

# Relatório do Trabalho de Conceção e Análise de Algoritmos

Francisco Veiga, 201201604@fe.up.pt

João Cabral, up201304395@fe.up.pt

João Mota, 201303462@fe.up.pt

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

27 de abril 2015

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Problemas a abordar</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Casos de Utilização</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Formalização do problema</b>	<b>3</b>
4.1	1º problema/fase . . . . .	3
4.2	2º problema/fase . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Soluções implementadas</b>	<b>5</b>
5.1	1º Problema/Fase . . . . .	5
5.1.1	Algoritmo de Dijkstra . . . . .	5
5.1.2	Algoritmo de Prim . . . . .	6
5.2	2º Problema/Fase . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Análise de complexidade</b>	<b>7</b>
6.1	Grafo . . . . .	7
6.1.1	Inserção de Vértices . . . . .	7
6.1.2	Inserção de Arestas . . . . .	7
6.1.3	Remoção de Vértices . . . . .	7
6.2	Algoritmo de Dijkstra . . . . .	7
6.3	Algoritmo de Prim . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Análise Empírica</b>	<b>9</b>
7.1	Algoritmo de Dijkstra . . . . .	10
7.2	Algoritmo de Prim . . . . .	11
<b>8</b>	<b>Considerações sobre a realização do trabalho</b>	<b>12</b>
8.1	Principais dificuldades sentidas . . . . .	12
8.2	Contribuição dos elementos . . . . .	12

# 1 Introdução

No contexto da unidade curricular de Conceção e Análise de Algoritmos, foi solicitada a resolução de um problema relacionado com a distribuição de uma rede de fibra ótica pela rede habitacional de um determinado agregado populacional.

## 2 Problemas a abordar

Numa primeira fase, é solicitada uma aplicação que receba como dados de entrada um mapa do referido agregado populacional e produza como saída, sob a forma de um grafo, a representação gráfica de uma distribuição ideal da rede de fibra ótica, minimizando o comprimento das ligações utilizadas. Estabelece-se ainda, como restrição adicional, que cada uma das casas cobertas não pode situar-se fora de uma determinada área a ser definida por uma distância máxima à central de onde parte a rede de fibra ótica.

Numa segunda fase, é solicitado que a aplicação alargue o raio de ação de cobertura da rede de fibra ótica, procurando abranger uma maior área, sendo contudo necessário que a aplicação seja capaz de detetar áreas onde a cobertura providenciada por uma única central se revele insuficiente e seja capaz de indicar a necessidade de existirem novas centrais de distribuição da rede.

## 3 Casos de Utilização

Está implementada a funcionalidade que, abstraindo uma zona a cobrir com rede de fibra ótica como um grafo onde os nós são casas e as arestas as ligações entre elas, permite calcular qual a distribuição ótima de fibra a utilizar para minimizar a quantidade de cablagem necessária à cobertura completa de uma zona, bem como ao estabelecimento de um limite máximo para esse alcance. É também possível identificar as zonas para as quais será necessário instalar centrais adicionais, por não existir ligação direta com outras zonas.

## 4 Formalização do problema

### 4.1 1º problema/fase

#### Inputs

- Um grafo  $G = (V, E)$  conexo, onde  $V$  é o conjunto das casas e  $E$  o conjunto das suas ligações e para cada aresta  $(u, v) \in E$  temos  $w(u, v)$  representando a distância entre as arestas  $u$  e  $v$  e  $d(p)$  como sendo a distância de um caminho  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  [1, p. 624];
- Uma distancia  $l : l > 0$ ;
- Um vértice  $s : s \in V$ .

#### Outputs

- Um grafo  $G_T = (V_T, E_T)$  tal que se verifique a condição [1, p. 643]:

$$\forall v \in V (\delta(s, v) \leq l \leftrightarrow v \in V_T)$$

$$\delta(s, v) = \begin{cases} \min\{d(p) : s \rightsquigarrow^p v\} & \text{se existe caminho entre s e v} \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

#### Função Objetivo

Seja

$$x(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta}(u, v) \in E_T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo é [2]

$$\min \sum_{(u,v) \in E} w(u, v) x(u, v)$$

com as restrições

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v) \in E} x(u, v) &= |V_T| - 1 \\ \sum_{(u,v) \in (S,S)} x(u, v) &\leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V_T \end{aligned}$$

## 4.2 2º problema/fase

### Inputs

- Um grafo  $G = (V, E)$ , desconexo ou não, onde  $V$  é o conjunto das casas e  $E$  o conjunto das suas ligações e para cada aresta  $(u, v) \in E$  temos  $w(u, v)$  representando a distância entre as arestas  $u$  e  $v$  e  $d(p)$  como sendo a distância de um caminho  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  [1, p. 624];

### Outputs

- Um grafo  $G_T = (V_T, E_T)$ ;
- Um conjunto de grafos  $D \subseteq G_T = \{d(V_D, E_D) : \forall d, e \in D (\nexists v \in V_T (v \in d \wedge v \in e)) \wedge \nexists d, e \in D (\exists (u, v) \in E_T (u \in d \wedge v \in e))\}$
- Um conjunto  $S = \{s : \exists! d \in D (s \in d)\}$ .

### Função Objetivo

Seja

$$x(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } (u, v) \in E_T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo é[2]

$$\min \sum_{(u,v) \in E} w(u, v) x(u, v)$$

com as restrições

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v) \in E} x(u, v) &= |V_T| - 1 \\ \sum_{(u,v) \in (S,S)} x(u, v) &\leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V_T \end{aligned}$$

## 5 Soluções implementadas

### 5.1 1º Problema/Fase

Para a resolução deste problema, recorreu-se a dois algoritmos conhecidos que operam sobre grafos: o algoritmo de *Dijkstra* para cálculo das distâncias de todos os nós a uma determinada fonte e o algoritmo de *Prim* para cálculo da árvore de expansão mínima do grafo. Para a implementação da fila de prioridades recorreu-se ao *Heap de Fibonacci* da biblioteca *Boost*.

#### 5.1.1 Algoritmo de Dijkstra

```
1: procedure DIJKSTRA(fonte, limite, grafo)
2:    $vertices \leftarrow grafo.vertices$ 
3:   for  $Q \in \text{vértices}$  do
4:      $Q.dist \leftarrow \infty$ 
5:      $Q.path \leftarrow NULL$ 
6:   end for
7:    $fonte \leftarrow 0$ 
8:    $FH.push(fonte)$ 
9:   while  $FH \neq \emptyset$  do
10:     $v \leftarrow FH.pop()$ 
11:    for  $a \in v.adjacencias$  do
12:      if  $v.dist + w < a.dist$  then
13:         $a.dist \leftarrow v.dist + w$ 
14:         $a.path \leftarrow v$ 
15:        if  $a \notin FH$  then
16:           $FH.push(a)$ 
17:        else
18:           $FH.decreaseKey()$ 
19:        end if
20:      end if
21:    end for
22:  end while
23: end procedure
24: procedure PODAR_GRAFO(grafo, limite)
25:   for  $v \in grafo.vertices$  do
26:     if  $v.dist > limite$  then
27:        $grafo.removeVertice(v)$ 
28:     end if
29:   end for
```

30: **end procedure**

O algoritmo de *Dijkstra* foi artilhado com a possibilidade de remover os nós cuja distância à fonte exceda um determinado limite.

### 5.1.2 Algoritmo de Prim

```
1: procedure PRIM(grafo)
2:   novoGrafo  $\leftarrow \emptyset$ 
3:   vertices  $\leftarrow$  grafo.vertices
4:   for Q  $\in$  vértices do
5:     Q.key  $\leftarrow \infty$ 
6:     Q.path  $\leftarrow NULL$ 
7:     Q.visited  $\leftarrow false$ 
8:   end for
9:   FH.enqueue(vertices)
10:  while FH  $\neq \emptyset$  do
11:    v  $\leftarrow$  FH.pop()
12:    novoGrafo  $\leftarrow$  path(v, v.path)
13:    v.visited  $\leftarrow true$ 
14:    for a  $\in$  v.adj do
15:      if a.key  $>$  weight(v, a) AND d.visited = false then
16:        a.key  $\leftarrow$  weight(v, a);
17:        a.path  $\leftarrow$  v
18:        a.decreaseKey()
19:      end if
20:    end for
21:  end while
22: end procedure
```

## 5.2 2º Problema/Fase

Para resolver este problema, torna-se necessário identificar conjuntos de subgrafos desconexos. O algoritmo de *Prim* já identifica a árvore de expansão mínima de cada subgrafo desconexo, mas não efetua a identificação dos subgrafos desconexos em si mesmos. Tornou-se portanto necessário adaptar levemente o dito algoritmo. Em concreto, de cada vez que um vértice é removido da fila e não possui um antecessor, o grafo construído até agora é guardado numa fila e começa a ser construído um novo grafo. Fica garantido o facto de não serem abandonados vértices do grafo anterior porque os vértices do próximo grafo são inicializados com uma chave infinita, só sendo retirados da fila quando todo o restante grafo já foi percorrido.

## 6 Análise de complexidade

### 6.1 Grafo<sup>1</sup>

#### 6.1.1 Inserção de Vértices

No contexto da nossa aplicação optamos por utilizar uma implementação *naïve* que se limita a acrescentar o vértice a um vetor de vértices, sem verificar repetição de elementos. Tem uma complexidade  $O(1)$ .

#### 6.1.2 Inserção de Arestas

É necessário percorrer o conjunto de vértices para verificar a existência do destino e da fonte da aresta. Tem portanto uma complexidade  $O(V)$ .

#### 6.1.3 Remoção de Vértices

É necessário percorrer o conjunto de vértices para encontrar o vértice pretendido, e depois novamente para encontrar e apagar todas as arestas que apontam para este vértice. Tem por isso uma complexidade  $O(V^2 + E)$ .

### 6.2 Algoritmo de Dijkstra

Sendo  $V$  o número de vértices a analisar e  $E$  o número de arestas, o algoritmo percorre primeiramente toda a lista de vértices para inicializar valores. Esta operação tem complexidade  $V$ . Acrescenta-se, com complexidade  $O(1)$ , a fonte à fila de prioridade. De seguida, percorre-se a fila de prioridade, recorrendo a função de extração do menor elemento da fila. Num *heap de Fibonacci* esta operação corre em tempo  $\log(V)$ . Obtém-se assim para este ciclo uma complexidade  $V\log(V)$ . Dentro deste ciclo, todas as arestas do grafo acabam por ser analisadas, sendo, quando encontrada uma aresta que constitua um caminho mais favorável, chamada a função `DecreaseKey` do *heap de Fibonacci*, que corre em tempo constante. Obtém-se assim uma complexidade linear  $O(E)$ .

Por último e como característica particular do problema em causa, torna-se necessário percorrer novamente a lista de vértices no sentido de remover todos aqueles cuja distância à fonte seja excessiva. Dentro deste ciclo pode ou não ser chamada a função `removeVertex`, que, na nossa implementação do grafo, tem complexidade  $O(V^2 + E)$ , ficando este ciclo com complexidade

---

<sup>1</sup>Analisam-se exclusivamente as operações do grafo utilizadas no programa desenvolvido.



$O(V^3 + VE)$ . Tem-se assim uma complexidade total  $O(V + E + V\log(V) + V(V^2 + E)) = O(E + V(V\log V + V^2 + E))$ .

### 6.3 Algoritmo de Prim

Este algoritmo tem complexidade semelhante ao algoritmo de Dijkstra no ciclo principal. Contudo, de cada vez que um vértice é retirado da fila de prioridade, o mesmo tem que ser adicionado ao grafo resultante (ou um novo grafo a ser gerado, no caso de se tratar do primeiro elemento de um novo sub grafo) e uma aresta tem que ser adicionada de e para o seu predecessor. Esta operação pode ser feita em tempo linear  $O(V)$ . Ficamos assim com uma complexidade  $O(E + V(V + \log V)) = O(E + V^2)$ .

## 7 Análise Empírica

Para geração dos grafos a utilizar na análise empírica da performance dos algoritmos, foi utilizado o modelo de *Erdős-Rényi*. Este modelo considera o grafo aleatório  $G(n, p)$  como sendo um grafo de  $n$  nós em que cada par de nós único tem uma probabilidade  $p$  de ser ligado por uma aresta, também ela de peso aleatório. Os algoritmos até agora descritos foram corridos sobre grafos gerados segundo este modelo. Num primeiro momento, o número de nós foi fixado em 200 e fez-se variar a conectividade dos grafos. Posteriormente, fixou-se a probabilidade de cada aresta e fez-se variar o número de arestas. Para que a aleatoriedade associada ao modelo usado tivesse impacto mínimo na análise, efetuou-se cada teste 10 vezes, calculando depois a média dos tempos necessários. Os gráficos abaixo apresentam um sumário desses resultados.

## 7.1 Algoritmo de Dijkstra

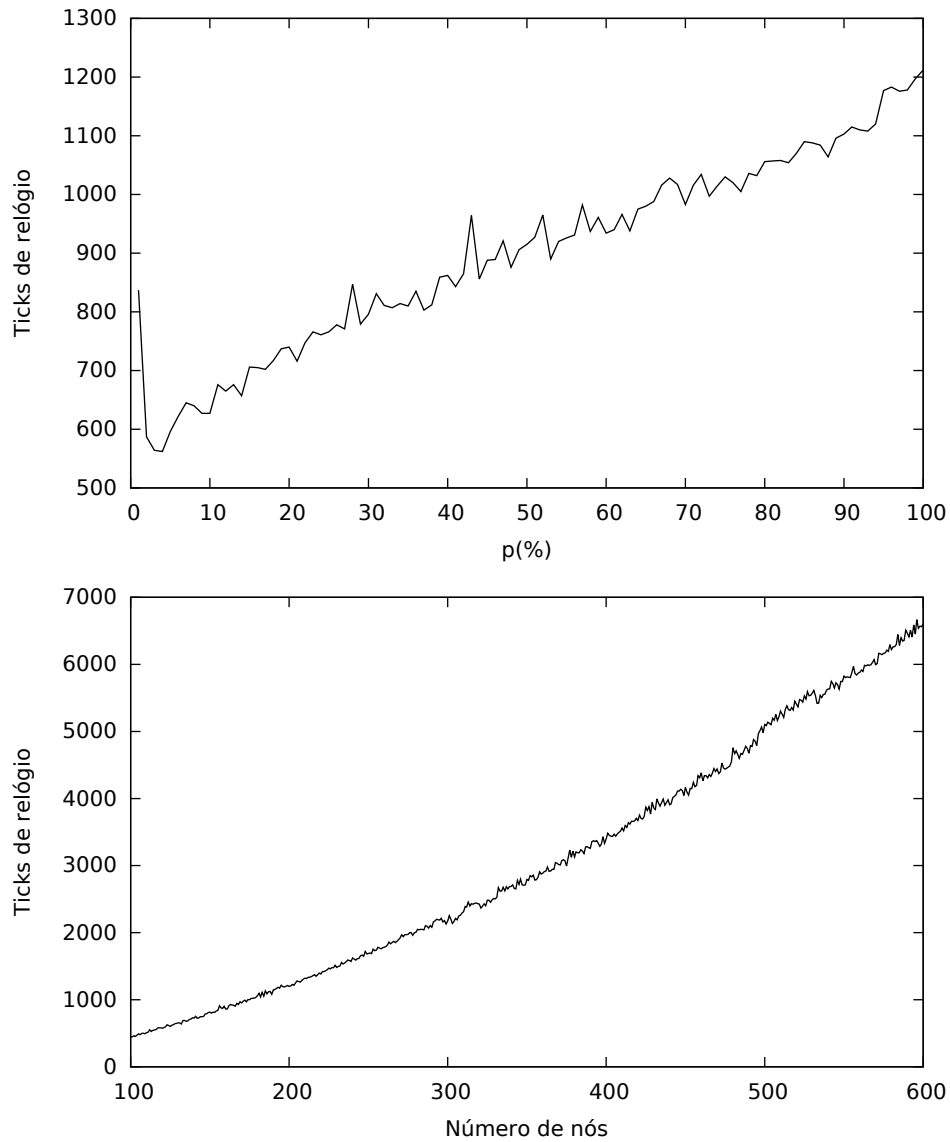


Figura 1: Variação da performance do algoritmo de Dijkstra com o número de arestas e vértices.

Contrariamente ao que se poderia esperar, o algoritmo parece aumentar o seu tempo de execução de forma aproximadamente linear, quer com o número de arestas, quer com o número de vértices.

## 7.2 Algoritmo de Prim

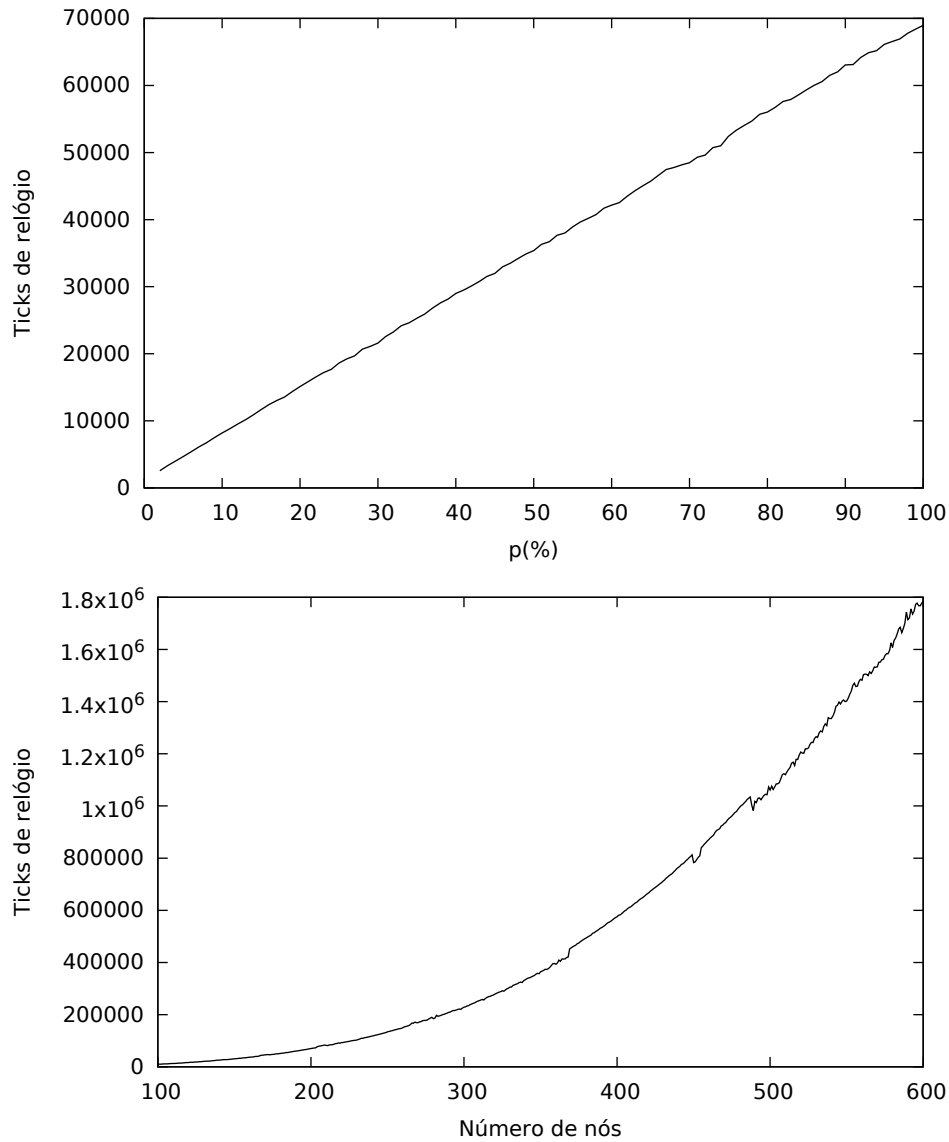


Figura 2: Variação da performance do algoritmo de Prim com o número de arestas e vértices.

Os resultados confirmam a análise de complexidade efetuada para o algoritmo de Prim implementado. O tempo de execução aumenta linearmente com o número de arestas e quadraticamente com o número de vértices.

## 8 Considerações sobre a realização do trabalho

### 8.1 Principais dificuldades sentidas

Sentimos dificuldade em escrever uma especificação detalhada do trabalho, devido a certos aspetos do enunciado que não consideramos estarem suficientemente claros.

Além disso, foi-nos difícil concluir a parte do trabalho respeitante ao *OpenStreetMap*, visto que o programa providenciado para interpretação não funcionou corretamente até uma data muito próxima da entrega.

### 8.2 Contribuição dos elementos

Todos os membros contribuíram para o trabalho, desenvolvendo funcionalidades do programa, bem como colaborando na formalização matemática do problema, na implementação de algoritmos, na descrição da solução e na análise empírica dos tempos de execução.

**Francisco Veiga** Implementou o mecanismo de leitura de grafos a partir de um ficheiro de texto, trabalhou na conceção e compreensão dos algoritmos a usar e nos mecanismos de teste empírico da performance dos mesmos;

**João Cabral** Trabalhou na formalização matemática do problema, no algoritmo de Prim e na realização dos testes de performance empíricos e interface com o visualizador de grafos, bem como na elaboração do relatório;

**João Mota** Implementou o algoritmo de Dijkstra adaptado para remover os vértices que se encontrem fora de um raio específico e a interface.

## Referências

- [1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, third edition, 2009.
- [2] Dorit S. Hochbaum. Network flows and graphs - lecture 25. Disponível em <http://www.ieor.berkeley.edu/~ieor266/Lecture25.pdf> (2015/03/26).