Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Ukrivljenost Bézierove krivulje

Pisni izdelek pri predmetu *Matematično modeliranje*

Jernej Renčelj

14. avgust, 2023

1 Naloga

Napišite program, ki simulira gibanje točke po Bézierjevi krivulji stopnje n. Vzporedno s to animacijo naj program izrisuje ukrivljenost krivulje. Podatki so kontrolne točke in korak parametra.

2 Béziereove krivulje

Béziereove krivulje se imenujejo po francoskem inženirju Pierru Béziereju, ki je deloval v razvojnem inštitutu Renaultove avtomobilske družbe. Želel je razviti postopek, po katerem bi bilo mogoče s spreminjanjem nekaj smiselnih geometrisjko nazornih parametov enostavno oblikovati krivulje za oblikovanje avtomobilskih teles. Bézierovo krivuljo zapišemo kot posebno linearno kombinacijo polinomov in kontrolnih točk. Glavno vlogo pri tem igrajo Bernsteinovi polinomi, ki predstavljajo osnovo Bézierovih krivulj.

2.1 Bernsteinovi polinomi

Bernsteinov polinom je polinom, ki je linearna kombinacija Bernsteinovih baznih polinomov. Ime nosijo po ruskem in sovjetskem matematiku Sergeiu Natanovichu Bernsteinu. Bernstein jih je prvič uporabil pri dokazu Weierstrassovega aproksimacijskega izreka.

Definicija 2.1. *Naj bo $t \in [0,1]$. Potem je i-ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n definiran kot*

$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1},\ i = 0, 1, .., n,$$

kjer je $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Izrek 2.2. *Linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov*

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i^n(t)$$

imenujemo Bernsteinov polinom stopnje n, kjer so α_i Bernsteinovi koeficienti.

Za Bernsteinove polinome, na intervalu [0, 1], veljajo naslednje lastnosti:

- Bernsteinov polinom $B_i^n(t)$ ima natanko en maksimum pri $t = \frac{i}{n}$.
- Bernsteinova polinoma $B_i^n(1-t)$ in $B_n^{n-i}(1-t)$ sta povezana takole

$$B_i^n(t) = B_n^{n-i}(1-t)$$

- Za Bernsteinove polinome velja rekurzivna zveza

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- Odvod Bernsteinovega polinoma je
  - Za $i = 0$ je

$$\frac{d}{dt}B_0^n(t) = -nB_0^{n-1}(t)$$

  - Za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ je

$$\frac{d}{dt}B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

  - Za $i = n$ je

$$\frac{d}{dt}B_n^n(t) = nB_{n-1}^{n-1}(t)$$

- Integral Bernsteinovega polinoma je

$$\int B_i^n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t) + C$$

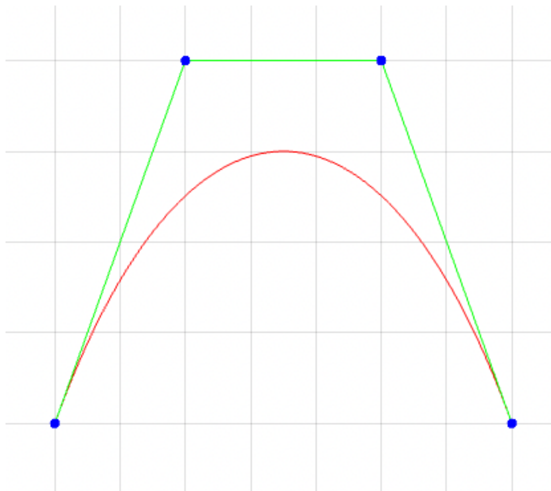
.

2.2 Definicija

Béziereove krivulje so sestavljene iz dveh ali več točk. Te točke določajo nejno veliksot in obliko. Prva in zadnja točka označujeta začetek in konec krivulje. Preostale točke določajo njeno ukrivljenost. Béziereovo krivuljo v parametrični obliki v ravnini ali prostoru definiramo z Bernsteinovimi polinomi. Radijvektor do točke na Béziereovi krivulji označimo z $b(t)$ in je

$$b(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t), \ t \in [0,1] \tag{1}$$

Koeficienti b_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, se imenujejo Béziereove točke in predstavljajo radijvektorje do teh točk. Če povežemo Béziereove točke zaporedoma z daljicami, dobimo Béziereov poligon.



Slika 1: Bézierjeva krivulja določena s kontolnim poligonom

2.3 Odvod Béziereove krivulje

Béziereovo krivuljo 1 odvajamo po parametru t in dobimo

$$b'(t) = -nb_0 B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} nb_i[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] + nb_n B_{n-1}^{n-1}(t) \tag{2}$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$b'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) \tag{3}$$

Odvod Béziereove krivulje je zopet Béziereova krivulja. Njene Béziereove točke dobimo kot razliko zaporednih Béziereovih točk originalne krivulje.

3 Ukrivljenost krivulj

Ukrivljenost krivulje v določeni točki je definirana kot recipročna vrednost radija pritisnjene krožnice. Ukrivljenost krivulje imenujemo tudi fleksijska ukrivljenost. Radij pritisnjene krožnice imenujemo tudi radij ukrivljenosti. Ukrivljenost označimo z grško črko κ (kappa) in je enaka

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Na tem mestu zapišimo še definicijo za predznačeno fleksijsko ukrivljenost.

Definicija 3.1. *Naj bo p regularna ravninska krivulja. Potem je predznačena ukrivljenost (rečemo ji tudi predznačena fleksijska ukrivljenost) v točki $p(t)$ enaka*

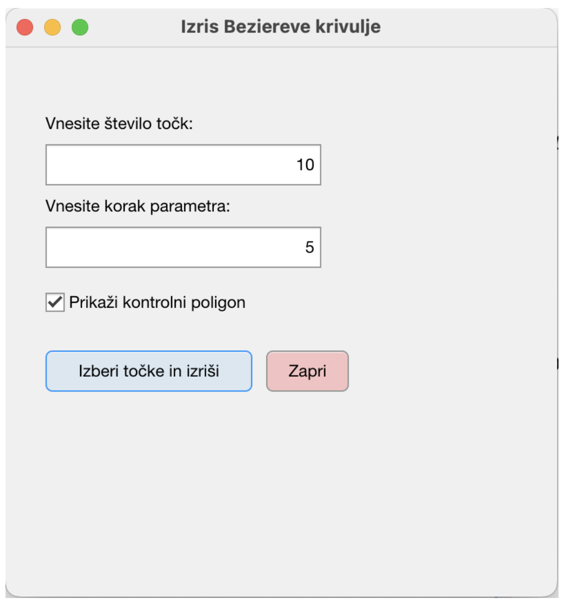
$$\kappa(t) = \frac{p'(t) \times p''(t)}{\|p'(t)\|^3}$$

Pri tem v ravnini $\mathbb{R}^2$ za vektorki produkt velja naslednja definicija.

Definicija 3.2. *Za vektorja $u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je planarni vektorski produkt $\times$ definiran s predpisom $u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1$.*

4 Opis programa

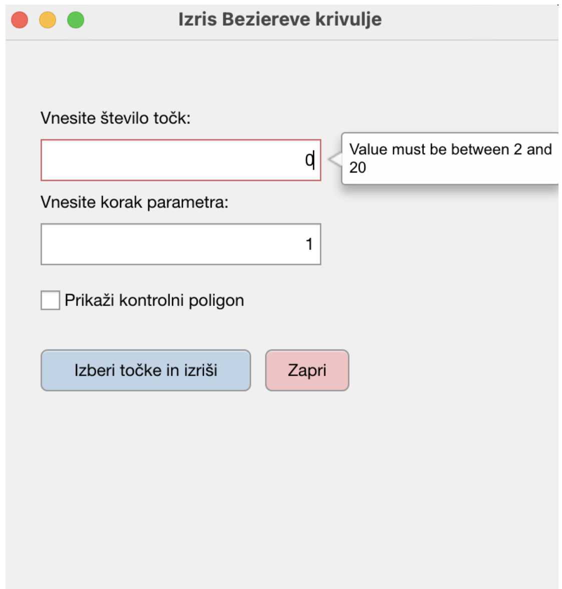
Ko uporabnik zažene program se mu prikaže okno, kjer vpiše število kontrolnih točk Beziereve krivulje, ki jih bo vnesel.



Slika 2: Začetno okno

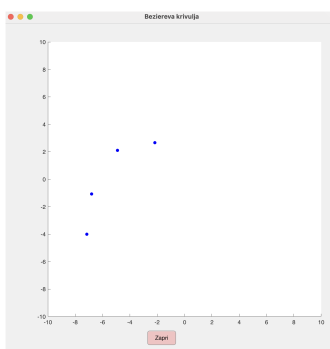
Uporabnik lahko izbere tudi izris kontrolnega poligona.

Če uporabnik ne vnese števila, ali pa vnese premalo kontrolnih točk, ga program opozori.



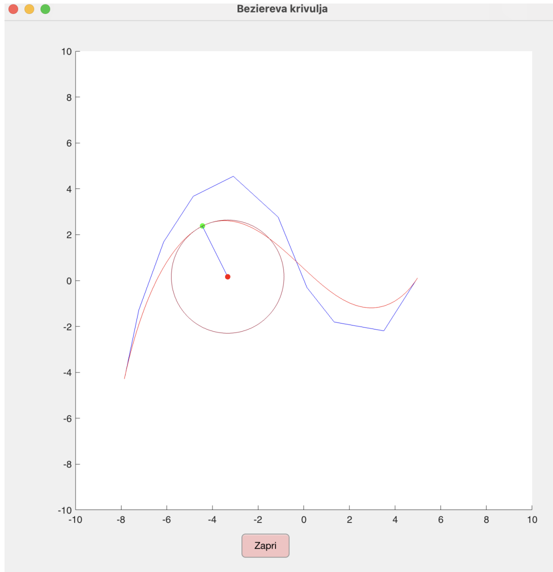
Slika 3: Opozorilo ob napačnem vnosu

Uporabnik izbere kontrolne točke s klikom na okno. Točke, ki jih je izbral se prikažejo kot modra zvezdica.



Slika 4: Kontrolne točke

Po tem, ko uporabnik izbere število točk, ki jih je vpisal se prične izris.



Slika 5: Izris krivulje

Po krivulji se premika zelena točka. Ob tem se prikazuje tudi pritisnjena krožnica v dani točki.

5 Viri

- Bernstein polynomial, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernstein_polynomial` (ogled: 24. julij 2023).
- Plestenjak, B. Razširjen uvod v numerične metode. Ljubljana: DMFA, 2015.
- Žagar, E. Interpolacija s parametričnimi polinomskimi krivuljami. `https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/mod/resource/view.php?id=5202` (ogled: 24. julij 2023).
- Bézier curve, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Bzier_curve` (ogled: 27. julij 2023).
- Petrišič, J. Interpolacija in osnove računalniške grafike. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 1999.