Sucesiones

Definición: una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y cuya imagen está incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tq $1\mapsto a(1)\doteq a_1$, $2\mapsto a(2)\doteq a_2$, y en general $n\mapsto a(n)\doteq a_n$.

Notación: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$

Ejemplos

① $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n$

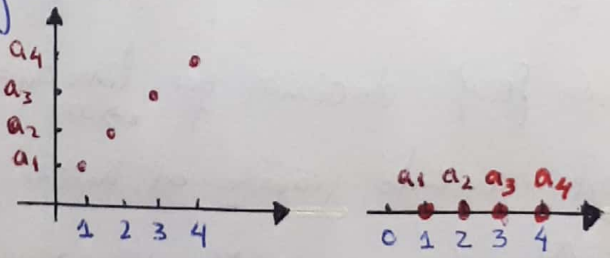
② $\{-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}$, $\{(-1)^n\}$, $a_n = (-1)^n$

③ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}$, $a_n = \frac{1}{n}$

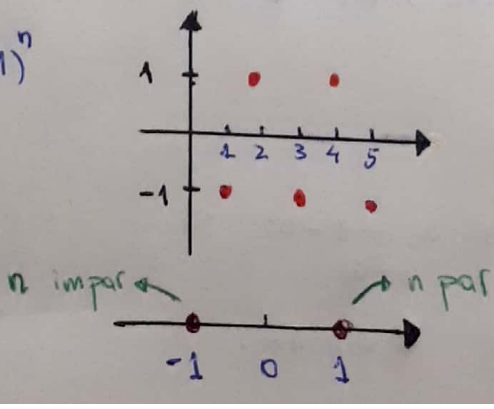
④ Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la restricción de f a $\mathbb{N}$ define una sucesión.

Observación: una sucesión $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función ó como un conjunto de números reales.

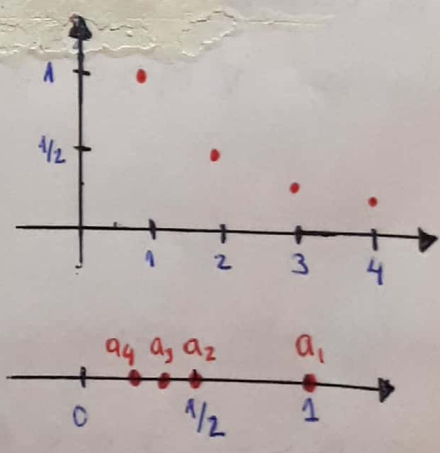
① $a_n = n$



② $a_n = (-1)^n$



③ $a_n = \frac{1}{n}$

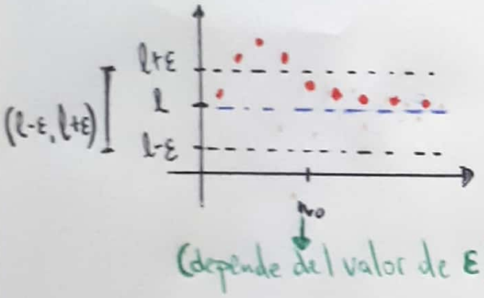


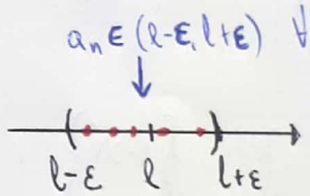
Definición: una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ si los términos a_n se acercan a l tanto como queramos al hacer n suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 .$$

- Recordemos que $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Gráficamente $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$



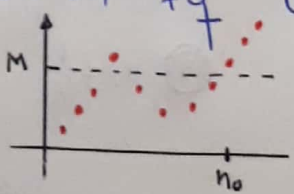


Ejemplo: Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Luego, como $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Entonces, basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Definición: dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande. Esto es, $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_n > M \ \forall n \geq n_0$.



Análogamente, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si

$$\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } a_n < K \quad \forall n \geq n_0 .$$

Definición: Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l \in \mathbb{R}$ (o sea $l \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a l. En los demás casos decimos que diverge.

Ejemplo: Decida si la sucesión dada converge o diverge.

1. $a_n = \frac{1}{n}$. Recién vimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ converge a 0.

2. $a_n = n$. Como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ (Probarlo usando la definición) $\Rightarrow \{n\}$ diverge.

3. $a_n = (-1)^n$. Como $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe (alterna entre 1 y -1) $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge.

Observación: Se puede demostrar que si el límite existe, entonces es único.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c\,a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(iv) Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Ejemplos:

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \underset{(iv)}{\overset{\text{No puedo usar}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n} = \frac{2}{1} = 0.$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(1+7/n^3)} = 0 \cdot 1 = 0.$

Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones).

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Ejemplo: calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$, con $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

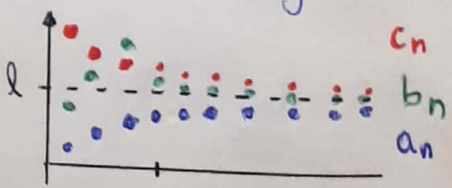
Sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, para $x>0$. Tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

y como $f(n) = a_n$ $\forall n \geq 1 = n_0$ $\Rightarrow$ por Teorema $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Observación: NO es cierto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces cualquier función f tal que $f(n) = a_n$ cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (este límite puede NO existir).

Por ejemplo, si $a_n = \text{sen}(\pi n)$ $(=0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ es claro que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim_{x\to\infty} \text{sen}(\pi x)$ no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones). Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.



Ejemplos:

① Encontrar $l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2(n)}{n}$. Tenemos que $0 \leq \cos^2(n) \leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y por lo tanto $0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$. Sean $a_n = 0$ y $c_n = \frac{1}{n}$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos^2(n)}{n} = 0$.

② Hallar $l = \lim \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$. Tenemos que $\frac{-1}{n^3} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Luego, como $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, por T. Sandwich $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3} = 0$.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Ejemplos

① Probar que la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ converge a 0.

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual $|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1}{n}$.

Luego como $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por el Teorema anterior $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

② ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

- Analicemos primero el caso $r > 0$.

Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$ y además $\ln(r) \begin{cases} > 0 & \text{si } 1 < r \\ < 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

Luego, sea $f(x) = r^x$. Tenemos que $r^n = f(n)$ y como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

entonces por teorema $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r & \text{(I)} \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1. & \text{(II)} \end{cases}$

Por otra parte,

- si $r = 1$, $r^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$. (III)
- si $r = 0$, $r^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (IV)

- Ahora consideramos el caso $r < 1$
  - Si $r \in (-1, 0) \Rightarrow 0 < |r| < 1$ y por (II) $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \therefore$ por Teo. anterior $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
  - Si $r = -1$, $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene límite para $n \to \infty$.
  - Si $r < -1$, r^n no tiene límite cuando $n \to \infty$

Conclusión

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{diverge en los otros casos.} \end{cases}$$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tq $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y f una función continua en $x=a$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \quad \left(= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)$.

Ejemplos

① Calcule el límite de la sucesión $\{e^{1/n}\}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $f(x) = e^x$ es continua en $x=0$, entonces por teorema

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1.$$

② Calcule el límite de la sucesión $\{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\}$.

Primero notemos que $n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}$.

Tomamos $a_n = \frac{1}{n}$; sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (o sea $a=0$ en el teorema).

Elegimos $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Tenemos que f es cont. en $x=0$ ya que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 = f(0).$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \underset{\substack{\text{Aplico el} \\ \text{teorema}}}{=} f(a) = f(0) = 1.$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

- creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$;
- estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;
- decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$;
- estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Si $\{a_n\}$ es creciente y decreciente, decimos que es monótona.

Ejemplos:

① $\{n\}$. Como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$, $\{n\}$ es estrictamente creciente.

② $\{\ln(n)\}$. Sabemos que $f(x) = \ln(x)$ es estrictamente creciente, por lo tanto
$n < n+1 \Rightarrow a_n = \ln(n) < \ln(n+1) = a_{n+1}$. Luego $\{\frac{1}{n}\}$ es estric. crec.

③ $\{1,1,2,2,3,3,\dots\}$. Como $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ es creciente.

④ $\{\frac{1}{n}\}$. Tenemos que $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. O sea, $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$
y entonces $\{\frac{1}{n}\}$ es estrictamente decreciente.

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

(i) acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) acotado superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

① $\{\frac{1}{n}\}$. Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotado (puedo tomar $M=1$).

② $\{-n\}$. Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ es acotado sup. pero no inf.

③ $\{n+3\}$. Como $4 \leq n+3$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{n+3\}$ es acotado inf. pero no sup.

Escaneado con CamScanner

Observación: en la definición anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$.

- Análogamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.
- Notar que las cotas sup. e inf. NO son únicas.
  Por ejemplo si $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores.

Axioma de completitud de los números reales.

Todo conjunto no vacío de números reales que es acotado sup. tiene una menor cota sup. en $\mathbb{R}$ y todo conjunto no vacío de número reales que es acotado inf. tiene una mayor cota inf. en $\mathbb{R}$.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Si A es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de A y la denotamos $\sup(A)$.
- Si A es acot. inf, la mayor cota inferior se llama ínfimo de A y la denotamos $\inf(A)$.

Además, si $\sup(A) \in A$, decimos que es el máximo de A y
si $\inf(A) \in A$, decimos que es el mínimo de A.

Ejemplo: Pensemos a las siguientes sucesiones como conjuntos de números reales, entonces

1. $\{\frac{1}{n}\} = A$. $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$ y A no tiene máximo ni mínimo.
2. $\{-n\} = B$. $\sup(B) = -1$, y -1 es el máximo. B no tiene ínfimo y $\therefore$ No tiene mínimo.
3. $\{(-1)^n\} = C$. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = -1$. Además 1 es el max. de C y -1 el mínimo de C.
4. $\{n+3\} = D$. $\inf(D) = 4$, y 4 es el mínimo de D. Además D no tiene supremo y por lo tanto no tiene máximo.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada.

Observación: La recíproca es falsa, o sea, $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow$ convergente

Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$.

Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 = \inf(\{a_n\})$

Observación: se puede demostrar que si $\{a_n\}$ es creciente entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Análogamente, si $\{a_n\}$ es decreciente, entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Subsucesiones

- Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos extraer de esta otras sucesiones descartando algunos término (quizás una cantida infinita). Cada una de estas nuevas sucesiones se llama subsucesión de $\{a_n\}$.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \dots\}$. Podemos extraer las siguientes subsucesiones

- $\{-1, -1, -1, \dots\}$ (términos impares)
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ (términos pares)
- $\{-1, -1, -1, \frac{1}{4}, -1, -1, -1, \frac{1}{7}, \dots\}$

Definición: una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$.

$$a_1 \to a_{n_1},\ n_1 = 1 \qquad a_3 \to a_{n_2},\ n_2 = 3 \qquad a_5 \to a_{n_3},\ n_3 = 5$$

- Notar que $\{a_{n_j}\}$ es una sucesión, o sea podemos escribir $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$.

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límite son iguales.

Ejemplo: Dado $\{\frac{1}{n}\}$, tenemos que $\{\frac{1}{2j+1}\}$ es una subsucesión. (Otra forma de escribirlo $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n_j} = \frac{1}{2j+1}$). Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$.

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión No tiene límite: basta encotrar dos subsucesionés distintas que converjan a a distintos límites.

Ejemplo: Sea $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Luego $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_k} = (-1)^{2k+1}$ son dos subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore \{a_n\}$ no tiene límit o sea diverge.

Teorema (Bolzano - Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Observación: puede haber más de una subsucesión convergente

$$\text{Si } \{a_n\} = \{-1, \tfrac{1}{2}, -1, \tfrac{1}{3}, -1, \tfrac{1}{4}, \dots\} \Rightarrow \begin{array}{l} b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \\ c_k = a_{2k+1} = \{-1, -1, -1, \dots\} \end{array}$$

Son ambas sucesiones convergentes.