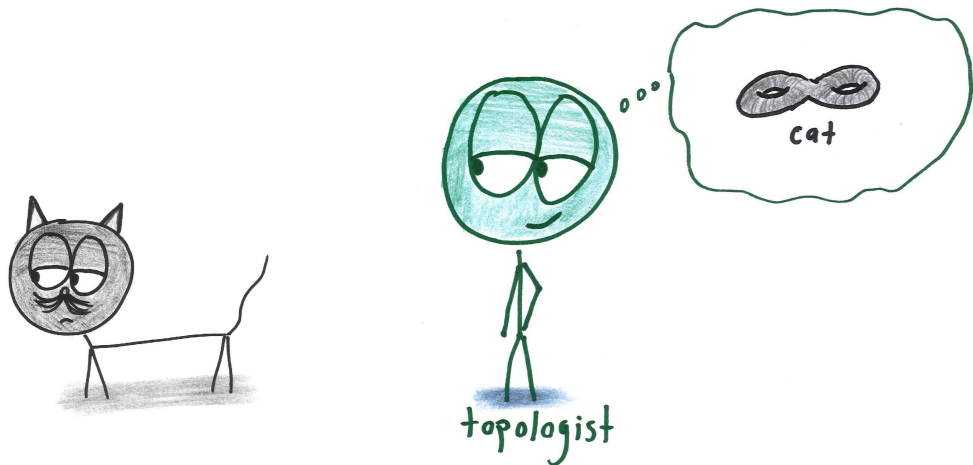


TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

Enero de 2021



Jaime Redondo-Yuste
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
jairedon@ucm.es

1 Introducción

El Teorema de clasificación de superficies es un resultado muy interesante en Topología, pues establece que toda superficie es homeomorfa, es decir, es indistinguible desde el punto de vista topológico, de o bien una esfera, o una esfera con un cierto número de asas, o una esfera con un cierto número de "asas cruzadas". Los detalles técnicos de todo esto se darán más adelante, pero la relevancia intuitiva es que es un Teorema que clasifica completamente las superficies, es decir, entendiendo las superficies básicas se pueden caracterizar topológicamente todas las superficies imaginables.

En la literatura hay abundantes demostraciones de este resultado que utilizan técnicas de lo más variadas. Una guía comprensiva de algunas de ellas se puede encontrar en [1]. En general, todas las demostraciones involucran dos pasos. El primero de ellos requiere observar que toda superficie admite una triangulación, un resultado que se debe a T. Radó [2], y que se puede demostrar con técnicas más modernas [3]. Para demostraciones que involucren, por ejemplo, teoría de Morse [4], este paso aparece pues es una condición indispensable en la demostración de que toda superficie admite una estructura diferenciable. Por este motivo fue un resultado que motivó mucho el estudio de la geometría y la topología, al observar que había superficies en dimensión 4 o superior que no admitían una triangulación [5]. Además, la relación de las triangulaciones con las estructuras diferenciables motivó el estudio de estructuras diferenciables exóticas, por ejemplo, las esferas exóticas de dimensión 7, que son objetos homeomorfos a una esfera pero no difeomorfos [6]. En este trabajo, se asumirá que toda superficie admite una triangulación tal y como se detallará más adelante.

El segundo paso admite técnicas de lo más diversas. En él se demuestra que toda superficie triangulada es homeomorfa a uno de los objetos previamente mencionados. Este paso será tratado en detalle en este trabajo, siguiendo una demostración de Zeeman [7] y una versión algo más intuitiva dada en [8]. Se han demostrado en detalle algunas cuestiones que no aparecían suficientemente claras en las fuentes originales, además de extender de forma breve la demostración para superficies no orientables.

En resumidas cuentas, la demostración aquí realizada procede por inducción en la característica de Euler de la superficie. El primer paso, por tanto, consiste en probar la hipótesis de Poincaré en dimensión dos, para lo cual se utilizan ciertos conceptos de teoría de grafos que se introducirán debidamente. El segundo paso, inductivo, requiere de una cierta "cirujía" de superficies para demostrar que, según la orientabilidad, se puede obtener como la suma conexa de una superficie con característica de Euler superior y una superficie "básica", a saber, un toro, un plano proyectivo, o una suma conexa de estos. Otro ingrediente necesario, del que se da una demostración pictórica que pretende ser lo suficientemente clara, es el hecho que la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfo a la

suma conexa de tres planos proyectivos. Además, como resultados preliminares se demuestran ciertas observaciones sobre la característica de Euler y sobre triangulaciones y grafos, con suficiente detalle.

La sección 2 recoge toda una serie de definiciones y resultados preliminares útiles para la demostración, que se desarrolla en la sección 3. Es interesante observar cómo una demostración como esta, que puede ser presentada de una forma muy intuitiva, involucra sutilezas cuya demostración está fuera del alcance de este curso (la triangulación de superficies o la buena-definición de sumas conexas, por ejemplo). No obstante, el autor espera que esta versión de la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies sea suficientemente clara y resuelva todas las dudas que pudieran surgir.

2 Conceptos Básicos

Definición 2.1. Una **superficie** es un espacio topológico S inmerso en \mathbb{R}^n , con n lo suficientemente grande.

En particular, el teorema de clasificación que demostraremos aplica a superficies cerradas. Esto significa que al hablar de superficie requerimos también que sea compacta y su frontera sea vacía. Se utilizará que toda superficie es triangulable, aunque no se dan las definiciones detalladas (se pueden estudiar en el capítulo 3 de [1], por ejemplo). A todos efectos y utilizando nociones ya dadas en el curso, una triangulación la entenderemos como un CW complejo de dimensión 2, homeomorfo a la superficie (y que se puede embeber en ella), con la peculiaridad de que cada 2-celda es lo que intuitivamente conocemos como un triángulo. La formalización de esto requiere de introducir la noción de complejo simplicial, y el libro de Gallier lo describe con suficiente claridad para más detalles.

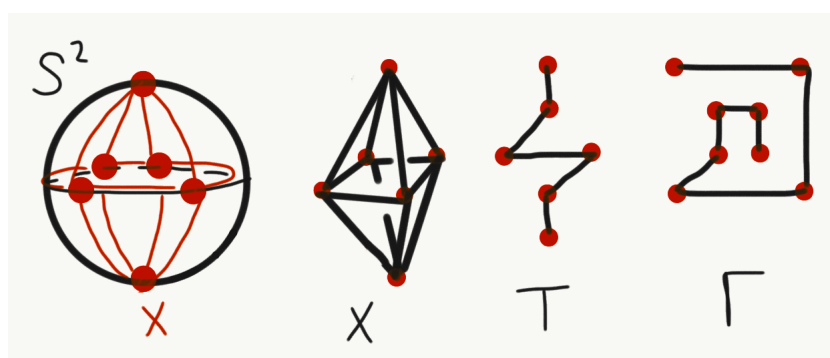


Figure 1: Ejemplo de una triangulación X de la esfera, y de un árbol maximal T , y su grafo dual asociado Γ , que como se verá luego en la demostración, también es un árbol.

En la demostración se utilizarán ciertas propiedades de grafos. Un **grafo**

es un CW-complejo de dimensión 1. Claramente toda triangulación tiene un grafo asociado que es el subcomplejo de dimensión 1. A los elementos del 0-esqueleto de un grafo se les llama vértices y a los elementos del 1-esqueleto, aristas. A los elementos del 2-esqueleto de una triangulación se les llama caras.

Definición 2.2. *Un **árbol** es un grafo conexo con n vértices y $n - 1$ aristas. Un **árbol maximal** de un grafo G es un árbol que contiene todos los vértices de G . El **grafo dual** Γ a un grafo G tiene un punto por cada cara del grafo (donde una cara de un grafo es un recinto completamente rodeado por aristas), y dos puntos del grafo dual están unidos por una arista si las caras del primal comparten una arista. El **grafo dual asociado a un árbol maximal** tiene por vértices las caras del grafo primal, y dos vértices duales están unidos por una arista cuando las caras asociadas en el primal comparten una arista que no pertenece al árbol maximal.*

Otro concepto que aparecerá repetidamente es el de característica de Euler, así que conviene dejar escrita su definición.

Definición 2.3. *La **característica de Euler** de un CW-complejo finito X es:*

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{card}(X_k), \quad (1)$$

donde n es la dimensión del complejo y X_k es el k -esqueleto. En particular, para una triangulación con v vértices, a aristas y c caras

$$\chi(X) = c - a + v. \quad (2)$$

Hay dos resultados sencillos que son de utilidad en la demostración. Aunque en algunas fuentes se dejan como ejercicio para el lector, su demostración es sencilla e ilustrativa de lo que está ocurriendo.

Proposición 2.4. *Sea T un árbol maximal de una triangulación X . Entonces, T no desconecta la triangulación, esto es, $X - T$ es conexo.*

Proof. Consideramos el árbol embebido en la superficie de forma trivial, y sea $Y = X - T$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ tiene dos componentes conexas. Sea $y_1 \in Y_1$, y tomemos otro punto $y_2 \in Y_2$. Vamos a construir un camino que conecte ambos puntos.

En primer lugar, obsérvese que podemos suponer que y_i , $i = 1, 2$ son el centro de alguna cara. En efecto, como $y_i \notin T$, no son vértices. Entonces, cada cara (junto con las aristas que la rodean) es homeomorfa a un disco cerrado, que es conexo por caminos, luego está conectado por un camino al centro de la cara.

Ahora, sea $y_1 \in F_1$ la cara cuyo centro es y_1 . Entonces $\varphi_1 : D^2 \xrightarrow{\cong} F_1$, y $\varphi_1 : \partial D^2 = S^1 \xrightarrow{\cong} E_1 \cup E_2 \cup E_3$, donde cada par de aristas $E_i \cap E_j \in X_0 \subset T$ se intersecan en un vértice. Como T es un árbol, no contiene ningún lazo. Por tanto, al menos uno, por ejemplo, $E_1 \not\subset T$. Entonces, y_1 está conectado con un punto $e_1 \in E_1$ por un camino en Y . Si la otra cara adyacente a E_1 tiene por centro y_2 , hemos acabado. En caso contrario, se repite el procedimiento, y como para una superficie compacta la triangulación tiene un número finito de vértices, el proceso concluye en un número finito de pasos. \square

Proposición 2.5. *Si G es un grafo conexo, $\chi(G) \leq 1$, con igualdad si y solo si G es un árbol.*

Proof. Por definición, un árbol tiene $\chi(G) = 1$. Ahora, sea G un grafo con v vértices y e aristas. Sea T su árbol maximal, que tiene v vértices y $e_0 \leq e$ aristas. Entonces

$$1 = \chi(T) = v - e_0 \geq v - e = \chi(G). \quad (3)$$

\square

Un último concepto importante es la suma conexa de espacios topológicos.

Definición 2.6. *Sean S_1, S_2 dos superficies topológicas. Podemos elegir dos regiones suficientemente pequeñas, $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ homeomorfas a un disco cerrado. Sea h un homeomorfismo entre las fronteras C_1, C_2 de D_1, D_2 , y sea la relación de equivalencia generada por $a \sim h(a)$ para $a \in C_1$. Entonces la **suma conexa** de ambas superficies se obtiene como*

$$S_1 \# S_2 = (S_1 - \text{int}(D_1)) \cap (S_2 - \text{int}(D_2)) / \sim. \quad (4)$$

Intuitivamente, la suma conexa se obtiene eliminando un disco en cada superficie, y pegando ambas superficies por los bordes del agujero. Es importante hacer ciertos comentarios sobre esta definición.

En primer lugar, que este concepto está bien definido no es para nada obvio, y requiere del Teorema de la Corona Circular (fue probado por Radó en [2] para superficies, como parte del Teorema de Radó. Años después fue demostrado también en variedades de dimensión 3 y 4, y para variedades de dimensión al menos 5 en [9]). Para superficies orientables, el homeomorfismo entre las circunferencias C_1 y C_2 debe revertir la orientación, de forma que la orientación de la suma conexa es compatible con la orientación de cada una de las sumas. Si alguna de las superficies involucradas no es orientable, se puede probar que la suma conexa tampoco será orientable, pero en cualquier caso está bien definida. También se puede probar (y es más sencillo) que no depende de la elección del disco por el cuál se realiza el pegado.

Proposición 2.7. *Las siguientes propiedades sobre la suma conexas de superficies son ciertas:*

1. $S_1 \# S^2 \simeq S_1$ para cualquier superficie S_1 , esto es, la esfera S^2 es el elemento neutro para la suma conexas.
2. $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

Proof. El primer resultado es claro si se tiene en cuenta que si D es un disco pequeño, $S^2 - D \simeq D^2$.

Para el segundo resultado, sean X_1 y X_2 dos triangulaciones de S_1 y S_2 , respectivamente. Sean f_1 y f_2 caras en cada una de las triangulaciones. Podemos utilizar esas caras como discos sobre los cuales hacer el pegado. Sean v_i, a_i, c_i el número de vértices, aristas y caras de cada una de las triangulaciones, $i = 1, 2$. Al hacer el pegado, se obtiene una nueva triangulación X que tiene $v_1 + v_2 - 3$ vértices (se pierden 3 vértices al pegar los dos triángulos), $a_1 + a_2 - 3$ aristas (por el mismo motivo), y $c_1 + c_2 - 2$ caras. Entonces

$$\chi(S_1 \# S_2) = v_1 + v_2 - 3 - a_1 - a_2 + 3 + c_1 + c_2 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \quad (5)$$

□

Por último se probará un lema necesario para la demostración.

Lema 2.8. $T^2 \# RP^1 \simeq RP^1 \# RP^1 \# RP^1$.

Proof. La demostración se da en la figura 4, en el Anexo. Las flechas indican los puntos que se identifican entre sí (y en el sentido en el que lo hacen), y todos los pasos son claramente homeomorfismos. □

3 Demostración del Teorema

En primer lugar, debemos caracterizar las superficies modelo. La primera de ellas es la esfera, que denotaremos por $\Sigma_0 = S^2$. Denotamos por $\Sigma_g = T^2 \# \dots \# T^2$, esto es, la suma conexa de g toros, o alternativamente, la esfera con g asas. Este será el modelo para las superficies orientables. Para el caso no-orientable, denotamos por $\Sigma_{-g} = RP^2 \# \dots \# RP^2$ a la suma conexa de g planos proyectivos, que se puede denotar como la esfera con g asas cruzadas. El lenguaje de asas y asas cruzadas, aunque no es especialmente útil en esta demostración, es común en otras demostraciones del teorema, por ejemplo, en la prueba ZIP (cremallera) de Conway [10].

Teorema 3.1. *Toda superficie cerrada es homeomorfa a Σ_g para algún $g \in \mathbb{Z}$.*

Proof. La demostración procede por inducción (hacia abajo) en la característica de Euler de la superficie. La característica de Euler de una superficie se define como la característica de Euler de una triangulación suya, y puede comprobarse que no depende de la triangulación escogida (toda triangulación procede de otra añadiendo o sustrayendo un cierto número de vértices, aristas y caras, cuya contribución total a la característica de Euler se anula).

Paso 1.

Primero, vamos a probar la hipótesis de Poincaré para dimensión 2, es decir, que si $\chi(S) = 2$ entonces $S \simeq S^2$. Además, concluiremos que para toda superficie $\chi(S) \leq 2$.

Sea T un árbol maximal de una triangulación (que asumimos finita) X de la superficie. Sea Γ el grafo dual al grafo de la triangulación asociado a T . Un ejemplo se puede ver en la figura 1. Por la Prop. 2.4, T no desconecta a X . Como además T contiene todos los vértices de X , Γ es conexo. En efecto, si Γ fuera disconexo necesariamente habría una arista de T que crea dos componentes conexas en X .

Sea v, a, c el número de vértices, aristas y caras de X . T tiene v vértices y $a_0 \leq a$ aristas. Similarmente, Γ tiene c vértices y a_1 aristas, con $a_0 + a_1 = a$. Se sigue que

$$\chi(X) = v - a + c = (v - a_0) + (c - a_1) = \quad (6)$$

$$= \chi(T) + \chi(\Gamma). \quad (7)$$

Pero $\chi(T) = 1$ por ser un árbol, y por la Prop. 2.5 $\chi(\Gamma) \leq 1$. Entonces,

$$\chi(X) = 1 + \chi(\Gamma) \leq 2, \quad (8)$$

con igualdad si y solamente si Γ es un árbol. Ya hemos probado entonces que para toda superficie, $\chi(X) \leq 2$.

Supongamos entonces que Γ es un árbol. Podemos embeber T y Γ en X , y podemos obtener entornos disjuntos y cerrados U, V de T y Γ homeomorfos a un disco cerrado. Si agrandamos los entornos hasta que se toquen, tenemos que

$$X = D^2 \cap D^2 / \partial U \sim \partial V = S^2. \quad (9)$$

En efecto, si U, V recubren T, Γ , entonces contienen todos los vértices y aristas de la triangulación. Además, al ser ambos grafos árboles, es claro que se pueden recubrir por un entorno que sea homeomorfo a un disco. Entonces, se pueden agrandar hasta que se toquen y entonces recubran toda la triangulación. Pero son homeomorfos a un disco, luego su frontera es homeomorfa a S^1 , y el momento en el que se tocan el modelo geométrico es el de dos discos cerrados que se identifican por su frontera, que es un modelo geométrico para una esfera.

Paso 2, Caso Orientable.

Ahora, supongamos que $\chi(X) < 2$, y supongamos que la superficie es orientable. En este caso, Γ no es un árbol, luego contiene algún lazo γ , que no separa la superficie. En efecto, siguiendo una demostración similar a la de la Prop. 2.4 se puede ver que se puede construir un camino que empieza en el interior de γ y que acaba en el exterior de γ (estamos denotando por γ tanto a la aplicación como a la imagen de la aplicación, para evitar introducir demasiada notación). En el caso de que X sea orientable, necesariamente γ tiene dos lados, luego al cortar la superficie por el lazo se obtiene $\tilde{X} = X - \gamma$ cuya frontera tiene dos componentes conexas. Podemos "tapar" cada uno de los dos agujeros que aparecen (adicionando una 2-celda de una manera que respete la orientabilidad), de forma que se obtiene una nueva superficie, Y . Claramente, $X = Y \# T^2$, como se ve por ejemplo en la figura 2. Pero tenemos por la Prop. 2.7 que $\chi(Y) = \chi(X) + 2$ (se sabe que la característica de Euler de un toro es nula). Entonces, por la hipótesis de inducción $Y \simeq \Sigma_{g-1}$, luego por construcción tenemos que $X \simeq \Sigma_g$, como quería probarse.

Paso 2, Caso No Orientable.

Este paso consiste en repetir el paso anterior, pero para superficies no orientables. De nuevo, suponemos $\chi(X) < 2$, luego Γ no es un árbol, y tomamos un lazo γ que no desconecta la superficie. Existen tres posibilidades.

1. γ tiene un único lado, y al cortar por γ la superficie \tilde{X} que se obtiene es no-orientable. El procedimiento, entonces, es el mismo que en el caso anterior. Añadiendo una 2-celda a \tilde{X} por su frontera se obtiene una superficie Y . Al añadir una 2-celda, por la no-orientabilidad, en lugar de la imagen intuitiva de pegar un disco cerrado la imagen visual debe ser la de pegar una banda de Möbius. Por tanto, $X = Y \# RP^1$ (se puede comprobar que $RP^2 - D^2 \simeq M^1$, donde M^1 es la banda de Möbius). Se tiene que $\chi(RP^1) = 1$, luego $\chi(Y) = \chi(X) + 1$. Por

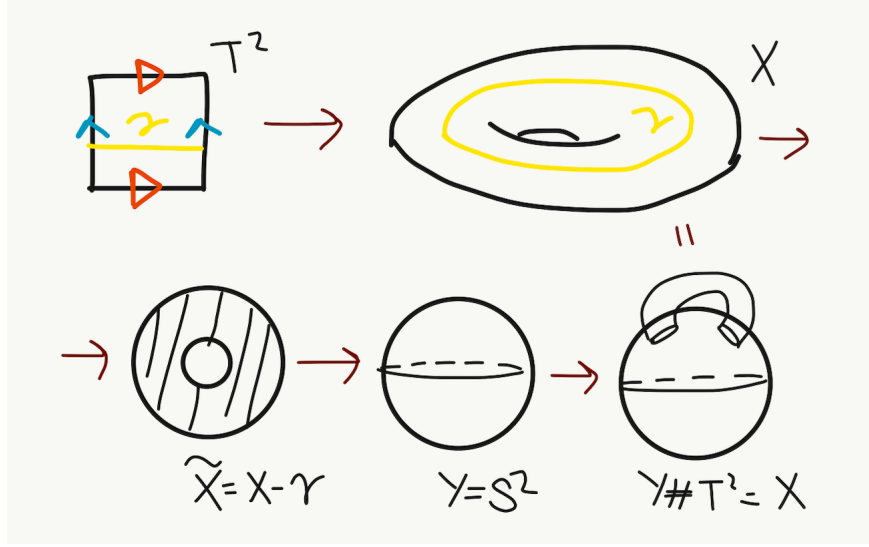


Figure 2: Ejemplo del procedimiento realizado en el paso 2 cuando la superficie inicial es un toro T^2 , para una cierta curva γ .

la hipótesis de inducción, $Y \simeq \Sigma_{-g+1}$ para algún $g \geq 1$, y se tiene entonces que $X = \Sigma_{-g}$.

2. Si γ tiene un único lado, pero la superficie $\tilde{X} = X - \gamma$ es orientable, repitiendo el procedimiento, se concluye que ahora $X = \Sigma_g \# RP^1$ para algún $g \geq 1$. Ahora, es conveniente utilizar el Lema 2.8, que nos permite eliminar cada toro de la suma conexa con la fórmula dada en el Lema, para obtener $X = \Sigma_g \# RP^1 = \Sigma_{-2g-1}$, que es lo que se quería probar.
3. El último caso es cuando γ tiene dos lados, en cuyo caso necesariamente $\tilde{X} = X - \gamma$ debe ser no-orientable (porque X es no-orientable). Añadiendo una 2-celda apropiadamente, tenemos que $X = \Sigma_1 \# \Sigma_{-k}$ para algún $k \geq 1$. Pero usando el Lema 2.8 se sigue que $X = \Sigma_{-k-2}$.

□

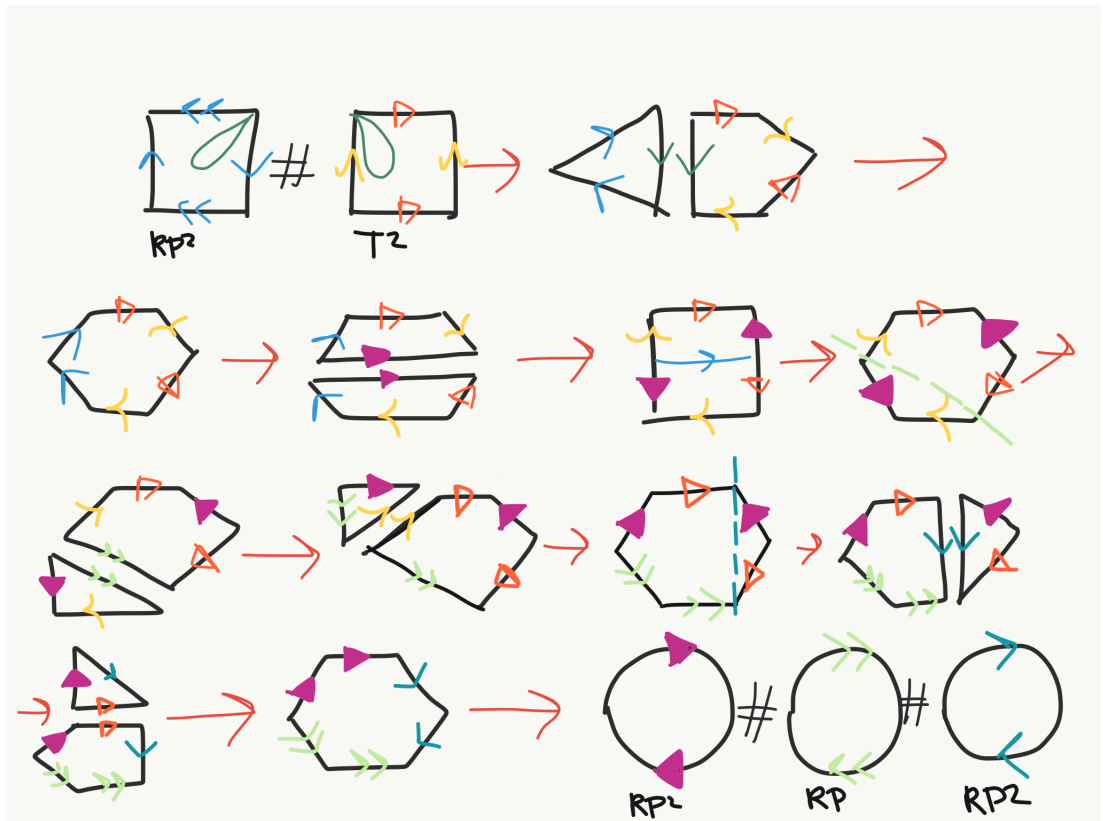
Nótese que con esto se han clasificado completamente las superficies topológicas. En efecto, los posibles espacios, tienen todos grupos fundamentales distintos:

- $\pi_1(\Sigma_0) = \pi_1(S^2) = \{0\}$.
- $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1 b_1 \dots a_g b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$, cuando $g > 0$.
- $\pi_1(\Sigma_{-g}) = \langle a_1 \dots a_g | a_1^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$, cuando $g < 0$.

Esto se obtiene de la representación en base a espacios cocientes de los espacios Σ_g , y aplicando cuidadosamente el Teorema de Seifert-Van Kampen. Su cálculo se da, por ejemplo, en la sección 6.6 de [1].

4 Anexo

Demostración del Lema 2.8.



References

- [1] Jean Gallier and Dianna Xu. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Tibor Radó. Über den begriff der riemannschen fläche. *Acta Sci. Math*, 2:101–121.
- [3] Allen Hatcher. The kirby torus trick for surfaces. *arXiv preprint arXiv:1312.3518*, 2013.
- [4] Johan Rydholm. Classification of compact orientable surfaces using morse theory. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:956989/FULLTEXT02>, 2016. [Online; consultado 04-01-2021].
- [5] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(3):357–453, 1982.
- [6] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, pages 399–405, 1956.
- [7] Eric-Christopher Zeeman. *An introduction to topology: The classification theorem for surfaces*. Mathematics Institute, University of Warwick, 1966.
- [8] Andrew Putman. A quick proof of the classification of surfaces. <https://www3.nd.edu/~andyp/notes/ClassificationSurfaces.pdf>. [Online; consultado 04-01-2021].
- [9] Robion Kirby. Stable homeomorphisms and the annulus conjecture. In *Topological Library: Part 2: Characteristic Classes and Smooth Structures on Manifolds*, pages 253–261. World Scientific, 1969.
- [10] George K Francis and Jeffrey R Weeks. Conway’s zip proof. *The American mathematical monthly*, 106(5):393–399, 1999.