Práctico 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Objetivos.

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   (a) $2v + 3w - 5u$,
   (b) $5(v + w)$,
   (c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
   (a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
   (b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
   (a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   (b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar
   (a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   (b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
   (c) vectores $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ donde $w_1 = (1, 1, 1)$, utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

   (*a*) $(2, 3)$, (*b*) (t, t^2), (*c*) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

   (*a*) $v = (2, 2), w = (1, 0)$, (*b*) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7)$.

(8) Sean $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

(a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle.$$

(b) Si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle.$$

Rectas.

(10) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.

(a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.
(b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

(11) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

(a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
(b) Graficar en el plano a R_1.
(c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
(d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

(12) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

(a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
(b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela al vector $(1, 3)$.

(13) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

(14) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

(a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
(b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

(15) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación. El Ejercicio (15) nos dice que las rectas que pasan por el origen son cerradas por la suma y la multiplicación por escalares. Los subconjuntos que satisfacen esta propiedad se llaman "subespacios vectoriales" y serán nuestro objeto de estudio más adelante.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(16) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(17) ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

(18) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

(a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.

(b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.

(c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

(19) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

(a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.

(b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.

(c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

(20) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (19c)? Describir la intersección en cada caso.

(a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$,

(b) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,

(c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$,

(d) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

Ayudas

(17) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.