Cálculo de Primas con Principios Clásicos y Función Generadora de Momentos

Modelos individual y colectivo, principios de prima, ejemplo Poisson–Exponencial

Jhonier Rangel

Curso de Análisis Actuarial

25 de agosto de 2025

Mapa de la charla

Modelos individual y colectivo

Modelo individual

Pérdidas $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con X_i severidades (i.i.d. típicamente).

Modelos individual y colectivo

Modelo individual

Pérdidas $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con X_i severidades (i.i.d. típicamente).

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$$

Modelos individual y colectivo

Modelo individual

Pérdidas $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con X_i severidades (i.i.d. típicamente).

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$$

Modelo colectivo (compuesto)

Número de siniestros N aleatorio (p.ej. Poisson), y severidades $\{X_i\}$ i.i.d., independientes de N.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Modelos individual y colectivo

Modelo individual

Pérdidas $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con X_i severidades (i.i.d. típicamente).

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$$

Modelo colectivo (compuesto)

Número de siniestros N aleatorio (p.ej. Poisson), y severidades $\{X_i\}$ i.i.d., independientes de N.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Momentos del compuesto

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X], \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(N)\,\mathbb{E}[X]^2.$$

FGM: definición y propiedades

Definición

Para una r.v. Y, la FGM es

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right], \quad \text{para } t \text{ en un entorno de } 0.$$

FGM: definición y propiedades

Definición

Para una r.v. Y, la FGM es

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right], \quad \text{para } t \text{ en un entorno de } 0.$$

- Derivadas en 0 dan momentos: $M_Y^{(k)}(0) = \mathbb{E}[Y^k]$.

FGM: definición y propiedades

Definición

Para una r.v. Y, la FGM es

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right], \quad \text{para } t \text{ en un entorno de } 0.$$

- Derivadas en 0 dan momentos: $M_Y^{(k)}(0) = \mathbb{E}[Y^k]$.
- La *función generadora cumulante* $K_Y(t) = \log M_Y(t)$ suma bien en independientes.

FGM: definición y propiedades

Definición

Para una r.v. Y, la FGM es

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right], \quad \text{para } t \text{ en un entorno de } 0.$$

- Derivadas en 0 dan momentos: $M_Y^{(k)}(0) = \mathbb{E}[Y^k]$.
- La *función generadora cumulante* $K_Y(t) = \log M_Y(t)$ suma bien en independientes.
- Si $Y_1, \ldots, Y_n$ indep., entonces $M_{\sum Y_i}(t) = \prod M_{Y_i}(t)$.

FGM del agregado compuesto

Resultado clave (modelo colectivo)

Si $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ con N indep. de $\{X_i\}$ e i.i.d. X_i, entonces

$$M_S(t) = G_N(M_X(t)),$$

donde $G_N(z) = \mathbb{E}[z^N]$ es la *generatriz de probabilidad* de N.

FGM del agregado compuesto

Resultado clave (modelo colectivo)

Si $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ con N indep. de $\{X_i\}$ e i.i.d. X_i, entonces

$$M_S(t) = G_N(M_X(t)) \, ,$$

donde $G_N(z) = \mathbb{E}\left[z^N\right]$ es la *generatriz de probabilidad* de N.

Caso Poisson(λ)

Si $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, entonces $G_N(z) = \exp\{\lambda(z-1)\}$ y

$$M_S(t) = \exp\left\{\lambda\left(M_X(t) - 1\right)\right\} .$$

Prima pura (neto de riesgo)

Definición

La **prima pura** es el valor esperado de las pérdidas:

$$\Pi_0 = \mathbb{E}[S].$$

Prima pura (neto de riesgo)

Definición

La **prima pura** es el valor esperado de las pérdidas:

$$\Pi_0 = \mathbb{E}[S].$$

Modelo colectivo

$$\Pi_0 = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].$$

Principio del valor esperado

Fórmula

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\,\mathbb{E}[S], \qquad \theta > 0.$$

Principio del valor esperado

Fórmula

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\,\mathbb{E}[S], \qquad \theta > 0.$$

- Proporcional al riesgo esperado.

Principio del valor esperado

Fórmula

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\,\mathbb{E}[S], \qquad \theta > 0.$$

- Proporcional al riesgo esperado.
- No distingue dispersión.

Principio del valor esperado

Fórmula

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\,\mathbb{E}[S], \qquad \theta > 0.$$

- Proporcional al riesgo esperado.
- No distingue dispersión.
- Simple, muy usado como base (carga de seguridad θ).

Principio de la varianza y desviación estándar

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

Principio de la varianza y desviación estándar

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

Desviación estándar

$$\Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\, \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}.$$

Principio de la varianza y desviación estándar

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta \, \mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

Desviación estándar

$$\Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta \, \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}.$$

- Incorporan *riesgo de dispersión*.

Principio de la varianza y desviación estándar

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

Desviación estándar

$$\Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\,\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}.$$

- Incorporan *riesgo de dispersión*.
- θ calibra aversión al riesgo/carga de seguridad.

Exponencial (aversión absoluta $a > 0$)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log \mathbb{E}\left[e^{aS}\right] \;=\; \frac{1}{a}\log M_S(a).$$

Principio exponencial (vía FGM) y Esscher

Exponencial (aversión absoluta $a > 0$)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log \mathbb{E}\left[e^{aS}\right] \;=\; \frac{1}{a}\,\log M_S(a).$$

Esscher (parámetro r)

$$\Pi_{\mathsf{Esscher}}(r) = \frac{\mathbb{E}\left[S\,e^{rS}\right]}{\mathbb{E}[e^{rS}]} \;=\; \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} \;=\; K_S'(r).$$

Principio exponencial (vía FGM) y Esscher

Exponencial (aversión absoluta $a > 0$)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a} \log \mathbb{E}\left[e^{aS}\right] = \frac{1}{a} \log M_S(a).$$

Esscher (parámetro r)

$$\Pi_{\mathsf{Esscher}}(r) = \frac{\mathbb{E}\left[S\, e^{rS}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{rS}\right]} = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r).$$

- Basados en la forma completa de la distribución mediante la FGM.

Principio exponencial (vía FGM) y Esscher

Exponencial (aversión absoluta $a > 0$)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a} \log \mathbb{E}\left[e^{aS}\right] = \frac{1}{a} \log M_S(a).$$

Esscher (parámetro r)

$$\Pi_{\mathsf{Esscher}}(r) = \frac{\mathbb{E}\left[S\, e^{rS}\right]}{\mathbb{E}[e^{rS}]} = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r).$$

- Basados en la forma completa de la distribución mediante la FGM.
- Coherentes con preferencias exponenciales y cambios de medida (Esscher).

Prima stop-loss (exceso de pérdida)

Definición

Para un deducible $d \geq 0$,

$$\Pi_{\mathsf{SL}}(d) = \mathbb{E}\big[(S-d)^{+}\big] = \int_{d}^{\infty} \big(1 - F_S(s)\big)\, ds.$$

Prima stop-loss (exceso de pérdida)

Definición

Para un deducible $d \geq 0$,

$$\Pi_{\mathsf{SL}}(d) = \mathbb{E}\big[(S-d)^+\big] = \int_d^\infty \big(1 - F_S(s)\big)\,ds.$$

- Prima de una cobertura *exceso de pérdida*.

Prima stop-loss (exceso de pérdida)

Definición

Para un deducible $d \geq 0$,

$$\Pi_{\mathsf{SL}}(d) = \mathbb{E}\big[(S-d)^+\big] = \int_d^\infty \big(1 - F_S(s)\big)\, ds.$$

- Prima de una cobertura *exceso de pérdida*.
- Útil con capas y reaseguro no proporcional.

Severidad exponencial

Supuesto

$X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ con densidad $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

Severidad exponencial

Supuesto

$X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ con densidad $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\beta}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$.

Stop-loss 1 siniestro

$$\mathbb{E}[(X-d)^+] = \frac{e^{-\beta d}}{\beta}.$$

Severidad exponencial

Supuesto

$X \sim \text{Exp}(\beta)$ con densidad $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\beta}$, $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$.
- $\text{MGF}: \ M_X(t) = \dfrac{\beta}{\beta - t}, \quad t < \beta$.

Stop-loss 1 siniestro

$$\mathbb{E}[(X-d)^+] = \frac{e^{-\beta d}}{\beta}.$$

Severidad exponencial

Supuesto

$X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ con densidad $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\beta}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$.
- $\mathrm{MGF}: \; M_X(t) = \dfrac{\beta}{\beta - t}, \quad t < \beta.$
- $\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{2}{\beta^2}$.

Stop-loss 1 siniestro

$$\mathbb{E}[(X-d)^+] = \frac{e^{-\beta d}}{\beta}.$$

Agregado Poisson–Exponencial

Frecuencia

$N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ (en un periodo), independiente de $\{X_i\}$.

Agregado Poisson–Exponencial

Frecuencia

$N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ (en un periodo), independiente de $\{X_i\}$.

FGM del agregado

$$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\} = \exp\left\{\lambda\left(\frac{\beta}{\beta - t} - 1\right)\right\}, \quad t < \beta.$$

Agregado Poisson–Exponencial

Frecuencia

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (en un periodo), independiente de $\{X_i\}$.

FGM del agregado

$$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\} = \exp\left\{\lambda\left(\frac{\beta}{\beta - t} - 1\right)\right\}, \quad t < \beta.$$

Momentos

$$\mathbb{E}[S] = \lambda\,\mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{\beta}, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(S) = \lambda\,\mathbb{E}[X^2] = \frac{2\lambda}{\beta^2}.$$

Ejemplo numérico (Poisson–Exponencial)

Parámetros

$\lambda = 10, \ \beta = 2 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0{,}5.$

Ejemplo numérico (Poisson–Exponencial)

Parámetros

$\lambda = 10, \ \beta = 2 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0{,}5.$

Momentos de S

$$\mathbb{E}[S] = \frac{10}{2} = 5, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \frac{2 \cdot 10}{2^2} = 5, \qquad \sigma_S =$$

Prima exponencial (a=0,1)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a} \log M_S(a) = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{\beta}{\beta - a} - 1\right) =$$

Con $\lambda = 10, \beta = 2, a = 0{,}1$:
$\Pi_{\exp} = 10/1{,}9 \approx 5{,}263.$

Ejemplo numérico (Poisson–Exponencial)

Parámetros

$\lambda = 10,\ \beta = 2 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0{,}5.$

Momentos de S

$$\mathbb{E}[S] = \frac{10}{2} = 5, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \frac{2 \cdot 10}{2^2} = 5, \qquad \sigma_S =$$

Prima exponencial (a=0,1)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a} \log M_S(a) = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{\beta}{\beta - a} - 1\right) =$$

Con $\lambda = 10, \beta = 2, a = 0{,}1$:
$\Pi_{\exp} = 10/1{,}9 \approx 5{,}263.$

Otras primas (con θ ilustrativa)

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1 + \theta)\mathbb{E}[S] \quad \Rightarrow \quad \theta = 0{,}30 : \ \Pi_{\mathsf{EV}} = 6{,}50.$$

$$\Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\, \sigma_S \quad \Rightarrow \quad \theta = 0{,}50 : \ \Pi_{\mathsf{SD}} \approx 5 + 1{,}118 = 6{,}118.$$

Esscher vs Exponencial (comparación rápida)

Esscher

$$\Pi_{\text{Esscher}}(r) = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r).$$

Para Poisson–Exponencial:

$$K_S(t) = \lambda\left(\frac{\beta}{\beta - t} - 1\right) \Rightarrow K_S'(t) = \lambda\frac{\beta}{(\beta - t)^2}.$$

$$\Rightarrow \Pi_{\text{Esscher}}(r) = \frac{\lambda\beta}{(\beta - r)^2}.$$

Exponencial (repetimos)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log M_S(a) = \frac{\lambda}{\beta - a}.$$

Esscher vs Exponencial (comparación rápida)

Esscher

$$\Pi_{\textsf{Esscher}}(r) = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r).$$

Para Poisson–Exponencial:

$$K_S(t) = \lambda\left(\frac{\beta}{\beta - t} - 1\right) \Rightarrow K_S'(t) = \lambda\frac{\beta}{(\beta - t)^2}.$$

$$\Rightarrow \Pi_{\textsf{Esscher}}(r) = \frac{\lambda\beta}{(\beta - r)^2}.$$

Exponencial (repetimos)

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log M_S(a) = \frac{\lambda}{\beta - a}.$$

Idea

Ambos dependen de la FGM completa, pero inducen cargas diferentes según a o r.

FGM

$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}$ en Poisson–compuesto.

Resumen en bloques

FGM

$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}$ en Poisson–compuesto.

Primas

$\Pi_{\textsf{EV}} = (1+\theta)\mathbb{E}[S]$, $\quad \Pi_{\textsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\mathbb{V}\text{ar}(S)$, $\quad \Pi_{\textsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\sigma_S$.

Resumen en bloques

FGM

$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}$ en Poisson–compuesto.

Primas

$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\mathbb{E}[S]$, $\quad \Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)$, $\quad \Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\sigma_S$.

Exponencial y Esscher

$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log M_S(a)$, $\quad \Pi_{\mathsf{Esscher}}(r) = K_S'(r)$.

Checklist para tarificación (práctico)

- Estime $\mathbb{E}[N], \mathbb{E}[X], \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (o la FGM de X).

Checklist para tarificación (práctico)

- Estime $\mathbb{E}[N], \mathbb{E}[X], \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (o la FGM de X).
- Elija el principio de prima acorde a apetito de riesgo/regulación.

Checklist para tarificación (práctico)

- Estime $\mathbb{E}[N], \mathbb{E}[X], \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (o la FGM de X).
- Elija el principio de prima acorde a apetito de riesgo/regulación.
- Verifique sensibilidad de Π a θ, a, r.

Checklist para tarificación (práctico)

- Estime $\mathbb{E}[N], \mathbb{E}[X], \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ (o la FGM de X).
- Elija el principio de prima acorde a apetito de riesgo/regulación.
- Verifique sensibilidad de Π a θ, a, r.
- Para capas: use $\Pi_{\mathsf{SL}}(d)$ y/o simulación si no hay forma cerrada.

Apéndice: fórmulas útiles

Momentos (compuesto)

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(N)\mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathrm{Cov}(S, N) = \mathbb{E}[X]\mathbb{V}\mathrm{ar}(N)$$

Derivadas de $K(t) = \log M(t)$

$$K'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}, \quad K''(t) = \frac{M''(t)}{M(t)} - \Big(\frac{M'(t)}{M(t)}$$

$$K'(0) = \mathbb{E}[S], \quad K''(0) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

¡Gracias!

- Dudas o ampliaciones: ejemplos con Gamma, Lognormal, Pareto.
- Extensiones: reaseguro, capas, Panjer, simulación Monte Carlo.

Ejemplo: configuración

Supuestos (modelo Poisson–Exponencial)

- Frecuencia: $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda = 8$.
- Severidad: $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ con $\beta = 1$ (media $1/\beta = 1$).
- Independencia entre N y $\{X_i\}$.

Ejemplo: configuración

Supuestos (modelo Poisson–Exponencial)

- Frecuencia: $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda = 8$.
- Severidad: $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ con $\beta = 1$ (media $1/\beta = 1$).
- Independencia entre N y $\{X_i\}$.

Agregado

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, FGM:

$$M_S(t) = \exp\left\{\lambda\left(\frac{\beta}{\beta - t} - 1\right)\right\} = \exp\left\{8\left(\frac{1}{1 - t} - 1\right)\right\}, \quad t < 1.$$

Momentos de S

Cálculo directo

$$\mathbb{E}[S] = \lambda\,\mathbb{E}[X] = 8 \cdot 1 = 8.$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \lambda\,\mathbb{E}[X^2] = 8 \cdot 2 = 16.$$

$$\sigma_S = \sqrt{16} = 4.$$

Comprobación con cumulantes

Con $K_S(t) = \log M_S(t) = 8\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)$:

$$K_S'(0) = 8, \qquad K_S''(0) = 16.$$

$\Rightarrow \ \mathbb{E}[S] = 8,\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = 16.$

Primas por distintos principios

Valor Esperado (EV)

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\mathbb{E}[S].$$

$\theta = 0.25 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{EV}} = (1.25)\cdot 8 = 10.$

Primas por distintos principios

Valor Esperado (EV)

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\mathbb{E}[S].$$

$\theta = 0.25 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{EV}} = (1.25)\cdot 8 = 10.$

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

$\theta = 0.10 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{Var}} = 8 + 0.10\cdot 16 = 9.6.$

Primas por distintos principios

Valor Esperado (EV)

$$\Pi_{\mathsf{EV}} = (1+\theta)\mathbb{E}[S].$$

$\theta = 0.25 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{EV}} = (1.25) \cdot 8 = 10.$

Varianza

$$\Pi_{\mathsf{Var}} = \mathbb{E}[S] + \theta\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(S).$$

$\theta = 0.10 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{Var}} = 8 + 0.10 \cdot 16 = 9.6.$

Desviación Estándar

$$\Pi_{\mathsf{SD}} = \mathbb{E}[S] + \theta\, \sigma_S.$$

$\theta = 0.50 \Rightarrow \Pi_{\mathsf{SD}} = 8 + 0.50 \cdot 4 = 10.$

Primas vía FGM: Exponencial y Esscher

Principio Exponencial

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a} \log M_S(a) = \frac{\lambda}{\beta - a}.$$

Con $a = 0.2 < \beta$: $\Pi_{\exp} = \dfrac{8}{1 - 0.2} = 10.$

Con $a = 0.4$: $\Pi_{\exp} = \dfrac{8}{0.6} \approx 13.333.$

Principio de Esscher

$$\Pi_{\text{Esscher}}(r) = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r) = \lambda \frac{\beta}{(\beta - r)^2}$$

Con $r = 0.2$:

$\Pi_{\text{Esscher}} = \dfrac{8 \cdot 1}{(1 - 0.2)^2} = \dfrac{8}{0.64} = 12.5.$

Primas vía FGM: Exponencial y Esscher

Principio Exponencial

$$\Pi_{\exp}(a) = \frac{1}{a}\log M_S(a) = \frac{\lambda}{\beta - a}.$$

Con $a = 0.2 < \beta$: $\Pi_{\exp} = \dfrac{8}{1-0.2} = 10.$

Con $a = 0.4$: $\Pi_{\exp} = \dfrac{8}{0.6} \approx 13.333.$

Principio de Esscher

$$\Pi_{\mathsf{Esscher}}(r) = \frac{M_S'(r)}{M_S(r)} = K_S'(r) = \lambda\,\frac{\beta}{(\beta - r)^2}$$

Con $r = 0.2$:
$$\Pi_{\mathsf{Esscher}} = \frac{8\cdot 1}{(1-0.2)^2} = \frac{8}{0.64} = 12.5.$$

Lectura

Ambos principios usan la FGM completa: el parámetro a (Exponencial) o r (Esscher) controlan la aversión al riesgo y elevan la prima sobre $\mathbb{E}[S]$.

Stop-loss por siniestro (capa simple)

Exceso por siniestro con retención $d \geq 0$

Para $X \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\text{Pérdida esperada por siniestro sobre } d: \ \mathbb{E}[(X-d)^+] = e^{-d}.$$

Stop-loss por siniestro (capa simple)

Exceso por siniestro con retención $d \geq 0$

Para $X \sim \text{Exp}(1)$:

$$\text{Pérdida esperada por siniestro sobre } d: \ \mathbb{E}[(X-d)^+] = e^{-d}.$$

Capa con límite

Prima por siniestro de la capa $(d, d+u]$:

$$\mathbb{E}\big[\min\{(X-d)^+, u\}\big] = \int_0^u \Pr\big((X-d)^+ > y\big)\, dy = \int_0^u e^{-(d+y)} dy = e^{-d}(1-e^{-u}).$$

Stop-loss por siniestro (capa simple)

Exceso por siniestro con retención $d \geq 0$

Para $X \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\text{Pérdida esperada por siniestro sobre } d: \; \mathbb{E}[(X-d)^+] = e^{-d}.$$

Capa con límite

Prima por siniestro de la capa $(d, d+u]$:

$$\mathbb{E}\big[\min\{(X-d)^+, u\}\big] = \int_0^u \Pr\big((X-d)^+ > y\big)\, dy = \int_0^u e^{-(d+y)} dy = e^{-d}(1-e^{-u}).$$

Números (por siniestro)

Con $d = 3$: $\mathbb{E}[(X-3)^+] = e^{-3} \approx 0.04979$.
Con $d = 3, u = 2$: $e^{-3}(1-e^{-2}) \approx 0.04303$.

Números (agregado esperado)

Multiplicando por $\lambda = 8$:
Exceso puro: $8 \times 0.04979 \approx 0.398$.
Capa $(3, 5]$: $8 \times 0.04303 \approx 0.344$.