Álgebra/Álgebra II
Clase 08 - Sistemas de ecuaciones lineales 3

FAMAF / UNC

17 de septiembre de 2020

En este archivo presentamos el Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
También respondemos las siguientes preguntas:

- Qué operaciones hacer para transformar un sistema cualquiera en otro asociado una MERF? Siempre es posible hacer esto?
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? Una o infinitas?

Estas filminas estan basadas en las Secciones 2.3 y 2.4 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom (arención: hay una nueva versión desde hoy), siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

El Método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y$$

consiste en transformar este sistema usando operaciones elementales por fila en otro sistema

$$BX = Z$$

donde B es una MERF.

Como dijimos en el archivo anterior el sistema $BX = Z$

1. será más fácil de resolver porque B es MERF.
2. tiene las mismas soluciones que $AX = Y$ por el Teorema 2.3.2

A continuación explicaremos en 3 pasos el Método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y.$$

Ejemplo

Paralelamente, ejemplificaremos los pasos con el sistema

$$(E)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tarea

1. Verificar que (E) es el sistema con infinitas soluciones de las imágenes interactivas.
2. Anotar el sistema (E) en una hoja y sigan los siguientes pasos en la misma para ir comprendiendo.

Primer paso: Matriz ampliada

- Armar la matriz ampliada del sitema $AX = Y$

$$A' = (A|Y)\,,$$

Ejemplo

La matriz ampliada del sistema (E) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Segundo paso: reducir la matriz ampliada

- Usar operaciones elementales por filas para transformar la matriz ampliada A' en una matriz B' de la forma

$$B' = (B|Z)$$

donde B es una MERF y Z es una columna.

Ejemplo

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + 3F_2} \left(\underbrace{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}}_{\mathsf{B}} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{array}}}_{\mathsf{Z}} \right) = B'$$

Tercer paso: despejar y describir el conjunto de soluciones

- Escribir explicitamente el sistema $BX = Z$.
- Despejar en cada ecuación la incognita correspondiente al 1 principal.
- Describir el conjunto de soluciones. Hay tres opciones: tener sólo una solución; infinitas, parametrizadas por las incognitas que no corresponden a 1's principales; no tener solución.

Ejemplo

$$BX = Z \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{array}$$

Entonces el conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ es

$$\left\{(-2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Por ej., si $x_3 = 1$, entonces $(-1, 0, 1)$ es una solución del sistema.

Tarea

Pueden verificar que todo lo que hicimos aquí en el lenguaje de matrices es lo mismo hicimos en las imágenes interactivas para resolver el sistema.

Es posible que se hagan algunas de las siguientes preguntas:

- Qué operaciones hacer para transformar A' en B'? Siempre es posible encontrar B'?
- Por qué las soluciones de $BX = Z$ son también las soluciones del sistemas $AX = Y$?
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? Una o infinitas?
- Hasta cuándo durará el coronavirus?

Responderemos estas preguntas luego de hacer otro ejemplo de cómo funciona el Método de Gauss.

Ejemplo

Problema

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & -2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$(E)\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Respuesta

El conjunto de soluciones es

$$\mathrm{Sol}(E) = \left\{ \left(\frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración

Hacer los siguientes pasos en sus hojas para encontrar las soluciones del sistema.

- Armar la matriz ampliada del sistema (E).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & -2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Intercambiar la fila 1 y la fila 3.
- Cambiar la fila 4 por $F_4 - 5F_1$.
- Cambiar la fila 5 por $F_5 - F_1$.
- Intercambiar la fila 2 y la fila 3.
- Cambiar la fila 4 por $F_4 - 2F_2$.
- Cambiar la fila 5 por $F_5 - F_2$.
- Cambiar la fila 1 por $F_1 - F_2$.
- Multiplicar la fila 3 por $\frac{1}{2}$.
- Cambiar la fila 2 por $F_2 + F_3$.
- Cambiar la fila 1 por $F_1 - F_3$.

Al final obtenemos (B|Z) con B una MERF

- Despejar x_1, x_2 y x_3. En función de x4
- Escribir el conjunto de soluciones.

Para practicar pueden resolver este sistema

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 = 1 \\ 2x_3 + x_4 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 + x_8 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_6 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_8 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + 7x_8 = 3 \\ 2x_2 - x_3 + 7x_5 = 2 \end{cases}$$

Pregunta

¿Cómo hacemos para transformar a A' en B' usando operaciones elementales por fila?

La respuesta es el algoritmo dado en la Observación 2.4.1.

Pregunta

Siempre es posible encontrar B'?

Sí, gracias al algoritmo. Esto es el Teorema 2.4.1.

Observación 2.4.1

1. Nos ubicamos en la primera fila.
2. Si la fila es 0 y no es la última, pasar a la fila siguiente.
3. Si la fila no es 0 (digamos que es la fila F_s),
   a. Si el primera entrada no nula está en la columna k y su valor es c, multiplicar la fila por $\frac{1}{c}$ (ahora la primera entrada no nula vale 1),

$$\begin{array}{cc} \text{fila s} \longrightarrow & \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & c & b & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \\ & \text{columna k} \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{c}F_s} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \frac{b}{c} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

   b. Con operaciones elementales del segundo tipo hacer 0 todas las otras entradas en la columna k

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & \frac{b}{a} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & t & u & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r - tF_s} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & \frac{b}{a} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & u - t\frac{b}{a} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

4. Si la fila es la última, proseguir al paso (5). Si la fila no es la última, repetir el paso (2) con la fila siguiente.
5. Permutar las filas hasta obtener una MERF.

En la práctica no es necesario seguir al pie de la letra el algoritmo. Lo damos para que tengan una idea de como comenzar. Luego de hacer ejercicios se irán dando cuenta de como hacer menos cuentas.

Tips

- Pueden empezar por intercambiar filas de acuerdo a su conveniencia.
- En vez de multiplicar por una fracción para hacer un 1 principal, pueden intercambiar filas por una que ya tenga un 1 en la columna.
- Para hacer menos cuentas pueden anular sólo los elementos por debajo de los 1 principales. Una vez que llegaron al final comenzar a anular todos los elementos por encima de los 1 principales.

Pregunta

¿Por qué las soluciones del sistema $BX = Z$ son también las soluciones del sistema $AX = Y$?

Teorema 2.3.2

Sea $AX = Y$ un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $(B|Z)$ una matriz que se obtiene a partir de la matriz ampliada $(A|Y)$ por medio de operaciones elementales.

$$(A|Y) \quad \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} \quad (B|Z)$$

Entonces los sistemas $AX = Y$ y $BX = Z$ tienen las mismas soluciones.

1. Objetivos
2. El Método de Gauss
3. Qué operaciones hacer...
4. Mismas soluciones
5. Una, niguna, infinitas
   - Tiene o no tiene solución
   - Infinitas soluciones
   - Solución única
   - Sistemas homogéneos
   - Sistemas cuadrados
6. Conclusiones

Pregunta

¿Cómo saber si el sistema $AX = Y$ tiene o no tiene solución? ¿Una o infinitas?

Responderemos a estas pregunta analizando el sistema equivalente

$$BX = Z$$

(que tiene las mismas soluciones) donde B es una MERF.

Asumamos que $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $Z \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ son

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \quad & & k_1 & & k_2 & & & k_r & & \end{matrix} \end{array} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Entonces el sitema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$, recordar que

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

La demostración del Teorema consiste en observar bien el sistema.

Para convencerse de lo que sigue conviene que también lo escriban ustedes en sus hojas.

Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$$\boxed{z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0}.$$

Demostración ($\Rightarrow$):

Si el sistema tiene solución quiere decir que existe una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface todas las ecuaciones del sistema. En particular, satisface las últimas ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\
x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\
\vdots & & & \vdots & \\
x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\
 & & 0 & = & z_{r+1} \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & 0 & = & z_m
\end{array}\right.$$

Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$$\boxed{z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0.}$$

Demostración ($\Leftarrow$):

Si $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$, entonces $x_{k_1} = z_1$, $x_{k_2} = z_2$, ..., $x_{k_r} = z_r$ y todos los otros $x_j = 0$ es una solución al sistema. En efecto, reemplazando en el sistema vemos que las igualdades son satisfechas:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
z_1 & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\,0 & = & z_1 \\
z_2 & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\,0 & = & z_2 \\
\vdots & & & \vdots & \\
z_r & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\,0 & = & z_r \\
 & & 0 & = & z_{r+1} \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & 0 & = & z_m
\end{array}\right.$$

De lo anterior deducimos que un sistema con más ecuaciones que incógnitas puede que no tenga solución. Más precisamente:

Corolario

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $n < m$, entonces existe $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que el sistema $AX = Y$ no tiene solución.

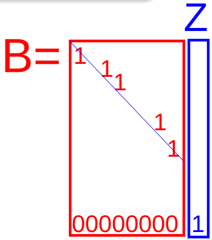
Demostración:

Sea B la MERF equivalente a A. Notemos que

- la cantidad de 1's principales de $B \leq n < m$.

Por lo tanto, B tiene filas nulas.

Luego, si Z tiene su última coordenada igual a 1, el sistema $BX = Z$ no tiene solución.



Si $A \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} B$, construimos Y de la siguiente manera

$$Z \xrightarrow{e_n^{-1}} \cdots \xrightarrow{e_1^{-1}} Y.$$

Entonces el sistema $AX = Y$ tampoco tiene solución pues $(A|Y) \xrightarrow{e_1} \cdots \xrightarrow{e_n} (B|Z)$

Observación

El teorema previo sirve para responder al Ejercicio 6 del Práctico 2.

En teorema previo encontramos una solución haciendo cero todas las incognitas que no se corresponden con 1 principales.

Pero le podriamos haber dado cualquier otro valor y así encontrar otras soluciones.

Definición

Llamaremos variables principales a las incógnitas correspondientes a 1's principales.

A las otras incógnitas las llamaremos variables libres.

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y hay más incognitas que 1 principales. Entonces el sistema tiene infinitas soluciones parametrizadas por los valores que toman las variables libres.

Explicitamente, las soluciones son de la forma

variables libres

variables principales

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= z_1 - \textstyle\sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{1j}\, x_j \\ x_{k_2} &= z_2 - \textstyle\sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{2j}\, x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= z_r - \textstyle\sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{rj}\, x_j \end{aligned}$$

y los x_j con $j \neq k_1, \ldots, k_r$ pueden tomar cualquier valor real.

Demostración

Podemos poner a las variables principales en función de las variables libres despejando:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{1j}\,x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{2j}\,x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{rj}\,x_j & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x_{k_1} & = & z_1 & -\sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{1j}\,x_j \\ x_{k_2} & = & z_2 & -\sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{2j}\,x_j \\ & \vdots & & \\ x_{k_r} & = & z_r & -\sum_{j\neq k_1,\dots,k_r} b_{rj}\,x_j \\ 0 & = & z_{r+1} & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & = & z_m & \end{array}\right.$$

Cualquier valor que le demos a las variables libres nos dará una solución.

De lo anterior deducimos que un sistema con más incógnitas que ecuaciones, si tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones. Más precisamente:

Corolario

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m < n$ y sistema $AX = Y$ tiene solución una solución, entonces tiene infinitas soluciones.

Demostración: Dado que
la cantidad de variables principales $\leq m < n =$ cantidad de incógnitas

el sistema satisface las hipótesis del teorema y por lo tanto hay infinitas soluciones.

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y la cantidad de 1 principales es igual a la cantidad de incognitas. Entonces el sistema $BX = Z$ tiene una única solución, la cual es $X = Z$.

Demostración:

En este caso, el sistema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} x_1 & = & z_1 \\ x_2 & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & z_n \\ 0 & = & z_{n+1} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & = & z_m \end{cases}$$

y la solución queda determinada explicitamente.

Definición

Un sistema $AX = Y$ se dice homogéneo si $Y = 0$.

Observación

Los sistemas homogéneos siempre tienen solución.

Pues $X = 0$ es una solución y la llamamos la solución trivial.

1. Objetivos
2. El Método de Gauss
3. Qué operaciones hacer...
4. Mismas soluciones
5. Una, niguna, infinitas
   - Tiene o no tiene solución
   - Infinitas soluciones
   - Solución única
   - Sistemas homogéneos
   - Sistemas cuadrados
6. Conclusiones

Los sistemas con las misma cantidad de incógnitas que ecuaciones, o equivalentemente los sistemas asociados a matrices cuadradas $n \times n$, juegan un rol fundamental.

Obviamente, podemos aplicarle los resultados previos a estos sistemas.

A continuación, los reenunciamos en este caso particular como aparecen en el apunte.

Teorema 2.4.2

Sea A una matriz $n \times n$ y B la MERF equivalente por filas a A. Entonces, si B tiene filas nulas y el sistema $AX = Y$ tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones.

Teorema 2.4.5

Sea A una matriz $n \times n$ y B la MERF equivalente por filas a A. Entonces, $B = \mathrm{Id}_n$ si y sólo si el sistema $AX = Y$ tiene un única solución.

Definición 2.4.2

$$\mathrm{Id}_n = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Lema 2.4.4

Id_n es la única MERF sin filas nulas.

Ya pueden hacer toda la Práctica 2.