Álgebra/Álgebra II
Clase 4 - Rectas y planos 2

FAMAF / UNC

3 de septiembre de 2020

1. Objetivos

2. Rectas en $\mathbb{R}^2$
   - Rectas perpendiculares
   - La recta que pasa por dos puntos dados

3. Planos en $\mathbb{R}^3$
   - Forma Implícita
   - Forma Paramétrica

4. Conclusiones

En este archivo aprenderemos a describir

- la recta perpendicular a una dirección dada y
- la recta que pasa por dos puntos dados,

esto también esta en el archivo anterior (acá hay algunos errores corregidos).

Además aprenderemos a definir planos en $\mathbb{R}^3$.

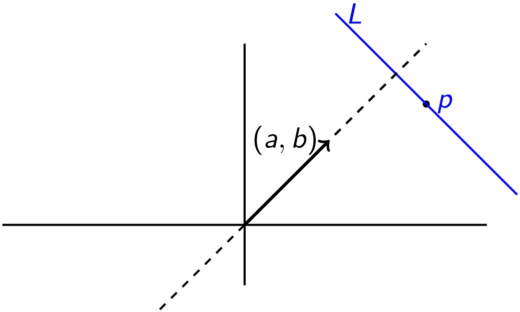
Estas diapositivas estan basadas en la Secciones 1.5 y 1.6 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

1. Objetivos
2. Rectas en $\mathbb{R}^2$
   - Rectas perpendiculares
   - La recta que pasa por dos puntos dados
3. Planos en $\mathbb{R}^3$
   - Forma Implícita
   - Forma Paramétrica
4. Conclusiones

Pregunta (Ejericicio 13,14)

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

¿Cuál es la forma paramétrica de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por $p = (x_0, y_0)$?

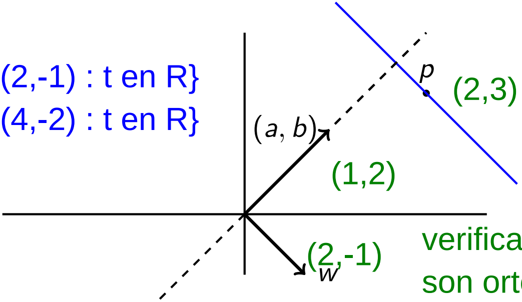


Para responder a la pregunta, comencemos por recordar que dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son perpendiculares si el producto escalar entre ellos es nulo.

Elijamos $w \in \mathbb{R}^2$ no nulo tal que $\langle w, (a,b) \rangle = 0$. (¿Existe?)

Entonces la recta que buscamos es la recta que pasa por p con dirección w.

L={(2,3) + t (2,-1) : t en R}
L={(2,3) + t (4,-2) : t en R}



verificar que estos son ortogonales

Para terminar de responder la pegunta inicial debemos encontra un $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ortogonal a (a, b)[1]. Es decir, queremos x e y tales que

$$\langle w, (a, b)\rangle = ax + by = 0$$

Lema

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces $w = ($ b ,-a $)$ es ortogonal a (a, b)

Dem: b*a+(-a)*b=ba-ab=0

[1] Esto es como el Ejercicio 5 de la Práctica 1

En conclusión, tenemos lo siguiente.

Lema

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $(a, b) \neq 0$. La recta perpendicular a (a, b) que pasa por (x_0, y_0) es

$$L = \{(x_0, y_0) + t(b, -a) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Pregunta

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

¿Cuál es la forma implícita de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por (x_0, y_0)?

Para responder esta pregunta podemos usar el procedimiento para pasar de la forma paramétrica a la forma implícita y lo que vimos anteriormente.

Alternativamente podriamos proceder como lo hacemos a continuación.

Por el Lema anterior, sabemos que todo punto $(x, y) \in L$ es de la forma $(x, y) = p + tw$ donde $p = (x_0, y_0)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ es no nulo y satisface $\langle w, (a, b)\rangle = 0$.

Entonces todo punto de L satisface

<p,(a,b)>+t<w,(a,b)> por prop del prod escalar

$$\langle (x, y), (a, b)\rangle = \langle p + tw, (a, b)\rangle = \langle p, (a, b)\rangle = \langle (x_0, y_0), (a, b)\rangle$$

Escribiendo explicitamente los extremos tenemos que

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

Si llamos c al valor de la derecha obtenemos la forma implícita.

En conclusión...

Lema

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $(a, b) \neq 0$. La recta perpendicular a (a, b) que pasa por (x_0, y_0) es

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}$$

donde $c = ax_0 + by_0$.

El lema puede ser reinterpretado así.

Corolario

Sea L la recta en plano

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}.$$

Entonces L es perpendicular al vector (a, b).

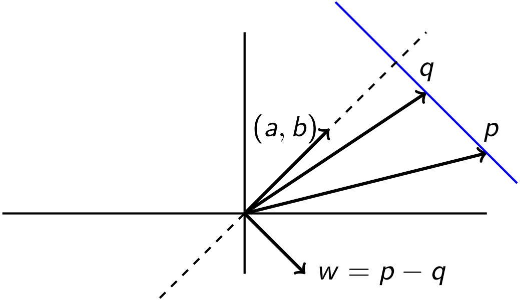
Más aún, si $p \in L$ podemos decir que L es la recta que pasa por p y es ortogonal a (a, b)

Demostración

Sean $p = (x_0, y_0), q = (x_1, y_1)$ dos puntos perteneciente a L.

$$\Rightarrow ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1$$
$$\Rightarrow a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$$
$$\Rightarrow \langle (a, b), (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \rangle = 0$$

Es decir, (a, b) es ortogonal a cualquier segmento de recta. Esto quiere decir que (a, b) es ortogonal a L.



Observación

Podemos usar la notación del producto escalar para reescribir la forma implícita de una recta.

Sea L la recta definida por $ax + by = c$ y $(x_0, y_0) \in L$, entonces

$$c = ax_0 + by_0 = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle$$

y

$$\begin{aligned} L &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (a, b) \rangle = c \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (a, b) \rangle = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y) - (x_0, y_0), (a, b) \rangle = 0 \right\} \end{aligned}$$

Ejemplo

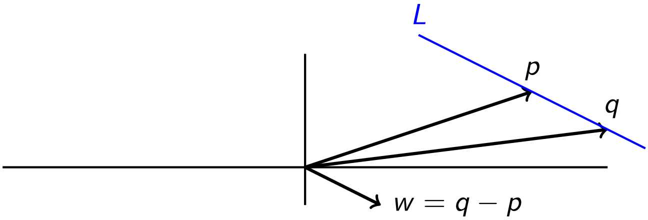
Encontrar la ecuación implícita de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es perpendicular a $(-2, 3)$.

Respuesta

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = -7\right\}$$

En efecto, por lo visto antes $(a, b) = (-2, 3)$ y
$c = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -7$

Bien es sabido que sólo hay una recta que pasa por dos puntos dados $p, q \in \mathbb{R}^2$. Graficamente esta es:



La manera más fácil de describir dicha recta es usando la forma paramétrica.

En efecto, del gráfico vemos que L es la recta que pasa por p con dirección $w = p - q$.

Lo anterior se resume en lo siguiente:

Afirmación

Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ y $w = p - q$. Entonces la única recta que pasa por ambos puntos es

$$L = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}.$$

Segmento entre dos puntos

La representación paramétrica también es útil para describir el conjunto de los puntos que se encuentran en el segmento de línea entre dos puntos dados.

Más precisamente, el segmento entre p y q consiste en todos los puntos de la forma

$$p + t(q - p) \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como t "va" de 0 a 1, podemos pesar que recorremos el segemento desde

- p, esto es cuando $t = 0$, a
- q, esto es cuando $t = 1$.

Un plano en $\mathbb{R}^3$ es como una hoja infinita en el espacio.

Al igual que lo hicimos con las rectas queremos describir de forma conjuntista cualquier plano de $\mathbb{R}^3$.

1. Objetivos

2. Rectas en $\mathbb{R}^2$
   - Rectas perpendiculares
   - La recta que pasa por dos puntos dados

3. Planos en $\mathbb{R}^3$
   - Forma Implícita
   - Forma Paramétrica

4. Conclusiones

Definición 1.6.1

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y sea

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}.$$

Entonces diremos que P es un plano con ecuación implícita

$$ax + by + cz = d$$

y que (a, b, c) es un vector normal al plano P.

A esta forma de describir el plano también suele llamársela la ecuación normal del plano

Observar que la ecuación $ax + by + cz = d$ no es más que la ecuación $\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = d$.

Al igual que las rectas, a continuación veremos que

Afirmación

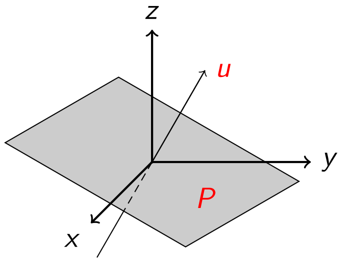
Todo plano en $\mathbb{R}^3$ es descripto de forma implícita.

Demostración: Sea P un plano en $\mathbb{R}^3$. Hay dos posibilidades que pase por el origen ($0 \in P$) o que no pase por el origen ($0 \notin P$).

Procedamos caso por caso.

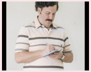
Primero consideremos un plano P que pasa por el origen. En la figura, lo pintamos de gris.

Y u es un vector no nulo perpendicular al plano. Como si paráramos un lápiz sobre la hoja.



Para convencerse

Dibuje un vector en un hoja y sobre el incio de este ponga un lapíz.

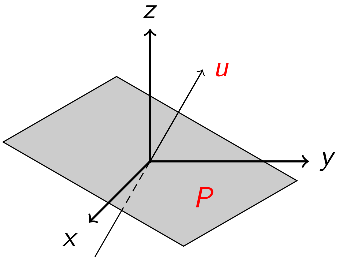


Como asumimos que el plano pasa por el origen, podemos afirmar que P es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a todos los vectores ortogonales a u.

Es decir, P esta formado por todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle u, v\rangle = 0$ porque esto es equivalente a que dos vectores sean ortogonales.

En consecuencia, si $u = (a, b, c)$ entonces

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$



Supongamos ahora que P es un plano que no pasa por el origen y $v_0 \in P$, entonces el conjunto

$$P_0 = \{v - v_0 : v \in P\}$$

es un plano que pasa por el origen (es P pero trasladado).

Razonando como antes, elegimos un vector u perpendicular a P_0 y tenemos que

$$P_0 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, u \rangle = 0\}.$$

Luego

$$v \in P \Leftrightarrow v - v_0 \in P_0 \Leftrightarrow \langle v - v_0, u \rangle = 0,$$

es decir

$$P = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v - v_0, u \rangle = 0\}.$$

Concluimos que, si $d = \langle v_0, u \rangle$ y $u = (a, b, c)$, entonces

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}.$$

Esto termina de demostrar nuestra afirmación. $\square$

Por lo anterior también deducimos que:

Lema

El plano

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$$

es perpendicular al vector normal $u = (a, b, c)$.

Ejemplo

Sea P el plano determinado por la ecuación

$$2x - y + 3z = 5.$$

Es ortogonal a (2,-1,3)

Entonces P es perpendicular al vector $(2, -1, 3)$.

Puntos que SI pertenecen a P

(3,1,0), (0,-5,0), (0,1,2)
porque 2*0-1+3*2=5

Puntos que NO pertenecen a P

(0,0,0) pues 2*0-0+3*0 no es =5
(1,1,1), (2,-1,2)

Definición

Se dice que dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

Se dice que son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares, es decir si el producto escalar da 0.

El ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre sus vectores normales, que lo calculamos usando el producto tensorial como lo definimos la clase pasada.

Gráficos en GeoGebra

Si prefieren algo más sofisticado que un papel y un lapiz pueden ver los siguientes recursos interactivos en GeoGebra.

- https://www.geogebra.org/m/FqKc5sC6
- https://www.geogebra.org/m/VRK2TFQJ
- https://www.geogebra.org/m/EwcVyfEx

Allí también pueden graficar sus propios planos.

La forma paramétrica de una recta nos da una fórmula que depende de un parámetro para describir todos los puntos que están en la recta.

Ahora vamos a ver que tenemos una descripción análoga para los puntos de un plano en $\mathbb{R}^3$.

Antes de dar una definición general, haremos el pasaje de la forma implícita a la paramétrica del ejemplo anterior.

De implícita a paramétrica

Pregunta

Sea P el plano determinado por la ecuación $2x - y + 3z = 5$. ¿Cómo podemos describir paramétricamente los puntos de P?

Respuesta: Un punto $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a P si y sólo si $2x - y + 3z = 5$.

O equivalentemente, $p \in P$ si y sólo si $y = 2x + 3z - 5$.

Por lo tanto, $p \in P$ si y sólo si es de la forma

$$p = (x, y, z) = (x, 2x + 3z - 5, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1) + (0, -5, 0).$$

Esta es una fórmula que describe todos los puntos de P usando los parametros reales x e z.

La definición general de la forma paramétrica de un plano es

Definición 1.6.2

Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que w_1,w_2 son no nulos y no es un múltiplo de uno del otro. Sea $v \in \mathbb{R}^3$. Diremos que

$$P = \{v + sw_1 + tw_2 : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

es el plano a través de v paralelo a los vectores w_1 y w_2.

Pregunta

¿Qué diferencia hay con la forma paramétrica de una recta?

El plano del ejemplo anterior nos queda así.

Ejemplo

La forma paramétrica del plano P determinado por la ecuación $2x - y + 3z = 5$ es

$$P = \left\{ s(1,2,0) + t(0,3,1) + (0,-5,0) \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observación

Similarmente a la recta definidad por dos puntos, dadas dos rectas que pasan por un mismo punto hay un único plano que contiene a ambas.

Este es precisamente el plano a través del punto de intersección paralelo a los vectores de dirección de las rectas.

De paramétrica a implícita

Pregunta

¿Cómo obtenemos la ecuación normal del plano

$$P = \{v + sw_1 + tw_2 : s, t \in \mathbb{R}\}?$$

Supongamos que $u \in \mathbb{R}^3$ es no nulo y $\langle u, w_1 \rangle = 0$ y $\langle u, w_2 \rangle = 0$.

Sea $p = v + sw_1 + tw_2 \in P$. Entonces

$$\langle v + sw_1 + tw_2, u \rangle = \langle v, u \rangle + s\langle w_1, u \rangle + t\langle w_2, u \rangle = \langle v, u \rangle + 0 + 0.$$

Si escribimos las coordenadas $p = (x, y, z)$ y $u = (a, b, c)$ y llamamos $d = \langle v, u \rangle$ entonces todos los puntos del plano satisfacen

$$ax + by + cz = d.$$

Esta es la ecuación normal de P.

De paramétrica a implícita

Pregunta

¿Cómo obtenemos la ecuación normal del plano

$$P = \{v + sw_1 + tw_2 : s, t \in \mathbb{R}\}?$$

Respuesta

Debemos encontrar $u \in \mathbb{R}^3$ no nulo perpendicular a w_1 y w_2. Es decir, que $\langle u, w_1\rangle = \langle u, w_2\rangle = 0$

Ejemplo

Dar la ecuación normal del plano

$$P = \{(1,1,0) + s(-1,0,-1) + t(0,1,-2) : s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Debemos encontrar $u = (a,b,c)$ perpendicular a $(-1,0,-1)$ y $(0,1,-2)$. Esto es equivalente a que se cumplan las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} \langle u, (-1,0,-1)\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -a-c=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-c, \\ \langle u, (0,1,-2)\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad b-2c=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=2c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier $u = (-c, 2c, c)$ con $c \in \mathbb{R}$ satisface estas igualdades.

Por ejemplo, podemos elegir $c = 1$ y entonces $u = (-1,2,1)$.

Por otro lado calculamos $\langle (1,1,0), (-1,2,1) \rangle = 1$. Concluimos entonces que

Ejemplo

La ecuación normal del plano

$$P = \left\{ (1,1,0) + s(-1,0,-1) + t(0,1,-2) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

es

$$P = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y + z = 1 \right\}$$

Observación

Para encontrar al vecto normal al plano nos preguntamos qué $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfacen las igualdades

$$\begin{cases} -a - c = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$$

Esto es un ejemplo de un sistema de ecuaciones, nuestro próximo tema de estudio.

En esta clase vimos como describir planos en $\mathbb{R}^3$.

Similarmente a las rectas en $\mathbb{R}^2$ podemos hacerlo de forma paramétrica o implícita.

Pero a diferencia de las rectas necesitamos dos parámetros y no uno porque “un plano es más grande que una recta”.

Para finalizar, notemos que cuando quisimos dar ejemplos de puntos pertenecientes a una recta o un plano presentados de forma implícita nos preguntamos

- ¿Qué $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisface $ax + by = c$? en el caso de una recta
- ¿Qué $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisface $ax + by + cz = c$? en el caso de un plano.

En otras palabras, buscamos soluciones a las respectivas ecuaciones. Como lo hicimos cuando buscamos el vector normal.

Este tipo de problemas estudiaremos enla próxima unidad de la materia.