

Determinar para la sgte función: Dominio, puntos críticos, asíntotas verticales y horizontales, máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad. Graficar. (Las cuentas que no están en esta hoja las realizamos en el pizarrón)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- DOMINIO: Son todos los valores de x en los que la función está bien definida

El denominador está bien definido y es distinto de 0 para todo x , el numerador está siempre bien definido, por lo tanto el dominio son todos los números reales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- ASÍNTOTAS VERTICALES: Si $a \notin \text{Dom}(f)$ y $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$, entonces $x=a$ es una asíntota vertical

No tiene ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Si alguno de los $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$, entonces tiene asíntota horizontal en $y = L$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

f tiene asíntotas horizontales en $y = 0$

- DERIVADAS:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad f''(x) = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

- PUNTOS CRÍTICOS: son los X_c / $f'(X_c) = 0$ o aquellos en los que $f'(X_c)$ no \exists

Para calcular $f'(x) = 0$, como el denominador no puede anularse, alcanza con pedir que se anule el numerador:

$$0 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow X_{c1} = 1, X_{c2} = -1$$

Otros puntos críticos podrían ser aquellos donde no exista la derivada. Pero, en este caso en particular, esta función no tiene ningún problema, está bien definida para todo x .

- MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES: si la $f''(X_c) > 0$, entonces X_c es mínimo local, si $f''(X_c) < 0$, X_c es máximo local

$$f''(X_{c1} = 1) = \frac{-2(3-1)}{2^3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow X_{c1} \text{ es Máximo Local.}$$

$$f''(X_{c2} = -1) = \frac{2(3-1)}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow X_{c2} \text{ es Mínimo Local.}$$

- INTERVALOS DE CRECIMIENTO: son los x / $f'(x) > 0$.

Podemos resolver la inecuación de la siguiente manera:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Rightarrow \text{Ya que el denominador es siempre positivo alcanza con pedir:}$$

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow$$

resolviendo: $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-1, 1)$

- INTERVALOS DE DECRECIMIENTO: x / $f'(x) < 0$.

Podemos resolver la inecuación de la siguiente manera:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow 1 < x^2 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en los intervalos } (-\infty, -1) \text{ y } (1, +\infty)$$

- Otra manera para ver los signos de la $f'(x)$ es fabricar una tabla. En ella tenemos separar los intervalos determinados por los valores de **x que no pertenecen al dominio de f, y todos los puntos críticos**, y evaluamos el signo de la $f'(x)$ en esos intervalos

x_f/X_c	$x < -1$	$x=-1$	$-1 < x < 1$	$x=1$	$x > 1$
$f'(x)$		0		0	

Podemos usar cualquier punto en cada uno de esos intervalos, por ejemplo el punto $x = -2 \Rightarrow f'(-2) = -3/25 < 0$, el punto $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 1 > 0$, y el punto $x = 2 \Rightarrow f'(2) = -3/25 < 0$. Entonces la tabla nos queda:

x_f/X_c	$x < -1$	$x=-1$	$-1 < x < 1$	$x=1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Es decir, f decrece en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y f crece en $(-1, 1)$

- INTERVALOS DE CONVEXIDAD (o cóncavo hacia arriba): **Son los $x / f''(x) > 0$**
el denominador de $f''(x)$ es siempre positivo, por lo tanto sólo analizamos el numerador.

Pedir que: $-2x(3 - x^2) > 0$, es idéntico a pedir que : $x(3 - x^2) < 0$

$$\Rightarrow x < 0 \cap 3 - x^2 > 0 \cup x > 0 \cap 3 - x^2 < 0$$

$$x < 0 \cap |x| < \sqrt{3} \cup x > 0 \cap |x| > \sqrt{3}$$

$$(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

- INTERVALOS DE CONCAVIDAD (o cóncavo hacia abajo): **Son los $x / f''(x) < 0$**

Pedir que: $-2x(3 - x^2) < 0$, es idéntico a pedir que : $x(3 - x^2) > 0$

$$\Rightarrow x > 0 \cap 3 - x^2 > 0 \cup x < 0 \cap 3 - x^2 < 0$$

$$x > 0 \cap |x| < \sqrt{3} \cup x < 0 \cap |x| > \sqrt{3}$$

$$(0, \sqrt{3}) \cup (-\infty, -\sqrt{3})$$

- PUNTOS DE INFLEXIÓN: **Son los x donde la $f''(x)$ pasa de positiva a negativa o viceversa.**
Por lo calculado, podemos ver que los puntos donde la función pasa de cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) a cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) o viceversa son:

$$X_{I_1} = 0, X_{I_2} = \sqrt{3}, X_{I_3} = -\sqrt{3}$$

- Nuevamente, para ver los signos de la $f''(x)$ se puede fabricar una tabla. En ella tenemos que poner los valores de **x que no pertenecen al dominio de f, y todos los puntos donde la $f''(x) = 0$** , y evaluamos el signo de la $f''(x)$ en los intervalos comprendidos entre esos puntos. Para obtener $f''(x) = 0$, alcanza con pedir que el numerador se anule \Rightarrow :

$$-2x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \cup 3 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow X_2 = \sqrt{3}, X_3 = -\sqrt{3}$$

x_f/X_I	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x=0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$		0		0		0	

Podemos usar cualquier punto en cada uno de esos intervalos, por ejemplo el punto $x = -2 \Rightarrow f''(-2) = -4/125 < 0$, el punto $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 1/2 > 0$, el punto $x = 1 \Rightarrow f''(1) = -1/2 < 0$, y el punto $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 4/125 > 0$. Entonces la tabla nos queda:

x_f/X_I	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x=0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Es decir, f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$, y f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$. Además, vemos que hay puntos de inflexión en $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$.

RESUMIENDO:

1. Dominio: \mathbb{R}
2. No tiene asíntotas verticales
3. las asíntotas horizontales son $f(\pm\infty) = 0$
4. Puntos críticos: $X_c = 1$ y $X_c = -1$
5. Máximo local en $X_c = 1$ y mínimo local en $X_c = -1$
6. en este caso, el máximo absoluto coincide con el máximo local, y el mínimo absoluto con el mínimo local
7. $f(x)$ es creciente para los x en el intervalo $(-1, 1)$
8. $f(x)$ es decreciente para los x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$
9. $f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$
10. $f(x)$ es cóncava en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$
11. Puntos de inflexión: $X_i = -\sqrt{3}$, $X_i = 0$ y $X_i = \sqrt{3}$

CON TODO ESTO, REALIZAR EL GRÁFICO:

