

LCE0216  
Introdução à Bioestatística Florestal  
5. Principais Modelos Contínuos

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio  
Monitores: Eduardo E. R. Junior & Giovana Fumes

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”  
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 19 de abril de 2018

# Modelos contínuos

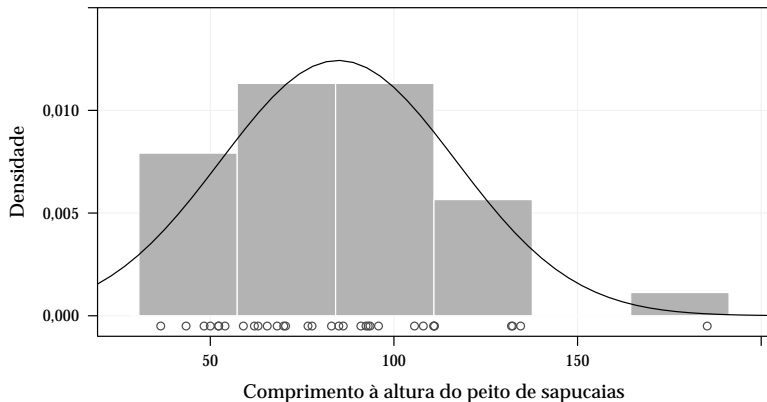
- ▶ Estabelecem a relação entre variável e a realização do experimento que a origina;
- ▶ Uma variável aleatória contínua segue determinado modelo se cada possível intervalo da variável acontecer conforme uma determinada lei de atribuição de probabilidades;
- ▶ A lei de atribuição é dada pela **função densidade de probabilidade**;
- ▶ Neste curso, veremos os modelos contínuos **Normal**, **Exponencial** e **Weibull**.

# Distribuição normal ou Gaussiana

- ▶ Um dos modelos mais importantes de uma distribuição contínua de probabilidade;
- ▶ Representa, com boa aproximação, muitos fenômenos da natureza;
- ▶ Alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas que seguem distribuição normal (geralmente):
  - ▶ Peso: de matéria seca, de raiz, de animais, de pessoas, de frutos, de sacas de café,...
  - ▶ Altura: de árvores, plantas, animais;
  - ▶ DAP, CAP;
  - ▶ Produtividade: de cana-de-açúcar, de soja,...
  - ▶ Erros de medida em geral.

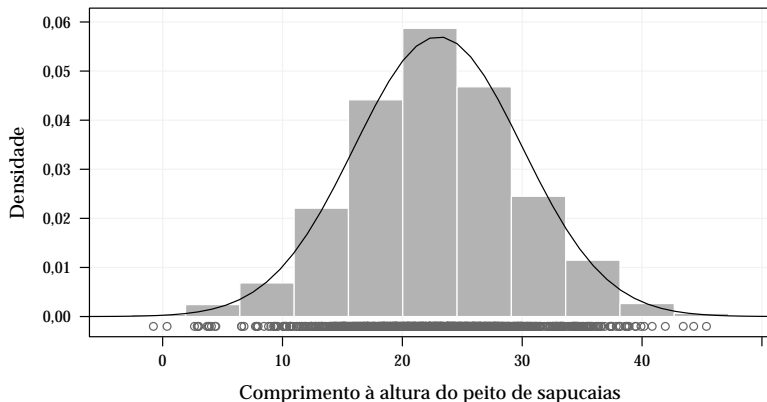
# Distribuição normal ou Gaussiana

**Exemplo prático:** Na figura abaixo, apresenta-se o histograma dos comprimentos à altura do peito (DAP) obtidos na aula de campo com o professor Thadeu. Os pontos acima do eixo  $x$  são os valores observados e a curva em preto é a função de densidade da distribuição normal com média e variância amostrais.

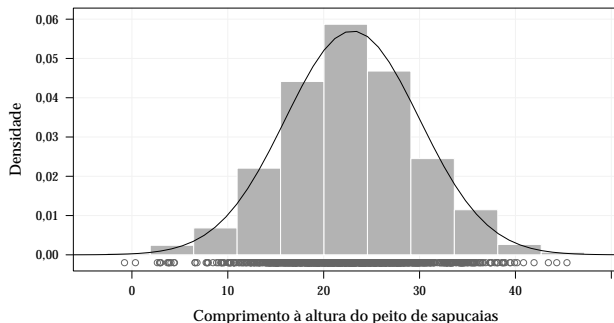


# Distribuição normal ou Gaussiana

**Um problema:** Sabe-se que as árvores em uma floresta de *Pinus caribaea* apresentam diâmetro médio de 23 cm, variância de 49 cm<sup>2</sup>. O histograma de uma amostra aleatória de diâmetros de 1000 árvores e a função densidade de probabilidade teórica são apresentados na figura a seguir.



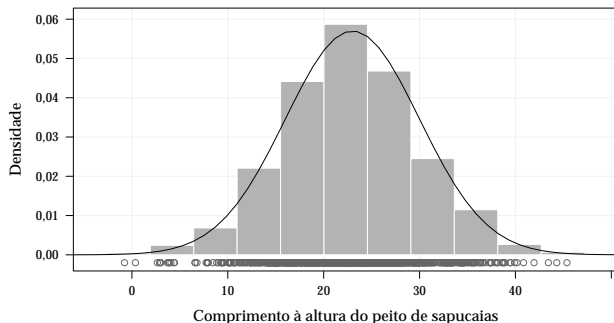
# Distribuição normal ou Gaussiana



## ► Sistema I:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até 17 <i>cm</i>	___%
II	de 17 a 30 <i>cm</i>	___%
III	acima de 30 <i>cm</i>	___%

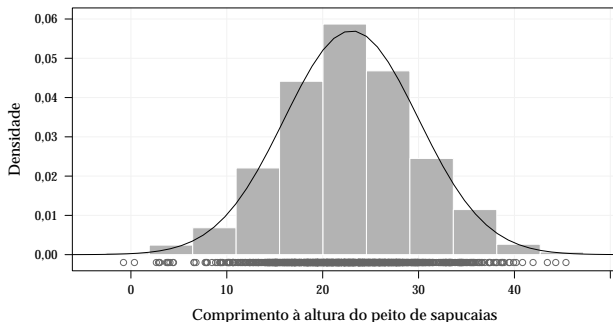
# Distribuição normal ou Gaussiana



## ► Sistema II:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até __ <i>cm</i>	20%
II	de __ a __ <i>cm</i>	60%
III	acima de __ <i>cm</i>	20%

# Distribuição normal ou Gaussiana



## Observações:

- ▶ As observações estão mais concentradas em torno do valor central e a concentração vai diminuindo a medida que os valores vão aumentando ou diminuindo;
- ▶ Distribuição em forma de sino (*bell curve*);
- ▶ Distribuição simétrica em torno do seu ponto central;



## Observações gerais:

- ▶ As distribuições amostrais de estatísticas como médias e proporções podem ser aproximadas pela distribuição normal  $\Rightarrow$  Inferência estatística
- ▶ Distribuições binomial e Poisson  $\Rightarrow$  aproximação através da distribuição normal
- ▶ Denominação: distribuição gaussiana  $\Rightarrow$  Karl F. Gauss (1777-1855).

## Definição

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  tem distribuição normal, com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , em que  $-\infty < \mu < \infty$  e  $\sigma > 0$ , se sua função densidade de probabilidade for dada por:

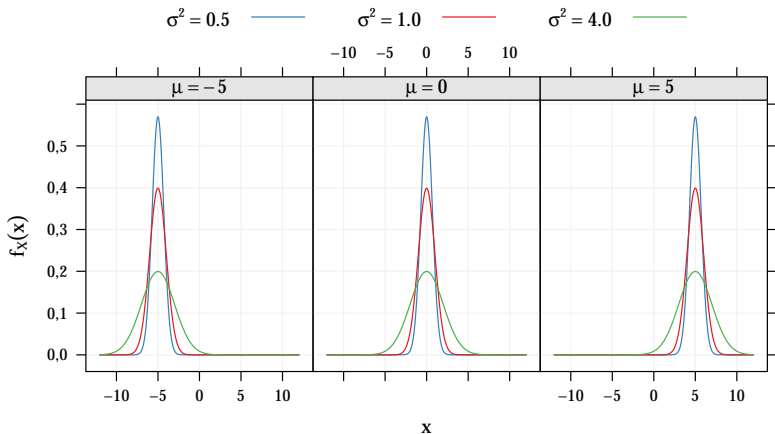
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Notação:**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

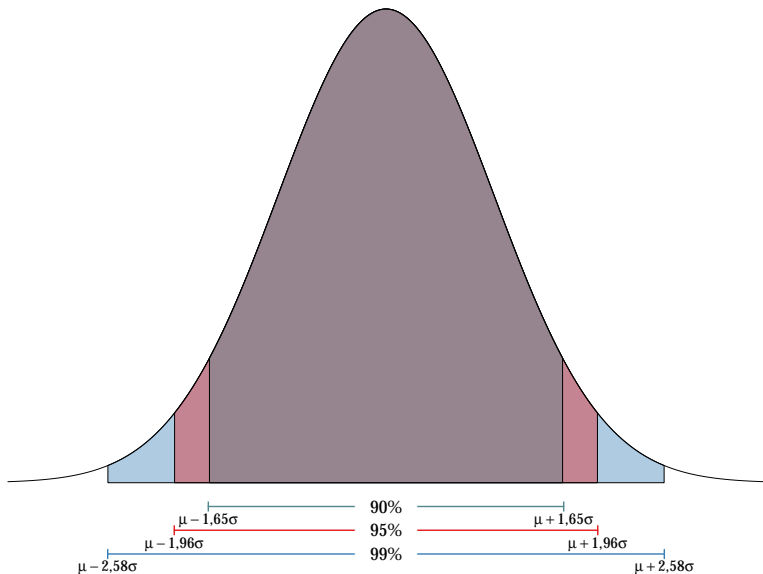
Pode-se demonstrar que:

- ▶  $f_X(x) > 0$
- ▶  $E(X) = \mu$
- ▶  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- ▶  $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- ▶  $f_X(x)$  é simétrica ao redor de  $\mu$ , ou seja,  $f(\mu - x) = f(\mu + x)$  para todo  $x$

# Distribuição normal ou Gaussiana

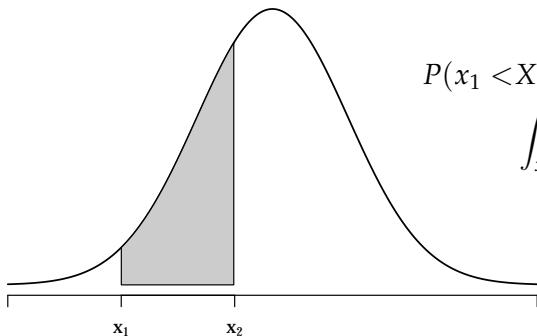


# Distribuição normal ou Gaussiana



# Distribuição normal ou Gaussiana

A probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal tomar um valor entre dois pontos quaisquer,  $x_1$  e  $x_2$ , tal que  $x_1 < x_2$ , é igual a área sob a curva normal compreendida entre os dois pontos.



$$P(x_1 < X < x_2) =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

**Observação:** A função de densidade acumulada  $F(x)$  da distribuição normal,

$$\Phi(x) = F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

usada para o cálculo de probabilidades,

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

não pode ser obtida analiticamente (em forma fechada), sendo necessário o uso de métodos numéricos.

# Distribuição normal padrão

Se  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$ , então a variável aleatória  $Z$ , definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

tem uma distribuição  $N(0, 1)$ , denominada **normal padrão**, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

## Observações:

- ▶ A nova distribuição têm média correspondente à origem e desvio padrão como medida de afastamento da média;
- ▶  $E(Z) = \mu_Z = 0$  e  $\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = 1$ ;
- ▶ Probabilidades calculadas para valores com de  $z$  com precisão de duas casas decimais foram tabeladas para facilitar cálculos manuais.



# Tabela normal padrão

Distribuição Normal Padrão Acumulada

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

# Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) =$$

# Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) =$$

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

# Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) =$$

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

# Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) = 0,1587$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

# Tabela normal padrão

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = \Phi(1,04) - \Phi(-2,02)$$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

# Tabela normal padrão

$$\begin{aligned}P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) &= \Phi(1,04) - \Phi(-2,02) \\&= 0,8508 -\end{aligned}$$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

# Tabela normal padrão

$$\begin{aligned}P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) &= \Phi(1,04) - \Phi(-2,02) \\ &= 0,8508 - 0,0217\end{aligned}$$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823



# Tabela normal padrão

$$\begin{aligned}P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) &= \Phi(1,04) - \Phi(-2,02) \\&= 0,8508 - 0,0217 \\&= 0.8201\end{aligned}$$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823

# Padronização de uma variável

Com a tabela de probabilidades de uma variável normal padrão, pode-se calcular probabilidades para qualquer outra variável normalmente distribuída padronizando-a. Seja, por exemplo,  $X \sim N(23, 49)$ . Deseja-se calcular  $P(X < 16)$

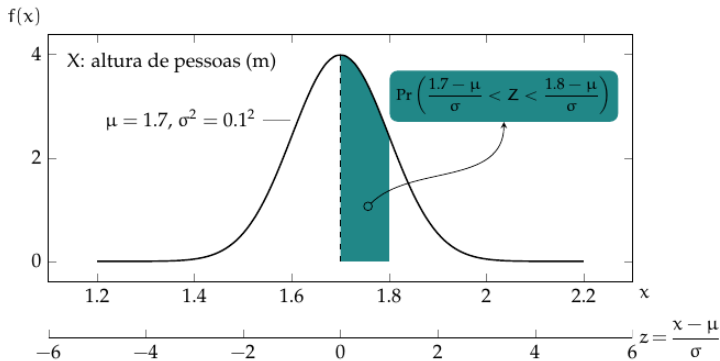
Para padronizar  $X$ , devemos subtrair a média e dividir pelo desvio padrão

$$P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{16 - 23}{7}\right) = P(Z < -1) = 0,1587.$$

Portanto:  $P(X < 16) = P(Z < -1) = 0,1587$

# Padronização de uma variável

Padronizar uma variável normalmente distribuída é mapeá-la na escala da normal padrão.



**Exercício:** Sabendo-se que  $Z \sim N(0, 1)$ , usando a tabela da distribuição normal padrão, calcular:

- (a)  $P(0 < Z < 2,14)$
- (b)  $P(-3,01 < Z < 0)$
- (c)  $P(-3,01 < Z < 2,14)$
- (d)  $P(Z > 0)$
- (e)  $P(Z > 1,00)$
- (f)  $P(Z < -1,00)$

# Distribuição normal ou Gaussiana

Agora podemos calcular as probabilidades associadas aos intervalos correspondentes a variável  $X$ : diâmetro, em  $cm$ , de uma árvore que se distribui conforme modelo  $N(23, 49)$ .

(a)  $P(X < 17)$

(b)  $P(17 < X < 30)$

(c)  $P(X > 30)$

Assim, as porcentagens esperadas são dadas por:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até 17 $cm$	___%
II	de 17 a 30 $cm$	___%
III	acima de 30 $cm$	___%

**Exercício:** Calcular os valores de  $X$  correspondentes às porcentagens esperadas, em que  $X$ : diâmetro, em  $cm$ , de uma árvore se distribui conforme modelo  $N(23, 49)$ .

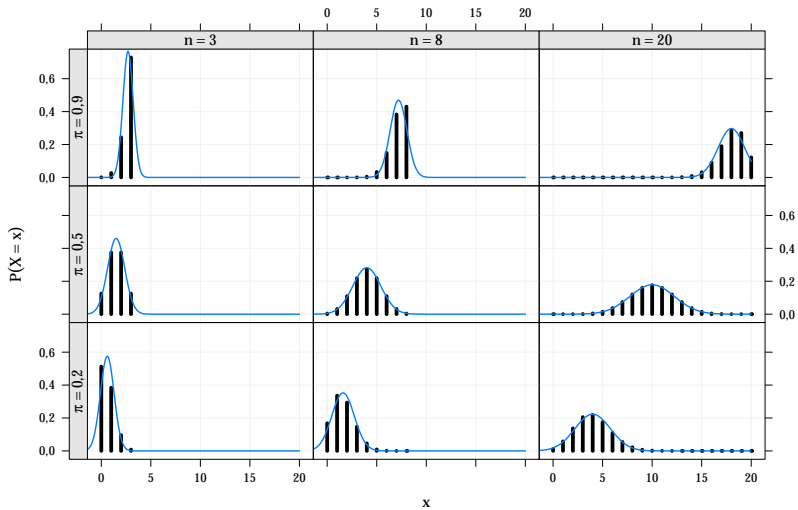
Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até ____ $cm$	20%
II	de ____ a ____ $cm$	60%
III	acima de ____ $cm$	20%

# Aproximação binomial pela normal

Seja  $Y$  uma variável aleatória representando o número de sucessos em um total de  $n$  ensaios independentes e  $\pi$  a probabilidade de ocorrer sucesso em cada ensaio, dizemos que  $Y \sim B(n; \pi)$ .

A variável  $Y$  pode ser aproximada por uma distribuição normal com média  $\mu_Y = n\pi$  e variância  $\sigma_Y^2 = n\pi(1 - \pi)$ .

# Aproximação binomial pela normal





# Aproximação binomial pela normal

Quando a aproximação é boa?

Quando a probabilidade  $\pi$  de ocorrer sucesso não está muito próxima de 0 ou de 1 e o número  $n$  de ensaios é grande.

O cálculo da probabilidade pela normal é feito utilizando-se uma distribuição  $N(n\pi, n\pi(1 - \pi))$ .

## Correção de continuidade

Consiste em somar ou subtrair 0,5 aos limites do intervalo para o qual desejamos calcular as probabilidades.

- ▶ Em muitas situações práticas o cálculo das probabilidades pode ser realizado sem levarmos em conta a correção de continuidade;
- ▶ Pode-se ignorar a correção para os casos em que  $0,30 < \pi < 0,75$  e  $n$  maior do que 400.

**Exercício:** As mudas em um viveiro são classificadas em grandes ou pequenas, conforme sua altura. Verificou-se que 45% das mudas são consideradas grandes. Supondo que as mudas são colocadas em recipientes que comportam 60 unidades, aleatoriamente, pergunta-se:

- (a) Em que porcentagem esperada de recipientes teremos pelo menos 50% de mudas grandes? (50% é igual a 30 mudas).
- (b) Em que porcentagem de recipientes teremos exatamente 50% de mudas grandes?

## Distribuição exponencial

- ▶ Teoria da confiabilidade;
- ▶ Utilizada para prever o período de tempo necessário até a ocorrência de um evento;
- ▶ Probabilidade ao longo do tempo ou da distância entre ocorrências num intervalo contínuo;

# Distribuição exponencial

## Função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $\frac{1}{\beta}$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância, volume.

Notação:  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ .

## Esperança e variância

Obtida analiticamente por integração por partes!

$$E(X) = \beta$$

$$\text{Var}(X) = \beta^2$$

FIGURAS

## Função de densidade de probabilidade acumulada

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{\beta}x}.$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\frac{1}{\beta}a} - e^{-\frac{1}{\beta}b}.$$

**Exemplo:** Considere que a variável volume diário de chuva (mm) em Pelotas-RS no mês de janeiro segue uma distribuição exponencial com parâmetro  $\beta = 14,36$ . Qual é a proporção de dias com volume de chuva superior a 30 mm?



**Exemplo:** Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. Empresa oferece aos seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessa lâmpada é modelada por meio da distribuição exponencial com parâmetro  $\beta = 8000$ . Determine a proporção de trocas por defeito de fabricação.

## Falta de memória

$$\begin{aligned}P(X \geq t + s | X \geq s) &= \frac{P(X \geq t + s, X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq t + s)}{P(X \geq s)} \\&= \frac{e^{-\frac{t+s}{\beta}}}{e^{-\frac{s}{\beta}}} \\&= e^{-\frac{t}{\beta}} = P(X \geq t)\end{aligned}$$

**Exemplo:** O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro  $\beta = 5$ . Calcule:

- (a) A probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos;
- (b) A probabilidade do intervalo ser superior ou igual a 7, sabendo que ele é superior ou igual a 5.

## Distribuição Weibull

- ▶ Teoria da confiabilidade;
- ▶ Tempo de vida.

## Função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $\theta > 0$  é o parâmetro de escala e  $\beta$  é o parâmetro de forma.

## Função densidade de probabilidade acumulada

$$P(X < a) = \int_0^a \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} dx = 1 - e^{-\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\beta}}$$

## Distribuição Weibull: Esperança e Variância

$$E(X) = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\text{Var}(X) = \theta^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right]$$

- ▶  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx;$
- ▶ Se  $n \in N$ , então  $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$  e  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

FIGURAS

**Exemplo:** O tempo de falha de uma submontagem eletrônica usada em uma estação de trabalho RISK é satisfatoriamente modelado por uma distribuição de Weibull com  $\beta = 0,5$  e  $\theta = 1000$ . Obtenha o tempo médio de falha de uma submontagem. Qual a probabilidade da submontagem sobreviver mais de 4000h.



**Exemplo:** Suponha que a precipitação diária para a cidade de Santa Maria - RS, no mês de dezembro, segue uma distribuição Weibull com parâmetro de forma  $\beta = 0,6792$  e parâmetro de escala  $\theta = 11,6427$ . Qual é a probabilidade da precipitação diária ser inferior a 10 mm no mês de dezembro?