Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación

Práctico 5 - 2020

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

   a) $f(x,y) = x - y$, $(3,2)$

   b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $(1,1,1)$

   c) $f(x,y) = xy + x^2$, $(2,0)$

   d) $w = \mathrm{e}^{y \ln z}$, $(\mathrm{e},2,\mathrm{e})$

   e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $(0,-1,-1)$

   f) $w = \ln(1 + e^{xyz})$, $(2,0,-1)$

2. Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

   a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $(\pi, 4)$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, en $(1,2)$.

3. Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt

   a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$

   b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$

   c) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$

   d) $\arctan(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

4. Sea $u = \sqrt{x^2+y^2}$ donde $x = \mathrm{e}^{st}$, $y = 1 + s^2\cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene al reemplazar x e y en u y luego derivar.

5. Sea $f(x,y,z) = xyz^3$.

   a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

   b) Sabiendo que $x = x(z) = \sin z$ e $y = y(z) = \mathrm{e}^{4z}$, calcular $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)]$ reemplazando $x(z)$ e $y(z)$ en la fórmula de f.

   c) Comprobar que $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)] = \dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

6. Calcular la derivada direccional de f en el punto P_o y en la dirección del vector $\vec{u}$ dado.

   a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{2y}$, $P_o = (2,0)$, $\vec{u} = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

   b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $P_o = (1,3,2)$, $\vec{u} = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

7. ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2$?

8. Para las siguientes funciones encontrar: (i) el gradiente en el punto indicado, (ii) una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado, (iii) una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, en (1,1). *b*) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $(0,2)$.

9. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.
   a) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$, en $(1,-1,1)$.
   b) $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$, en $(\pi/2, \pi, \pi)$.
10. Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

    a) $z = x^2(1+y^2)$ *b*) $w = x^3y^3z^3$

11. Sea $z = f(x,y)$, $x = 2s+3t$, $y = 3s-2t$. Calcular,

    a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ *b*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ *c*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

12. Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ *b*) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2+x^2+y^2}$

13. Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$
14. Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^4}$
15. Calcular la distancia más corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x+2y+z=4$.
16. Calcular los valores máximo y mínimo relativos, y punto o puntos sillas de las siguientes funciones

    a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$ *c*) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
    b) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 + 8y$ *d*) $f(x,y) = y^2 - 2y\cos x$ en $1 \leq x \leq 7$.