Práctico 5
Matemática Discreta I – Año 2018
FAMAF

1. Recordar que si $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $\mathfrak{Re}(z) = a$, $\mathfrak{Im}(z) = b$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\overline{z} = a - ib$. Demostrar que si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces

   a) $\overline{\overline{z}} = z$,
   b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
   c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$,
   d) $|\bar{z}| = |z|$,
   e) $z\overline{z} = |z|^2$,
   f) $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$, $\forall z \neq 0$,
   g) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
   h) $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$ y $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$,
   i) $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$.

2. Expresar los siguientes números complejos en la forma cartesiana $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, hallar su módulo, su conjugado y graficarlo.

   a) $(-1 + i)(3 - 2i)$, *b*) $i^{131} - i^9 + 1$, *c*) $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{i}}$,

   d) $\dfrac{1 + i}{1 + 2i} + \dfrac{1 - i}{1 - 2i}$, *e*) $\dfrac{4 + 2i}{6} - \dfrac{4 + 2i}{6i}$, *f*) $\dfrac{3i}{1 - 2i} - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{i}}$.

3. (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que
$$|w + z| \leq |w| + |z|.$$

4. Expresar a los números complejos del Ejercicio 2 en notación polar.

5. Escriba la forma cartesiana de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

6. Calcular las raíces cúbicas de 1 y de -1.

7. Encontrar, en cada caso, todos los números complejos z tales que

   a) $z^2 = 1 - i$. b) $z^3 = -i + 1$. c) $z^2 + z + 1 = i$.

8. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.
   b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1^2 + z_2^2 = 0$ si y sólo si $z_1 = z_2 = 0$.
   c) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.