

Práctico 0

NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos.

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

Ejercicios.

- (1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

$$(a) (-1 + i)(3 - 2i) \quad (b) i^{131} - i^9 + 1 \quad (c) \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$$

- (2) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

- (3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

- (4) Probar que si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (5) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

$$(a) (\cos \theta - i \sin \theta)^{-1}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (b) 3i(1 + i)^4, \quad (c) \frac{1 + i}{1 - i}$$

- (6) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

$$(a) \frac{(z + i)(z - i)}{z^2 + 1}, \quad (b) z - 2 + \frac{1}{z - 2}, \quad (c) \left| \frac{1}{z - i} \right|^2.$$

- (7) Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$.

- (8) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean z_1, z_2, \dots, z_n números complejos. Probar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- (9) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$