TAREA 8 RESUELTA

Ejercicios.

(1) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^4$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, x) = (x + z, 3x + 3z, y + z, 2y + 2z)$$

(a) Dar un conjunto de generadores de la imagen de T.

(b) Describir implícitamente un conjunto de generadores de la imagen de T.

(c) ¿Es T un epimorfismo?

(2) Sea $T : \mathbb{K}^7 \longrightarrow \mathbb{K}_5[x]$ la transformación lineal definida por
$T(a, b, c, d, e, f, g) = (a+b+c+d)x^4+(e+f+g)x^3+(a+b-f-g)x^2+(c-d+e-f)x+d$

(a) ¿Cúales de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de T?
$(1, 1, -1, 0, -1, -2, 3)$,$(1, 0, -1, 0, -1, -2, 3)$

(b) Sabiendo que T es un epimorfismo calcular la dimensión del núcleo de T.

1. Solución

(1) (a) Planteamos la ecuación

$T(x, y, z) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, de la cual nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + z = b_1 \\ 3x + 3z = b_2 \\ y + z = b_3 \\ 2y + 2z = b_4 \end{cases}$$

Resolver este sistema nos permitirá encontrar el conjunto imagen de la transformación lineal.
Llevamos la matriz ampliada asociada al sistema a una MERF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 3 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 2 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2-3f1, f_4-2f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \longleftrightarrow f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2b_3 \end{array}\right]$$

Por lo tanto la imagen de la transformación lineal es
$ImT = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 - 3b_1 = 0, b_4 - 2b_3 = 0\}$

Tomamos un elemento de ImT, a partir del cual obtendremos un conjunto de generadores de la imagen

$$(b_1, 3b_1, b_3, 2b_3) = (b_1, 3b_1, 0, 0) + (0, 0, b_3, 2b_3) = b_1(1, 3, 0, 0) + b_3(0, 0, 1, 2)$$

Luego un conjunto de generadores de la imagen es

$\{(1,3,0,0),(0,0,1,2)\}$

Otra forma de resolverlo

Por el Lema visto en la teoría si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal (con V espacio vectorial de dimensión finita), ImT está generada por la imagen de los vectores de una base.
Tomamos la base canónica y calculamos qué elementos son sus imágenes a través de la transformación lineal. Estos elementos serán generadores de ImT.

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,3,0,0)$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,0,1,2)$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (1,3,1,2)$

Claramente el vector $(1,3,1,2)$ es combinación lineal de los vectores $(1,3,0,0),(0,0,1,2))$.
Por lo tanto un conjunto de generadores de la imagen está dado por $\{(1,3,0,0),(0,0,1,2)\}$

(b) Del punto anterior tenemos que
$ImT = \{(b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 - 3b_1 = 0 \wedge b_4 - 2b_3 = 0\}$

(c) T no es epimorfismo, pues $ImT \subsetneq \mathbb{R}^4$

Por ejemplo, el vector $(1,1,1,1) \in \mathbb{K}^4$, pero $(1,1,1,1) \notin ImT$ ya que $1 \neq 3.1$ y $1 \neq 2.1$
Otra forma de resolverlo
Supongamos que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es epimorfismo, lo que equivale a decir que $ImT = \mathbb{R}^4$ Como $\mathbb{R}^3$ es de dimensión finita, entonces, por el teorema 4.2.8 se tiene que

$dim\mathbb{R}^3 = dimNu(T) + dimIm(T) = dimNuT + 4$. Con lo cual tendríamos que $dimNu(T) = -1$. Esto es absurdo.
Luego, T no es epimorfismo.

2)a) Por definición de núcleo, $Nu = \{(a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{K}^7 / T(a,b,c,d,e,f,g) = 0\}$.

El vector $(1,1,-1,0,-1,-2,-3) \notin NuT$, pues $(a+b+c+d)x^4 = (1+1-1+0)x^4 = x^4 \neq 0$.

Notemos que aquí basta con analizar el coeficiente principal del polinomio para advetir que tenemos un polinomio no nulo y por lo tanto el vector $(1,1,-1,0,-1,-2,-3)$ no pertenece al núcleo de T.

En cambio, el vector $(1,0,-1,0,-1,-2,3) \in NuT$. En efecto,

$T(a,b,c,d,e,f,g) = (a+b+c+d)x^4 + (e+f+g)x^3 + (a+b-f-g)x^2$
$+(c-d+e-f)x + d = (1-1)x^4 + (-1-2+3)x^3$
$+(1+0-(-2)-3)x^2 + (-1-0-1-(-2))x + 0 = 0$

Por lo tanto $(1,1,-1,0,-1,-2,3) \in NuT$

b) Como T es un epimorfismo, $dim Im T = 5 = dim \mathbb{K}_5[x]$

Por el teorema 4.2.8, si $T : V \longrightarrow W$ y V de dimensión finita, entonces

$dimV = dimNu(T) + dimIm(T)(*)$

En nuestro caso, $V = \mathbb{K}^7$, $dimV = 7$(dimensión finita), $W = \mathbb{K}_5[x]$ (dimensión $W = 5$. Por $(*)$ tenemos que $7 = Nu(T) + 5 \Rightarrow Nu(T) = 7 - 5 = 2$