Exercícios COSMOEspresso:
Part I

1 Introdução

Em Cosmologia existem as chamadas simulações N-corpos onde um numero grande de corpos (por exemplo 10^8) interajem entre si e, devido à interação grativitacional e à expansão do Universo formam "clumps" ou aglomerados de matéria. Saber as propriedades (num sentido estatístico) da distribuição destes aglomerados em diferentes momentos de tempo permite aos Cosmólogos comparar o que acontece ao alterar quantidades de componentes do Universo com os dados observacionais.

Por muito estranho que pareça, tirando as correcções que advém de termos um Universo em expansão (que aparecem devida à Relatividade Geral), basicamente isto acaba por ser mecânica Newtoniana. Isto é um tema recorrente na Física: se uma teoria num determinado limite não funciona (ergo Mecânica Newtoniana pura à escala do Universo) qualquer teoria que prevê o comportamento correcto deve, sem excepção prever não o comportamento no limite em causa mas reduzir-se à primeira teoria quando longe deste limite. Por exemplo a Relatividade Geral reduz-se à mecanica Newtoniano quando 1) a força gravitica é fraca, 2) objectos que não movem a velocidades comparáveis a velocidade da luz e 3) campos gravitacionais estáticos (ou quase-estáticos).

Como começar com uma simulação de n-corpos é um pouco agressivo (e pouco pedagógico) vamos inicialmente considerar dois corpos apenas, no qual um permanece estático no centro (Sol e um planeta). Vamos considerar o planeta Mercurio e as correcções relativistas.

2 Gravitação Neutoniana

A simulação basicamente irá actualizar a cada intervalo de tempo Δt a posição e a velocidade de Mercurio. Ora, vamos lembrar-nos da definição de velocidade e de acelaração:

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{\Delta t}[\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)] \tag{1}$$

e,

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{\Delta t}[\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)] \tag{2}$$

Dado um intervalo de tempo suficiente pequeno estas expressões podem ser escritas como derivadas:

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{3}$$

Ok, então podemos inverter estas expressões de modo a apenas calcular a acelaração gravítica e apartir dai calcular a nova velocidade e a nova posição:

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t\vec{a} \tag{4}$$

e,

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v} \tag{5}$$

que é precisamente o que vamos executar a cada timestep da simulação! Resta apenas saber como calcular o acelaração devido à atração gravítica no sistema Sol-Mercurio. E como calcular isto? Desde que tenhamos $r(t)$ e $v(t)$ conseguimos sempre calcular $a(t)$. A força gravitica entre Mercurio e Sol é dada pela expressão,

$$\vec{F} = \frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{6}$$

no qual $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, m é a massa de Mercurio, $M = 1.99 \times 10^{30} kg$ a massa do Sol. Lembrando a boa velha relação,

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{7}$$

então,

$$\vec{a} = \frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{8}$$

Vamos re-escrever isto de outro modo, introduzindo uma quantidade conhecida como o raio de Schwarzschild (quantidade importante para o estudo de buracos negros) do Sol,

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} = 2.95km \tag{9}$$

e então vem que,

$$\vec{a} = -\frac{c^2}{2}\frac{r_S}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{10}$$

Nas simulações o valor de $\frac{c^2}{2} r_S$ toma o nome de uma variável chamada "c_a". Ok! A partir daqui podemos ver como é a simulação em si. Bora ir para os exercícios!

3 Exercícios

1. Vamos fazer download de um código de simulação de 2 corpos (para já dois, mais tarde vemos quanto a 'n'-corpos). O mesmo encontra-se no seguinte link GithubLeiria. Experimentem correr o código.

2. Na função getAccel existe uma variavel chamada correction que é inicializada a 1. Pode parecer inutil mas é de propósito aqui, dado que o código não introduz nenhuma correcção ao potencial gravitacional (e à acceleração que daqui advém). Isto é expectável para um potencial $1/r$ (força $1/r^2$): orbitas elipticas, planares e fixas. Fixas, passo a explicar, significa nesta caso que o ponto de maior proximidade do Sol (perihélio) não muda a sua localização, órbita após órbita.

E se eu vos disser que a Relatividade Geral introduz mudanças ao potencial (mudanças pequenas) que podem mudar a posição do perihélio com o tempo? Um bom case-study é o planeta Mercurio. Em princípio para um potencial onde $r \to$ inf se desvia do comportamento $1/r$ pode afectar a posição do perihélio. Então vamos modificar a correção com dois termos - um em $1/r$, o outro com $1/r^2$. Não se preocupem de onde estas correcções vêm,

$$correction = (1 + \alpha\frac{r_S}{r} + \beta\frac{r_L^2}{r^2}) \tag{11}$$

Onde r_L corresponde a uma escala característica que advém do momento angular (uma constante do movimento para um potencial central) de Mercurio da seguinte forma:

$$r_L^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 c^2} = \frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{c^2} \tag{12}$$

Vamos então modificar "correction" para o que está acima e correr o código com $\alpha = 10{*}{*}6$ e $\beta = 0$.

3. Agora a ideia é experimentar e observar diferentes valores de α, β e Δt e observar como estes mudam nos seguintes casos:

- $\alpha = 0$, $\beta = 3$, estes são os valores previstos pela Relatividade geral. Consegues ver alguma diferença do caso (0,0)?
- $\alpha = 0$, $\beta = 10 * *6$ E que tal?
- $\alpha = 0$, $\beta = 10 * *8$ Com uma correcção demasido forte, Mercurio "cai" no Sol. Porque foge Mercurio aseguir?
- $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\Delta t = 2 * vM0/c_a * 20$ Não devariamos ver mudanças na posição do perihelio, porque as vemos neste caso?

4. Reparem que o vector posição e o vector velocidade têm apenas duas componentes. Poderiamos colocar uma terceira mas neste caso é desnecessário: a trajectória de Mercurio vai estar restrita a um plano. Porquê? Procurem material sobre potencial central.