Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal
Clase 06 - Sistemas de ecuaciones lineales 1

FAMAF / UNC

6 de abril de 2021

1. Objetivos
2. Definición
3. Ejemplos
4. Métodos de resolución
   - Métodos de sustitución
   - Métodos de eliminación de incógnitas
   - Métodos de Gauss
5. Conclusiones

El objetivo general de las próximas 3 clases es aprender a resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales usando el Método de Gauss.

En estas filminas:

- Introduciremos los Sistemas de Ecuaciones Lineales y sus soluciones.
- Daremos ejemplos.
- Comenzaremos a pensar una estrategia sistemática para encontrar todas las soluciones de un sistema.
- Introduciremos el Método de Gauss a través de dos imágenes interactivas.

Estas diapositivas estan basadas en la Sección 2.1 del *Apunte* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración.

Definición

Un Sistema de m Ecuaciones Lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las incógnitas y los a_{ij} y b_i son números reales.

Observación

Todo lo que digamos también vale para los números complejos cambiando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ donde corresponda.

Ejemplo

$$\begin{cases} & x_1 & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \end{cases}$$

es un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. En este caso

$$\begin{array}{llll} a_{11} = 1, & a_{12} = 0, & a_{13} = 2, & b_1 = 1, \\ a_{21} = 1, & a_{22} = -3, & a_{23} = 3, & b_2 = 2, \end{array}$$

Ejemplo

Cuando son pocas incógnitas podemos usar distintas letras para las incóngintas:

$$\begin{cases} & x_1 & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \end{cases} \text{ es lo mismo que } \begin{cases} & x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \end{cases}$$

Pregunta

¿Qué es una solución de este sistema? ¿Por ejemplo?

Ejemplo NO solución: x=-1, y=1/3, z=1

-1+2*(1)=1

-1-3*(1/3)+3*1=1

Ejemplo SI solución: x=-1, y=0, z=1

una solución es un vector

No exageramos si decimos que la materia en general gira alrededor del siguiente problema:

Problema ($\star$)

Calcular el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Dicho de otro modo...

Problema ($\star$)

Queremos encontrar todas las n-uplas $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema (E).

Definición

Una solución del sistema de ecuaciones lineales

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

es una n-upla $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ que que satisface cada una de las ecuaciones al mismo tiempo.

Observación

Debemos acostumbrarnos a este abuso de notación. Usamos las mismas letras $x_1, ..., x_n$ para denotar algunas veces las incógnitas y otras veces una solución en particular.

Definición

Una solución del sistema de ecuaciones lineales

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

es una n-upla $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ que que satisface cada una de las ecuaciones al mismo tiempo.

Definición

El conjunto de soluciones del sistema es el conjunto de todas las soluciones.

Obviamente, una sola ecuación lineal es un caso particular de sistemas de ecuaciones.

En el cursillo de ingreso y en la secundaria pueden haber vistos sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Y sin nombrarlo explicitamente "Sistemas de Ecuaciones" en el Práctico 0 y 1 aparecieron algunos sistemas como veremos a continuación.

Práctico 0, Ejercicio 2

Encontrar números reales x e y tales que

$$3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$$

Dicho de otro modo, encontrar una solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y & = 7 \\ -x + 2y & = 5 \end{cases}$$

Práctico 1, Ejercicio 13

Calcular la intersección de las rectas R_1 y R_2.

Traducido a sistema de ecuaciones esto es encontrar una solución del sistema

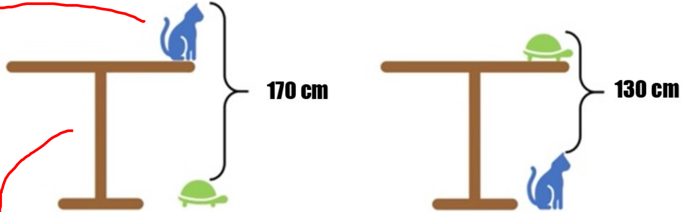
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Dado que

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 2\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$$

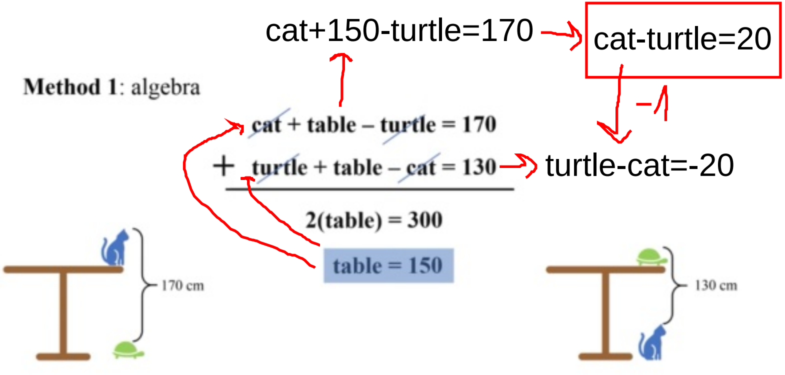

PUEDES RESOLVERLO?
+ + = 60
+ + = 30
- = 3
+ + = ?
SI PUEDES RESOLVERLO
Eres una máquina
más en cuantarazon.com

¿Cuánto mide la mesa?



$M+G-T=170$

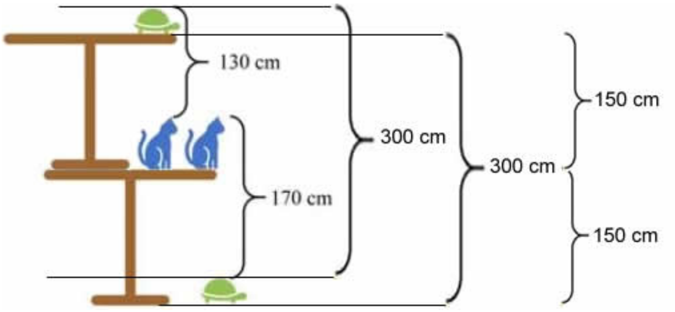
$M+T-G=130$



La tortuga y el gato pueden tener cualquier altura pero tienen que diferir en 20cm

Por ejemplo: Tortuga= 20cm, Gato= 40cm y Mesa=150cm

Tortuga= 100cm, Gato=120 cm y Mesa= 150cm



130 cm
170 cm
300 cm
300 cm
150 cm
150 cm

Aplicaciones

Encontrar polinomios que tomen valores requeridos.

Práctico 2, Ejercicio 4

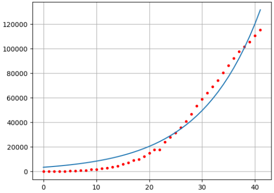
Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

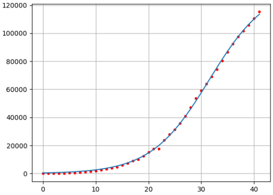
Ajuste de funciones por cuadrados mínimos

Para aproximar los valores de una función desconocida $f(x)$, por ejemplo la evoluciónn del COVID-19, se la puede escribir como combinación lineal de ciertas funciones conocidas $f_1, ..., f_n$. Para esto se deben encontrar escalares $c_1, ..., c_n$ tales que las funciones

$$f(x) \quad \text{y} \quad c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

sean muy parecidas. Mientras más grande n mejor será la aproximación.





Veamos algunos métodos para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

El Método de sustitución es lo que hacemos cuando despejamos una incógnita en una de las ecuaciones y luego la sustituímos en otra ecuación usando la igualdad que obtuvimos en el despeje.

Veamos un ejemplo ...

En el caso del sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

(Práctico 0, Ejercicio 2) el Método de sustitución consiste en:

1. La segunda ecuación $-x + 2y = 5$, implica que $x = 5 - 2y$.
2. Sustituyendo esto en la primera ecuación, obtenemos

$$7 = 3x + 5y = 3(5 - 2y) + 5y = 15 - y \Rightarrow y = 8$$

3. Ahora sustituimos el valor de y en el primer paso

$$x = 5 - 2 \cdot 8 = -11$$

Por lo tanto, el sistema tiene una única solución que es

$$(-11, 8)$$

Observación

Con muchas más incógnitas este método no es práctico.

El Método de eliminación de incógnitas es el que utilizamos para resolver álgebraicamente el problema de la mesa, cuando sumamos las dos ecuaciones y entonces dos incógnitas fueron eliminadas.

Este método es mejor que el de sustitución.

Hemos confeccionado unas imágenes interactivas para familiarizarnos con los sistemas de ecuaciones y aprender cómo funciona el Méotdo de eliminación de incógnitas.

link https://view.genial.ly/5f554124c711c90d6b9ab473/learning-experience-challenges-el-metodo-de-eliminacion-de-incognitas

En estas imágenes interactivas tendrán que ir eligiendo la respuesta correcta para ir avanzando en la resolución de 3 ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales.

En esos 3 ejemplos podrán apreciar las tres posibles formas del conjunto de soluciones. Puede ser vacío, tener una única solución o infinitas.

También verán que el sustento teórico del método es el Teorema 2.2.3

1. Objetivos
2. Definición
3. Ejemplos
4. Métodos de resolución
   - Métodos de sustitución
   - Métodos de eliminación de incógnitas
   - Métodos de Gauss
5. Conclusiones

Podríamos decir que el Método de eliminación de incógnitas es rudimentario y el Método de Gauss es un perfeccionamiento.

Se basa en las mismas ideas pero se lo lleva a cabo de una forma más sistemática usando el lenguaje de matrices.

Las siguientes imágenes interactivas son una introducción a este método.

link https://view.genial.ly/6065c296b2064f0d447af13f/learning-experience-challenges-el-metodo-de-gauss

En las próximas clases profundisaremos en este método.

Antes de leer la próxima filmina haga las actividades de las imágenes interactivas.

Conclusiones

- Un sistema de ecuaciones puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Hemos cambiado nuestro sistema inicial haciendo combinaciones lineales de las ecucaciones.
- El nuevo sistema es más sencillo en el sentido que:
  - Cada ecuación tiene menos incognitas.
  - Las soluciones quedan descriptas paramétricamente.
- Las soluciones del nuevo sistema son las soluciones de nuestro sistema original.
- En el proceso de cambiar de sistema sólo hemos operado con los coeficientes. Para escribir menos podemos obviar x, y, z, y escribir sólo los coeficientes de una forma ordenada y sistemática.

Es a partir de la última conclusión que surgen los conceptos de:

- Matriz
- Operaciones elementales por filas
- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)

Analizaremos esto en otro archivo.