INTEGRALES:

- Fraccionarias **(Pág 15 notas del profe 1)**: Sea a = ∫ p(x)/q(x)
    - Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos ((x-r1)(x-r2) … (x-rn)); Sacar constantes A1,A2,Ak tq quede A1/x-r1 + A2/x-r2 … Esto se aplica cuando q(x) tiene raices reales.
    - Caso 2: q es producto de polinomios de grado 1 todos iguales, osea q(x) = (x-r)^k. Sacamos constantes A1,Ak tq A1/x-r + A2/(x-r)^2 + Ak/(x-r)^k.
    - Caso 3: q es producto de polinomios de grado 1, algunos de los cuales se repiten, Osea q(x) = (x-r1)...(x-ri-1)^ki … (x-rn)^kn
    - Caso 4: q es producto de factores (x-ri)^Ki y/o polinomios de grado 2 sin raices reales y no se repiten. Osea q(x) = (x-ri)^k … (x-rn)^kn (x^2+α1+ß1) … (x^2+αn+ßn).

CRITERIOS PARA SERIES:

- ***COMPARACIÓN***: Tengo que encontrar una serie MÁS GRANDE que CONVERJA o una MAS CHICA que DIVERJA

- **CRITERIO DE LA INTEGRAL:**
    - f es continua y decreciente
    - f(x) > 0 Para todo x e [1,inf]
    - Entonces sea an = f(n) se cumple que ∑[1,inf] an converge sii (integral) [1,inf] f(x) dx converge

- **CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA SERIES ALTERNANTES:** Si la serie es decreciente y su lim n-> inf = 0, entonces ∑(-1)^n an converge

- **Criterio del cociente:**
    - Sea r = lim n=∞ an+1/an
        - Si r < 1 => Converge absolutamente
        - Si r > 1 => Diverge
        - r = 1 no asegura nada

\- **El CRITERIO DE LA RAÍZ** es igual pero con lim n=∞ nroot an
\- Un extra:
  \- Si tengo mi serie an que converge, encuentro una serie bn que converge y ∑an/bn converge

SERIES DE POTENCIAS:

Cuando aplicamos cociente, sea L = lim n->∞ (cn+1/cn) Sea R = radio de convergencia

- Si 0 < L < inf, Entonces R = 1/L
- Si L = 0 , Entonces R = inf
- Si L = inf, Entonces R = 0

Si la serie esta centrada en a = n con n != 0, para calcular el intervalo de convergencia, hay que usar x = a - R, x = a + R (I: a-R < x < a+R)
Tener en cuenta que el x tiene que estar solo y formulado de la manera (x-a)^n, si no esta asi lo tenes que llevar a esa forma.

SERIES DE TAYLOR:

(Def) Serie de taylor centrada en a: Dada una función f que tiene derivadas en todos los ordenes en a, Se llama serie de taylor centrada en a a la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Polinomio de taylor de f de orden n centrado en a:

$$T_{n,a}(x) \doteq \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j :$$

Resto de taylor de n centrado en a:
R(n,a)(x) = f(x) - T (n,a) (x) => f(x) = R(n,a)(x) + T (n,a) (x)

Teorema: Sea f una función tq existe la derivada n-sima de f en a, ∀ n >= 0, se cumple:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ \forall x \in (a-c, a+c) \iff \lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x) = 0 \ \forall x \in (a-c, a+c).$$

Formula de lagrange para el resto:

<u>Teorema</u> (Fórmula de Lagrange para el resto). Sea f una funcion tq existen $f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe t entre x y a ($t \in (x,a)$ si $x<a$ y $t \in (a,x)$ si $x>a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

<u>Definición</u>: llamamos fórmula de Taylor a $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

con t entre a y x.

$$= T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Si te pide algo del estilo *"Determine el orden n del polinomio de Taylor de f , centrado en a = t, que se necesita para aproximar alguna funcion con un error menor que E"* Tenes que sacar el |Rn,a| y encontrar el menor n tal que |Rn,a| < E. (muy importante el valor abs!)

RECTA Y PLANO

- Producto escalar: <A,B> = a1b1 + a2b2 + ... anbn

- Coseno:
  cos(t) = | <a,b> |

  ||a||.||b||

- Si nos dan 3 puntos A,B,C entonces a = ->AB b = ->AC

- ->
  XY = Y - X

- Ecuación vectorial del plano generado por V y W que pasa por el punto P:
  - P + tV + rW
  - El punto (x,y,z) pasa por el plano? => hacer sistema de ecuaciones: {P1+tv1+rw1=x, P2+tv2+rw2=y,P3+tv3+rw3=z}

- Ecuación del plano normal a N que pasa por P0: **<∇-p0,N> = 0**

- *Vector posición* = la función evaluada en a
- *Vector tangente* = la derivada de la función evaluada en a

DERIVADAS

Bola abierta de centro a y radio r: $B(a,r) = \{x \in R \mid ||x-a|| < r\}$

- u es un vector unitario si $||u|| = 1$, si u no es unitario consideramos $v = u/||u||$ (unitario y misma dirección que u)

- Ec. del Plano tangente al gráfico: **$z = (x-p0)*fx(p0,p1)+(y-p1)*fy(p0,p1)+f(p0,p1)$**

- Ec de la recta normal al plano tangente: **$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(-fx(a,b),-fy(a,b),1)$**

- Regla de la cadena (caso 1): **$df/dt = fx(x(t),y(t))*x`(t) + fy(x(t),y(t))*y`(t)$**
(reemplazar todas las ocurrencias de x y y por x(t) y y(t) en las ecuaciones fx(x,y) y fy(x,y))

- Regla de la cadena (caso 2): $af/as = fx(x(s,t),y(s,t))\ xs(s,t) + fy(x(s,t),y(s,t))\ ys(s,t)$

- **Derivada direccional: $\langle \nabla f(p0),v \rangle$** *donde v es el vector dado*
  si v no es unitario, hay que hacer $v/||v||$

- Gradiente de f en p0 = **$\nabla f(p0) = (fx(p0),fy(p0),fz(p0))$**

- Tasa de crecimiento:
  - Máximo: $\nabla/||\nabla||$
  - Minimo: $-\nabla/||\nabla||$

Todo esto si el gradiente evaluado en el punto da distinto de 0

- Ecuación vectorial del plano tangente al gráfico:
(Partiendo de la fórmula anterior)
$(p0,p1,f(a,b)) + t(1,0,fx(a,b)) + s(0,1,fy(a,b))$

- Ec. Plano tangente a la superficie (de nivel) que pasa por el punto dado:
  $\langle (x,y,z) - p0, \underbrace{\nabla f(p0)}_{\text{Vector normal al plano}} \rangle = 0$

- Recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x0,y0):
  $(x,y) = (x0,y0) + t((-fy(x0,y0) , fx(x0,y0))$

- Ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado (po,p1):
$(po,p1) + t(\nabla)$

- Recta perpendicular al plano de f que pasa por el punto p:
  - Calcular z = Ec del plano tangente al grafico, ahora $f(x,y,z) = z - g(x,y)$ (donde g es la función dada), por lo que tu vector normal es

(-g_x(x0,y0),-g_y(x0,y0),1) y la recta ahora es p + t (vector normal) para t perteneciente a los reales

Si f tiene un maximo o minimo local entonces:
f´(x0) = 0 o f´(x0) No existe

- Extremo local: Se dice que existe un extremo local si f tiene un maximo o minimo local en (x0,y0)

- Si f tiene un extremo local en (x0,y0) y existen las derivadas parciales de f en (x0,y0), entonces fx(x0,y0) = fy(x0,y0) = 0

- Dada f, (x0,y0) se llama **punto crítico** de f si fx(x0,y0) = fy(x0,y0) = 0 (o sea ∇f(x0,y0) = 0). Decimos además que (x0,y0) es **punto singular** de f si no existe fx(x0,y0) o no existe fy(x0,y0)

- Test de derivadas segundas:

Sup ∇f(x0,y0) = (0,0)
Sea D = fxx(x0,y0) * fyy(x0,y0) * [fxy(x0,y0)]^2, entonces (D = matriz hessiana o discriminante)

- Si D > 0 y fxx(x0,y0) > 0 (o fyy(x0,y0) > 0) => f tiene minimo local en (x0,y0)
- Si D > 0 y fxx(x0,y0) < 0 (0 fyy(x0,y0) < 0) => f tiene maximo local en (x0,y0)
- Si D < 0 entonces f no tiene un maximo local ni un minimo local en (x0,y0), en este caso decimos que f tiene un punto silla en (x0,y0)
- Si D = 0 no se puede asegurar nada

EXTRAS:

- \- Derivada de 1/(sin^2(x)) = -cot(x) -> Integral de cot(x) = ln(sinx)
- \- Integral de ln(x) = xln(x) - x + c
- \- sin^2(x) = 1 - cos^2(x)
- \- sinx/x = cosx
  - \- si |a| < 1 entonces ∑a^n = 1/(1-a)
  - \- si |a| >= 1 entonces ∑a^n diverge
- **- SERIE GEOMETRICA: ∑ r^n**
  - \- si |r| < 1 => la serie converge y = 1/(1-r)
  - \- si |r| >= 1 la serie diverge
- \- √2n = √n*√2
- \- lim n->inf (1+k/n)^n = e^k
- \- cos(npi) = (-1)^n
- \- e^(ln(x)^x) = e^(xln(x))
- \- a^x = e^(ln(a^x))
- **- P-SERIES**
  - \- Dada la serie 1/n^p si p > 1 converge , si 0 < p <= 1 la serie diverge
- \- lim n->inf ((n+1)/n)^n = e
- \- Integral de 1/ln(x) = li(x) (Logaritmo Integral)
- \- ln(e) = 1

- - sen(11pi/2) = -1
- **TAYLOR: 1/1-x = ∑n=0,inf x^n , converge cuando |x| < 1**
- sen(x) = ((-1)^n * y^(2n+1))/(2n+1)!
- f(y) = e^y = Σ[0,inf) y^m/m!
- Vimos que $y \in (-t,t)$ $\quad |R_{m,0}(y)| = e^t \dfrac{|y|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

  si f(x) = e^x
- e^(-inf) = 0
- **Recta tangente a y en un punto p: y - y0 = m(x - x0) donde m es la derivada de y evaluada en x0**
- $$f(x) = e^{5x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5^m x^m}{m!}$$

DEFINICIONES:

- Superficie de nivel: Llamamos superficie de nivel k de f al subconjunto de Dom(f) definido por Sn = {(x,y,z) e Dom(f) : f(x,y,z) = k}

Aplica fórmula de reducción:

$$\int \cos^{n}(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$

con $n = 4$:

α grados	α radianes	sen α	cos α	tan α
0°	0	0	1	0
30°	$1/_6\,\pi$	$1/_2$	$\sqrt{3}/_2$	$\sqrt{3}/_3$
45°	$1/_4\,\pi$	$\sqrt{2}/_2$	$\sqrt{2}/_2$	1
60°	$1/_3\,\pi$	$\sqrt{3}/_2$	$1/_2$	$\sqrt{3}$
90°	$1/_2\,\pi$	1	0	∞
120°	$5/_8\,\pi$	$\sqrt{3}/_2$	$1/_2$	$\sqrt{3}$
135°	$3/_4\,\pi$	$\sqrt{2}/_2$	$-\sqrt{2}/_2$	-1
150°	$5/_8\,\pi$	$1/_2$	$\sqrt{3}/_2$	$-\sqrt{3}/_3$
180°	π	0	-1	0
225°	$5/_4\,\pi$	$-\sqrt{2}/_2$	$-\sqrt{2}/_2$	1
270°	$3/_2\,\pi$	-1	0	∞
315°	$7/_4\,\pi$	$-\sqrt{2}/_2$	$\sqrt{2}/_2$	-1

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \lim_{x\to b-}(F(x)) - \lim_{x\to a+}(F(x))$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

[Integral impropia e^a|x| y error con taylor]

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.