SAOB10/2023 — Trabalho 1 — Turma N1

Prof. Frega

2023-04-10

1 Questão 1

Seja o PPL primal

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrrr}
\max z = & + & 5 & x_1 & + & 12 & x_2 & + & 4 & x_3 & + & 11 & x_4 & + & 5 & x_5 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & + & 1 & x_4 & + & 1 & x_5 & \geqslant & 700 \\
 & + & 3 & x_1 & & & & & & & + & 1 & x_4 & + & 2 & x_5 & = & 900 \\
 & + & 3 & x_1 & & & & + & 1 & x_3 & + & 1 & x_4 & + & 2 & x_5 & \geqslant & 600 \\
 & + & 1 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 1 & x_4 & & & & \leqslant & 800 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & x_1 & \geqslant 0 & & x_2 & \geqslant 0 & & x_3 & \geqslant 0 & & x_4 & \geqslant 0 & & x_5 & \geqslant 0 & &
\end{array}
$$

formule o seu dual.

1.1 Solução

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
\min z = & + & 700 & y_1 & + & 900 & y_2 & + & 600 & y_3 & + & 800 & y_4 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & + & 3 & y_2 & + & 3 & y_3 & + & 1 & y_4 & \geqslant & 5 \\
 & & & & & & & & & & + & 2 & y_4 & \geqslant & 12 \\
 & & & & & & & + & 1 & y_3 & + & 3 & y_4 & \geqslant & 4 \\
 & + & 1 & y_1 & + & 1 & y_2 & + & 1 & y_3 & + & 1 & y_4 & \geqslant & 11 \\
 & + & 1 & y_1 & + & 2 & y_2 & + & 2 & y_3 & & & & \geqslant & 5 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & y_1 & \leqslant 0 & & y_2 & \in \mathbb{R} & & y_3 & \leqslant 0 & & y_4 & \geqslant 0 & &
\end{array}
$$

2 Questão 2

Resolva o sistema de equações

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
+ & 2 & x_1 & + & 5 & x_2 & + & 4 & x_3 & + & 5 & x_4 & + & 7 & x_5 & + & 1 & x_6 & = & 82 \\
+ & 4 & x_1 & + & 7 & x_2 & + & 8 & x_3 & + & 3 & x_4 & + & 8 & x_5 & + & 2 & x_6 & = & 4 \\
+ & 9 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 4 & x_3 & + & 2 & x_4 & + & 4 & x_5 & + & 7 & x_6 & = & 5 \\
+ & 4 & x_1 & + & 3 & x_2 & & & & + & 3 & x_4 & + & 9 & x_5 & + & 1 & x_6 & = & 51 \\
+ & 8 & x_1 & + & 9 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 5 & x_4 & + & 2 & x_5 & + & 9 & x_6 & = & 28 \\
+ & 6 & x_1 & + & 5 & x_2 & + & 1 & x_3 & + & 7 & x_4 & + & 2 & x_5 & & & & = & 43
\end{array}
$$

2.1 Solução

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 9 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 82 \\ 4 \\ 5 \\ 51 \\ 28 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,6634351711456 \\ -11,4442849307998 \\ -0,83179017324257 \\ 22,7691873407104 \\ 5,82475723457109 \\ 11,2562183437107 \end{bmatrix}$$

3 Agri–Pro

A Agri–Pro é uma empresa que vende insumos para fazendeiros. Um dos produtos que ela comercializa é a mistura de ração, onde cada fazendeiro estipula a percentagem de milho, farelo e minerais que deseja na mistura. A Agri–Pro prefere receber os nutrientes em estado bruto e mistura-los imediatamente, possuindo quatro diferentes pré-misturas cuja composição e custo estão na tabela seguinte:

Nutriente	Milho	Farelo	Minerais	Custo.por.Kg
Mistura 1	30%	10%	10%	0,25
Mistura 2	5%	30%	10%	0,30
Mistura 3	20%	15%	20%	0,32
Mistura 4	10%	10%	30%	0,15

Um determinado fazendeiro necessita de 8.000Kg de ração, contendo pelo menos 20% de milho, 15% de farelo e 15% de minerais. Como a Agri–Pro pode atender a esse pedido montando um mix de suas pré-misturas com o menor custo possível? Formule o problema, resolva-o à otimalidade e descreva a solução gerencial que dará o melhor resultado para uma redução do custo de produção.

3.1 Solução

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
\min z = & + & 0,25 & x_1 & + & 0,3 & x_2 & + & 0,32 & x_3 & + & 0,15 & x_4 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & + & 0,3 & x_1 & + & 0,05 & x_2 & + & 0,2 & x_3 & + & 0,1 & x_4 & \geqslant & 1600 \\
 & + & 0,1 & x_1 & + & 0,3 & x_2 & + & 0,15 & x_3 & + & 0,1 & x_4 & \geqslant & 1200 \\
 & + & 0,1 & x_1 & + & 0,1 & x_2 & + & 0,2 & x_3 & + & 0,3 & x_4 & \geqslant & 1200 \\
 & + & 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & + & 1 & x_3 & + & 1 & x_4 & = & 8000 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & x_1 & \geqslant 0 & & x_2 & \geqslant 0 & & x_3 & \geqslant 0 & & x_4 & \geqslant 0 & &
\end{array}$$

```
## $b
##   x1   x2   x3   x4
## 0,25 0,30 0,32 0,15
##
## $A
##      x1   x2   x3  x4
## R1 0,3 0,05 0,20 0,1
## R2 0,1 0,30 0,15 0,1
## R3 0,1 0,10 0,20 0,3
## R4 1,0 1,00 1,00 1,0
##
## $c
##   R1   R2   R3   R4
## 1600 1200 1200 8000
```

```
##
## $dir
## [1] ">=" ">=" ">=" "="
##
## $mvars
##    Final.Value Reduced.Cost Objective.Coeff Allow.Increase Allow.Decrease
## x1        3600            0            0,25      0,1355556            Inf
## x2        1600            0            0,30      0,3050000            Inf
## x3        1600            0            0,32            Inf        0,07625
## x4        1200            0            0,15      0,2150000            Inf
##
## $mconstraints
##    Final.Value Shadow.Price RH.Side Allow.Increase Allow.Decrease
## R1        1600        1,720    1600       150,0000       100,0000
## R2        1200        2,400    1200       120,0000        80,0000
## R3        1200        1,220    1200       400,0000       100,0000
## R4        8000       -0,628    8000       190,4762       324,3243
##
## $vtype
## [1] "real" "real" "real" "real"
##
## $bounds.lower
## [1] 0 0 0 0
##
## $bounds.upper
## [1] Inf Inf Inf Inf
##
## $FO
## [1] 2072
##
## $solution
##   x1   x2   x3   x4
## 3600 1600 1600 1200
```

A única restrição que tem preço sombra negativa é a do peso total, ao relaxá-la tem-se

```
## $b
##   x1   x2   x3   x4
## 0,25 0,30 0,32 0,15
##
## $A
##     x1   x2   x3  x4
## R1 0,3 0,05 0,20 0,1
## R2 0,1 0,30 0,15 0,1
## R3 0,1 0,10 0,20 0,3
## R4 1,0 1,00 1,00 1,0
##
## $c
##   R1   R2   R3   R4
## 1600 1200 1200 8000
##
## $dir
## [1] ">=" ">=" ">=" ">="
##
## $mvars
```

```
##    Final.Value Reduced.Cost Objective.Coeff Allow.Increase Allow.Decrease
## x1    4380,952    0,0000000            0,25      0,0200000    0,137500000
## x2    1904,762    0,0000000            0,30      0,0250000    0,237500000
## x3       0,000    0,0747619            0,32            Inf    0,074761905
## x4    1904,762    0,0000000            0,15      0,1697297    0,005882353
##
## $mconstraints
##    Final.Value Shadow.Price RH.Side Allow.Increase Allow.Decrease
## R1    1600,000   0,52380952    1600           2000       100,0000
## R2    1200,000   0,90476190    1200           1600        80,0000
## R3    1200,000   0,02380952    1200           2000       100,0000
## R4    8190,476   0,00000000    8000            Inf      -190,4762
##
## $vtype
## [1] "real" "real" "real" "real"
##
## $bounds.lower
## [1] 0 0 0 0
##
## $bounds.upper
## [1] Inf Inf Inf Inf
##
## $FO
## [1] 1952,381
##
## $solution
##       x1       x2       x3       x4
## 4380,952 1904,762    0,000 1904,762
```

o que resulta em uma economia de

```
## [1] 119,619
```

4 Navio de carga

Um pequeno navio tem dois compartimentos de carga: um dianteiro e um à popa. O compartimento de carga de proa tem uma capacidade de peso de 70.000 Kg e uma capacidade de volume de 200 metros cúbicos. 0 compartimento à popa tem uma capacidade de peso de 90.000 Kg e uma capacidade de volume de 150 metros cúbicos. Por uma questão de balanceamento de carga, a diferença de carga entre a popa e a proa (ou vice-versa) não pode exceder 8.000 Kg. O dono do navio foi contratado para levar cargas de carne de boi empacotada e grão. O peso total da carne de boi disponível é 85.000 Kg; o peso total do grão disponível é 100.000 Kg. O volume por massa da carne de boi é 0,002 metro cúbico por quilo, e o volume por massa do grão é 0,001 metro cúbico por quilo. O lucro para transportar carne de boi é de R$0,35 por quilo, e o lucro para transportar grão é de R$0,12 por quilo. O dono do navio é livre para aceitar toda ou parte da carga disponível mas, por uma questão de política pessoal, ele deseja atender aos dois clientes e, portanto, para não desgostar um ou outro, ele vai limitar a diferença de peso entre a carne e o grão transportados (ou vice-versa) a 10.000 Kg; ele quer saber quantos Kg de carne e quantos Kg de grão deve transportar, bem como sua distribuição no navio, a fim de maximizar o seu lucro. Formule o PPL, resolva-o à otimalidade explicitando o lucro obtido com a operação.

4.1 Solução

```
## $b
##   x1   x2   x3   x4
## 0,35 0,35 0,12 0,12
```

$$
\begin{array}{lrrlrrlrrlrrlrr}
\max z = & + & 0,35 & x_1 & + & 0,35 & x_2 & + & 0,12 & x_3 & + & 0,12 & x_4 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & + & 1 & x_1 & & & & + & 1 & x_3 & & & & \leqslant & 70000 \\
 & & & & + & 1 & x_2 & & & & + & 1 & x_4 & \leqslant & 90000 \\
 & + & 0,002 & x_1 & & & & + & 0,001 & x_3 & & & & \leqslant & 200 \\
 & & & & + & 0,002 & x_2 & & & & + & 0,001 & x_4 & \leqslant & 150 \\
 & + & 1 & x_1 & - & 1 & x_2 & + & 1 & x_3 & - & 1 & x_4 & \leqslant & 8000 \\
 & - & 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & - & 1 & x_3 & + & 1 & x_4 & \leqslant & 8000 \\
 & + & 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & & & & & & & \leqslant & 85000 \\
 & & & & & & & + & 1 & x_3 & + & 1 & x_4 & \leqslant & 100000 \\
 & + & 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & - & 1 & x_3 & - & 1 & x_4 & \leqslant & 10000 \\
 & - & 1 & x_1 & - & 1 & x_2 & + & 1 & x_3 & + & 1 & x_4 & \leqslant & 10000 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & x_1 & \geqslant 0 & & x_2 & \geqslant 0 & & x_3 & \geqslant 0 & & x_4 & \geqslant 0 & &
\end{array}
$$

```
##
## $A
##         x1     x2     x3     x4
## R1   1,000  0,000  1,000  0,000
## R2   0,000  1,000  0,000  1,000
## R3   0,002  0,000  0,001  0,000
## R4   0,000  0,002  0,000  0,001
## R5   1,000 -1,000  1,000 -1,000
## R6  -1,000  1,000 -1,000  1,000
## R7   1,000  1,000  0,000  0,000
## R8   0,000  0,000  1,000  1,000
## R9   1,000  1,000 -1,000 -1,000
## R10 -1,000 -1,000  1,000  1,000
##
## $c
##     R1     R2     R3     R4     R5     R6     R7     R8     R9    R10
##  70000  90000    200    150   8000   8000  85000 100000  10000  10000
##
## $dir
##  [1] "<=" "<=" "<=" "<=" "<=" "<=" "<=" "<=" "<=" "<="
##
## $mvars
##    Final.Value Reduced.Cost Objective.Coeff Allow.Increase Allow.Decrease
## x1       70000            0            0,35            Inf   0,000000e+00
## x2        9000            0            0,35   0,000000e+00   2,300000e-01
## x3           0            0            0,12  -2,775558e-17            Inf
## x4       69000            0            0,12   2,300000e-01   2,775558e-17
##
## $mconstraints
##     Final.Value Shadow.Price RH.Side Allow.Increase Allow.Decrease
## R1        70000        0,470   70000           6000          69000
## R2        78000        0,000   90000            Inf          12000
## R3          140        0,000     200            Inf             60
## R4           87        0,000     150            Inf             63
## R5        -8000        0,000    8000            Inf          16000
## R6         8000        0,235    8000          12000          16000
## R7        79000        0,000   85000            Inf           6000
## R8        69000        0,000  100000            Inf          31000
```

```
## R9        10000        0,115   10000          12000          18000
## R10      -10000        0,000   10000            Inf          20000
##
## $vtype
## [1] "real" "real" "real" "real"
##
## $bounds.lower
## [1] 0 0 0 0
##
## $bounds.upper
## [1] Inf Inf Inf Inf
##
## $FO
## [1] 35930
##
## $solution
##    x1    x2    x3    x4
## 70000  9000     0 69000
```

5 Pregos, porcas e parafusos

Uma fábrica produz porcas, parafusos e pregos, podendo usar dois métodos distintos de fabricação, não simultaneamente. O primeiro produz 3.000 pregos, 2.000 parafusos e 2.500 porcas por hora. O segundo produz 4.000 parafusos e 2.000 pregos por hora, mas nenhuma porca. A indústria tem uma encomenda de 12.000 porcas, 16.000 parafusos e 15.000 pregos. Formule um PPL e resolva à otimalidade, determinando qual a programação de produção que produz os materiais de forma mais rápida.

5.1 Solução

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min z = & + & 1 & x_1 & + & 1 & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & \\
 & + & 3000 & x_1 & + & 2000 & x_2 & \geqslant & 15000 \\
 & + & 2000 & x_1 & + & 4000 & x_2 & \geqslant & 16000 \\
 & + & 2500 & x_1 & & & & \geqslant & 12000 \\
 & & & & & & & & \\
 & & x_1 & \geqslant 0 & & x_2 & \geqslant 0 & &
\end{array}
$$

```
## $b
## x1 x2
##  1  1
##
## $A
##      x1   x2
## R1 3000 2000
## R2 2000 4000
## R3 2500    0
##
## $c
##    R1    R2    R3
## 15000 16000 12000
##
## $dir
## [1] ">=" ">=" ">="
```

```
##
## $mvars
##    Final.Value Reduced.Cost Objective.Coeff Allow.Increase Allow.Decrease
## x1         4,8            0               1            Inf            0,5
## x2         1,6            0               1              1            1,0
##
## $mconstraints
##    Final.Value Shadow.Price RH.Side Allow.Increase Allow.Decrease
## R1       17600      0,00000   15000            Inf          -2600
## R2       16000      0,00025   16000            Inf           5200
## R3       12000      0,00020   12000           8000           3250
##
## $vtype
## [1] "real" "real"
##
## $bounds.lower
## [1] 0 0
##
## $bounds.upper
## [1] Inf Inf
##
## $FO
## [1] 6,4
##
## $solution
##  x1  x2
## 4,8 1,6
```

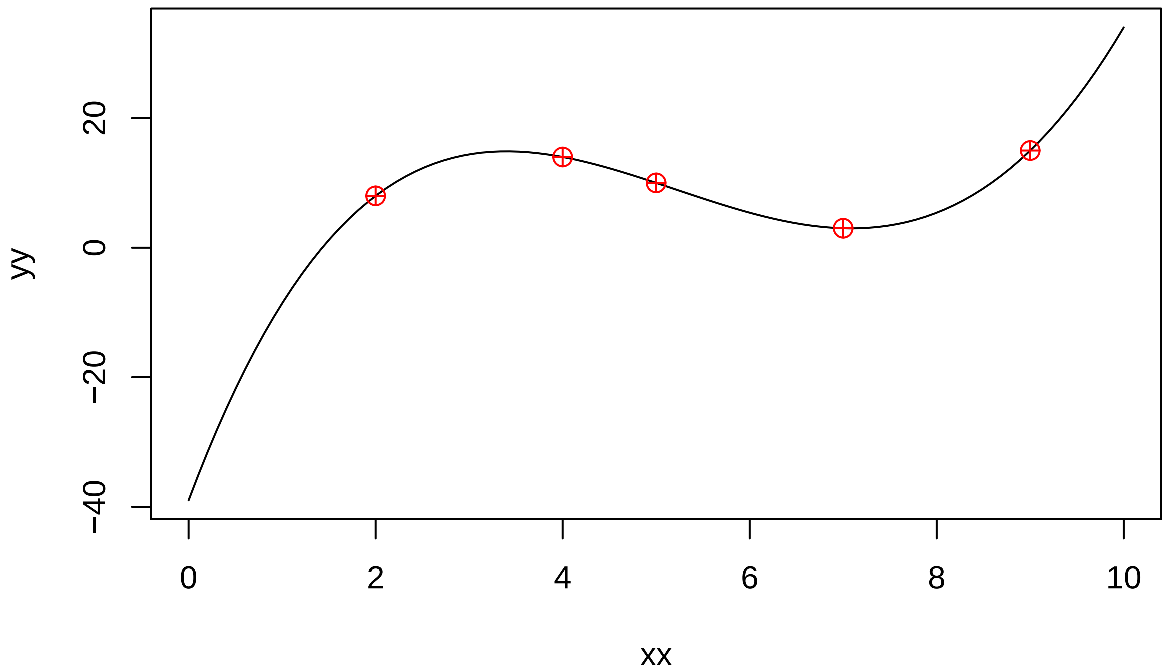
6 Pontos

Sabe-se que uma curva passa pelos pontos

x	y
2	8
4	14
5	10
7	3
9	15

Determine os coeficientes do polinômio que define essa curva.

```
##                                                        x
##  -0,008333333   0,650000000  -8,791666667  38,550000000 -39,000000000
```



yy
20
0
−20
−40
0
2
4
6
8
10
xx