LCE0216
Introdução à Bioestatística Florestal
10. Teste de hipóteses

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio

Monitor: Eduardo E. R. Junior

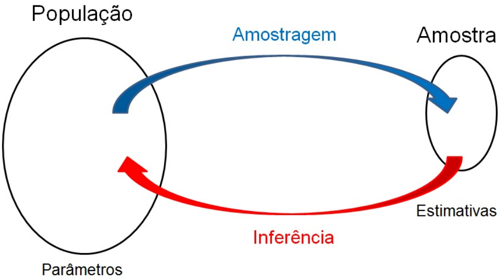
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 05 de junho de 2018

Inferência estatística

Dado a caracterização da população por meio de uma distribuição de probabilidades, há dois principais objetivos:

- **Estimar** os parâmetros dessa população;
- **Testar** hipóteses (afirmações) sobre esses parâmetros.



Testes de hipóteses

$$X \sim \text{Distribuição}(\theta)$$

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \theta = \theta_0 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \theta \overset{<}{\underset{>}{\neq}} \theta_0 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

Tipos de erro:

- Rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira (erro tipo I);
- Não rejeitar H_0, quando H_0 é falsa (erro tipo II).

	H_o **verdadeira**	H_o **falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II (β)
Rejeitar H_0	Erro tipo I (α)	Decisão correta

Exemplo

Hoje a noite você vai a uma festa. A previsão do tempo diz que há 80% de probabilidade de chuva. Você leva guarda-chuva?

$$\begin{cases} \text{H}_0: & \text{vai chover hoje a noite} \\ \text{H}_a: & \text{Não vai chover hoje a noite} \end{cases}$$

Erro tipo I: Você rejeita H_0, acredita que não vai chover, foi sem guarda-chuva e se molha.

Erro tipo II: Você não rejeita H_0, acredita que vai chover, leva guarda-chuva e passa a noite toda carregando um guarda-chuva sem usá-lo.

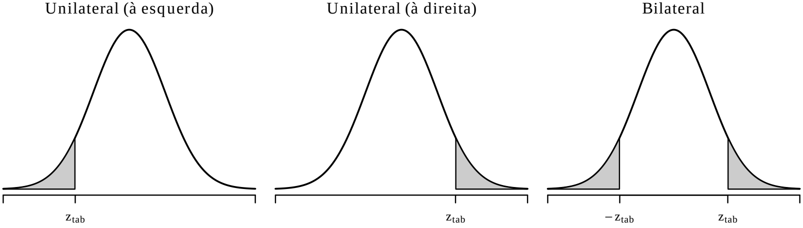
Conceitos

- **Hipóteses:** Estabelecem as crenças (afirmações) a serem testadas. São definidas a partir do conhecimento do problema e podem ser do tipo simples ou composta;
- **Nível de significância (α):** associado a regra de decisão. É a probabilidade de se cometer erro tipo I, $P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira})$;
- **Estatística do teste:** Uma estatística que depende do parâmetro de interesse, mas que sua distribuição seja conhecida e independa desse parâmetro;
- **Regra da decisão:** Regra que estabelece, com base nos dados obtidos e no nível de significância, quando H_0 será rejeitada;
- **Nível descritivo (p-valor):** Probabilidade de se obter estatísticas mais extremas para rejeição de H_0 do que aquela fornecida pela amostra.

Tipos de hipóteses

- Hipóteses simples:
  H$_0$: $\theta = \theta_0$ versus H$_a$: $\theta = \theta_a$;

- Hipóteses compostas:
  - Unilateral (à esquerda): H$_0$: $\theta = \theta_0$ versus H$_a$: $\theta < \theta_0$;
  - Unilateral (à direita): H$_0$: $\theta = \theta_0$ versus H$_a$: $\theta > \theta_0$;
  - Bilateral: H$_0$: $\theta = \theta_0$ versus H$_a$: $\theta \neq \theta_0$;



Passos para construção de um teste de hipósteses

1. Formule as hipóteses, nula (H_0) e alternativa (H_a);
2. Identifique a estatística (estimador) adequada. Conhecer, ao menos assintoticamente, a distribuição amostral desse estimador;
3. Fixe o nível de significância (α), probabilidade do erro tipo I e construa a regra de decisão;
4. Use as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste;
5. Compare o valor da estatística calculado na amostra com as regiões da regra de decisão, para rejeitar ou não a hipótese nula.

Tipos de testes de hipóteses

Nesse curso serão apresentados os procedimentos para testar hipóteses relacionadas a:

- Testes para proporção;
- Testes para média:
  - com variância conhecida;
  - com variância desconhecida;
- Testes para comparação de variâncias;
- Testes para comparação de médias:
  - dados pareados (dependentes);
  - dados não-pareados (independentes);
- Testes para tabelas de contigência.

1

Testes para proporção

Construção do teste

- População: $X = \{0(\text{fracasso}), 1(\text{sucesso})\}$; $X \sim \text{Bernoulli}(\pi)$;
- Hipóteses:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \pi = \pi_0 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \pi \underset{>}{\overset{<}{\neq}} \pi_0 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

- Com base em uma amostra de tamanho n, $n \to \infty$, sob H_0, sabe-se que

$$\hat{P} \sim N(\pi_0, \pi_0(1-\pi_0)/n);$$

$$Z = \frac{\hat{P} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} \sim N(0,1)$$

- Compara-se a estatística do teste

$$z_{calc} = \frac{\hat{p} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$$

com um quantil z_{tab} da distribuição normal padrão, que represente o indicado pela hipótese alternativa.

Exemplo 1: Um produtor precisa decidir pela compra ou não de sementes fornecidas por um distribuidor, que afirma que a proporção de germinação de sementes é $\pi = 0,94$. Para tanto ele observou a proporção de germinação de uma amostra aleatória simples de 100 sementes e encontrou o valor $\hat{p} = 0,93$. Com base nesse resultado o produtor poderia discordar do distribuidor?

- Assuma um nível de significância de 5%;
- Teste a desigualdade ($\neq$) e se o distribuidor está sendo muito otimista ($<$);
- Determine em regras de decisão em termos das proporções amostrais e calcule o valores de p.

Exemplos

Exemplo 2: Após vários anos de acompanhamento de parcelas permanentes, uma engenheira florestal concluiu que, das árvores que morrem num fragmento florestal, 75% são devido ao abafamento da copa por cipós. No ano seguinte ocorreu um período prolongado de intensa seca e 30 árvores morreram durante o ano, das quais 24 mortes podem ser atribuídas ao efeito dos cipós. A engenheira florestal afirma que a proporção de árvores que morreram devido aos cipós (p) foi maior neste ano de seca intensa do que nos anos anteriores. Verifique a afirmação utilizando o nível de 5% de significância.

2

Teste para média

Construção do teste (variância conhecida)

- População: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido;
- Hipóteses:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \mu = \mu_0 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \mu \underset{>}{\overset{<}{\neq}} \mu_0 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

- Com base em uma amostra de tamanho n, sob H_0, sabe-se que

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n);$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

- Compara-se a estatística do teste

$$z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

com um quantil z_{tab} da distribuição normal padrão, que represente o indicado pela hipótese alternativa.

Exemplo 3: Uma balança para encher pacotes de sementes automaticamente está programada para produzir pacotes com peso médio de 20 kg e desvio padrão de 0,20 kg.

Periodicamente é feita uma inspeção para verificar se o peso médio está sob controle. Para este fim, foi selecionada uma amostra de 8 pacotes de sementes, cujos resultados foram:

20,3	19,8	20,3	19,7	19,8	19,7	19,8	19,8

Teste a hipótese que a a balança se desregulou e está produzindo um peso médio inferior a 20 kg, assumindo que a variância permanece inalterada. Use o nível de significância de 5%.

Construção do teste (variância desconhecida)

- População: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$;
- Hipóteses:

$$\begin{cases} \text{H}_0\text{: } \mu = \mu_0 & \text{(hipótese nula)} \\ \text{H}_a\text{: } \mu \overset{<}{\underset{>}{\neq}} \mu_0 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

- Com base em uma amostra de tamanho n, sob H_0, sabe-se que

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n); \text{e como } \sigma^2 \text{ é desconhecido,}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{(n-1)}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2/n}{n-1}$$

- Compara-se a estatística do teste

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$

com um quantil t_{tab} da distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade, que represente o indicado pela hipótese alternativa.

Exemplo 3 (revisitado): Uma balança para encher pacotes de sementes automaticamente está programada para produzir pacotes com peso médio de 20 kg e desvio padrão de 0,20 kg. Periodicamente é feita uma inspeção para verificar se o peso médio está sob controle. Para este fim, foi selecionada uma amostra de 8 pacotes de sementes, cujos resultados foram:

20,3	19,8	20,3	19,7	19,8	19,7	19,8	19,8

Teste a hipótese que a a balança se desregulou e está produzindo um peso médio inferior a 20 kg. Use o nível de significância de 5%.

Exemplo 4: Um cientista deseja saber se o pH de um solo é ácido. Ele toma uma amostra de 10 unidades e obteve os valores de pH:

5,8	6,0	7,0	6,2	6,2
7,1	6,4	5,5	5,8	5,9

Tire uma conclusão supondo nível de significância de 5%.

Exemplo 4: Um cientista deseja saber se o pH de um solo é ácido. Ele toma uma amostra de 10 unidades e obteve os valores de pH:

5,8	6,0	7,0	6,2	6,2
7,1	6,4	5,5	5,8	5,9

Tire uma conclusão supondo nível de significância de 5%.

Observação: A escala de pH vai do 1 ao 14, sendo 7 a neutralidade, abaixo de 7 a acidez e acima de 7 a alcalinidade.

Inferência para duas populações

Conceitos iniciais

Interesse

Dadas duas populações, caracterizadas em uma mesma família de distribuições, o objetivo nesse caso é **testar afirmações comparativas sobre os parâmetros das duas populações**.

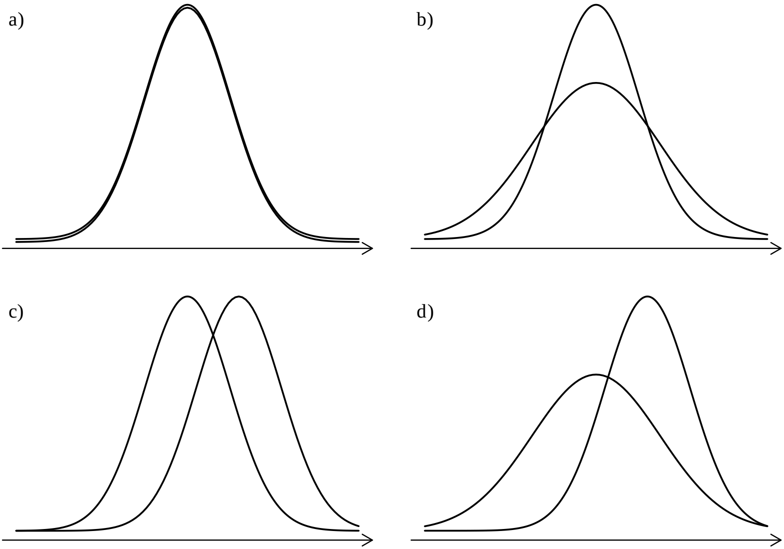
- Descrição das populações,

$$X_1 \sim \text{Distribuição}(\theta_1)$$
$$X_2 \sim \text{Distribuição}(\theta_2)$$

- Hipóteses de interesse,

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \theta_1 = \theta_2 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \theta_1 \underset{>}{\overset{<}{\neq}} \theta_2 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

Conceitos iniciais



- Com relação a alguma variável contínua, podemos considerar que as populações são iguais?

3

Teste para comparação de variâncias

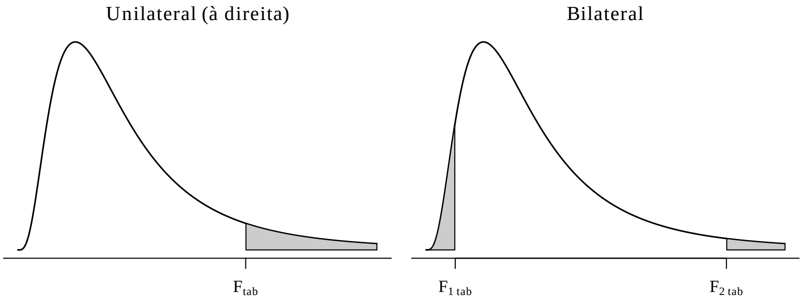
Construção do teste

- População:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- Hipóteses:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \sigma_1 \overset{<}{\underset{>}{\neq}} \sigma_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \overset{<}{\underset{>}{\neq}} 1 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$



Construção do teste

- Considerando amostras aleatórias de X_1 e X_2 independentes, de tamanho n_1 e n_2, respectivamente. Sob H_0, sabe-se que

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1); \quad \text{em que}$$

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_{ji})^2/n}{n-1}, \quad j = 1, 2.$$

  Na prática, considera-se o cálculo da estatística F de tal forma que $F = S_1^2/S_2^2 > 1$, ou seja, utiliza-se como numerador a maior variância amostral observada.

- Compara-se a estatística do teste

$$F_{calc} = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

  com a região crítica (RC) construída de tal forma que $P(F \in \mathrm{RC}) = \alpha$.

Exemplo

Exemplo 5: Um grupo de pesquisadores tem interesse em comparar se a proliferação de fungos em plantas tem relação com determinados tipos de solo. Para isso, os pesquisadores mensuraram as áreas atacadas por fungos em 21 árvores com tipo de solo A e 9 árvores com tipo de solo B. Os resultados obtidos foram

Tipo de solo A	**Tipo de solo B**
$\sum_{i=1}^{21} x_{1i} = 100$	$\sum_{i=1}^{9} x_{2i} = 45$
$\sum_{i=1}^{21} x_{1i}^2 = 496$	$\sum_{i=1}^{9} x_{2i}^2 = 273$

Pode-se considerar que as àreas atacadas por fungos possuem a mesma variabilidade?

4

Teste para comparação de médias

Dados pareados *vs* dados não pareados

- **Dados pareados (dependentes)**: São casos em que é razoável supor que há correlação entre as observações das diferentes populações. Nesse curso, apresenta-se testes apenas para quando essa dependência se dá em pares. Exemplos:
  - Experimentos do tipo antes e depois;
  - Diferentes mensurações em uma mesma unidade amostral.

- **Dados não pareados (independentes)**: São casos em que é razoável supor a independência entre as observações das diferentes populações.

Construção do teste (dados pareados)

- População: Nesse caso, como a amostra se dá por pares (X_1, X_2), considera-se as diferenças $D = X_2 - X_1$,

$$D = X_2 - X_1 \sim N(\mu_D, \sigma_D^2).$$

Retornando a um problema de uma única população, conforme visto anteriormente.

- Hipóteses:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0\colon \mu_D = \mu_2 - \mu_1 = 0 & \text{(hipótese nula)} \\ \mathrm{H}_a\colon \mu_D = \mu_2 - \mu_1 \underset{>}{\overset{<}{\neq}} 0 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

- Com base em uma amostra pareada de tamanho n, sob H_0, sabe-se que

$$\bar{D} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \sim N(0, \sigma_D^2/n); \text{e como } \sigma_D^2 \text{ é desconhecido,}$$

$$T = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{S_D^2/n}} \sim t_{(n-1)}, \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i)^2 - (\sum_{i=1}^n D_i)^2/n}{n-1}$$

Exemplo

Exemplo 6: Um pesquisador deseja verificar se a altura de uma árvore em pé, medida usando-se o método trigonométrico (aproximado), não difere da altura da árvore medida no chão. Com esse objetivo, mediu as alturas das árvores pelo método trigonométrico, derrubou-as e mediou novamente suas alturas.

n^o	Árvore em pé (A)	Árvore no chão (B)	Diferença (D=B-A)
1	20,4	21,7	1,3
2	25,4	26,3	0,9
3	25,6	26,8	1,2
4	26,6	26,2	-0,4
5	28,6	27,3	-1,3
6	28,7	29,5	0,8
7	29,0	32,0	3,0
8	29,8	30,9	1,1
9	30,5	32,3	1,8
10	30,9	32,3	1,4
11	31,1	31,7	0,6
12	25,6	28,1	2,5

Pode-se considerar que a altura obtida pelo método aproximado equivale-se a altura real (obtida derrubando-se a árvore)?

Exemplo

Exemplo 6: Um pesquisador deseja verificar se a altura de uma árvore em pé, medida usando-se o método trigonométrico (aproximado), não difere da altura da árvore medida no chão. Com esse objetivo, mediu as alturas das árvores pelo método trigonométrico, derrubou-as e mediou novamente suas alturas.

n^o	Árvore em pé (A)	Árvore no chão (B)	Diferença (D=B-A)
1	20,4	21,7	1,3
2	25,4	26,3	0,9
3	25,6	26,8	1,2
4	26,6	26,2	-0,4
5	28,6	27,3	-1,3
6	28,7	29,5	0,8
7	29,0	32,0	3,0
8	29,8	30,9	1,1
9	30,5	32,3	1,8
10	30,9	32,3	1,4
11	31,1	31,7	0,6
12	25,6	28,1	2,5

Pode-se considerar que a altura obtida pelo método aproximado equivale-se a altura real (obtida derrubando-se a árvore)?
$\sum D_i = 12,9$ e $\sum D_i^2 = 28,45$.