Função Exponencial

1 Exponenciação

1.1 Definição

A notação a^n foi inventada por *René Descartes*

Algumas vezes desejamos multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Por exemplo, para calcular a área de um quadrado de lado l, nós usamos a seguinte fórmula:

$$A = l.l$$

Ou simplesmente

$$A = l^2$$

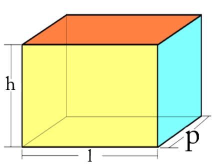

Figura 1: Paralelepípedo Reto-Retângulo

O produto do mesmo número repetidas vezes é chamado de **exponenciação**. O número dois que aparece no canto superior direito de l é o número que indica quantas vezes l deve ser multiplicado por si mesmo. Este número é chamado de expoente.

Exemplo 1. O volume de um *paralelepípedo reto retângulo* (Figura 1) é igual ao produto de sua altura (h), largura (l) e profundidade (p)

$$V = h.l.p$$

Chamamos de *cubo* o *paralelepipedo reto retângulo* que tem todos os lados iguais. Nesse caso

$$V = l.l.l \Rightarrow V = l^3$$

Quando o expoente é 2, dizemos que o número está elevado ao quadrado. Quando o expoente é 3, dizemos que o número está elevado ao cubo.

A exponenciação é amplamente utilizada nas ciências para descrever números muito grandes ou muito pequenos. A quantidade de moléculas de água em um copo de água é da ordem de 6.000.000.000.000.000.000.000.000, ou 6.10^{24}. Essa quantidade é praticamente incomensurável para nosso senso cotidiano: há mais moléculas de água em um copo de água do que copos de água no oceano!

Agora imagine que desejamos saber quantas moléculas de água existem no oceano e suponha que consiguimos estimar o número de copos de água no oceano em 10^{21}. Assim: moléculas de água no oceano $= 6.10^{24}.10^{21}$

Se desejamos obter o resultado, precisamos aprender a fazer cálculos com as exponenciações. Nosso primeiro conceito é que

$$a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{n}$$

Poderíamos igualmente definir a multiplicação por

$$a.n = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}$$

Definição 1. Exponenciação

Seja $a \in \mathbb{R}$, definimos a^n por:

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{se } n = 1 \\ a.a^{n-1}\ , & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Na expressão a^n chamamos a de base e n de expoente

A definição anterior é o que chamamos de *definição por recorrência*. Para calcular a^{10} precisamos antes saber quanto é a^9, para calcular a^9, precisamos saber quanto é a^8 e assim por diante. Esse tipo de definição é utilizada para evitar o uso das retiscências $(\ldots)$, que não têm precisão matemática.

Testando o Conceito 1. Escreva uma definição por recorrência da multiplicação

[**Solução**: Defina $a.n = a$, se $n = 1$ e $a.n = a.(n-1) + a$, se $n > 1$]

Exemplo 2. a) $7^4 = 7.7.7.7 = 2401$

b) $(-4)^3 = (-4).(-4).(-4) = -64$

c) $(-4)^2 = (-4).(-4) = 16$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Repare que $(-4)^3$ é negativo e $(-4)^2$ é positivo.

É importante salientar que a semelhança com a multiplicação não vai muito longe. Enquanto a multiplicação goza da propriedade comutativa $(a.b = b.a)$, isso não acontece com a exponenciação. Ou seja, no geral $a^b \neq b^a$. Por exemplo:

Exemplo 3. $2^3 \neq 3^2$, afinal $2^3 = 2.2.2 = 8$ enquanto $3^2 = 3.3 = 9$.

1.2 Exercícios Elementares

Exercício 1. Calcule utilizando a definição

a) 2^2

b) 3^2

c) -2^4

d) $(-2)^4$

e) -2^3

f) $(-2)^3$

g) 2^5

h) $0,5^2$

i) 1^2

j) 1^3

k) 0^1

l) 0^4

m) $(-1)^2$

n) $(-1)^3$

o) $(-1)^4$

p) $-(-7)^2$

q) $(-7)^2$

r) $(2.3)^2$

s) $2^2.3^2$

t) $(4+1)^3$

u) 4^3+1^3

v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

w) $\frac{2^5}{3^5}$

Exercício 2 (FUVEST)**.** (Modificado) - Calcule o valor da expressão $(0,2)^3 + (0,16)^2$

Exercício 3. Calcule a quantidade de algarismos dos seguintes números:

a) 10^4

b) 10^8

c) 10^n, quando $n \in \mathbb{Z}_*^+$ Dica: Generalize o item a) e o item b)

d) 352.10^8

e) $0,2.10^3$

f) 200.10^{n+2}

Exercício 4. Calcule o valor de $ab^2 - a^3$ para $a = -\frac{x}{2}$ e $b = 2x$

1.3 Complemento da Teoria

Conforme pudemos observar nos exercícios, algumas vezes as exponenciações têm simplificações simples. As seguintes propriedades são válidas para todo $a \in \mathbb{R}$:

Propriedade 1. $a^p \geq 0$, *onde p é um número par, ou seja, o resultado da exponenciação de qualquer número por um expoente par é sempre positivo, independente do sinal da base.*

Propriedade 2. $0^n = 0$, *para qualquer n inteiro positivo.*

Propriedade 3. $1^n = 1$, *para qualquer n inteiro positivo.*

Propriedade 4. $(-1)^i = -1$ *e* $(-1)^p = 1$, *onde i representa um inteiro positivo ímpar e p representa um inteiro positivo par.*

Propriedade 5. $(a.b)^n = a^n.b^n$

Propriedade 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Atenção: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Testando o Conceito 2. Calcule: $(-2)^3 + (-1)^2 + (-1)^{502} - 1^{55} + 0^1.(-5)^2$

[**Solução**: $-8+1+1-1+0=-7$]

Exercício Resolvido 1. A esfera (Figura 2) tem seu volume dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde r é o raio da esfera. Se duas esferas a e b são tais que seus raios são respectivamente r_a e $r_b = 4r_a$, calcule a $\frac{V_a}{V_b}$, onde V_a é o volume da esfera a e V_b é o volume da esfera b.

Solução

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_a}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_b}^3}$$

Simplificando:

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{{r_a}^3}{{r_b}^3} = \frac{{r_a}^3}{(4r_a)^3} = \frac{{r_a}^3}{4^3{r_a}^3} = \frac{1}{64}$$

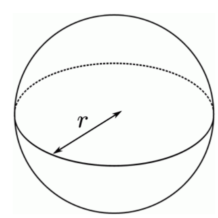

Figura 2: Esfera

2 Exponenciação (cont.)

2.1 Mais propriedades da exponenciação

Nós aprendemos várias propriedades úteis para calcular a exponenciação de forma mais simples, sem precisarmos utilizar a definição por recorrência, que é longa e tediosa. Agora, veremos mais algumas propriedades que facilitam o cálculo da exponenciação. Antes, alguns exemplos:

Exemplo 4. a) $2^6 = \underbrace{2.2.2.2.2.2}_{6} = \underbrace{2.2.2}_{3}\underbrace{2.2.2}_{3} = 2^3.2^3$

b) $5^{100} = \underbrace{5.5\ldots5}_{100} = \underbrace{5.5.5}_{3}.\underbrace{5.5\ldots5}_{97} = 5^3.5^{97}$

c) $(-2)^8 = \underbrace{(-2).(-2)\ldots(-2)}_{8} = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{4}.\underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{4} = (-2)^4.(-2)^4 = ((-2)^4)^2$

Essas propriedades vão nortear a nossa definição da exponenciação quando o expoente for negativo ou uma fração!
As demonstrações estão no apêndice.

Propriedade 7. $a^{m+n} = a^m.a^n$

Propriedade 8. $a^{m.n} = (a^m)^n$

Vamos explorar um pouco a propriedade 7. Conforme os exemplos anteriores, vimos que

$$5^{100} = 5^3.5^{97}$$

Isso também pode ser escrito da seguinte forma:

$$5^{97} = \frac{5^{100}}{5^3}$$

Assim, podemos escrever mais uma propriedade:

Propriedade 9. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, *Para* $a \neq 0$

Testando o Conceito 3. Simplifique: $\frac{(a^4.b^5)^2}{(a.b)^3}$

[**Solução**: $\frac{a^8.b^{10}}{a^3.b^3} = \frac{a^8}{a^3}\frac{b^{10}}{b^3} = a^5.b^7$]

Testando o Conceito 4 (EsPCEx-Modificado). Efetuando-se $k^{p+1} : (-k^{1-2p})$, o que se obtem?

[**Solução**: $-\frac{k^{p+1}}{k^{1-2p}} = -k^{p+1-(1-2p)} = -k^{3p}$]

2.2 Expoentes Inteiros Negativos

Com as propriedades desenvolvidas até aqui estamos prontos para extender a nossa definição de exponenciação e englobar expoentes inteiros. Porém, devemos salientar, que com essa extensão virão restrições: até agora pudemos fazer a exponenciação para qualquer base, independentemente de ser positiva, negativa ou nula. Ao introduzirmos expoentes negativos vamos excluir a possibilidade da base nula. Nós já veremos o porquê. Seguindo as propriedades anteriores, vamos definir a^0, para $a \neq 0$. Para isso, tome $m = 1$ e $n = 1$ na Propriedade 9. Isso nos dá:

0^0 é uma forma indeterminada. Isso vem da óbvia contradição entre a propriedade 2 e a definição 2. Frequentemente utilizamos $0^0 = 1$ para efeitos de simplificação.

$$a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} \Rightarrow a^0 = 1$$

Agora, vamos calcular a^{-1}. Tome $m = 0$ e $n = 1$, com isso:

$$a^{0-1} = \frac{a^0}{a^1} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$$

E finalmente, para um número inteiro negativo qualquer, vamos utilizar a Propriedade 8. Tome $n = -1$

$$a^{m.(-1)} = (a^m)^{-1} \Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Com essas considerações, a única forma consistente de definir a exponenciação para expoentes inteiros é a que se segue:

Para frações também vale: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Definição 2. Exponenciação de Inteiros Não Positivos

Seja $a \in R_*$, definimos:

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{Se } n = 0 \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{Se } n < 0 \end{cases}$$

Os expoentes negativos são muito utilizados para descrever grandezas muito pequenas. O sistema internacinal de unidades possui vários prefixos de unidades que são potências negativas de 10. Por exemplo, um miligrama são 10^{-3} gramas. Um mililitro são 10^{-3} litros e assim por diante (veja a tabela 1).

Tabela 1: Prefixos do SI

Prefixo	Símbolo	Potência
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

2.3 Exercícios Elementares

Atenção! Não se esqueça de utilizar as propriedades vistas na aula passada!

Exercício 5. Calcule

a) 2^{-1}

b) 2^{-2}

c) -2^{-1}

d) -2^{-2}

e) $(-3)^{-6}$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

g) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

h) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}$

i) $(0,125)^{-2}$

j) $\frac{1}{3^{-2}}$

Exercício 6. Se $\pi^2 \approx 10$, calcule π^4 e π^6

Exercício 7. Calcule $\left(\frac{2^0+2^4+2-2^3}{2^{-1}+2-1}\right)^2$

Exercício 8. Quanto devemos somar a $(-2)^{-1}$ para obter $(-2)^2$?

Exercício 9. Classifique em (V) ou (F)

a) $(2^4)^3 = 4^6$

b) $\frac{2^3+2^2}{3.2^2} = 3^{-1}+3^{-1}+3^{-1}$

c) $(x+y)^{-2} = x^{-2}+y^{-2}$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}_+$

d) $2^{-1} - 3^{-1} = 6^{-1}$

e) $\frac{1}{x^{-2}} = x^2$ Para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$

f) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ Para quaisquers $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

Exercício 10 (PM)**.** Calcule $\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + 2(-1)^3$

Exercício 11 (PM)**.** Calcule $2^{-1}\frac{1}{2^5}$

Exercício 12 (CN-Modificado)**.** Calcular: $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} + \frac{5}{2}(7)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Exercício 13 (CN)**.** Resolver a expressão $\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{4}{3}-1} - \left(\frac{\frac{2}{3}-2}{3-\frac{1}{2}}\right)^0 + \frac{1}{2^{-1}} + 0,43535\ldots$

Exercício 14. Simplifique $\frac{5^{2n+1}-25^n}{5^{4n}}$

Exercício 15. Simplifique $\frac{2^5-2^4}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 0,125^{-3} + 0,25^{-2}$

Exercício 16. Calcule o inverso da expressão: $\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}+\frac{0,5}{0,001}3.10^{-2}}{\frac{5}{4}}$

Exercício 17. Calcule n na expressão abaixo:

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\,\frac{5.6^5+6^5}{2^5+2^5} = 2^n$$

Exercício 18 (CN)**.** Na expressão abaixo a e b são números inteiros e positivos. Calcule $a+b$.

$$\frac{(0,125)^{b-a}}{8^{a-b}} + 21\left(\frac{b}{a}\right)^0 + a^b = 191$$

3 Raízes Enésimas e Expoentes Racionais

3.1 Função Inversa da Exponencial

Algumas vezes precisamos responder perguntas do tipo *qual potência de* 2 *é* 64*?* e também do tipo *qual número elevado a* 2 *é* 64*?*. Essas duas perguntas geram respostas e operações inversas muito diferentes. Antes de começarmos a explorar o conceito de exponenciação para expoentes racionais, vamos ver formas de definir a operação inversa da exponenciação. O problema surge da *não comutatividade* da exponenciação. Ou seja, dados dois números a e b podemos fazer duas perguntas:

1) Qual potência de a é igual a b? ($a^x = b$)

2) Qual número elevado a a é igual a b? ($x^a = b$)

Escreveremos o x da primeira equação, quando existir como $x = \log_a b$

Na multiplicação teríamos a mesma resposta para as duas perguntas: $x = \frac{b}{a}$

Exemplo 5. Se tomarmos $a = 2$ e $b = 64$ teremos duas equações:

$$2^x = 64(\text{ solução : } x = 6)$$

$$x^2 = 64(\text{ solução : } x = 8 \text{ ou } x = -8)$$

Por enquanto, vamos nos concentrar em responder a segunda pergunta.

3.2 Raízes Enésimas

Nessa seção nos concentraremos na pergunta: Dado um número qualquer b e um expoente inteiro a, é sempre possível encontrar uma base x tal que $x^a = b$? ”

Para respondermos essa pergunta, fixe $a \in \mathbb{Z}$ e seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^a$$

Queremos então encontrar x que satisfaça $f(x) = b$. Se essa função não for inversível podemos ter mais de uma resposta ou nenhuma.

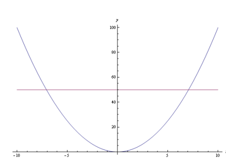

Figura 3: Gráfico de $y = x^2$

Testando o Conceito 5. Seja $f(x) = x^2$ (veja a Figura 3). Discuta se é possível definir a inversa de f e sob quais restrições.

[**Solução**: Uma possível solução é tomar $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}_+$ e $\mathbb{CD}(f) = \mathbb{R}_+$, tornando a função bijetora e, logo, inversível]

Vamos estudar dois casos distintos:

1) $f(x) = x^a$ e a é par

2) $f(x) = x^a$ e a é ímpar

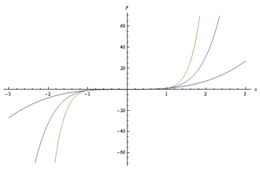

Figura 4: Gráficos de $y = x^3, y = x^5, y = x^7$

Quando o expoente é par, vimos na Propriedade 1 que o resultado é sempre positivo. Assim a imagem da função vai ser estritamente positiva e ela não será injetora em todos os números reais (porque $f(a) = f(-a)$)

Exemplo 6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto x^6$. Então

$$f(-x) = (-x)^6 = (-1)^6.x^6 = x^6 = f(x)$$

e portanto f não é injetora, não sendo também inversível.

A palavra raiz é utilizada há muitos séculos com o sentido aqui definido. Sua origem é *radix*, do latim: lado. Raiz quadrada significaria, originalmente, *o lado do quadrado*. Assim o lado do quadrado de área 9 é 3, ou, como dizemos *raiz quadrada* de 9 é 3.

Prova-se utilizando o princípio da indução finita que quando a é ímpar, f é inversível (veja a Figura 4). Da discussão segue dois resultados importantes

I - Quando a é par, $f(x) = x^a$ só é inversível se limitarmos domínio e contradomínio.

II - Quando a é ímpar, $f(x) = x^a$ é inversível em todo $\mathbb{R}$.

Isso nos leva a seguinte definição:

Poderíamos também definir $\sqrt[n]{a}$ como a menor raiz da equação. Algebricamente tudo continuaria consistente, mas perderíamos o sentido histórico da *raiz quadrada*

Definição 3. Raiz Enésima

Seja $a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{a}$ é a maior raiz real da equação $x^n = a$, caso exista

a é chamado de radicando e n de índice.

Por que $1024 = 2^{10}$? É a fatoração!

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	$1024 = 2^{10}$

Exemplo 7. a) $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$

b) $\sqrt[2]{36} = 6$, pois $6^2 = 36$. Embora $(-6)^2 = 36$ temos que $6 > (-6)$

c) $\sqrt[n]{0} = 0$, pois $0^n = 0$

d) $\sqrt[n]{1} = 1$, pois $1^n = 1$

e) Não existe $\sqrt[2]{-1}$, pois não existe $x^2 = -1$ em $\mathbb{R}$

f) $\sqrt[10]{1024} = 2$, pois $2^{10} = 1024$. Embora $(-2)^{10} = 1024$, $2 > -2$

g) $\sqrt[n]{x^n} = x$, se n for ímpar.

As raízes enésimas observam as seguintes propriedades:

Para $a, b \in \mathbb{R}_+$

Propriedade 10.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Propriedade 11.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Propriedade 12.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Propriedade 13.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

Propriedade 14.

$$\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

Propriedade 15.

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Rightarrow a < b$$

Tome cuidado ao aplicar as propriedades!

$1 = \sqrt{(-1)^2} \neq \left(\sqrt{-1}\right)^2$

Afinal de contas $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Exemplo 8. Para simplificarmos $\sqrt{18}$ primeiro fatoramos $18 = 2.3^2$ assim

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2.2} \overset{P.10}{=} \sqrt{3^2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Exercício Resolvido 2. Coloque em ordem crescente: $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[3]{10}$

Solução: Primeiro precisamos colocar as raízes no mesmo índice. O mmc entre $2, 4$ e 3 é 12. Colocando todas as raízes no mesmo índice (Propriedade 14) temos

$$\sqrt[12]{2^6},\ \sqrt[12]{15^3},\ \sqrt[12]{10^4}$$

$$\sqrt[12]{64},\ \sqrt[12]{3375},\ \sqrt[12]{1000}$$

Assim, pela Propriedade 15: $\sqrt{2} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[4]{15}$

Racionalizar significa eliminar os radicais do denominador

Exercício Resolvido 3. Racionalize: $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solução: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

3.3 Radicais Duplos

Uma curiosidade sobre radicais: É possível que dois radicais com formas diferentes correspondam ao mesmo número:

Exemplo 9. $\sqrt{8+\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{15}+1\right)$ pois ambos os lados quando elevados ao quadrado resultam em $8+\sqrt{15}$. Como são ambos positivos, necessariamente, são iguais

---

Testando o Conceito 6. Sejam $A, B \in \mathbb{Q}^+$ tais que $\sqrt{A^2-B} \in \mathbb{Q}$. Então, escreva $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ como a soma de dois radicais simples

[**Solução**: Se $\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ então $A+\sqrt{B} = x+y+2\sqrt{xy}$ Logo $A = x+y$ e $B = 4xy$. Isolando y temos $A = x + \frac{B}{4x}$ assim $4xA = 4x^2+B$ logo $x = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ e $y = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$]

Exercício Resolvido 4 (EPCAR)**.** Transformar $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Solução Usando o exercício anterior temos $A = 7$ e $B = 3.4^2$ (porque a expressão anterior é $\sqrt{A+\sqrt{B}}$). Verificando, temos que $A^2 - B = 49 - 48 = 1$ é um quadrado perfeito, assim podemos escrever

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{4}+\sqrt{6} = 2+\sqrt{6}$$

Como ressaltamos anteriormente o *radical duplo* é uma curiosidade, assim como a *racionalização*. Apesar da grande quantidade de exercícios não é uma parte essencial para o entendimento da matéria e nem conceitualmente complicada, sendo um exercício técnico e tedioso diferente dos exercícios que utilizam habilidades matemáticas de fato.

3.4 Irracionalidade de algumas raízes

Tendo estabelecido via função inversa a existência das raízes quadradas e enésimas no geral, estamos aptos a apresentar concretamente números irracionais. O que é feito nessa seção é a demonstração clássica de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Teorema 1 (Irracionalidade de $\sqrt{2}$). $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Demonstração. Suponha por absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então existe uma fração $\frac{p}{q}$ irredutível (mdc(p,q)= 1) de números inteiros tal que $x = \frac{p}{q}$. Logo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Logo p^2 é par. A única possibilidade para p^2 ser par é se p também o for (caso contrário, se p for ímpar, p^2 também o será). Assim $p = 2k$. Substituindo teremos:

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Assim q^2 também é par e, logo, q é par. Assim $2|p$ e $2|q$ e $2|$mdc(p,q) contrariando a hipótese de que mdc(p,q)= 1. □

Corre a lenda no folclore matemático de que o primeiro homem que descobriu que não havia nenhuma proporção de números inteiros cujo quadrado fosse dois sofreu uma morte misteriosa por ação dos pitagóricos.
A escola pitagórica defendia que a natureza era composta por números e os *irracionais* não tinham espaço nessa filosofia.

Na verdade a raiz quadrada de um número positivo que não é quadrado perfeito é sempre irracional. Embora seja um resultado simples exige um conhecimento mínimo de teoria dos números e não será feito aqui.

Testando o Conceito 7. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional

[**Solução**: Se $\left(\frac{p}{q}\right) = 3$ então $p^2 = 3q^2$ e logo $3|p^2 \Rightarrow 3|p$. Logo $p = 3k$ assim $3k^2 = q^2$ e $3|q$ de onde mdc$(p,q) \geq 3$]

3.5 Expoentes Racionais

Estamos aptos agora a definir os expoentes racionais. Vamos manter em mente a Propriedade 7 e tentar definir $a^{\frac{p}{q}}$ de forma a respeitá-la. Observe que:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$$

Dessa forma, de acordo com a Definição 3

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Assim a única forma natural de definirmos a exponenciação para expoentes racionais é:

Definição 4. Expoente Racional

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ e mdc(p,q)= 1 então

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se $a < 0$ então q deve ser ímpar.

Exemplo 10. a) $32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = 2^2 = 4$

b) $27^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^5 = 3^5 = 243$

c) $8^{-0,333\ldots} = 8^{\frac{-1}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $0,0625^{0,5} = 0,0625^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,0625} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

3.6 Exercícios Elementares

3.6.1 Raízes

Exercício 19. Classifique como (V) ou (F)

a) $\sqrt{100} = 10$

b) $\sqrt{4} = \sqrt{-4}$

c) $\sqrt{36} = \pm 6$

d) $\sqrt{x^2} = x$

e) $\sqrt{x^4} = x^2$

f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

g) $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt{0.25}$

h) $\sqrt{x^14} = x^{\frac{1}{7}}$

i) $-\sqrt{49} = -7$

Exercício 20 (EPCAR-Mod.)**.** Simplifique, $7\sqrt{32} - 5\sqrt{2} + \sqrt{8}$

Exercício 21. Simplifique e se possível resolva

a) $\sqrt{45}$

b) $\sqrt{175}$

c) $\sqrt{169}$

d) $\sqrt{675}$

e) $\sqrt[3]{-675}$

f) $\sqrt[5]{\pi^{10}}$

g) $\sqrt{27}$

h) $\sqrt{100}$

i) $\sqrt[4]{81^{-1}}$

Exercício 22. Prove que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é uma função crescente e, logo, injetora.

Exercício 23. Simplifique

a) $(\sqrt{8} + \sqrt{2})\sqrt{32}$

b) $\sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{98}$

c) $\sqrt{3000}+\sqrt{300}+\sqrt{30}+\sqrt{3}$

d) $\sqrt{76x^4}$

e) $(\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{3})^2$

f) $\sqrt{\frac{5}{4}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$

g) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[2]{2}}$

Exercício 24 (EsPCEx)**.** Reduzir à expressão mais simples:

$$\sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}.\sqrt[4]{b}}$$

Exercício 25 (EsPCEx)**.** A expressão $\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$, é igual a:

A ( ) $3a$

B ( ) 3

C ( ) $\sqrt{a}$

D ( ) $3\sqrt[4]{a}$

E ( ) n.d.a

Exercício 26 (PM)**.** Efetuando: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$ tem-se:

A ( ) 2

B ( ) 4

C ( ) 8

D ( ) 12

E ( ) 16

Exercício 27 (EsPCEx)**.** A expressão $\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{867}$, é igual a:

A ( ) $17\sqrt{3}$

B ( ) $3\sqrt{95}$

C ( ) 0

D ( ) $3\sqrt{17}$

E ( ) n.d.a

Exercício 28 (EPCAR - Mod.)**.** Escreva em ordem crescente $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{4}$.

Exercício 29 (EsPCEx)**.** A soma, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{a}$ é:

A ( ) $\sqrt[7]{2a}$

B ( ) $\sqrt[7]{a}$

C ( ) $\sqrt[12]{a^7}$

D ( ) $\sqrt[12]{a^3+a^4}$

E ( ) n.d.a.

Exercício 30 (EPCAR)**.** Se $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=K(\sqrt{10}+5)$, então K é igual a:

A ( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B ( ) 5

C ( ) $\frac{1}{5}$

D ( ) $5\sqrt{2}$

E ( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercício 31 (EsPCEx)**.** Substituir pelo sinal correspondente

$$(\sqrt{3}-1)^2=\ldots(1-\sqrt{3})^2$$

Exercício 32 (EsPCEx)**.** Calcular a expressão $(3+2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2+(3\sqrt{2})^2-\sqrt{720}+\sqrt{2160}$

Exercício 33 (EsPCEx)**.** Efetuar as operações: $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$

Exercício 34 (EsPCEx)**.** Efetue:

$$\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}.\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}.\sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^7}}$$

Exercício 35 (CN)**.** Simplificar a expressão:

$$\sqrt{16x^3y}-\sqrt{25xy^3}-(x-5y)\sqrt{xy}$$

Exercício 36 (CN)**.** Simplificar e efetuar:

$$3\sqrt[3]{a^4b^4}+5a\sqrt[3]{b^4}+b\sqrt[3]{a^4b}$$

Exercício 37 (EPCAR)**.** Calcular o valor da expressão $\frac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$

Exercício 38 (CN)**.** Efetuar $\sqrt{24}\sqrt[4]{36}$

Exercício 39 (CN)**.** Efetuar $\sqrt{200}\sqrt[3]{108}$

Exercício 40 (CN)**.** Dê a expressão mais simples de:

$$\frac{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}:\sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}$$

Exercício 41. A expressão $\frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$ é igual a:

A ( ) $\sqrt[10]{2^3}$

B ( ) $\sqrt[5]{2}$

C ( ) $\sqrt{2}$

D ( ) $\sqrt[10]{2^4}$

E ( ) n.d.a.

Exercício 42 (EsPCEx)**.** O resultado de: $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}:\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}$, é:

A ( ) $\sqrt[6]{x}$

B ( ) $\sqrt[12]{x}$

C ( ) $\sqrt[7]{x}$

D ( ) $\sqrt[12]{x^{-2}}$

E ( ) n.d.a.

Exercício 43 (EsPCEx-Mod)**.** Reduza ao mesmo índice $\sqrt[6]{3m^2}$ e $\sqrt[10]{\frac{5mp^3}{4}}$.

Exercício 44 (PM)**.** Simplifique o radical:

$$\sqrt{\frac{144x^2}{x^2-2xy+y^2}}$$

Exercício 45 (EsPCEx)**.** Efetuar e simplificar: $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab})$

Exercício 46 (CN-Mod)**.** Simplifique a expressão: $\frac{\sqrt[3]{0{,}25}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$

Exercício 47 (PM-Mod)**.** Simplifique: $\sqrt{4050}-\sqrt{512}-\sqrt{648}$

3.6.2 Expoentes Racionais

Exercício 48. Expresse na forma de expoente racional

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

d) $\sqrt{\sqrt{10}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

f) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{2}}$

g) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Exercício 49. Expressa na forma de radical

a) $(-1)^{\frac{1}{3}}$

b) $2^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{2}^{\frac{1}{2}}$

d) $0,25^{\frac{1}{3}}$

e) $0,333\ldots^{-\frac{1}{3}}$

f) $7^{0,25}$

g) $32^{-\frac{3}{10}}$

Exercício 50. Simplifique

a) $32^{\frac{1}{2}}$

b) $81^{\frac{1}{3}}$

c) $27^{-\frac{2}{3}}$

d) 100^0

e) $25^{-0,5}$

Exercício 51 (CN)**.** Calcular o valor da expressão

$$\left[8\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}+0,017^0\right].\frac{1}{0,88\ldots}$$

Exercício 52 (EsPCEx)**.** Resolver a expressão abaixo:

$$5^0-2^3-\sqrt[5]{-32}-(0,16)^{\frac{1}{2}}-(-1)^3$$

Exercício 53 (EsPCEx)**.** Calcular o valor da expressão

$$27^{\frac{2}{3}}+4^{-0,5}+8^{0,33\ldots}$$

Exercício 54 (CN)**.** Resolver

$$\frac{8^{\frac{1}{3}}+0,33\ldots-30^{-1}}{\sqrt{3}.\sqrt[3]{3^{1,5}}}$$

Exercício 55 (CN)**.** Calcular:

$$\sqrt{\frac{2,133\ldots^{-3}}{53+\frac{1}{3}}}$$

Exercício 56 (EsPCEx)**.** O resultado de: $(-8)^{\frac{2}{3}}$, é:

A ( ) 4

B ( ) $-\frac{1}{4}$

C ( ) $\frac{16}{3}$

D ( ) $\frac{64}{3}$

E ( ) n.d.a.

Exercício 57 (EsPCEx)**.** A expressão:

$$\left(-\frac{16}{15}\right)^{-17}.\left(\frac{5}{18}\right)^{-17}:\left(\frac{-8}{27}\right)^{\left(\frac{-50}{3}\right)}$$

é igual a

A ( ) $-\frac{3}{2}$

B ( ) -1

C ( ) $-\frac{5}{3}$

D ( ) $-\frac{4}{9}$

E ( ) n.d.a.

Exercício 58 (EsPCEx)**.** Calcule o valor da expressão abaixo, reduzindo-a à sua forma racional mais simples (fração ordinária):

$$\sqrt{0,01}.\left[\left(\frac{4}{100}\right)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}+\left(\frac{3}{2}\right)^0\right]^{-1}+0,211\ldots$$

4 Expoentes Irracionais e a Função Exponencial

4.1 Exponenciação Real

A teoria desenvolvida até aqui nos permite dizer o que significa a^b desde que $a > 0$ e $b \in \mathbb{Q}$. Nessa seção iremos extender o significado de a^b para quando $b \in \mathbb{R}$.

A definição formal de a^b com $b \in \mathbb{R}$ necessita do conceito de convergência de sequências e será feita no apêndice. No entanto, uma idéia de como essa definição poderia ser feita é dada abaixo:

Exemplo 11. Cálculo de $2^{\sqrt{2}}$: Para esse cálculo, vamos encontrar aproximações de $\sqrt{2}$ por falta e por excesso. Como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, assim $2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$, ou seja $2 < 2^{\sqrt{2}} < 4$. A tabela abaixo continua essa idéia:

O problema prático do método da tabela 2 é o cálculo das potências fracionárias de 2, por exemplo $2^{1.4} = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{128}$, cujo cálculo necessitaria de um algoritmo para calcular raiz quínticas (o algoritmo da raiz enésima NÃO será apresentado aqui) ou de uma calculadora, o que torna a tabela irrelevante.

No entanto, a tabela ilustra o fato de que é possível definir expoentes reais a partir de expoentes racionais e essa é a sua utilidade.

Tabela 2: $2^{\sqrt{2}}$ com aproximação decimal de uma casa

x		y	2^x		2^y
1	$< \sqrt{2} <$	2	2	$< 2^{\sqrt{2}} <$	4
1.4	$< \sqrt{2} <$	1.5	2.63	$< 2^{\sqrt{2}} <$	2.82
1.41	$< \sqrt{2} <$	1.42	2.65	$< 2^{\sqrt{2}} <$	2.67

Assim, $2^{\sqrt{2}} \approx 2.6$

4.2 A Função Exponencial

Definição 5. Função Exponencial

Dado $a \in \mathbb{R}_+$ seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por

$$f(x) = a^x$$

Chamamos f de função exponencial de base a

Com a definição anterior, vamos esboçar o gráfixo de $f(x) = 2^x$ atribuindo valores para x

Tabela 3: Alguns valores de 2^x

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Marcando os pares ordenados nos eixos cartesianos, temos

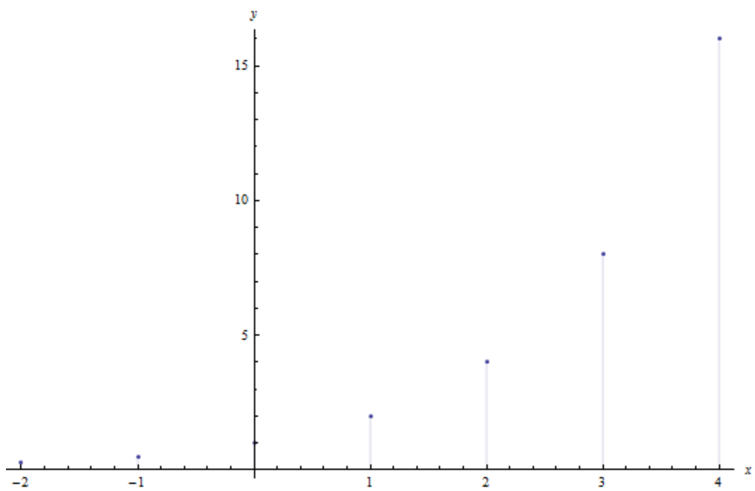

Figura 5: Alguns valores para $f(x) = 2^x$

Unindo os pontos:

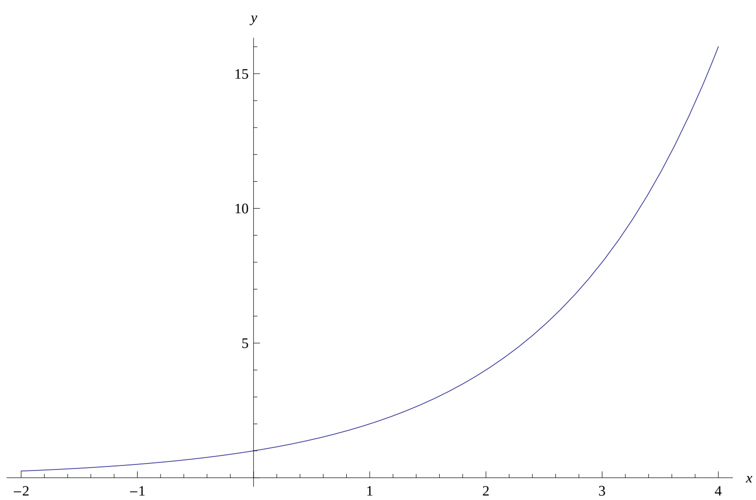

Figura 6: Gráfico de $f(x) = 2^x$

Exemplo 12. Usando a mesma técnica, o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

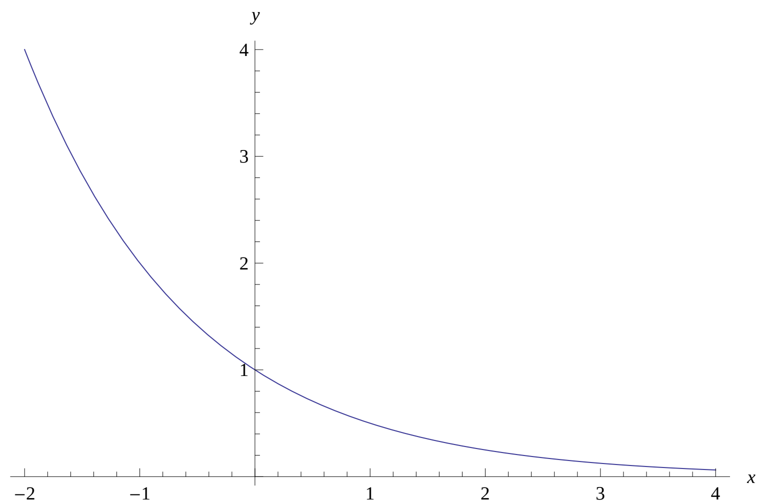

Figura 7: Gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

A função exponencial, conforme vimos nos gráficos anteriores, goza das seguintes propriedades:

Seja f uma função exponencial de base a, então

Propriedade 16. *f é crescente se $a > 1$, é decrescente se $0 < a < 1$ e é constante se $a = 1$*

Propriedade 17. *f é injetora se $a \neq 1$*

Propriedade 18. *f é sobrejetora se $a \neq 1$*

Propriedade 19. *f é bijetora e inversível se $a \neq 1$*

As demonstrações das propriedades estarão no apêndice.

4.3 Equações e Inequações Exponenciais

Equações Exponenciais são equações que apresentam incógnitas no expoente. Uma inequação exponencial é definida de forma análoga.

Exemplo 13. $2^x = 0.5$ é uma equação exponencial enquanto $x^2 = 9$ não é.

Nesse primeiro estudo de equações e inequações exponenciais, reduziremos as bases a um mesmo número e faremos uso das Propriedades 19 (para equações) e 16 (para inequações).

Exemplo 14. Para resolvermos a equação $3^x = 9^4$ escreveremos todas as potências em uma base comum, nesse caso, 3. Assim $3^x = (3^2)^4$ ou seja, $3^x = 3^8$. Pela Propriedade 19, $x = 8$.

Exercício Resolvido 5. Resolva $4^x = 2^6$

[**Solução:** $x = 3$]

Exemplo 15. Vamos ver uma técnica um pouco mais sofisticada. Vamos encontrar as soluções da equação $4^x - 6.2^x + 8 = 0$. O primeiro passo é escrevermos na mesma base. O truque aqui é transformar $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ e assim escrevemos $(2^x)^2 - 6.2^x + 8 = 0$. Se substituirmos $t = 2^x$ teremos $t^2 - 6t + 8 = 0$, que é uma equação do segundo grau cujas raízes são 2 e 4. Assim teremos $t = 2$ ou $t = 4$. Se $t = 2$ então $2^x = 2$, de onde $x = 1$ e se $t = 4$ teremos $2^x = 4$ e consequentemente $x = 2$. Assim as soluções são $x = 1$ ou $x = 2$.

Exemplo 16. A solução de $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0.125$ pode ser encontrada escrevendo $0.125 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Assim $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Da Propriedade 16, temos que $x < 3$ (lembre-se de que a exponencial é decrescente quando a base é menor que um).

4.4 Exercícios

4.4.1 Exercícios Básicos

Exercício 59. Simplifique

1. $2^{\sqrt{2}}.2^{-\sqrt{2}}$
2. $(x^{\Pi})^{\Pi}$
3. $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$
4. $(\sqrt{5}^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$

Exercício 60. Esboce o gráfico das seguintes funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = 2^x + 2$

c) $f(x) = -2^x$

d) $f(x) = 5.2^x$

Exercício 61. Resolva:

a) $2^x = 4$

b) $3^x = 1$

c) $4^x = 16^5$

d) $2^x = \sqrt[8]{64}$

e) $25^x = 5$

f) $2^x = 0.5$

g) $2^x = 0.125$

h) $4^x - 2^x - 2 = 0$

i) $5.2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0$

j) $25^{\sqrt{x}} - 124.5^{\sqrt{x}} = 125$

Exercício 62. Resolva: $4^x + 6^x = 2.9^x$ (Dica: Divida ambos os lados por 9^x)

Exercício 63. Determine o conjunto solução:

1. $2^x > 4$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 256$

3. $0,0001 < 10^x < 0,001$
4. $\sqrt[3]{3}^x \leq \frac{1}{9}$
5. $4^x \geq 8$
6. $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$
7. $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} .4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

Exercício 64. Encontre o conjunto solução de $x^{2x^2-9x+4} < 1$ em $\mathbb{R}_+$. Dica: Considere isoladamente os casos $x = 0$, $0 < x < 1$, $x = 1$ e $x > 1$.

Exercício 65. Resolver em $\mathbb{R}_+$: $x^{(x^2)} > x^{2x}$

4.4.2 Exercícios Avançados

Exercício 66. Prove que existem dois números irracionais a e b tais que $a^b \in \mathbb{Q}$. Dica: Considere a expressão $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

Exercício 67 (PUC-Modificado)**.** Qual é a soma das raízes de $5^{x^2-2x+1} = \frac{5625}{9}$?

Exercício 68 (ITA)**.** Determine o conjunto solução da equação $3^{2x}+5^{2x}-15^x = 0$

Exercício 69. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$, resolva: $a^{2x}-(a+a^2).a^x+a^3 < 0$

Exercício 70 (IME)**.** Resolva o sistema $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^5 \\ x > 0 \end{cases}$