Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2017

Guía de Ejercicios Nº1: Números reales

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Comenzaremos con la resolución de los siguientes ejercicios.

1. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones lineales.

   a) $x - 6 = 7$ para resolverlo sumamos 6 a ambos miembros y obtenemos
   $x - 6 + 6 = 7 + 6 = 13$ lo cual nos da la solución $x = 13$.

   b) $5x + 11 = 0$
   En este caso restamos 11 a ambos miembros y nos queda $5x = -11$,
   dividiendo por 5 ambos miembros obtenemos $x = -\frac{11}{5}$.
   Más en general, si tenemos $ax + b = cx + d$ restamos $cx + b$ en ambos miembros y obtenemos

   $$ax + b - cx - b = cx + d - cx - b$$

   es decir $ax - cx = d - b$, y entonces podemos escribir $(a - c)x = d - b$. Llegados a este punto tenemos tres posibilidades:

   1) Si $a - c \neq 0$ la ecuación tiene solución única $x = \frac{d-b}{a-c}$
   2) Si $a = c$ y $b = d$, todo x es solución.
   3) Si $a = c$ y $b \neq d$ no existe ninguna solución.

   c) $2x + 6 = 3x + 5$
   Aquí restamos $3x + 6$ a ambos miembros y queda $(2 - 3)x = 5 - 6$ de donde $x = 1$.
   En la resolución de estos ejercicios hemos usado las siguientes propiedades básicas de la suma y el producto de números reales:

   1) Conmutatividad de la suma $x + y = y + x$.
   2) Asociatividad de la suma : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
   3) Existencia del neutro 0 para la suma: $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$
   4) Existencia de opuestos: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.
   5) Conmutatividad del producto $x.y = y.x$
   6) Asociatividad del producto $x.(y.z) = (x.y).z$.
   7) Existencia del neutro 1 para el producto: $x{,}1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$
   8) Existencia de inversos en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\forall x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1} = 1$.
   9) Propiedad distributiva: $a.(x + y) = a.x + a.y$.

   Ahora resolveremos algunas ecuaciones cuadráticas

2. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

   a) $(x - 2)^2 = 0$
   Si el producto de dos números es 0 uno de ellos debe ser cero. En particular si el producto de un número por si mismo es cero dicho número debe ser 0. Entonces $(x - 2)^2 = 0$ implica $x - 2 = 0$, es decir $x = 2$ es la única solución.

b) $x^2 - 4x - 4 = 0$.

Si sumamos 8 en ambos miembros obtenemos $x^2 - 4x + 4 = 8$, y el primer miembro es justo $(x-2)^2$. Entonces la ecuación queda $(x-2)^2 = 8$.

Si llamamos raíz cuadrada de 8, denotado $\sqrt{8}$ al número positivo que al elevarlo al cuadrado da 8, podemos escribir la ecuación en la forma

$(x-2)^2 = \sqrt{8}^2$ de la cual se deduce $(x-2)^2 - \sqrt{8}^2 = 0$ y factorizando esta diferencia de cuadrados vale $(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8}) = 0$, de donde $x-2-\sqrt{8} = 0$ o $x-2+\sqrt{8} = 0$ y así tenemos las soluciones

$$x_1 = 2 + \sqrt{8}; \quad x_2 = 2 - \sqrt{8}.$$

c) $2x^2 + 4x + 6 = 0$.

Aquí dividimos por 2 y obtenemos $x^2 + 2x + 3 = 0$ a esto le restamos 2 en ambos miembros y tenemos un cuadrado en el miembro de la izquierda y -2 a la derecha:: $(x+1)^2 = x^2+2x+1 = -2$, por lo tanto no hay solución.

d) $x^2 - x - 1 = x + 1$.

Restando $x - 2$ en ambos miembros obtenemos $(x-1)^2 = 3$ de donde $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)^2(x+\sqrt{3}) = 0$

$(x-2)^2$ o $x + \sqrt{3}$ deben ser cero. Esto da las soluciones 2 y $-\sqrt{3}$.

b) $(x+1)^2 = 4(x+1) - 4$

Podemos desarrollar el cuadrado y obtener una cuadrática en x o podemos realizar la sustitución $u = x+1$ y resolver $u^2 = 4u-4$ con solución única $u = 2$ y luego resolver $2 = x+1$ con solución única $x = 1$.

c) $x^4 - 36x^2 = 0$

Una forma es sacar el factor común x^2 y resolver $x^2 = 0$ o $x^2 - 36 = 0$.

Alternativamente, sustituimos $u = x^2$ y resolvemos $u^2 - 36u = 0$ con soluciones $u = 0$ y $u = 36$. Luego resolvemos $x^2 = 0$ y $x^2 = 36$ y obtenemos $x = 0; x = -6; x = 6$.

d) $\sqrt{4 - x^2} = -x$

Notemos que x debe ser negativo ya que su opuesto es una raíz cuadrada.. Elevando al cuadrado obtenemos $4 - x^2 = x^2$ o sea $4 = 2x^2$, es decir $x^2 = 2$ de donde x debe ser el opuesto de la raíz cuadrada de 2 esto es $x = -\sqrt{2}$.

e) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x} = x + 12$

Si llamamos $u = x + \frac{1}{x}$ la ecuación es equivalente a $u^2 - u - 12 = 0$ que tiene solución $u = \frac{1 \pm \sqrt{1+49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$ Esto nos da las ecuaciones $x + \frac{1}{x} = 4$ y $x + \frac{1}{x} = -3$. Estas son equivalentes a $x^2 + 1 = 4x$ y $x^2 + 1 = -3x$, cuyas soluciones son. $x = 2 \pm \sqrt{3}$ y $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4. Hay que revestir el piso de una habitación rectangular con baldosas cuadradas de 30 cm de lado. La habitación tiene 1.80 m más de largo que de ancho y con 160 baldosas se cubre exactamente todo el piso. ¿Cuánto mide de ancho y de largo la habitación? Exprese todo matemáticamente.

Si llamamos x a la cantidad de baldosas a lo largo el dato dice que caben 6 más a lo largo que a lo ancho. Luego x(x-6) es la cantidad de baldosas usadas, o sea 160. Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x = 160$ y tenemos $x = 3 \pm \sqrt{9 + 160} = 3 \pm 13$. Como x debe ser positivo $x = 16$ y la habitación debe tener 0,3x16=4,8 metros de largo y 0,3x10= 3 metros de ancho.

Inecuaciones y valor absoluto

Existe un conjunto P de números reales que cumple las siguientes propiedades:

i) $0 \notin P; \mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup (-P); P \cap (-P) = \emptyset$
ii) $P.P \subset P; P + P \subset P$

Esto permite ordenar los números reales definiendo que a es menor que b, $a < b$, si y sólo si $b - a \in P$. La propiedad $P + P \subset P$ se traduce en transitividad: $a < b$ y $b < c$ implica $a < c$.

Notemos que $1 \in P$ ya que sino $-1 \in P$ pero entonces $1 = (-1)(-1) \in P$ lo cual es una contradicción.

Los números reales se representan en una recta y la relación $a < b$ se traduce en a está a la izquierda de b.

5. Exprese el subconjunto de los números reales que satisface cada una de las siguientes condiciones como un intervalo o como unión de intervalos y dibújelo en la recta real.

   a) $x \geq 0$ y $x \leq 5$ Rta:$[0, 5]$.
   b) $x \neq -1$ Rta: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.
   c) $x < 2$ y $x \geq -3$ Rta: $[-3, 2)$.
   d) $x^2 \geq 3$ $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$.

6. Resuelva las siguientes inecuaciones. Para cada una de ellas, exprese el conjunto solución como un intervalo o unión de intervalos y dibújelos sobre la recta real.

   a) $3(2 - x) < 2(3 + x)$
   La inecuación es $6 - 3x < 6 + 2x$ equivalente a $5x > 0$ y sus soluciones son los reales positivos.

   b) $\dfrac{1}{2 - x} < 3$
   Aquí hay que tener ojo: si $x < 2$ la desigualdad es equivalente a $1 < 3(2 - x)$ pero si $x > 2$ la inecuación es equivalente a $1 > 3(2 - x)$. En el primer caso tenemos $x < 2$ y $3x < 5$ es decir $x < \frac{5}{3}$. En el segundo caso: $x > 2$ $3x > 5$, es decir $x > 2$. Entonces la solución es el conjunto $(-\infty, \frac{5}{3}) \cup (2, \infty)$.

   c) $\dfrac{3}{x - 1} < \dfrac{2}{x + 1}$
   Multiplicando por $x^2 - 1$ nos quedan las siguientes desigualdades:
   $x^2 - 1 > 0$ y $3(x + 1) < 2(x - 1)$ es decir $x^2 - 1 > 0$ y $x < -5$, lo cual da $\{x | x < -5\}$
   $x^2 - 1 < 0$ y $3(x + 1) > 2(x - 1)$, es decir $x^2 - 1 < 0$ y $x > -5$, o sea $\{x | -1 < x < 1\}$.
   El conjunto solución queda entonces: $(-\infty, 5) \cup (-1, 1)$.

   d) $\dfrac{x}{2} \geq 1 + \dfrac{4}{x}$
   Aquí $x \neq 0$ y si multiplicamos por $2x$ nos quedan dos posibilidades
   Si $x > 0$ la desigualdad es $x^2 > 2x + 8$
   Si $x < 0$ la inecuación queda $x^2 < 2x + 8$
   Las raíces de $x^2 - 2x - 8 = 0$ son $\pm\sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3 = \{-2, 4\}$. Luego la primera posibilidad es el conjunto $(0, \infty) \cap \{(-\infty, -2) \cup (4, \infty)\} = (4, \infty)$.
   Y la segunda $(-\infty, 0) \cap (-2, 4) = (-2, 0)$.
   Finalmente el conjunto solución es $(-2, 0) \cup (4, \infty)$.

7. ¿Para cuáles valores de x se satisface la desigualdad $x^2 + 5x + 4 \geq 0$?

   Factorizando $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$. El producto de dos números será positivo cuando ambos sean positivos o ambos sean negativos. Esto es $x > -1$ y $x > -4$ o $x < -1$ y $x < -4$ Entonces tenemos el conjunto de soluciones $(-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$.

8. Para cada una de las siguientes desigualdades, determine todos los intervalos de números reales x que la satisfacen

   a) $(x+1)(x-2) < 0$ Esto equivale a dos sistemas de inecuaciones lineales: $x+1 > 0$ y $x-2 > 0$ o $x + 1 < 0$ y $x - 2 < 0$. Entonces el conjunto solución es

   $$\{(-1, \infty) \cap (2, \infty)\} \cup \{(-\infty, 1) \cap (-\infty, 2)\} = (2, \infty) \cap (-\infty, -1) = (-1, 2)$$

   b) $x^2(x - 1) \geq 0$
   Notemos que $x = 0$ es solución.Si $x \neq 0$ se puede eliminar x^2 dividiendo ambos miembros por el y obteemos $x - 1 \geq 0$. Entonces el conjunto solución es $\{0\} \cup ([1, \infty)$.

   c) $(x - 1)(x + 1) > 0$
   Aqui debe cumplirse que $x > 1$ y $x > -1$; o bien, $x < 1$ y $x < -1$. Es decir $x > 1$ o $x < -1$. Entonces las soluciones son $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

   d) $(x - 5)^2(x + 10) \leq 0$
   Si $(x-5)^2 > 0$ la inecuación es equivalente a $x+10 \leq 0$, es decir $x \leq -10$. Si $(x-5)^2 = 0$ debe ser $x = 5$ que también satisface la inecuación. Por lo tanto el conjunto solución es $(-\infty, -10] \cup \{5\}$.

   e) $(2x + 1)^6(x - 1) \geq 0$ Como en el ejercicio anterior, si $2x + 1 \neq 0$ la inecuación es equivalente a $x - 1 \geq 0$. Si $2x + 1 = 0$, también se satisface la inecuación, entonces el conjunto solución queda $\{-\frac{1}{2}\} \cup [1, \infty)$.

9. Un termómetro en Ushuaia marcó ayer -5ºC de mínima y 10ºC de máxima ¿Cuál fue la amplitud térmica que hubo ayer? Expresarlo matemáticamente usando el valor absoluto.

   La amplitud térmica fue de $10 - -5 = 15$ grados. El intervalo $[-5, 10]$ podemos expresarlo como $|x - \frac{10+(-5)}{2}| \leq \frac{10-(-5)}{2}$.

10. Para llegar al bar donde me tengo que encontrar con mis amigos me dijeron que vaya desde la Catedral por la calle Independencia hacia el sur unos 450 m. También me dijeron que si volvía por el mismo lugar unos x metros encontraría un negocio de artículos camping. Si la distancia entre la Catedral y el negocio es de 300 m. ¿A qué distancia está el bar del negocio? Expresar el problema matemáticamente y resolverlo.

    Rta: Si fijamos la Catedral C en el 0 y la dirección sur como positiva el bar B corresponde al 450. Si retrocedemos x hasta el negocio N quiere decir que $B - x = N$ y nos dicen que $300 = d(N, C) = |N - C| = |N| = \pm N$. Luego $x = B - N = 450 \pm 300$. Las dos soluciones posibles son 750 y 150 en el primer caso el negocio queda en calle San Martín y en el segundo en Independencia.

11. Las inecuaciones que involucran el valor absoluto pueden resolverse usando las siguientes equivalencias:

    $$\begin{array}{lllll} |a| < b & \text{si y sólo si} & -b < a < b & \text{si y sólo si} & a \in (-b, b) \\ |a| > b & \text{si y sólo si} & a > b, \text{ o } a < -b & \text{si y sólo si} & a \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty) \end{array}$$

    Notar que si $b < 0$ en el primer caso el conjunto solución es vacío y en el segundo es todo $\mathbb{R}$.

    Resuelva:

    a) $|2t + 5| = 4$
    $2t + 5 = \pm 4$ or lo tanto $t = \frac{-5\pm 4}{2}$.

b) $|x-1| = 1-x$
Como el valor absoluto nunca es negativo, debe ser $1-x \geq 0$. Pero entonces si $1 \geq x$ vale $|x-1| = 1-x$ y se cumple la ecuación. Luego las soluciones son todos los reales menores o iguales a 1.

c) $|x+1| > x-3$
Usando las equivalencias tenemos $x+1 > x-3$ o $x+1 < -(x-3)$.
Como la primera se cumple para todo real x, la desigualdad se cumple siempre.

d) $|x+1| > |x-3|$
Aquí $x+1 > |x-3|$ o $x+1 < -|x-3|$. Las cuales a su vez son equivalentes a
$x+1 > x-3 > -(x+1)$ o $-(x+1) > x-3 > x+1$.
Las dos primeras nos dan $2x > 2$ y las últimas $\emptyset$. Luego las soluciones son $x > 1$.

e) $|x-3| < 2|x|$

f) $\dfrac{|x-1|}{|x-2|} > 2$
Si descartamos $x = 2$ donde no esta definida, la inecuación es equivalente a

$$|x-1| > 2|x-2|$$

Así tenemos $x-1 > 2|x-2|$ o $x-1 < ,2|x-2|$, y de aquí
$x-1 > 2(x-2) > -(x-1)$ o $x-1 < 2(x-2) < -(x-1)$ Entonces $x < 3$ y $3x > 5$ por un lado o $x > 3$ y $3x < 5$ por el otro. Así se obtienen las soluciones $(\frac{5}{3}, 3) \cup \emptyset = (\frac{5}{3}, 3)$. Finalmente eliminamos el 2 que estaba descartado y queda $(\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3)$.

12. Determine todos los intervalos de números que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $|x| < 3$ RTA: $(-3, 3)$
b) $|x^2 - 1| \leq 1$ RTA: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
c) $|x+4| < 1$ RTA: $(-5, -3)$
d) $|x-3| < 1$ RTA: $(2, 4)$
e) $0 < |x+2| < 1$ RTA: $(-3, -2) \cup (-2, -1)$
f) $|x-3| < 5$ RTA: $(-2, 8)$
g) $|2x+1| \leq 1$ RTA: $[-1, 0]$

b) $|x^2 - 1| \leq 1$ es equivalente a $-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$, todo x satisface la primera ecuación y la segunda queda $x^2 \leq 2$ que es equivalente a $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

e) Como $0 < |x+2| \iff x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ y $|x+2| < 1 \iff x \in (-3, -1)$,

el conjunto solución es $\mathbb{R}\backslash\{-2\} \cap (-3, -1) = (-3, -2) \cup (-2, -1)$.

g) $|2x+1| \leq 1 \iff -1 \leq 2x+1 \leq 1$, por lo tanto $-2 \leq 2x \leq 0$, es decir $-1 \leq x \leq 0$.