

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



**UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE**
MADRID

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT12

Colapso estelar y ondas gravitatorias

Stellar collapse and gravitational waves

Supervisor/es: Luis J. Garay

Jaime Redondo Yuste

Grado en Física

Curso académico 2020-21

Convocatoria ordinaria

Colapso estelar y ondas gravitatorias

Resumen:

En este trabajo analizamos el problema de la producción de ondas gravitacionales en situaciones de colapso estelar. Desarrollamos el formalismo invariante gauge para estudiar perturbaciones lineales sobre geometrías estáticas. Observamos que el problema es muy similar al de las perturbaciones escalares, que recoge muchas de las características relevantes del problema, como por ejemplo los modos cuasinormales. Finalmente se usan técnicas de relatividad numérica para estudiar la evolución de perturbaciones escalares en tres casos significativos: alrededor de un agujero negro estático, de estrellas de densidad constante y sobre una configuración en la que una estrella colapsa y forma un agujero negro.

Abstract:

In this work we analyze the problem of the production of gravitational waves in stellar collapse scenarios. We develop the gauge-invariant formalism to study linear perturbations on top of static geometries. We observe that this problem is very similar to the one regarding scalar perturbations and that, in fact, this last case includes most of the physically relevant characteristics of the problem, for example, the quasinormal modes. Finally we use numerical relativity techniques to study the evolution of scalar perturbations in three relevant scenarios: a static black hole, constant-density stars and a configuration in which a star collapses and forms a black hole.

1. Introducción

En 2015 se detectaron por primera vez de forma directa las ondas gravitacionales emitidas en una coalescencia de agujeros negros en el observatorio LIGO [1]. Desde ese momento, la detección de ondas gravitacionales ha permitido examinar con una precisión de la que no se disponía antes las predicciones de la relatividad general, especialmente en los regímenes más energéticos [2]. Dado que es en estas situaciones donde es plausible que pueda haber desviaciones con respecto a la teoría clásica, hay un gran interés en comprender en gran detalle los mecanismos de emisión y propagación de ondas gravitacionales en regímenes de gravedad intensa.

En particular, uno de los puntos más conflictivos de la relatividad general es la naturaleza de los agujeros negros. Cuando una estrella que es lo suficientemente masiva colapsa, es inevitable la formación de una singularidad, que típicamente tiene la forma de curvaturas infinitamente grandes. Esto resulta conflictivo, pues parece natural esperar que la curvatura de un espacio-tiempo esté acotada. Una posibilidad para regularizar este proceso consiste en esperar que cuando la curvatura se hace muy grande, los efectos de naturaleza cuántica [3] o semiclásica [4] puedan frenar, o incluso revertir el colapso. Tras un proceso así se podría formar un objeto compacto exótico, cuyas propiedades observacionales podrían ser muy similares a las de un agujero negro [5], pero con una gran diferencia dado que estos objetos no tendrían horizontes.

Aunque los objetos compactos exóticos podrían ser muy similares a los agujeros negros, hay indicios de que darían lugar a patrones de ondas gravitacionales diferentes, lo cual permitiría distinguirlos. Hasta el momento, la detección de binarias no ha obtenido desviaciones significativas con respecto a la relatividad general. No obstante, esto se debe en gran medida a que se disponen de muy escasos modelos de ondas gravitacionales producidas en binarias de objetos compactos. Una vía alternativa, en la cual las diferencias con respecto a las predicciones de la relatividad general podrían ser mayores, es la observación de ondas gravitacionales en la formación de un objeto compacto. La producción de origen astrofísico de ondas gravitacionales está bien estudiada [6], pero de existir un frenazo o un rebote durante el colapso, éste proceso podría tener un impacto significativo en las ondas gravitacionales emitidas en la fase final del colapso estelar. Cabe mencionar que aunque todavía no se han detectado las ondas gravitacionales emitidas en un colapso estelar, esto no está descartado tecnológicamente y depende fundamentalmente de la frecuencia con la que ocurren supernovas en regiones cercanas de nuestra galaxia [7].

Este Trabajo Fin de Grado es un primer paso en el camino para llegar a estudiar en detalle la producción de ondas gravitacionales en colapsos modificados. Este problema es complejo, por lo que debemos comenzar por adquirir una comprensión clara y profunda de la producción de ondas gravitacionales en los casos más sencillos. Este trabajo recoge las bases fundamentales para comprender la emisión de ondas gravitacionales durante un proceso de colapso estelar. Partiendo del formalismo invariante gauge, se ha llegado a realizar un primer modelo de emisión de ondas gravitacionales en un caso muy simplificado de colapso estelar.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. En la sección 2 discutimos el formalismo de las perturbaciones gravitacionales con independencia del gauge escogido, particularizando para el caso de la métrica de Schwarzschild para obtener las ecuaciones de Regge-Wheeler y de Zerilli. Además se avanzan los resultados obtenidos en la literatura para las perturbaciones gravitacionales en un colapso de Oppenheimer-Snyder. En la sección 3 se analiza la dependencia en el espín de las ecuaciones que gobiernan la evolución de las perturbaciones. Argumentamos que la dependencia en el espín no cambia el aspecto cualitativo de los resultados. Como consecuencia, se puede dar una estimación del comportamiento de las perturbaciones gravitacionales por medio de las perturbaciones escalares. En las perturbaciones escalares juegan un papel fundamental los modos cuasinormales, que se introducen brevemente. Para poder resolver la ecuación que gobierna las perturbaciones escalares sobre un espacio tiempo arbitrario es necesario introducir métodos numéricos 4. En este trabajo se utilizan métodos parcialmente implícitos, cuyo funcionamiento explicamos brevemente. Además, adaptamos el problema a unas variables específicas, utilizadas habitualmente en relatividad numérica, lo que permite utilizar códigos ya probados. Para concluir el trabajo, en la sección 5 se ha caracterizado la evolución de las perturbaciones gravitacionales en algunos casos de interés. En primer

lugar, resolvemos el problema para un espacio tiempo de Schwarzschild, con la finalidad de contrastar los resultados con la literatura. Seguidamente se han comprobado las diferencias que aparecen cuando en lugar de un agujero negro se perturba el espacio tiempo que genera una estrella de densidad constante, obteniendo un comportamiento interesante y consistente con lo esperado. Por último, analizamos un caso novedoso, consistente en la simulación de las perturbaciones escalares alrededor de una estrella que colapsa formando un agujero negro. Como resultado final se han encontrado signatures claras de la formación de un agujero negro en la evolución de las perturbaciones escalares. A lo largo de todo el trabajo se utilizan unidades con $G = c = 1$.

2. Perturbaciones gravitatorias

En el paradigma de la Relatividad General, el campo gravitatorio queda descrito por la geometría de una cierta variedad lorentziana: el espacio-tiempo. Al igual que en cualquier otra teoría de campos, dada una cierta solución a las ecuaciones de movimiento, una de las preguntas más importantes es acerca de la estabilidad. Esto es, si se perturba ligeramente la solución, ¿cómo evolucionan las perturbaciones? Esta línea de investigación fue iniciada por Regge y Wheeler [8] para analizar la estabilidad de la solución de Schwarzschild.

Este mismo formalismo se puede utilizar para la emisión de ondas gravitacionales. Consideremos, por ejemplo, una estrella que colapsa. En un caso realista la estrella tendría irregularidades en su superficie que, en particular, rompen la simetría esférica. Estas irregularidades se pueden tratar como perturbaciones sobre una geometría más sencilla, y su evolución estaría estrechamente relacionada con la emisión de ondas gravitacionales durante ese proceso.

En la mayoría de los casos el efecto de las ondas gravitacionales sobre la geometría no es relevante ¹. Por tanto, el análisis de la evolución de perturbaciones gravitacionales es un buen camino para explorar la física de ondas gravitacionales, en particular, en situaciones de colapso estelar.

2.1. Formalismo ADM

En los años 60, Arnowitt, Deser y Misner (ADM) desarrollaron el formalismo hamiltoniano de la Relatividad General [9]. La principal dificultad para emprender tal tarea es fijar una noción de tiempo. Conviene recordar que la teoría es invariante bajo difeomorfismos, así que no hay una noción de tiempo preferida. No obstante, si el espacio es globalmente hiperbólico (condición que se cumple para todas las geometrías que se van a considerar aquí), existe una foliación en hipersuperficies de género espacio, que se pueden asociar a $t = \text{constante}$.

A continuación definimos las variables que actúan como coordenadas generalizadas y describen completamente el sistema. La métrica en este formalismo ADM se puede descomponer como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (1)$$

Conviene aclarar la notación que se va a utilizar en lo que sigue. Los índices griegos toman los valores $t, 1, 2, 3$ y los índices latinos $1, 2, 3$. Los índices latinos se suben y bajan utilizando la métrica espacial. Las derivadas covariantes con respecto a la métrica espacial se denotarán por un punto y coma.

Como se observa en la Figura 1, el lapso determina la separación diferencial de dos hipersuperficies espaciales consecutivas. El vector desplazamiento determina la desviación del tiempo coordenado utilizado en la foliación con respecto a la normal a la hipersuperficie en cada instante de tiempo. Una vez escrita

¹Una de las excepciones a esto es el caso de las coalescencias de agujeros negros en los que uno es mucho más masivo que el otro, en las que las ondas gravitacionales emitidas por el sistema influyen notablemente el movimiento del agujero negro menos pesado.

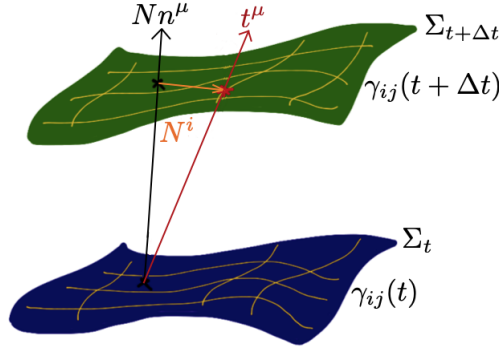


Figura 1: Representación de dos hipersuperficies consecutivas, Σ_t y $\Sigma_{t+\Delta t}$. El lapso N determina el tiempo propio a lo largo de la normal n^μ a la hipersuperficie Σ_t , mientras que el vector desplazamiento N^i mide la desviación con respecto a las líneas de tiempo coordinado t^μ . Cada hipersuperficie tiene una métrica γ_{ij} inducida por la métrica ambiente.

la métrica, los momentos canónicos conjugados se obtienen en términos de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales, K_{ij} , como

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma} (K^{ij} - \gamma^{ij} K), \quad (2)$$

siendo $K = K_i^i$ la traza de la curvatura extrínseca y el determinante de la métrica espacial se denota por $\gamma = \det(\gamma_{ij})$. Entonces podemos reescribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de la métrica espacial, los momentos conjugados y el lapso y vector desplazamiento. Tras unos cálculos tediosos pero sencillos se obtiene

$$S = \int dt d^3x (\pi^{ij} \partial_t \gamma_{ij} - N \mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i), \quad (3)$$

con

$$\mathcal{H} = \gamma^{-1/2} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi_i^i)^2 \right) - \sqrt{\gamma} R, \quad \mathcal{H}^i = -2\pi^{ij}{}_{;j}, \quad (4)$$

donde R es el escalar de curvatura de las secciones espaciales. Dado que el lapso y el vector desplazamiento entran en la acción linealmente, son multiplicadores de Lagrange, cuyas ecuaciones del movimiento fuerzan que se cumplan las llamadas ligaduras hamiltoniana, $\mathcal{H} = 0$, y de momentos, $\mathcal{H}^i = 0$. Dados unos datos iniciales que satisfagan las ligaduras, éstas se seguirán cumpliendo en la evolución (son ligaduras de primer clase), puesto que su corchete de Poisson con el hamiltoniano se anula [9]. Con este formalismo, se ha conseguido reducir la Relatividad General a un problema de valores iniciales. En las secciones posteriores explotaremos este formalismo.

2.2. Perturbaciones de métricas estáticas de vacío

Ahora, consideramos un espacio-tiempo descrito por una geometría base o de fondo $g_{\mu\nu}^{(0)}$, que es solución de las ecuaciones de Einstein en vacío. Consideramos perturbaciones pequeñas sobre esta métrica, de modo que la geometría se escribe $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$. En el caso en el que el fondo es plano, es sencillo demostrar que las ecuaciones de Einstein para esa geometría se traducen en una ecuación de onda para $h_{\mu\nu}$. No obstante, este camino no resulta adecuado para estudiar situaciones más generales.

Las coordenadas generalizadas del formalismo ADM, para un esquema perturbativo como el descrito antes, se escriben como $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(0)} + \varepsilon h_{ij}$, $\pi^{ij} = \pi^{ij(0)} + \varepsilon p^{ij}$, $N = N^{(0)} + \varepsilon \tilde{N}$ y $N^i = N^{i(0)} + \varepsilon \tilde{N}^i$, en

términos del parámetro perturbativo ε , que suponemos pequeño y positivo. Si se requiere que la acción (3) sea estacionaria, es decir, que los términos lineales en ε se anulen, se obtienen las ecuaciones de Einstein para la métrica del fondo. Del mismo modo, la acción que describe la evolución de las perturbaciones será el término de segundo orden en ε , y sus ecuaciones de movimiento se obtendrán al exigir que esta acción sea estacionaria. Esta acción para las perturbaciones, en general, tiene una forma bastante compleja. Para poder trabajar con expresiones más simplificadas, asumiremos que la métrica del fondo es estática. En ese caso, se pueden escoger coordenadas en las que la métrica del fondo no depende de la coordenada temporal t y además $N^{(0)} = 0$. Con esa elección la acción que se obtiene, después de eliminar derivadas totales, resulta ser

$$S = \int dt d^3x \left[p^{ij} \partial_t h_{ij} - N^{(0)} \mathcal{H}^* - \tilde{N}_i \tilde{\mathcal{H}}^i - \tilde{N} \tilde{\mathcal{H}} \right], \quad (5)$$

siendo

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\sqrt{\gamma^{(0)}} \left(h_{ij}{}^{;ij} - h_{;i}{}^{;i} - h_{ij} R^{ij(0)} \right), \quad \tilde{\mathcal{H}}^i = -2p^{ij}{}_{;j} \quad (6)$$

las ligaduras hamiltoniana y de momentos para el problema perturbativo. El hamiltoniano efectivo es

$$H = \int d^3x N^{(0)} \mathcal{H}^* = \int d^3x \left[\frac{N^{(0)}}{\sqrt{\gamma^{(0)}}} \left(p_{ij} p^{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right) + \frac{1}{2} N^{(0)} \sqrt{\gamma^{(0)}} \left(\frac{1}{2} h_{ij;k} h^{ij;k} - h_{ij;k} h^{ik;j} - \frac{1}{2} h_{;i} h^{;i} + 2h_{;i} h^{ij}{}_{;j} + h h^{ij}{}_{;ij} - h h_{ij} R^{ij(0)} \right) \right]. \quad (7)$$

En la anterior expresión, los índices de las variables perturbadas se suben y bajan con la métrica de fondo sin perturbar, $p_{ij} = \gamma_{ki}^{(0)} \gamma_{jl}^{(0)} p^{kl}$. Además, se han definido las trazas $h = \gamma_{ij} h^{ij}$ y $p = p^{ij} h_{ij}$, y el punto y coma denota derivada covariante con respecto a la métrica sin perturbar. La curvatura de Ricci de las secciones espaciales del fondo es $R^{ij(0)}$. A partir de ahora, se dejará de utilizar el cero como superíndice para diferenciar las variables no perturbadas (que se consideran, por el momento, fijas).

Las perturbaciones de la métrica con respecto a \tilde{N} y a \tilde{N}^i resultan en las ligaduras $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}^i = 0$. Las ecuaciones del movimiento derivadas de (5) deben asegurar la verificación de las ligaduras fuera de la hipersuperficie donde se dan los datos iniciales. Las ecuaciones del movimiento vienen determinadas directamente por los corchetes de Poisson de las variables canónicas h^{ij} , p_{ij} con el hamiltoniano $H_I = H + \int d^3x (\tilde{N} \tilde{\mathcal{H}} + \tilde{N}_i \tilde{\mathcal{H}}^i)$.

Antes de estudiar la evolución para distintos casos físicos hay que analizar la invariancia gauge del problema. La Relatividad General es una teoría invariante bajo difeomorfismos, y las perturbaciones deben mantener esa invariancia. A primera vista, podría parecer que el sistema tiene 6 grados de libertad (teniendo en cuenta que el lapso y el vector desplazamiento son multiplicadores de Lagrange, y que $h_{ij} = h_{ji}$). No obstante, la invariancia bajo difeomorfismos elimina 4 de estos grados de libertad (se disponen de 4 coordenadas que elegir arbitrariamente). Por lo tanto, el sistema tiene dos grados de libertad físicos. Es posible tomar dos vías alternativas para tratar este problema: fijar una elección del gauge desde primer momento, y trabajar desde el principio con dos únicos grados de libertad (como se hace en [8]), o intentar trabajar con todos los grados de libertad, asegurando la invariancia gauge incluyendo nuevas ligaduras en el sistema [10, 11]. En este trabajo se ha optado por esta última vía, para así llegar a obtener las ecuaciones que describen la evolución de las perturbaciones sobre una geometría sencilla, pero válidas en un gauge arbitrario.

2.3. Propagación de ondas gravitacionales sobre la geometría de Schwarzschild

Antes de analizar la emisión de ondas gravitacionales emitidas en una situación de colapso, es conveniente estudiar primero el caso estático. El caso estático más sencillo es el que se corresponde a las perturbaciones

sobre una métrica de Schwarzschild, que describe la geometría del exterior a una estrella que no rota. La métrica de Schwarzschild se escribe, en coordenadas de Schwarzschild, como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8)$$

donde $f(r) = 1 - 2M/r$, con M la masa del objeto compacto y $d\Omega^2$ el elemento de línea de la esfera unidad. Estas coordenadas no son regulares en el horizonte de eventos, $r = 2M$, por lo que nos preocuparemos únicamente de su validez en la región exterior, $r > 2M$. Se observa que la geometría se descompone en un sector (t, r) y un sector angular. Es decir, el espacio-tiempo se descompone como $\mathcal{M} = M^2 \times S^2$, donde M^2 es una variedad lorentziana y S^2 es una 2-esfera. La simetría esférica garantiza que la dependencia angular factoriza, por lo que se puede expandir las perturbaciones en armónicos esféricos. Así, el problema se reduce a estudiar perturbaciones sobre M^2 . Esto nos va a permitir separar el problema en dos sectores independientes.

En primer lugar, es necesario analizar cómo se transforman bajo rotaciones espaciales cada una de las componentes de la métrica (N, \tilde{N}^i, h_{ij}) para expandirlas en armónicos esféricos según se transformen como escalares, como vectores o como tensores de rango 2. En segundo lugar, cada uno de los términos se transforma de una forma diferente bajo paridad, $(\theta, \phi) \mapsto (\pi - \theta, \pi + \phi)$. Algunas de las componentes se transforman como $(-1)^{l+1}$, siendo l el orden del armónico esférico correspondiente; mientras que otras lo hacen como $(-1)^l$. Las componentes que se transforman como $(-1)^{l+1}$ se agrupan en el denominado sector impar o axial, mientras que las que se transforman como $(-1)^l$ se agrupan en el sector par o polar. Dado que la parte angular factoriza, las ecuaciones del movimiento no van a mezclar en ningún caso modos que se transformen de modo diferente bajo paridad, lo que permite analizar de forma independiente el sector polar y el sector axial.

Las perturbaciones sobre una geometría de Schwarzschild fueron de las primeras en ser estudiadas. En particular, la derivación de las ecuaciones de evolución de las perturbaciones en un gauge arbitrario sobre esta geometría fue realizada por primera vez en un trabajo seminal de Moncrief [10], que se sigue estrechamente en la próxima sección.

2.3.1. Perturbaciones axiales

Trataremos en primer lugar y en más detalle las perturbaciones axiales o impares. Utilizando la expansión en armónicos esféricos de Regge y Wheeler [8], escribimos

$$h_{ij} = h_1(r, t)(e_1)_{ij} + h_2(r, t)(e_2)_{ij}, \quad (9)$$

siendo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi & \sin \theta \partial_\theta \\ \text{sim} & 0 & 0 \\ \text{sim} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} \left(\partial_\theta^2 \phi - \cot \theta \partial_\phi \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \cos \theta \partial_\theta - \sin \theta \partial_\theta^2 \right) \\ 0 & \text{sim} & - \left(\sin \theta \partial_\theta^2 \phi - \cos \theta \partial_\phi \right) \end{pmatrix} Y_{lm}, \quad (10)$$

en términos de los armónicos esféricos usuales $Y_{lm}(\theta, \phi)$, donde ∂_a denota una derivación respecto a la coordenada a , y sim denota que las matrices son simétricas. El lapso es un escalar bajo rotaciones, por tanto, no contribuye al sector impar. El último grado de libertad impar restante está en el vector desplazamiento, que expandiendo en armónicos esféricos, se puede escribir como

$$\tilde{N}^i = h_0(r, t) \left(0, \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi, \sin \theta \partial_\theta \right) Y_{lm}. \quad (11)$$

Con esta expansión, el sistema queda descrito por las funciones $h_0(r, t)$, $h_1(r, t)$ y $h_2(r, t)$, para cada uno de los modos (l, m) , con $|m| \leq l$. Los modos con $l = 0, 1$ requieren un tratamiento especial y no son radiativos.

Cada difeomorfismo de la variedad que describe el espacio-tiempo viene generado por un campo vectorial X_i . Bajo esa transformación gauge, la métrica perturbada se transforma, cuando la métrica de fondo es estática, como $\delta h_{ij} = X_{i;j} - X_{j;i}$. Como los sectores polar y axial son independientes, basta considerar el efecto de las transformaciones gauge impares, es decir, que se transforman como $(-1)^{l+1}$ bajo paridad. X^i es un vector bajo rotaciones, al igual que lo es el vector desplazamiento, por lo que su expansión en armónicos esféricos tiene la misma forma:

$$X^i = X(r, t) \left(0, \quad \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi, \quad \sin \theta \partial_\theta \right) Y_{lm}. \quad (12)$$

Particularizando ya al caso de Schwarzschild, las funciones que describen la métrica se transforman como

$$\delta h_1 = \partial_r X - \frac{2}{r} X, \quad \delta h_2 = -2X. \quad (13)$$

Dadas las reglas de transformación, construimos la variable, $k_1 = h_1 + [\partial_r h_2 - (2/r)h_2]/2$, y dejamos tal cual la otra variable, $k_2 = h_2$, de forma que $\delta k_1 = 0$, y $\delta k_2 = -2X$. Es decir, k_1 es invariante gauge y k_2 es puro gauge.

Para expandir los momentos en las variables angulares, es conveniente tomar una prescripción de modo que el término que aparece en la acción sea lo más sencillo posible, lo que en este caso significa que el término simpléctico tome una forma diagonal,

$$\Theta = \int d^3x p^{ij} \partial_t h_{ij} = \int dr (\pi_1 \partial_t k_1 + \pi_2 \partial_t k_2). \quad (14)$$

Imponiendo esta condición se obtiene, tras integrar apropiadamente las variables angulares, la siguiente expansión:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} p_{ij} = \pi_1 \left[2l(l+1)\sqrt{f(r)} \right]^{-1} (e_1)_{ij} + \frac{2r^2 \sqrt{f(r)}}{l(l+1)(l-1)(l+2)} \left(\pi_2 + \frac{\pi_1}{r} - \frac{1}{2} \partial_r \pi_1 \right) (e_2)_{ij}. \quad (15)$$

Hasta ahora, sólo se han reescrito las variables canónicas para las perturbaciones en términos de unas nuevas variables, k_1, k_2, π_1, π_2 , de modo que k_1 es invariante gauge. Utilizando las expansiones anteriores, se puede comprobar que la ligadura de momentos $\tilde{\mathcal{H}}^i = 0$ se satisface automáticamente. Para que se verifique la ligadura hamiltoniana, debe darse que $\pi_2 = 0$. Con todo esto, la acción para las perturbaciones (5) es

$$S = \int dt \int dr (\pi_1 \partial_t k_1 + \mathcal{H}), \quad (16)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{l(l+1)} \left[\frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{2r^2 f(r)}{(l-1)(l+2)} \left(\frac{1}{2} \partial_r \pi_1 + \frac{1}{r} \pi_1 \right)^2 \right] + \\ & + \frac{l(l+1)}{2} \left[\frac{(l-1)(l+2)}{r^2} f(r) k_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

De las ecuaciones de Hamilton para las variables k_1, π_1 se obtiene la llamada ecuación de Regge-Wheeler [8]:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_{r_\star}^2 + f(r) [l(l+1)r - 6M] r^{-3} \right) \Psi_{lm}^{\text{axial}}(r, t) = 0, \quad (18)$$

donde se ha introducido la coordenada tortuga $r_\star = r + 2M \log(r/2M - 1)$, y la variable escalar Ψ_{lm}^{axial} viene dada por

$$\Psi_{lm}^{\text{axial}}(r, t) = k_1(r, t) f(r)/r. \quad (19)$$

Como la variable escalar depende de k_1 , que es independiente del gauge, la ecuación (18) es independiente del gauge. Por último, cabe recordar que un camino alternativo pasa por fijar desde el inicio un gauge apropiado, de modo que se acaba obteniendo la misma ecuación del movimiento [8].

2.3.2. Perturbaciones polares

El procedimiento para el caso de las perturbaciones polares es exactamente el mismo. La principal diferencia radica en que, si bien en el caso anterior trabajábamos inicialmente con dos grados de libertad (h_1 y h_2), de los cuales uno acababa siendo pura elección gauge, en este caso se tendrían cuatro grados de libertad. Esto hace el cálculo más tedioso, pero no cambia fundamentalmente nada. Al estudiar la transformación bajo difeomorfismos, dos de los cuatro grados de libertad resultan ser puro gauge. De los dos grados de libertad restantes, uno de ellos debe anularse en virtud de la ligadura hamiltoniana, obteniendo en consecuencia una única variable invariante gauge, Ψ_{lm}^{polar} . En términos de esta función se calculan de la misma manera las ecuaciones del movimiento, obteniendo la ecuación de Zerilli [10]:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + f(r) \left[\Lambda^{-2} \left(72M^3/r - 12M(l-1)(l-2)(r-3M) \right) + \lambda/\Lambda \right] \right) \Psi_{lm}^{\text{polar}}(r, t) = 0, \quad (20)$$

donde

$$\Lambda = l(l+1)r^2 - 2r^2 + 6Mr, \quad \lambda = l(l-1)(l+1)(l+2). \quad (21)$$

Se observa que la estructura de la ecuación es la misma que la de la ecuación (18): una ecuación de onda con un potencial que recoge términos centrífugos e información de la métrica.

2.3.3. Discusión

En primer lugar observamos que el problema para estudiar la evolución de un campo tensorial $h_{\mu\nu}$ se ha reducido a la evolución de dos campos escalares, Ψ_{lm}^a , que obedecen ecuaciones de la forma

$$\left(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_l^a \right) \Psi_{lm}^a = S^a, \quad (22)$$

donde $a = \text{axial, polar}$, V_l^a es un potencial que depende del parámetro orbital l y de la geometría y S^a es un posible término fuente. El caso estudiado anteriormente es de vacío y por tanto, $S^a = 0$. No obstante, se puede generalizar incluyendo un fluido perfecto y trabajando también con las perturbaciones del mismo [11, 12], obteniendo entonces diferentes términos fuente. Tal y como se discutirá más adelante, el hecho de que las perturbaciones gravitacionales se reduzcan al estudio de la propagación de un campo escalar sometido a un cierto potencial no es particular de la geometría de Schwarzschild, sino de la naturaleza de las perturbaciones gravitacionales.

Un segundo punto importante es la relación existente entre las variables escalares “maestras” que describen las perturbaciones gravitacionales, Ψ_{lm}^a y los parámetros observables por un interferómetro de ondas gravitacionales. Habitualmente se definen dos polarizaciones fundamentales, $h_+ = h_{\theta\theta}/r^2$ y $h_\times = h_{\theta\phi}/(r^2 \sin \theta)$, que físicamente se corresponde con compresiones y distensiones de las longitudes en las direcciones $+$ y \times , respectivamente. El parámetro que se mide experimentalmente en observatorios como LIGO es la deformación, $h = r(h_+ - ih_\times)$. En ausencia de fuentes se puede obtener la relación existente entre este parámetro y los campos descritos anteriormente [13, 14] como

$$h = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\Psi_{lm}^{\text{polar}} - i\Psi_{lm}^{\text{CPM}}) \left[\partial_{\theta\theta}^2 + \frac{m}{\sin \theta} (\partial_\theta - \cot \theta) + \frac{l(l+1)}{2} \right] Y_{lm}, \quad (23)$$

donde se ha utilizado el invariante gauge del sector axial en la convención usada por Cunningham, Price y Moncrief $\Psi_{lm}^{\text{CPM}} = 2 \int_0^t dt' \Psi_{2lm}^{\text{axial}}$ [15].

Un último comentario pertinente es la estabilidad de la solución de Schwarzschild bajo perturbaciones a primer orden. Fijémonos, por simplicidad, únicamente en el sector axial. La ecuación de Regge-Wheeler viene complementada por unas condiciones de frontera, que tienen que ser de onda entrante en el horizonte

de sucesos $r_\star \rightarrow -\infty$, y de onda saliente en el exterior $r_\star \rightarrow \infty$. Estas condiciones de frontera garantizan que la energía del sistema es constante. Esto se puede comprobar calculando el hamiltoniano para soluciones de la ecuación de Regge-Wheeler. Por tanto, si la energía es constante, una solución de la ecuación (18) con las condiciones de frontera indicadas no puede crecer exponencialmente en el tiempo, pues entonces, la energía también crecería. En resumidas cuentas: las perturbaciones deben ser disipadas en el tiempo, lo que garantiza la estabilidad a primer orden [16].

2.4. Generalización a situaciones de colapso

En última instancia, se busca estudiar situaciones en las que una estrella colapsa. Si la estrella no está rotando, la parte exterior de la geometría viene descrita por la métrica de Schwarzschild, y se aplica todo lo desarrollado en las secciones anteriores. No obstante, la región interior va a ser muy distinta en este caso e intuitivamente podemos esperar que influya de una forma significativa en el problema.

El caso más sencillo que describe una configuración estelar que colapsa y forma un agujero negro viene dado por la métrica de Oppenheimer-Snyder [17]. Esta es la geometría que describe una nube de polvo (esto es, un fluido perfecto sin presión) inicialmente estática que colapsa libremente. La parte interior de la geometría admite unas coordenadas en las que la métrica es isotrópica, como en los modelos cosmológicos. Estas simetrías adicionales compensan en cierto modo el hecho de que la métrica de fondo, al contrario que en el caso anterior, no es estática.

El formalismo utilizado para obtener las ecuaciones de Regge-Wheeler y de Zerilli se puede aplicar con algunas modificaciones a una métrica de Oppenheimer-Snyder. El principio variacional es distinto, pues incluye términos que reflejan la dependencia temporal de la métrica de fondo, pero la estrategia para construir variables independientes del gauge es la misma. Eventualmente, se obtiene que las ecuaciones para las variables independientes gauge es una ecuación de onda como la de (22). En este caso, existe un término fuente en el interior, que recoge las perturbaciones a primer orden del tensor energía-momento [12].

Al escribir el problema en términos de las variables independientes del gauge se obtiene que su estructura es la misma que en el caso estático. Pero en este caso hay una diferencia adicional, que hay que tratar con delicadeza. La métrica de Oppenheimer-Snyder está escrita en dos cartas coordenadas diferentes: una para el exterior (la métrica de Schwarzschild), y otra para el interior (la métrica cosmológica), cada una con su correspondiente ecuación para las perturbaciones. Ambas cartas se pegan en la superficie de la estrella, pero es necesario también imponer unas condiciones de pegado para las perturbaciones. Para asegurar que la métrica perturbada es suave, tanto la primera como la segunda forma fundamental en la hipersuperficie definida por la superficie de la estrella deben ser continuas. Por otro lado, en la región interior hay un fluido, mientras que la región exterior es de vacío. Para tratar esto de forma consistente, entonces, se impone que la velocidad de las perturbaciones del fluido sea perpendicular a la superficie de la estrella.

Con estas condiciones en [15, 18] se obtuvieron por primera vez soluciones a las ecuaciones que describen las perturbaciones gravitacionales en un colapso de Oppenheimer-Snyder. Dado que el camino que utilizaré en este trabajo para estimar las perturbaciones gravitacionales en situaciones de colapso es distinto, es práctico resumir brevemente las características cualitativas que encontraron, para luego poder compararlas y comprobar si el procedimiento seguido es compatible con lo encontrado en la literatura. Las características fundamentales de las perturbaciones gravitacionales, cuando se considera una perturbación inicial localizada en la superficie de la estrella, son:

- La perturbación inicial se propaga como un frente de ondas distorsionado al escapar del potencial correspondiente. Una parte de la perturbación se queda encerrada en ese potencial, y va disipándose con una frecuencia dada por la frecuencia de los modos cuasinormales que se explican posteriormente. Esto se manifiesta como oscilaciones de la perturbación de amplitud decreciente.
- Si se analiza el problema a tiempos suficientemente largos, se observan colas en las cuales las oscilaciones se detienen y la perturbación decae monótonamente como una potencia del tiempo.

Estas dos características son las más notables con respecto a situaciones de colapso. Es importante recordar que la geometría de Oppenheimer-Snyder es una aproximación sencilla que no pretende dar cuenta del proceso exacto por el que pudiera ocurrir el colapso de una estrella. No obstante, los resultados encontrados permiten identificar correctamente las características que podrían esperarse de las ondas gravitacionales emitidas durante ese proceso.

3. Perturbaciones escalares

Una vez se ha descrito el estudio de las perturbaciones gravitacionales sobre geometrías de Schwarzschild y de colapso, se observa que el problema presenta semejanzas con el comportamiento de los campos escalares. No obstante, la relación entre los observables físicos y las variables escalares que son invariantes gauge es complicada, en general. En este trabajo no buscamos obtener una plantilla detallada de las ondas gravitacionales emitidas en un colapso estelar realista. El objetivo es comprender la física involucrada en esta propagación y emisión. En esta sección se dan argumentos para justificar que las perturbaciones escalares contienen en buena medida todas las características interesantes de las perturbaciones gravitacionales y, por tanto, ofrecen un modelo más simplificado en el que poder trabajar. Además se introducen los modos cuasinormales, que son relevantes para el análisis de los resultados posterior.

3.1. Ecuaciones maestras

El estudio realizado de las perturbaciones gravitacionales ha demostrado que su propagación viene descrita por la propagación de unas variables escalares que verifican una ecuación de onda sometida a un potencial y a unos términos fuentes asociados a los contenidos materiales de la geometría, y que se conocen en la literatura como ecuaciones maestras. En esta sección, motivado por este resultado discutiré la simplificación del problema de las perturbaciones gravitacionales al estudio de perturbaciones escalares.

El formalismo explicado anteriormente hace manifiesta la invariancia gauge de las ecuaciones maestras como la ecuación de Regge-Wheeler o la de Zerilli para la evolución de perturbaciones gravitacionales. Además, da un procedimiento para construir estas ecuaciones, así como las variables maestras correspondientes, en términos de los invariantes gauge de la perturbación métrica. No obstante, este formalismo está limitado a las perturbaciones de espín 2. Por otro lado, utilizando el hecho de que las perturbaciones admiten una descripción en términos de una ecuación de ondas para una variable escalar, Teukolsky [19] construyó un formalismo equivalente que puede tratar en pie de igualdad perturbaciones de un espín arbitrario. Esto es muy útil para poder comparar la diferencia existente entre las perturbaciones gravitacionales, con espín $s = 2$, y las perturbaciones escalares, con espín $s = 0$.

El formalismo de Teukolsky se puede relacionar de modo directo con los invariantes gauge explicados anteriormente para los casos más habituales (ver, e.g [20], para la transformación en un espacio tiempo de Kerr, del cual se puede obtener el espacio-tiempo de Schwarzschild simplemente anulando el momento angular del agujero negro). Para el interés de este trabajo, basta comprender que el formalismo de Teukolsky da una ecuación maestra, válida en general para cualquier espacio-tiempo de tipo estelar ².

Consideremos, entonces, geometrías como la de Schwarzschild (8), donde ahora $f(r)$ es una función arbitraria con un comportamiento suficientemente bueno. El formalismo de Teukolsky permite obtener la ecuación maestra para perturbaciones de espín s entero, sobre esta geometría:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_\star^2} + V_{ls}(r) \right) \Psi = S_{ls} \Psi, \quad (24)$$

²El formalismo de Teukolsky es válido para geometrías de tipo D según la clasificación de Petrov [21]. Esto corresponde a espacio tiempos con dos vectores nulos distintos que son simultáneamente autovectores del tensor de Weyl y de su dual de Hodge. Físicamente, esto es cierto para cualquier espacio-tiempo esféricamente simétrico, y por tanto, para los casos de interés en este trabajo.

siendo S_{ls} un término fuente que describe los campos materiales, si los hubiera, Ψ la variable escalar maestra correspondiente, r_\star la coordenada tortuga definida por $dr/dr_\star = f(r)$ y el potencial viene dado por

$$V_{ls}(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1-s}{r} f'(r) + \frac{s(s-1)(f(r)-1)}{r^2} \right). \quad (25)$$

Este potencial, obtenido por primera vez en [22], se puede interpretar como un término centrífugo u orbital, y una pareja de términos dependientes del espín, además de la dependencia global en la métrica. Ahora bien, si se tiene en cuenta que en geometrías de tipo Schwarzschild, $f(r) = 1 - 2M/r + O(r^{-2})$, observamos que los términos de espín van como r^{-3} , mientras que el término orbital va como r^{-2} . La forma del potencial para una geometría de Schwarzschild se representan en la figura 2-a. Cualitativamente, los distintos valores de l, s muestran una barrera de potencial similar, donde esencialmente cambia su altura. Por tanto, es una aproximación razonable afirmar que los aspectos cualitativos del problema están contenidos, en particular, en el modo $l = 0, s = 0$. La altura de la barrera de potencial en este caso es más pequeña que para los modos con $l \neq 0$ y $s = 2$. No obstante, si consideramos perturbaciones escalares con una energía mucho menor que el máximo de la barrera de potencial, esta diferencia va a resultar en pequeñas correcciones pero no va a cambiar la visión cualitativa del problema.

Estos argumentos fueron expuestos originalmente por Price [23, 24], quien utilizó satisfactoriamente un análogo escalar para analizar si las posibles irregularidades que presentara una estrella antes de colapsar son radiadas durante el colapso, o queda algún remanente una vez se forma un agujero negro. Por los argumentos expuestos antes, los resultados obtenidos para el sector escalar eran cualitativamente similares a los de las perturbaciones gravitacionales. De hecho, profundizando en el análisis, Price observó que estos fenómenos eran debidos a la presencia de una barrera de potencial, y que la fenomenología cualitativa no era particularmente sensible a los detalles de la barrera de potencial.

Todos estos argumentos son válidos para la parte exterior de la geometría, donde no hay términos fuentes. Por el contrario, en el sector gravitacional hay una serie de términos fuentes que no son triviales. Esto nos podría hacer pensar que la diferencia entre las perturbaciones tensoriales y escalares, si bien válida para agujeros negros, no lo fuera para configuraciones estelares. Analicemos dos situaciones diferentes:

- Supongamos que el radio de la estrella, r_s , es mucho mayor que su radio gravitacional, es decir, $r_s \gg 2M$. Entonces las curvaturas en el interior siempre están acotadas y son pequeñas. No obstante, en esta situación habría que tener en cuenta las perturbaciones del contenido material de la estrella, que entrarían a través del término fuente S_{ls} . En este caso, sería necesario resolver las ecuaciones con sus fuentes, es decir, considerar las perturbaciones del contenido material, y las perturbaciones escalares no son suficientes para describir completamente el problema. Estos son los mecanismos de producción de ondas gravitacionales que se consideran en [6], por ejemplo.
- Cuando el radio de la estrella se acerca a su radio gravitacional, $r_s \rightarrow 2M$, también existen, a priori, perturbaciones del contenido material. Sin embargo, la curvatura en las regiones interiores de la configuración es mucho más grande, tanto más cuando más se acerca la estrella a su radio gravitacional, formando eventualmente una singularidad. Por tanto el término cinético es dominante en este régimen frente al potencial o a los términos fuente, y estos se pueden ignorar.

En resumidas cuentas, para estudiar situaciones de colapso a tiempos tardíos, es decir, cuando la estrella está muy próxima a formar un objeto compacto, asemejar las perturbaciones gravitacionales por perturbaciones escalares resulta una buena aproximación. Las correcciones concretas se podrían encontrar trabajando el formalismo explicado en la sección 2, pero el problema de las perturbaciones escalares dado por (24) con $s = 0$ y en ausencia de fuentes es mucho más sencillo, en general, y va a ser capaz de capturar la mayor parte de las características cualitativas del proceso.

3.2. Modos cuasinormales

Un sistema clásico sometido a oscilaciones, como por ejemplo una cuerda, admite soluciones particulares oscilantes en el tiempo con una frecuencia fija. De hecho, a partir de un conjunto completo de estas soluciones particulares se puede reconstruir la solución general. Estos son los modos normales en un sistema clásico. Otro tipo de sistemas, como pudiera ser una campana, tienen un comportamiento similar, pero con una diferencia muy relevante. Al golpear una campana (perturbarla), esta vibra con unas frecuencias bien definidas, pero eventualmente la perturbación se desvanece: las frecuencias características del sistema son disipativas, esto es, tienen una parte compleja. A estas soluciones características se las denomina modos cuasinormales.

Cuando se perturba un agujero negro, una parte de esa perturbación se queda atrapada en la barrera de potencial. Entonces, va siendo absorbida progresivamente por el agujero, a la par que se va emitiendo hacia el infinito. Esta disipación se produce con unas oscilaciones como las del sonido producido por una campana, es decir, dominada por los modos cuasinormales. De hecho, uno de estos modos (el fundamental) tiene una parte imaginaria mucho más pequeña que el resto (es menos disipativo), por lo que este proceso está claramente dominado por este modo de oscilación. La frecuencia de estas oscilaciones es uno de los parámetros característicos que, eventualmente, podrá ser determinado experimentalmente en observatorios de ondas gravitacionales. Esto es muy interesante, pues las frecuencias de los modos cuasinormales muestran una información muy valiosa sobre las cercanías del horizonte de sucesos, porque su valor exacto depende de la forma particular del potencial [25].

Consideremos un campo escalar que se propaga sobre una geometría de Schwarzschild. Su propagación quedará determinada por una ecuación de la forma

$$\partial_t^2 \Psi - \partial_{r_\star}^2 \Psi = V(r_\star) \Psi, \quad (26)$$

en términos de la coordenada tortuga r_\star . Por el momento no es importante la forma detallada del potencial. Si escribimos $\Psi = e^{i\omega_n t} \psi_n(r_\star)$ las frecuencias ω_n deben satisfacer

$$\left(\partial_{r_\star}^2 - V(r_\star) \right) \psi_n = -\omega_n^2 \psi_n. \quad (27)$$

Para describir completamente el sistema son necesarias condiciones de frontera. Evidentemente, en el horizonte de eventos la solución debe ser entrante. Además, estamos interesados en soluciones que se radian hacia el infinito, por lo que se imponen condiciones de onda saliente en el infinito:

$$\psi_n \xrightarrow{r_\star \rightarrow -\infty} e^{-i\omega_n r_\star}, \quad \psi_n \xrightarrow{r_\star \rightarrow \infty} e^{i\omega_n r_\star}. \quad (28)$$

Entonces, la ecuación (27) junto con estas condiciones de frontera puede estudiarse como un problema de autovalores, cuya solución proporciona las frecuencias de los modos cuasinormales de la geometría. Cuando, en lugar de un agujero negro, se analiza un objeto compacto que no tiene horizontes, como una estrella de neutrones, se debe sustituir la condición de frontera entrante en el horizonte por una reflexión perfecta en $r = 0$. Esto cambia completamente el problema en cuestión. Por esto es que se han señalado a los modos cuasinormales como un parámetro que podría discernir entre objetos compactos sin horizontes y agujeros negros [26].

4. Relatividad numérica

Para resolver la ecuación de Klein-Gordon que describe la propagación de un campo escalar cuando la geometría es complicada (en particular, si es dinámica, como en el caso de un colapso), es imprescindible disponer de métodos numéricos. En este trabajo se ha utilizado el código NADA, que utiliza la formulación BSSN (Baumgarte, Shapiro, Shibata y Nakamura) y una integración numérica parcialmente implícita para poder tratar problemas como este con generalidad [27, 28]. En esta sección se van a explicar los fundamentos numéricos y la formulación BSSN adaptada al caso de interés.

4.1. Métodos parcialmente implícitos

La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación hiperbólica de segundo orden. Es sencillo escribirla como un sistema de ecuaciones de primer orden en el tiempo. Para resolver numéricamente un sistema con estas características, se considera que tanto el espacio como el tiempo están discretizados. Dada una discretización, las derivadas espaciales se pueden aproximar mediante diferencias finitas. Por tanto, el punto más delicado viene dado por la integración temporal del sistema de ecuaciones, es decir, por la regla que permite pasar de la solución en un instante de tiempo t a la solución en $t + \Delta t$.

Consideremos, para ejemplificar, una ecuación muy sencilla, dada por $\partial_t u = f(t, u)$, y denotamos por $u_j = u(t_j)$. Dada una condición inicial $u_0 = u(t_0)$, hay dos posibles estrategias para obtener la integración temporal, que son los esquemas explícitos e implícitos. Si $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, y particularizando al método más sencillo que se puede plantear (el método de Euler), los esquemas explícito e implícito son:

$$u_{j+1}^{\text{exp}} = u_j + \Delta t f(t_j, u_j), \quad u_{j+1}^{\text{imp}} = u_j + \Delta t f(t_{j+1}, u_{j+1}). \quad (29)$$

Como se observa, la actualización temporal para el caso explícito es directa. Por el contrario, para el método implícito, se requiere resolver una ecuación algebraica, que puede ser, en general, muy complicada, en cada iteración temporal. ¿Cuál es la ventaja, entonces, de los métodos implícitos? Como norma general, los métodos implícitos tienen mejores propiedades de estabilidad que los métodos explícitos [29]. Esto significa que para ecuaciones problemáticas los métodos explícitos necesitan discretizaciones temporales muy finas, lo que aumenta el tiempo de computación. Por el contrario, para esas ecuaciones los métodos implícitos pueden trabajar con discretizaciones más groseras. Entonces, incluso aunque cada iteración de un método implícito sea más lenta (por el tiempo que se emplea en resolver la ecuación algebraica de la actualización temporal), el método implícito acaba siendo más eficiente que el explícito.

Volvamos entonces al caso de la ecuación de Klein-Gordon en una métrica de fondo arbitraria. Las ecuaciones hiperbólicas son susceptibles de volverse inestables muy rápidamente. Una posibilidad para tratar este problema es combinar un método numérico de alta precisión (típicamente esquemas de Runge-Kutta de orden 6) con una discretización temporal fina (o incluso adaptativa, esto es, más fina en las regiones que pueden ser más problemáticas, que suelen ser las regiones con curvaturas más grandes). No obstante, si se realiza un análisis más cuidadoso de la ecuación, se puede comprobar que sólo algunos de los términos son inestables, mientras que otros términos son mucho más estables. Por tanto, es posible adoptar una estrategia mixta, que es la idea que subyace detrás de los métodos parcialmente implícitos [30]. Separamos la ecuación en dos términos, $\partial_t u = \mathcal{L}_{\text{imp}}[u] + \mathcal{L}_{\text{exp}}[u]$, donde $\mathcal{L}_{\text{imp/exp}}$ son operadores lineales. Entonces, se aplica un esquema implícito sobre el operador \mathcal{L}_{imp} , mientras que para el operador \mathcal{L}_{exp} se utiliza un esquema explícito. Esto permite asegurar la estabilidad de la solución a la par que se optimiza el tiempo de computación.

4.2. El formalismo BSSN

Actualmente hay diferentes propuestas para resolver numéricamente problemas de relatividad general [31]. Una de las más exploradas es el formalismo BSSN. Este formalismo parte de la descomposición ADM para plantear las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales, usando unas variables especiales que tienen buenas propiedades numéricas. Esto, complementado con diferentes mecanismos para resolver la hidrodinámica relativista, permite evolucionar situaciones relativistas en presencia de campos materiales.

Para el interés de este trabajo no es necesario considerar las ecuaciones BSSN en su completitud (ver [27, 28]), pues al tratar el campo escalar como una perturbación, su energía puede ser lo suficientemente débil como para que su efecto sobre la geometría sea despreciable. De hecho, ni siquiera es necesario considerar el problema en $3 + 1$ dimensiones, puesto que el sector esféricamente simétrico (el modo $l = 0$ de la descomposición en armónicos esféricos) muestra muchas de las características cualitativas del problema. Cabe mencionar que para trabajar con modos con $l \neq 0$, donde es necesario realizar la simulación en

3 + 1 dimensiones, el cálculo se ralentiza notablemente. Si bien el caso a estudiar es un problema mucho más simplificado, utilizar las variables BSSN es muy útil para poder aprovechar los códigos que ya están corroborados en la comunidad de Relatividad Numérica.

En variables BSSN y en el sector esféricamente simétrico la métrica dl^2 de las secciones espaciales se escribe en forma conformemente plana, a fin de simplificar las ecuaciones: $dl^2 = e^{4\chi} (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$. La geometría, por tanto, queda recogida en la variable χ , el lapso N y el vector desplazamiento N^i . Consideremos entonces una geometría cuya dinámica ya está fijada, sobre la cual se trata un campo escalar Ψ . Se definen unas variables auxiliares como

$$\Pi = \frac{1}{N} (\partial_t \Psi - N^r \partial_r \Psi), \quad \Phi = \partial_r \Psi, \quad (30)$$

en términos de las cuales la ecuación de Klein-Gordon adquiere la forma [32, 33]

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= N^r \partial_r \Phi + \Psi \partial_r N^r + \partial_r (N \Pi), \\ \partial_t \Pi &= N^r \partial_r \Pi + N e^{-4\chi} [\partial_r \Phi + \Phi (2/r + 2\partial_r \chi)] + e^{-4\chi} \Phi \partial_r N + N K \Pi - N \mu^2 \Phi, \end{aligned} \quad (31)$$

siendo K la traza de la curvatura extrínseca de las secciones espaciales y μ la masa del campo escalar. Dadas unas condiciones iniciales $\Pi(t = 0, r)$ y $\Phi(t = 0, r)$ el sistema evoluciona las ecuaciones utilizando un esquema numérico parcialmente implícito como el explicado en la sección anterior. Para este trabajo, consideraremos siempre condiciones inicialmente estáticas, es decir, con $\Pi(t = 0, r) = 0$. El perfil inicial del campo será gaussiano, $\Psi(t = 0, r) = \Psi_0 e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}$, donde $\Psi_0 = 10^{-4}$ será siempre la amplitud inicial del campo, r_0 es su posición inicial y σ su anchura. Trabajaremos además siempre con campos escalares sin masa, es decir, $\mu = 0$.

5. Resultados

5.1. Geometrías estáticas

En primer lugar se analizarán dos casos representativos de las posibles geometrías estáticas: por un lado, se analizarán las perturbaciones escalares sobre un agujero negro estático, descrito por la métrica de Schwarzschild, para comprobar que se reproducen los resultados encontrados en la literatura. Por otro lado, se estudiarán las perturbaciones sobre métricas que describen estrellas de densidad constante (estrellas de Schwarzschild), como ejemplo de las perturbaciones sobre una geometría estelar, en un caso lo suficientemente simplificado.

La métrica de Schwarzschild (8) tiene una singularidad en $r = 0$. Por lo tanto, una simulación numérica no puede tratar tal cual esta geometría, sino que necesita algún modo de regularizarla. Es importante destacar que la singularidad está detrás de un horizonte de eventos. Por lo tanto, diferentes modos de regularizar la singularidad no pueden cambiar los resultados en el exterior, pues el exterior está desconectado causalmente de la región interior. El método más habitual introduce punciones [34]. Esto consiste en utilizar unas coordenadas que no llegan a la singularidad, por el contrario, se conectan por medio de una garganta a una región asintótica diferente, que se compactifica en un único punto de la discretización numérica. Un ejemplo de esto viene dado, en variables BSSN, por la métrica de las secciones espaciales dada por $\chi = \log(1 + M/2r)$, y la elección de un gauge en el que el lapso y del vector desplazamiento toman los valores $N = e^{-2\chi}$, $N^r = 0$. Por este motivo, aunque la métrica definida con esos parámetros es estática, evoluciona de acuerdo a las ecuaciones gauge que se pueden encontrar en [27]. Se encontró que, en la evolución, se alcanzaba rápidamente un estado que sí que era estacionario para la evolución gauge, descrito en [35]. Cuando la coordenada radial de Schwarzschild tiende a cero, $r \rightarrow 0$, la nueva coordenada radial se aproxima a $R \rightarrow 3M/2$. La métrica sigue teniendo un horizonte de eventos en $R = 2M$. Por tanto, lo que representa físicamente es una métrica exterior de Schwarzschild, mientras que dentro del horizonte aparece

una garganta que nunca llega a la región asintótica. Esta métrica es analítica y se ha utilizado frecuentemente en la literatura para describir geometrías de Schwarzschild (ver [32] por ejemplo), por lo que es la que se utilizará en este trabajo.

Por otro lado consideramos estrellas de densidad constante, caracterizadas por el radio de su superficie, r_s . Otro parámetro que se empleará después es la compacidad de la estrella, definida como $C = 2M/r_s$, de modo que la compacidad es $C = 1$ para un agujero negro, y es siempre menor que 1 para cualquier configuración regular. El exterior de esta configuración viene dado por la métrica de Schwarzschild, mientras que el interior es la solución a las ecuaciones de Einstein para un tensor energía-momento de un fluido perfecto con densidad constante. Esta métrica se puede escribir en coordenadas que tienen secciones espaciales isótropas y con un vector desplazamiento nulo, $N^r = 0$. Las variables BSSN son, por tanto

$$N = \begin{cases} \frac{1-M/2Ar}{1+M/2Ar} & r > r_s \\ \frac{1}{2} \left(3\sqrt{1-C} - \sqrt{1-4\left(\frac{Br}{B^2+r^2}\right)^2} \right) & r < r_s \end{cases}, \quad e^{2\chi} = \begin{cases} A \left(1 + \frac{M}{2Ar}\right)^2 & r > r_s \\ \frac{2Br_s}{\sqrt{C}(B^2+r^2)} & r < r_s \end{cases}, \quad (32)$$

en términos de los parámetros

$$A = \frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{1-C} - C), \quad B = r_s \frac{1 + \sqrt{1-C}}{\sqrt{C}}. \quad (33)$$

Hay que mencionar que la métrica es válida sólo cuando $r_s > 9M/4$, que es el conocido límite de Buchdahl [36]. Cuando se alcanza ese valor, la métrica pasa a ser singular. Esto se corresponde a considerar estrellas con una compacidad máxima de $C_{\max} = 8/9 \simeq 0,89$. En la figura 2-a se muestra el comportamiento del potencial para esta configuración. Coincide en el exterior con el potencial para el caso de Schwarzschild, pues la geometría es la misma. En la superficie de la estrella presenta una discontinuidad porque la densidad de la estrella es discontinua. En el interior, su forma difiere de la del resto de potenciales, pues mantiene un valor aproximadamente constante y no nulo.

En la figura 2-b se muestra la evolución de un campo escalar sobre una geometría de Schwarzschild (8), observado en un radio fijo $r_e = 10M$. No se observa el comportamiento esperado de los modos cuasinormales, sencillamente, porque el modo $l = 0$ no excita modos cuasinormales. Esto se debe a que, como se mencionó previamente, los modos con $l = 0, 1$ no son radiativos, es decir, asintóticamente decaen y por tanto no verifican la condición de frontera de onda libre saliente en $r \rightarrow \infty$. De esta figura lo más destacable es el comportamiento asintótico que muestra el campo. A tiempos largos, en lugar de decaer exponencialmente, como podría parecer natural, decae como una ley de potencias, en concreto, como $\Psi \propto t^\alpha$ con $\alpha = -4$. Este tipo de comportamiento, denominado colas asintóticas fue observado por primera vez en [37]. La formación de estas colas asintóticas se debe, esencialmente, a la forma del potencial a grandes distancias. Por lo tanto, no es sensible a la presencia de un horizonte, o a las particularidades de la forma del potencial. Por tanto, las mismas colas asintóticas se observan en la figura 2-c para estrellas de distinta compacidad.

Parece ocurrir que la formación de cola asintótica es más tardía cuanto más compacta es la estrella. Esto es exactamente lo que podría esperarse si se profundiza un poco más en el origen de las colas asintóticas. Para un problema de dispersión como el que aquí se analiza, el comportamiento más natural debería ser el decaimiento exponencial, pues una vez pasa el frente de ondas por el radio de extracción, el campo debería decaer exponencialmente. No obstante, dado que el potencial a grandes distancias decae lo suficientemente lento, el campo tiene toda una serie de interferencias consigo mismo que, eventualmente, sustituyen el decaimiento exponencial por un decaimiento más suave, como ley de potencias. Por tanto, cuanto más compacta es la estrella, más tiempo se queda atrapado el frente de ondas en el interior de la misma, y en consecuencia más se tarda en estabilizar el campo por sus autointerferencias. Cabe mencionar que el exponente encontrado para la ley de potencias, $\alpha = -4$ es precisamente el obtenido en la literatura para el modo $l = 0$ con una condición inicial estática [38, 39].

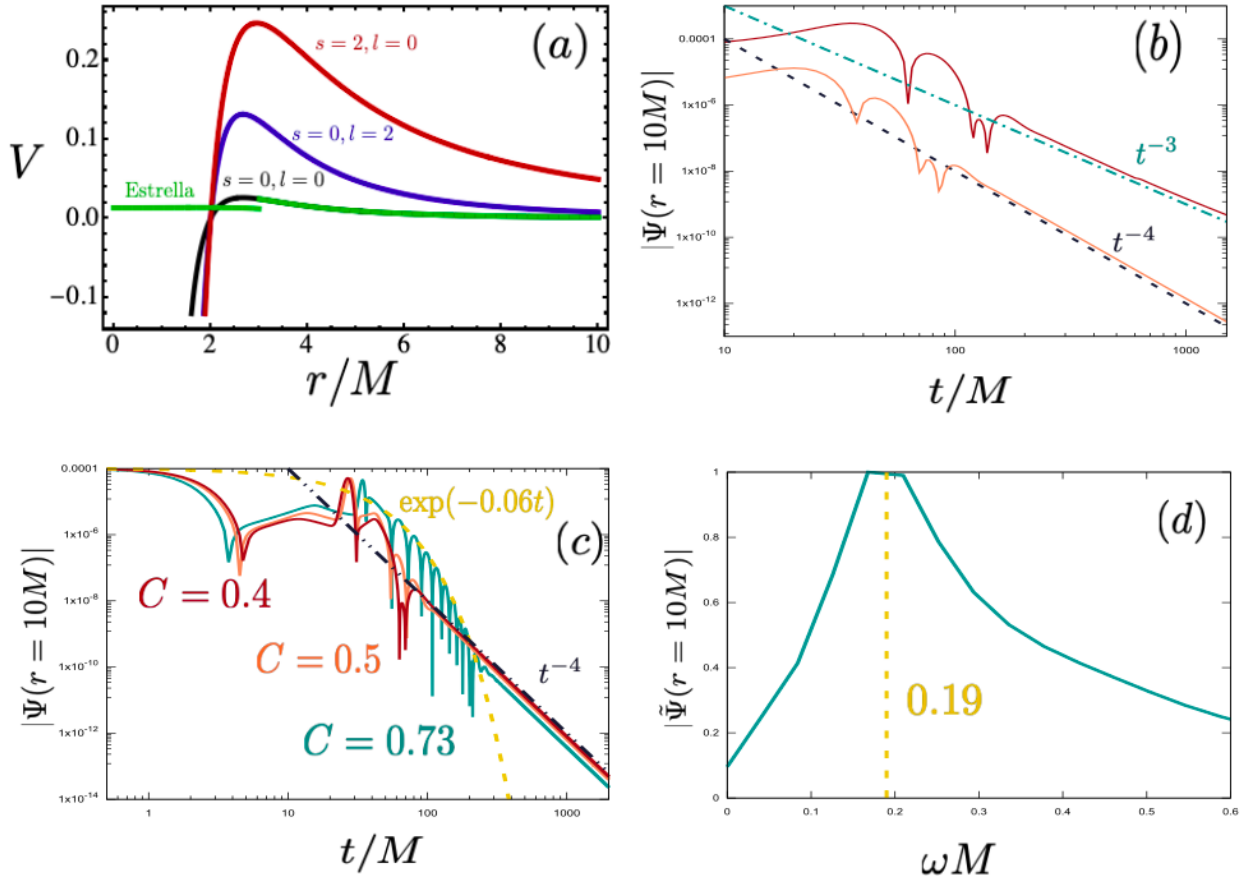


Figura 2: (a) Potenciales para la ecuación de Klein-Gordon dados en (25) para $s = 0, l = 0$ (negro), $s = 0, l = 2$ (azul), $s = 2, l = 2$ (rojo) y para la geometría dada en 32 (verde), con $r_s = 3M$, para $l = 0$. (b) En naranja, evolución de un campo escalar sobre una geometría de Schwarzschild con $\sigma/M = \sqrt{5}$ y $r_0 = 10M$, observado en $r_e = 10M$. Se observa que desarrolla una cola asintótica que escala como t^{-4} . En rojo, la evolución para una geometría con una estrella de neutrones y una inestabilidad inicial de $\Delta p = 0,5\%$ y un campo escalar con las mismas características pero localizado en $r_0 = 500M$. Se ha desplazado el origen de tiempos en este caso para poder comparar las dos figuras. Se observa que para tiempos largos escala como t^{-3} . (c) Evolución de un campo escalar sobre una estrella de densidad constante con compacidades $C = 0,4, 0,5, 0,73$ en rojo, naranja y verde, respectivamente. Las condiciones iniciales son $\Psi_0 = 10^{-4}$, $\sigma/M = \sqrt{5}$ y $r_0 = 10M$ y se observa en $r_e = 10M$. En todos los casos se desarrolla una cola asintótica que escala como t^{-4} . En amarillo, la frecuencia imaginaria para la estrella más compacta. (d) Transformada de Fourier $\tilde{\Psi}$ del campo escalar normalizada a la unidad entre $t = 50M$ y $t = 200M$ para la estrella más compacta de la figura anterior.

Por último, para la estrella más compacta considerada, que tiene $C = 0,73$ (que se corresponde a $r_s = 2,75M$), se observa que buena parte de la evolución está dominada por modos cuasinormales. Hay que destacar que estos modos cuasinormales son solución de un problema distinto al discutido anteriormente, pues no sólo el potencial del problema es distinto, sino que en este caso, la condición de frontera interna es de reflexión perfecta en $r = 0$. Realmente, los modos cuasinormales estarían presentes independientemente de la compacidad. No obstante, cuando el radio de la estrella es lo suficientemente grande, la configuración se estabiliza y forma la cola asintótica demasiado rápido como para poder observar los modos cuasinormales. Esto es consistente con lo encontrado en casos similares [40]. Hemos estimado numéricamente la frecuencia del modo cuasinormal aquí observado, obteniendo $\omega/M = 0,19 - 0,06i$. Esta frecuencia es del mismo orden de

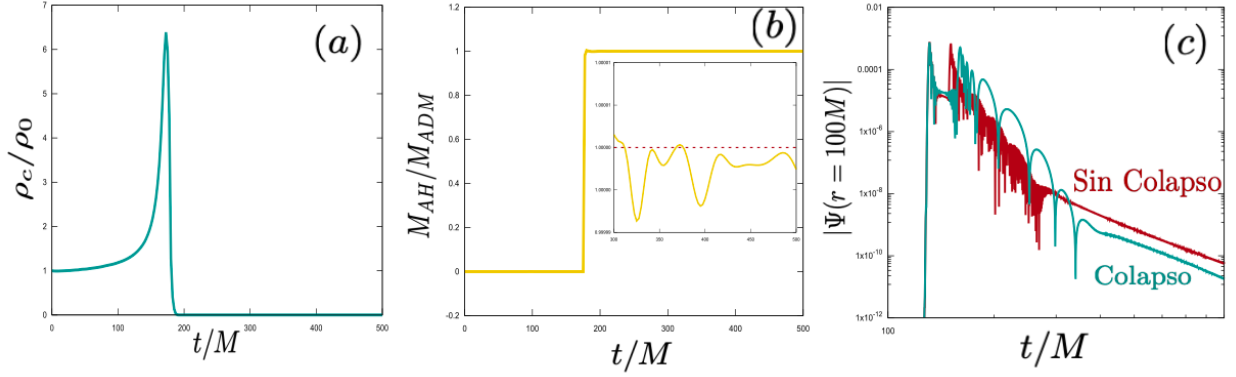


Figura 3: (a) Evolución de la densidad central frente a la densidad central inicial ρ_0 para una estrella de neutrones con una perturbación $\Delta p = 0,5\%$ de la presión central de equilibrio. (b) Al perturbar la estrella de neutrones, se forma un horizonte aparente en $t_{\text{col}} \approx 175M$, en el cual la masa de este horizonte aparente se iguala a la masa asintótica del espacio-tiempo. (c) Evolución del campo escalar observado en $r_e = 100M$ para una condición inicial caracterizada por $\Psi_0 = 10^{-4}$, $r_0 = 120M$ y $\sigma/M = 1$. En azul, la evolución para una estrella con una perturbación $\Delta p = 0,5\%$. En rojo, lo mismo para una estrella estable.

magnitud que la frecuencia del modo fundamental de un agujero negro, dada por $\omega_{n=0,l=2}/M = 0,37 - 0,09i$. Se observa una pequeña diferencia en la parte imaginaria, debida a que el caso estelar es menos disipativo que el agujero negro, pues no presenta un horizonte de eventos. La parte real de la frecuencia se ha obtenido realizando una transformada de Fourier. Como se observa en la Figura 2-d, la precisión en esta medida no es demasiado buena, pues el campo sólo oscila un número pequeño de veces. El orden de magnitud de esta frecuencia viene dado esencialmente por el tamaño de la región de potencial donde el campo se queda atrapado. En efecto, el periodo de las oscilaciones $T = 2\pi/\omega \approx 33M$ es comparable al tiempo que emplea una geodésica nula en entrar y salir desde $r = r_s$, que es $t_{\text{geod}} \approx 19M$.

5.2. Geometrías dinámicas

En esta sección consideramos un modelo de colapso más sofisticado que el modelo de Oppenheimer-Snyder, pero que no pretende ser un modelo completamente realista. Partimos de una configuración inicial dada por una estrella politrópica, con una ecuación de estado $p = 100\rho^2$ donde p es la presión y ρ es la densidad. Este tipo de ecuaciones de estado pueden ser una primera aproximación a una estrella de neutrones fría. Si perturbamos esta configuración mediante un incremento de la presión en el centro de la estrella, que parametrizamos por Δp , la estrella sale del equilibrio y colapsa gravitacionalmente. En este caso, la geometría está evolucionando conjuntamente con el fluido que describe la estrella utilizando el formalismo BSSN al completo. Los detalles de las ecuaciones y de los aspectos numéricos de esta simulación se recogen en [27].

Intuitivamente se espera que cuando la estrella colapsa, se forme un agujero negro. Esto se puede comprobar numéricamente, por ejemplo, estudiando la evolución de la densidad central de la estrella, como en la Figura 3-a. Se puede ver que la densidad crece, hasta que en $t_{\text{col}} \approx 175M$, la densidad se hace cero. Esto ocurre porque cuando se detecta la formación de un horizonte de sucesos, se elimina el fluido de esa región para evitar que parámetros como la densidad crezcan indefinidamente y causen problemas numéricos. La signatura más evidente de la formación del colapso es la formación de un horizonte de sucesos. Para ello, en cada instante de tiempo se analiza si se ha formado uno, y una vez se forma, se calcula su área, \mathcal{A} . Se define la masa del horizonte aparente como $M_{AH} = \sqrt{\mathcal{A}/16\pi}$. En la Figura 3-b se puede ver claramente que en $t_{\text{col}} \approx 175M$ se forma un horizonte, y la masa del mismo se estabiliza a la masa asintótica del espacio-tiempo,

con una discrepancia del orden de $|M_{AH} - M_{ADM}| \leq 10^{-5}$.

Una vez establecida la formación de un horizonte, se puede realizar un último test para comprobar el buen funcionamiento del sistema. Consideramos un campo escalar que inicialmente está muy lejos de la estrella, es decir, con $r_0 = 500M \gg t_{col}$. Como la geometría exterior apenas cambia durante la evolución, este campo observará de modo efectivo un agujero negro, es decir, es un problema equivalente al estudiado en la sección anterior. Ahora bien, la diferencia radica en que en este caso, una vez se forma el agujero negro, el campo escalar no es estático. De acuerdo con [38], cuando la condición inicial no es estática, la cola asintótica que se forma tiene exponente $\alpha = -3$. Esto es precisamente lo que se observa en la Figura 2-b, donde además el comportamiento a tiempos cortos es muy similar en ambos casos.

Ya establecidas las comparaciones con casos bien conocidos en la literatura, damos un paso más allá con el fin de buscar si, analizando la evolución del campo escalar, es posible observar algún rastro de la formación de un agujero negro. Para poder hacer esto se compara directamente un caso en el cual la estrella es estática, con $\Delta p = 0$, con un caso en el cual la estrella se perturba y colapsa formando un agujero negro, con $\Delta p = 0,5\%$. En la Figura 3-c se muestran estos dos casos, superpuestos, para unas mismas condiciones iniciales. Se observan dos diferencias fundamentales:

- En ambos casos se forma una cola asintótica. No obstante, el valor del campo escalar cuando empieza a decaer como una ley de potencias es, aproximadamente, un orden de magnitud menor en el caso en el que se forma un agujero negro. Esto se debe fundamentalmente a que el agujero negro absorbe parte del campo escalar, mientras que la estrella refleja eventualmente todo el campo. Como comparación, en la Figura 2-c se puede ver que el valor del campo cuando se forma la cola asintótica no depende de la compacidad de la configuración. Por tanto, esto es una signatura clara de la formación de un agujero negro.
- Antes de que se forme la cola asintótica, hay una fase de oscilación dominada por modos cuasinormales. Cualitativamente se observa que el comportamiento es muy distinto en ambos casos: en el caso en el que se forma un agujero negro, la frecuencia de estas oscilaciones es mucho menor. La frecuencia de estas oscilaciones es mucho mayor en el caso en el que no hay un colapso, y se puede observar incluso que habría varios modos cuasinormales relevantes. Sería interesante disponer de un análisis mucho más detallado de los modos cuasinormales en una estrella politrópica de este tipo, pero por el momento, se puede aventurar que la presencia de modos cuasinormales con frecuencias bajas puede ser una signatura de la formación de un agujero negro.

6. Conclusiones

La cuestión que motivó inicialmente este trabajo fue determinar las ondas gravitacionales producidas durante el colapso de una estrella. Para ello se ha buscado comprender con claridad los casos más sencillos, con la finalidad de construir a partir de ellos. Este trabajo constituye la primera fase de este programa de investigación.

El primer paso ha consistido en aprender el formalismo de las perturbaciones gravitacionales en los casos más sencillos, es decir, sobre una métrica de Schwarzschild. En este caso, para tratar el problema con la mayor generalidad posible, se ha optado por derivar las ecuaciones fundamentales de este proceso (las ecuaciones de Regge-Wheeler y de Zerilli) en el formalismo invariante gauge. Como primera observación importante se ve que el problema se reduce a una ecuación de onda, con un cierto potencial, para un campo escalar.

Este procedimiento es más complicado cuando la geometría de fondo no tiene todas las simetrías de la métrica de Schwarzschild, y en particular, cuando no es estática. Además, observamos que la ecuación que domina la evolución de las perturbaciones tiene esencialmente la misma forma, con independencia del espín de las perturbaciones. Por lo tanto, con la finalidad de simplificar el proceso para así tratar un sistema lo más

sencillo posible, se ha optado por tratar las perturbaciones escalares sobre una geometría fija. Si bien los resultados serán cuantitativamente distintos, se han dado argumentos que justifican que, cualitativamente, ambos casos son muy similares.

Con todo esto en mente, después de introducir unos conceptos básicos sobre métodos numéricos y de adaptar el problema a las variables BSSN, se ha procedido a simular algunos casos físicamente relevantes. Se ha encontrado que la formación de colas asintóticas sobre una métrica de Schwarzschild obedece a lo previsto en la literatura. Además, se han obtenido la frecuencia del modo fundamental de las perturbaciones escalares sobre una estrella de densidad constante. Por último, se ha comprobado que cuando una estrella colapsa y forma un agujero negro, deja una signature en la evolución de las perturbaciones escalares.

Actualmente todavía quedan abundantes cuestiones en las que profundizar sobre este problema. La relación entre la frecuencia de los modos cuasinormales con la compacidad de las estrellas, la generalización de las simulaciones fuera del sector esféricamente simétrico o un análisis espectral más detallado de las diferencias entre las perturbaciones sobre configuraciones estáticas y configuraciones de colapso, son sólo algunas de las cuestiones sobre las que se va a profundizar en los próximos meses. Además, estos casos más sencillos han sido el territorio ideal para explorar antes de intentar analizar las geometrías de colapso estelar con modificaciones debidas a la física semiclásica o cuántica.

Agradecimientos

Quiero manifestar mi agradecimiento a Carlos Barceló por su papel de co-director de este trabajo, así como a Isabel Cordero-Carrión y a Nicolás Sanchis-Gual, por la cesión del código NADA y la valiosa ayuda para aprender a utilizarlo.

Referencias

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116:061102, 2016.
- [2] R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, A. Adams, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, et al. GWTC-2: Compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run. *arXiv preprint 2010.14527*, 2020.
- [3] J. G. Kelly, R. Santacruz, and E. Wilson-Ewing. Black hole collapse and bounce in effective loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 38:04LT01, 2020.
- [4] C. Barceló, R. Carballo-Rubio, and L. J. Garay. Where does the physics of extreme gravitational collapse reside? *Universe*, 2:7, 2016.
- [5] R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, and M. Visser. Phenomenological aspects of black holes beyond general relativity. *Physical Review D*, 98:124009, 2018.
- [6] C. L. Fryer and K. New. Gravitational waves from gravitational collapse. *Living Reviews in Relativity*, 14:1, 2011.
- [7] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, et al. Optically targeted search for gravitational waves emitted by core-collapse supernovae during the first and second observing runs of advanced LIGO and advanced Virgo. *Physical Review D*, 101:084002, 2020.
- [8] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Physical Review*, 108:1063, 1957.

- [9] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Canonical variables for general relativity. *Physical Review*, 117:1595, 1960.
- [10] V. Moncrief. Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. i. The exterior problem. *Annals of Physics*, 88:323, 1974.
- [11] V. Moncrief. Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. ii. Perfect fluid interiors. *Annals of Physics*, 88:343, 1974.
- [12] A. H. Taub. Stability of general relativistic gaseous masses and variational principles. *Communications in Mathematical Physics*, 15:235, 1969.
- [13] A. Pound and B. Wardell. Black hole perturbation theory and gravitational self-force. *arXiv preprint 2101.04592*, 2021.
- [14] K. Martel and E. Poisson. Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime: A practical covariant and gauge-invariant formalism. *Physical Review D*, 71:104003, 2005.
- [15] C. T. Cunningham, R. H. Price, and V. Moncrief. Radiation from collapsing relativistic stars. I-Linearized odd-parity radiation. *The Astrophysical Journal*, 224:643, 1978.
- [16] M. Dafermos, G. Holzegel, I. Rodnianski, et al. The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations. *Acta Mathematica*, 222:1, 2019.
- [17] E. Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [18] C. T. Cunningham, R. H. Price, and V. Moncrief. Radiation from collapsing relativistic stars. II-Linearized even-parity radiation. *The Astrophysical Journal*, 230:870, 1979.
- [19] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *The Astrophysical Journal*, 185:635, 1973.
- [20] S. Chandrasekhar. On a transformation of Teukolsky's equation and the electromagnetic perturbations of the Kerr black hole. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 348:39, 1976.
- [21] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [22] A. Arbey, J. Auffinger, M. Geiller, E. R. Livine, and F. Sartini. Hawking radiation by spherically-symmetric static black holes for all spins: I-Teukolsky equations and potentials. *arXiv preprint 2101.02951*, 2021.
- [23] R. H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. Scalar and gravitational perturbations. *Physical Review D*, 5:2419, 1972.
- [24] R. H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. II. Integer-spin, zero-rest-mass fields. *Physical Review D*, 5:2439, 1972.
- [25] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2:1, 1999.
- [26] M. Bouhmadi-López, S. Brahma, C. Chen, P. Chen, and D. Yeom. A consistent model of non-singular Schwarzschild black hole in loop quantum gravity and its quasinormal modes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020:066, 2020.

- [27] P. J. Montero and I. Cordero-Carrión. BSSN equations in spherical coordinates without regularization: Vacuum and nonvacuum spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 85:124037, 2012.
- [28] T. W. Baumgarte, P. J. Montero, T. Cordero-Carrión, and E. Müller. Numerical relativity in spherical polar coordinates: Evolution calculations with the BSSN formulation. *Physical Review D*, 87:044026, 2013.
- [29] E. Süli and D. F. Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003.
- [30] I. Cordero-Carrión and P. Cerdá-Durán. Partially implicit Runge-Kutta methods for wave-like equations. In *Advances in Differential Equations and Applications*, page 267. Springer, 2014.
- [31] C. Palenzuela. Introduction to Numerical Relativity. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 7:58, 2020.
- [32] N. Sanchis-Gual, J. C. Degollado, P. J. Montero, and J. A. Font. Quasistationary solutions of self-gravitating scalar fields around black holes. *Physical Review D*, 91:043005, 2015.
- [33] N. Sanchis-Gual, J. C. Degollado, P. J. Montero, J. A. Font, and Vassilios Mewes. Quasistationary solutions of self-gravitating scalar fields around collapsing stars. *Physical Review D*, 92:083001, 2015.
- [34] M. Hannam, S. Husa, D. Pollney, B. Brügmann, and N. O. Murchadha. Geometry and regularity of moving punctures. *Physical review letters*, 99:241102, 2007.
- [35] T. W. Baumgarte and S. G. Naculich. Analytical representation of a black hole puncture solution. *Physical Review D*, 75:067502, 2007.
- [36] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [37] C. Gundlach, R. H. Price, and J. Pullin. Late-time behavior of stellar collapse and explosions. I. Linearized perturbations. *Physical Review D*, 49:883, 1994.
- [38] J. Karkowski, Z. Świerczyński, and E. Malec. Comments on tails in Schwarzschild spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21:1303, 2004.
- [39] R. H. Price and L. M. Burko. Late time tails from momentarily stationary, compact initial data in Schwarzschild spacetimes. *Physical Review D*, 70:084039, 2004.
- [40] F. Siebel, J. A. Font, and P. Papadopoulos. Scalar field induced oscillations of relativistic stars and gravitational collapse. *Physical Review D*, 65:024021, 2001.