پردازش هوشمند تصاویر پزشکی

تمرین اول، بخش تئوری

جواد راضی (۴۰۱۲۰۴۳۵۴)

سوال اول

a

خیر. نادرست است. برهان خلف، با فرض درستی گزاره: (فرض کنیم h[n] تابع پاسخ ضربه یک سیستم LTI است. از آن‌جایی که آوردن مثال نقض کافی است، می‌توان چنین فرضی کرد.) از خاصیت شیفت زمانی تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.

$$Fourier\{x[n-1] * h[n-1]\} = e^{-j\Omega}X(\Omega).\, e^{-j\Omega}H(\Omega) = e^{-j2\Omega}X(\Omega)H(\Omega)$$

$$Fourier\{y[n-1]\} = \ e^{-j\Omega}Y(\Omega) \neq Fourier\{x[n-1] * h[n-1]\}$$

b

بله، درست است. با یک تغییر متغیر ساده *z=-t*، عبارت سمت چپ، عبارت راستی را نتیجه می‌دهد. (فکر کنم در این سوال یک چیزی اشتباه تایپی داشته چون اساسا اثبات این مورد هیچ خاصیت خاصی نمی‌خواد و صرفا *notion*ها عوض شده‌اند.)

سوال دوم

A

از آن‌جایی که سیستم LTI است، می‌دانیم برای nهای کوچکتر از صفر، پاسخ ضربه سیستم صفر است. برای nهای دیگر، پاسخ ضربه را با قراردادن تابع ضربه به جای x[n]، حساب می‌نماییم:

$x[n] = \delta[n]$

$$n = 0: y[0] = 0 + 0 + \beta = \beta$$
$$n = 1: y[1] = \alpha y[0] + \frac{\beta}{2} w[0] + \beta x[1] = \alpha\beta + \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{2} w[-1] + \delta[-1]\right) = \alpha\beta + 0 = \alpha\beta$$

از طرف دیگر، از با فرمول داده‌شده که x و y را مرتبط می‌کند، به روش مشابهی پاسخ ضربه را محاسبه می‌نماییم:

$$x[n] = \delta[n]$$
$$n = 0: y[0] = 0 + 0 + \delta[0] = 1$$
$$n = 1: y[1] = 0 + \frac{3}{4}.1 + \delta[1] = \frac{3}{4}$$

با مقایسه مقادیر y که از دو راه به دست آمد، می‌توان مقادیر را پیدا کرد:

$$\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\beta = 1$$

B

می‌دانیم که پاسخ ضربه دو سیستم LTI که cascade شده‌اند، برابر کانولوشن پاسخ ضربه هریک است. برای یافتن پاسخ ضربه نیز به جای ورودی، تابع ضربه را جایگذاری می‌کنیم. برای سیستم S1 داریم:

$$x[n] = \delta[n] \rightarrow h_1[n] = \frac{1}{2} h_1[n-1] + \delta[n]$$
$$Casaul\ System \rightarrow \ \forall n < 0 :\ h_1[n] = \ 0$$
$$H_1(\Omega) = \frac{1}{2} e^{-j\Omega} H_1(\Omega) + 1 \rightarrow H_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$
$$Fourier\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \rightarrow \left(a = \frac{1}{2}\right) h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

برای سیستم S2 نیز داریم:

$$w[n] = \delta[n] \rightarrow h_2[n] = \alpha h_2[n-1] + \beta\delta[n] = \frac{3}{4} h_2[n-1] + \delta[n]$$
$$Casaul\ System \rightarrow \ \forall n < 0 : h_2[n] = \ 0$$

$$H_2(\Omega) = \frac{3}{4}e^{-j\Omega}H_2(\Omega) + 1 \rightarrow H_2(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$Fourier\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \rightarrow \left(a = \frac{3}{4}\right) h_2[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

اکنون با یافتن پاسخ ضربه هر سیستم، پاسخ ضربه نهایی را محاسبه می‌نماییم:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right] * \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k . \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} u[n-k]\right] = \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{2}\right)^k . \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n . \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right) = 3. [\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3. \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

سوال سوم

مطابق شکل داریم:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 : -\frac{5\pi}{12} < \Omega < -\frac{\pi}{3} \\ 1 : \frac{\pi}{3} < \Omega < \frac{5\pi}{12} \\ 0: otherwise \end{cases}$$

(a)

استفاده از تبدیل فوریه و یافتن خروجی در حوزه فرکانس (در یک پریود)، و سپس تبدیل آن به حوزه زمان:

$$X_1(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \left[\pi(e^{\frac{j\pi}{4}}\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right) + e^{\frac{-j\pi}{4}}\delta(\Omega + \frac{3\pi}{8})\right]$$

حاصل ضرب تبدیل فوریه در تبدیل فوریه پاسخ ضربه، و تبدیل معکوس فوریه گرفتن از آن، خروجی فیلتر را به ما می‌دهد.

$$Y_1(\Omega) = X_1(\Omega).H(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$$
$$\rightarrow y_1[n] = 1$$

(b)

تبدیل فوریه (در یک پریود):

$$X_2(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \left[\pi(e^{\frac{j\pi}{4}}\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right) + e^{\frac{-j\pi}{4}}\delta(\Omega + \frac{3\pi}{8})\right]$$

مشابه قسمت قبل:

$$Y_2(\Omega) = X_2(\Omega).H(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$$
$$\rightarrow y_2[n] = 1$$

سوال چهارم

(a)

مطابق فرمول داده‌شده، برای هر پیکسل خروجی، یک جمع بر روی پیکسل‌های دو تصویر ورودی زده می‌شود که کران بالای آن N^2 است. از آن‌جایی که ابعاد تصاویر ورودی، و تصویر خروجی NxN است، این کار N^2 بار صورت می‌گیرد. بنابراین، مرتبه زمانی محاسبه این کانولوشن $O(N^4)$ می‌باشد.

(b)

از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم؛ ابتدا تبدیل فوریه هر دو تصویر ورودی را محاسبه می‌کنیم. مطابق آن‌چه تدریس شده، می‌دانیم با استفاده از الگوریتم Fast Fourier Transform، که پیچیدگی زمانی $O(N^2\log(N))$ دارد، می‌توان تبدیل فوریه هریک از عکس‌ها را انجام داده، و تصاویر را به دامنه فرکانسی برد. طبق خواص کانولوشن، با ضرب دو تبدیل فوریه، تصویر

خروجی در دامنه فرکانسی به دست می‌آید. با همان الگوریتم FFT، تبدیل فوریه معکوس عکس خروجی را محاسبه کرده و عکس نهایی را بدست می‌آوریم. این مرحله نیز پیچیدگی زمانی $O(N^2 \log(N))$ دارد.

بنابراین، برای محاسبه مرتبه زمانی، مراحل انجام کار را در نظر می‌گیریم:

1) بردن تصاویر به دامنه فرکانسی با FFT : $O(N^2 \log(N))$
2) ضرب ترنسفرمیشن‌های به دست‌آمده (که عملا ضرب نقطه‌به‌نقطه دو تصویر تبدیل‌شده است) : $O(N^2)$
3) محاسبه تبدیل فوریه معکوس با FFT برای بدست آوردن تصویر نهایی: $O(N^2 \log(N))$

بنابراین:

$$Overall\ Complexity = 2 * O(N^2 \log(N)) + O(N^2) = O(N^2 \log(N))$$

سوال پنجم

DICOM پروتکل جامعی است برای ذخیره اطلاعات تصاویر پزشکی، و تبادل و مدیریت آن‌ها. فایل DICOM که بر اساس این استاندارد است، حاوی اطلاعات جامعی از تصویر پزشکی، متادیتای تصویربرداری، اطلاعات بیمار و ... می‌باشد که در ادامه مولفه‌های کلیدی آن شرح داده می‌شوند.

(a)

مولفه‌های کلیدی یک فایل DICOM:

- **هدر:** این قسمت شامل اطلاعات شناسایی بیمار، اطلاعاتی راجع به سن و جنسیت و قومیت وی، و همچنین متادیتای مربوط به شیوه تصویربرداری (مثلا CT-Scan یا MRI) و متادیتای دیگر نظیر تاریخ عکس‌برداری می‌باشد.
- **دیتای تصویر:** این قسمت شامل دیتای خود تصویر پزشکی است، که بسته به نوع تصویربرداری می‌تواند دوبعدی یا سه‌بعدی باشد، یا مثلا دیتای intensity برای هر پیکسل در فضای grayscale باشد.

دو تگ rescale slope و rescale intercept برای تبدیل مقادیر پیکسل‌های تصویر، به مقادیری که برای کاربرد مد نظر مناسب است استفاده می‌شوند. چند مورد از کاربردهای این تگ‌ها:

- نرمالیزیشن تصاویر MRI: در تصویربرداری MRI، از این تگ‌ها برای تبدیل مقادیر خام استفاده می‌گردد.
- تبدیل به واحد Hounsfield، برای تصاویر CT Scan: این واحد، واحدی بدون دیمانسیون است که برای استانداردسازی تصاویر CT Scan، که میان آزمایشگاه‌ها و روش‌های مختلف می‌توانند مقادیر متفاوتی داشته‌باشند استفاده می‌گردد. با کمک این دو تگ، با یک تبدیل خطی دیتای تصویر به این دیتا تبدیل می‌شود.
- تحلیل‌های Quantitive: برای مثل، ممکن است برای تصویر یک تومور سرطان، سایز آن را بخواهیم. به کمک این تگ‌ها، می‌توان پیکسل‌ها را به سایز اصلی‌شان تبدیل کرد.

(b)

Anonymization دیتای DICOM، شامل حذف اطلاعات هویتی بیمار می‌باشد. (مانند نام، سن و ...) این کار، با هدف حفظ حریم خصوصی بیمار انجام می‌شود و در آن تمام اطلاعاتی که از آن بتوان به هویت بیمار دست یافت از فایل حذف می‌گردند. اطلاعات باید بگونه‌ای حذف شوند که در تسک‌های downstream تحلیل تصویر، Informationئی از دست ندهیم. به بیان دیگر، کم‌ارزش‌ترین مقادیری که با حذف‌شان، بیمار قابل شناسایی نیست و در عین حال در تسک‌های تحلیل پسین نیز اثر منفی ندارد باید حذف شوند.

نمونه کد پایتون برای Anonymization:

```
import pydicom

# Load the DICOM file
ds = pydicom.dcmread("./img.dcm")

# Define a dictionary of tags to anonymize
tags_to_anonymize = ["PatientID", "PatientName", "PatientBirthDate"]

# Anonymize the tags
for tag in tags_to_anonymize:
```

```
    if tag in ds:
        ds.data_element(tag).value = ""

# Save the anonymized DICOM file
ds.save_as("anonymized.dcm")
```

در این کد، با تابع dcmread فایل DICOM خوانده می‌شود. سپس تگ‌هایی که باید پنهان شوند را مشخص کرده، و در دیتاستی که فایل دارد، مقدار این تگ‌ها را یک به یک برابر با رشته خالی می‌گذاریم.