

# LCE0216

## Introdução à Bioestatística Florestal

### 3. Probabilidade

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio

Monitores: Eduardo E. R. Junior & Giovana Fumes

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”  
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 06 de março de 2018

## Probabilidade

Medida de incerteza em termos de escala numérica.

- ▶ Início: estratégias de apostas em jogos de azar;
- ▶ Desenvolvimento: século XX (teoria matemática);
- ▶ Embasamento teórico para as técnicas estatísticas a serem apresentadas.

# Experimento Aleatório

## Experimento Aleatório

São experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados, geralmente, diferentes.

- Anotar as espécies de aves que são capturadas numa rede-neblina armada no sub-bosque de uma floresta nativa



# Experimento Aleatório

## Experimento Aleatório

São experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados, geralmente, diferentes.

- Anotar as espécies de aves que são capturadas numa rede-neblina armada no sub-bosque de uma floresta nativa



# Experimento aleatório

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;



ou



- Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima;



ou



ou



ou



# Experimento aleatório

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;
- Observar o número de árvores bifurcadas em uma amostra de tamanho  $n$ ;



# Experimento aleatório

- ▶ Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;
- ▶ Medir a produtividade de uma área de floresta de *Pinus* que recebeu adubação;



# Experimento aleatório

- Medir a altura de uma árvore;





## Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.  
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.

**Notação:**  $\Omega$ .

## Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.  
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.

**Notação:**  $\Omega$ .

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

## Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.

**Notação:**  $\Omega$ .

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- ▶ Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;

## Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.

**Notação:**  $\Omega$ .

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- ▶ Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;
- ▶ Um espaço amostral é contínuo quando não podemos enumerar todos os resultados

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;



ou



$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

- Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima;



ou



ou



ou



$$\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{coroa})\}$$

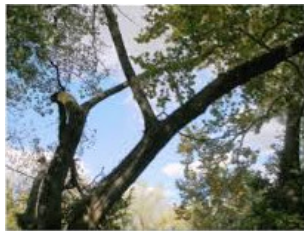
# Espaço Amostral

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;



$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$$

- Observar o número de árvores bifurcadas em uma amostra de tamanho  $n$ ;



$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

# Espaço Amostral

- ▶ Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;
- ▶ Medir a produtividade de uma área de floresta de *Pinus* que recebeu adubação;



$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$$



$$\Omega = (15, 45) \text{m}^3 \text{ha}^{-1}$$

- Medir a altura de uma árvore;



$$\Omega = (0,6)\text{metros}$$



## Evento

Os eventos são subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$ , ou seja, são conjuntos dos resultados de um experimento.

**Notação:**  $A, B, C, \dots$

## Exemplos:

- ▶ Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15
- ▶ Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%
- ▶ Observar árvores com altura superior a 3 metros
- ▶ Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

## Exemplos:

- ▶ Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- ▶ Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%
- ▶ Observar árvores com altura superior a 3 metros
- ▶ Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

## Exemplos:

- ▶ Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- ▶ Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- ▶ Observar árvores com altura superior a 3 metros
- ▶ Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

## Exemplos:

- ▶ Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- ▶ Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- ▶ Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- ▶ Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

## Exemplos:

- ▶ Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- ▶ Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- ▶ Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- ▶ Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

$$D = (3, 6)\text{metros}$$

- ▶ **Evento certo:**  $A = \Omega$ .
- ▶ **Evento impossível:**  $A = \emptyset$ .

- ▶ **Evento certo:**  $A = \Omega$ .

Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- ▶ **Evento impossível:**  $A = \emptyset$ .



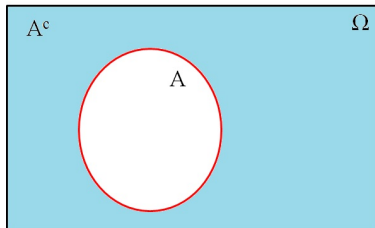
- ▶ **Evento certo:**  $A = \Omega$ .

Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

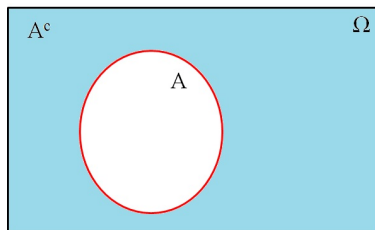
- ▶ **Evento impossível:**  $A = \emptyset$ .

Colocar 20 sementes no germinador e observar mais do que 20 sementes germinadas.

- **Evento complementar:** O complementar de um evento  $A$  é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a  $A$ .  
Notação:  $\bar{A}$  ou  $A^c$ .



- **Evento complementar:** O complementar de um evento  $A$  é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a  $A$ .  
Notação:  $\bar{A}$  ou  $A^c$ .



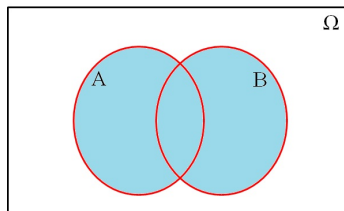
$A$  = Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15.

$A^c$  = Observar o número de sementes germinadas menor do que 15.

## União

A **união** de dois eventos  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em  $A$ , em  $B$  ou em ambos.

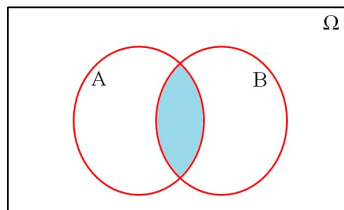
**Notação:**  $A \cup B$ .



## Interseção

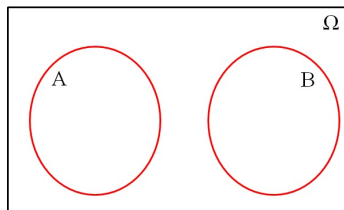
A **interseção** de dois eventos  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em  $A$  e estão em  $B$ .

**Notação:**  $A \cap B$ .



## Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos se eles não têm elementos amostrais em comum, ou seja, se  $A \cap B = \emptyset$ , ou ainda, se eles não podem ocorrer simultaneamente.



**Exemplo:** Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

*A*: Soma dos valores igual a 7;

*B*: Resultado do primeiro dado igual a 6;

*C*: Os resultados nos dois dados são iguais;

*D*: Soma nos dois dados é 2;

Espaço amostral.



**Exemplo:** Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

- A: Soma dos valores igual a 7;
- B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
- C: Os resultados nos dois dados são iguais;
- D: Soma nos dois dados é 2;



Espaço amostral.

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$



**Exemplo:** Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

- A: Soma dos valores igual a 7;
- B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
- C: Os resultados nos dois dados são iguais;
- D: Soma nos dois dados é 2;



Espaço amostral.

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

Relacionar os elementos dos eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

- ▶  $A$ : Soma dos valores igual a 7

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

- ▶  $B$ : Resultado do primeiro dado igual a 6

- $B$ : Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

- ▶ C: Os resultados nos dois dados são iguais

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

- ▶  $D$ : Soma nos dois dados é 2



- $D$ : Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

- ▶ Quais eventos são mutuamente exclusivos?
- ▶ Relacionar os elementos dos eventos:
  - ▶  $A \cap B$
  - ▶  $A \cap C$
  - ▶  $B \cup D$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

- ▶ Quais eventos são mutuamente exclusivos?

$A$  e  $C$ ,  $A$  e  $D$  e  $B$  e  $D$ .

- ▶ Relacionar os elementos dos eventos:

- ▶  $A \cap B$

- ▶  $A \cap C$

- ▶  $B \cup D$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

- ▶ Quais eventos são mutuamente exclusivos?

$A$  e  $C$ ,  $A$  e  $D$  e  $B$  e  $D$ .

- ▶ Relacionar os elementos dos eventos:

- ▶  $A \cap B$

- $A \cap B = \{(6,1)\}$

- ▶  $A \cap C$

- ▶  $B \cup D$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

- ▶ Quais eventos são mutuamente exclusivos?

$A$  e  $C$ ,  $A$  e  $D$  e  $B$  e  $D$ .

- ▶ Relacionar os elementos dos eventos:

- ▶  $A \cap B$

- $A \cap B = \{(6,1)\}$

- ▶  $A \cap C$

- $A \cap C = \emptyset$

- ▶  $B \cup D$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

- ▶ Quais eventos são mutuamente exclusivos?

$A$  e  $C$ ,  $A$  e  $D$  e  $B$  e  $D$ .

- ▶ Relacionar os elementos dos eventos:

- ▶  $A \cap B$

- $A \cap B = \{(6,1)\}$

- ▶  $A \cap C$

- $A \cap C = \emptyset$

- ▶  $B \cup D$

- $B \cup D = \{(1,1), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

## Definição Clássica

Seja  $A \subset \Omega$ , então

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

- ▶ Os resultados são equiprováveis;
- ▶ O espaço amostral é discreto e finito

**Exemplo:** No lançamento de dois dados honestos (resultados equiprováveis), calcular a probabilidade dos seguintes eventos:

*A*: Soma dos valores igual a 7;

*B*: Resultado do primeiro dado igual a 6;

*C*: Os resultados nos dois dados são iguais;

*D*: Soma nos dois dados é 2;



- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = 0,17$$

- $B$ : Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

- $B$ : Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = 0,17$$

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = 0,17$$

- $D$ : Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \left\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \right. \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ \left. (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \right\}$$

- $D$ : Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \right\}$$

$$P(D) = \frac{1}{36} = 0,03$$



## Definição Frequentista

Outro método de definir probabilidade é o da frequência relativa. Pode-se definir  $P(A)$  como o limite da frequência relativa da ocorrência de  $A$  em  $n$  repetições independentes do experimento, com  $n$  tendendo ao infinito, ou seja,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ repetições do experimento})$$

**Exemplo:** Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos  $AA$ ,  $Aa$  e  $aa$ , resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes ( $n$ ) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

**Exemplo:** Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes ( $n$ ) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

► Para  $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

**Exemplo:** Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes ( $n$ ) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

► Para  $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

► Para  $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

**Exemplo:** Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes ( $n$ ) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

► Para  $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

► Para  $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

► Para  $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

**Exemplo:** Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes ( $n$ ) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

► Para  $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

► Para  $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

► Para  $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

► Para  $n \rightarrow \infty$

Genótipo	Probabilidade
AA	0,25
Aa	0,50
aa	0,25
Total	1,00

**Exemplo:** Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

**Exemplo:** Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verifique qual curso está cursando e a qual sexo pertence



**Exemplo:** Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verifique qual curso está cursando e a qual sexo pertence
- ▶ Considere, ainda, os seguintes eventos:

$H$ : ser do sexo masculino;  
 $M$ : ser do sexo feminino;  
 $A$ : estar cursando Engenharia Agrônômica;

$F$ : estar cursando Engenharia Florestal; e  
 $E$ : estar cursando Economia Agroindustrial.

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(H)$

►  $P(A)$

►  $P(M)$

►  $P(F)$

►  $P(\Omega)$

►  $P(E)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(H)$   
 $= \frac{205}{265} = 0,7736$

►  $P(M)$

►  $P(\Omega)$

►  $P(A)$

►  $P(F)$

►  $P(E)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H) \\ &= \frac{205}{265} = 0,7736 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(M) \\ &= \frac{60}{265} = 0,2264 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(\Omega)$$

$$\blacktriangleright P(A)$$

$$\blacktriangleright P(F)$$

$$\blacktriangleright P(E)$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H) \\ &= \frac{205}{265} = 0,7736 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(M) \\ &= \frac{60}{265} = 0,2264 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(A) \\ &= \frac{200}{265} = 0,7547 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(F)$$

$$\blacktriangleright P(E)$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H) \\ &= \frac{205}{265} = 0,7736 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(M) \\ &= \frac{60}{265} = 0,2264 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(A) \\ &= \frac{200}{265} = 0,7547 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(F) \\ &= \frac{40}{265} = 0,1510 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(E)$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H) \\ &= \frac{205}{265} = 0,7736 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(M) \\ &= \frac{60}{265} = 0,2264 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(A) \\ &= \frac{200}{265} = 0,7547 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(F) \\ &= \frac{40}{265} = 0,1510 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(E) \\ &= \frac{25}{265} = 0,0943 \end{aligned}$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H) \\ = \frac{205}{265} = 0,7736 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(M) \\ = \frac{60}{265} = 0,2264 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(\Omega) \\ = \frac{265}{265} = 1,0000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(A) \\ = \frac{200}{265} = 0,7547 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(F) \\ = \frac{40}{265} = 0,1510 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(E) \\ = \frac{25}{265} = 0,0943 \end{aligned}$$



# Definições

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(A \cup F)$

►  $P(M \cap E)$

►  $P(H \cup M)$

►  $P(H \cup A)$

►  $P(H \cap M)$

►  $P(A^c)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(A \cup F)$

$$= P(A) + P(F) = \\ 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$$

►  $P(H \cup M)$

►  $P(H \cap M)$

►  $P(M \cap E)$

►  $P(H \cup A)$

►  $P(A^c)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(A \cup F)$

$$= P(A) + P(F) = \\ 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$$

►  $P(H \cup M)$

$$= P(H) + P(M) = \\ 0,7736 + 0,2264 = 1$$

►  $P(H \cap M)$

►  $P(M \cap E)$

►  $P(H \cup A)$

►  $P(A^c)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

►  $P(A \cup F)$

$$= P(A) + P(F) = \\ 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$$

►  $P(H \cup M)$

$$= P(H) + P(M) = \\ 0,7736 + 0,2264 = 1$$

►  $P(H \cap M)$

$$= 0$$

►  $P(M \cap E)$

►  $P(H \cup A)$

►  $P(A^c)$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(A \cup F) \\ &= P(A) + P(F) = \\ &0,7547 + 0,1510 = 0,9057 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H \cup M) \\ &= P(H) + P(M) = \\ &0,7736 + 0,2264 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(H \cap M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright P(M \cap E) \\ &= \frac{10}{265} = 0,0377 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(H \cup A)$$

$$\blacktriangleright P(A^c)$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(A \cup F) \\ &= P(A) + P(F) = \\ &0,7547 + 0,1510 = 0,9057 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cup M) \\ &= P(H) + P(M) = \\ &0,7736 + 0,2264 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cap M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(M \cap E) \\ &= \frac{10}{265} = 0,0377 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cup A) \\ &= P(H) + P(A) - P(H \cap A) = \\ &0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright P(A^c)$$

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(A \cup F) \\ &= P(A) + P(F) = \\ &0,7547 + 0,1510 = 0,9057 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cup M) \\ &= P(H) + P(M) = \\ &0,7736 + 0,2264 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cap M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(M \cap E) \\ &= \frac{10}{265} = 0,0377 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(H \cup A) \\ &= P(H) + P(A) - P(H \cap A) = \\ &0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(A^c) \\ &= P(F) + P(E) = 0,1510 + \\ &0,0943 = 1 - 0,7547 = 0,2453 \end{aligned}$$

## Propriedades

Se  $A$  e  $B$  são dois eventos do espaço amostral  $\Omega$ , então valem as seguintes regras básicas:

- ▶  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶  $P(\emptyset) = 0$  e  $P(\Omega) = 1$
- ▶  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ▶  $P(A^c) = 1 - P(A)$



## Propriedades

Se  $A$  e  $B$  são dois eventos do espaço amostral  $\Omega$ , então valem as seguintes regras básicas:

- ▶  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶  $P(\emptyset) = 0$  e  $P(\Omega) = 1$
- ▶  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ▶  $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cap B) =$$

$$P(A \cup B) =$$

## Propriedades

Se  $A$  e  $B$  são dois eventos do espaço amostral  $\Omega$ , então valem as seguintes regras básicas:

- ▶  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶  $P(\emptyset) = 0$  e  $P(\Omega) = 1$
- ▶  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ▶  $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H \mid F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agrônoma?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agrônoma?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$



# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F | M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- ▶ Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H | F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H \mid F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

$$= \frac{\frac{30}{265}}{\frac{40}{265}} = \frac{P(H \cap F)}{P(F)}$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265



# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agrônômica (A)?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agrônômica (A)?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agrônômica (A)?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

$$= \frac{\frac{40}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônômica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F \mid M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

# Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônoma (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F | M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

$$= \frac{\frac{10}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

## Definição

Dados dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , sendo  $P(B) > 0$ , definimos a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , como sendo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



# Probabilidade condicional e independência

## Definição

Dados dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , sendo  $P(B) > 0$ , definimos a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , como sendo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Observação:**

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## Regra do Produto

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(B) \times P(A \mid B) \\ &= P(A) \times P(B \mid A)\end{aligned}$$

**Exemplo:** Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- ▶  $B_1$ : sair bola branca na primeira extração
- ▶  $B_2$ : sair bola branca na segunda extração
- ▶  $P_1$ : sair bola preta na primeira extração
- ▶  $P_2$ : sair bola preta na segunda extração

**Exemplo:** Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- ▶  $B_1$ : sair bola branca na primeira extração
- ▶  $B_2$ : sair bola branca na segunda extração
- ▶  $P_1$ : sair bola preta na primeira extração
- ▶  $P_2$ : sair bola preta na segunda extração

Os eventos  $B_1$  e  $B_2$  são independentes?

**Exemplo:** Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- ▶  $B_1$ : sair bola branca na primeira extração
- ▶  $B_2$ : sair bola branca na segunda extração
- ▶  $P_1$ : sair bola preta na primeira extração
- ▶  $P_2$ : sair bola preta na segunda extração

Os eventos  $B_1$  e  $B_2$  são independentes?

Os eventos  $P_1$  e  $P_2$  são independentes?

# Probabilidade condicional e independência

**Exemplo:** Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- ▶  $B_1$ : sair bola branca na primeira extração
- ▶  $B_2$ : sair bola branca na segunda extração
- ▶  $P_1$ : sair bola preta na primeira extração
- ▶  $P_2$ : sair bola preta na segunda extração

Os eventos  $B_1$  e  $B_2$  são independentes?

Os eventos  $P_1$  e  $P_2$  são independentes?

Os eventos  $P_1$  e  $B_2$  são independentes?

# Probabilidade condicional e independência

**Exemplo:** Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- ▶  $B_1$ : sair bola branca na primeira extração
- ▶  $B_2$ : sair bola branca na segunda extração
- ▶  $P_1$ : sair bola preta na primeira extração
- ▶  $P_2$ : sair bola preta na segunda extração

Pede-se:

- (a) Calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;
- (b) Construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

- (a) Calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;

$$P(B_1 \cap P_2) = P(B_1) \times P(P_2|B_1)$$

$$P(B_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(P_2 | B_1) = \frac{2}{4}$$

$$P(B_1 \cap P_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,30$$



**Exercício:** Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.

- ▶ Os eventos  $B_1$  e  $B_2$  são independentes?
- ▶ Os eventos  $P_1$  e  $P_2$  são independentes?
- ▶ Construa o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

**Exercício:** Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.

Calcule as seguintes probabilidades:

- ▶  $P(B_2)$
- ▶  $P(P_2)$
- ▶  $P(B_2 \mid B_1)$
- ▶  $P(B_2 \mid P_1)$
- ▶  $P(P_2 \mid B_1)$
- ▶  $P(P_2 \mid P_1)$

Construa o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

# Probabilidade condicional e independência

Note que:

$B_2$  e  $B_1$  são eventos independentes e que

$$P(B_2 | B_1) = P(B_2)$$

$B_2$  e  $P_1$  são eventos independentes e que

$$P(B_2 | P_1) = P(B_2)$$

$P_2$  e  $B_1$  são eventos independentes e que

$$P(P_2 | B_1) = P(P_2)$$

$P_2$  e  $P_1$  são eventos independentes e que  $P(P_2 | P_1) = P(P_2)$

Generalizando,

se dois eventos,  $A$  e  $B$ , são independentes, temos que

$$P(A | B) = P(A) \quad \text{ou} \quad P(B | A) = P(B)$$

Pela regra do produto de probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A | B) \\ &= P(A) \times P(B | A) \end{aligned}$$

## Independência

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**Observação:** Dois eventos são mutuamente exclusivos se, e somente se,  $P(A \cap B) = 0$ .

## Exemplo

Temos três profissionais: um engenheiro florestal, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo engenheiro florestal, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro civil. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro florestal?

Sejam os eventos:

$S$ : a muda sobreviver

$B$ : muda plantada pelo Biólogo

$F$ : muda plantada pelo Engenheiro Florestal

$C$ : Muda plantada pelo Engenheiro Civil

## Teorema de Bayes

Suponha que os eventos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  formem uma partição do espaço amostral,  $\Omega$  e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento  $A$ , conheçam-se as probabilidades condicionais,  $P(A|C_i)$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Então, para qualquer  $j$ ,

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|C_i)P(C_i)}.$$

## Exemplo

Uma água é contaminada se forem encontrados bacilos tipo A ou tipo B e C, simultaneamente. As probabilidades de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30, 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida à metade. Calcular:

- ▶ a probabilidade de ocorrer bacilos tipo B ou C ou ambos;
- ▶ a probabilidade de a água estar contaminada;
- ▶ sabendo que a água está contaminada, calcular a probabilidade de ela ter sido contaminada pelos bacilos do tipo B e C.

- 1 Dados dois eventos  $B$  e  $C$ , tais que,  $P(B) = 0,6$ ,  $P(C) = 0,3$  e  $P(B \cap C) = 0,20$ , verifique se  $B$  e  $C$  são independentes.
- 2 Uma urna contém 6 bolas azuis e 4 brancas, de onde são retiradas duas bolas ao acaso e sem reposição. Sejam os eventos  $A_1$ , sair bola azul na primeira extração, e  $B_2$ , sair bola branca na segunda extração. Pede-se:
  - ▶ Calcular as probabilidades de todos os possíveis resultados do experimento;
  - ▶ Calcular a probabilidade de sair bola branca na segunda extração;
  - ▶ Calcular a probabilidade de ter saído bola azul na primeira extração dado que saiu branca na segunda extração;
  - ▶ Verificar se  $A_1$  e  $B_2$  são eventos independentes.



- 3 Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química da universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir, apresenta as probabilidades associadas às categorias dos equipamentos produzidos em cada fábrica:

Fábrica	Categoria		
	Subestima	Exata	Superestima
I	0,010	0,98	0,010
II	0,005	0,98	0,015
III	0,000	0,99	0,01

As fábricas fornecem, respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos, ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:

- ▶ Haver superestimação de medida?
- ▶ Não haver superestimação de medida?
- ▶ Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III?
- ▶ Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas?