Álgebra/Álgebra II
Clase 3 - Rectas y planos 1

FAMAF / UNC

1 de sepetiembre de 2020

En este archivo introduciremos las nociones de “norma”, “distancia” y “ángulo” en $\mathbb{R}^n$ usando el producto escalar.

Además veremos varias maneras describir una recta en el plano.

Estas diapositivas estan basadas en la Secciones 1.3 y 1.5 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

En la siguiente definición usamos el producto escalar definido la clase pasada.

Recordemos que $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Definición

Si $v \in \mathbb{R}^n$, la norma o longitud de v es

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Más explícitamente, si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

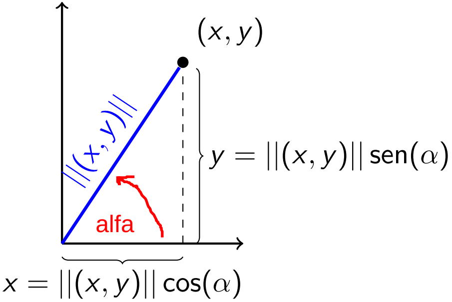
$$||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Para $n = 2$ y $n = 3$ este valor coincide con la distancia del 0 a v. Como vemos a continuación.

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Por el Teorema de Pitágoras, este valor es la longitud de la hipotenusa:

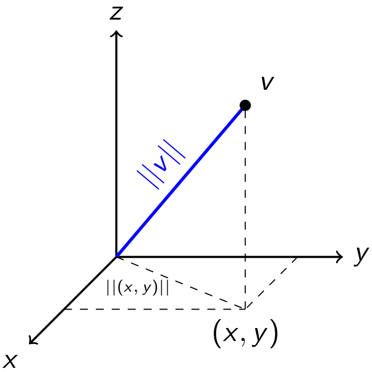


Las igualdades para x e y son propiedades trigonométricas de los triángulos rectángulos.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

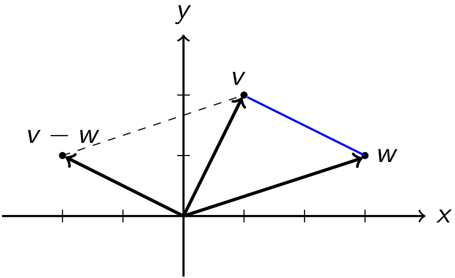
Por la aplicación reiterada del Teorema de Pitágoras obtenemos que la distancia de 0 a v es igual a la norma $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Definición 1.3.1

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. La distancia entre v y w es $||v - w||$.

En el siguiente gráfico podemos visualizar que esta definición coincide con la definición de distencia en $\mathbb{R}^2$



Proposicion 1.3.1

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Demostración: La propiedad **P3** del producto escalar implica que

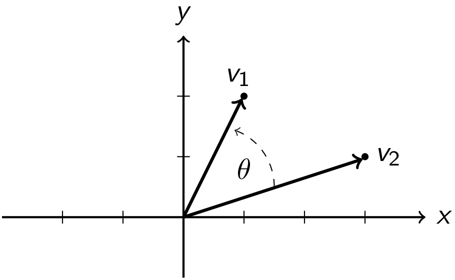
$$||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Es decir $||\lambda v||^2 = \lambda^2 ||v||^2$, por lo tanto, $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$. □

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ y θ el ángulo comprendido entre v_1 y v_2. Entonces

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1|| \, ||v_2|| \cos(\theta).$$



Demostración

Sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Recordar página 6.

Entonces las coordenadas de v_1 y v_2 son

$$v_1 = (x_1, y_1) = ||v_1||\Big(\cos(\alpha_1), \operatorname{sen}(\alpha_1)\Big),$$

$$v_2 = (x_2, y_2) = ||v_2||\Big(\cos(\alpha_2), \operatorname{sen}(\alpha_2)\Big),$$

por lo tanto

$$\langle v_1, v_2\rangle = ||v_1||\,||v_2||\Big(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2)\Big).$$

Demostración

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2. $\square$

Corolario

Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right).$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición

El ángulo comprendido entre dos vectores v_1 y v_2 en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right).$$

Una recta en $\mathbb{R}^2$ no es más que cualquier línea recta en el plano.

Para trabajar matemáticamente con una recta necesitamos una definición más precisa.

Por empezar, pensamos a una recta como un conjunto de puntos en el plano.

A continuación veremos varias maneras de describir en forma conjuntista a una recta.

Definición 1.5.1

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que a y b no son simultáneamente 0.
La recta L con ecuación implícita

$$ax + by = c$$

es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen dicha ecuación.
Es decir,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, ax + by = c\}$$

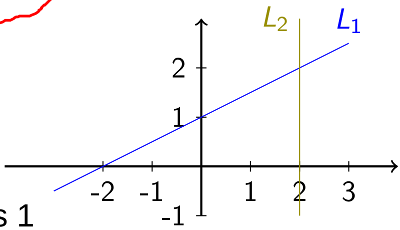
Observación

Se dice que esta es la forma implícita porque estamos describiendo al conjunto de forma implícta. Es decir, decimos que propiedad debe satisfacer un elemento para estar en el conjunto.

Ejemplos

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\tfrac{1}{2}x + y = 1\} \text{ y } L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2\}$$

(-1/2)*2+1*2=1



(-1/2)*0+1*0 no es 1

Puntos que SI pertencen a L_1

(0,1), (-2,0), (2,2)

Puntos que SI pertencen a L_2

(2,0), (2,5), (2,1000), (2,t)

con t cualquier real

Puntos que NO pertencen a L_1

(0,0), (1,1)

Puntos que NO pertencen a L_2

(1,0), (5,7)

Afirmación

Todas las rectas del plano se pueden describir de forma implícita.

Demostración: Si L es una recta en $\mathbb{R}^2$ entonces puede ser paralela al eje vertical (como L_2) o no (como L_1).

Si es vertical, quiere decir que todos los puntos en ella son de la forma (c, y). En este caso la ecuación que la define es

$$1x + 0y = c.$$

Si no lo es, entonces es el gráfico de una función lineal $y = ax + c$. Entonces la ecuación que define a la recta es

$$-ax + y = c.$$

Observación

Una misma recta puede estar definida por varias distintas ecuaciones.

Por ejemplo, si L es definida por la ecuación $ax + by = c$ entonces también es definida por la ecuación $3ax + 3by = 3c$.

En efecto, $(x, y) \in L$ si sólo si satisface la primer ecuación. Además

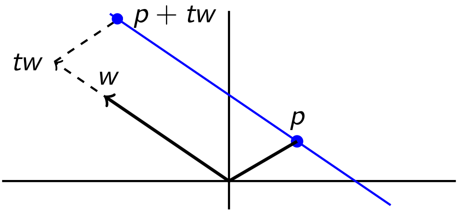
$$ax + by = c \Longleftrightarrow 3ax + 3by = 3c$$

Obviamente, pasa lo mismo si cambiamos 3 por cualquier otro número real no nulo.

¿Por qué no nulo?

Porque si multiplicamos en ambos lados por 0, nos queda $0 = 0$ y esta ecuación es satisfecha por todo par de números. O sea, obtendríamos el plano.

Otra manera de describir una recta es indicando un punto por dónde pasa y en qué dirección lo hace.



Definición 1.5.2

Sean $p, w \in \mathbb{R}^2$ tal que $w \neq 0$. La recta L que pasa por p paralela (o con dirección) a w es

$$L = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}.$$

Observación

Se dice que

$$L = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}.$$

es la ecuación (o forma o representación) paramétrica de la recta L porque se describen todos los puntos de la recta utilizando el parámetro $t \in \mathbb{R}$.

Pues todos los puntos pertencientes a la recta son de la forma

$$(p_1 + tw_1, p_2 + tw_2)$$

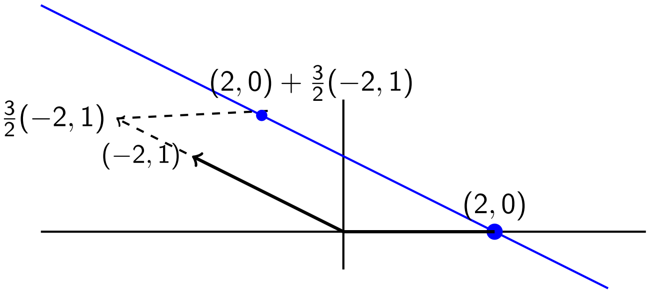
donde $p = (p_1, p_2)$, $w = (w_1, w_2)$ y $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

La representación paramétrica de la recta pasa por $(2,0)$ con dirección $(-2,1)$ es

$$L = \{(2,0) + t(-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(2-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

En el gráfico vemos el punto pertenciente a L cuando $t = \frac{3}{2}$

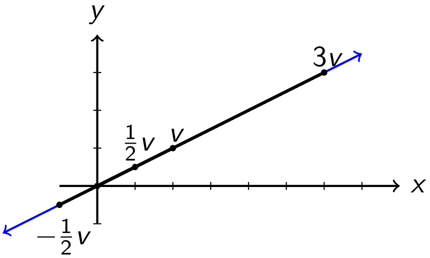


Rectas que pasan por el origen

Observación

La recta que pasa por $p = (0,0)$ con dirección v consiste en "estirar" para un lado y otro al vector v.

Por ejemplo, si $v = (2,1)$[1], obtenemos la recta de la página 24 de la clase pasada.



[1] en el archivo anterior decía erroneamente $v = (1,2)$

Observación

Como en la forma implícita, una recta puede tener distintas representaciones paramétricas.

Basta con considerar cualquier otro punto por el que pase y/o cualquier múltiplo no nulo del vector de dirección w.

Observación

La representación paramétrica también se suele llamar explícita aunque no es del todo explícita. Para serlo deberíamos dar explícitamente todos los puntos de la recta. Lo cual es imposible porque una recta tienen infinitos puntos. Pero es más explícita que la forma implícita.

Una misma recta puede ser descripta de forma paramétrica o de forma implícita.

Dependerá del contexto que forma nos conviene usar.

En el Ejercicio (13a) de la Práctica 1 se pide describir una misma recta de ambas maneras.

Veamos a continuación algunos ejemplos de como pasar de una forma a otra.

De paramétrica a implícita

Ejemplo 1.5.3

Sean $p = (2, 1)$ y $w = (-1, 5)$. Dar la forma implícita de la recta que pasa por p con dirección w.

Los puntos $(x, y) \in L$ son de la forma

$$(x, y) = (2 - t, 1 + 5t) \Leftrightarrow x = 2 - t \wedge y = 1 + 5t$$

para algún $t \in \mathbb{R}$. Despejando t en ambas igualdades, tenemos que

$$t = \boxed{2 - x = \frac{y - 1}{5}.} = t$$

Es decir, todos los puntos de L satisfacen esta ecuación. Si reescribimos esta ecuación obtenemos que

Respuesta

La forma implícta de L es $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + y = 11\right\}$

De implícita a paramétrica

Ejemplo

Encontrar la representación paramétrica de la recta L definida por la ecuación $3x + 2y = 1$.

Cualquier punto $(x, y) \in L$ satisface la ecuación y por lo tanto $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Entonces

$$(x, y) = \left(x, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + x\left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

Recíprocamente, cualquier punto descripto de esta forma satisface la ecuación pues $3x + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right) = 1$ y por lo tanto pertence a L.

Dicho de otro modo, L es la recta que pasa por $(0, \frac{1}{2})$ con dirección $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

De implícita a paramétrica

Ejemplo

Encontrar la representación paramétrica de la recta L definida por la ecuación $3x + 2y = 1$.

......

Dicho de otro modo, L es la recta que pasa por $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ con dirección $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

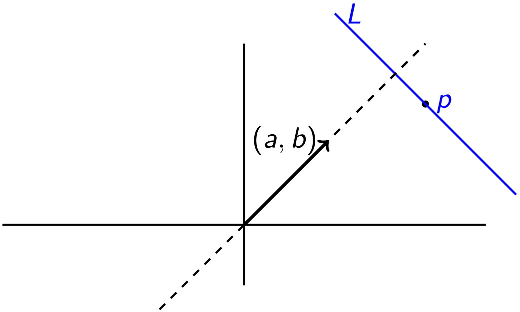
Respuesta

La representación paramétrica de L es $\left\{\left(0, \frac{1}{2}\right) + t\left(1, -\frac{3}{2}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

Pregunta (Ejericicio 13,14)

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

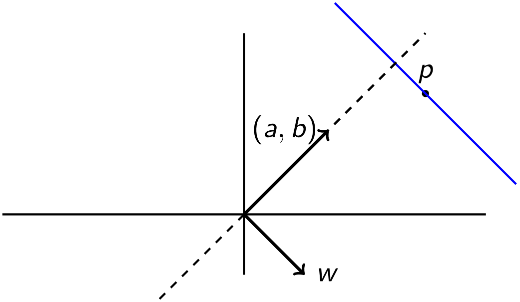
¿Cuál es la forma paramétrica de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por $p = (x_0, y_0)$?



Para responder a la pregunta, comencemos por recordar que dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son perpendiculares si el producto escalar entre ellos es nulo.

Sea $w \in \mathbb{R}^2$ no nulo tal que $\langle w, (a, b)\rangle = 0$.

Entonces la recta que buscamos es la recta que pasa por p con dirección w.



Para terminar de responder la pegunta inicial debemos encontra un $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ortogonal a (a, b)[2]. Es decir, queremos x e y tales que

$$\langle w, (a, b) \rangle = ax + by = 0$$

Lema

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces $w = (\quad , \quad)$ es ortogonal a (a, b)

[2] Esto es como el Ejercicio 5 de la Práctica 1

Pregunta

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

¿Cuál es la forma implícita de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por $p = (x_0, y_0)$?

Para responder esta pregunta utilizar el argumento que vimos anteriormente para pasar de la forma paramétrica a la forma implícita.

Alternativamente podriamos proceder como lo hacemos a continuación.

Sabemos que todo punto $(x, y) \in L$ es de la forma $(x, y) = p + tw$ donde $w \in \mathbb{R}^2$ es no nulo y $\langle w, (a, b) \rangle = 0$.

Entonces todo punto de L satisface

$$ax + by = \langle (x, y), (a, b) \rangle = \langle p + tw, (a, b) \rangle = \langle p, (a, b) \rangle = ax_0 + by_0.$$

Si a este último valor lo llamos c obtnemos la forma implícita.

Pregunta

Sean $(a, b), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

¿Cuál es la forma implícita de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por $p = (x_0, y_0)$?

Respuesta

Llamemos $c = ax_0 + by_0$. Entonces

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

Observación

Podemos usar la notación del producto escalar para reescribir la forma implícita de a una recta.

Si una recta L es definida por la ecuación $ax + by = c$ y $(x_0, y_0) \in L$, entonces

$$c = ax_0 + by_0 = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle$$

y

$$\begin{aligned} L &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (a, b) \rangle = c \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (a, b) \rangle = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y) - (x_0, y_0), (a, b) \rangle = 0 \right\} \end{aligned}$$

Ejemplo

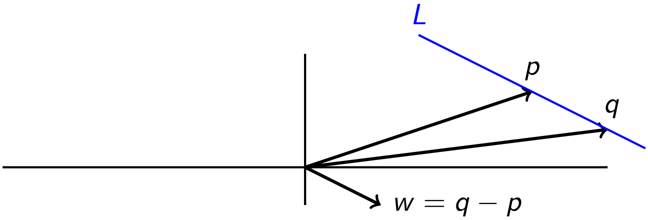
Encontrar la ecuación implícita de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es perpendicular a $(-2, 3)$.

Respuesta

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = -7\right\}$$

En efecto, por lo visto antes $(a, b) = (-2, 3)$ y
$c = (-2)2 + 3(-1) = -7$

Bien es sabido que sólo hay una recta que pasa por dos puntos dados $p, q \in \mathbb{R}^2$. Graficamente esta es:



La manera más fácil de describir dicha recta es usando la forma paramétrica.

En efecto, del gráfico vemos que L es la recta que pasa por p con dirección $w = p - q$.

Lo anterior se resume en lo siguiente:

Afirmación

Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ y $w = p - q$. Entonces la única recta que pasa por ambos puntos es

$$L = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}.$$

Segmento entre dos puntos

La representación paramétrica también es útil para describir el conjunto de los puntos que se encuentran en el segmento de línea entre dos puntos dados.

Más precisamente, el segmento entre p y q consiste en todos los puntos de la forma

$$p + t(q - p) \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como t "va" de 0 a 1, podemos pesar que recorremos el segemento desde

- p, esto es cuando $t = 0$, a
- q, esto es cuando $t = 1$.

Hemos visto varias maneras describir una recta en $\mathbb{R}^2$. Destacandosé la forma implícita y paramétrica.

La próxima clase haremos un recorrido similar con los planos en $\mathbb{R}^3$.

Esto aparecera nuevamente cuando analicemos los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones.