Álgebra/Álgebra II
Clase 2 - Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

FAMAF / UNC

27 de agosto de 2020

En este archivo introduciremos el espacio $\mathbb{R}^n$ y las operaciones "suma" de vectores, "multiplicación por escalares" y "producto escalar".

Estas diapositivas estan basadas en la Secciones 1.1 y 1.2 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales.

Definición 1.1.1

El espacio de dimensión n (o n-dimensiónal) es

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

es decir el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces.

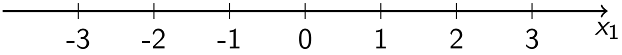
Definición 1.1.1

A un elemento $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ lo llamaremos vector, vector de coordenadas o n-upla, y a cada valor x_i lo llamaremos coordenada i-esima de v.

Si $n = 1$, 2 ó 3 estos espacios son la recta real, el plano o el espacio tridimensional.

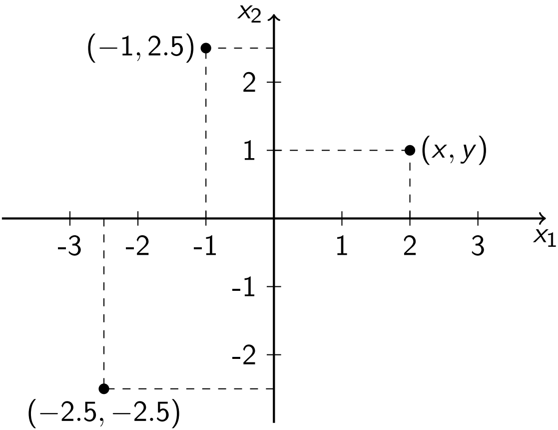
Representación gráfica de $\mathbb{R}^1$

En este caso sólo omitimos el supraíndice, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.



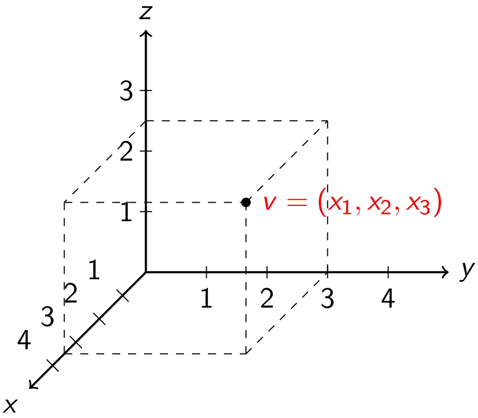
Representación gráfica de $\mathbb{R}^2$ (el plano)

Cualquier punto del plano es determinado por un par ordenado de números (x_1, x_2) ó (x, y)



Representación gráfica de $\mathbb{R}^3$ (el espacio tridimensional)

Para determinar un punto en el esapcio tridimensional necesitamos tres coordenadas (alto, ancho, profundidad)



Para $n \geq 4$ se hace difícil (¿imposible?) visualizar estos espacios.

Pero si tienen aplicaciones. Por ejemplo, una cuarta dimensión podría representar el tiempo.

Carl Sagan en la clásica serie "Cosmos" da una explicación muy interesante de como podemos pensar/imaginar un espacio de dimensión 4 Link

Aplicaciones. Ejemplo en $\mathbb{R}^6$.

El ministerio de economía quiere representar la inversión anual en 6 ramas de la industria: 1. acero, 2. automotriz, 3. productos agrícolas, 4. productos químicos, 5. indumentaria y 6. transporte.

Se puede representar esta situación por una 6-upla donde cada coordenada representa la inversión anual de las industrias correspondientes.

Por ejemplo, si la 6-upla correspondiente al año 2019 es

$$(1200, 700, 600, 300, 900, 250),$$

significa que la industria del acero invirtió 1200 en ese año, la automotriz 700, etc.

Notemos que si las inversiones en los años 2018 y 2019 fueron

$$\begin{array}{ccc} 2018 & \to & (1000, 800, 550, 300, 700, 200) \\ 2019 & \to & (1200, 700, 600, 300, 900, 250) \end{array}$$

Las inversiones totales, por rubro, en los dos años fueron:

$$(1000, 800, 550, 300, 700, 200) + (1200, 700, 600, 300, 900, 250) =$$
$$= (1000 + 1200, 800 + 700, 550 + 600, 300 + 300, 700 + 900, 200 + 250)$$
$$= (2200, 1500, 1350, 600, 1600, 450).$$

Por lo que es natural y de utilidad introducir la suma de vectores...

1 Objetivos

2 Álgebra lineal en $\mathbb{R}^n$

- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar
- La base canónica

3 Producto escalar

- Vectores ortogonales

4 Conclusiones

Definición 1.1.2

Si $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

es decir sumamos "coordenada a coordenada".

Ejemplo

En $\mathbb{R}^5$ tenemos que

$$\begin{aligned}(1,2,3,4,5) + (6,7,8,9,0) &= (1+6, 2+7, 3+8, 4+9, 5+0)\\ &= (7,9,11,13,5)\end{aligned}$$

Propiedades

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ satisface que

1. Es asociativa:

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

2. Es conmutativa:

$$v + w = w + v \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

3. El vector $0 = (0, \ldots, 0)$, es el elemento neutro:

$$v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

4. El vector $-v = (-x_1, \ldots, -x_n)$ es el opuesto de $v = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

Estas propiedades son consecuencias de las propiedades análogas de la suma de números reales. Pues la suma de vectores es coordenada a coordenada y las coordenadas son números reales.

Por ejemplo, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow u + (v + w) &= (u_1, \ldots, u_n) + \Big((v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n)\Big) \\
&\overset{\text{Definición de +}}{=} (u_1, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \\
&\overset{\text{Definición de +}}{=} \Big(u_1 + (v_1 + w_1), \ldots, \overset{u}{v_n} + (v_n + w_n)\Big) \\
&\overset{\text{asoc + en R}}{=} \Big((u_1 + v_1) + w_1, \ldots, (v_n + v_n) + w_n\Big) \\
&\overset{\text{Definición de +}}{=} (u_1 + v_1, \ldots, v_n + v_n) + (w_1, \ldots, w_n) \\
&\overset{\text{Definición de +}}{=} \Big((u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n)\Big) + (w_1, \ldots, w_n) \\
&= (u + v) + w
\end{aligned}
$$

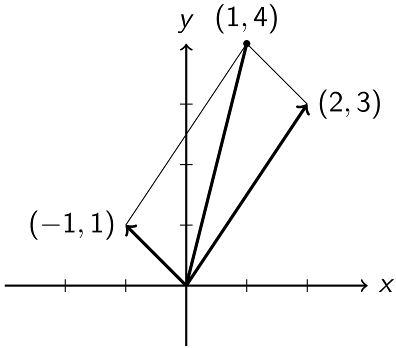
Ejercicio

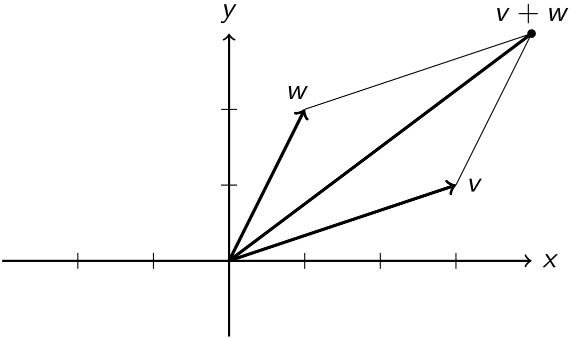
Demostrar las otras propiedades.

Este es un buen ejercicio para familiarizarse con los vectores.

Representación gráfica de la suma. Ley del paralelogramo.

Sea $v = (2, 3)$ y $w = (-1, 1)$. Entonces $v + w = (1, 4)$. En el dibujo de los puntos involucrados aparece un *paralelogramo*

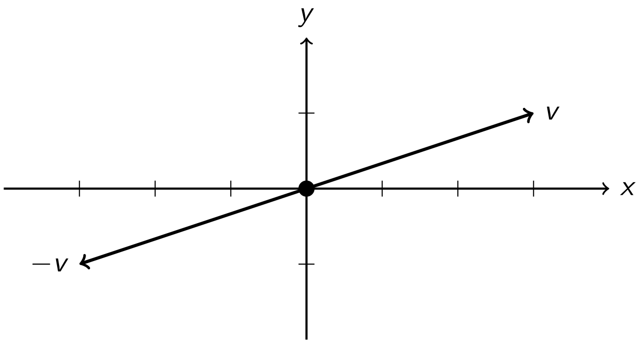




y
$v + w$
w
v
x

Representación gáfica del opuesto de un vector

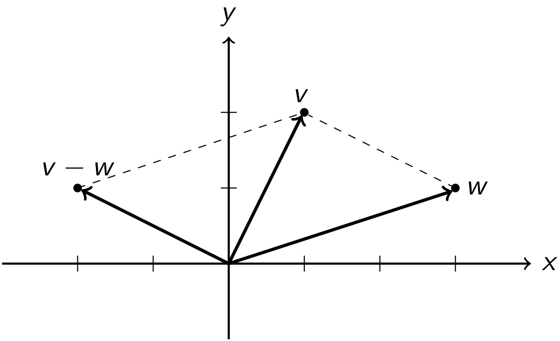
El opuesto de un vector v en el plano es $-v$ y geométricamente es el vector reflejado respecto alcentro:



Representación gáfica de la resta de vectores

Dados dos vectores v, w en el plano, podemos representar la resta como la suma $v + (-w)$.

Como $(v - w) + w = v$, la ley del paralelogramo también nos sirve para visualizar la resta.



El Capítulo 1 de la serie "Essence of linear algebra" disponible en youtube explica los vectores y la suma de estos con muy buenas imagenes.

1. Objetivos

2. Álgebra lineal en $\mathbb{R}^n$
   - Suma de vectores
   - Producto de un vector por un escalar
   - La base canónica

3. Producto escalar
   - Vectores ortogonales

4. Conclusiones

Definición 1.1.3

Si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda . v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

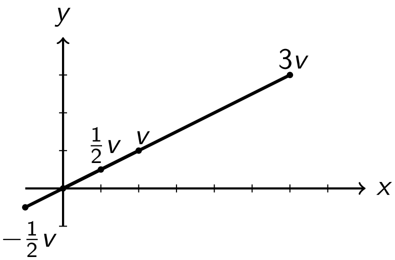
La mayoría de las veces omitiremos el punto y simplemente escribiremos λv.

Ejemplo

Si $v = (2, -1)$ y $\lambda = 7$, entonces $\lambda v = (14, -7)$.

Representación gráfica del productor por escalares

Si $v = (1, 2)$, entonces $\frac{1}{2}v$, $-\frac{1}{2}v$ y $3v$ se ven así:



Observación

Todos los múltiplos de v están sobre una misma recta!
Profundizaremos en este hecho en las próximas clases.

Propiedades

La multiplicación por escalares satisface que

1. Es asociativa

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Es distributiva

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Al igual que las propiedades de la suma, estas también se deducen de las propiedades de los números.

Similarmente, multiplicando por (-1) obtenemos el opuesto:

$$(-1)v = -v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

1. Objetivos

2. Álgebra lineal en $\mathbb{R}^n$
   - Suma de vectores
   - Producto de un vector por un escalar
   - La base canónica

3. Producto escalar
   - Vectores ortogonales

4. Conclusiones

Definición

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, se denota $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ los vectores son $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

Estos vectores jugarán un rol central en la materia.

Principalmente, por la siguiente propiedad.

Propiedad

Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de la base canónica. Explicitamente, si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

La demostración es trivial pero por ahora no la haremos.
El caso $n = 3$ es Ejercicio 8 del Práctico 1.

Ejemplo

$$\begin{aligned}
(1,2,3) &\overset{\text{def } +}{=} (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3) \\
\text{def mult} &= 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) \\
&= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3
\end{aligned}$$

El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ es una “multiplicación“ entre dos vectores que da cómo resultado un número real.

Definición

Si $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_l, \ldots, y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar de v y w es

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^5$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle(1,2,3,4,5),(6,7,8,9,0)\rangle &= 1\cdot 6 + 2\cdot 7 + 3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 0\\ &= 80\end{aligned}$$

El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ es una "multiplicación" entre dos vectores que da cómo resultado un número real.

Definición

Si $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_l, \ldots, y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar de v y w es

$$\langle v, w\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

El producto escalar es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

$$\langle -, -\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Casos particulares. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

En el plano, dados dos vectores $v = (x_1, x_2)$ y $w = (y_l, y_2)$, producto escalar es

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Ejemplo

En el espacio tridimensional, dados $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_l, y_2, y_3)$, el producto escalar de v y w es

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

"producto escalar" $\neq$ "producto por un escalar"

Propiedades

El producto escalar satisface que

P1. Es simétrico:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

P2. Respeta la suma:

$$\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$$
$$\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

P3. Respeta la multiplicación por un escalar:

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

P4. Si $v = 0$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$.
Si $v \in \mathbb{R}^n$ es no nulo, $v \neq 0$, entonces $\langle v, v \rangle \geq 0$.

Demostración de **P1**

Sean $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tenemos que

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

$$\langle w, v \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n.$$

Como la multiplicación en $\mathbb{R}$ es conmutativa cada uno de los sumandos son iguales, entonces toda la suma es igual.

Demostración de **P2**

Sea $u = (z_1, \ldots, z_n)$. Entonces

$$w + u = (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$$

y

$$\begin{aligned}
\langle v, w+u \rangle &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \rangle \\
\text{def prod escalar} &= x_1(y_1 + z_1) + \cdots x_n(y_n + z_n) \\
\text{distri en R} &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \cdots x_n y_n + x_n z_n
\end{aligned}$$

Reordenando los términos obtenemos

$$\langle v, w+u \rangle = \underline{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n} + \underline{x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n},$$

que no es otra cosa que $\langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$.

Demostración de **P3**

Dejamos la demostración de la propiedad **P3** como ejercicio.

Demostración de **P4**

Observemos que

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \qquad (\star)$$

Como $x_i^2 \geq 0$ para todo i, entonces $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Además, es claro que si v tiene todas las coordenadas iguales a 0, entonces $\langle v, v\rangle = 0$.

En el caso que $v \neq 0$, entonces, existe algún i tal que $x_i \neq 0$, por lo tanto $x_i^2 > 0$ y por la ecuación $(\star)$, tenemos que $\langle v, v\rangle > 0$.

Observación

El producto escalar entre vectores puede ser 0, incluso si ambos son distintos de 0.

Por ejemplo, si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, -\frac{4}{3})$, entonces

$$\langle v, w\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-\frac{4}{3}) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Este tipo de pares de vectores serán importantes por lo que merece ponerle nombres...

Definición 1.2.1

Decimos que dos vectores v y w en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Cuando v y w son ortogonales denotamos $v \perp w$.

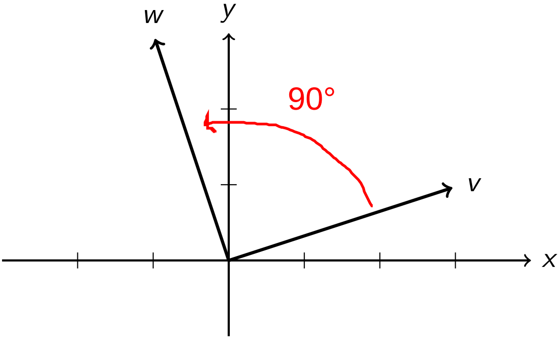
En las próximas clases veremos que esta definición coincide con la noción de ortogonalidad (ángulos rectos) en el plano.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ consideremos los vectores

$$v = (3, 1), \quad w = (-1, 3),$$

representados en la siguiente figura:



Claramente $\langle v, w\rangle = 0$, y por lo tanto v es perpendicular a w, coincidiendo con nuestra intuición de ortogonalidad.

Ejemplo

Propiedad

Los vectores de la base canónica son ortogonales entre si.

Demostración: Si e_i y e_j son distintos vectores de la base canónica, entonces

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 1 + \cdots + 0 \cdot 0 = 0$$

$\square$

Hemos definido en el espacio $\mathbb{R}^n$ las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector.

Estas operaciones satisfacen propiedades análogas a los axiomas de números reales.

Espacios abstractos con operaciones como estas es lo que estudiaremos más adelante bajo el nombre de "Espacios Vectoriales".

Pero antes de eso, vamos a ejercitarnos y crear intuición con cosas un poco más concretas como rectas, planos y sistemas de ecuaciones.