

LCE0216
Introdução à Bioestatística Florestal
4. Variáveis Aleatórias

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio
Monitores: Eduardo E. R. Junior & Giovana Fumes

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

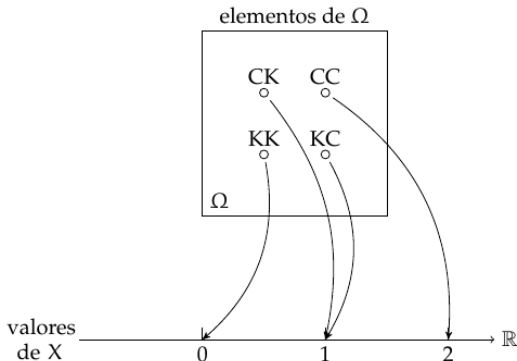
Piracicaba, 05 de abril de 2018

Variáveis aleatórias

Definição

Uma variável aleatória (v.a) é uma função que associa, a cada ponto pertencente a um espaço amostral (Ω), um único número real.

$$\text{v.a } X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



Exemplo

Consideremos o experimento lançamento de duas moedas não viciadas e a observação das faces voltadas para cima.

O espaço amostral associado a esse experimento é dado por:

$$\Omega = \{(Cara, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara), (Coroa, Coroa)\}.$$

Seja, por exemplo, X o número de caras e Y o número de coroas

Possíveis resultados	x	y
(Cara, Cara)		
(Cara, Coroa)		
(Coroa, Cara)		
(Coroa, Coroa)		

Exemplo

Consideremos o experimento lançamento de duas moedas não viciadas e a observação das faces voltadas para cima.

O espaço amostral associado a esse experimento é dado por:

$$\Omega = \{(Cara, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara), (Coroa, Coroa)\}.$$

Seja, por exemplo, X o número de caras e Y o número de coroas

Possíveis resultados	x	y
(Cara, Cara)	2	0
(Cara, Coroa)	1	1
(Coroa, Cara)	1	1
(Coroa, Coroa)	0	2

$$\text{Variáveis aleatórias} \begin{cases} \text{discretas} \\ \text{contínuas} \end{cases}$$

Variável aleatória discreta

Uma quantidade X , associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória discreta**, se assume valores em um conjunto enumerável, com certa probabilidade.

Variável aleatória contínua

Uma quantidade X , associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória contínua**, se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, o que seria um conjunto não enumerável.

Variáveis aleatórias discretas

Um problema

Em 24 de março de 2013 foi divulgado o resultado de uma experiência realizada por um grupo de meninas da nona série da Hjallerup School, as quais concluíram que a proximidade dos roteadores WiFi prejudica o desenvolvimento de plantas (leia a matéria)



Variáveis aleatórias discretas

Suposição

Desejamos verificar a validade do estudo de tais meninas e, para tanto, iremos realizar um experimento com plantas de feijão.

- ▶ São necessários para um certo ensaio, 20 copos com ao menos uma muda;
- ▶ Restrição: 40 copos disponíveis e apenas 120 sementes;
- ▶ Suposição: porcentagem de germinação da semente do feijão, em condições iguais às do ensaio, é de 30%.

Ideia: formar os copos com ao menos uma muda para verificar se a proximidade do roteador prejudica o desenvolvimento da planta.

Quantos feijões por copo devemos plantar para a obtenção dos 20 copos com ao menos uma muda?



Variáveis aleatórias discretas

A) Se forem utilizados 3 feijões por copo...

- ▶ Qual é a porcentagem esperada de copos com pelo menos um feijão germinado? Com três feijões germinados? Com nenhum feijão germinado?
- ▶ Qual é o número médio de feijões germinados por copo?
- ▶ Dê uma ideia da variação esperada do número de feijões germinados.
- ▶ Qual é o número médio de copos com ao menos um feijão germinado?



Variáveis aleatórias discretas

B) Será que não seria melhor utilizar quatro feijões por copo e apenas 30 copos? Nesse caso,

- ▶ Qual é a porcentagem esperada de copos com pelo menos um feijão germinado? Com três feijões germinados? Com nenhum feijão germinado?
- ▶ Qual é o número médio esperado de feijões germinados por copo?
- ▶ Dê uma ideia de variação esperada do número de feijões germinados.
- ▶ Qual é o número médio de copos com ao menos um feijão germinado?



Variáveis aleatórias discretas

Análise da situação A



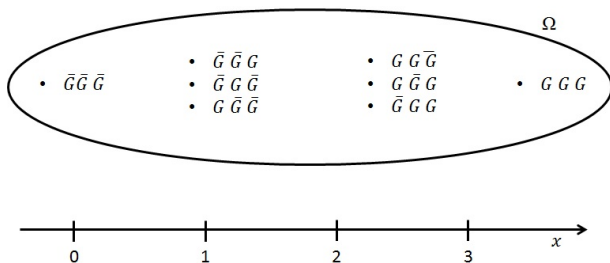
Seja G o evento germinar e \bar{G} o evento não germinar.

- (a) Construir o espaço amostral associado a esse experimento.
- (b) Calcular as probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral.
- (c) Considerar X a variável número de feijões germinados e associar um valor x a cada um dos elementos do espaço amostral.
- (d) Considerar Y a variável que associa o valor 0 ao resultado em que não há nenhum feijão germinado e o valor 1 aos resultados em que há pelo menos um feijão germinado. Associar um valor y a cada um dos elementos do espaço amostral.

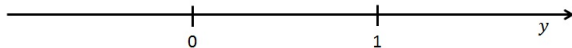
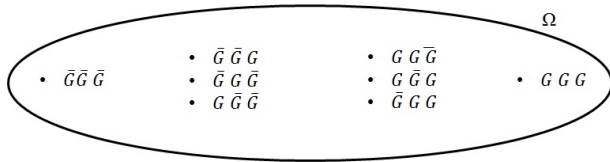
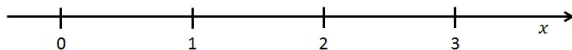
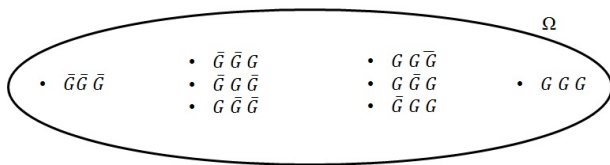
Variáveis aleatórias discretas

Possíveis				
Resultados	Probabilidades	x	y	
GGG	0,027	3	1	
$GG\bar{G}$	0,063	2	1	
$G\bar{G}G$	0,063	2	1	
$G\bar{G}\bar{G}$	0,147	1	1	
$\bar{G}GG$	0,063	2	1	
$\bar{G}G\bar{G}$	0,147	1	1	
$\bar{G}\bar{G}G$	0,147	1	1	
$\bar{G}\bar{G}\bar{G}$	0,343	0	0	
Total	1,000			

Variáveis aleatórias discretas



Variáveis aleatórias discretas



Distribuição de uma variável aleatória discreta

Damos o nome de **distribuição de probabilidade** (modelo probabilístico) da variável aleatória discreta X , ao conjunto de ponto $(x_i, P(x_i))$, em que x_i representa os diferentes valores da variável aleatória e $P(x_i)$ a probabilidade de ocorrência de x_i , satisfazendo:

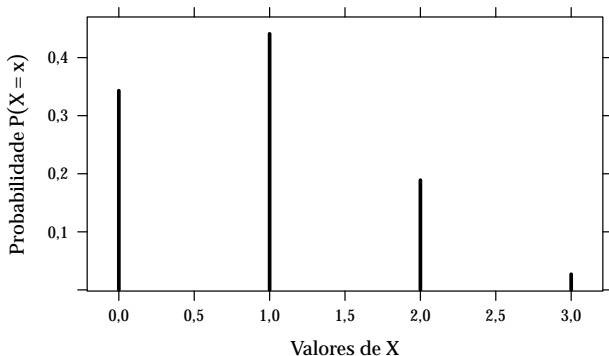
$$P(x_i) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_i P(x_i) = 1.$$

- Costuma-se adotar, também, a notação $P(X = x_i)$ para designar a probabilidade da variável aleatória X assumir o valor x_i .

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões...

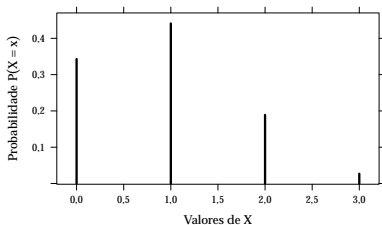
x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000



Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000



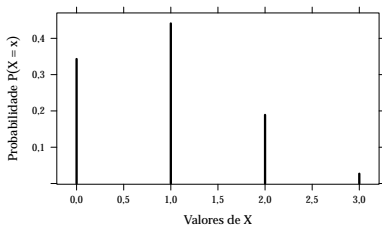
Qual é a porcentagem esperada de copos

- ▶ com três feijões germinados?
- ▶ com nenhum feijão germinado?
- ▶ com pelo menos um feijão germinado?

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000



Qual é a porcentagem esperada de copos

- ▶ com três feijões germinados?

2,7%

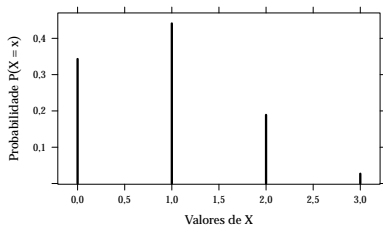
- ▶ com nenhum feijão germinado?

- ▶ com pelo menos um feijão germinado?

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000



Qual é a porcentagem esperada de copos

- ▶ com três feijões germinados?

2,7%

- ▶ com nenhum feijão germinado?

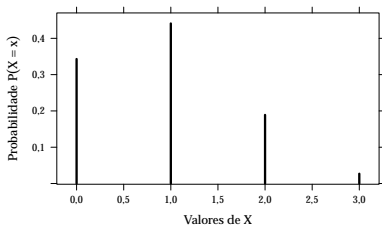
34,3%

- ▶ com pelo menos um feijão germinado?

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000



Qual é a porcentagem esperada de copos

- ▶ com três feijões germinados?

2,7%

- ▶ com nenhum feijão germinado?

34,3%

- ▶ com pelo menos um feijão germinado?

65,7%

Exercício: Obter a distribuição da variável aleatória Y e um gráfico que a represente.

Função de probabilidades

A função que fornece as probabilidades de ocorrências dos valores que a variável aleatória pode assumir é chamada **função de probabilidades** (f.p.)

Função de probabilidades

A função que fornece as probabilidades de ocorrências dos valores que a variável aleatória pode assumir é chamada **função de probabilidades** (f.p.)

Exemplo: A função de probabilidades da variável X = número de feijões germinados, é dada por:

$$P(x) = \binom{3}{x} 0,3^x 0,7^{(3-x)}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3.$$

Função de probabilidades

A função que fornece as probabilidades de ocorrências dos valores que a variável aleatória pode assumir é chamada **função de probabilidades** (f.p.)

Exemplo: A função de probabilidades da variável X = número de feijões germinados, é dada por:

$$P(x) = \binom{3}{x} 0,3^x 0,7^{(3-x)}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3.$$

Calcular $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ por meio da função de probabilidades.

Variáveis aleatórias discretas

Mas ...

Qual é o número médio esperado de feijões germinados por copo?

Valor médio ou esperança matemática de X

Dada a variável aleatória X , assumindo os valores x_1, x_2, \dots com as respectivas probabilidades $P(x_1), P(x_2), \dots$, chamamos **valor médio** ou **esperança matemática de X** ao valor:

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i P(x_i).$$

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

Calcular o valor médio ou esperança da variável aleatória X .

x	$P(X = x) = P(x)$	$xP(x)$
0	0,343	
1	0,441	
2	0,189	
3	0,027	
Total	1,000	

Interpretação: Espera-se, na observação de um número grande de copos, obter um número médio de feijões germinados por copo.

Variáveis aleatórias discretas

No exemplo com feijões ...

Calcular o valor médio ou esperança da variável aleatória X .

x	$P(X = x) = P(x)$	$xP(x)$
0	0,343	0
1	0,441	0,441
2	0,189	0,378
3	0,027	0,081
Total	1,000	0,9

Interpretação: Espera-se, na observação de um número grande de copos, obter um número médio de 0,9 feijões germinados por copo.

Exercício: Calcular o valor médio ou esperança da variável aleatória Y .

Valor médio ou esperança matemática de uma função de X

Dada uma variável aleatória X , assumindo os valores x_1, x_2, \dots , com as respectivas probabilidades $P(x_1), P(x_2), \dots$, chamamos **valor médio** ou **esperança matemática de uma função** $h(X)$ ao valor:

$$E[h(X)] = \sum_i h(x_i)P(x_i).$$

Exercício: Calcular:

- 1 o valor médio ou esperança da função $3X$
- 2 o valor médio ou esperança da função X^2
- 3 o valor médio ou esperança da função $(X - 0,5)^2$
- 4 o valor médio ou esperança da função $(X - \mu_X)^2$
- 5 $E[|X - \mu_X|]$

Variáveis aleatórias discretas

Observação: Sejam a e b duas constantes quaisquer e $h(X) = a + bX$, então

$$\begin{aligned}E(a + bX) &= \sum_i (a + bx_i)P(x_i) \\&= \sum_i [aP(x_i) + bx_iP(x_i)] \\&= \sum_i aP(x_i) + \sum_i bx_iP(x_i) \\&= a \sum_i P(x_i) + b \sum_i x_iP(x_i) \\&= a + bE(X)\end{aligned}$$

Exercício: Calcular $E(30X)$, $E(10 + X)$, $E(1 - 2X)$ e $E(X - \mu_X)$

Variância de X

Dada a variável aleatória X , chamamos de **variância** de X ao valor médio ou esperança da função $(X - \mu_X)^2$,

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2].$$

Automaticamente ficam definidos o desvio padrão e o coeficiente de variação da variável aleatória X , dados respectivamente por:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad \text{e} \quad CV_X = 100 \times \frac{\sigma_X}{\mu_X}.$$

Exemplo: Calcular para as variáveis aleatórias X e Y a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação.

Variáveis aleatórias discretas

Observação:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] \\ &= E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)\mu_X + \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

Variância de X

Fórmula mais prática para o cálculo da variância de X:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exemplo: Recalcular a variância de X utilizando a fórmula mais prática.

Exercício: Refazer todos os cálculos considerando 4 feijões por vaso e responder a sequência **B)** de questões iniciais.

Exemplo: Seja $F(X) = P(X \leq x)$.

x	$P(X = x) = P(x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	0,343	
1	0,441	
2	0,189	
3	0,027	
Total	1,000	

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo: Seja $F(X) = P(X \leq x)$.

x	$P(X = x) = P(x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	0,343	0,343
1	0,441	0,784
2	0,189	0,973
3	0,027	1,000
Total	1,000	

Função de distribuição acumulada

Dada a variável aleatória X , chamaremos de **função de distribuição acumulada** ou simplesmente **função de distribuição** a função $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

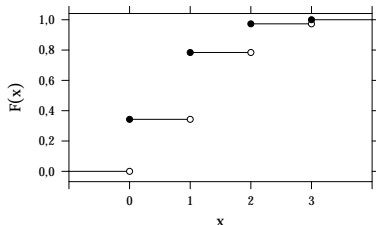
Exercício: Calcular para a variável aleatória $X =$ número de feijões germinados,

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| ▶ $F(-1) = P(X \leq -1)$ | ▶ $F(1) = P(X \leq 1)$ |
| ▶ $F(0) = P(X \leq 0)$ | ▶ $F(3) = P(X \leq 3)$ |
| ▶ $F(0,5) = P(X \leq 0,5)$ | ▶ $F(4) = P(X \leq 4)$ |

Variáveis aleatórias discretas

A função de distribuição acumulada da variável aleatória X = número de feijões germinados é dada a seguir, bem como o gráfico que a representa.

$$F(x) = \begin{cases} 0,000 & \text{para } x < 0 \\ 0,343 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0,784 & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 0,973 & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 1,000 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$



Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo: A distribuição de frequências da velocidade máxima diária do vento em 2014, é apresentada a seguir:

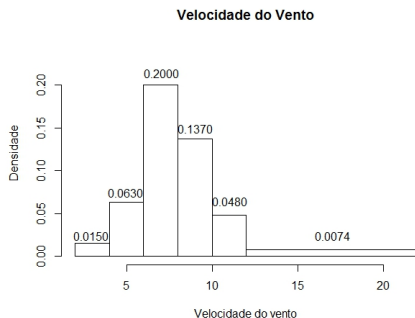


Tabela: Distribuição de frequências da velocidade máxima do vento

X_i	x_i^*	f_i	f'_i
2,00 ┤ 4,00	3,00	11	0,0301
4,00 ┤ 6,00	5,00	46	0,1260
6,00 ┤ 8,00	7,00	146	0,4000
8,00 ┤ 10,00	9,00	100	0,2740
10,00 ┤ 12,00	11,00	35	0,0959
12,00 ┤ 22,00	17,00	27	0,0740
Total		365	1,000

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo: A distribuição de frequências da velocidade máxima diária do vento em 2014, é apresentada a seguir:

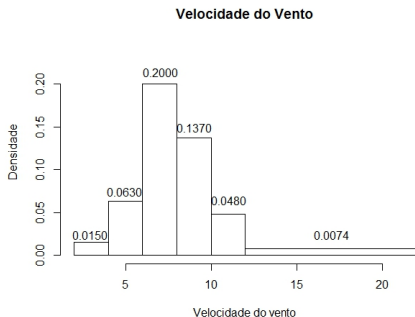
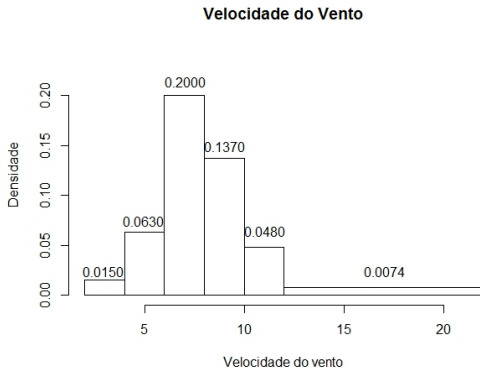


Tabela: Distribuição de frequências da velocidade máxima do vento

X_i	x_i^*	f_i	f'_i
2,00 - 4,00	3,00	11	0,0301
4,00 - 6,00	5,00	46	0,1260
6,00 - 8,00	7,00	146	0,4000
8,00 - 10,00	9,00	100	0,2740
10,00 - 12,00	11,00	35	0,0959
12,00 - 22,00	17,00	27	0,0740
Total		365	1,000

$$\text{Densidade} = \frac{\text{freq. rel.}}{\text{amplitude}}$$

Variáveis aleatórias contínuas



Dado o histograma acima, obter aproximadamente, a porcentagem de dias com velocidade máxima do vento avaliada

- ▶ entre 4 e 8 (m/s)
- ▶ entre 6 e 10 (m/s)
- ▶ entre 2 e 22 (m/s)

Variáveis aleatórias contínuas

Função densidade de probabilidade

Condições para que uma função seja uma função densidade de probabilidade:

- (i) $f(x) \geq 0, \forall x \in D_f$
- (ii) A área entre o gráfico da função f e o eixo x é igual a 1, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Função densidade de probabilidade

Condições para que uma função seja uma função densidade de probabilidade:

- (i) $f(x) \geq 0, \forall x \in D_f$
- (ii) A área entre o gráfico da função f e o eixo x é igual a 1, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Consequências ...

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Se $a = b = c$, então $P(X = c) = 0$

Exemplo: Seja uma função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ ax^3 & \text{para } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

em que a é uma constante.

Obter a de modo que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X .

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo: Seja uma função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ 0,2 - 0,02x & \text{para } 0 < x \leq 10 \\ 0 & \text{para } x > 10 \end{cases}$$

- (a) Verifique que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade;
- (b) Construir o gráfico dessa função;
- (c) Calcular as porcentagens esperadas para
 - ▶ X entre 5 e 10 unidades;
 - ▶ X entre 3 e 5 unidades;
 - ▶ X entre 0 e 2 unidades;
 - ▶ X entre 0 e 10 unidades;
 - ▶ X maior do que 10 unidades;

Variáveis aleatórias contínuas

Valor médio ou esperança matemática de X

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d(x)$$

Moda

$$Mo_X = \max f(x), x \in Df$$

Variáveis aleatórias contínuas

Valor médio ou esperança matemática de uma função $h(X)$

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

Variância de X

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \text{Var}(X) &= E[(X - \mu_X)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \\ &= \dots \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

Variáveis aleatórias contínuas

Função de distribuição acumulada

Dada a variável aleatória X , com função densidade de probabilidade $f(x)$, temos que a função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx.$$

- Percentil:

P_{100p} é o valor de t tal que $F(t) = p$

- Caso particular: Mediana

$Md_X = P_{50}$ é o valor de t tal que $F(t) = 0,5$.

Exemplo: Calcular, supondo o modelo teórico,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ ax^3 & \text{para } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

- 1 o valor médio de X (μ_X)
- 2 $E(X^2)$
- 3 a variância e o desvio padrão de X .

Exercício: Para a função $f(x)$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ 0,2 - 0,02x & \text{para } 0 < x \leq 10 \\ 0 & \text{para } x > 10 \end{cases}$$

Pede-se:

- (a) Calcular μ_X
- (b) Calcular σ_X^2 .