Práctico 2
Matemática Discreta I – Año 2018
FAMAF

1. La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos.
   a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?
   b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?
   c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?
   d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?
   e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?
2. ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?
3. ¿Cuántos números no negativos múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?
4. En los boletos viejos de ómnibus, aparecía un *número* de 5 cifras (en este caso podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.
   a) ¿Cuántos boletos capicúas había?
   b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?
5. Las antiguas patentes de auto tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Las nuevas patentes tienen 3 letras y luego 3 dígitos. ¿Con cuál de los dos criterios pueden formarse más patentes?
6. En un estante hay 3 libros distintos de matemáticas, 4 libros diferentes de Física y una enciclopedia de química que consta de 5 tomos diferentes. ¿De cuántas formas distintas se puede ordenar los libros si los libros de la misma materia tienen que estar juntos? ¿De cuantas formas se puede ordenar los mismos libros si solamente los libros de matemáticas tienen que estar juntos?
7. En una familia de 5 miembros dos hermanos están disgustados ¿De cuantás formas puede sentarse la familia alrededor de una mesa si los dos hermanos no se pueden sentar juntos?
8. Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos,
   a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?
   b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?

   c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

9. Mostrar que si uno arroja un dado n veces y suma todos los resultados obtenidos, hay $\dfrac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.
10. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?
11. ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?
12. El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho, o tener 33?
13. ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?
14. ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:
    a) No hay restricciones en la selección?
    b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?
    c) El comité debe tener al menos 3 profesores?
    d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?
15. Si en un torneo de fútbol participan $2n$ equipos, probar que el número total de opciones posibles para la primera fecha es $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$. sugerencia: use un argumento por inducción.
16. En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.
17. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?
18. *a*) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 hombres y 6 mujeres en una mesa circular si nunca deben quedar dos mujeres juntas?
    b) Ídem, pero con 10 hombres y 7 mujeres.
19. *a*) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA
    b) Ídem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.

   c) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?

20. ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?
21. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?
22. En un salón hay n estudiantes. ¿De cuántas formas se puede crear un comité de k estudiantes si uno de los miembros del comité es nombrado como presidente?
23. Para $0 \leq k \leq n$ probar

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

24. (Identidad de Vandermonde) En un salón de $m+n$ estudiantes, hay m mujeres y n hombres. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de tamaño k con j mujeres? Usar la respuesta para expresar de otra forma el número de comités que se pueden hacer de tamaño k en dicho salón; variando el número de mujeres desde 0 hasta m.
25. Para $m, n \geq 0$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

26. En un salón de n estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité donde uno de los miembros es designado como el presidente y el comité puede ser de cualquier tamaño.
27. Sea $n \geq 1$. Probar

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

28. En un grupo de n estudiantes, ¿de cuántas formas se puede hacer un comité de tamaño k que contiene un subcomité de tamaño m.
29. Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

30. Probar que para todo i, j, $k \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

31. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

32. Deducir una fórmula para las sumas

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$$

y

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

33. Probar las siguientes identidades

a) $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$, $n\geq 1$.

b) $\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$, $1\leq r\leq n$.

c) $\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}$, $n\geq 1$.

d) $\binom{2}{2}+\binom{4}{2}+\binom{6}{2}+\ldots+\binom{2n}{2}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$, $n\geq 2$.

e) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\binom{2n+1}{3}$, $n\geq 1$.

f) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$, $n\geq 1$.

g) $\binom{\binom{n}{2}}{2}=3\binom{n}{4}+3\binom{n}{3}$, $n\geq 4$.

¿De cuáles identidades puede dar una situación o interpretación combinatoria que las justifique?

34. Con 20 socios de un club se desea formar 5 listas electorales (disjuntas). Cada lista consta de 1 Presidente, 1 Tesorero y 2 vocales. ¿De cuántas formas puede hacerse?

35. ¿De cuántas formas se pueden fotografiar 7 matrimonios en una hilera, de tal forma que cada hombre aparezca al lado de su esposa?

36. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 14 libros distintos entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 libros?