Ramos Julián
Hoja 2

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad a = 2$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x+2-2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2-(-(x-2))} = \frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)\right)}$$

Hago aparecer el 2 — lo llevo a la forma $+-x$ — lo llevo a la forma $1-x$

Por ultimo nuestra funcion nos queda

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)}$$

y ahora podemos usar la representacion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ cuya serie de potencias es $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (*)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n$$

Calculamos intervalo de convergencia

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n \xrightarrow[\text{de la raiz}]{\text{Aplico criterio}} \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{x-2}{2} \overset{(-x-2)\text{ constante}}{=} |-x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Como $0 < \frac{1}{2} < \infty$, $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Veo que pasa en los extremos $a-R$, $a+R$

$2-2 < x < 2+4$

$\boxed{0 < x < 4}$

Veamos ahora que pasa en los extremos

$x = 0$, $x = 4$

$x = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{0-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0} 1^n = \sum_{n=0} 1 \rightarrow$$

Cualquier serie de una constante $\neq 0$ diverge. Esto lo podemos ver más claramente con el

$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Diverge!

$x = 4$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rightarrow$$ Serie geometrica con $|r| \geq 1$, Diverge!

Por lo que el intervalo de convergencia de la serie es:

$0 < x < 4$

b)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} (x-10)^n$$ Aplico criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{(n+1)}(x-10)^{(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\cancel{3^n (x-10)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(x-10)}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1}\right| =$$

$$3|x-10| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = 3|x-10| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}}\right| = 3|x-10| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right|$$

$$= 3|x-10| \quad \left|\frac{1}{\sqrt{1+0}}\right| = 1 \cdot 3 = 3$$

Como $0 < 3 < \infty$, $R = \frac{1}{3}$

Ahora vemos que pasa en los extremos $a-R, a+R$

$$10 - \frac{1}{3} < x < 10 + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{29}{3} < x < \frac{31}{3}}$$

Ramos Julián

Hoja 3

$x = \frac{29}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{29}{3} - 10\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot (-1)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}\right)^n}{\sqrt{n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n (-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow$$

Serie alternante y decreciente con $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, Converge según el criterio de Leibniz

Es decreciente ya que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$x = \frac{31}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{31}{3} - 10\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3}^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow$$

P-serie con $0 < p \leq 1$, Diverge

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}$

Por lo que el intervalo de convergencia nos queda

$$\frac{29}{3} \leq x < \frac{31}{3}$$