x\,dx.$$

Observamos que $u : [1,2] \mapsto [2,5]$, y por lo tanto

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_2^5 \frac{1}{u}\,du = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

7.3.6. Método de integración por partes

Teorema 7.3.10. *Sean f y g funciones diferenciables en $[a,b]$ tales que f' y g' tienen un número finito de discontinuidades en $[a,b]$. Entonces*

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3.11. Para calcular la integral definida

$$\int_{-1}^1 x\,e^x\,dx,$$

podemos aplicar integración por partes tomando

$$u = x, \quad du = dx, \qquad\qquad dv = e^x\,dx, \quad v = e^x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x\,e^x\,dx &= \int_{-1}^1 u\,dv = x\,e^x\big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x\,dx \\ &= e - (-e^{-1}) - e^x\big|_{-1}^1 = e + e^{-1} - (e - e^{-1}) = \frac{2}{e}\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3.12. Para calcular la integral definida

$$\int_1^e \ln(x)\,dx,$$

tomamos

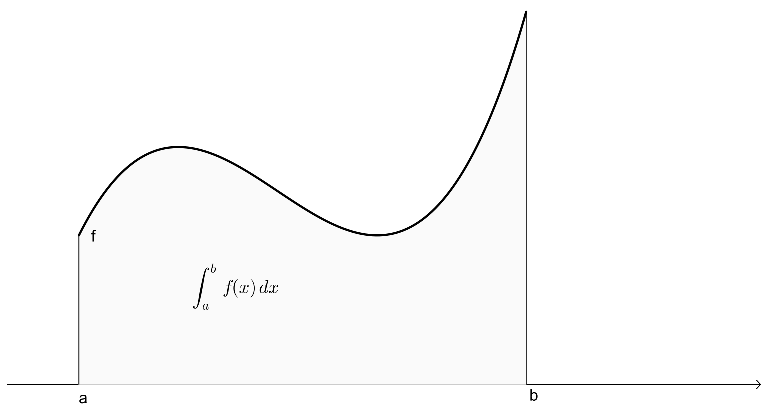
$$u = \ln(x),\ du = \frac{1}{x}\,dx, \qquad v = x,\ dv = dx.$$

Así resulta:

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,dx &= \int_1^e u\,dv = \ln(x)\,x\Big|_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= \ln(e)\,e - \ln(1) - \int_1^e dx = e-(e-1) = 1.\end{aligned}$$

7.4. Áreas entre gráficas de funciones

Si f es una función no negativa, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ nos permite calcular el área encerrada entre la gráfica de f, el eje x y las dos rectas verticales $x=a$ y $x=b$:



Si quisiéramos calcular el área encerrada por una función g negativa en $[a,b]$, el eje x y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, podemos considerar $f=-g$ y calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -g(x)\,dx.$$

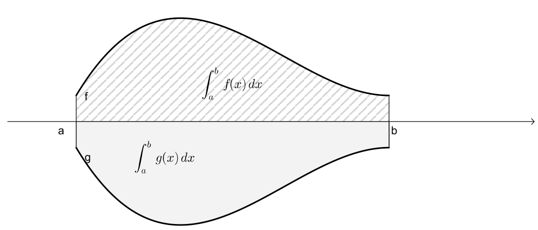


Figura 7.2: Área para g negativa

Si ahora consideramos dos funciones f y g, acotadas y con un número finito de discontinuidades de $[a,b]$, y tales que $f(x)\geq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, tiene sentido calcular el área encerrada entre las gráficas de f y g y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$: ver Figura 7.3.

Si $f(x)\geq g(x)$ en $[a,b]$ y ni f ni g cambian de signo, pueden ocurrir alguno de los siguientes casos:

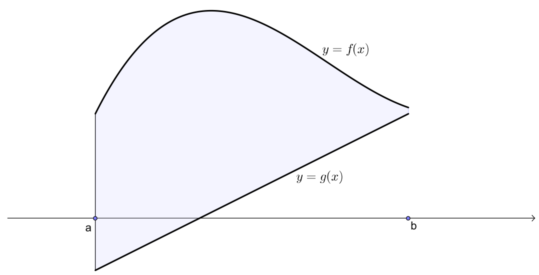


Figura 7.3: Área entre dos gráficas

1. Si $g(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área entre las dos gráficas es la diferencia entre el área bajo f y el área bajo g:
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$
2. Si $g(x) \leq 0$ y $f(x) \geq 0$, entonces el área entre las dos gráficas es la suma del área entre el eje x y f y el área entre el eje x y g:
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (-g(x))\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$
3. Si $f(x) \leq 0$, entonces el área entre las dos gráficas es la diferencia entre el área comprendida entre el eje x y g y el área entre el eje x y f:
$$\int_a^b (-g(x))\,dx - \int_a^b (-f(x))\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Si f o g cambian de signo dentro del intervalo $[a, b]$, podemos subdividir el intervalo en subintervalos donde se verifiquen algunas de las tres propiedades y luego aplicar la propiedad aditiva de la integral definida.

Definición 7.4.1. Sean f y g funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, b]$, tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área comprendida entre los gráficos de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Ejemplo 7.4.1. Para calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^3}{2}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$, observamos que en el intervalo $[-1, 1]$ se cumple que $f(x) \geq g(x)$ (ver Figura 7.4). Luego el área es igual a
$$\int_{-1}^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^1 x^2 - \frac{x^3}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^1 - \left.\frac{x^4}{8}\right|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3}.$$

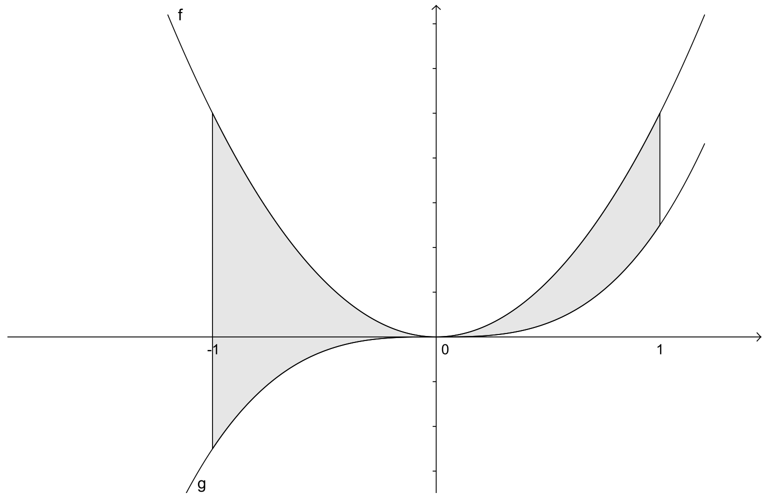


Figura 7.4: Área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3/3$ en el intervalo $[-1, 1]$

En algunos casos puede ocurrir que las gráficas de f y g se intersequen en dos o más puntos. En tal caso se considera a y b como los puntos donde f y g coinciden: $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.4.2. Para calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$, notamos que las gráficas de estas funciones se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2)$. Esto es, $f(0) = g(0)$ y $f(2) = g(2)$. Además, en el intervalo $[0, 2]$ se cumple que $f(x) \geq g(x)$. Entonces, el área encerrada entre ambas gráficas es

$$\int_0^2 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^2 2x - x^2\,dx = x^2 \mid_0^2 - \frac{x^3}{3} \mid_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

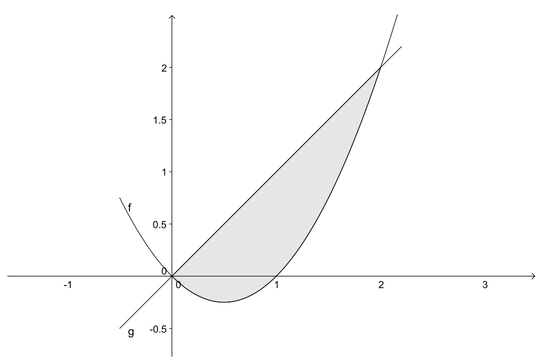


Figura 7.5: Área entre $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - x$

Ejemplo 7.4.3. Sean $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Entonces $f(x) \leq g(x)$ en $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y $g(x) \leq f(x)$ en $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Por lo tanto, el área A encerrada por estas curvas en dicho intervalo es:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\ dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\ dx \\
&= (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))|_{-3\pi/4}^{\pi/4} + (-\cos(x) - \operatorname{sen}(x))|_{\pi/4}^{5\pi/4} \\
&= \left(\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\right) - \left((-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

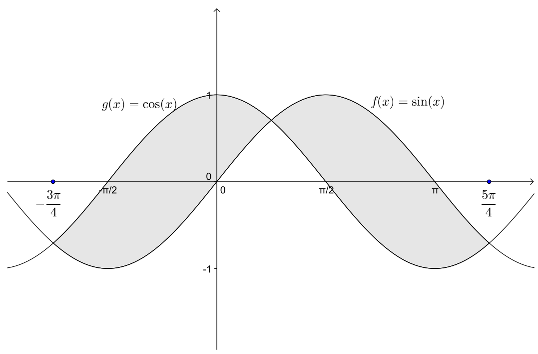


Figura 7.6: Área entre sen y $\cos$

El siguiente ejemplo muestra el cálculo del área comprendida entre el gráfico de tres funciones.

Ejemplo 7.4.4. Consideremos las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = 1$. Para calcular el área encerrada por las gráficas observamos que f y g se cortan en el punto $(-1, 0)$, g y h se cortan en $(0, 1)$ y f y h se cortan en el punto $(\sqrt{2}, 1)$, Así, para determinar el área entre las tres curvas

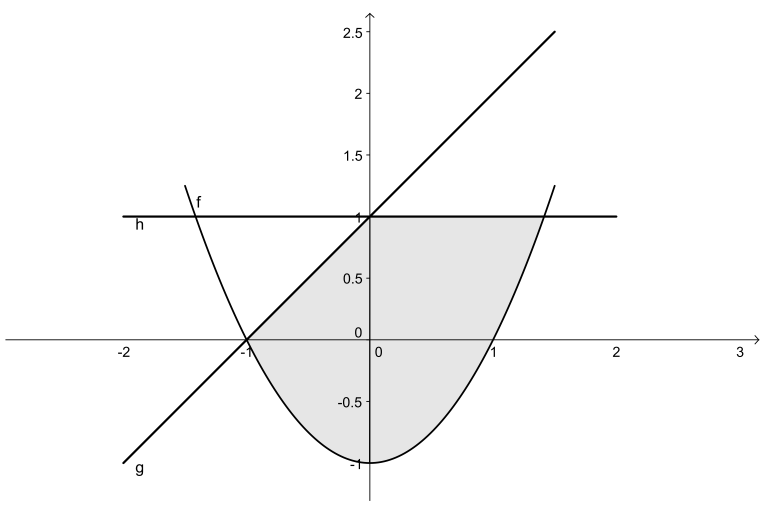


Figura 7.7: Área entre tres funciones

calculamos el área entre f y g en el intervalo $[-1, 0]$ y luego el área entre g y h en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$, notando que la gráfica de f queda por debajo de las gráficas de g y h en ambos intervalos. El área comprendida entre las tres gráficas es entonces

$$\int_{-1}^{0}(x+1)-(x^2-1)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}1-(x^2-1)\,dx=\int_{-1}^{0}x+2-x^2\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}2-x^2\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{2}}=-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)+\left(2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{7}{6}+\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$